UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Algumas aplicações de teoria dos conjuntos em outras áreas

Leonardo Domingues do Amaral

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Leonardo Domingues do Amaral

Algumas aplicações de teoria dos conjuntos em outras áreas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
Outubro de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

D671a

Domingues do Amaral, Leonardo
Algumas aplicações de teoria dos conjuntos em outras áreas / Leonardo Domingues do Amaral; orientador Leandro Fiorini Aurichi. -- São Carlos, 2023.
75 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Teoria dos conjuntos. 2. Topologia. 3. CW complexos. 4. Grupo fundamental. 5. Problema de Whitehead. I. Fiorini Aurichi, Leandro, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Leonardo Domingues do Amaral

A few applications of set theory in other fields

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
October 2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi, pelo apoio e paciência durante esse projeto, mesmo quando eu passava por momentos difíceis e acabei tornando o processo mais difícil e demorado do que deveria ser.

Agradeço também à minha avó, Maria do Carmo de Souza, sem o apoio da qual eu nunca teria tido a chance sequer de adentrar o ensino superior.

Finalmente, agradeço aos órgãos que financiaram este trabalho. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processo número 130084/2019-0.

RESUMO

AMARAL, L. D. **Algumas aplicações de teoria dos conjuntos em outras áreas**. 2023. 75 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Neste trabalho buscamos explorar aplicações de métodos e conceitos de teoria dos conjuntos, combinatória infinita e topologia geral no estudo de objetos normalmente atribuídos a outras áreas da matemática, primariamente álgebra. O texto consiste no estudo de três resultados principais, baseados em quatro artigos: o estabelecimento de condições necessárias e suficientes para que o produto de dois CW complexos seja um CW complexo, condições para que espaços métricos não tenham seu grupo fundamental isomorfo ao grupo aditivo dos racionais e uma demonstração da indecidibilidade do Problema de Whitehead.

Palavras-chave: Teoria dos conjuntos, Topologia, CW complexos, Grupo fundamental, Problema de Whitehead.

ABSTRACT

AMARAL, L. D. **A few applications of set theory in other fields**. 2023. 75 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

In this work we aim to explore applications of methods and concepts from set theory, infinitary combinatorics, and set topology in the study of objects usually associated to other fields of mathematics, primarily algebra. The body text consists of the study of three main results, based on four articles: the establishment of necessary and sufficient conditions for the product space of two CW complexes to be a CW complex, conditions for the fundamental group of a metric space to not be isomorphic to the additive group of the rationals, and a demonstration of the undecidability of Whitehead's Problem in ZFC.

Keywords: Set theory, Topology, CW complexes, Fundamental group, Whitehead's Problem.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Nesta dissertação iremos mostrar algumas aplicações de métodos e conceitos de teoria dos conjuntos, combinatória infinita e topologia geral e apresentar resultados relevantes a objetos e estruturas normalmente associados a álgebra e topologia algébrica.

No Capítulo 2 estudamos o produto de CW complexos, conceito de interesse da topologia algébrica por sua estrutura celular que fornece diversas propriedades úteis e sua topologia atrelada a estrutura celular. Essa topologia, no entanto, não necessariamente coincide com a topologia produto usual quando tomamos o produto de dois CW complexos, de modo que tal produto pode não ser em si um CW complexo. Apresentamos então condições necessárias e suficientes para que esse produto seja de fato um CW complexo.

O Capítulo 3 trata de grupos fundamentais de espaços métricos. Especificamente, apresentamos condições razoáveis para espaços métricos sob as quais podemos concluir que seu grupo fundamental tem a cardinalidade do contínuo e, portanto, não pode ser isomorfo ao grupos enumeráveis, como por exemplo o grupo aditivo dos racionais.

Finalmente, no Capítulo 4, estudamos o Problema de Whitehead na teoria de grupos, que trata da afirmação de que W-grupos e grupos abelianos livres são equivalentes. Mostramos que essa equivalência é válida para grupos enumeráveis.

Exibimos então uma demonstração de que o problema é indecidível no modelo ZFC para grupos de cardinalidade $\aleph_1$. O modelo axiomático ZFC é comumente utilizado na maioria das áreas da matemática, mas existem diversas afirmações que não podem ser provadas verdadeiras ou falsas apenas com esses axiomas. Podemos então acrescentar tais afirmações ao sistema como novos axiomas, obtendo um novo sistema axiomático. Alguns axiomas notáveis compatíveis com ZFC são o Axioma de Construtibilidade, o Axioma de Martin e a Hipótese do Contínuo. Com esses axiomas, definimos dois sistemas axiomáticos sobre ZFC distintos e mostramos a validade do problema em um sistema e invalidade no outro.

CAPÍTULO

2

O PRODUTO DE CW COMPLEXOS

CW complexos são estruturas altamente convenientes no estudo de topologia algébrica. Como outros complexos celulares, diversas propriedades úteis podem ser extraídas da estrutura formada colando espaços euclideanos, as chamadas células. Como podemos colar espaços de dimensões diferentes de forma que sejam dois a dois disjuntos, obtemos uma estrutura geométrica diferente de algo como uma superfície.

Em particular, os CW complexos nos fornecem também uma topologia dada em função de suas células, proporcionando ainda mais usos. Mas o produto de dois CW complexos, munido da topologia produto usual, pode não respeitar as condições da topologia de CW complexos.

Neste capítulo, estudamos o resultado exibido pelos artigos (BROOKE-TAYLOR, 2017) e (TANAKA, 1982), que visam estabelecer condições necessárias e suficientes para que o produto de dois CW complexos seja também um CW complexo quando considerado com a estrutura celular naturalmente induzida do produto e com a topologia produto usual. Apesar do papel de CW complexos como objetos de estudo em topologia algébrica, exibiremos esta caracterização que faz uso, majoritariamente, de argumentos topológicos e sobre cardinalidade de conjuntos.

2.1 Definições e propriedades básicas

Primeiramente, vamos introduzir algumas definições e propriedades que serão úteis neste capítulo, começando com a definição que usaremos para CW complexo.

Denotaremos por D^n a bola fechada unitária em $\mathbb{R}^n$, B^n a bola aberta que é seu interior e S^{n-1} a esfera.

Definição 2.1.1. Um espaço de Hausdorff X é um CW complexo se existem funções contínuas $\phi_\alpha^n : D^n \to X$ (chamadas mapas característicos), para cada $\alpha \in L$, onde L é um conjunto arbitrário de índices e cada $n \in \mathbb{N}$ é dado em função de α, satisfazendo:

(a) A restrição $\phi_\alpha^n \restriction B^n$ é homeomorfismo sobre sua imagem e X é união disjunta de $\phi_\alpha^n[B^n]$ variando α em L. Para nossa conveniência denotaremos $\phi_\alpha^n[B^n]$ por e_α^n e chamaremos de célula n-dimensional ou n-célula de X.

(b) Para cada $\alpha \in L$, $\phi_\alpha^n[S^{n-1}]$ está contido na união de uma quantidade finita de células de dimensão menor que n.

(c) Um subconjunto de X é fechado se, e somente se, sua interseção com $\phi_\alpha^n[D^n]$ é fechada para cada $\alpha \in L$.

Vamos também denotar $\phi_\alpha^n[D^n]$ como $\overline{e}_\alpha^n$ e chamaremos tal objeto de n-célula fechada. Além disso, passaremos a omitir a dimensão quando esta não for importante, escrevendo simplesmente ϕ_α, e_α ou $\overline{e}_\alpha$. Assim, dada uma célula e_α, consideraremos ϕ_α seu mapa característico correspondente.

Com a definição básica em mãos, vejamos algumas propriedades que podemos obter de modo simples e algumas observações importantes.

Observação 2.1.2. O item (c) da definição nos fornece uma caracterização útil para conjuntos fechados em um CW complexo. Mas temos também, como consequência direta do item (c), a seguinte caracterização para abertos:

Sejam X um CW complexo e $U \subset X$. Então U é aberto em X se, e somente se, $U \cap \overline{e_\alpha}$ é aberto em $\overline{e_\alpha}$ para cara célula e_α de X.

Observação 2.1.3. Dada uma célula fechada $\overline{e}_\alpha$, esta é imagem do conjunto compacto D^n através da função contínua ϕ_α e, portanto, é um compacto em X. Ainda, como X é um espaço de Hausdorff, segue que $\overline{e}_\alpha$ é um conjunto fechado na topologia de X. Da mesma forma, a borda $\overline{e_\alpha} \setminus e_\alpha = \phi_\alpha[S^{n-1}]$ é também compacta e, portanto, um conjunto fechado na topologia.

Nesse contexto, ocasionalmente uma célula e_α é chamada de célula aberta, mas é preciso cuidado pois em geral essas células não são abertos na topologia de X.

