

ICMSC-USP  
PÓS-GRADUAÇÃO



I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

EQUIVALÊNCIA DOS CONCEITOS DE ORIENTAÇÃO EM VARIEDADES E GRAU DE APLICAÇÕES DOS PONTOS DE VISTA TOPOLÓGICO E DIFERENCIÁVEL

*Josẽ Luis Poli*

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO  
BRASIL

EQUIVALÊNCIA DOS CONCEITOS DE ORIENTAÇÃO EM VARIEDADES E GRAU DE APLICAÇÕES DOS PONTOS DE VISTA TOPOLÓGICO E DIFERENCIÁVEL

*José Luis Poli*

Orientador: *Prof. Dr. Mario Rameh Saab*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS - SP

1983

A meus Pais,  
ã Maristela  
e ã Clãudia.

## ABSTRACT

We intend to show the equivalence of the concepts of orientability and degree from the points of view of Algebraic Topology and Differential Topology.

First, we give a natural correspondence between orientations in a tangent space  $TM_x$  of a differentiable manifold  $M^n$  and generators in  $H_n(M, M-x; Z)$ .

Then we show the equivalence of orientation in Differential and Algebraic Topology.

If  $M$  is a compact, connected, oriented manifold, we assign for each point  $x$  in  $M$  a correspondence between the orientation classes of  $TM_x$  and the generators of the infinite cyclic group  $H_n(M)$ . It is done by using the isomorphism  $J_x : H_n(M) \rightarrow H_n(M, M-x)$  such that  $J_x(\mu_M) = \mu_x$ , where  $\mu_M$  is the fundamental homology class of  $M$  and  $\mu_x$  is a local orientation in  $x$ .

Finally we show that under certain assumptions, the differentiable degree and the topological degree of  $f : M^m \rightarrow N^n$  are equivalent.

## ÍNDICE

INTRODUÇÃO .....	I
CAPÍTULO 1: Preliminares .....	1
CAPÍTULO 2: Geradores de $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$ .....	11
CAPÍTULO 3: Uma Correspondência Biunívoca entre Orientações de um Espaço Vetorial real $V$ , de Dimensão $n$ , e Geradores em $H_n(V, V-0; Z) \cong Z$ .....	18
CAPÍTULO 4: Orientação de Variedades - Equivalência dos Conceitos de Orientação em Topologia Algébrica e em Topologia Diferencial.	
CAPÍTULO 5: O Grau de uma Aplicação e Equivalência dos Graus Topológico e Diferencial .....	45
BIBLIOGRAFIA .....	

## INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é mostrar a equivalência dos conceitos de orientação de variedades diferenciáveis e de grau de aplicações diferenciáveis dos pontos de vista da topologia algébrica e da topologia diferencial.

A idéia deste trabalho tem origem num fato geométrico bastante intuitivo: "tomando a variedade 2-dimensional  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  notamos que a escolha de uma base no espaço tangente  $TS_x^2$  está ligada a um laço  $\gamma$  ao redor do ponto  $x$ , em  $S^2$  e sabemos que  $[\gamma] \in H_1(U-x) \cong H_2(S^2, S^2-x, \mathbb{Z})$ ,  $\gamma$  orientada numa direção positiva ou negativa conforme a orientação da base escolhida no espaço tangente  $TS_x^2$ .

Desta idéia então partimos para um caso geral: dada uma variedade  $M^n$ , relacionar os geradores do grupo de homologia  $H_n(M, M-x; \mathbb{Z})$  e as classes de orientação em  $TM_x$ , e se a variedade de  $M$  for compacta, orientável e conexa então procuramos estender tal correspondência com a classe fundamental  $\mu_M \in H_n(M)$ .

Assim, no Capítulo 3, dada uma variedade diferenciável  $M^n$ , de dimensão  $n$ , mostramos (teoremas 3.5 e 3.6) que para todo ponto  $x \in M$ , existe uma correspondência biunívoca entre os geradores de  $H_n(TM_x, TM_x-0)$  e as classes de orientação de  $TM_x$ , o espaço tangente a  $M$  no ponto  $x$ .

No Capítulo 4, mostramos a equivalência dos conceitos de orientação, numa variedade diferenciável, em topologia algébrica (dado por 4.8) e em topologia diferencial (dado por 4.9). Se  $M^n$  for compacta, conexa e orientável, utilizando os isomorfismos

$$H_n(TM_x, TM_x-0) \cong H_n(M, M-x) \cong H_n(M) \text{ para todo } x \in M,$$

estabelecemos uma correspondência biunívoca entre as classes de orientação do espaço tangente  $TM_x$  e os geradores do grupo cíclico infinito  $H_n(M)$ , para cada ponto  $x \in M$ .

No Capítulo 5, dadas duas variedades diferenciáveis  $M^n$  e  $N^n$  de mesma dimensão  $n$ , orientadas, compactas (sem bordo) e conexas e  $f : M^n \rightarrow N^n$  uma aplicação diferenciável, mostramos que os graus topológico e diferenciável de  $f$  são iguais.

Damos ainda, uma definição mais geral de grau, "o grau ao longo de subconjuntos compactos" o que nos possibilitou, como aplicação, a demonstração de alguns teoremas clássicos.

#### AGRADECIMENTOS

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Mario Rameh Saab.

Aos professores do Departamento de Matemática, do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, pelo apoio constante nesta primeira etapa da minha pesquisa científica, especialmente ao professor doutor Carlos Biasi que me sugeriu algumas aplicações do conceito de grau, colocadas na parte final do Capítulo 5.

Aos professores do Departamento de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Itatiba, pelo constante apoio nestes anos e, em particular, ao professor Luiz Roberto Almeida Gabriel pelo grande incentivo dado no tērmino da gradação e durante o meu programa de Mestrado.

A todos os colegas do ICMSC-USP pelo incentivo e ajuda que me deram no início dos cursos de Mestrado.

À Gisele Maria Saab pelo excelente trabalho de datilografia.

... e, enfim, a Deus, que me confiou tal trabalho.

Este trabalho dependeu parcialmente de auxílio das seguintes entidades:

CNPq - através de bolsas de pós-graduação durante os anos de 1979 e 1981.

FAPESP, CAPES, CNPq e FINEP - através de auxílios concedidos ao ICMSC-USP, para bibliografia e contratação de docentes de cursos de pós-graduação.

## CAPÍTULO I

### PRELIMINARES

Neste capítulo estabeleceremos definições, notações e resumimos alguns resultados básicos.

Salientaremos, em primeiro lugar, que, no nosso trabalho, as variedades diferenciáveis  $M^n$  serão de dimensão  $n \geq 1$  e por "diferenciável" subentende-se de classe  $C^\infty$ , salvo menção em contrário e a homologia singular será com coeficientes em um anel comutativo  $R$  com unidade.

$S^n$ ,  $D^n$  e  $I^n$  indicam a  $n$ -esfera, o  $n$ -disco e o  $n$ -cubo, respectivamente.

O símbolo  $\sim$  em  $F \sim G$  indica homeomorfismo ou difeomorfismo ou isomorfismo, conforme  $F$  e  $G$  pertençam à categoria topológica ou diferencial ou de grupos, respectivamente.

$M \approx N$  indica que os espaços  $M$  e  $N$  são do mesmo tipo de homotopia,  $f \sim g : M \rightarrow N$  indica que as funções  $f$  e  $g$  são homotópicas.

Utilizaremos os conceitos de homotopia e homologia como estão em [ 2 ], [ 3 ] e [ 5 ], procurando adotar as notações usuais. Por exemplo,

$H_q(X)$  indica  $H_q(X, Z)$  o  $q$ -ésimo grupo (módulo) de homologia com coeficientes em  $Z$  (inteiros).

$H_q(X, A)$  indica  $H_q(X, A, Z)$  o  $q$ -ésimo grupo de homologia relativo a  $A$ .

$\pi_1(X)$  será o grupo fundamental (de Poincaré) de um espaço topológico  $X$  conexo por caminhos.

## 0.1. ORIENTAÇÃO EM ESPAÇOS VETORIAIS

Sejam  $E$  um espaço vetorial de dimensão finita  $n$  e  $A = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n); \text{ com } \alpha_j = (\alpha_j^1, \dots, \alpha_j^n)\}$ , o conjunto de todas as bases de  $E$ . Vamos definir em  $A$  a seguinte relação: Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  elementos de  $A$ . "Dizemos que  $\alpha$  está relacionada com  $\beta$  e escrevemos  $\alpha \sim \beta$  se a transformação linear  $T : E \rightarrow E$  que leva a base  $\alpha$  na base  $\beta$ , tal que  $T(\alpha_i) = \beta_i$ ,  $i=1, \dots, n$  tem determinante positivo". Mostremos que a relação " $\sim$ " é uma relação de equivalência em  $A$

1) É reflexiva: Seja  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A$ ; a transformação linear  $T : E \rightarrow E$  dada por  $T(\alpha_i) = \alpha_i$  é a transformação identidade; logo  $\det [T] = 1 > 0$ , assim  $\alpha \sim \alpha$ .

2) É simétrica: Sejam  $\alpha$  e  $\beta \in A$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  e  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  e suponhamos  $\alpha \sim \beta$ , isto é, a transformação linear  $T : E \rightarrow E$  dada por  $T(\alpha_i) = \beta_i$  é tal que  $\det [T] > 0$ ; como  $T$  é um isomorfismo considere  $T^{-1} : E \rightarrow E$ ;  $T^{-1}(\beta_i) = \alpha_i$  e  $\det [T^{-1}] = \frac{1}{\det [T]} > 0$ ; assim  $\beta \sim \alpha$ .

3) Sejam  $\alpha, \beta, \gamma \in A$ ;  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ .

$\begin{matrix} T_1 & T_2 \\ \text{Suponhamos que } \alpha \sim \beta & \text{e } \beta \sim \gamma: \text{ isto é, } T_1 : E \rightarrow E \\ \text{dada por } T_1(\alpha_i) = \beta_i & \text{tem } \det [T_1] > 0 ; T_2 : E \rightarrow E \text{ dada por} \\ T_2(\beta_j) = \gamma_j & \text{tem } \det [T_2] > 0 \text{ assim } T_2 \circ T_1 : E \rightarrow E \text{ é uma apli} \\ \text{cação linear definida por } (T_2 \circ T_1)(\alpha_i) = T_2(T_1(\alpha_i)) = T_2(\beta_i) = \gamma_i \\ \text{e } \det [T_2 \circ T_1] = \det [T_2] \det [T_1] > 0; \text{ assim } \alpha \sim \gamma \text{ e, portanto,} \\ \text{vale a transitividade. Além disso, esta relação determina duas} \\ \text{classes de equivalência, a saber, } [e] \text{ a classe de equivalência} \\ \text{representada pela base canônica, } e = (e_1, \dots, e_n) \text{ e a classe } [e'] \\ \text{representada por } e' = (e_1, \dots, e_{n-2}, e_n, e_{n-1}). \end{matrix}$

0.3 - Definição: Uma orientação em um espaço vetorial  $E$ , de dimensão finita  $n$ , é uma classe de equivalência de bases.

Segue da definição que duas bases de  $E$  determinam a mesma orientação se, e somente se, a transformação linear que leva uma na outra tem determinante positivo.

0.4 - Definição: Uma sequência de grupos abelianos e homomorfismos

$$\dots G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_4} \dots \rightarrow G_n \longrightarrow \dots$$

diz-se exata se  $\text{im}(f_i) = \text{ker}(f_{i+1})$  para todo  $i$ .

0.5 - Proposição (Lema dos Cinco)

No diagrama abaixo  $A_i$  e  $B_i$  são grupos abelianos e as flechas  $f_i$ ,  $g_i$  e  $\phi_i$  são homomorfismos:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & A_0 & \xrightarrow{f_0} & A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \longrightarrow & \dots \\ & & \phi_0 \downarrow & & \phi_1 \downarrow & & \phi_2 \downarrow & & \phi_3 \downarrow & & \phi_4 \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & B_0 & \xrightarrow{g_0} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Suponhamos que:

- o diagrama é comutativo
- as sequencias horizontais são exatas
- $\phi_0$  é epimorfismo;  $\phi_4$  monomorfismo e  $\phi_1$  e  $\phi_3$  isomorfismo.

Então  $\phi_2$  é isomorfismo.

Prova: ver [13], p. 38; o Lema dos Cinco é mais usado com  $\phi_0$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_3$  e  $\phi_4$  isomorfismos.

0.6- Proposição: Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$  um subespaço de  $X$  e  $H_q(X,A)$  o  $q$ -ésimo grupo de homologia de  $X$  módulo  $A$ . Suponhamos que  $\alpha$ , um  $q$ -ciclo relativo de  $X$  módulo  $A$ , seja uma  $q$ -cadeia em  $A$ . Então  $\alpha$  é homólogo a zero módulo  $A$ .

Prova:

$$\dots \longrightarrow \frac{S_{q+1}(X)}{S_{q+1}(A)} \xrightarrow{\partial_{q+1}} \frac{S_q(X)}{S_q(A)} \xrightarrow{\partial_q} \frac{S_{q-1}(X)}{S_{q-1}(A)} \longrightarrow \dots$$

$$H_q(X,A) = \frac{\ker(\partial_q)}{\text{Im}(\partial_{q+1})} = \frac{Z_q(X,A)}{B_q(X,A)}$$

$[\alpha]$  é um elemento em  $H_q(X,A)$  onde  $\{\alpha\} \in Z_q(X,A)$ .

Como  $\alpha$  é uma  $q$ -cadeia em  $A$ ,  $\alpha + S_q(A) = S_q(A)$ .

$$\text{Assim } \alpha + S_q(A) + B_q(X,A) = S_q(A) + B_q(X,A) = B_q(X,A) \subset \frac{S_q(X)}{S_q(A)}$$

Logo  $\alpha + S_q(A) \in B_q(X,A)$  e isto significa

$$\alpha + S_q(A) = \partial_{q+1}(C_{q+1} + S_{q+1}(A)) = \partial_{q+1} C_{q+1} + S_q(A).$$

Daí  $\alpha - \partial_{q+1} C_{q+1} \in S_q(A)$  isto é,  $\alpha + \beta_q = \partial_{q+1} C_{q+1}$  onde

$\beta_q \in S_q(A)$  e, portanto,  $\alpha \sim 0 \text{ mod. } A$  #.

0.7- Lema. A aplicação (avaliação)

$$\alpha : \mathbb{R}^n \times GL(n) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dada por  $\alpha(x,A) = A(x)$  é contínua.

De fato, a multiplicação de números reais

$$m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por  $m(x,y) = xy$  é uma aplicação contínua. Segue-se daí que é também contínua a aplicação

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{dada por}$$

$$f(x,y) = (x_1 y_{11} + x_2 y_{12} + \dots + x_n y_{1n}, \dots, x_1 y_{n1} + x_2 y_{n2} + \dots + x_n y_{nn})$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

e  $y = (y_{11}, \dots, y_{1n}, y_{21}, \dots, y_{2n}, \dots, y_{n1}, \dots, y_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$

Sejam, agora,  $M^n = M(n \times n; \mathbb{R})$  e  $GL(n) \subset M^n$  o espaço das matrizes reais não singulares.

$M^n$  é canonicamente homeomorfo a  $\mathbb{R}^{n^2}$  via a correspondência biunívoca

$$A = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\Phi} y = (y_{11}, \dots, y_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Seja  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Então

$$A(x) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_{11} + x_2 y_{12} + \dots + x_n y_{1n} \\ x_1 y_{21} + x_2 y_{22} + \dots + x_n y_{2n} \\ \dots \\ x_1 y_{n1} + x_2 y_{n2} + \dots + x_n y_{nn} \end{pmatrix}$$

Segue-se a continuidade da aplicação avaliação  $\alpha : \mathbb{R}^n \times GL(n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $\alpha(x,A) = A(x)$  por ser a composta das seguintes aplicações contínuas

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^n \times GL(n) & & (x,A) \\
 \downarrow \text{Id} \times i & & \downarrow \\
 \mathbb{R}^n \times M^n & & (x,A) \\
 \downarrow \text{Id} \times \phi & & \downarrow \\
 \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} & & ((x_1, \dots, x_n), (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}, \dots, y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nn})) \\
 \downarrow f & & \downarrow \\
 \mathbb{R}^n & & (x_1 y_{11} + x_2 y_{12} + \dots + x_n y_{1n}, \dots, x_1 y_{n1} + x_2 y_{n2} + \dots + x_n y_{nn}) \\
 & & = A(x) = \alpha(x,A)
 \end{array}$$

0.8- Proposição. Sejam  $L_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  a aplicação identidade e  $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação linear tal que  $\det(L_1) > 0$ . Então  $L_0 \simeq L_1$ , homotópicas dentro de  $GL(n)_+$ .

Prova:  $GL(n) = \{T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ aplicações lineares} \mid \det(T) \neq 0\}$

$GL(n) = GL(n)_+ \cup GL(n)_-$  é a reunião disjunta de duas componentes conexa por caminho;  $\det(L_1) > 0$  significa que  $L_0$  e  $L_1$  estão na mesma componente conexa por caminho, logo existe um caminho contínuo

$L : [0,1] \rightarrow GL(n)$  tal que  $L(0) = L_0 = \text{id}$  e  $L(1) = L_1$

e, para cada  $t \in [0,1]$ ,  $L(t) = L_t$  é uma matriz não singular.

Defino a homotopia entre  $L_0$  e  $L_1$ ,

$$F : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

como a composta das aplicações contínuas

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n \times I & \xrightarrow{\text{Id} \times L} & \mathbb{R}^n \times \text{GL}(n) & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^n \\ (x, t) & \longmapsto & (x, L_t) & \longmapsto & L_t(x) \end{array}$$

isto é,  $F(x, t) = L_t(x)$ .

$$\text{Assim } F(x, 0) = L_0(x) = x$$

$$\text{e } F(x, 1) = L_1(x) \quad \text{isto é, } L_0 \approx L_1$$

Observação: A proposição acima continua válida se substituirmos  $\mathbb{R}^n$  por  $V$ , um espaço vetorial real de dimensão finita  $n$ , uma vez que  $V$  é isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

### 0.9. Simplexos geométricos

Sejam  $E$  um espaço afim e  $a_0, a_1, \dots, a_n$  pontos de  $E$ , linearmente independentes (isto é, os vetores  $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_n - a_0$  são linearmente independentes). Todo ponto  $x$  da subvariedade linear afim gerada pelos pontos  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tem uma representação única  $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i$  onde os escalares devem satisfazer  $\sum \lambda_i = 1$ .

O ponto  $x$ , que podemos indicar simplesmente por  $x = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , chama-se o baricentro dos pontos  $a_i$  afetados de massas  $\lambda_i$ . Os números reais  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  são as coordenadas baricêntricas do ponto  $x$ .

O conjunto de todos os pontos  $x = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$  com  $\lambda_i \geq 0$  e  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$  é um conjunto convexo chamado um  $n$ -simplexo  $\sigma_n$  de  $E$ , de vértices  $a_0, a_1, \dots, a_n$  e é indicado por

$$\sigma_n = |a_0 a_1 \dots a_n|$$

$$\sigma_0 = |a_0| \quad \text{é um ponto}$$

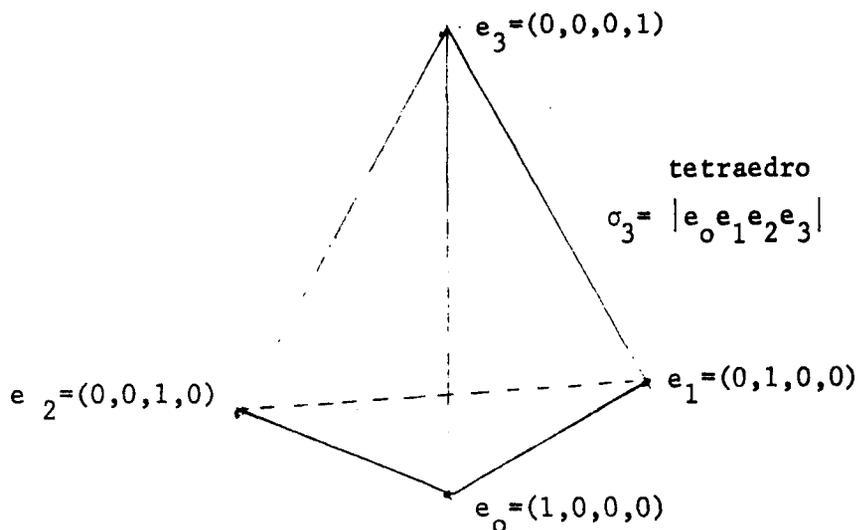
$$\sigma_1 = |a_0 a_1| \quad \text{é um segmento}$$

$$\sigma_2 = |a_0 a_1 a_2| \quad \text{é um triângulo}$$

$$\sigma_3 = |a_0 a_1 a_2 a_3| \quad \text{é um tetraedro}$$

Usualmente quando nos referimos ao "baricentro" de um  $n$ -simplexo  $\sigma_n$  queremos indicar o ponto  $x = (\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$  de coordenadas iguais, cuja soma é igual a 1. Assim,  $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , é o ponto médio do segmento  $|a_0 a_1|$ .

Por um  $n$ -simplexo padrão indicamos o  $n$ -simplexo geométrico  $\Delta_n = |e_0 e_1 \dots e_n| \subset \mathbb{R}^{n+1}$  onde os pontos (vetores)  $e_0, e_1, \dots, e_n$  constituem a base canônica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .



Temos a seguinte inclusão

$$\sigma_0 = |a_0| \subset \sigma_1 = |a_0 a_1| \subset \sigma_2 \subset \sigma_3 \subset \dots$$

Chama-se bordo de um  $n$ -simplexo  $\sigma_n$  e denota-se por  $\partial\sigma_n$ , o conjunto dos pontos tais que pelo menos uma de suas coordenadas baricêntricas for nula.

Um ponto  $x$  de um  $n$ -simplexo  $\sigma_n$  é dito interno se suas coordenadas baricêntricas forem todas positivas.

#### 0.10. Aplicação linear afim

Sejam  $\sigma_p = |a_0 a_1 \dots a_p|$  e  $\sigma_q = |b_0 b_1 \dots b_q|$  simplexos geométricos contidos em algum  $\mathbb{R}^n$ . Uma aplicação  $f : \sigma_p \rightarrow \sigma_q$  é dita linear

se  $x = \sum_{i=0}^p \lambda_i a_i$  implicar  $f(x) = \sum_{i=0}^q \lambda_i f(a_i)$  (isto é,  $x$  e  $f(x)$  têm as mesmas coordenadas baricêntricas). Os  $f(a_i)$  não precisam ser vértices de  $\sigma_q$ , podendo ser também  $f(a_i) = f(a_j)$  (vértices ou não de  $\sigma_q$ ) para algum par  $i \neq j$ .

Uma aplicação linear cujo simplexo imagem é de dimensão menor do que a do original é chamada degenerada.