Um exemplo simples de CW complexo é $\mathbb{R}^2$ munido de sua topologia usual, com os pontos da forma (m,n), com $m,n \in \mathbb{Z}$ sendo 0-células, os segmentos de reta da forma $\{(m,n+t) : m,n \in \mathbb{Z}, t \in (0,1)\}$ e $\{(m+t,n) : m,n \in \mathbb{Z}, t \in (0,1)\}$ ligando esses pontos sendo 1-células e as áreas quadradas limitadas por estes segmentos sendo 2-células. Neste CW complexo podemos claramente ver que as 1-células não são abertos em $\mathbb{R}^2$.

Proposição 2.1.4. Todo subconjunto compacto de um CW complexo X está contido em uma união finita de células.

Demonstração. De fato, seja $K \subset X$ compacto e suponha que K não possa ser contido em um número finito de células. Neste caso, existe um conjunto de células $\{e_\alpha : \alpha \in M\}$ para algum conjunto de índices infinito M tal que $K \cap e_\alpha \neq \emptyset$, para todo $\alpha \in M$. Então para cada $\alpha \in M$, seja $x_\alpha \in K \cap e_\alpha$ e definamos $R_\alpha = \{x_\beta : \beta \in M \setminus \{\alpha\}\}$.

Seja e_β uma célula qualquer de X. Note que $e_\beta \cap R_\alpha = \{x_\beta\}$ se $\beta \in M \setminus \{\alpha\}$ e $e_\beta \cap R_\alpha = \emptyset$ se $\beta = \alpha$ ou $\beta \notin M$, pois as células são disjuntas. Note também que como $\phi_\beta[S^n]$ está contida em um número finito de células e $\overline{e}_\beta = \phi_\beta[S^n] \cup e_\beta$, temos que $\overline{e}_\beta \cap R_\alpha$ é finito. Como X é Hausdorff e $\overline{e}_\beta \cap R_\alpha$ é finito, segue que $\overline{e}_\beta \cap R_\alpha$ é fechado. Isto é, provamos que R_α tem interseção fechada com qualquer célula fechada de X, mostrando que R_α é fechado para cada $\alpha \in M$.

Finalmente, considere os abertos $T_\alpha = X \setminus R_\alpha$ e note que eles formam uma cobertura aberta para X e, portanto, a família $\{T_\alpha \cap K : \alpha \in M\}$ é cobertura para K. Mas cada $T_\alpha \cap K$ é o único elemento da cobertura que contém x_α, portanto tal cobertura não admite subcobertura finita, contradizendo a compacidade de K. □

Com esta propriedade em mente, consideremos as seguintes duas definições para espaços topológicos.

Definição 2.1.5. Dizemos que um espaço X é compactamente gerado quando um subconjunto $F \subset X$ é fechado se, e somente se, $F \cap K$ é fechado para cada $K \subset X$ compacto.

Definição 2.1.6. Dizemos que um espaço X é sequencial quando um subconjunto $F \subset X$ é fechado se, e somente se, toda sequência convergente em F tem seu ponto limite em F. Isto é, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ é tal que $x_n \to x$ para algum $x \in X$, então $x \in F$. Um conjunto F satisfazendo esta condição é dito sequencialmente fechado.

Dessas definições, com ajuda da proposição anterior, podemos extrair resultados semelhantes e que posteriormente serão necessários para um resultado chave para a demonstração do resultado principal.

Proposição 2.1.7. Seja X um espaço de Hausdorff satisfazendo as condições (a) e (b) da definição de CW complexo. Neste caso, X é compactamente gerado se, e somente se, X satisfaz a condição (c).

Observe que neste caso, como X satisfaz as condições (a) e (b), ele já está munido de estrutura celular. Portanto, usaremos as mesmas notações e nomenclaturas para células na demonstração a seguir, apesar de não estarmos assumindo X como CW complexo.

Demonstração. Seja $F \subset X$. Vamos mostrar que a interseção de F com qualquer compacto de X é fechada se, e somente se, a interseção de F com qualquer célula fechada de X é fechada.

Se $F \cap K$ é fechado para todo $K \subset X$ compacto, claramente $F \cap \overline{e}_\alpha$ é fechado para cada $\overline{e}_\alpha$, pois células fechadas são compactas. Por outro lado, suponha $F \cap \overline{e}_\alpha$ fechado para cada célula fechada $\overline{e}_\alpha$. Sendo $K \subset X$ compacto, temos da proposição anterior que $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} \overline{e}_{\alpha_j}$

para alguma coleção finita de índices $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$. Portanto $K = \bigcup_{j=1}^n K \cap \overline{e}_{\alpha_j}$ e, assim, $F \cap K = F \cap (\bigcup_{j=1}^n K \cap \overline{e}_{\alpha_j}) = K \cap (\bigcup_{j=1}^n F \cap \overline{e}_{\alpha_j})$, que é fechado. $\square$

Antes de seguir para o próximo resultado importante, vamos enunciar um breve lema que será útil em sua demonstração.

Lema 2.1.8. Seja X um CW complexo. Toda célula fechada $\overline{e}_\alpha$ de X é sequencial.

Demonstração. Seja $G \subset \overline{e}_\alpha$ subconjunto sequencialmente fechado. Como ϕ_α é contínua, temos que $\phi_\alpha^{-1}[G]$ é sequencialmente fechado no domínio D^n de ϕ_α e, portanto, fechado, pois D^n sendo um espaço euclidiano é sequencial. Ainda, como ϕ_α é sobrejetora sobre $\overline{e}_\alpha$ e é simples observar que é também uma aplicação fechada (pois qualquer fechado em D^n é também compacto), temos que $\phi_\alpha[\phi_\alpha^{-1}[G]] = G$ é fechado. $\square$

Proposição 2.1.9. Seja X um espaço de Hausdorff satisfazendo as condições (a) e (b) da definição de CW complexo. Neste caso, X é sequencial se, e somente se, X satisfaz a condição (c) da definição de CW complexo.

Novamente, como X satisfaz as condições (a) e (b), usaremos nossa notação estabelecida para células.

Demonstração. Suponhamos primeiramente que X satisfaz também a condição (c), isto é, é CW complexo. Sendo $F \subset X$ sequencialmente fechado, vamos mostrar que dada uma célula fechada qualquer $\overline{e}_\alpha$ de X, sua interseção com F é um fechado e, portanto, F é fechado. Como F é sequencialmente fechado, dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F \cap \overline{e}_\alpha$ convergindo para um ponto $x \in X$, temos que $x \in F \cap \overline{e}_\alpha$. De fato, temos que $x \in F$ pois F é sequencialmente fechado e $x \in \overline{e}_\alpha$ pois $\overline{e}_\alpha$ é fechado e, assim, $F \cap \overline{e}_\alpha$ é sequencialmente fechado. Agora, pelo lema anterior, como $\overline{e}_\alpha$ é sequencial, segue que $F \cap \overline{e}_\alpha$ é fechado.

Suponhamos agora que X é sequencial. Seja $F \subset X$ tal que $F \cap \overline{e}_\alpha$ é fechado para toda célula fechada $\overline{e}_\alpha$. Provamos na demonstração da proposição anterior que isto é equivalente a $F \cap K$ ser fechado para todo $K \subset X$ compacto. Assim, dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em F convergindo para $x \in X$, temos que $F \cap (\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\})$ é fechado. Então, como $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset F \cap (\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\})$, temos que $x \in F \cap (\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}) \subset F$, provando que F é sequencialmente fechado e, portanto, fechado. $\square$

Agora, antes de usar essas proposições, ainda precisamos de algumas definições importantes.

Definição 2.1.10. Dado $X = \bigcup_{\alpha\in L} e_\alpha$ um CW complexo, um subespaço Y de X é dito um subcomplexo se $Y = \bigcup_{\alpha\in M} e_\alpha$ para algum $M \subset L$ e para cada $e_\alpha \subset Y$ temos $\overline{e}_\alpha \subset Y$.

Chamamos de n-esqueleto e denotamos X^n o subcomplexo de X dado pela união de todas as células de dimensão menor ou igual a n.

Observação 2.1.11. Vale a pena observar que um subcomplexo Y de X naturalmente herda sua estrutura celular, pois é simplesmente composto de uma família menor das mesmas células e, portanto, satisfaz trivialmente a condição (a) da definição de CW complexo. Ainda, se $e_\alpha \subset Y$, temos também que $\overline{e}_\alpha \subset Y$, logo a condição (b) está garantida. Finalmente, Y assume naturalmente a topologia de subespaço usual de X, garantindo a condição (c). É verdade então que um subcomplexo de um CW complexo é naturalmente um CW complexo.

É fácil também observar pela definição de CW complexo que, como Y é composto inteiramente por células fechadas de X, Y é um subconjunto fechado de X.