0.11. Proposição. Sejam  $\sigma_p = |a_0 a_1 \dots a_p|$  e  $\tau_p = |b_0 b_1 \dots b_p|$  dois simplexos geométricos de mesma dimensão e  $f : \sigma_p \rightarrow \tau_p$  uma aplicação linear de  $\sigma_p$  sobre  $\tau_p$  tal que as imagens  $f(a_i)$  dos vértices de  $\sigma_p$  sejam vértices distintos de  $\tau_p$ . Então  $f$  é um homeomorfismo.

Prova. ver [12], p. 100.

### 0.12. A sequência de Mayer-Vietoris

Por uma tríada topológica  $(X, A, B)$  nós indicamos um espaço topológico  $X$  junto com um par ordenado  $(A, B)$  de subespaços de  $X$ , não necessariamente  $B \subset A$ .

A tríada  $(X, A, B)$  diz-se própria, ou exata, se as inclusões naturais de pares

$$k_1 : (A, A \cap B) \rightarrow (A \cup B, B)$$

$$k_2 : (B, A \cap B) \rightarrow (A \cup B, A) \text{ induzem, para todo } q \in \mathbb{Z}, \text{ iso}$$

morfismos.

$$k_{1*} : H_q(A, A \cap B) \rightarrow H_q(A \cup B, B)$$

$$k_{2*} : H_q(B, A \cap B) \rightarrow H_q(A \cup B, A)$$

Seja  $(X, A, B)$  uma tríada exata com  $X = A \cup B$  e consideremos as sequências exatas de pares

$$\begin{array}{ccccccc}
\rightarrow H_q(B) & \xrightarrow{n_2} & H_q(A \cup B) & \xrightarrow{\ell_1} & H_q(A \cup B, B) & \xrightarrow{\partial_B} & H_{q-1}(B) \rightarrow \\
& & & & \downarrow \approx \left| k_{1*}^{-1} \right. & & \\
\rightarrow H_q(A \cap B) & \xrightarrow{m_1} & H_q(A) & \xrightarrow{i_A} & H_q(A, A \cap B) & \xrightarrow{\partial'} & H_{q-1}(A \cap B) \rightarrow \\
\rightarrow H_q(A \cap B) & \xrightarrow{m_2} & H_q(B) & \xrightarrow{i_B} & H_q(B, A \cap B) & \xrightarrow{\partial''} & H_{q-1}(A \cap B) \rightarrow \\
& & & & \uparrow \approx \left| k_{2*}^{-1} \right. & & \\
\rightarrow H_q(A) & \xrightarrow{n_1} & H_q(A \cup B) & \xrightarrow{\ell_2} & H_q(A \cup B, A) & \xrightarrow{\partial_A} & H_{q-1}(A)
\end{array}$$

A sequência de Mayer-Vietoris de uma tríada exata  $(X, A, B)$  com  $X = A \cup B$  é a sequência

$$\dots \rightarrow H_q(A \cap B) \xrightarrow{\psi} H_q(A) \oplus H_q(B) \xrightarrow{\phi} H_q(A \cup B) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

$$\text{onde } \psi(c) = (m_1(c), -m_2(c))$$

$$\phi(a, b) = n_1(a) + n_2(b)$$

$$\Delta = -\partial' k_{1*}^{-1} \ell_1 = \partial'' k_{2*}^{-1} \ell_2$$

0.13. Teorema: A sequência de Mayer-Vietoris de uma tríada exata  $(X, A, B)$  com  $X = A \cup B$  é exata.

Prova. [ 2 ], p. 72-74.

2.1. Os grupos de homologia  $H_q(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$  onde  $\Delta_n$  é o simplexo padrão e  $\dot{\Delta}_n$  o seu bordo:

$$\Delta_n = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=0}^n x_i = 1\}$$

$$\dot{\Delta}_n = \{x \in \Delta_n \mid x_i = 0 \text{ para algum } i\}.$$

Consideremos a seqüência exata do par  $(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \approx (B^n, S^{n-1})$ :

$$\dots \longrightarrow H_n(\Delta_n) \xrightarrow{j} H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \xrightarrow{a} H_{n-1}(\dot{\Delta}_n) \xrightarrow{i} H_{n-1}(\Delta_n) \longrightarrow \dots$$

Como  $\Delta_n$  é um espaço contraível e  $\dot{\Delta}_n \approx S^{n-1}$  segue-se, para  $n \geq 2$ ,

$$0 \longrightarrow H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \xrightarrow{a} H_{n-1}(\dot{\Delta}_n) \rightarrow 0$$

Logo,  $a$  é um isomorfismo e, assim,  $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \approx \mathbb{Z}$

Para  $n = 1$ ,

$$0 \longrightarrow H_1(\Delta_1, \dot{\Delta}_1) \xrightarrow[\text{mono}]{a} H_0(\dot{\Delta}_1) \xrightarrow[\text{epi}]{i} H_0(\Delta_1) \xrightarrow{j} H_0(\Delta_1, \dot{\Delta}_1) \longrightarrow$$

$\dot{\Delta}_1 = \{e_0, e_1\}$  consiste de dois pontos, os extremos de  $\Delta_1 = |e_0 e_1|$ .

Então  $H_0(\dot{\Delta}_1) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , grupo abeliano livre de dois geradores  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$  representados pelos 0-simplexos singulares

$$(e_0) : |e_0| \rightarrow e_0 \in \dot{\Delta}_1 \quad \text{e} \quad (e_1) : |e_0| \rightarrow e_1 \in \dot{\Delta}_1$$

Para todo espaço  $X$  conexo por caminho e subespaço  $A \neq \emptyset$ ,  $H_0(X, A) = 0$ . Assim  $H_0(\Delta_1, \dot{\Delta}_1) = 0$ .

Como  $H_0(\Delta_1) \approx \mathbb{Z}$  é um grupo livre, a seqüência exata curta, acima, se fatora:

$$H_0(\dot{\Delta}_1) \approx H_1(\Delta_1, \dot{\Delta}_1) \oplus H_0(\Delta_1)$$

isto é,  $Z \oplus Z \approx H_1(\Delta_1, \dot{\Delta}_1) \oplus Z$

e, então,  $H_1(\Delta_1, \dot{\Delta}_1) \approx Z$

Para  $n = 0$ ,  $\Delta_0 = |e_0|$  e  $\dot{\Delta}_0 = \emptyset$ . Assim

$$H_0(\Delta_0, \dot{\Delta}_0) = H_0(\Delta_0) \approx Z$$

Portanto, para todo  $n \geq 0$

$$H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \approx Z$$

é um grupo cíclico infinito.

## 2.2. Relação entre os geradores de $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$ e os de $H_{n-1}(\dot{\Delta}_n)$

Voltemos à sequência exata do par  $(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$  :

$$\longrightarrow H_n(\dot{\Delta}_n) \xrightarrow{i} H_n(\Delta_n) \xrightarrow{j} H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\dot{\Delta}_n) \xrightarrow{i} H_{n-1}(\Delta_n) \longrightarrow$$

Para  $n \geq 2$ ,

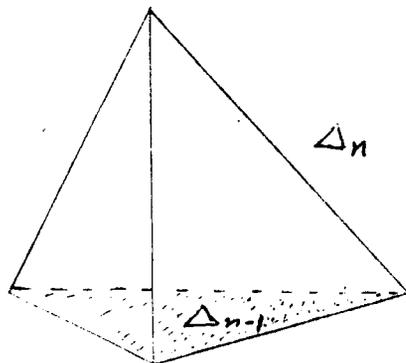
$H_n(\Delta_n) = 0$  e  $H_{n-1}(\Delta_n) = 0$  e, então,  $\partial$  é isomorfismo entre os grupos cíclicos infinitos  $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$  e  $H_{n-1}(\dot{\Delta}_n)$ . Seja  $\alpha$  um ciclo em  $\dot{\Delta}_n \approx S^{n-1}$  que representa um gerador  $\{a\}$  do grupo cíclico infinito  $H_{n-1}(\dot{\Delta}_n)$ ; como  $i(\{a\}) = 0$  segue-se que  $\alpha$  é homólogo a zero em  $H_{n-1}(\Delta_n)$ , isto é,  $\alpha = d\beta$  onde  $\beta$  é uma  $n$ -cadeia em  $\Delta_n$ . Logo  $\beta$  representa um gerador em  $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$  pois  $\partial(\{\beta\}) = \{d\beta\} = \{a\}$

Reciprocamente, se  $\beta$  representa um gerador de  $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$  então  $d\beta$  representa um gerador de  $H_{n-1}(\dot{\Delta}_n)$ .

Conclusão:  $\delta$  representa um gerador de  $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$  se, e só se,  $\delta\delta$  representa um gerador de  $H_{n-1}(\dot{\Delta}_n)$ .

2.3. Relação entre os geradores de  $H_{n-1}(\dot{\Delta}_n)$  e os de  $H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1})$

Mostremos que  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  representa um gerador de  $H_{n-1}(\dot{\Delta}_n) \approx H_{n-1}(S^{n-1})$  se, e somente se,  $\gamma_1$  representa um gerador de  $H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1})$  e  $\gamma_2$  é uma  $(n-1)$ -cadeia no fecho de  $\dot{\Delta}_n - \Delta_{n-1}$ .



Pensemos  $\dot{\Delta}_n$  como uma  $(n-1)$ -esfera  $S^{n-1}$ ,  $\Delta_{n-1} \subset \dot{\Delta}_n$  como a calota sul, o fecho de  $\dot{\Delta}_n - \Delta_{n-1}$  como a calota norte e  $\dot{\Delta}_{n-1}$  como o equador da  $(n-1)$ -esfera  $\dot{\Delta}_n$ .

Consideremos a seqüência exata de homologia

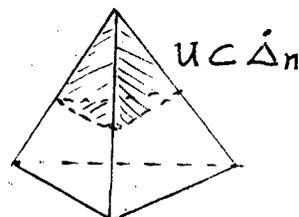
$$\longrightarrow H_{n-1}(\overline{\Delta_n - \Delta_{n-1}}) \xrightarrow{i} H_{n-1}(\dot{\Delta}_n) \xrightarrow{j} H_{n-1}(\dot{\Delta}_n, \overline{\Delta_n - \Delta_{n-1}}) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-2}(\overline{\Delta_n - \Delta_{n-1}}) \longrightarrow \dots$$

Como  $\overline{\Delta_n - \Delta_{n-1}}$  é conexo por caminho (é também contrátil), para  $n \geq 2$ ,  $H_{n-1}(\overline{\Delta_n - \Delta_{n-1}}) = 0$  e  $\tilde{H}_{n-2}(\overline{\Delta_n - \Delta_{n-1}}) = 0$

Assim, para  $n \geq 2$ ,  $j$  é um isomorfismo.

Consideremos, agora,  $U = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \dot{\Delta}_n \mid x_n > \frac{1}{n+1}\}$

$U$  é um subconjunto aberto de  $\dot{\Delta}_n$ , uma "calota norte" em  $\dot{\Delta}_n$  obtida cortando  $\Delta_n$  na altura do baricentro.



$$e_* : H_{n-1}(\dot{\Delta}_n - U, \overline{\dot{\Delta}_n - \Delta_{n-1} - U}) \rightarrow H_{n-1}(\dot{\Delta}_n, \overline{\dot{\Delta}_n - \Delta_{n-1}})$$

é um isomorfismo (excisão).

$$\text{A inclusão } i : (\dot{\Delta}_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) \rightarrow (\dot{\Delta}_n - U, \overline{\dot{\Delta}_n - \Delta_{n-1} - U})$$

é uma equivalência de homotopia (o primeiro par de espaços é retrato por deformação do segundo). Portanto,

$$i_* : H_{n-1}(\dot{\Delta}_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(\dot{\Delta}_n - U, \overline{\dot{\Delta}_n - \Delta_{n-1} - U})$$

é um isomorfismo. Temos, então, a seguinte composição de isomorfismos:

$$\begin{array}{ccc}
 [\gamma_1] + [\gamma_2] \in H_{n-1}(\dot{\Delta}_n, \overline{\dot{\Delta}_n - \Delta_{n-1}}) & \xrightarrow[\approx]{i_*^{-1} \circ e_*^{-1}} & H_{n-1}(\dot{\Delta}_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) \\
 \uparrow \approx \quad j & \nearrow \psi & \\
 \{\gamma\} = \{\gamma_1 + \gamma_2\} \in H_{n-1}(\dot{\Delta}_n) & & 
 \end{array}$$

Como  $\gamma_2$  é uma  $(n-1)$ -cadeia no fecho de  $\dot{\Delta}_n - \Delta_{n-1}$ ,

$$[\gamma_2] = 0 \in H_{n-1}(\dot{\Delta}_n, \overline{\dot{\Delta}_n - \Delta_{n-1}}) \text{ (Prop. 0.6)}$$

Assim  $\psi(\{\gamma\}) = [\gamma_1] \in H_{n-1}(\dot{\Delta}_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1})$ . Sendo  $\psi$  isomorfismo,

$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  representa um gerador de  $H_{n-1}(\dot{\Delta}_n)$  se, e somente se,

$\gamma_1$  representa um gerador de  $H_{n-1}(\dot{\Delta}_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1})$  onde  $\gamma_1$  é uma

$(n-1)$ -cadeia em  $\Delta_{n-1}$  (cujo bordo está em  $\dot{\Delta}_{n-1}$ ) e  $\gamma_2$  é uma

$(n-1)$ -cadeia no fecho de  $\dot{\Delta}_n - \Delta_{n-1}$ .

**2.4. Teorema.** Seja  $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  o simplexo padrão. Então o simplexo singular  $s_n : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$  definido por uma qualquer aplicação linear de  $\Delta_n$  sobre  $\Delta_n$  é um ciclo relativo de  $\Delta_n$  módulo  $\dot{\Delta}_n$  e representa um gerador de  $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$ .

Prova: por indução sobre  $n$ .

Para  $n = 0$ ,  $\Delta_0 = |e_0|$  e  $\dot{\Delta}_0 = \emptyset$ . Assim  $H_0(\Delta_0, \dot{\Delta}_0) = H_0(\Delta_0)$   
 $s_0(e_0) = e_0$  é a única aplicação linear de  $\Delta_0 = |e_0|$  sobre  
 $\Delta_0$ ,  $as_0 = 0$  por definição.  $Z_0(e_0) = S_0(e_0) \sim Z$  e  $B_0(e_0) = 0$   
 e, daí,  $H_0(e_0) \sim Z$  com gerador representado por  $s_0 : e_0 \rightarrow e_0$ .

Para  $n = 1$ ,  $\Delta_1 = |e_0 e_1|$  é um segmento cujo bordo  $\dot{\Delta}_1 = \{e_0, e_1\}$   
 é constituído dos pontos extremos. Como  $\Delta_1$  é contrátil,  $H_n(\Delta_1) = 0$   
 para  $n \neq 0$  e  $H_0(\Delta_1)$  é um grupo cíclico infinito, um gerador  $\alpha$  é  
 representado pelo 0-simplexo singular  $\Delta_0 = |e_0| + e_0 \in \Delta_1$ .

Sendo  $\dot{\Delta}_1 = \{e_0, e_1\}$  constituído de dois pontos,  $H_0(\dot{\Delta}_1)$  é um  
 grupo abeliano livre de dois geradores  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$ , os quais são re-  
 presentados pelos 0-simplexos singulares que aplicam  $\Delta_0 = |e_0|$  so-  
 bre  $e_0$  e  $e_1$ , respectivamente. Consideremos a seguinte parte da  
 seqüência exata de homologia do par  $(\Delta_1, \dot{\Delta}_1)$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H_1(\Delta_1) & \xrightarrow{j'} & H_1(\Delta_1, \dot{\Delta}_1) & \xrightarrow[\text{mono}]{\partial} & H_0(\dot{\Delta}_1) & \xrightarrow[\text{epi}]{i} & H_0(\Delta_1) & \xrightarrow{j} & H_0(\Delta_1, \dot{\Delta}_1) & \longrightarrow \\ & \text{"} & & & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & \\ & 0 & & & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & 0 & \end{array}$$

$\partial$  é monomorfismo; isto implica  $G = \text{im } \partial \sim H_1(\Delta_1, \dot{\Delta}_1)$

$i$  é epimorfismo; isto implica

$$\frac{H_0(\dot{\Delta}_1)}{\ker i} \sim H_0(\Delta_1) \quad \text{isto é,} \quad \frac{H_0(\dot{\Delta}_1)}{G} \sim H_0(\Delta_1)$$

Portanto,

$$H_1(\Delta_1, \dot{\Delta}_1) \sim G \sim \mathbb{Z}.$$

Analisemos os geradores de  $H_1(\Delta_1, \dot{\Delta}_1)$ .

Sejam  $\underline{\alpha}$ ,  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$  definidos acima. Assim

$$i(a) = i(b) = \alpha$$

Assim, se  $ma + nb$  é um elemento de  $H_0(\dot{\Delta}_1)$ ,

$$i(ma + nb) = (m + n)\alpha$$

Logo,  $ma + nb$  está em  $G = \text{im } \partial = \text{ker } i$  se, e somente se,  $m = -n$ , e assim  $G$  é gerado por  $a-b$ .

Segue-se, então, que  $H_1(\Delta_1, \dot{\Delta}_1)$ , o qual é isomorfo a  $G$  via  $\partial$ , é gerado por um elemento  $\beta$  tal que  $\partial\beta = a-b$ . Assim  $\beta$  pode ser representado por um ciclo relativo cujo bordo é a diferença dos 0-simplices singulares que aplicam  $\Delta_0 = |e_0|$  nos pontos extremos  $e_0$  e  $e_1$  de  $\Delta_1 = |e_0e_1|$ . Um adequado ciclo relativo é o formado pelo 1-simplexo singular que leva  $\Delta_1$  linearmente sobre  $\Delta_1$ .

Suponhamos o teorema válido para um simplexo de dimensão  $n-1$ .

Se  $|y_0y_1\dots y_n|$  é um  $n$ -simplexo geométrico, a aplicação linear sobrejetora

$$s_n : \Delta_n = |e_0e_1\dots e_n| \rightarrow |y_0y_1\dots y_n|$$

definida por  $s_n(e_j) = y_j$  é comumente indicada por  $(y_0y_1\dots y_n)$ .

No que se segue consideraremos  $y_0, y_1, \dots, y_n$  uma qualquer permutação dos vértices  $e_0, e_1, \dots, e_n$  de  $\Delta_n$ . Assim,

$$(y_0y_1\dots y_n) : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$$

é a aplicação linear de  $\Delta_n$  sobre  $\Delta_n$  que leva os vértices  $e_0, e_1, \dots, e_n$  nos vértices  $y_0 = e_{i_0}, \dots, y_n = e_{i_n}$  de  $\Delta_n$ . Denotemos com  $S_0$  a face de  $\Delta_n$  cujos vértices são  $y_1, y_2, \dots, y_n$  (isto é, a face oposta ao vértice  $y_0$ ) e com  $\dot{S}_0$  a fronteira de  $S_0$ .

O bordo de  $(y_0 y_1 \dots y_n) : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$  é

$$d(y_0 y_1 \dots y_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (y_0 \dots \hat{y}_i \dots y_n)$$

e pode ser escrito como

$$d(y_0 \dots y_n) = (y_1 y_2 \dots y_n) + \gamma$$

onde  $(y_1 y_2 \dots y_n)$  é uma  $(n-1)$ -cadeia em  $S_0$  e  $\gamma$  é uma  $(n-1)$ -cadeia no fecho de  $\dot{\Delta}_n - S_0$ .

Por (2.3),  $d(y_0 \dots y_n)$  representa um gerador de  $H_{n-1}(\dot{\Delta}_n)$  se, e somente se,  $(y_1 y_2 \dots y_n)$  representa um gerador de  $H_{n-1}(S_0, \dot{S}_0)$ .

Mas, pela hipótese de indução,

$$(y_1 y_2 \dots y_n) : \dot{\Delta}_{n-1} - S_0 = |y_1 \dots y_n| \subset \Delta_n$$

representa um gerador de  $H_{n-1}(S_0, \dot{S}_0)$ . Logo,  $d(y_0 y_1 \dots y_n)$  representa um gerador de  $H_{n-1}(\dot{\Delta}_n)$  e, portanto, por (2.2)

$$(y_0 y_1 \dots y_n) : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$$

representa um gerador de  $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$ , o que completa a prova do teorema.

Em particular,

a identidade  $\delta_n = (e_0 e_1 \dots e_n) : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$  representa um gerador de  $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$ .

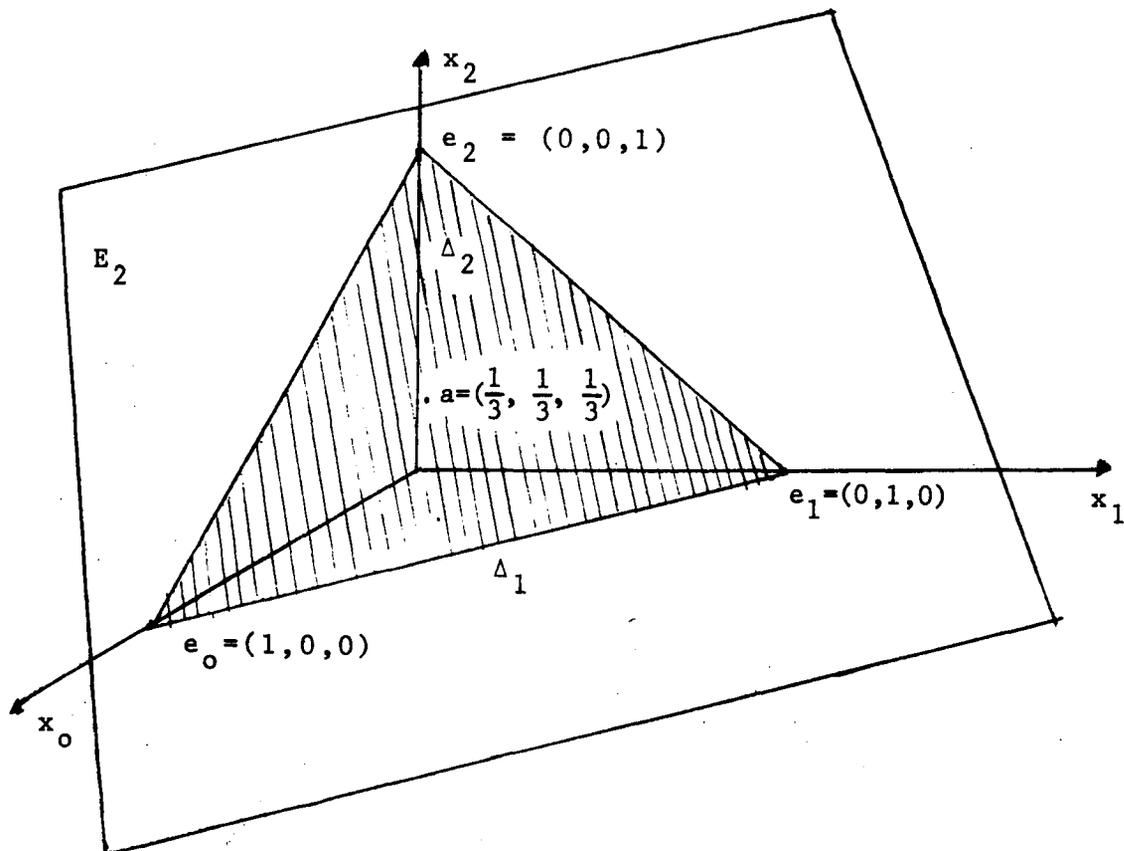
C A P Í T U L O 3

Uma Correspondência Biunívoca entre Orientações de um Espaço Vetorial real  $V$ , de Dimensão  $n$ , E Geradores em  $H_n(V, V-0; Z) \approx Z$ .

3.1. Consideremos o simplexo padrão  $\Delta_n$  e seu bordo  $\dot{\Delta}_n$  :

$$\Delta_n = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=0}^n x_i = 1\}$$

$$\dot{\Delta}_n = \{x \in \Delta_n \mid x_i = 0 \text{ para algum } i\}$$



Sejam  $a = (\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}) \in \Delta_n$  o baricentro de  $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

e  $E_n$  a variedade linear afim gerada pelos pontos  $e_0, e_1, \dots, e_n$ . Podemos dar a subvariedade linear afim  $E_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma estrutura de espaço vetorial de dimensão  $n$ , origem  $a \in E_n$  e base  $\{e_i - a\}_{1 \leq i \leq n}$  via a correspondência biunívoca

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in E_n \iff x - a = (x_0 - \frac{1}{n+1}, \dots, x_n - \frac{1}{n+1})$$

Ficam bem definidas a soma e a multiplicação por escalar

$$\oplus : E_n \times E_n \rightarrow E_n \quad \text{e} \quad \odot : \mathbb{R} \times E_n \rightarrow E_n$$

por  $x \oplus y = x + y - a$  e  $\lambda \odot x = \lambda(x - a) + a$

$(E_n, \oplus, \odot)$  é um espaço vetorial real de dimensão  $n$ , de origem  $a \in E_n$  e base  $\{e_i - a\}_{1 \leq i \leq n}$ .

### 3.2. Proposição: A aplicação inclusão de pares de espaços

$$j : (\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \rightarrow (E_n, E_n - a)$$

induz isomorfismo  $j_* : H_q(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \rightarrow H_q(E_n, E_n - a)$  para todo  $q$ .

Prova: Como  $\Delta_n$  é um corpo convexo em  $\mathbb{R}^{n+1}$  segue-se que  $\Delta_n \approx D^n$ ,  $\dot{\Delta}_n \approx S^{n-1}$  e consideremos  $E_n$ , espaço vetorial de dimensão  $n$ , como  $\mathbb{R}^n$ .

$D^n$  é retrato de  $\mathbb{R}^n$  sendo a retração (contínua)

$r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in D^n \\ \frac{x}{\|x\|} & \text{se } x \in \mathbb{R}^n - B^n \end{cases}$$

Mais ainda,  $D^n$  é retrato por deformação de  $R^n$  isto é, existe uma homotopia  $\{f_t : R^n \rightarrow R^n ; 0 \leq t \leq 1\}$  tal que  $f_0 = \text{identidade}$  e  $f_1 = r$  ( $f_1(R^n) \subset D^n$ ). A deformação (homotopia)

$$F : R^n \times I \rightarrow R^n$$

$$\text{é dada por } F(x,t) = f_t(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in D^n, t \in I \\ (1-t)x + \frac{tx}{\|x\|} & \text{se } x \in R^n - B^n \end{cases}$$

$$\text{Vê-se que } f_0(x) = x \text{ e } f_1(x) = r(x)$$

Portanto,  $D^n$  é retrato por deformação de  $R^n$  e, assim, a inclusão  $i : D^n \rightarrow R^n$  é uma equivalência de homotopia.

Analogamente se mostra que  $S^{n-1}$  é retrato por deformação de  $R^n - \{0\}$  sendo a retração (por deformação)

$$F : (R^n - 0) \times I \rightarrow R^n - 0$$

$$\text{dada por } F(x,t) = (1-t)x + \frac{tx}{\|x\|}$$

Portanto a inclusão  $i' : S^{n-1} \rightarrow R^n - 0$  é também uma equivalência de homotopia.

Levando em conta os homeomorfismos

$$\Delta_n \approx D^n, \dot{\Delta}_n \approx S^{n-1} \text{ e } E_n \approx R^n$$

as inclusões  $i : \Delta_n \rightarrow E_n$  e  $i' : \dot{\Delta}_n \rightarrow E_n - a$ ,

sendo equivalências de homotopia, induzem isomorfismos

$$i_* : H_q(\Delta_n) \rightarrow H_q(E_n) \text{ e } i'_* : H_q(\dot{\Delta}_n) \rightarrow H_q(E_n - a) \text{ para todo } q.$$

Estamos, agora, em condições de mostrar que a inclusão  $j : (\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \rightarrow (E_n, E_n - a)$  de pares de espaços induz isomorfismo

$$j_* : H_q(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \rightarrow H_q(E_n, E_n - a) \quad \text{para todo } q.$$

Consideremos as seqüências exatas dos pares  $(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$  e  $(E_n, E_n - a)$  e o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & H_q(\dot{\Delta}_n) & \rightarrow & H_q(\Delta_n) & \rightarrow & H_q(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) & \rightarrow & H_{q-1}(\dot{\Delta}_n) & \rightarrow & H_{q-1}(\Delta_n) & \rightarrow \\ & \approx \downarrow i_*^! & & \approx \downarrow i_* & & \downarrow j_* & & \approx \downarrow i_*^! & & \approx \downarrow i_* & \\ \dots & H_q(E_n - a) & \rightarrow & H_q(E_n) & \rightarrow & H_q(E_n, E_n - a) & \rightarrow & H_{q-1}(E_n - a) & \rightarrow & H_{q-1}(E_n) & \rightarrow \end{array}$$

Como as seqüências horizontais são exatas, os diagramas comutativos,  $i_*^!$  e  $i_*$  isomorfismos, segue-se, do Lema dos Cinco, que  $j_*$  é um isomorfismo.

3.3. Proposição: Seja  $\Delta_n = |e_0 e_1 \dots e_n|$  o  $n$ -simplexo padrão e  $\partial : H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \rightarrow H_{n-1}(\dot{\Delta}_n)$  o operador bordo a nível de grupos de homologia. Então  $\partial$  é monomorfismo para  $n \geq 1$ . É isomorfismo para  $n \geq 2$ .

Prova: Consideremos a seqüência exata do par  $(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$

$$\dots \rightarrow H_n(\Delta_n) \xrightarrow{j} H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\dot{\Delta}_n) \xrightarrow{i} H_{n-1}(\Delta_n) \rightarrow \dots$$

Como  $\Delta_n$  tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto segue-se que  $H_n(\Delta_n) = 0$  para  $n \geq 1$ ; assim  $\ker \partial = \text{im } j = 0$ . Logo  $\partial$  é um monomorfismo. Em particular, para  $n \geq 2$ ,  $H_{n-1}(\Delta_n) = 0$  o que implica  $\partial$  é epimorfismo. Portanto, para  $n \geq 2$ ,  $\partial$  é isomorfismo.

Antes de estabelecermos a correspondência biunívoca entre orientações de um espaço vetorial real  $V$ , de dimensão  $n$ , e geradores em  $H_n(V, V-0; Z) \cong Z$  precisamos ver algumas proposições.

### 3.4. Proposição:

Sejam  $\Delta_n = |e_0 e_1 \dots e_n|$  o  $n$ -simplexo padrão,  $\delta_n : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$  a aplicação identidade e  $\sigma : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$  o homeomorfismo linear afim dada por  $\sigma = (e_0 e_1 \dots e_{n-2} e_n e_{n-1})$ . (Pela Proposição 2.4, as classes de homologia  $[\delta_n]$  e  $[\sigma]$  são geradores de  $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \cong Z$ ).  
Tem-se

$$[\sigma] = -[\delta_n] \in H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \quad (n \geq 1)$$

#### Prova:

$$\text{Para } n = 1, \quad \delta_1 = (e_0 e_1) : \Delta_1 = |e_0 e_1| \rightarrow \Delta_1$$

$$\sigma = (e_1 e_0) : \Delta_1 = |e_0 e_1| \rightarrow \Delta_1$$

$$\partial \delta_1 = \partial_0 \delta_1 - \partial_1 \delta_1 = e_1 - e_0$$

$$\partial \sigma = \partial_0 \sigma - \partial_1 \sigma = e_0 - e_1 = -\partial \delta_1$$

Consideremos, agora, o operador bordo a nível dos grupos de homologia

$$\partial : H_1(\Delta_1, \dot{\Delta}_1) \rightarrow H_0(\dot{\Delta}_1)$$

o qual é um monomorfismo, pela Proposição 3.3.

Por (2.4),  $[\delta_1]$  e  $[\sigma]$  são geradores de  $H_1(\Delta_1, \dot{\Delta}_1) \approx \mathbb{Z}$  e pelo que vimos acima,

$$\partial([\sigma]) = [\partial\sigma] = [-\partial\delta_1] = -[\partial\delta_1] = -\partial[\delta_1]$$

e como  $\partial$  é monomorfismo,

$$[\sigma] = -[\delta_1]$$

Suponhamos, agora,  $n \geq 2$ .

Sejam  $b = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0) \in \Delta_{n-1} \subset \dot{\Delta}_n$

$$\delta_n = (e_0 e_1 \dots e_{n-1} e_n) = \text{id} : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$$

$$\sigma = (e_0 e_1 \dots e_{n-2} e_n e_{n-1}) : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$$

a aplicação singular que permuta os vértices  $e_n$  e  $e_{n-1}$ , deixando os outros fixos.

Consideremos as seqüências exatas de homologia dos pares  $(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$  e  $(\dot{\Delta}_n, \dot{\Delta}_n - b)$  e o monomorfismo

$$k_*^{-1} \epsilon_*^{-1} j \partial : H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \rightarrow H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1})$$

explicitado abaixo. Neste diagrama ( $n \geq 2$ ),

$H_n(\Delta_n) = H_{n-1}(\Delta_n) = H_{n-1}(\dot{\Delta}_n - b) = 0$  pois estes espaços são contraíveis.

Sendo  $\dot{\Delta}_{n-1}$  retrato por deformação de  $\Delta_{n-1} - b$ , segue-se  $H_{n-1}(\Delta_{n-1} - b) \approx H_{n-1}(\dot{\Delta}_{n-1})$  e daí, usando o Lema dos Cinco, o homomorfismo induzido pela inclusão,

$$k_* : H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \Delta_{n-1} - b)$$

é isomorfismo.

$$H_{n-1}(\dot{\Delta}_n - b) = 0$$

↓ i

$$H_n(\Delta_n) \xrightarrow{j} H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \xrightarrow[\approx]{\partial} H_{n-1}(\dot{\Delta}_n) \xrightarrow{i} H_{n-1}(\Delta_n)$$

||

0 geradores  $[\delta_n], [\sigma]$

mono ↓ j

||

0  
(n ≥ 2)

$$H_{n-1}(\dot{\Delta}_n, \dot{\Delta}_n - b)$$

$$\approx \uparrow \epsilon_* \text{ (excisão)}$$

$$H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \Delta_{n-1} - b)$$

$$\approx \uparrow k_*$$

$$(-1)^n [\delta_{n-1}], -(-1)^n [\delta_{n-1}] \in H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1})$$

$$[\delta_{n-1}] \text{ gerador de } H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) \approx \mathbb{Z}$$

Vejamos a imagem dos geradores  $[\delta_n]$  e  $[\sigma]$  de  $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$  pelo monomorfismo

$$k_*^{-1} \epsilon_*^{-1} j \partial : H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \rightarrow H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1})$$

Temos

$$\partial[\delta_n] = [\partial \delta_n] = \left[ \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i \delta_n \right] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [\partial_i \delta_n]$$

e, então,

$$(j\partial)[\delta_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [\partial_i \delta_n] \in H_{n-1}(\dot{\Delta}_n, \dot{\Delta}_n - b)$$

Para cada  $i < n$ ,  $\partial_i \delta_n = (e_0 \dots \hat{e}_i \dots e_n) : \Delta_{n-1} \rightarrow \dot{\Delta}_n$

é um  $(n-1)$ -simplexo singular em  $\dot{\Delta}_n - b$ , logo homólogo a zero módulo  $\dot{\Delta}_n - b$ . (Proposição 0.6). Então

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i [\partial_i \delta_n] = 0 \in H_{n-1}(\dot{\Delta}_n, \dot{\Delta}_n - b). \text{ Segue-se, então,}$$

$$(j\partial)[\delta_n] = (-1)^n [(e_0 e_1 \dots e_{n-1})] \in H_{n-1}(\dot{\Delta}_n, \dot{\Delta}_n - b)$$

e portanto,

$$(k_*^{-1} \epsilon_*^{-1} j\partial)[\delta_n] = (-1)^n [\delta_{n-1}] \in H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) \quad (1)$$

Analogamente,

$$(j\partial)([\sigma]) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [\partial_i \sigma] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [(e_0 \dots \hat{e}_i \dots e_{n-2} e_{n-1})] \in H_{n-1}(\dot{\Delta}_n, \dot{\Delta}_n - b)$$

Para  $i \leq n-2$  e  $i = n$ ,  $\partial_i \sigma: \Delta_{n-1} \rightarrow \dot{\Delta}_n$  são simplexos singulares em  $\dot{\Delta}_n - b$  e, portanto,

$$[\partial_i \sigma] = 0 \in H_{n-1}(\dot{\Delta}_n, \dot{\Delta}_n - b)$$

Assim,

$$(j\partial)([\sigma]) = (-1)^{n-1} [(e_0 \dots e_{n-2} e_{n-1})] = (-1)^{n-1} [\delta_{n-1}]$$

e portanto,

$$(k_*^{-1} \epsilon_*^{-1} j\partial)([\sigma]) = -(-1)^n [\delta_{n-1}] \in H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) \quad (\text{gerador}) \quad (2)$$

De (1) e (2) segue-se que

$$[\sigma] = -[\delta_n] \in H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$$

### 3.5. Uma Correspondência Biunívoca Entre Orientações Em Um Espaço Vetorial Real $V$ , de Dimensão $n$ , e Geradores Em $H_n(V, V-0; Z)$ .

Vimos em 2.1 que podemos dar à subvariedade linear afim  $E_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , gerada pelos pontos  $e_0, e_1, \dots, e_n$  uma estrutura de espaço vetorial de dimensão  $n$ , origem  $a = (\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}) \in E_n$  e base  $\{e_i - a\}_{1 \leq i \leq n}$  via a correspondência biunívoca.

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in E_n \iff x - a = (x_0 - \frac{1}{n+1}, \dots, x_n - \frac{1}{n+1})$$

Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão  $n$ .

Dada uma base ordenada  $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $V$ , a aplicação

$$\Psi_{(v_i)} : E_n \rightarrow V$$

$$\text{definida por } \Psi_{(v_i)}(x = (x_0, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) v_i$$

é um homeomorfismo que leva  $a = (\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}) \in E_n$

em  $0 \in V$ . É o isomorfismo linear que leva a base  $\{e_i - a\}_{1 \leq i \leq n}$  de  $E_n$  na base  $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$  de  $V$ .

Pela Proposição 2.2, o homomorfismo

$$j_* : H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \rightarrow H_n(E_n, E_n - a)$$

induzido pela inclusão é um isomorfismo.

Consideremos a aplicação  $\Phi_{(v_i)} = \Psi_{(v_i)} \circ j_{\text{id}} : (\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \rightarrow (V, V - 0)$

$$\Phi_{(v_i)}^* : H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \rightarrow H_n(V, V - 0)$$

é um isomorfismo, composição dos isomorfismos.

$$H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \xrightarrow{\text{id}} H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \xrightarrow{j_*} H_n(E_n, E_n - a) \xrightarrow{\Psi_{(v_i)}^*} H_n(V, V - 0) \approx \mathbb{Z}$$

$[\delta_n]$	$\xrightarrow{\Phi_{(v_i)}^*}$	$[\Psi_{(v_i)} \circ \delta_n]$
$[\sigma]$	$\xrightarrow{\text{isomorfismo}}$	$[\Psi_{(v_i)} \circ \sigma]$
(geradores)		(geradores)

onde, lembremos,  $\delta_n = (e_0 \dots e_n) = \text{id} : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$

$$\sigma = (e_0 \dots e_{n-2} e_n e_{n-1}) : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$$

é o  $n$ -simplexo singular que permuta os vértices  $e_n$  e  $e_{n-1}$ , deixando os outros fixos,

Seja  $\Omega$  o conjunto das orientações de  $V$ . Este conjunto tem apenas dois elementos (classes de orientação).

Uma base  $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$  de  $V$  representa uma classe de orientação que indicaremos por  $(v_i)$ .

A base  $\{w_i\}_{1 \leq i \leq n}$  onde  $w_1 = v_1, \dots, w_{n-2} = v_{n-2}, w_{n-1} = v_n$  e  $w_n = v_{n-1}$  representa outra classe de orientação  $(w_i)$ .

O conjunto  $G$  dos geradores de  $H_n(V, V-0) \cong \mathbb{Z}$  tem também apenas dois elementos.

Mostremos que a aplicação

$$\phi : \Omega \rightarrow G$$

$$\text{definida por } \phi((v_i)) = \phi_{(v_i)} * ([\delta_n]) = [\psi_{(v_i)} \circ \delta_n]$$

é bem definida e bijetora.

a)  $\phi$  é bem definida, isto é, não depende do particular representante da classe  $(v_i)$ : se  $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$  é outra base ordenada de  $V$  na mesma classe de orientação de  $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$ , a transformação linear  $L_1 : V \rightarrow V$  dada por  $L_1(v_i) = u_i (1 \leq i \leq n)$ , que leva a base  $\{v_i\}$  na base  $\{u_i\}$  tem determinante positivo e, portanto, pela Proposição 0.8.  $L_1$  é homotópica a  $L_0 = \text{id} : V \rightarrow V$ .

Lembrando que  $\psi_{(v_i)} : E_n \rightarrow V$  é o isomorfismo linear que leva a base  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$  de  $E_n$  na base  $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$  de  $V$  tem-se

$$L_1 \circ \psi_{(v_i)} = \psi_{(u_i)} : E_n \rightarrow V$$

Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 (E_n, E_n - a) & \xrightarrow{\psi_{(v_i)}, \psi_{(u_i)}} & (V, V-0) & \xrightarrow{L_1 \approx L_0 = \text{id}} & (V, V-0) \\
 \uparrow j & & \nearrow \phi & & \\
 (\Delta_n, \Delta_n) & & & & \\
 \uparrow \text{id} & & \phi(u_i) \approx \phi(v_i) & & \\
 (\Delta_n, \Delta_n) & & & & 
 \end{array}$$

$L_1 \approx L_0$  implica  $L_1 \circ \Psi_{(v_i)} \approx L_0 \circ \Psi_{(v_i)}$  i.e.  $\Psi_{(u_i)} \approx \Psi_{(v_i)}$

Então

$$\Psi_{(u_i)} \circ \text{id} \approx \Psi_{(v_i)} \circ \text{id}$$

isto é,

$$\Phi_{(u_i)} = \Phi_{(v_i)} : (\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \rightarrow (V, V-0)$$

e portanto,

$$\Phi_{(u_i)}^* = \Phi_{(v_i)}^* : H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \rightarrow H_n(V, V-0)$$

e daí,

$$\Phi((u_i)) = \Phi_{(u_i)}^*([\delta_n]) = \Phi_{(v_i)}^*([\delta_n]) = \Phi((v_i))$$

Portanto,  $\Phi$  está bem definida.

b)  $\Phi : \Omega \rightarrow G$  é injetora:

A base  $\{w_i\} = \{v_1, \dots, v_{n-2}, v_n, v_{n-1}\}$  representa a classe de orientação  $(w_i)$  distinta da de  $(v_i)$ .

$\Psi_{(v_i)} : E_n \rightarrow V$  foi definida por

$$\Psi_{(v_i)}(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) v_i$$

$$\text{Então } \Psi_{(w_i)}(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - x_0) v_i + (x_{n-1} - x_0) v_n + (x_n - x_0) v_{n-1}$$

Então, para todo  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n \subset E_n$

$$(\Psi_{(w_i)} \circ \sigma)(x_0, \dots, x_n) = \Psi_{(w_i)}(x_0, \dots, x_{n-2}, x_n, x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - x_0) v_i + (x_n - x_0) v_n + (x_{n-1} - x_0) v_{n-1} = \Psi_{(v_i)}(x_0, \dots, x_n)$$

Portanto,

$$\Psi_{(w_i)} \circ \sigma = \Psi_{(v_i)} \circ \delta_n : \Delta_n \rightarrow V.$$

Como  $[\delta_n]$  e  $[\sigma]$  são geradores do grupo cíclico infinito  $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$ ,  $\phi_{(v_i)*}([\delta_n]) = [\psi_{(v_i)} \circ \delta_n]$  e  $\phi_{(w_i)*}([\sigma]) = [\psi_{(w_i)} \circ \sigma]$

são geradores em  $H_n(V, V-0)$ . Pela Proposição 3.4,  $[\sigma] = -[\delta_n]$ .

Então  $\phi_{(w_i)} = \phi_{(w_i)*}([\delta_n]) = -\phi_{(w_i)*}([\sigma]) = -[\psi_{(w_i)} \circ \sigma] = -[\psi_{(v_i)} \circ \delta_n] = -\phi_{(v_i)}$

Como  $\phi_{(w_i)}$  e  $\phi_{(v_i)}$  são elementos não nulos em  $H_n(V, V-0)$  e simétricos, tem-se  $\phi_{(w_i)} \neq \phi_{(v_i)}$  e, portanto,  $\phi$  é injetora.

c)  $\phi : \Omega \rightarrow G$  é sobrejetora: é imediato, pois vimos, acima, que  $\phi_{(w_i)}$  e  $\phi_{(v_i)}$  são geradores em  $H_n(V, V-0)$ , um simétrico do outro, onde  $(v_i)$  e  $(w_i)$  são classes de orientações distintas.

Conclusão:  $\phi : \Omega \rightarrow G$  é uma correspondência biunívoca entre classes de orientação de  $V$  e geradores de  $H_n(V, V-0)$ .

3.6 Teorema. Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Para todo ponto  $x \in M$ ,

$$H_n(M, M-x) \cong H_n(TM_x, TM_x-0).$$

Prova: Seja  $\phi : U_x \rightarrow B^n(0,1) \subset \mathbb{R}^n$  uma carta local; excisão por  $M-U_x$  implica isomorfismo  $i_* : H_n(U_x, U_x-x) \xrightarrow{\cong} H_n(M, M-x)$ .