Para a próxima proposição, faremos uso de dois resultados topológicos clássicos, os quais apenas enunciaremos a fim de manter o foco deste capítulo. Demonstrações dos dois resultados estão em (DUGUNDJI, 1966) (Teorema III.9.4, p. 83 e Teorema VII.5.1, p. 149, respectivamente). Eles são:

Lema de Colagem. *Seja X um espaço topológico com $A, B \subset X$ fechados e sejam $f : A \to X$ e $g : B \to X$ funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A \cap B$. Existe então uma única função contínua $h : A \cup B \to X$ tal que $h \restriction A = f$ e $h \restriction B = g$.*

Teorema de Extensão de Tietze. *Seja X um espaço topológico normal com $A \subset X$ fechado e seja $f : A \to [0,1]$ uma função contínua. Existe então uma função contínua $F : X \to [0,1]$ tal que $F \restriction A = f$.*

Proposição 2.1.12. Todo CW complexo é normal.

Demonstração. Sejam X um CW complexo e $F, G \subset X$ fechados disjuntos. Vamos mostrar que existe uma função $f : X \to [0,1]$ contínua tal que $f[F] = \{0\}$ e $f[G] = \{1\}$. Para isso, vamos definir indutivamente funções $f_n : X^n \to [0,1]$ tais que $f_n[F \cap X^n] = \{0\}$, $f_n[G \cap X^n] = \{1\}$ e para cada $m \leq n$, temos que $f_n \restriction X^m = f_m$.

Para o caso inicial, basta observar que X^0 é discreto e, portanto, normal. Existe então f_0 que separa $F \cap X^0$ de $G \cap X^0$ com abertos disjuntos.

Suponha agora que f_{n-1} já está definida em X^{n-1}. Precisamos estender f_{n-1} para as células de dimensão n. Observe que a extensão sobre cada tal célula é independente das demais, pois elas apenas se encontram potencialmente em suas bordas, onde f_{n-1} já está definida. É suficiente então evidenciar a extensão de f_{n-1} sobre uma célula de dimensão n qualquer.

Sejam então e_α uma n-célula, $F_\alpha = F \cap \overline{e_\alpha}$ e $G_\alpha = G \cap \overline{e_\alpha}$. Seja também $P = (\overline{e_\alpha} \setminus e_\alpha) \cup F_\alpha \cup G_\alpha$. Observe que P é fechado, pois cada parte de P é um fechado. Pelo Lema de Colagem, existe uma função contínua $g : P \to [0,1]$ tal que $g[F_\alpha] = \{0\}$, $g[G_\alpha] = \{1\}$ e $g \restriction (\overline{e_\alpha} \setminus e_\alpha) = f_{n-1}$.

Finalmente, como $\overline{e_\alpha}$ é normal (pois é compacto e Hausdorff), temos que existe pelo Teorema de Extensão de Tietze uma função contínua $g' : \overline{e_\alpha} \to [0,1]$ tal que $g' \restriction P = g$, constituindo a extensão desejada de f_{n-1} sobre a célula e_α. $\square$

Definição 2.1.13. Dados X um CW complexo e e_α uma célula de X, denotamos X_α^{min} o menor subcomplexo de X contendo e_α.

Observação 2.1.14. Note que X_α^{min} sempre tem um número finito de células. De fato, suponha que e_α tem dimensão n. Então $\phi_\alpha[S^{n-1}]$ está contido em um número finito de células $e_1,\ldots,e_m$ de dimensão menor do que n. Agora, para cada $j=1,\ldots,m$, temos que $\phi_j[S^{n_j-1}]$ está contido em um número finito de células $e_{j_1},\ldots,e_{j_k}$ de dimensão menor que a dimensão n_j de e_j. Observe que podemos continuar tal processo e ele é finito, pois as dimensões diminuem em cada passo. Além disso, o número total de células obtido no processo é finito, pois cada passo acrescenta apenas um número finito de células. Note que a união de todas as células obtidas dessa forma é um subcomplexo finito (isto é, um subcomplexo composto por um número finito de células) de X contendo e_α.

Desta forma, dado um ponto qualquer $x \in X$, podemos facilmente obter um subcomplexo relativamente pequeno que o contém. Tal subcomplexo é finito, mas, mais ainda, é compacto. De fato, é simples observar que qualquer CW complexo finito é compacto, uma vez que é dado pela união de um número finito de células fechadas. Como já estabelecemos anteriormente, toda célula fechada é compacta e, portanto, tal CW complexo é união finita de conjuntos compactos.

A próxima definição será um pouco mais sofisticada e também mais exigente.

Definição 2.1.15. Seja κ um cardinal. Um CW complexo X é dito localmente menor que κ se para todo $x \in X$, existe subcomplexo Y de X com menos que κ células tal que x pertence ao interior de Y. Em particular, um CW complexo é dito localmente finito se for localmente menor que $\aleph_0$ e localmente enumerável se for localmente menor que $\aleph_1$.

Observação 2.1.16. Note que se X é um CW complexo, toda componente conexa de X é um subcomplexo, pois cada célula fechada é conexa. Além disso, toda componente conexa é aberta em X. De fato, sejam $A \subset X$ uma componente conexa e $B = X \setminus A$. Então B é fechado, pois para qualquer célula fechada $\overline{e}_\alpha$ de X, como células fechadas são conexas, temos que ou $\overline{e}_\alpha \subset A$ e logo $B \cap \overline{e}_\alpha = \emptyset$, ou $\overline{e}_\alpha \subset B$ e logo $B \cap \overline{e}_\alpha = \overline{e}_\alpha$. Assim, A é aberto.

2.2 Um pouco sobre cardinais

Antes de seguir em frente com o estudo de CW complexos, vamos rapidamente cobrir algumas definições e resultados sobre cardinais e, em particular, sobre o cardinal $\mathfrak{b}$, que posteriormente serão necessários.

Definição 2.2.1. Sejam $f,g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dizemos que f é quase dominada por g se $f(n) \leq g(n)$ a menos possivelmente em um número finito de naturais $n \in \mathbb{N}$. Nesse caso denotamos $f \leq^* g$.

Definição 2.2.2. Definimos o cardinal $\mathfrak{b}$ como a menor cardinalidade de um conjunto de funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ que não é limitado com respeito à quase dominação, ou seja,

$$\mathfrak{b} = min\{|\mathscr{F}| : \mathscr{F} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ e, para todo } g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \text{ existe } f \in \mathscr{F} \text{ tal que } \neg(f \leq^* g)\}.$$

Observação 2.2.3. Note que $\aleph_0 < \mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$, onde $\mathfrak{c} = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$ é a cardinalidade do contínuo. De fato, dado $\mathscr{F} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, temos $\mathfrak{b} \leq |\mathscr{F}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$. Suponha agora que $\mathscr{F} = \{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ é enumerável e considere $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dada por $g(n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(n)$. Note que $f_j \leq^* g$, para todo $j \in \mathbb{N}$, isto é, $\mathscr{F}$ é limitada por g com respeito à quase dominação.

Definição 2.2.4. Um cardinal κ é dito singular se pode ser expresso como uma união de cardinalidade menor de conjuntos de cardinalidade menor, isto é, se

$$\kappa = \bigcup_{\alpha<\gamma} I_\alpha,$$

sendo $\gamma < \kappa$ e $|I_\alpha| < \kappa$ para cada $\alpha < \gamma$.

Um cardinal é dito regular quando não é singular.

Lema 2.2.5. O cardinal $\mathfrak{b}$ é regular.

Demonstração. Seja $\mathscr{F} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ilimitado com respeito à quase dominação, com $\mathscr{F} = \{f_\beta : \beta < \mathfrak{b}\}$. Suponha que $\mathfrak{b}$ seja singular, isto é, pode ser decomposto na forma $\mathfrak{b} = \bigcup_{\alpha<\gamma} I_\alpha$ para algum $\gamma < \mathfrak{b}$ e com $|I_\alpha| < \mathfrak{b}$ para cada $\alpha < \gamma$. Pela minimalidade de $\mathfrak{b}$, temos que fixado um $\alpha < \gamma$ qualquer, existe função g_α tal que $f_\beta \leq^* g_\alpha$, para todo $\beta \in \bigcup_{\lambda<\alpha} I_\lambda$. Ainda, pelo mesmo argumento, existe função g tal que $g_\alpha \leq^* g$ para todo $\alpha < \gamma$. Mas isto implica que $f_\beta \leq^* g$, para todo $\beta < \mathfrak{b}$, contradizendo a hipótese de que $\mathscr{F}$ é ilimitado. □

Agora, com a noção de cardinal regular e a definição de CW complexo localmente menor do que um cardinal κ, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 2.2.6. Seja κ um cardinal regular não enumerável. Um CW complexo X é localmente menor que κ se, e somente se, cada componente conexa de X tem menos do que κ células.

Demonstração. Da Observação 14, temos que uma componente conexa de X é em si um subcomplexo e é um aberto na topologia de X. Segue então que se X é tal que toda componente conexa tem menos do que κ células, X é localmente menor que κ.

Por outro lado, suponha κ um cardinal regular não enumerável, X um CW complexo localmente menor do que κ e $x \in X$ um ponto qualquer. Vamos provar que a componente conexa de X contendo x possui menos do que κ células.