Consideremos o diagrama:

$$i_* : H_n(U_x, U_x-x) \xrightarrow{\cong} H_n(M, M-x)$$

$$\phi_* \downarrow \cong$$

$$H_n(B^n, B^n-0) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n-0) \xrightarrow{\cong} H_n(TM_x, TM_x-0)$$

donde se conclui o isomorfismo  $H_n(M, M-x) \cong H_n(TM_x, TM_x-0)$ .

Em (3.5) mostramos que existe uma correspondência biunívoca entre os geradores de  $H_n(TM_x, TM_x - 0)$  e as classes de orientação de  $TM_x$ .

Como consequência do teorema acima existe uma correspondência biunívoca natural entre os geradores de  $H_n(M, M-x)$  e as classes de orientação de  $TM_x$ .

CAPITULO 4 . Orientação de Variedades

Neste capítulo  $M^n$  será uma variedade diferenciável de dimensão  $n \geq 1$  e a homologia singular com coeficientes em um a nel comutativo  $R$  com unidade. Seguimos de perto Greenberg (Lectures on Algebraic Topology) e Milnor (Characteristic Classes).

4.1. Proposição. Para cada  $x \in M$ ,

$$H_n(M, M-x) \approx H_n(R^n, R^n-0) \approx R$$

Prova. Seja  $U$  uma vizinhança coordenada de  $x$  homeomorfa a uma bola unitária aberta  $B$  em  $R^n$ .

$$\epsilon_* : H_n(U, U-x) \xrightarrow{\approx} H_n(M, M-x) \text{ é isomorfismo}$$

(excisão do aberto  $M-x$  pelo subconjunto fechado  $M-U$ ).

Se  $\alpha : U \rightarrow B \subset R^n$  é a carta local,

$$\alpha_* : H_n(U, U-x) \rightarrow H_n(B, B-0) \text{ é isomorfismo.}$$

Sendo a bola aberta  $B$  homeomorfa a  $R^n$ ,

$$H_n(B, B-0) \approx H_n(R^n, R^n-0)$$

Como  $B$  é contrátil, a sequência exata de homologia do par  $(B, B-0)$  nos dá

$$H_n(B, B-0) \approx \tilde{H}_{n-1}(B-0), \text{ o } (n-1)\text{-módulo}$$

de homologia reduzido. Mas  $B-0$  tem o mesmo tipo de homotopia de  $S^{n-1}$ . Assim

$$\tilde{H}_{n-1}(B-0) \approx R$$

A composição dos isomorfismos acima implica

$$H_n(M, M-x) \approx H_n(R^n, R^n-0) \approx R$$

Consideremos o caso especial  $n = 2$ ,  $R = \mathbb{Z}$ . Então existem dois possíveis elementos de

$$H_2(M, M-x) \approx H_1(U-x) \approx H_1(S^1)$$

que podem gerar este grupo cíclico infinito, a saber, aqueles representados por laços percorridos uma vez, em torno do ponto  $x$ , em direções opostas. Escolher um destes geradores corresponde, intuitivamente, escolher uma orientação em torno do ponto  $x$ .

Para  $n > 2$  tem-se que determinar os possíveis geradores de  $H_{n-1}(U-x) \approx H_{n-1}(S^{n-1})$ . Olhando  $S^{n-1}$  como a fronteira do simplexo geométrico  $\Delta_n$ , pode-se mostrar que os geradores são  $\pm \partial \delta_n$  onde  $\delta_n : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$  é o simplexo singular identidade de  $\Delta_n$  (veja (2.2)).

**4.2. Definição.** Uma R-orientação local de  $M$  em  $x$  é um gerador do R-módulo  $H_n(M, M-x)$ .

Para definir a noção de uma orientação de  $M$  globalmente, nossa intuição nos diz que devemos ter orientações de  $M$  dada em cada ponto, de modo que estas orientações locais sejam "compatíveis", ou que "se colem". Isto pode ser conseguido em uma vizinhança de um dado ponto  $x$ , no seguinte sentido

**4.3. Lema da Continuação:** Dado um elemento  $\alpha_x \in H_n(M, M-x)$ , existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $x$  e  $\alpha_U \in H_n(M, M-U)$  tal que

$$\alpha_x = j_x^U(\alpha_U) \quad \text{onde}$$

$$j_x^U : H_n(M, M-U) \rightarrow H_n(M, M-x)$$

é o homomorfismo induzido pela inclusão.

Prova. Seja  $\underline{a}$  um ciclo relativo representando  $\alpha_x$ .

Então o suporte  $|\underline{a}|$  de  $\underline{a}$  é um subespaço compacto de  $M$ , contido em  $M-x$ ; assim  $U = M - |\underline{a}|$  é uma vizinhança aberta de  $x$ . Tomemos  $\alpha_U \in H_n(M, M-U)$ , a classe de homologia de  $\underline{a}$  relativa a

M-U; assim

$$j_x^U(\alpha_U) = \alpha_x$$

Este Lema nos diz que podemos obter elementos  $\alpha_y \in H_n(M, M-y)$  para cada  $y$  "próximo de  $x$ " (i.e. para  $y \in U$ ) a partir de  $\alpha_x$ , pondo  $\alpha_y = j_y^U(\alpha_U)$ . Chamamos a uma continuação de  $\alpha_x$  em  $U$ . Devemos mostrar ainda

4.4. Lema da Coerência. Se  $\alpha_x$  gera  $H_n(M, M-x)$ , então  $U$  e  $\alpha_U$  podem ser escolhidos de modo que  $\alpha_y$  gera  $H_n(M, M-y)$  para todo  $y \in U$ .

Isto segue de um resultado mais forte:

4.5. Lema do Localmente Constante. Toda vizinhança  $W$  de  $x$  contém uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que para todo  $y \in U$ ,

$$j_y^U : H_n(M, M-U) \rightarrow H_n(M, M-y) \text{ é isomorfismo}$$

(assim  $\alpha_x$  tem uma única continuação em  $U$ ).

Prova. Seja  $V$  uma vizinhança coordenada de  $x$ , contida em  $W$  ( $V$  é homeomorfa ao  $\mathbb{R}^n$ , portanto contrátil) e seja  $U \subset V$  um aberto menor correspondente a uma bola aberta, de  $\mathbb{R}^n$ , de raio  $< 1$ . Temos, então, o diagrama comutativo, para cada  $y \in U$ :

$$\begin{array}{ccccc} H_n(M, M-U) & \xleftarrow{\text{excisão}} & H_n(V, V-U) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{H}_{n-1}(V-U) \\ \downarrow j_y^U & & \downarrow j_* & & \downarrow i_* \\ H_n(M, M-y) & \xleftarrow{\text{excisão}} & H_n(V, V-y) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{H}_{n-1}(V-y) \end{array}$$

Como a inclusão  $i : V-U \rightarrow V-y$  é uma equivalência de homotopia,  $i_*$  e  $j_*$  são isomorfismos e, então,  $j_y^U$  é um isomorfismo para cada  $y \in U$ .

4.6. Definição. Dado um subespaço  $U \subset M$ , um elemento  $\alpha_U \in H_n(M, M-U)$  tal que  $j_y^U(\alpha_U)$  gera  $H_n(M, M-y)$  para cada  $y \in U$  será chamado uma R-orientação local de  $M$  ao longo de  $U$ .

4.7. Notação. Se  $y \in V \subset U$  são subespaços de  $M$ , consideremos as inclusões

$$\begin{array}{ccccc} (M, M-U) & \xrightarrow{i_1} & (M, M-V) & \xrightarrow{i_2} & (M, M-y) \\ & & \text{-----} & & \uparrow \\ & & i_3 & & \end{array}$$

e os homomorfismos induzidos pelas inclusões

$$\begin{array}{ccccc} H_n(M, M-U) & \xrightarrow{j_V^U} & H_n(M, M-V) & \xrightarrow{j_y^V} & H_n(M, M-y) \\ & & \text{-----} & & \uparrow \\ & & j_y^U & & \end{array}$$

Como  $i_2 \circ i_1 = i_3$  segue-se que  $j_y^V \circ j_V^U = j_y^U$

Em consequência, se  $\alpha_U$  é uma R-orientação ao longo de  $U$ , então  $j_V^U(\alpha_U)$  é uma ao longo de  $V$ , uma vez que

$$j_y^V(j_V^U(\alpha_U)) = j_y^U(\alpha_U) \text{ para cada } y \in V.$$

#### 4.8. R-Orientação global de $M$ .

Suponhamos dadas:

- i) uma família de subespaços abertos  $U_i$  que cobrem  $M$ .
- ii) para cada  $i$ , uma R-orientação local  $\alpha_i \in H_n(M, M-U_i)$  de  $M$  ao longo de  $U_i$

Chamamos isto um sistema de R-orientações se vale a seguinte condição de compatibilidade:

iii) para cada  $x \in M$ , se  $x \in U_i \cap U_j$ , então  $j_x^{U_i}(\alpha_i) = j_x^{U_j}(\alpha_j)$

Neste caso uma  $R$ -orientação local é definida sem ambigüidade em cada ponto  $x$  por

$$\text{iv) } \alpha_x = j_x^{U_i}(\alpha_i) \quad x \in U_i$$

Dado outro sistema de  $R$ -orientações  $(V_k, \beta_k)$ , dizemos que ele define a mesma  $R$ -orientação se

$$\text{v) } \alpha_x = \beta_x \quad \text{para todo } x \in M$$

Então, uma  $R$ -orientação global de  $M$  é, por definição, uma classe de equivalência de sistemas de  $R$ -orientações, a relação de equivalência sendo (v).

Dizemos que  $M$  é  $R$ -orientável (respectivamente, orientável) se existe um sistema de  $R$ -orientações (resp. um sistema de  $Z$ -orientações).

#### 4.9. ORIENTAÇÃO NUMA VARIEDADE DIFERENCIÁVEL NO SENTIDO DA TOPOLOGIA DIFERENCIAL

"Uma orientação em uma variedade diferenciável  $M^n$  ( $n \geq 1$ ) é uma escolha de orientação nos espaços tangentes a  $M$ , em cada um de seus pontos, de tal modo que a seguinte condição de compatibilidade seja satisfeita: Para cada ponto  $p$  de  $M$  existe uma carta local  $(U, x)$  com  $p \in U$  tal que  $Dx(p)$  leve a orientação escolhida em  $TM_p$  na orientação de  $\mathbb{R}^n$  dada por sua base canônica.

Esta definição é equivalente a

"Existe uma cobertura de  $M^n$  por cartas locais tais que a transformação de coordenadas, entre duas quaisquer destas cartas, tem a derivada com determinante positivo".

4.10. EQUIVALÊNCIA DOS CONCEITOS DE ORIENTAÇÃO EM TOPOLOGIA ALGÉBRICA (DADO POR 4.8) E TOPOLOGIA DIFERENCIAL (DADO POR 4.9).

Demonstração: a) (4.9) implica (4.8)

Suponhamos  $M$  orientada segundo (4.9).

Sejam  $p \in M$  e  $x : U_p \subset M \rightarrow x(U_p) \subset \mathbb{R}^n$  uma carta local onde  $U_p$  é um aberto contendo  $p$ . Por (3.5) e (3.6) as classes de orientação do espaço tangente a  $M$  no ponto  $p$ ,  $TM_p$ , estão em correspondência biunívoca com os geradores do grupo cíclico infinito  $H_n(M, M-p)$ .

$TM_p$  possui duas classes de orientação

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right) \text{ e } \left( \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-2}}(p), \frac{\partial}{\partial x_n}(p), \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}(p) \right)$$

Se a primeira corresponde o gerador  $\alpha_p$  de  $H_n(M, M-p)$ , a segunda corresponde o gerador  $-\alpha_p$ .

Notemos que  $\alpha_p$  não depende da particular carta tomada; de fato, se  $y : V_p \subset M \rightarrow y(V_p) \subset \mathbb{R}^n$  é uma outra carta local, como  $M$  é orientada, a matriz de mudança de coordenadas  $T = (y \circ x^{-1})'(x(p))$  tem determinante positivo. Assim as classes de orientação em  $TM_p$  obtidas pela carta  $x$  são exatamente as obtidas pela carta  $y$ .

Pelos lemas (4.3) e (4.4)  $\alpha_p$  tem uma única continuação  $\alpha_U \in H_n(M, M-U)$  onde  $U \subset U_p$  é uma  $n$ -célula aberta contendo  $p$ .

Notemos, também, que esta extensão não depende da particular carta local tomada; com efeito se  $y : V_p \subset M \rightarrow y(V_p) \subset \mathbb{R}^n$  é uma outra carta local, pelos mesmos lemas  $\alpha_p$  pode ser esten-

dida, de maneira única em  $V \subset V_p$ , a um elemento  $\alpha_V \in H_n(M, M-V)$  onde  $V$  é uma  $n$ -célula aberta contendo  $p$ . Para todo  $q \in U \cap V = W_p$ , pelos mesmos lemas  $\alpha_p$  estende-se, de maneira única em uma  $n$ -célula aberta  $W \subset W_p$ , a um elemento  $\alpha_W \in H_n(M, M-W)$ .

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(M, M-U) & \xrightarrow{j_W^U} & H_n(M, M-W) & \xrightarrow{j_q^W} & H_n(M, M-q) \\
 & & \text{iso} & & \\
 & & \nearrow j_W^V & & \\
 H_n(M, M-V) & & & & 
 \end{array}$$

Assim

$$j_q^W(j_W^U(\alpha_U)) = \alpha_q = j_q^W(j_W^V(\alpha_V)) \quad \text{para todo } q \in W$$

Sendo  $j_q^W$  isomorfismo,

$j_W^U(\alpha_U) = j_W^V(\alpha_V) = \alpha_W$  é a orientação local ao longo de  $W$ , a única continuação de  $\alpha_p \in H_n(M, M-p)$  tanto considerando o sistema  $x$  como o sistema  $y$ . Consideremos a família de orientações locais  $\{W, \alpha_W\}$  e seja

$r \in W \cap W' \subset U_p \cap U_q$ . Devemos mostrar que

$$\bar{\alpha}_r = j_r^W(\alpha_W) = j_r^{W'}(\alpha_{W'}) = \alpha_r \in H_n(M, M-r).$$

Mas isto é verdade, pois a matriz de mudança de coordenadas tem determinante positivo, isto significa que as bases dadas em  $TM_r$  usando ambos os sistemas de coordenadas pertencem à mesma classe de orientação. Isto implica que os geradores  $\bar{\alpha}_r$  e  $\alpha_r \in H_n(M, M-r)$  que correspondem àquelas classes de orientação são os mesmos.

Assim a família  $\{W, \alpha_W\}$  é uma orientação global em  $M$ , segundo (4.8).

b) (4.8) implica (4.9)

Vamos supor, agora, que a variedade seja orientável no sentido da topologia algébrica. Seja, então,  $\{U_i, \alpha_i\}_{i \in I}$  um sistema de orientações em  $M$ , onde

- i) a família de subespaços abertos  $U_i$  cobre  $M$
- ii) para cada  $i$ ,  $\alpha_i \in H_n(M, M-U_i)$  é uma orientação local de  $M$  ao longo de  $U_i$ .
- iii) (condição de compatibilidade) para cada  $p \in M$ , se  $p \in U_i \cap U_j$ , então

$$j_p^{U_i}(\alpha_i) = j_p^{U_j}(\alpha_j) = \alpha_p \in H_n(M, M-p)$$

Seja  $p \in M$  e  $x : U_p \subset M \rightarrow x(U_p) \subset \mathbb{R}^n$  uma carta local; existe  $i \in I$  com  $p \in U_i$  e  $\alpha_i$  uma orientação local de  $M$  ao longo de  $U_i$ .

Tomando  $W_i = U_p \cap U_i$  e  $x_i = x|_{W_i}$  a coleção  $\{W_i, x_i\}$  constitui uma cobertura de  $M$  por cartas locais.

Se  $q \in W_i \cap W_j \subset U_i \cap U_j$  com

$$j_q^{U_i}(\alpha_i) = j_q^{U_j}(\alpha_j) = \alpha_q$$

e este gerador corresponde a uma classe de orientação no espaço tangente  $TM_q$ , segue-se que as classes de orientação de  $TM_q$  obtidas das cartas locais  $W_i$  e  $W_j$  são as mesmas, isto é, a mudança de coordenadas tem determinante jacobiano positivo. Logo  $M$  é orientável do ponto de vista da topologia diferencial (segundo (4.9)).

Observação - Uma consequência da equivalência provada acima é que se uma variedade diferenciável  $M^n$  é orientável será também orientável se munida de uma estrutura diferenciável distinta da original.

A Classe Fundamental de Uma Variedade Diferenciável  
Orientada Compacta

Sejam  $M^n$  uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional, não necessariamente compacta, e  $K \subset M$  um subconjunto compacto. Se  $K \subset L \subset M$  denotaremos por

$$j_K^L : H_i(M, M-L) \rightarrow H_i(M, M-K)$$

o homomorfismo natural induzido pela inclusão  $(M, M-L) \rightarrow (M, M-K)$ . Se  $\alpha$  é uma classe de homologia em  $H_i(M, M-L)$ , a imagem  $j_K^L(\alpha)$  costuma ser chamada a "restrição" de  $\alpha$  a  $K$ .

4.11. Lema. Os grupos  $H_i(M, M-K)$  são zero para  $i > n$ . Uma classe de homologia  $\alpha \in H_n(M, M-K)$  é zero se, e só se, a restrição

$$j_x^K(\alpha) \in H_n(M, M-x)$$

é zero para cada  $x \in K$ .

4.12. Teorema. Se  $M^n$  é uma variedade orientada e  $K \subset M$  um subconjunto compacto, existe uma e somente uma classe  $\mu_K \in H_n(M, M-K)$  que satisfaz

$$j_x^K(\mu_K) = \mu_x \quad \text{para cada } x \in K$$

( $\mu_x$ ) uma orientação local para  $M$  em  $x$ ; i.e. uma escolha de um dos dois possíveis geradores para  $H_n(M, M-x; \mathbb{Z})$ .

Em particular, se  $M$  for compacta, então existe uma e apenas uma classe  $\mu_M \in H_n(M)$  tal que

$$j_x(\mu_M) = \mu_x \quad \text{para cada } x \in M.$$

Esta  $\mu_M$  é chamada a classe fundamental de homologia de  $M$ :

### Prova do Teorema

A unicidade segue-se do Lema anterior. De fato, suponhamos que existam  $\mu_K$  e  $\mu'_K$  em  $H_n(M, M-K)$  que satisfazem

$$j_x^K(\mu_K) = \mu_x \quad \text{e} \quad j_x^K(\mu'_K) = \mu_x \quad \text{para cada } x \in K$$

Assim  $j_x^K(\mu'_K - \mu_K) = 0 \in H_n(M, M-x)$  para cada  $x \in K$

e, então, pelo Lema anterior,  $\mu'_K = \mu_K$ .

A prova da existência será dividida em três casos.

Caso 1.  $K$  contido em uma vizinhança aberta  $U$  de um dado ponto  $x_0$ .  $U$  suficientemente pequena de modo que  $\mu_{x_0}$  se estenda a uma única orientação ( $\mathbb{Z}$ -orientação)  $\alpha_U$  ao longo de  $U$ . Neste ca

so, pelos Lemas 4.3, 4.4 e 4.5,

$$j_x^U : H_n(M, M-U) \rightarrow H_n(M, M-x) \text{ é um isomorfismo}$$

e assim,  $\alpha_U$  é um gerador de  $H_n(M, M-U)$  e

$$j_x^U(\alpha_U) = \mu_x \text{ para cada } x \in U.$$

Consideremos os homomorfismos induzidos pelas inclusões

$$H_n(M, M-U) \xrightarrow{j_K^U} H_n(M, M-K) \xrightarrow{j_x^K} H_n(M, M-x)$$

Tomemos

$$\mu_K = j_K^U(\alpha_U), \text{ a restrição de } \alpha_U \text{ a } K.$$

Assim

$$j_x^K(\mu_K) = j_x^K(j_K^U(\alpha_U)) = j_x^U(\alpha_U) = \mu_x \text{ para cada } x \in K$$

Caso 2. Suponhamos  $K = K_1 \cup K_2$  onde  $\mu_{K_1}$  e  $\mu_{K_2}$  existem pelo Caso 1, isto é, tais que

$$j_x^{K_1}(\mu_{K_1}) = \mu_x \text{ para cada } x \in K_1$$

$$\text{e } j_x^{K_2}(\mu_{K_2}) = \mu_x \text{ para cada } x \in K_2$$

Observemos que a condição de compatibilidade de orientações (veja 4.8) garante

$$j_x^{K_1}(\mu_{K_1}) = j_x^{K_2}(\mu_{K_2}) = \mu_x \text{ para cada } x \in K_1 \cap K_2 \quad (I)$$

Consideremos, agora, a seqüência exata (relativa) de Mayer-Vietoris:

$$0 \xrightarrow{\partial} H_n(M, M-K) \xrightarrow{s} H_n(M, M-K_1) \oplus H_n(M, M-K_2) \xrightarrow{t} H_n(M, M-K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\partial} \dots$$

onde

$$s(\alpha) = j_{K_1}^K(\alpha) \oplus j_{K_2}^K(\alpha) \quad \text{e} \quad t(\beta + \gamma) = j_{K_1 \cap K_2}^{K_1}(\beta) - j_{K_1 \cap K_2}^{K_2}(\gamma)$$

Observemos que

$$j_x^{K_1 \cap K_2} (j_{K_1 \cap K_2}^{K_1}(\mu_{K_1})) = j_x^{K_1 \cap K_2} (j_{K_1 \cap K_2}^{K_2}(\mu_{K_2})) = \mu_x$$

para todo  $x \in K_1 \cap K_2$ ; logo, pelo teorema da unicidade para  $K_1 \cap K_2$

$$j_{K_1 \cap K_2}^{K_1}(\mu_{K_1}) = j_{K_1 \cap K_2}^{K_2}(\mu_{K_2}) = \mu_{K_1 \cap K_2}$$

Então

$$t(\mu_{K_1} \oplus \mu_{K_2}) = j_{K_1 \cap K_2}^{K_1}(\mu_{K_1}) - j_{K_1 \cap K_2}^{K_2}(\mu_{K_2}) = 0$$

ou seja

$$\mu_{K_1} \oplus \mu_{K_2} \in \ker t = \text{im } s.$$

Assim

$$\mu_{K_1} \oplus \mu_{K_2} = s(\alpha) \quad \text{para algum } \alpha \in H_n(M, M-K)$$

Este  $\alpha$  é o requerido  $\mu_K$ . De fato, consideremos o diagrama comutativo para todo  $x \in K_1$ .

$$\begin{array}{ccc} H_n(M, M-K) & \xrightarrow{j_x^K} & H_n(M, M-x) \\ \downarrow s & & \uparrow j_x^{K_1} \\ H_n(M, M-K_1) \oplus H_n(M, M-K_2) & \xrightarrow{p_1} & H_n(M, M-K_1) \end{array}$$

Então,

$$j_x^K(\alpha) = (j_x^{K_1} \circ p_1 \circ s)(\alpha) = j_x^{K_1}(\mu_{K_1}) = \mu_x \quad \text{para cada } x \in K_1$$

Analogamente,

$$j_x^K(\alpha) = (j_x^{K_2} \circ p_2 \circ s)(\alpha) = j_x^{K_2}(\mu_{K_2}) = \mu_x \quad \text{para cada } x \in K_2$$

### Caso 3. $K$ arbitrário

Para cada  $x \in K$ , seja  $U_x$  uma vizinhança, homeomorfa a um disco aberto do  $\mathbb{R}^n$ , suficientemente pequena de modo que  $\mu_x$  se estenda a uma única  $\alpha_{\bar{U}_x}$  ao longo de  $\bar{U}_x$ .