Seja A_1 um subcomplexo conexo de X com menos do que κ células e contendo x em seu interior. Suponha, como hipótese de indução, que definimos A_n subcomplexo conexo de X com menos do que κ células e contendo A_{n-1} em seu interior. Seja e_α uma célula de A_n. Como X é localmente menor que κ, para cada $y \in \overline{e}_\alpha$ temos um subcomplexo conexo A_y de X com menos do que κ células e um aberto U_y em X tais que $y \in U_y \subset A_y$. Note que $\{U_y : y \in \overline{e}_\alpha\}$ forma uma cobertura aberta para $\overline{e}_\alpha$. Como $\overline{e}_\alpha$ é compacto, segue que existe $C_\alpha \subset \overline{e}_\alpha$ finito tal que $\{U_y : y \in C_\alpha\}$ cobre $\overline{e}_\alpha$. Consideremos então $A_{n+1} = \bigcup_{\alpha \in L_n} \bigcup_{y \in C_\alpha} A_y$, sendo L_n o conjunto de índices das células de A_n. Como A_n e cada A_y têm menos do que κ células, cada C_α é finito e κ é regular, temos que A_{n+1} possui menos do que κ células. Além disso, como cada A_y está conectado a A_n, que é conexo, temos que A_{n+1} é conexo. Ainda, por construção temos que A_n está contido no interior de A_{n+1}, concluindo a indução.

Consideremos agora $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Como cada A_n possui menos do que κ células e κ é regular e não enumerável, temos que A possui menos do que κ células. Ainda, A é conexo, pois é união crescente de conjuntos conexos, é fechado, pois é subcomplexo de X, e é aberto por construção. Assim A é componente conexa de X contendo x, finalizando a demonstração. $\square$

Observação 2.2.7. Na proposição acima, podemos observar que a recíproca é sempre válida para qualquer cardinal κ, mas a equivalência exige κ regular e não enumerável. Considere por exemplo $\mathbb{R}$ com a topologia usual, munido da estrutura celular onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto das 0-células e $\{(n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$ é o conjunto das 1-células. Tal espaço é um CW complexo localmente finito, mas é conexo e contém uma quantidade enumerável de células.

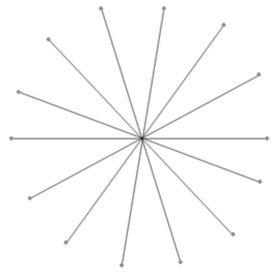
2.3 O produto

Consideremos dois CW complexos X e Y. Sejam e_X^m uma m-célula em X e e_Y^n uma n-célula em Y, com mapas característicos $\phi : D^m \to X$ e $\psi : D^n \to Y$, respectivamente. Como $D^m \times D^n$ é homeomorfo a D^{m+n}, a aplicação $\xi : D^m \times D^n \to X \times Y$ dada por $\xi(x, y) = (\phi(x), \psi(y))$ forma naturalmente um mapa característico para o espaço $X \times Y$.

Definimos então o espaço $X \times Y$ como o produto cartesiano dos CW complexos X e Y, munido da topologia produto e com a estrutura celular dada pelo mapa característico descrito acima. Tal espaço satisfaz naturalmente as duas primeiras condições da definição de CW complexo, mas a topologia produto não necessariamente satisfaz a condição (c) da definição de CW complexo. Considere o seguinte exemplo:

Exemplo 2.3.1. Seja X o CW complexo composto de enumeráveis 1-células, cada uma com uma de suas extremidades em sua própria 0-célula independente (lembrando que uma 0-célula é apenas um ponto) e a outra extremidade em uma 0-célula central comum a todas, que chamaremos de x. Sejam $\phi_n, n \in \mathbb{N}$, os mapas característicos das 1-células. Para simplicidade de notação, digamos que $\phi_n(-1) = x$ para cada n. Os intervalos da forma $\phi_n[(a, 1]]$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a \in (-1, 1)$ arbitrário, e conjuntos da forma $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n[[-1, b_n)]$, com $b_n \in (-1, 1]$ arbitrários e independentes entre si, formam uma sub-base para a topologia de X.

Analogamente, definimos o CW complexo Y com $\mathfrak{c}$ 1-células e os mapas característicos dessas células ψ_f para $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, e chamemos a 0-célula central de y.



Suponha que $X \times Y$ é um CW complexo com a estrutura acima. Considere o conjunto

$$H = \{(\phi_n(\tfrac{1}{f(n)+1}), \psi_f(\tfrac{1}{f(n)+1})) : n \in \mathbb{N}, f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\} \subset X \times Y.$$

Como cada célula de $X \times Y$ contém no máximo um ponto de H, segue pela condição (c) da definição de CW complexo que H é fechado. Sejam agora $U \subset X$ e $V \subset Y$ vizinhanças abertas de x e y, respectivamente. Considere então $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ uma função crescente tal que $\phi_n[[-1, \frac{1}{g(n)})] \subset e_n \cap U$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e tome $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $\psi_g(\frac{1}{g(k)+1}) \in e_g \cap V$. Assim $(\phi_k(\frac{1}{g(k)+1}), \psi_g(\frac{1}{g(k)+1})) \in (U \times V) \cap H$. Então $(x, y) \in \overline{H} \setminus H$, contradizendo que H é fechado.

Agora, finalmente temos tudo que precisamos para enunciar o resultado principal.

Teorema 2.3.2. Sejam X e Y CW complexos. Então $X \times Y$ é também um CW complexo se, e somente se, uma das seguintes condições é cumprida:

(a) X ou Y é localmente finito.

(b) X é localmente enumerável e Y é localmente menor do que $\mathfrak{b}$, ou vice-versa.

Observe que, como $\aleph_1$ e $\mathfrak{b}$ são cardinais regulares e não enumeráveis, podemos pela Proposição 2.2.6 enunciar a condição (b) do teorema de forma equivalente da seguinte maneira:

(b') X possui uma quantidade enumerável de células em cada componente conexa e Y possui menos do que $\mathfrak{b}$ células em cada componente conexa, ou vice-versa.

Primeiramente, vamos focar em provar a recíproca do teorema, isto é, que dados X e Y CW complexos satisfazendo a condição (a) ou (b) do teorema, seu produto $X \times Y$ é um CW complexo. Mais precisamente, vamos começar pelo caso em que X é um CW complexo localmente finito. Para isso, vamos usar o seguinte resultado topológico, uma demonstração do qual está presente em (ENGELKING, 1989) (Teorema 3.3.27, p. 154).

Lema 2.3.3. Sejam X um espaço de Hausdorff compactamente gerado e Y um espaço localmente compacto. Então o produto $X \times Y$ é um espaço compactamente gerado.

Note que, pela Proposição 2.1.7 um CW complexo Y é necessariamente compactamente gerado. Ainda, já observamos que um CW complexo localmente finito X é localmente compacto, pois dado um ponto $x \in X$, existe subcomplexo com número finito de células que é vizinhança de x, e tal subcomplexo é compacto.

Neste caso, com tais CW complexos X e Y, obtemos pelo lema anterior que o produto $X \times Y$ é compactamente gerado. Portanto, como $X \times Y$ satisfaz naturalmente as condições (a) e

(b) da definição de CW complexo, segue novamente pela Proposição 2.1.7 o seguinte corolário que é a primeira parte do resultado principal:

Corolário 2.3.4. Sejam X e Y CW complexos. Se X ou Y é localmente finito, então $X \times Y$ é um CW complexo.

Resta então provar que se X é um CW complexo localmente enumerável e Y é um CW complexo localmente menor do que $\mathfrak{b}$, então $X \times Y$ é um CW complexo. Para isso, precisaremos de mais algumas definições e resultados que serão importantes na demonstração.

Definição 2.3.5. Sejam X um CW complexo e $x \in X$. Sejam, ainda, e_α a célula de X contendo x, ϕ_α seu mapa característico e d sua dimensão. Para $n \in \mathbb{N}$ e $z = \phi_\alpha^{-1}(x)$, tomamos $r \in \mathbb{R}$ como o mínimo entre $1/(n+1)$ e metade da distância entre z e S^{d-1}. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos definir

$$B_n(x) = \phi_\alpha[B^d(z,r)],$$

isto é, $B_n(x) \subset e_\alpha$ é a imagem por ϕ_α da bola aberta de centro z e raio r em D^d.

Observação 2.3.6. Note que dado $x \in e_\alpha \subset X$, a família $\{B_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ definida acima caracteriza um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x em e_α. Mas é importante observar que, enquanto cada $B_n(x)$ é aberto em e_α, o mesmo não é verdade em geral em X.

Seguindo em frente, quando falarmos de uma célula e_α passaremos a omitir seu índice quando possível para não sobrecarregar nossa notação.