O recobrimento aberto  $(U_x)_{x \in K}$  de  $K$  admite um subrecobrimento finito  $(U_{x_i})_{1 \leq i \leq r}$ . Assim

$$K \subset \bar{U}_{x_1} \cup \dots \cup \bar{U}_{x_r} \quad \text{e, pondo } K_i = \bar{U}_{x_i} \cap K,$$

tem-se

$$K = K_1 \cup \dots \cup K_r \quad \text{onde } \mu_{K_i} \text{ existe pelo Caso 1,}$$

para cada  $1 \leq i \leq r$ .

A classe  $\mu_K$  é agora construída por indução sobre  $r$ . Isto completa a prova.

**4.13. Proposição.** Se  $M^n$  for compacta conexa e orientável, então

$H_n(M)$  é cíclico infinito com gerador  $\mu_M$ , a classe fundamental de  $M$ . ([7], p.273)

Neste caso,

$$j_x(\mu_M) = \mu_x \quad \text{para cada } x \in M$$

e  $j_x : H_n(M) \rightarrow H_n(M, M-x)$  é isomorfismo para cada  $x \in M$ .

4.14 Observação. De acordo com (3.5) podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto  $\Omega_x$  das classes de orientação de  $TM_x$ , espaço tangente a uma variedade  $M^n$ , no ponto  $x$  de  $M$ , e o conjunto  $G_x$  dos geradores de  $H_n(TM_x, TM_x - 0)$  e, via o isomorfismo

$$\varepsilon_x : H_n(TM_x, TM_x - 0) \rightarrow H_n(M, M - x) \quad (\text{Prop. 3.6})$$

com os geradores de  $H_n(M, M - x)$

Agora, se  $M$  for compacta, conexa e orientável então utilizando o isomorfismo

$$j_x : H_n(M) \rightarrow H_n(M, M - x)$$

visto em (4.13);  $j_x^{-1} \circ \varepsilon_x$  estabelece, para cada  $x \in M$ , uma correspondência biunívoca entre as classes de orientação do espaço tangente  $TM_x$  e os geradores do grupo cíclico  $H_n(M)$

4.15. Observação. Se a variedade  $M$  não for compacta, por exemplo  $M = \mathbb{R}^n$ , então  $H_n(M) = 0$  e, portanto, o raciocínio acima não se aplica.

## CAPÍTULO 5

## O GRAU DE UMA APLICAÇÃO

## 5.1. Grau de uma aplicação diferenciável

Sejam  $M^n$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis de mesma dimensão com  $M$  compacta (sem bordo) e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Seja  $y \in N$  valor regular de  $f$ . Então  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$  tem um número finito de pontos o qual denotemos com  $\#f^{-1}(y)$ . A função  $\#f^{-1}$  está então definida no conjunto dos valores regulares de  $f$  o qual é um subconjunto aberto e denso de  $N$ . Sendo  $y$  valor regular de  $f$  e  $M$  e  $N$  de mesma dimensão,

$$df_x : TM_x \longrightarrow TN_y$$

é um isomorfismo para cada  $x \in f^{-1}(y)$ . Então podemos escolher vizinhanças abertas  $U_i$  de  $x_i \in f^{-1}(y)$ , duas a duas disjuntas, tais que  $f$  restrita a  $U_i$  é um difeomorfismo sobre uma vizinhança aberta  $V_i$  de  $y$ .

$M - \bigcup_{i=1}^m U_i$  é fechado em  $M$  e, portanto, compacto. Então

sua imagem por  $f$  é fechada em  $N$  e não contém o ponto  $y$ . Logo,

$$V = \bigcap_{i=1}^m V_i - f(M - \bigcup_{i=1}^m U_i)$$

é um aberto contendo  $y$  formado apenas de valores regulares de  $f$  e para todo ponto  $z \in V$ ,  $f^{-1}(z)$  tem exatamente  $m$  elementos, o que mostra que a função  $\#f^{-1}(y)$ , que associa a cada valor regular  $y$  de  $f$ , o número de pontos de  $f^{-1}(y)$  é localmente constante.

Sabe-se também ([8]) que se  $f$  e  $g : M \rightarrow N$  são diferenciativamente homotópicas e  $y \in N$  é um valor regular de ambas, então

$$\#f^{-1}(y) = \#g^{-1}(y) \pmod{2}$$

e se  $N$  for conexa e  $y$  e  $z$  forem valores regulares de  $f$ ,

$$\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(z) \pmod{2}$$

Assim, quando a variedade  $N$  é conexa, o inteiro  $\#f^{-1}(y) \pmod{2}$  está associado apenas à função  $f$  e não ao particular valor regular  $y$ , o que justifica a seguinte definição.

5.2. Definição: Sejam  $M^n$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis de mesma dimensão, com  $M$  compacta (sem bordo),  $N$  conexa,  $f: M \rightarrow N$  diferenciável e  $y$  um valor regular de  $f$ . Ao número inteiro  $\#f^{-1}(y) \pmod{2}$  chamamos o grau, módulo 2, da aplicação  $f$  e denotamos

$$\#f^{-1}(y) \pmod{2} = \deg_2(f)$$

Observe-se mais, que estes inteiros estão de fato associados às classes de homotopia diferenciável das funções, isto é, se  $f, g: M \rightarrow N$  são diferenciavelmente homotópicas, então

$$\deg_2(f) = \deg_2(g)$$

### 5.3. O Grau de Brouwer

Este é definido para aplicações diferenciáveis entre variedades diferenciáveis orientadas.

Sejam  $M^n$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis de mesma dimensão, orientadas, ambas sem bordo, com  $M$  compacta e  $f: M \rightarrow N$  aplicação diferenciável. Se  $x \in M$  é um ponto regular de  $f$ ,

$$df_x: TM_x \longrightarrow TN_{f(x)}$$

é um isomorfismo entre os espaços tangentes a  $M$  e  $N$  nos pontos  $x$  e  $f(x)$ , respectivamente.

Dizemos que  $f$  preserva a orientação em  $x$  se  $df_x$  leva uma base de  $TM_x$ , da orientação de  $M$ , numa base de  $TN_{f(x)}$  da orientação de  $N$ . Caso contrário, dizemos que  $f$  inverte, ou não preserva, a orientação em  $x$ .

Seja, agora,  $y \in N$  um valor regular de  $f$ . A cada  $x \in f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$  associamos o valor (ou sinal)

$$s(df_x) = 1 \text{ se } df_x \text{ preserva a orientação}$$

$$\text{e } s(df_x) = -1 \text{ se } df_x \text{ inverte a orientação.}$$

Para cada valor regular  $y$  de  $f$ , chamamos o grau (de Brouwer) de  $f$  em  $y$  ao número inteiro

$$\deg(f,y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} s(df_x) \quad (1)$$

Se trocarmos a orientação de  $M$  (ou de  $N$ ) o grau muda a penas de sinal. Se  $f$  preserva (inverte) a orientação em  $x$ , o mesmo ocorrerá numa vizinhança de  $x$ .

Como  $M$  é compacta,  $\#f^{-1}(y)$  é localmente constante e como os sinais associados a cada ponto de  $f^{-1}(y)$  se preservam nas vizinhanças também,  $\deg(f,y)$  é localmente constante.

Temos resultados análogos aos que vimos para  $\deg_2 f$ . (veja [1]):

a) Se  $f, g : M \rightarrow N$  são diferenciavelmente homotópicas e  $y$  é um valor regular de  $f$  e de  $g$ , tem-se

$$\deg(f,y) = \deg(g,y)$$

b) Se  $N$  é conexa então  $\deg(f,y)$  tem o mesmo valor para todo valor regular  $y$  de  $f$ .

Neste caso definimos o grau (diferenciável) de  $f$ :

$$\deg(f) = \deg(f,y)$$

e então, se  $f, g : M \rightarrow N$  são diferenciavelmente homotópicas, ambas têm o mesmo grau:

$$\deg(f) = \deg(g)$$

**5.4. Observação.** Se a variedade  $M$  não for compacta podemos também definir  $\deg(f,y)$  para todo  $y \in N$  valor regular de  $f$ , se  $f : M \rightarrow N$  for uma função própria pois, neste caso,  $f^{-1}(y)$  é ainda constituído de um número finito de pontos e tem significado  $\deg(f,y)$  dado pela fórmula (1) acima. Observe-se que se  $M$  é compacta então  $f : M \rightarrow N$  é própria.

**5.5. Observação:**  $\deg_2(f,y) = \#f^{-1}(y) \pmod{2}$  é igual a  $\deg(f,y)$  dado pela fórmula (1) acima, reduzido módulo 2, isto é,

$$\deg(f,y) \pmod{2} = \deg_2(f,y)$$

De fato, admitamos que

$$\deg(f,y) = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{m \text{ vezes}} + \underbrace{(-1) + \dots + (-1)}_{n \text{ vezes}} = m - n$$

Se  $\deg(f,y)$  for par, isto é,  $m - n = 2k$  então

$$\#f^{-1}(y) = m + n = 2(k + n) \text{ é par.}$$

Raciocínio análogo para  $m - n$  ímpar. Assim,

$$\deg(f,y) \pmod{2} = \deg_2(f,y)$$

5.6. Definição. Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis de mesma dimensão  $n$ , orientadas, compactas (sem bordo),  $N$  conexa .

Uma aplicação contínua  $f : M \rightarrow N$  induz um homomorfismo

$$f_* : H_n(M) \longrightarrow H_n(N)$$

entre estes grupos cíclicos infinitos, com geradores  $\mu_M$ , a classe fundamental de  $M$ , e  $\mu_N$ , a classe fundamental de  $N$  respectivamente. Temos

$$f_*(\mu_M) = d \cdot \mu_N$$

O número inteiro  $d$  é chamado o grau topológico de  $f$ .

5.7. EXEMPLO - Sejam  $M^n$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis de mesma dimensão  $n$ , orientadas, compactas sem bordo e conexas. Seja  $f : M \rightarrow N$  um espaço de revestimento de  $m$  folhas de  $N$ , isto é, para cada  $y \in N$  existe uma vizinhança aberta  $V$  tal que  $f^{-1}(V)$  é uma reunião disjunta de conjuntos abertos  $U_1, U_2, \dots, U_m$  em  $M$  cada um dos quais é levado homeomorficamente sobre  $V$  por  $f$ . Os  $U_i$ 's são chamados folhas sobre  $V$  e é claro que a fibra  $f^{-1}(y)$  é um conjunto finito de pontos  $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  onde  $x_i \in U_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Para um  $x \in M$ , escolhamos uma vizinhança  $U$  de  $x$  que é levada homeomorficamente sobre uma vizinhança  $V$  de  $y=f(x)$  por  $f$ . Então  $f$  induz um isomorfismo  $f_x : H_n(M, M-x) \rightarrow H_n(N, N-y)$  o qual é a composição de isomorfismos

$$H_n(M, M-x) \xrightarrow{i_*} H_n(U, U-x) \xrightarrow{(f|U)_*} H_n(V, V-y) \xrightarrow{i_*} H_n(N, N-y).$$

Dizemos que  $f$  preserva orientação em  $x$  se o isomorfismo  $f_x$  leva a orientação local escolhida em  $x$  na orientação local escolhida em  $y$  e diremos simplesmente que  $f$  preserva orientação se para cada  $x \in M$ , o isomorfismo  $f_x$  preservar orientação. Com as notações acima vamos demonstrar a seguinte

5.8. Proposição: - O grau de  $f : M \rightarrow N$  é positivo se, e somente se, a aplicação  $f$  preserva orientação e, neste caso,  $\deg(f) = m$ .

Prova: a) ( $\implies$ )

Seja  $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ; a excisão por  $M - f^{-1}(V)$  induz um isomorfismo

$$H_n(f^{-1}(V), f^{-1}(V) - f^{-1}(y)) \xrightarrow{\sim} H_n(M, M - f^{-1}(y))$$

Por outro lado, sendo  $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^m U_i$ , reunião disjunta, tem-se

$$H_n(f^{-1}(V), f^{-1}(V) - f^{-1}(y)) \approx \bigoplus_{1 \leq i \leq m} H_n(U_i, U_i - x_i)$$

Para cada  $x_i \in f^{-1}(y)$ , a excisão por  $M-U_i$  induz isomorfismo  $H_n(M, M-x_i) \approx H_n(U_i, U_i-x_i)$  e sendo  $U_i$  homeomorfo a  $V$  via  $f|_{U_i}$ , segue que  $H_n(U_i, U_i-x_i) \approx H_n(V, V-y)$ .

A excisão do par  $(N, N-y)$  por  $N-V$  induz isomorfismo  $H_n(V, V-y) \approx H_n(N, N-y)$ , e assim temos o isomorfismo

$$f_{x_i} : H_n(M, M-x_i) \rightarrow H_n(N, N-y).$$

Consideremos então o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(M, M-f^{-1}(y)) & \xrightarrow[\substack{\oplus i_x \\ x \in f^{-1}(y)}]{} & \bigoplus H_n(M, M-x) \xrightarrow{\sum f_x} H_n(N, N-y) \\ \uparrow j & & \uparrow j \\ H_n(M) & \xrightarrow{f_*} & H_n(N) \end{array}$$

Sejam  $\mu_M$  e  $\mu_N$  as classes fundamentais de homologia para as orientações de  $M$  e  $N$ , respectivamente.

Sejam  $\mu_x \in H_n(M, M-x)$  a orientação local em  $x \in M$  e  $\mu_y \in H_n(N, N-y)$  a orientação local em  $y \in N$ . Se  $f : M \rightarrow N$  preserva orientação, então  $f_x(\mu_x) = \mu_y$  para cada  $x \in M$ , e assim usando o diagrama acima obtemos

$$\begin{array}{ccc} j(\mu_M) \longmapsto \mu_{x_1} \oplus \dots \oplus \mu_{x_m} & \xrightarrow{\sum f_{x_i}} & m\mu_y \in H_n(N, N-y) \\ \uparrow & & \downarrow j_y^{-1} \\ \mu_M & \xrightarrow{f_*} & m\mu_N \in H_n(N) \end{array}$$

$f_*(\mu_M) = (j_y^{-1} \circ \sum f_{x_i} \circ j_x)(\mu_M) = m\mu_N$  logo o grau é positivo e além disso  $\deg(f) = m$ .

b) ( $\Leftarrow$ )

Reciprocamente, suponhamos que  $\deg(f) = d \neq 0$  é positivo. Vamos denotar por  $\epsilon(f, x) = \pm 1$  o sinal de  $f$  no ponto  $x$ , isto é,  $\epsilon(f, x) = 1$  se  $f$  preserva orientação em  $x$  e  $\epsilon(f, x) = -1$  o caso contrário, então usando a comutatividade do diagrama acima temos que

$$d = \sum_{x_i \in f^{-1}(y)} \epsilon(f, x_i) = \sum_{i=1}^m \epsilon(f, x_i) > 0.$$

Assim para algum  $i = 1, \dots, m$ ,  $f_{x_i}$  preserva orientação; considero agora o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(M, M-x_i) & \xrightarrow[\approx]{f_{x_i}} & H_n(N, N-y) \\ \approx \uparrow j_{x_i}^U & & \approx \uparrow j_y^V \\ H_n(M, M-U) & \xrightarrow{f_*} & H_n(N, N-V) \\ \approx \downarrow j_{\bar{x}}^U & & \approx \downarrow j_{f(\bar{x})}^V \\ H_n(M, M-\bar{x}) & \xrightarrow[\approx]{f_{\bar{x}}} & H_n(N, N-f(\bar{x})), \bar{x} \in U \end{array}$$

$f_{\bar{x}} = j_{f(\bar{x})}^V \circ (j_y^V)^{-1} \circ f_{x_i} \circ j_{x_i}^U \circ (j_{\bar{x}}^U)^{-1}$  assim se  $f_{x_i}$  preserva orientação então para todo  $\bar{x} \in U$ ,  $f_{\bar{x}}$  preserva orientação.

Sendo  $M$  variedade conexa, então para todo  $x_j \in f^{-1}(y)$  posso cobrir o caminho ligando  $x_i$  a  $x_j$  com um número finito de bolas (ou abertos) duas a duas não disjuntas.

Assim se  $f$  preserva orientação em  $x_i$ , preservará em todo  $x \in f^{-1}(y)$ . Portanto  $f$  preserva orientação e, além disso,  $d = m$ .

5.9. EXEMPLO: Sejam  $M^n$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis, compactas e conexas, e  $f : M \rightarrow y_0 \in N$  aplicação constante. O ponto  $y_0$  não é um valor regular da  $f$ , mas todo  $y \neq y_0$  é um valor regular da  $f$  com  $f^{-1}(y) = \emptyset$ . Portanto,  $\deg(f) = 0$ .

Este procedimento é usado sempre que  $y_0 \in N$  não for um valor regular de uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$ . Pelo teorema de Sard, o conjunto dos valores regulares da  $f$  é um subconjunto aberto e denso de  $N$ . Portanto, numa vizinhança arbitrária de  $y_0$  existe sempre um  $y$  valor regular da  $f$  e, sendo  $N$  conexa,  $\deg(f, y)$  tem o mesmo valor para todo valor regular da  $f$ . Definimos, então,

$$\deg(f) = \deg(f, y)$$

onde  $y$  é um valor regular arbitrariamente próximo de  $y_0$ .

Voltando à aplicação constante  $f : M \rightarrow y_0 \in N$ , para a qual  $\deg(f) = 0$ ,

$f_* : H_n(M) \rightarrow H_n(N)$  é o homomorfismo nulo e, assim, o grau topológico da  $f$  é  $d = 0$ , portanto igual  $\deg(f)$  do ponto de vista diferenciável.

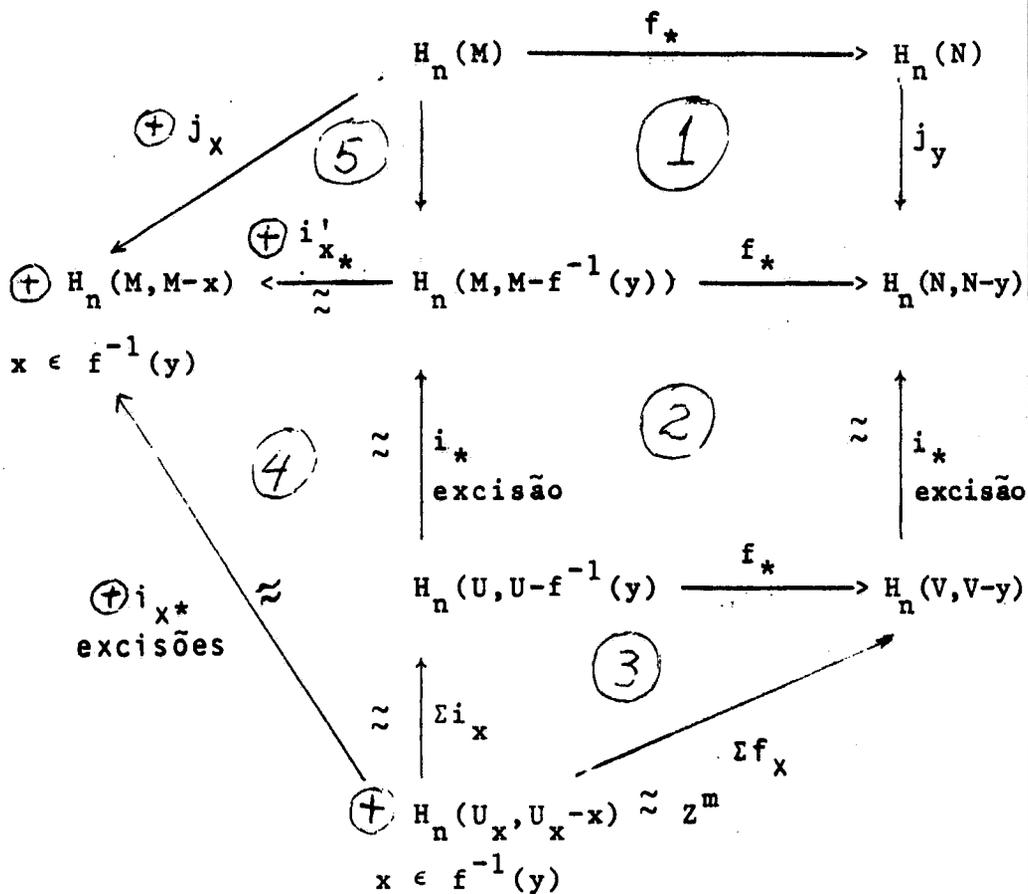
5.10. Teorema. Sejam  $M^n$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis de mesma dimensão,  $n$ , orientadas, compactas (sem bordo) e conexas e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Os graus topológico e diferenciável de  $f$  são iguais.

Demonstração. Suponhamos  $y \in N$  valor regular de  $f$  e  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\} \neq \emptyset$ . Para cada  $x \in f^{-1}(y)$ ,  $df_x : TM_x \rightarrow TN_y$  é um isomorfismo e, então, existem vizinhanças abertas  $U_{x_i}$  de  $x_i \in f^{-1}(y)$ , duas a duas disjuntas, tais que  $f$  restrita a  $U_{x_i}$  é um difeomorfismo sobre uma vizinhança aberta  $V$  de  $y$ . As vizinhanças  $U_{x_i}$  podem ser tomadas homeomorfas à bola aberta de centro na origem do  $R^n$  e raio 1.

Pondo  $U = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} U_x$

consideremos o seguinte diagrama

comutativo:



Os diagramas 1) e 2) são obviamente comutativos.  
Para ver que o diagrama 3) é comutativo, seja

$$[\alpha] = ([\alpha_1], \dots, [\alpha_m]) \in \bigoplus_{x \in f^{-1}(y)} H_n(U_x, U_x - x)$$

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} f_x([\alpha]) = [f\alpha_1] + \dots + [f\alpha_m]$$

Por outro lado,

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} i_x([\alpha]) = ([\alpha_1] + \dots + [\alpha_m]) \in H_n(U, U - f^{-1}(y))$$

$$e \quad f_*([\alpha_1] + \dots + [\alpha_m]) = [f\alpha_1] + \dots + [f\alpha_m] \in H_n(V, V - y)$$

O Diagrama 4) é comutativo pois,

$$\begin{aligned} (\bigoplus_{x_*} i'_{x_*} \circ \bigoplus_{x_*} i_{x_*})([\alpha]) &= (\bigoplus_{x_*} i'_{x_*} \circ i_{x_*})([\alpha_1], \dots, [\alpha_m]) = \\ &= \bigoplus_{x_*} i'_{x_*}([\alpha_1], \dots, [\alpha_m]) = ([\alpha_1] + \dots + [\alpha_m], \dots, [\alpha_1] + \dots + [\alpha_m]) \in \\ &\in H_n(M, M - x_1) \times \dots \times H_n(M, M - x_m) \end{aligned}$$

Para  $i \neq j$ ,  $U_{x_i} \cap U_{x_j} = \emptyset$ ; então  $U_{x_j} - x_j \subset M - x_i$  e, assim,

$$[\alpha_j] = 0 \in H_n(M, M - x_i)$$

Assim,

$$\bigoplus_{x_*} i'_{x_*}([\alpha_1], \dots, [\alpha_m]) = ([\alpha_1], \dots, [\alpha_m]) = \bigoplus_{x_*} i_{x_*}([\alpha]),$$

Logo,

$$\begin{array}{ccc} \theta i'_{x_*} \circ i_{x_*} \circ \Sigma i_x & = & \theta i_{x_*} \\ x \in f^{-1}(y) & & x \in f^{-1}(y) \end{array}$$

Mostremos, agora, que o diagrama 5) é comutativo:

Seja  $[\beta] \in H_n(M)$ . Então  $j_*([\beta]) = [\beta] \in H_n(M, M-f^{-1}(y))$

$$\begin{array}{ccc} \theta i'_{x_*}([\beta]) = ([\beta], \dots, [\beta]) \in \theta H_n(M, M-x) & = & \theta j_x([\beta]) \\ x \in f^{-1}(y) & & x \in f^{-1}(y) \quad x \in f^{-1}(y) \end{array}$$

Vamos mostrar, agora, que é comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_n(M) & \xrightarrow{f_*} & H_n(N) \\ \downarrow \theta j_x & & \downarrow j_y \\ \theta H_n(M, M-x) & \xrightarrow[\Sigma h_x]{i_* \circ \Sigma f_x \circ \theta i_{x_*}^{-1}} & H_n(N, N-y) \\ x \in f^{-1}(y) & & \end{array} \quad (I)$$

onde

$$h_x : H_n(M, M-x) \xrightarrow[\sim]{(i_{x_*})^{-1}} H_n(U_x, U_x-x) \xrightarrow[\sim]{f_x} H_n(V, V-y) \xrightarrow[\sim]{i_*} H_n(N, N-y)$$

Usando a comutatividade dos diagramas 3) e 2) temos

$$i_* \circ \Sigma f_x \circ \theta i_{x_*}^{-1} \circ \theta j_x = f_* \circ i_* \circ \Sigma i_x \circ \theta i_{x_*}^{-1} \circ \theta j_x \quad (II)$$

Considerando que  $\theta i'_{x_*}$  é isomorfismo a comutatividade do diagrama 4) tem-se

$$i_x \circ \Sigma i_x \circ \theta i_{x_*}^{-1} = (\theta i'_{x_*})^{-1}$$

Usando a comutatividade do diagrama 5), o segundo membro de (II) torna-se

$$f_* \circ j_* \text{ e, portanto, } j_y \circ f_*$$

pela comutatividade do diagrama 1).

Assumamos  $U_x$  e  $V$  cartas diferenciáveis em torno de  $x \in f^{-1}(y)$  e de  $y$ , respectivamente e consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega_x & \xrightarrow{D} & \Omega_y \\
 \downarrow \phi_x & \text{(III)} & \downarrow \phi_y \\
 H_n(TM_x, TM_x - 0) & \xrightarrow{(df_x)_*} & H_n(TN_y, TN_y - 0) \\
 \downarrow \xi_{x*} & \text{(IV)} & \downarrow \xi_{y*} \\
 H_n(U_x, U_x - x) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V - y) \\
 \downarrow i_* & \text{(V)} & \downarrow i_* \\
 H_n(M, M - x) & \xrightarrow{f_*} & H_n(N, N - y)
 \end{array} \quad \text{(veja 3.5)}$$

Devemos mostrar a comutatividade dos diagramas (III), (IV) e (V).

$\Omega_x$  e  $\Omega_y$  são os conjuntos das classes de orientação em  $TM_x$  e  $TN_y$ , respectivamente. Se  $\{v_1(x), \dots, v_n(x)\}$  é uma base de  $TM_x$ , sendo  $df_x : TM_x \rightarrow TN_y$  isomorfismo segue-se que  $\{df_x(v_1(x)), \dots, df_x(v_n(x))\}$  é uma base em  $TN_y$  e  $D: \Omega_x \rightarrow \Omega_y$  é definida por

$$D((v_i(x))) = (df_x(v_i(x)))$$

Esta aplicação está bem definida pois, se  $\{\omega_1(x), \dots, \omega_n(x)\}$  é uma outra base em  $TM_x$  na mesma classe de orientação de  $\{v_1(x), \dots, v_n(x)\}$  então a matriz  $P = (a_{ij})$  de mudança de coordenadas da base  $\{v_i(x)\}$  para a base  $\{\omega_i(x)\}$  tem determinante positivo.

Como  $\omega_i(x) = a_{i1}v_1(x) + \dots + a_{in}v_n(x)$  tem-se

$$df_x(\omega_i(x)) = a_{i1}df_x(v_1(x)) + \dots + a_{in}df_x(v_n(x))$$

Assim a matriz mudança de coordenadas da base  $\{df_x(v_i(x))\}$  para a base  $\{df_x(\omega_i(x))\}$  é exatamente  $P$  com  $\det P > 0$  e, portanto, essas bases representam a mesma classe de orientação, isto é,

$$(df_x(v_i(x)) = (df_x(\omega_i(x)))$$

No que se segue estaremos usando as notações de (3.5):

$$\Delta_n = |e_0 e_1 \dots e_n| \text{ o } n\text{-simplexo padrão em } R^{n+1},$$

$E_n \subset R^{n+1}$  a subvariedade linear afim gerada pelos pontos  $e_0, e_1, \dots, e_n$ , com estrutura de espaço vetorial de dimensão  $n$ , origem  $a = (\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}) \in E_n$  e base  $\{e_i - a\}$ ,

$$1 \leq i \leq n.$$

$$\delta_n = (e_0 \dots e_n) = \text{id}: \Delta_n \rightarrow \Delta_n$$

$$\sigma = (e_0 \dots e_{n-2} e_n e_{n-1}) : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$$

$\psi(v_i(x)) : E_n \rightarrow TM_x$  o isomorfismo linear

definido por  $\psi(v_i(x))(\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_0)v_i(x)$

que leva a base  $\{e_i - a\}$  de  $E_n$  na base  $\{v_i(x)\}$  de  $TM_x$ .

O isomorfismo  $\phi_{(v_i)_*} : H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \rightarrow H_n(TM_x, TM_x - 0)$  é a composição dos isomorfismos.

$$H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \xrightarrow{id} H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \xrightarrow{j_*} H_n(E_n, E_n - a) \xrightarrow{\Psi(v_i)_*} H_n(TM_x, TM_x - 0)$$

que leva os geradores  $[\delta_n]$  e  $[\sigma]$  nos geradores  $[\Psi(v_i)_* \delta_n]$  e  $[\Psi(v_i)_* \sigma]$ , respectivamente.

$\phi_x : \Omega_x \rightarrow H_n(TM_x, TM_x - 0)$  é a aplicação que estabelece a correspondência biunívoca entre as classes de orientação de  $TM_x$  e os geradores de  $H_n(TM_x, TM_x - 0)$ , definida por

$$\phi_x((v_i(x))) = [\Psi(v_i)_* \delta_n]$$

Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{\Psi(v_i)} & TM_x \\ & \searrow \Psi(\omega_i) & \downarrow df_x \\ & & TN_y \end{array} \quad \begin{array}{l} (df_x \circ \Psi(v_i))(e_i - a) = df_x(v_i(x)) = \omega_i(y) \\ \text{e, da unicidade de } \Psi(\omega_i), \text{ segue-se} \\ df_x \circ \Psi(v_i) = \Psi(\omega_i) \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (df_x)_* \circ \phi_x((v_i(x))) &= (df_x)_* [\Psi(v_i)_* \delta_n] = [df_x \circ \Psi(v_i)_* \delta_n] = \\ &= [\Psi(\omega_i)_* \delta_n] = \phi_y((\omega_i(y))) = \phi_y((df_x(v_i(x)))) \\ &= \phi_y((df_x(v_i(x)))) = \phi_y \circ D((v_i(x))) \end{aligned}$$

Portanto, o diagrama (III) é comutativo:

$$(df_x)_* \circ \phi_x = \phi_y \circ D.$$

As aplicações  $\xi_x : TM_x \rightarrow U_x$  e  $\xi_y : TN_y \rightarrow V$  são a composição dos homeomorfismos indicados nas colunas verticais do diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc}
 a = \sum \lambda_i v_i(x) \in TM_x & \xrightarrow{df_x} & TN_y \quad \sum \lambda_i df_x(v_i(x)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \sum \lambda_i e_i \in \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^n \quad \sum \lambda_i e_i \\
 \downarrow g & & \downarrow g \\
 B^n & & B^n \\
 \text{carta} \downarrow h & & \downarrow f \circ h \\
 U_x & \xrightarrow{f} & V \\
 (\text{hog})(\sum \lambda_i e_i) & \xrightarrow{\quad} & (\text{fohog})(\sum \lambda_i e_i)
 \end{array}$$

Como este diagrama é comutativo, a nível de aplicações segue-se a comutatividade do diagrama (IV).

A comutatividade do diagrama (V) é imediata.

Da comutatividade dos diagramas (IV) e (V) concluímos que

$h_x : H_n(M, M-x) \rightarrow H_n(N, N-y)$  preserva orientação se, e só se,  $df_x : TM_x \rightarrow TN_y$  preserva orientação, isto é,  $f$  preserva orientação no sentido da topologia algébrica se, e só se,  $f$  preserva orientação no sentido da topologia diferencial.

Assim,  $df_x$  e  $h_x$  têm o mesmo sinal  $s(h_x)$  e

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} h_x(\mu_x) = \sum s(h_x) \mu_y = \text{deg}(f) \mu_y$$

Voltando ao diagrama (I),

$$(\sum h_x \circ \theta j_x)(\mu_M) = \sum h_x(\mu_x) = \deg(f)\mu_j$$

$$x \in f^{-1}(y)$$

Pela comutatividade do diagrama (I), o primeiro membro desta igualdade é:

$$(j_y \circ f_*)(\mu_M) = j_y(d\mu_N) = dj_y(\mu_N) = d\mu_y; \text{ portanto}$$

$$\deg(f) = d$$

isto é, o grau diferenciável é igual ao grau topológico.

Se  $f^{-1}(y) = \emptyset$ , então  $\deg(f) = 0$ , e pela comutatividade de do diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_n(M) & \xrightarrow{f_*} & H_n(N) \\ \downarrow i & & \approx \downarrow j_y \\ 0 = H_n(M, M) & \xrightarrow{f_*} & H_n(N, N-y) \end{array}$$

Segue que  $f_* : H_n(M) \rightarrow H_n(N)$  é o homomorfismo nulo, e daí  $d = 0$ . Logo também neste caso tem-se

$$\deg(f) = d$$

O teorema 5.10 pode ser mais geral se fizermos a seguinte:

Observação:

Existe uma correspondência biunívoca  $[M, N]_{C^0} \longleftrightarrow [M, N]_{\text{dif}}$

entre o conjunto das classes de homotopia de aplicações contínuas  $M \rightarrow N$  e o conjunto das aplicações diferenciáveis  $M \rightarrow N$ . Como o grau de uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  depende apenas da classe de homotopia de  $f$ , podemos dar a seguinte definição para o grau de uma aplicação contínua sob o ponto de vista da topologia diferencial.

Definição: Seja  $f : M^n \rightarrow N^n$  uma aplicação contínua entre varie-

dades de mesma dimensão orientadas, compactas (sem bordo) e conexas. O grau de  $f$ , denotado por  $\deg(f)$  é o número inteiro dado por  $\deg(f) = \deg(g)$  onde  $g : M \rightarrow N$  é uma aplicação  $C^\infty$ ,  $\epsilon$ -aproximação de  $f$  e  $f \approx g$ . (veja [4], p.25).

Assim no teorema 5.10, podemos supor  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação contínua e estaremos provando que  $\deg(f) = d$ , em outras palavras, "o grau de uma aplicação contínua, tanto do ponto de vista topológico como do diferencial, são iguais".

### E X E M P L O S

Exemplo. 5.11. Seja  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  o círculo de centro na origem e raio 1, o qual podemos considerar como o conjunto dos números complexos de norma 1, isto é,

$$S^1 = \{z = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|z\| = 1\}$$

Defino  $f : S^1 \rightarrow S^1$  por  $f(z) = z^k$  (multiplicação de números complexos)

Então se  $k = 0$   $f$  é uma aplicação constante e assim

$$d = \deg(f) = 0$$

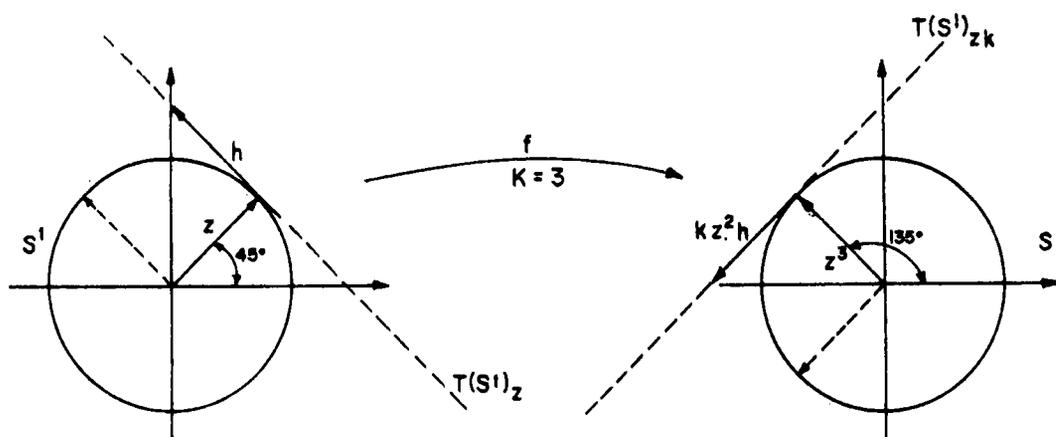
Se  $k \neq 0$  então do ponto de vista da topologia diferencial temos

$$f'(z) : T(S^1)_z \rightarrow T(S^1)_k \text{ dada por}$$

$$f'(z) = kz^{k-1} \cdot h \text{ onde } z = (x,y) = (\cos\theta, \sin\theta) = e^{i\theta}.$$

Escolho o sentido anti-horário como o sentido de percurso em  $S^1$ ; isto significa que uma base em  $T(S^1)_z$  compatível com esta escolha é dada por

$$h = (-\sin\theta, \cos\theta) = e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$$



$$\text{Assim } f'(z) \cdot h = ke^{i(k-1)\theta} e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} = ke^{i(k\theta + \frac{\pi}{2})} =$$

$$= k(-\text{sen}k\theta, \text{cos}k\theta) = k \cdot w \quad \text{onde}$$

$$w = (-\text{sen}k\theta, \text{cos}k\theta) \quad \bar{e} \text{ uma base em } T(S^1)_{z^k}$$

Assim se  $k > 0$   $f$  preserva orientação e se  $k < 0$  então  $f$  inverte orientação e como todo ponto de  $z_0 \in S^1$  é valor regular de  $f$  e  $\# f^{-1}(z_0) = k$  então  $\text{deg}(f) = k$ . (grau "diferenciável").

Vamos agora calcular o grau topológico

Um elemento  $[\alpha] \in H_1(S^1) \approx \pi_1(S^1)$  é representado por um laço com ponto base  $a = (1,0)$  e consideremos o isomorfismo (veja [5] p. 132).

$$v_* : \pi_1(S^1, a) \rightarrow \mathbb{Z}$$

dado por

$$v_*([\alpha]) = v(\alpha) = \text{número de voltas com que } \alpha \text{ enrola } S^1.$$

$$\text{Se } \alpha : [0,1] \rightarrow S^1 \text{ é o laço dado por } \alpha(t) = e^{2\pi it}$$

então  $\alpha$  representa um gerador e  $v(\alpha) = 1$ .

Como  $v(f\alpha) = k$  tem-se

$$v_*(k[\alpha]) = kv_*([\alpha]) = k \cdot 1 = k$$

$$v_*([f\alpha]) = (f\alpha) = k$$

Logo,

$$f_*([\alpha]) = [f\alpha] = k[\alpha]. \text{ Assim, } d = k.$$

Portanto,

$$d = \deg(f).$$

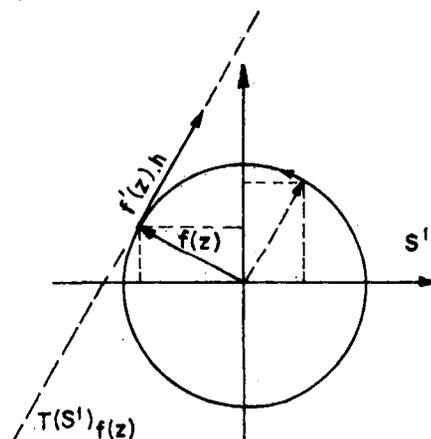
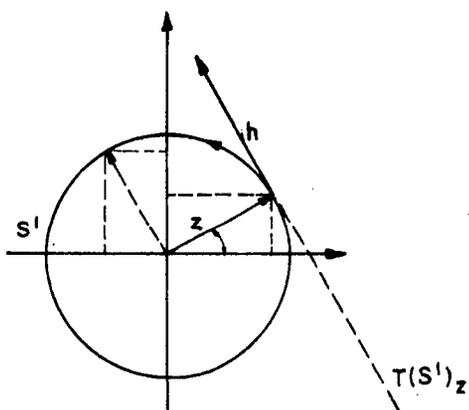
Exemplo. 5.12. Seja  $f : S^1 \rightarrow S^1$  uma reflexão em torno do eixo  $y$  dada por

$$f(z) = (-x, y) \text{ onde } z = (x, y).$$

Então  $f'(z) : T(S^1)_{(x,y)} \rightarrow T(S^1)_{(-x,y)}$ , é dada por

$$f'(z)(h, k) = (-h, k).$$

Escolho o sentido anti-horário como o sentido de percurso em  $S^1$ , isto significa que uma base em  $T(S^1)_{(x,y)}$  compatível com esta escolha é dada por  $h = (-y, x)$ .



Temos  $f'(z)h = (y, x) \in T(S^1)_{(-x,y)}$  mas uma base  $T(S^1)_{(-x,y)}$  compatível com a escolha feita acima é dada por  $w = (-y, -x)$  a qual não está na mesma classe de orientação de  $f'(z)h$ , logo  $f$  inverte orientação e além disso

$$f'(z)h = (y, x) = -1(-y, -x) = -1w$$

Todo  $z \in S^1$  é valor regular de  $f$  e como  $\# f^{-1}(z) = 1$  segue que  $\deg(f) = -1$ .

Vamos agora calcular o grau topológico.

Sejam  $z = (0,1)$ ,  $z' = (0,-1)$ ,  $x = (-1,0)$  e  $y = (1,0)$

O recobrimento aberto de  $S^1$  constituído de  $U = S^1 - \{z'\}$  e  $V = S^1 - \{z\}$  tem a propriedade de  $f(U) \subset U$  e  $f(V) \subset V$  então pela naturalidade da sequência de Mayer-Vietoris

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_1(S^1) & \xrightarrow{\Delta} & H_0(U \cap V) & \longrightarrow & \\
 & & \downarrow f_* & & \downarrow f_{3*} & & \text{onde } f_3 = f|_{U \cap V} \\
 & & & & & & \\
 & \longrightarrow & H_1(S^1) & \xrightarrow{\Delta} & H_0(U \cap V) & \longrightarrow & 
 \end{array}$$

tem as linhas exatas e os retângulos comutativos. Um gerador  $\alpha$  de  $H_1(S^1)$  pode ser representado pelo ciclo  $c+d$ , onde

$\partial c = x-y = -\partial d$  e  $\Delta(\alpha)$  é representado por  $x-y$ , assim

$$\Delta(f_*(\alpha)) = f_{3*}(\Delta(\alpha)) = f_{3*}(x-y) = y-x = -\Delta(\alpha) = \Delta(-\alpha)$$

e sendo  $\Delta$  um monomorfismo  $f_*(\alpha) = -\alpha$  e portanto o grau topológico  $d = -1$ . Notamos então que  $\deg(f) = d = -1$ .

Na prova do teorema a seguir utilizaremos os seguintes lemas

Lema 1 - Sejam  $M^n$  e  $N^n$  variedades orientadas, de mesma dimensão, compactas e conexas,  $N^n$  satisfazendo  $\pi_r(N^n) = 0$  para  $1 < r < n$ ,  $\tilde{N}$  o revestimento de  $N$ , e seja  $q$  o número de folhas do revestimento. Então para um dado homomorfismo

$$\theta : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$$

entre os grupos fundamentais, o grau das aplicações  $M \rightarrow N$  induzindo esta  $\theta$  são todos os inteiros numa mesma classe de congruência módulo  $q$ . (veja [9], p. 464, Teorema IIa, observando-se que os espaços lenticulados são variedades orientáveis e, portanto, o "twisted degree" do Teorema IIa, é aqui o grau ordinário).

Lema 2 - Sejam  $(\tilde{X}, p)$  um espaço de revestimento de  $X$  e  $g_0, g_1 : I \rightarrow \tilde{X}$  dois caminhos em  $\tilde{X}$  com o mesmo ponto inicial. Se  $pg_0 \sim pg_1$  então  $g_0 \sim g_1$  e, além disso,  $g_0$  e  $g_1$  têm o mesmo ponto final.

#### EXEMPLO - ESPAÇOS LENTICULADOS (LENS SPACE)

Consideremos  $S^3$  como a esfera 3-dimensional unitária de  $C^2$ , o 2-espaço complexo.  $S^3$  é, então, dada em termos de duas coordenadas complexas

$$z_0 = r_0 e^{i\alpha_0}, \quad z_1 = r_1 e^{i\alpha_1} \quad \text{com} \quad r_0^2 + r_1^2 = 1 \quad (1)$$

Seja  $p \geq 2$  um fixado inteiro e seja  $q$  um inteiro relativamente primo com  $p$ .

Definamos uma rotação  $\gamma : S^3 \rightarrow S^3$  por

$$\gamma(z_0, z_1) = (z_0 w, z_1 w^q) \quad \text{onde} \quad w = e^{2\pi i/p} \quad (2)$$

é a  $p$ -ésima raiz principal da unidade. Então  $\gamma$  é periódica de período  $p$ . Assim, gera uma  $Z_p$ -ação em  $S^3$ . Em outras palavras  $\gamma$  gera um grupo cíclico de rotações de  $S^3$  de ordem  $p$ , nenhum

desses elementos (exceto a identidade) tem um ponto fixo. Chamamos este grupo  $\Gamma$ .