Definição 2.3.7. Sejam X um CW complexo, $d \in \mathbb{N}$ e $U \subset X^d$ aberto em X^d. Seja, ainda, e uma célula de dimensão $d+1$ de X com mapa característico ϕ. Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$C_n^e(U) = \phi\left[\left\{tz : t \in \left(\frac{n}{n+1}, 1\right], z \in \phi^{-1}[U] \subset S^d\right\}\right]$$

onde tz representa o produto do escalar $t \in \mathbb{R}$ com o vetor $z \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Observação 2.3.8. Antes de seguir em frente, vamos observar algumas características importantes de $C_n^e(U)$ definido acima.

- Claramente, temos que $U \cap \overline{e} \subset C_n^e(U)$. Basta considerarmos $t = 1$ na definição de $C_n^e(U)$. Além disso, se $\phi^{-1}[U] = \emptyset$, isto é, se $U \cap \overline{e} = \emptyset$, temos que $C_n^e(U) = \emptyset$.
- Note que, da definição, obtemos que dados U e V, $C_n^e(U \cup V) = C_n^e(U) \cup C_n^e(V)$.
- $C_n^e(U)$ é aberto em $\overline{e}$. De fato, vamos mostrar que o complementar de $C_n^e(U)$ nada mais é do que $\phi[D^{d+1} \setminus \{tz : t \in (\frac{n}{n+1}, 1], z \in \phi^{-1}[U]\}]$, que é fechado em $\overline{e}$ pois ϕ é aplicação fechada e $\{tz : t \in (\frac{n}{n+1}, 1], z \in \phi^{-1}[U]\}$ é claramente aberto em D^{d+1}.

Para isso, vamos mostrar que $\phi^{-1}[\phi[\{tz : t \in (\frac{n}{n+1}, 1], z \in \phi^{-1}[U]\}]] = \{tz : t \in (\frac{n}{n+1}, 1], z \in \phi^{-1}[U]\}$.

Podemos considerar primeiro os pontos da borda S^d, isto é, quando $t = 1$. Se $t = 1$ temos $\phi^{-1}[\phi[\{tz : t \in (\frac{n}{n+1}, 1], z \in \phi^{-1}[U]\}]] = \phi^{-1}[\phi[\phi^{-1}[U]]] = \phi^{-1}[U]$, pois ϕ é sobrejetora. Por outro lado, quando $t \in (\frac{n}{n+1}, 1)$, temos que ϕ é bijetora e segue o resultado.

Definição 2.3.9. Sejam X um CW complexo e L o conjunto de índices de suas células. Para cada $\alpha \in L$, seja $d(\alpha)$ a dimensão da célula e_α. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$L^n = \{\alpha \in L : d(\alpha) \leq n\}.$$

Em outra palavras, L^n é o conjunto de índices das células do n-esqueleto X^n.

Definição 2.3.10. Sejam X um CW complexo, L o conjunto de índices de suas células e $d(\alpha)$ a dimensão da célula e_α para cada $\alpha \in L$. Sejam, ainda, $x \in X$ e $\alpha_x \in L$ tal que $x \in e_{\alpha_x}$. Dada uma função $f : L \to \mathbb{N}$ definimos $U^X(x; f)$ indutivamente da seguinte forma:

- Para cada $\alpha \in L^{d(\alpha_x)} \setminus \{\alpha_x\}$, seja $U^X(x; f) \cap e_\alpha = \emptyset$.
- Para $\alpha = \alpha_x$, seja $U^X(x; f) \cap e_{\alpha_x} = B_{f(\alpha_x)}(x)$.
- Se $U^X(x; f) \cap X^n$ já está definido para algum $n \geq d(\alpha_x)$ e α é tal que $d(\alpha) = n + 1$, definimos

$$U^X(x; f) \cap \overline{e}_\alpha = C^{e_\alpha}_{f(\alpha)}(U^X(x; f) \cap X^n).$$

Daqui em diante, quando não houver ambiguidade omitiremos X na notação da definição anterior, escrevendo simplesmente $U(x; f)$. Note que se A é um subcomplexo de X com conjunto de índices $M \subset L$ para suas células, então $U^A(x; f \upharpoonright M) = U^X(x; f) \cap A$. Assim, podemos ainda neste caso escrever $U(x; f)$, pois os espaços coincidem em A e a observação do domínio de f é suficiente para entender em que complexo estamos considerando $U(x; f)$.

Finalmente, com $U(x; f)$ construímos uma vizinhança aberta de x em X. Contudo, antes de provar que $U(x; f)$ é aberto, vamos brevemente enunciar como lemas alguns resultados básicos sobre CW complexos que nos serão úteis nesse processo. Mencionamos no início que células abertas de um CW complexo não necessariamente são abertos no sentido topológico, mas se o CW complexo possui dimensão máxima para suas células, as células abertas com tal dimensão serão abertos na topologia. Formalmente:

Lema 2.3.11. Seja X um CW complexo com conjunto de índices L tal que $d(\alpha) \leq n$, para todo $\alpha \in L$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, dado $\alpha \in L$ tal que $d(\alpha) = n$, temos que e_α é aberto em X.

Demonstração. Seja $\alpha \in L$ tal que $d(\alpha) = n$. Vamos demonstrar que $X \setminus e_\alpha$ é fechado.

Afirmamos que $X \setminus e_\alpha = \bigcup_{\beta \in L \setminus \{\alpha\}} \overline{e_\beta}$. De fato, é direto da definição de CW complexo que $X \setminus e_\alpha = \bigcup_{\beta \in L \setminus \{\alpha\}} e_\beta$. Ainda, como para qualquer e_β temos que $\overline{e_\beta} \setminus e_\beta$ é formado por uma união finita de células de dimensão estritamente menor do que $d(\beta)$, segue que $\overline{e_\beta} \cap e_\alpha = \emptyset$ para qualquer $\beta \in L^{d(\alpha)} = L$.

Considere agora $(X \setminus e_\alpha) \cap \overline{e_\beta}$ para algum $\beta \in L$ qualquer. Se $\beta \neq \alpha$, temos que $(X \setminus e_\alpha) \cap \overline{e_\beta} = \overline{e_\beta}$, que é fechado. Por outro lado, se $\beta = \alpha$, então $(X \setminus e_\alpha) \cap \overline{e_\alpha} = \overline{e_\alpha} \setminus e_\alpha$, que é também fechado. Segue então da definição de CW complexo que $X \setminus e_\alpha$ é fechado e, portanto, e_α é aberto. $\square$

Lema 2.3.12. Seja X um CW complexo com conjunto de índices L. Se $U \subset X$ é tal que $U \cap X^n$ é aberto em X^n para todo $n \in \mathbb{N}$, então U é aberto em X.

Demonstração. Vamos demonstrar que $(X \setminus U) \cap \overline{e_\alpha}$ é fechado para todo $\alpha \in L$.

De fato, seja e_α uma célula qualquer de X com dimensão $d(\alpha) = n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Temos então que

$$(X \setminus U) \cap \overline{e_\alpha} = (X^n \setminus U) \cap \overline{e_\alpha}.$$

Agora, como por hipótese $U \cap X^n$ é aberto em X^n, segue que $(X^n \setminus U) \cap \overline{e_\alpha}$ é fechado em X^n e, portanto ,em X. Assim, $(X \setminus U) \cap \overline{e_\alpha}$ é fechado em X para qualquer célula e_α de X. Logo U é aberto em X. $\square$

Proposição 2.3.13. Nas condições da definição anterior, $U(x; f)$ é uma vizinhança aberta de x em X.

Demonstração. Claramente $x \in U(x; f)$. Vamos provar indutivamente sobre as dimensões n que $U(x; f) \cap X^n$ é aberto em X^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Primeiramente, note que $U(f; x) \cap X^d = \emptyset$ para todo $d < d(\alpha_x)$. Além disso, temos pela definição que $U(x; f) \cap X^{d(\alpha_x)} = B_{f(\alpha_x)}(x)$, que é aberto em $X^{d(\alpha_x)}$ pois é aberto em e_{α_x} que por sua vez é aberto em $X^{d(\alpha_x)}$.

Suponhamos agora que $U(x; f) \cap X^n$ é aberto em X^n para algum $n \geq d(\alpha_x)$. Seja $e_\alpha \subset X^{n+1}$ tal que $d(\alpha) = n + 1$. Então temos que

$$U(x; f) \cap \overline{e_\alpha} = C^{e_\alpha}_{f(\alpha)}(U(x; f) \cap X^n)$$

que é aberto em $\overline{e_\alpha}$ pois $U(x; f) \cap X^n$ é aberto em X^n. Ainda, se $d(\alpha) \leq d(\alpha_x)$ e $\alpha \neq \alpha_x$, então $U(x; f) \cap \overline{e_\alpha} = \emptyset$. Finalmente, se $\alpha = \alpha_x$, temos que $U(x; f) \cap \overline{e_{\alpha_x}} = B_{f(\alpha_x)}(x)$, que é aberto em $\overline{e_{\alpha_x}}$. Portanto $U(x; f) \cap \overline{e_\alpha}$ é aberto em $\overline{e_\alpha}$ para toda célula fechada de X^{n+1}, e logo $U(x; f) \cap X^{n+1}$ é aberto em X^{n+1}, finalizando a demonstração. $\square$

Com a capacidade de obter uma família de vizinhanças de qualquer ponto de um CW complexo, podemos finalmente seguir em direção ao nosso resultado principal.

Lema 2.3.14. Sejam X um CW complexo e L o conjunto de índices de suas células. Para qualquer $x \in X$, os conjuntos $U(x;f)$ variando $f \in \mathbb{N}^L$ formam um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x em X.

Demonstração. Seja V um aberto de X contendo x e suponhamos que x pertence à célula e_{α_x} de dimensão $d(\alpha_x)$. Vamos construir indutivamente sobre n uma função $f : L \to \mathbb{N}$ tal que $U(x;f) \cap X^n \subset V \cap X^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Primeiramente, como $\{B_m(x) : m \in \mathbb{N}\}$ caracteriza um sistema fundamental de vizinhanças de x em e_{α_x} e $V \cap e_{\alpha_x}$ é aberto em e_{α_x}, podemos tomar $f(\alpha_x)$ grande suficiente para que $\overline{B_{f(e_{\alpha_x})}(x)} \subset V$, e tomar $f(\alpha) = 0$, para todo $\alpha \in L^{d(\alpha_x)} \setminus \{\alpha_x\}$.

Suponhamos agora f já definida em L^n para algum $n \geq d(\alpha_x)$ de forma que $\overline{U(x;f|_{L^n})} \subset V \cap X^n$. Seja e_α célula com $d(\alpha) = n+1$ e mapa característico ϕ_α. Temos que $\phi_\alpha^{-1}[\overline{U(x;f|_{L^n}}]$ é fechado e, portanto, compacto em $\phi_\alpha^{-1}[V] \cap S^n$. Podemos então tomar $f(\alpha)$ grande suficiente para que $\overline{C^{e_\alpha}_{f(\alpha)}(U(x;f|_{L^n}))} \subset \phi_\alpha[\phi_\alpha^{-1}[V]] \subset V \cap X^{n+1}$. □

Lema 2.3.15. Sejam X e Y CW complexos, X' e Y' subcomplexos com número finito de células de X e Y, respectivamente, e sejam $U \subset X'$ e $V \subset Y'$ abertos em seus respectivos subcomplexos. Seja ,ainda, $F \subset X \times Y$ sequencialmente fechado tal que $\overline{U \times V} \cap F = \emptyset$. Considere e uma célula de Y tal que $\overline{e} \setminus e \subset Y'$.

Nestas condições, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{U \times (V \cup C^e_p(V))} \cap F = \emptyset$.

Observe que o lema não depende de nenhuma propriedade específica de Y, ou seja, pode ser aplicado para estender qualquer um dos lados do produto.

Demonstração. Observe que $Y' \cup e$ é também um subcomplexo de Y. Denotaremos tal subcomplexo Y''. Observe também que $X' \times Y''$ é CW complexo (pelo Corolário 2.3.4), sequencial (pois é CW complexo), compacto (pois X' e Y'' tem número finito de células) e normal (pois é compacto e Hausdorff).

Denotemos $F \cap X' \times Y''$ por F'. Pela sequencialidade, F' é fechado em $X' \times Y''$. Pela normalidade segue então que existem dois abertos em $X' \times Y''$ disjuntos A e B tais que $\overline{U \times V} \subset A$ e $F' \subset B$.

Dado um ponto qualquer $x \in \overline{U \times V}$, existe aberto $R_x \times S_x$ em $X' \times Y''$ tal que $x \in R_x \times S_x \subset A$. Ainda, podemos diminuir S_x se necessário e considerá-lo com sendo da forma $T \cup C^e_n(T)$ para algum aberto $T \subset Y'$ e algum $n \in \mathbb{N}$ (considerando algum n arbitrário para os abertos tais que $T \cap \overline{e} = \emptyset$, uma vez que nestes casos $C^e_n(T) = \emptyset$ para qualquer valor de n).

Tomando tais $R_x \times S_x$ para cada $x \in \overline{U \times V}$ obtemos uma cobertura aberta e, como $\overline{U \times V}$ é compacto, existe família finita de conjuntos $R_x \times S_x$ tais como descritos anteriormente que o cobre. Basta então escolhermos $p \in \mathbb{N}$ maior que todos os valores de n correspondentes a cada S_x dessa família. Temos assim que a união dessa família cobre também $\overline{U \times (V \cup C_p^e(V))}$ e está contida em A. Portanto $\overline{U \times (V \cup C_p^e(V))} \cap F = \emptyset$ □

Lema 2.3.16. Seja X um CW complexo com uma quantidade enumerável de células. Existe uma indexação $e_n, n \in \mathbb{N}$, de suas células tal que para cada n, a borda de e_n está contida em $\bigcup_{i<n} e_i$ e, portanto, $X_n = \bigcup_{i \leq n} e_i$ constitui um subcomplexo de X para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Sejam X um CW complexo enumerável e $e_n, n \in \mathbb{N}$, uma indexação qualquer de suas células. Sejam, ainda, $d(i)$ a dimensão da célula e_i e $N(i)$ o conjunto dos índices das células de dimensão $d(i)-1$ que fazem parte da borda de e_i (sendo $N(i) = \emptyset$ se $d(i) = 0$).

Iremos definir uma nova ordenação para as células de X. Para isso, vamos primeiramente analisar e_0. Se $d(0) = 0$, podemos simplesmente colocar e_0 no começo da nova ordenação. Caso contrário, consideremos as células e_i com $i \in N(0)$. Se a dimensão dessas células é 0, basta as colocarmos no começo da nova ordenação (em qualquer ordem, pois todas tem a mesma dimensão) e depois e_0. Caso contrário, consideremos as células e_i com $i \in \bigcup_{j \in N(0)} N(j)$. Se essas células têm dimensão 0, basta as colocarmos no começo da nova ordenação (em qualquer ordem), depois as células e_i com $i \in N(0)$ e depois e_0. Podemos continuar esse processo até que ele termine, pois cada passo diminui a dimensão das células sendo adicionadas, e cada passo adiciona apenas um número finito de células.

Consideremos então e_1. Essa célula pode já ter sido inclusa na nova ordenação no processo de inclusão de e_0, e neste caso não resta nada a fazer. Caso contrário, podemos repetir o mesmo processo pelo qual incluímos e_0 para incluir e_1 e todas as demais células para isso necessárias depois de e_0. Repetindo esse algoritmo para cada célula $e_i, i \in \mathbb{N}$, obtemos uma reordenação completa das células satisfazendo a condição desejada. □

Podemos agora avançar na prova do Teorema 2.3.2. Mais precisamente, pela Proposição 2.2.6, o enunciado equivalente do teorema mencionado anteriormente:

Teorema 2.3.2. *Sejam X e Y CW complexos. Então $X \times Y$ é um CW complexo se, e somente se, uma das seguintes condições é cumprida:*

(a) X ou Y é localmente finito.

(b') X possui uma quantidade enumerável de células em cada componente conexa e Y possui menos do que $\mathfrak{b}$ células em cada componente conexa, ou vice-versa.

Nós já demonstramos no Corolário 2.3.4 que $X \times Y$ é um CW complexo quando um deles é localmente finito. Vamos agora provar que o mesmo é verdade quando a condição (b') é satisfeita, deixando para depois a prova da necessidade de que uma das condições seja satisfeita.

Demonstração. Primeiramente, como podemos considerar as componentes conexas individualmente, podemos, para simplicidade nessa demonstração, assumir sem perda de generalidade que X tem uma quantidade enumerável de células e Y tem menos do que $\mathfrak{b}$ células. Nessas condições, provaremos que a topologia produto em $X \times Y$ é sequencial e, portanto, é CW complexo pela Proposição 2.1.9.

Seja $F \subset X \times Y$ sequencialmente fechado, e seja $(x_0, y_0) \in (X \times Y) \setminus F$. Iremos mostrar que existe vizinhança aberta de (x_0, y_0) disjunta com F e, portanto, F é fechado.

Sejam $e_{X,n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ as células de X. Podemos ordenar essa enumeração de forma que $\bar{e}_{X,n} \setminus e_{X,n} \subset \bigcup_{i<n} e_{X,i}$, pelo Lema 2.3.16. Definindo então $X_n = \bigcup_{i \leq n} e_{X,i}$ temos que X_n é um subcomplexo de X para cada $n \in \mathbb{N}$.