Consideremos o espaço de órbitas desta ação; isto é, identificamos pontos  $x, y$  de  $S^3$  se

$$x = \gamma^k(y) \text{ para algum } k.$$

Este espaço de órbitas é uma 3-variedade diferenciável orientável, conexa, compacta  $L(p, q)$  chamada "espaço lenticulado" (lens space). Outras descrições de  $L(p, q)$  são dadas em ([10], p.233). A fórmula (2) pode ser escrita:

$$\gamma(z_0, z_1) = (e^{2\pi i/p} z_0, e^{2\pi i q/p} z_1) \quad (3)$$

O espaço do revestimento universal de  $L(p, q)$  é  $S^3$  ([10], p.239) com  $\Gamma$  o grupo de transformações do revestimento. Podemos, portanto, tomar  $\Gamma$  (o qual é isomorfo a  $Z_p$ ) como o grupo fundamental de  $L(p, q)$  (veja [6], p.163 Corol. 7.5). O número inteiro  $p$  é o número de folhas do espaço de revestimento universal de  $L(p, q)$ .

Sejam  $L = L(p, q)$  e  $L' = L(p', q')$  dois espaços lenticulados com fixadas orientações, usando primos na notação. Escolhamos como geradores dos grupos fundamentais  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  os elementos específicos  $\gamma$  e  $\gamma'$  dos modelos acima (lembramos que  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  são isomorfos a  $Z_p$  e  $Z_{p'}$ , respectivamente.)

No que se segue  $q^{-1}$  indica um inteiro para o qual  $q^{-1}q \equiv 1 \pmod{p}$ . Provemos o seguinte

Teorema. Para cada inteiro  $k$ ,  $0 \leq k < p'$ , satisfazendo  $kp \equiv 0 \pmod{p'}$  existe um homomorfismo  $\theta_k : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  definido por

$$\theta_k(\gamma) = (\gamma')^k$$

e isto exaure os possíveis homomorfismos. Os graus das aplicações  $L(p, q) \rightarrow L(p', q')$  induzindo  $\theta_k$  são todos os inteiros congruentes a

$$k\left(\frac{kp}{p'}\right)q'q^{-1} \pmod{p'} \quad (\text{vide [9]})$$

Demonstração. A primeira parte é óbvia. A fim de provar a segunda parte, nós definimos

$$\tilde{f} : S^3 \rightarrow S^3 \text{ por}$$

$$f(r_0 e^{i\alpha_0}, r_1 e^{i\alpha_1}) = (r_0 \exp(i \frac{kp}{p'} \alpha_0), r_1 \exp(i \frac{kp}{p'} q' q^{-1} \alpha_1)) \quad (5)$$

Como  $kp/p'$  é um inteiro,  $\tilde{f}$  está bem definida. De (2) e (5) temos, para cada ponto  $z \in S^3$ .

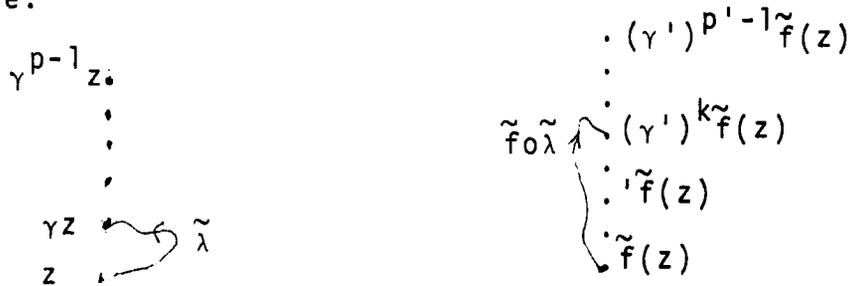
$$\tilde{f}(\gamma z) = (\gamma')^k \tilde{f}(z) \quad (6)$$

donde se conclui que  $\tilde{f}$  induz (ou cobre) uma aplicação

$$f : L \rightarrow L' \text{ tal que}$$

$$f \rho = \rho' \tilde{f} \quad (7)$$

onde  $\rho$  e  $\rho'$  denotam a projeção de  $S^3$  sobre  $L$  e  $L'$ , respectivamente.



$$\begin{array}{ccc} z \in (S^3, z) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (S^3, \tilde{f}(z)) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho' \\ \begin{array}{ccc} \text{---} \xrightarrow{\lambda} (L, \bar{z}) & \text{-----} f \text{-----} & (L', \overline{\tilde{f}(z)}) \\ 0 & 1 & \end{array} \end{array}$$

$$\bar{z} = [z] = \{\gamma, \gamma z, \dots, \gamma^{p-1} z\} \in L = L(p, q) \quad \overline{\tilde{f}(z)} = [\tilde{f}(z)] \in L' = L(p', q')$$

$$\pi_1(L, \bar{z}) = \Gamma = \{1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{p-1}\} \xrightarrow{f_*} \pi_1(L', \overline{\tilde{f}(z)}) = \Gamma' = \{1, \gamma', \dots, \gamma'^{p'-1}\}$$

$$\gamma \xrightarrow{\theta_k} (\gamma')^k$$

Segue-se, de (6) e (7) que  $f$  induz o homomorfismo  $\theta_k$ . De fato, sejam  $\gamma$  gerador de  $\Gamma = \pi_1(L, \bar{z})$  e  $\lambda : [0, 1] \rightarrow (L, \bar{z})$  um laço em  $L$ , com ponto base  $\bar{z}$ , representando  $\gamma$ ; este  $\lambda$  se levanta em um caminho  $\tilde{\lambda} : [0, 1] \rightarrow (S^3, z)$  cujo ponto inicial é o ponto base  $z$  e ponto final  $\gamma z$ . Analogamente, o laço  $fo\lambda$  com ponto base  $[f(z)] \in L'$  se levanta no caminho  $\tilde{fo}\tilde{\lambda}$  cujo ponto inicial é o ponto base  $\tilde{f}(z)$  e ponto final  $(\gamma')^k \tilde{f}(z)$ .

Então,

$$f_*(\gamma) = f_*([\lambda]) = [fo\lambda] = [\rho' o \tilde{fo}\tilde{\lambda}] = (\gamma')^k = \theta_k(\gamma)$$

Portanto,

$$f_* = \theta_k$$

Os graus das aplicações de revestimento  $\rho$  e  $\rho'$  são  $p$  e  $p'$ , respectivamente, pois são aplicações de revestimento de  $p$  folhas e  $p'$  folhas, respectivamente (veja 5.7 e 5.8).

De (5) o grau de  $\tilde{f}$  é claramente

$$\left(\frac{kp}{p'}\right)^2 q' q^{-1}$$

Disto e (7) obtemos que o grau de  $f$  é dado por

$$\deg(f) = \frac{p'}{p} \deg(\tilde{f})$$

Portanto,

$$\deg(f) = k \left(\frac{kp}{p'}\right) q' q^{-1}$$

Observando, ainda, que, sendo  $S^3$  o revestimento universal de  $L' = L(p', q')$ ,

$$\pi_2(L(p', q')) = \pi_2(S^3) = 0 \quad (\text{veja [14], p.50, Th. 1.5}).$$

estando, portanto, cumpridas as condições para a aplicação do Lema 1) acima, do qual concluímos que as aplicações  $L \rightarrow L'$  induzindo a mesma  $\theta_k$  têm os seus graus congruentes

$$k \left(\frac{kp}{p'}\right) q' q^{-1} \pmod{p'}$$

o que demonstra o teorema.

O grau de uma aplicação ao longo de subconjuntos compactos

Daremos neste parágrafo uma noção de grau topológico que generaliza a definição 5.6. Seguem também várias aplicações nos campos da Geometria e Análise.

Sejam  $M^n$  e  $N^n$  variedades topológicas de mesma dimensão, orientadas. Dada  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação contínua e  $K \subset N$  um subconjunto compacto e conexo tal que  $S = f^{-1}(K)$  é um subconjunto compacto de  $M$ , podemos considerar a aplicação contínua de pares de espaço  $f : (M, M-S) \rightarrow (N, N-K)$  a qual induz um homomorfismo

$f_* : H_n(M, M-S) \rightarrow H_n(N, N-K)$  onde  $H_n(N, N-K) \cong \mathbb{Z}$  é um grupo cíclico infinito ([2], p. 121); assim se  $\alpha_S$  e  $\alpha_K$  são as orientações locais ao longo de  $S$  e  $K$  respectivamente então

$$f_*(\alpha_S) = d\alpha_K$$

isto é, a imagem de  $\alpha_S$  pela aplicação  $f$  é um múltiplo inteiro de  $\alpha_K$ ; sendo  $\alpha_S$  única tem sentido a seguinte definição:

**5.13. Definição.** O grau de uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  ao longo de um subconjunto  $K \subset N$  compacto e conexo tal que  $S = f^{-1}(K)$  é compacto, é o número inteiro  $d$ , tal que  $f_*(\alpha_S) = d\alpha_K$ . Em símbolos

$$f_*(\alpha_S) = \text{deg}(f, K)\alpha_K.$$

**Observação 1:** No caso em que  $M$  e  $N$  forem variedades compactas e conexas, então tomando  $K = N$  temos  $f_* : H_n(M) \rightarrow H_n(N)$  um homomorfismo entre grupos cíclicos infinitos e assim  $\text{deg}(f, N) = \text{deg}(f)$

**Observação 2:** Se  $K$  é constituído de um único ponto  $K = \{y\}$  então  $\text{deg}(f, y)$  é o grau da aplicação  $f$  no ponto  $y$ .

**5.14. Exemplo:** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicação definida por  $f(z) = z^k = z \cdot z \dots z$  ( $k$  vezes) - multiplicação de números complexos. Tomando  $D^2 = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ com } |z| \leq 1\}$  o disco fechado com centro na origem e raio 1 então  $\text{deg}(f, D^2) = k$ . De fato,

$$f^{-1}(D^2) = \{z \in \mathbb{R}^2 / |z^k| \leq 1\} = D^2$$

Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 H_2(R^2, R^2 - D^2) & \xrightarrow{f_*} & H_2(R^2, R^2 - D^2) & & \\
 \approx \downarrow j & & \approx \downarrow j & & \\
 H_2(R^2, R^2 - 0) & \xrightarrow{f_*} & H_2(R^2, R^2 - 0) & \xrightarrow{\partial} & H_1(R^2 - 0) \\
 \approx \downarrow \psi_* \circ \partial & & \approx \downarrow \psi_* \circ \partial & & \\
 H_1(S^1) & \xrightarrow{(f|_{S_1})_*} & H_1(S^1) & & 
 \end{array}$$

onde  $\psi : R^2 - 0 \rightarrow S^1$  é a retração  $\psi(z) = \frac{z}{\|z\|} \forall z \in R^2 - 0$ .

A comutatividade de cada diagrama segue da comutatividade dos respectivos diagramas a nível de aplicação. Como já foi visto em 5.6.

$$(f|_{S_1})_*(\mu_{S^1}) = k\mu_{S^1} \quad \text{então} \quad f_*(\alpha_{D^2}) = k\alpha_{D^2} \quad \text{e assim} \quad \deg(f, D^2) = k.$$

5.15. Exemplo: Seja  $f : M \rightarrow N$  a aplicação constante  $f(x) = y_0 \in N$  para todo  $x \in M$ ; então  $\deg(f, K) = 0$  para todo compacto  $K$  conexo em  $N$ .

De fato,  $f_* : H_n(M) \rightarrow H_n(N, N-K)$  é o homomorfismo nulo.

Se  $y_0 \notin K$  então  $f^{-1}(K) = \emptyset$  e a composição

$$H_n(M) \xrightarrow{f_*} H_n(N) \xrightarrow{j} H_n(N, N-K) \quad \text{é o homomorfismo nulo;}$$

segue-se, então,  $\deg(f, K) = 0$ .

Se  $y_0 \in K$  então  $f^{-1}(K) = M$  e tem-se  $f_* : H_n(M, M) \rightarrow H_n(N, N-K)$ .

Como  $H_n(M, M) = 0$  segue-se que  $\deg(f, K) = 0$ . Assim, o grau de uma aplicação constante ao longo de qualquer subconjunto compacto e conexo é igual a zero.

5.16. Proposição: Sejam  $f : M^n \rightarrow N^n$  uma aplicação entre variedades topológicas de mesma dimensão, orientadas,  $K \subset N$  compacto e conexo tal que  $S = f^{-1}(K)$  é compacto em  $M$  e  $A \subset K$  um compacto conexo tal que  $S' = f^{-1}(A)$  é compacto. Então  $\deg(f, K) = \deg(f, A)$ .

Prova. Considero o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(M, M-S) & \xrightarrow{f_*} & H_n(N, N-K) \\ \downarrow j_S^S & & \downarrow j_A^K \\ H_n(M, M-S') & \xrightarrow{f_*} & H_n(N, N-A) \end{array}$$

Temos

$$j_A^K(f_*(\alpha_S)) = j_A^K(\deg(f, K)\alpha_K) = \deg(f, K)\alpha_A$$

$$e \quad f_*(j_S^S(\alpha_S)) = f_*(\alpha_{S'}) = \deg(f, A)\alpha_A.$$

Como o diagrama acima é comutativo,  $\deg(f, K) = \deg(f, A)$ .

5.17. Exemplo: Considerando  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(z) = z^k$  (veja Ex. 5.14), tomando  $A = S^1 \subset D^2$ .

Como  $f^{-1}(S^1) = S^1$ , tem-se

$$\deg(f, S^1) = \deg(f, D^2) = k.$$

5.18. Corolário: Sejam  $K_1$  e  $K_2$  compactos conexos onde  $\deg(f, K_1)$  e  $\deg(f, K_2)$  estão definidos e  $K$  um compacto conexo tal que  $K_1 \cup K_2 \subset K$  e  $\deg(f, K)$  está definido. Então  $\deg(f, K_1) = \deg(f, K) = \deg(f, K_2)$ .

5.19. Exemplo: Seja  $f : M^n \rightarrow N^n$  uma aplicação própria entre variedades topológicas onde  $N$  é conexa.

Então  $\deg(f, y) = \deg(f, z)$  para quaisquer  $y, z \in N$ .

De fato:

Dados  $y$  e  $z$  pontos de  $N$ , a qual sendo conexa existe um caminho contínuo  $\lambda : [0, 1] \rightarrow N$  tal que  $\lambda(0) = y$  e  $\lambda(1) = z$ , assim  $K = \lambda([0, 1])$  é um compacto conexo e, além disso, chamando  $K_1 = \{y\}$  e  $K_2 = \{z\}$  temos  $K_1 \cup K_2 \subset K$  e sendo  $f$  uma aplicação própria estão definidos  $\deg(f, K_1)$ ,  $\deg(f, K_2)$  e  $\deg(f, K)$  e, assim, estamos nas hipóteses do Corolário 5.18; logo

$$\deg(f, y) = \deg(f, z).$$

Este exemplo mostrou que podemos definir o grau de uma aplicação própria  $f : M^n \rightarrow N^n$  entre variedades topológicas orientadas, com  $N$  conexa, como

$$\deg(f) \stackrel{\text{def}}{=} \deg(f, y) \text{ onde } y \text{ é um ponto qualquer em } N.$$

5.20. Proposição: Sejam  $f, g : M^n \rightarrow N^n$  aplicações contínuas homotópicas entre variedades topológicas orientadas, tais que  $h : M \times I \rightarrow N$  é a homotopia entre  $f$  e  $g$ . Seja  $K \subset N$  um compacto conexo onde  $\deg(f, K)$  e  $\deg(g, K)$  estão definidos e  $h^{-1}(K)$  é compacto em  $M \times I$  então

$$\deg(f, K) = \deg(g, K).$$

Prova. Tomo  $S = \bigcup_{t \in I} S_t$  onde  $S_t = h_t^{-1}(K)$ ; então  $S = p(h^{-1}(K))$

onde  $p : M \times I \rightarrow M$  é a projeção. Sendo  $h^{-1}(K)$  compacto então  $S$  é compacto. Considero as aplicações de pares  $f, g : (M, M-S) \rightarrow (N, N-K)$ . Estas aplicações são homotópicas, logo  $f_* = g_*$ .

$$\begin{array}{ccc} H_n(M, M-S) & \xrightarrow{f_*} & H_n(N, N-K) \\ \downarrow j & \nearrow f_* & \\ H_n(M, M-f^{-1}(K)) & & \end{array}$$

$$f_*(\alpha_{f^{-1}(K)}) = f_*(j(\alpha_S)) = f_*(\alpha_S) = g_*(\alpha_S)$$

$$\text{assim } \deg(f, K)\alpha_K = g_*(\alpha_S)$$

$$\begin{array}{ccc} H_n(M, M-S) & \xrightarrow{g_*} & H_n(N, N-K) \\ \downarrow j & \nearrow g_* & \\ H_n(M, M-g^{-1}(K)) & & \end{array}$$

$$g_*(\alpha_{g^{-1}(K)}) = g_*(j(\alpha_S)) = g_*(\alpha_S) \text{ assim } \deg(g, K)\alpha_K = g_*(\alpha_S)$$

$$\text{Logo } \deg(f, K) = \deg(g, K).$$

Vamos dar agora uma maneira de calcular o grau de uma aplicação sob certas condições.

Sejam  $M$  e  $N$  variedades topológicas orientadas de mesma dimensão  $n$ , e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação contínua tal que  $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  onde  $y \in N$  e  $f$  é um homeomorfismo local em cada  $x \in f^{-1}(y)$ . Assim para cada  $x \in f^{-1}(y)$ , existe um aberto  $U_x$  em  $M$ , com  $x \in U_x$ , homeomorfo a uma bola aberta em  $\mathbb{R}^n$  e  $f(U_x, U_x - x) \rightarrow (V_y, V_y - y)$  um homeomorfismo, com  $V_y$  uma vizinhança aberta de  $y$ . Escolhendo  $\alpha_x$  e  $\alpha_y$  orientações locais ao longo de  $x$  e  $y$  respectivamente, diremos que  $f$  preserva orientação em  $x$  se o isomorfismo (composição).

$$f_* : H_n(M, M-x) \xrightarrow{i_*^{-1}} H_n(U_x, U_x - x) \xrightarrow{f_*} H_n(V_y, V_y - y) \xrightarrow{i'_*} H_n(N, N-y)$$

levar  $\alpha_x$  em  $\alpha_y$ , e no caso em que  $\alpha_x$  é levado em  $-\alpha_y$  diremos que  $f$  inverte orientação em  $x$ . Defino  $\varepsilon(f, x) = +1$  ou  $-1$  o sinal de  $f$  em  $x$ , conforme  $f$  preserve ou inverte orientação em  $x$ .

$$\text{Nestas condições } \deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon(f, x)$$

De fato:

Considero o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(M, M-f^{-1}(y)) & \xrightarrow{f_*} & H_n(N, N-y) \\ \downarrow \oplus j_x & \nearrow \Sigma f_x & \\ \oplus_{x \in f^{-1}(y)} H_n(M, M-x) & & \end{array}$$

$$\text{Assim } f_* \left( \alpha_{f^{-1}(y)} \right) = \deg(f, y) \alpha_y$$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{x \in f^{-1}(y)} f_x \circ \oplus_{x \in f^{-1}(y)} j_x \right) (\alpha_y) &= (\Sigma f_x) (\oplus \alpha_x) = \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon(f, x) \alpha_y \end{aligned}$$

$$\text{Logo } \deg(f, y) \alpha_y = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon(f, x) \alpha_y$$

$$\text{portanto } \deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon(f, x).$$

Observação: No caso da aplicação  $f : M \rightarrow N$  entre variedades diferenciáveis for diferenciável então o grau topológico acima de finida coincide com o grau de Brower de uma aplicação diferenciável; pois do ponto de vista da topologia diferencial  $\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} s(df_x)$

onde  $s(df_x)$  é o sinal da derivada em  $x$  e  $y$  é valor regular de  $f$ . Já foi visto em (5.10) que  $f$  preserva orientação no sentido da topologia diferencial se e só se  $f$  preserva no sentido da topologia algébrica. Logo

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} s(df_x) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon(f, x).$$

5.21. Teorema: Sejam  $M^n$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis orientadas,  $N$  conexa, e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação de classe  $C^1$  própria tal que:

- 1) Existe um ponto regular de  $f$
- 2) Para todo ponto regular  $x \in M$

$f'(x) : TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$  preserva orientação.

Então  $f$  é sobrejetora.

Demonstração:

Seja  $x_0 \in M$  um ponto regular de  $f$ ; tal ponto existe pela condição 1, logo  $f'(x_0) : TM_{x_0} \rightarrow TN_{f(x_0)}$  é um isomorfismo e, assim, pelo teorema da Função Inversa existem abertos  $V_{x_0} \subset M$  e  $W_{f(x_0)} \subset N$  com  $x_0 \in V$  e  $f(x_0) \in W$  tal que  $f|_V : V \rightarrow W$  é um difeomorfismo. Pelo teorema de Sard, o conjunto dos valores regulares de  $f$  é denso; assim existe  $y \in W$  que é valor regular de  $f$  e, além disso,  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ . Como  $f'(x)$  preserva orientação em todo ponto regular e sendo o grau topológico igual ao grau diferenciável segue-se que  $\deg(f, y) \neq 0$ . Portanto existe ao menos um  $x \in M$  com  $f(x) = y$  para todo  $y \in N$  portanto  $f$  é sobrejetora. Notemos ainda que nestas condições

$$\deg(f, y) = \#f^{-1}(y).$$

5.22. Corolário: Teorema Fundamental da Álgebra

Seja  $C$  o conjunto dos números complexos e  $p : C \rightarrow C$  uma função polinomial:

$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$  onde  $a_i \in \mathbb{C}$  e  $n \geq 1$ .

Então  $p$  é sobrejetora e, em particular, existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  com  $p(z_0) = 0$ .

Prova.

A aplicação polinomial  $p$  é uma aplicação própria, basta notar que se  $z_n \rightarrow +\infty$  então  $p(z_n) \rightarrow +\infty$  e como  $n \geq 1$  existe  $z \in \mathbb{C}$  com  $p'(z) \neq 0$ , assim existe ao menos um ponto regular, e como  $p$  é analítica  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  onde  $p = u(x,y) + iv(x,y)$  logo

$\det J_p(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$ . Portanto para todo ponto regular,  $p$  preserva orientação. Segue então do teorema 5.21 que  $p$  é sobrejetora e, em particular, existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  com  $p(z_0) = 0$ .

### 5.23. Teorema (Função Aberta)

Sejam  $M^n$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis orientadas com  $N$  conexa e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável tal que:

- 1) o conjunto dos pontos regulares de  $f$  é denso
- 2) para todo ponto regular,  $x \in M$ ,  $f'(x) : TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$  preserva orientação.
- 3) para todo  $y \in N$ ;  $f^{-1}(y)$  é discreto

Então  $f$  é uma aplicação aberta.

Demonstração.

Seja  $U$  um aberto de  $M$ ; mostraremos que  $f(U)$  é aberto em  $N$ . Tomo  $b = f(a) \in f(U)$ ; como  $f^{-1}(b)$  é discreto existe um aberto  $V$  vizinhança de  $a$ , com  $\bar{V} \subset U$ , tal que se  $x \in f^{-1}(b)$ ,  $x \neq a$ , então  $x \notin V$ . Sendo  $M$  um espaço topológico localmente compacto existe um aberto  $V'$  com  $a \in V' \subset \bar{V}' \subset V$  e  $\bar{V}'$  compacto; assim podemos obter um aberto  $W$  em  $N$  com  $\bar{W}$  compacto e conexo tal que  $(f|V)^{-1}(\bar{W}) \subset V' \subset \bar{V}'$  e assim  $(f|V)^{-1}(\bar{W})$  é compacto. Logo para todo  $y \in \bar{W}$ ,  $\deg(f|V, \bar{W}) = \deg(f|V, y) = \deg(f|V, b)$ . Sendo  $(f|V)^{-1}(W)$  aberto em  $V$ , pela densidade do conjunto dos pontos regulares de  $f$ , existe um ponto regular de  $f$  em  $(f|V)^{-1}(W)$ ; usando agora o teorema de

Sard, existe  $c \in W$  valor regular de  $f|V$  tal que  $(f|V)^{-1}(c) \neq \emptyset$ ; assim  $\deg(f|V, c) \neq 0$  e, portanto,  $\deg(f|V, y) \neq 0$  para todo  $y \in W$ ; isto significa que para todo  $y \in W$  existe  $x \in V$  com  $f(x) = y$  e, assim,  $b \in W \subset f(V) \subset f(U)$ . Concluimos então que  $f$  é uma aplicação aberta.

5.24 Corolário: Seja  $f : C \rightarrow C$  uma função analítica não constante. Então  $f$  é uma função aberta.

Prova: Seja  $R$  o conjunto dos pontos regulares de  $f$ . Sendo  $f$  uma função analítica não constante, existe  $z_0 \in C$  com  $\det Jf(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \neq 0$  e assim  $R \neq \emptyset$ . O conjunto

$R$  é denso, pois se existisse um aberto  $Q \subset C$  tal que  $Q \cap R = \emptyset$ , para todo  $z \in Q$ ,  $f'(z) : TC_z \rightarrow TC_{f(z)}$ , não seria sobrejetora então  $f$  é constante em  $Q$  e assim  $f$  é constante em  $C$  o que contradiz a hipótese. Logo o conjunto dos pontos regulares de  $f$  é denso. É imediato que em todo ponto regular  $f$  preserva orientação e como os zeros de uma função analítica não identicamente nula são isolados, segue-se que  $f^{-1}(z)$  é discreto para todo  $z \in C$ . Assim estamos nas hipóteses do teorema 5.23, e portanto,  $f$  é uma aplicação aberta.

5.25 Teorema. Sejam  $f, g : R^n \rightarrow R^n$  duas funções contínuas tais que

$$1) \deg(f, 0) \neq 0$$

$$2) \text{ Existe um compacto } K \subset R^n \text{ tal que para todo } x \notin K \text{ tem-se } ||f(x)|| \geq ||g(x)||$$

$$\text{Então existe } x \in R^n \text{ com } f(x) = g(x).$$

Demonstração.

1.º caso. Suponhamos que existe um compacto  $K \subset R^n$  tal que  $||f(x)|| > ||g(x)||$  para todo  $x \notin K$ .

A aplicação contínua  $h : R^n \times I \rightarrow R^n$  definida por

$$h(x, t) = (1-t)f(x) + t(f(x) - g(x)) \text{ para todo } (x, t) \in R^n \times I$$

é uma homotopia  $f = f - g$ .

Além disso, para todo  $x \notin K$  temos

$$||h(x, t)|| = ||f(x) - tg(x)|| \geq ||f(x)|| - t||g(x)|| \geq ||f(x)|| - ||g(x)|| > 0$$

Portanto,  $||h(x,t)|| > 0$  para todo  $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times I$  com  $x \notin K$ .

Logo  $h^{-1}(0) \subset K \times I$  e, portanto,  $h^{-1}(0)$  é um subconjunto compacto de  $K \times I$ . Assim, pela Proposição 5.20

$$\deg(f,0) = \deg(f-g,0)$$

e, da hipótese 1),  $\deg(f-g,0) \neq 0$  o que implica que existe  $x \in \mathbb{R}^n$  com  $(f-g)(x) = 0$ , isto é, existe  $x \in \mathbb{R}^n$  com  $f(x) = g(x)$ .

### 2.º caso:

Vamos supor agora que  $||f(x)|| \geq ||g(x)||$  para todo  $x \notin K$ . Tomo então uma sequência de números reais  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  com  $t_n \rightarrow 1$  e  $0 < t_n < 1$ ; para cada  $n$  fixo defino  $h_{t_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $h_{t_n}(x) = h(x, t_n)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ; como

$$\begin{aligned} ||h_{t_n}(x)|| &= ||h(x, t_n)|| = \\ &= ||f(x) - t_n g(x)|| \geq ||f(x)|| - t_n ||g(x)|| > ||f(x)|| - ||g(x)|| \geq 0. \end{aligned}$$

Assim  $||h_{t_n}(x)|| > 0$  para todo  $x \notin K$  e  $h_{t_n}$  tem o mesmo grau de  $f$ ; de fato, a aplicação contínua  $F : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$F(x,t) = (1-t)f(x) + h_{t_n}(x)$  para todo  $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times I$  dá a homotopia  $f \simeq h_{t_n}$  e

$$\begin{aligned} ||F(x,t)|| &= ||f(x) - tt_n g(x)|| \geq ||f(x)|| - tt_n ||g(x)|| > \\ &> ||f(x)|| - ||g(x)|| \geq 0 \end{aligned}$$

Logo  $||F(x,t)|| > 0$  para todo  $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times I$  com  $x \notin K$ .

Assim, pela proposição 5.20

$$\deg(f,0) = \deg(h_{t_n},0) \neq 0.$$

Aplicando agora o caso 1) para

$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$  e  $h_{t_n}$

temos que existe, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in K$ , com  $h_{t_n}(x_n) = h(x_n, t_n) = 0$ .

Sendo  $K$  compacto, a sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possui uma subsequência convergente a qual também chamamos de  $(x_n)$ ; assim

$$(x_n, t_n) \rightarrow (x, 1) \quad \text{e} \quad h(x_n, t_n) \rightarrow h(x, 1) = 0$$

Mas  $h(x, 1) = f(x) - g(x)$ , logo existe  $x \in K$  com  $f(x) = g(x)$  c.q.d.

Em particular, também podemos afirmar que, nas mesmas condições do teorema, existe  $x \in \mathbb{R}^n$  com  $f(x) = -g(x)$ .

### 5.26 Corolário:

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua limitada. Então  $\exists x \in \mathbb{R}^n$  com  $f(x) = x$ .

De fato,

Tomo  $\text{Id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  a aplicação identidade; como  $\text{deg}(\text{Id}, 0) = 1$  e  $f$  é limitada, existe  $c > 0$  tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|f(x)\| \leq c$ ; tomando então  $K = B[0; c]$  segue que para todo  $x \notin K$  tem-se  $\|x\| > c$  e, assim,  $\|f(x)\| \leq c < \|x\|$ ; logo para todo  $x \notin K$  tem-se  $\|x\| > \|f(x)\|$  e assim estamos nas hipóteses do teorema 5.25; portanto existe  $x \in \mathbb{R}^n$  com  $f(x) = x$ .

### 5.27 Corolário: Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

"Toda aplicação contínua  $h : D^n \rightarrow D^n$  tem um ponto fixo."

Prova:

Seja  $h : D^n \rightarrow D^n$  uma aplicação contínua; vamos estender  $h$  para todo  $\mathbb{R}^n$ , definindo:

$$H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{por} \quad H(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x \in D^n \\ h\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{se } x \notin D^n \end{cases}$$

Claramente  $H(\mathbb{R}^n) \subset D^n$  e assim  $H$  é limitada e, pelo corolário 5.26, existe  $x \in \mathbb{R}^n$  com  $H(x) = x$ ; portanto  $x \in D^n$  e assim  $h(x) = x$ .

O teorema 5.25 pode ser generalizado para uma variedade topológica  $M$  de dimensão  $n$  e a demonstração é análoga à já feita:

### 5.28 Teorema:

Sejam  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  duas funções contínuas tais que

- 1)  $\deg(f, 0) \neq 0$
- 2) Existe um compacto  $K \subset M$  tal que para todo  $x \notin K$  tem-se  $\|f(x)\| \geq \|g(x)\|$ .

Então existe  $x \in \mathbb{R}^n$  com  $f(x) = g(x)$ .

A demonstração é análoga à já feita.

### 5.29 Observação:

No teorema 5.30 abaixo, utilizaremos os seguintes resultados bastante conhecidos.

#### 1) Proposição:

Sejam  $X, K$  espaços topológicos,  $K$  compacto e  $f : X \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua. Dados  $a \in X$  e  $\epsilon > 0$  existe aberto  $V \subset X$ , com  $a \in V$ , tal que

$$d(f(a, y), f(x, y)) < \epsilon \text{ quais que sejam } x \in V \text{ e } y \in K$$

#### 2) Proposição:

Dadas  $f, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínuas com  $g \approx \text{const: } \mathbb{R}^m \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^n$  então  $f - g \approx f$ .

De fato, seja  $F : \mathbb{R}^m \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  a homotopia entre  $g$  e a  $\text{const: } \mathbb{R}^m \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^n$ , isto é,  $F(x, 0) = g(x)$  e  $F(x, 1) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^m$ . Definimos agora,  $G : \mathbb{R}^m \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$G(x, t) = f(x) - F(x, t)$$

Como  $G(x, 0) = f(x) - g(x)$  e  $G(x, 1) = f(x)$  então  $G$  dá a homotopia  $f - g \approx f$ .

## 5.30 TEOREMA DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS PARA FUNÇÕES CONTÍNUAS

Sejam  $X$  um espaço topológico,  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto,  $f : X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua,  $(x_0, y_0) \in X \times U$  e  $z_0 = f(x_0, y_0)$ . Se a aplicação  $f_{x_0} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$  para todo  $y \in U$  for tal que

- 1)  $f_{x_0}^{-1}(z_0) = \{y_0\}$
- 2)  $\deg(f_{x_0}, z_0) \neq 0$

então existe um aberto  $V \subset X$  com  $x_0 \in V$  e uma aplicação  $\phi : V \rightarrow U$  contínua em  $x_0$  tal que  $\phi(x_0) = y_0$  e  $f(x, \phi(x)) = z_0$  para todo  $x \in V$ .

Demonstração.

Seja  $(x_0, y_0) \in X \times U$ ; como  $U$  é aberto, existe  $r > 0$  tal que  $B[y_0; r] \subset U$ ; tomando  $0 < s < r$  existe  $\epsilon > 0$  tal que se  $y \in B[y_0; r] - B[y_0; s]$  tem-se  $\|z_0 - f(x_0, y)\| \geq \epsilon$ . Assim, para este  $\epsilon > 0$  existe um aberto  $V \subset X$ , com  $x_0 \in V$ , e (veja Obs. 1) de 5.29).

$$\|f(x_0, y) - f(x, y)\| < \epsilon \text{ para todo } x \in V \text{ e } y \in B[y_0; r]$$

Considero  $f_{x_0}, f_x : B[y_0, r] \rightarrow \mathbb{R}^n$  onde  $x \in V$ .

Então, para todo  $y \notin B[y_0, s]$  temos

$$\|f_{x_0}(y) - z_0\| \geq \epsilon > \|f_{x_0}(y) - f_x(y)\|$$

Assim,

$$\|f_{x_0}(y) - z_0\| > \|f_{x_0}(y) - f_x(y)\|$$

e, pelo raciocínio contido na demonstração da Proposição 5.25, 1.º caso,

$$f_{x_0} - z_0 = f_x - z_0$$

e, daí,  $\deg(f_{x_0} - z_0, 0) = \deg(f_x - z_0, 0)$ .

Mas pela Obs. 2) de 5.29,

$$f_{x_0} - z_0 \approx f_{x_0} \quad \text{e} \quad f_x - z_0 \approx f_x$$

e, daí,  $\deg(f_{x_0}, 0) = \deg(f_x, 0)$

e, pela Proposição 5.19,

$$\deg(f_x, z_0) = \deg(f_{x_0}, z_0) \neq 0 \quad \text{por hipótese.}$$

Portanto, para cada  $x \in V$  existe  $y \in U$  tal que,

$$f_x(y) = z_0 \quad \text{isto é,} \quad f(x, y) = z_0 \quad (\alpha)$$

Defino, então,  $\phi : V \rightarrow U$  por  $\phi(x) = y$  satisfazendo  $(\alpha)$ .

Assim, para cada  $x \in V$ ,

$$f(x, \phi(x)) = z_0 \quad \text{e, em particular,} \quad \phi(x_0) = y_0$$

Mostremos, agora, que  $\phi$  é contínua em  $x_0 \in X$ .

Considero  $f_{x_0} : B[y_0, r] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ; dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $y \in B[y_0, r]$  e  $\|f_{x_0}(y) - z_0\| < \delta$  então  $\|y - y_0\| < \epsilon$ . Existe  $V'$  aberto em  $X$ , contendo  $x_0$ ,  $V' \subset V$  tal que  $x \in V'$  e  $y \in B[y_0, r]$  implica  $\|f_{x_0}(y) - f_x(y)\| < \delta$ .

Assim, se  $x \in V' \subset V$

$$\|f_{x_0}(\phi(x)) - f_x(\phi(x))\| = \|f_{x_0}(\phi(x)) - z_0\| < \delta$$

Então  $\|\phi(x) - z_0\| < \epsilon$  e, portanto,  $\phi$  é contínua em  $x_0$ .

5.31 Corolário:

Sejam  $f : X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua,  $(x_0, y_0) \in X \times U$  e  $f(x_0, y_0) = z_0$ . Se a aplicação  $f_x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $f_x(y) = f(x, y)$  for injetora para todo  $x \in X$ , então existe um aberto  $V \subset X$  com  $x_0 \in V$  e  $\phi : V \rightarrow U$  contínua tal que  $f(x, \phi(x)) = z_0$  para todo  $x \in V$ .

Prova:

Como  $f_{x_0} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é injetora, pelo Teorema da Invariança do Domínio (veja 5.32 a seguir),  $f_{x_0}$  é um homeomorfismo local e, assim  $\deg(f_{x_0}, y_0) \neq 0$ . Logo, pelo Teorema 5.30, existe um aberto  $V \subset X$  com  $x_0 \in V$  e  $\phi : V \rightarrow U$  tal que  $\phi(x_0) = y_0$  e  $f(x, \phi(x)) = z_0$  para todo  $x \in V$  e  $\phi$  é contínua em  $x_0$ .

Seja  $x \in V$  com  $x \neq x_0$ ; com o mesmo raciocínio anterior tem-se  $\deg(f_x, \phi(x)) \neq 0$  e, então, existe  $\psi : V' \rightarrow U$  contínua em  $x \in V' \subset V$  e tal que  $f(x, \psi(x)) = z_0$  para todo  $x \in V'$ . Assim,  $f_x(\phi(x)) = f_x(\psi(x))$  para todo  $x \in V'$  e, como  $f_x$  é injetora,

$$\phi(x) = \psi(x) \text{ para todo } x \in V'$$

Portanto,  $\phi$  é contínua em  $x \in V$ .

5.32 Observação: O Teorema da Invariança do Domínio usado na demonstração acima pode ser desenvolvido como aplicação de (5.31).

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua injetora. Então  $f(U)$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Além disso  $f$  é um homeomorfismo local.

Prova: Seja  $y_0 \in f(U)$ , isto é,  $y_0 = f(x_0)$  para algum  $x_0 \in U$ .

Defino  $F : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $F(x, y) = f(x) - y$ .

Assim  $F(x_0, y_0) = 0$  e a aplicação

$F_{y_0} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $F_{y_0}(x) = f(x) - y_0$  é injetora e,

assim, por 5.31, existe um aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$  com  $y_0 \in V$  e uma aplicação contínua  $\phi : V \rightarrow U$  tal que  $\phi(y_0) = x_0$  e  $F(\phi(y), y) = 0$  para todo  $y \in V$ , isto é,  $f(\phi(y)) = y$  para todo  $y \in V$ . Logo,  $f(\phi(V)) = V$  e, assim,  $y_0 \in V \subset f(U)$ ; assim  $y_0 \in V \subset f(U)$ . Portanto  $\phi(V)$  é aberto em  $V$  e, então,  $f|_{\phi(V)} : \phi(V) \rightarrow V$  é um homeomorfismo cuja inversa é a aplicação  $\phi : V \rightarrow \phi(V)$ .

Fica assim demonstrado o teorema das Funções Inversas, para funções contínuas.

### 5.33 Exemplo:

Para  $n \neq m$ ,  $\mathbb{R}^n$  não é homeomorfo a  $\mathbb{R}^m$ .

De fato:

Suponhamos que existe homeomorfismo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  digamos com  $n > m$ , def  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  por  $\phi(x) = (x, 0)$ . Assim  $\phi \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  é uma aplicação injetora e, assim, pelo T.I.D. temos que  $\text{Im}(\phi \circ f)$  é um aberto em  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ ; mas

$$\text{Im}(\phi \circ f) = \{(f(x), 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \text{ com } x \in \mathbb{R}^n\}$$

tem interior vazio em  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ ; logo  $\mathbb{R}^n$  não é homeomorfo a  $\mathbb{R}^m$  para  $n \neq m$ . Segue deste resultado que nenhum aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  pode ser homeomorfo a algum aberto  $V \subset \mathbb{R}^m$  para  $n \neq m$ .

### 5.34 Exemplo:

Na equação  $x^2 y |y| + |x| y^2 + y = 0$  é possível expressar  $y$  como função de  $x$  numa vizinhança da origem.

De fato: Defino  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$f(x, y) = x^2 y |y| + |x| y^2 + y$  então  $f(0, 0) = 0$  e  $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_0(y) = f(0, y) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}$  e, assim,  $f_0$  é injetora; logo existe um aberto  $V \subset \mathbb{R}$  com  $0 \in V$  e  $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que

$$f(x, \phi(x)) = 0 \quad \forall x \in V, \text{ isto é,}$$

$$x^2 \phi(x) |\phi(x)| + |x| \phi(x)^2 + \phi(x) = 0$$

5.35 Exemplo:

Um monóide topológico  $X$ , é um monóide  $(X, *)$  dotado de uma topologia tal que a operação  $* : X \times X \rightarrow X$  é contínua.

Seja  $N^n$  um monóide topológico onde  $N^n$  é uma variedade topológica  $n$ -dimensional orientada. Então  $I(N)$  o conjunto de todos os elementos invertíveis de  $N$  é aberto em  $N$  e a inversão  $I(N) \rightarrow I(N)$  é uma aplicação contínua (e, então,  $I(N)$  é um grupo topológico).

De fato:

Denotemos a operação  $*$  por  $f$ . Então

$f : X \times X \rightarrow X$  é dada por  $f(u, w) = u * w$ .

Vamos mostrar que  $I(N) = \{u \in N \mid u \text{ é invertível}\}$  é aberto em  $N$ . Como  $I(N) \neq \emptyset$ , tomo  $u_0 \in I(N)$  então existe  $\bar{u}_0 \in N$  tal que  $f(u_0, \bar{u}_0) = e$ .

Defino a aplicação  $f_{u_0} : X \rightarrow X$  pondo  $f_{u_0}(u) = u_0 * u$   $\forall u \in X$ ; claramente  $f_{u_0}$  é biunívoca, logo existe um aberto  $V \subset X$  com  $u_0 \in V$  e uma aplicação  $\phi : V \rightarrow X$  tal que  $\phi(u_0) = \bar{u}_0$  e  $f(u, \phi(u)) = f(u_0, \bar{u}_0) \forall u \in V$ , isto é,  $u * \phi(u) = e$   $\forall u \in V$  e, assim,  $u_0 \in V \subset I(N)$  e, portanto,  $I(N)$  é aberto.

Além disso a aplicação  $\psi : I(N) \rightarrow I(N)$  definida por  $\psi(u) = \bar{u}$  onde  $\bar{u} * u = e$ , é contínua pois para cada  $u_0 \in I(N)$  existe um aberto  $V \subset X$  com  $u_0 \in V$  e  $\phi : V \rightarrow X$  tal que  $f(u, \phi(u)) = e$   $\forall x \in V$ , isto é,  $u * \phi(u) = e$  e assim  $\phi = \psi|_V$ ; logo  $\psi$  é contínua

Segue então deste resultado que se  $N$  é um monóide topológico onde  $N^n$  é uma variedade topológica  $n$  dimensional compacta e conexa então  $N$  é um grupo topológico.

De fato:

Já mostramos que  $I(N)$  é um aberto de  $N$  e  $I(N) \neq \emptyset$ . Sendo  $N$  compacta e  $I(N) = p(f^{-1}(e))$  onde  $p : X \times X \rightarrow X$  é a projeção segue que  $I(N)$  é fechado em  $N$  e, como  $N$  é conexa,  $I(N) = N$ ; logo  $N$  é um grupo topológico.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] CONDE, ANTONIO - Introdução à topologia diferencial, 9.<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, 1973 - IMPA.
- [2] GREENBERG, Marvin - Lectures on Algebraic Topology.
- [3] HILTON, P.J. and WYLIE, S. - Homology Theory - Cambridge University Press - 1965.
- [4] LIMA, ELON LAGES - Introdução à topologia diferencial IMPA - 1961.
- [5] LOIBEL, GILBERTO F. - Introdução à teoria da Obstrução - vol. I e II - ICMSC-USP - São Carlos - 1963.
- [6] MASSEY, W.S. - Algebraic Topology: An Introduction Graduate texts in mathematics; 56 Springer-Verlag - 1977.
- [7] MILNOR, J. WAND STASHEFF, J.D. - Characteristic Classes - Annals of Mathematics Studies, Number 76, Princeton University Press.
- [8] MILNOR, J.W. - Topology from the differentiable view point - The University Press of Virginia - 1965
- [9] OLUM, PAUL - Mappings of Manifolds and the Notion of Degree Annals of Math, Vol. 58, N.<sup>o</sup> 3, November 1953.
- [10] ROLFSEN, DALE - Knots and Links Mathematics Lecture Series Publish or Perish, Inc.
- [11] VICK, JAMES W. - Homology Theory Academic Press - Mathematics, 53.
- [12] WALACE, ANDREW, H. - An introduction to algebraic topology Pergamon Press - 1957
- [13] HU, SZE-TSEN - Homological Algebra
- [14] Hilton, P.J. - An Introduction to Homotopy Theory. Cambridge University Press, 1961.