Denotamos: $e_{Y,\alpha}$ para cada $\alpha \in L$ as células de Y (sendo L um conjunto arbitrário de índices com cardinalidade menor do que $\mathfrak{b}$), $d(n)$ a dimensão da célula $e_{X,n}$ e $d(\alpha)$ a dimensão da célula $e_{Y,\alpha}$, e e_{X,n_0} e e_{Y,α_0} as células contendo x_0 e y_0, respectivamente. Iremos construir indutivamente funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : L \to \mathbb{N}$ tais que $U(x_0; f) \times U(y_0; g) \cap H = \emptyset$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, construiremos funções $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g_i : L^{d(\alpha)+i} \to \mathbb{N}$ tais que, dado $i \in \mathbb{N}$, temos:

- $\overline{U(x_0; f_i) \times U(y_0; g_i)} \cap H = \emptyset$
- para cada $j > i$:
  - $g_j \restriction L^{d(\alpha_0)+i} = g_i$;
  - $f_j(n) = f_i(n), \forall n \leq i$;
  - $f_j(n) \geq f_i(n), \forall n > i$.

Supondo por enquanto que tais funções podem ser construídas, podemos definir $f(i) = f_{i+1}(i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$ e $g(\alpha) = g_{d(\alpha)-d(\alpha_0)}(\alpha)$ quando $d(\alpha) \geq d(\alpha_0)$ (recorde-se de que se $\alpha \in L^{d(\alpha_0)} \setminus \{\alpha_0\}$, então $U(y_0; g) \cap e_\alpha = \emptyset$, tornando o valor de g em tais casos irrelevante). Temos então

$$
\begin{aligned}
U(x_0; f) \times U(y_0; g) &= \Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U(x_0; f \restriction \mathbb{N}_{\leq i}) \times U(y_0; g \restriction L^{d(\alpha_0)+i}) \Big) \\
&= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \big(U(x_0; f_i \restriction \mathbb{N}_{\leq i}) \times U(y_0; g_i) \big),
\end{aligned}
$$

sendo $\mathbb{N}_{\leq i} = \{ j \in \mathbb{N} : j \leq i \}$. Cada termo desta união é por construção disjunto de H e, portanto, $U(x_0; f) \times U(y_0; g)$ também o é.

Nos resta então evidenciar a construção indutiva de f_i e g_i. Para o primeiro passo, considere $X \times Y_{\alpha_0}^{min}$. Como $Y_{\alpha_0}^{min}$ tem apenas um número finito de células, temos pelo Corolário 2.3.4 que $X \times Y_{\alpha_0}^{min}$ é CW complexo. Portanto $(X \times Y_{\alpha_0}^{min}) \cap H$ é fechado em $X \times Y_{\alpha_0}^{min}$. Assim, pela normalidade de CW complexos, podemos tomar uma função $f_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e um número $k \in \mathbb{N}$ tais que $\overline{U(x_0; f_0) \times B_k(y_0)} \cap H = \emptyset$. Tomemos $g_0(\alpha_0) = k$ e $g_0(\alpha) = 0$ quando $\alpha \in$

$L^{d(\alpha_0)} \setminus \{\alpha_0\}$ (novamente, nestes casos o valor de g_0 não importa). Como $U(y_0;g_0) = B_k(y_0)$, temos $\overline{U(x_0;f_0) \times U(y_0;g_0)} \cap H = \emptyset$, completando o primeiro passo da construção.

Para o restante da construção, precisaremos do seguinte lema, que enunciaremos mantendo a nomenclatura já em uso nesta demonstração:

Lema 2.3.17. Sejam Y' um subcomplexo com finitas células de Y contendo y_0, com $L' \subset L$ seu conjunto de índices, e $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $G : L' \to \mathbb{N}$ funções tais que $\overline{U(x_0;F) \times U(y_0;G)} \cap H = \emptyset$. Sejam, ainda, $i \in \mathbb{N}$ e $Y'' = Y' \cup e_\alpha$ onde $\alpha \notin L'$ mas a borda de e_α está em Y'. Então existe uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que:

(a) $F(n) \leq f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f(n) = F(n)$ para todo $n < i$

(b) para cada $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f \leq^* f'$ e $F \leq f'$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{U(x_0;f') \times U(y_0;G \cup \{(\alpha,k)\})} \cap H = \emptyset$

Vamos deixar de lado no momento a demonstração do lema e continuar a construção das funções.

Suponha que já construímos funções $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g_i : L^{d(\alpha_0)+i} \to \mathbb{N}$ satisfazendo as condições (a) e (b) do Lema 2.3.17 para todo $i \leq q$ para algum $q \in \mathbb{N}$. Queremos estender g_i para as células e_α de dimensão $d(\alpha) = d(\alpha_0) + q + 1$. Com isso em mente, iremos nos referir a tais células e seus índices como *relevantes*.

Considere então α relevante. Sejam $Y'_\alpha = (Y^{min}_{\alpha_0} \cup Y^{min}_\alpha) \setminus e_\alpha$ e L_α seu conjunto de índices. Podemos aplicar o Lema 2.3.17 tomando: f_q como F, Y'_α como Y', $Y^{min}_{\alpha_0} \cup Y^{min}_\alpha$ como Y'', $g_q \restriction L_\alpha$ como G, e $q+1$ como i, sendo que a condição de $\overline{U(x_0;f_q) \times U(y_0;g_q \restriction L_\alpha)} \cap H = \emptyset$ é satisfeita pela hipótese de indução. Obtemos então, para cada α relevante, uma função f^α_{q+1} satisfazendo as condições (a) e (b) do Lema 2.3.17.

Agora, como L tem cardinalidade menor do que $\mathfrak{b}$, existe função $f_{q+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f^\alpha_{q+1} \leq^* f_{q+1}$ para cada α relevante. Podemos então aplicar o item (b) do Lema 2.3.17 considerando f_{q+1} como f', o que implica que para cada α relevante, existe $p_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{U(x_0;f_{q+1}) \times U(y_0;g_q \cup \{(\alpha,p_\alpha)\})} \cap H = \emptyset$. Temos então:

$$\overline{U(x_0;f_{q+1}) \times \bigcup_{\alpha \text{ relevante}} U(y_0;g_q \cup \{(\alpha,p_\alpha)\})} = \overline{U(x_0;f_{q+1})} \times \overline{\bigcup_{\alpha \text{ relevante}} U(y_0;g_q \cup \{(\alpha,p_\alpha)\})}$$

pela topologia produto e

$$\overline{U(x_0;f_{q+1})} \times \overline{\bigcup_{\alpha \text{ relevante}} U(y_0;g_q \cup \{(\alpha,p_\alpha)\})} = \overline{U(x_0;f_{q+1})} \times \bigcup_{\alpha \text{ relevante}} \overline{U(y_0;g_q \cup \{(\alpha,p_\alpha)\})}$$

pela topologia fraca em $Y^{d(\alpha_0)+q+1}$. Portanto,

$$\overline{U(x_0;f_{q+1}) \times \bigcup_{\alpha \text{ relevante}} U(y_0;g_q \cup \{(\alpha,p_\alpha)\})} \cap H = \emptyset.$$

Basta então tomar $g_{q+1} = g_q \cup \{(\alpha, p_\alpha) : \alpha \text{ relevante}\}$ e está completa a indução.

Como discutido anteriormente, com tais funções obtemos funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : L \to \mathbb{N}$ tais que $(U(x_0; f) \times U(y_0; g)) \cap H = \emptyset$, isto é, $U(x_0; f) \times U(y_0; g)$ é uma vizinhança de $(x_0, y_0) \in X \times Y$ que não toca H, sendo (x_0, y_0) um ponto arbitrário fora de H. Portanto H é fechado, completando a demonstração. $\square$

Para verdadeiramente completar esta direção da demonstração do teorema, nos resta agora apenas provar o Lema 2.3.17.

Demonstração do Lema 2.3.17. Como $f(n) = F(n)$ quando $n < i$, resta definir f para $n \geq i$. Como de costume, construiremos f indutivamente. Para começar, considere simplesmente $f(i) = F(i)$.

Agora suponha que f já está definida em $\mathbb{N}_{<n}$ para algum $n \geq i$. Seja $r : \mathbb{N}_{<n} \to \mathbb{N}$ uma função tal que $F(m) \leq r(m) \leq f(m)$, para todo $m < n$. Pela hipótese sobre F e G e pelo Lema 2.3.15, existe um $q(r)$ mínimo tal que $\overline{U(x_0; r) \times U(y_0; G \cup \{(\alpha, q(r))\})} \cap H = \emptyset$. Aplicando agora o Lema 2.3.15 no lado esquerdo do produto, temos que existe um $p(r)$ mínimo tal que $\overline{U(x_0; r \cup \{(n, p(r))\}) \times U(y_0; G \cup \{(\alpha, q(r))\})} \cap H = \emptyset$. Definimos então

$$f(n) = max(\{p(r) : F \restriction \mathbb{N}_{<n} \leq r \leq f \restriction \mathbb{N}_{<n}\} \cup \{F(n)\}),$$

concluindo o processo de indução.

Naturalmente por sua construção, f satisfaz a condição (a), restando apenas mostrar que satisfaz também a condição (b). Seja $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f \leq^* f'$ e $F \leq f'$. Sejam também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) \leq f'(n)$, para todo $n \geq n_0$, e $s : \mathbb{N}_{<n_0} \to \mathbb{N}$ dada por $s(m) = min(f(m), f'(m))$. Como anteriormente, podemos definir o número $q(s) \in \mathbb{N}$. Note que $s \restriction \mathbb{N}_{<i} = f \restriction \mathbb{N}_{<i} = F \restriction \mathbb{N}_{<i}$. Afirmamos que o número $q(s)$ satisfaz a condição (b) do lema, isto é, que $\overline{U(x_0; f') \times U(y_0; G \cup \{(\alpha, q(s))\})} \cap H = \emptyset$.

De fato, mostraremos indutivamente sobre n que, sendo $f'' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$$f''(n) = \begin{cases} s(n) & \text{se } n < n_0 \\ f(n) & \text{se } n \geq n_0 \end{cases},$$

temos que $\overline{U(x_0; f'') \times U(y_0; G \cup \{(\alpha, q(s))\}} \cap H = \emptyset$.

Primeiramente, quando $n < n_0$ pela escolha de $q(s)$ temos de forma imediata que $\overline{U(x_0; s) \times U(y_0; G \cup \{(\alpha, q(s))\}} \cap H = \emptyset$.

Consideremos então agora $n \geq n_0$ e suponhamos que já mostramos anteriormente que $\overline{U(x_0; f'' \restriction \mathbb{N}_{<n}) \times U(y_0; G \cup \{(\alpha, q(s))\})} \cap H = \emptyset$. Considere $q(f'' \restriction \mathbb{N}_{<n})$. Por minimalidade, segue que $q(f'' \restriction \mathbb{N}_{<n}) \leq q(s)$. Ainda, como $f''(n) = f(n) \geq p(f'' \restriction \mathbb{N}_{<n})$, temos:

- $\overline{U(x_0; f'' \restriction \mathbb{N}_{<n+1}) \times U(y_0; G \cup \{(\alpha, q(f'' \restriction \mathbb{N}_{<n}))\})} \cap H = \emptyset$

- $U(x_0; f'' \restriction \mathbb{N}_{<n+1}) \times U(y_0; G \cup \{(\alpha, q(s))\})$ está contido em $U(x_0; f'' \restriction \mathbb{N}_{<n+1}) \times U(y_0; G \cup \{(\alpha, q(f'' \restriction \mathbb{N}_{<n}))\})$

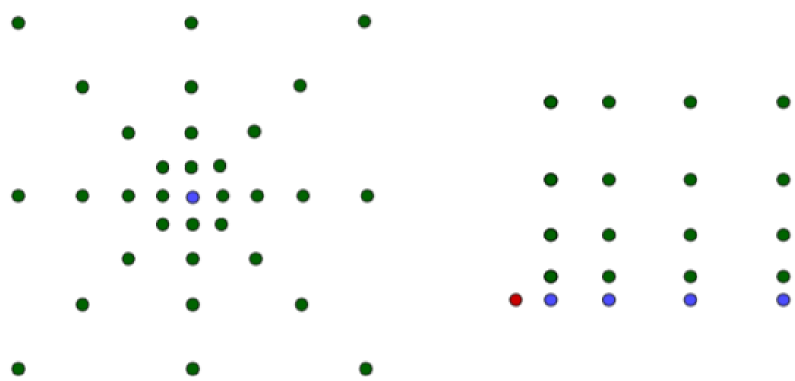
e, portanto, $\overline{U(x_0; f'' \restriction \mathbb{N}_{<n}) \times U(y_0; G \cup \{(\alpha, q(s))\})} \cap H = \emptyset$. Finalmente, como

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{U(x_0; f'' \restriction \mathbb{N}_{<n}) \times U(y_0; G \cup \{(\alpha, q(s))\}}$$

é fechado em cada célula de $X \times Y''$, é também fechado no espaço $X \times Y''$ e, portanto, $\overline{U(x_0; f'') \times U(y_0; G \cup \{(\alpha, q(s))\})} \cap H = \emptyset$, concluindo a demonstração. □

Com isso finalmente está completa a demonstração da suficiência das condições do Teorema 2.3.2 para que o produto de dois CW complexos seja um CW complexo. Sigamos então adiante para a demonstração da necessidade. Para isso, serão necessários outros resultados, os quais por sua vez receberão auxílio de dois espaços em particular, definidos a seguir:

Definição 2.3.18. Denotamos por S_ω o espaço dado por uma família enumerável de sequências, digamos $\{a_n^m : n \in \mathbb{N}\}$ para cada $m \in \mathbb{N}$, tal que cada uma converge para um único ponto central $a \in S_\omega$. Tal espaço é munido da topologia na qual cada ponto fora a é isolado e uma vizinhança aberta básica de a é um conjunto da forma $\{a\} \cup \{a_n^m : n \geq n_0(m)\}$ para $m \in \mathbb{N}$ arbitrário e $n_0(m) \in \mathbb{N}$ dependente de cada m.



Definição 2.3.19. Denotamos por S_2 o espaço dado por uma família enumerável de sequências, digamos $\{b_n^m : n \in \mathbb{N}\}$ para cada $m \in \mathbb{N}$, cada uma com seu respectivo limite b^m, e tal que a sequência dada por $\{b^m : m \in \mathbb{N}\}$ converge para um ponto $b \in S_2$. Tal espaço é munido da topologia na qual cada b_n^m é isolado, uma vizinhança aberta básica de b^m é um conjunto da forma $\{b^m\} \cup \{b_n^m : n \geq n_0\}$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ arbitrário, e uma vizinhança de b é um conjunto contendo b que seja também vizinhança de cada b^m, a menos possivelmente de uma quantidade finita deles.

Observação 2.3.20. Note que o espaço quociente de S_2 obtido identificando os pontos b e b^m, para todo $m \in \mathbb{N}$, é o espaço S_ω.

A importância da observação anterior pode ser percebida preliminarmente através do seguinte lema topológico, do qual faremos uso.

Lema 2.3.21. Se X é um espaço compactamente gerado, então qualquer espaço quociente de X é também compactamente gerado.

Com essas definições e o último lema como ferramentas, estamos prontos para provar as seguintes proposições:

Proposição 2.3.22. Seja X um CW complexo e κ um cardinal. X é localmente menor do que κ se, e somente se, para cada $x \in X$, com e_x a célula tal que $x \in e_x$, existe uma vizinhança B de x em e_x tal que o conjunto de células $K = \{e_\alpha : B \cap \overline{e_\alpha} \neq \emptyset\}$ tem cardinalidade menor do que κ.

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Seja $x \in e_{\alpha_x} \subset X$ qualquer e $B_n(x)$ para algum $n \in \mathbb{N}$ uma vizinhança básica de x em e_{α_x} satisfazendo as condições da hipótese. Seja também L o conjunto de índices das células de X e $f : L \to \mathbb{N}$ uma função tal que $f(\alpha_x) = n$.

Relembre-se da construção da vizinhança $U(x;f)$ de x em X. Começamos a partir da vizinhança $B_n(x)$ em e_{α_x} e a estendemos para as células fechadas vizinhas de dimensão imediatamente maior, isto é, para as células e_α tais que $\overline{e_\alpha} \cap B_n(x) \neq \emptyset$ e $d(\alpha) = d(\alpha_x) + 1$, obtendo $U(x;f) \cap X^{d(\alpha_x)+1}$. Repetimos então recursivamente esse processo com $U(x;f) \cap X^m$ para cada dimensão m.

Observe que se e_α é uma célula com $d(\alpha) = d(\alpha_x) + 2$ tal que $\overline{e_\alpha} \cap (U(x;f) \cap X^{d(\alpha_x)+1}) \neq \emptyset$, então $\overline{e_\alpha} \cap B_n(x) \neq \emptyset$. De fato, se $\overline{e_\alpha} \cap (U(x;f) \cap X^{d(\alpha_x)+1}) \neq \emptyset$ então existe alguma célula e_β com $d(\beta) = d(\alpha_x) + 1$ tal que $\overline{e_\beta} \cap B_n(x) \neq \emptyset$ e $\overline{e_\alpha} \cap C^{e_\beta}_{f(\beta)}(B_n(x)) \neq \emptyset$. Se $\overline{e_\alpha}$ toca $C^{e_\beta}_{f(\beta)}(B_n(x)) \setminus e_\beta = B_n(x) \cap \overline{e_\beta}$, acabamos. Caso contrário, podemos escolher $f(\beta)$ de modo que $C^{e_\beta}_{f(\beta)}(B_n(x)) \cap \overline{e_\alpha} = \emptyset$, pois se a célula $\overline{e_\alpha}$ se aproxima arbitrariamente de $B_n(x) \cap \overline{e_\beta}$, então por ser fechada ela deve conter algum ponto de $B_n(x) \cap \overline{e_\beta}$.

Analogamente, obtemos que para qualquer célula e_α com $d(\alpha) = d(\alpha_x) + m + 1$ para algum m e tal que $\overline{e_\alpha} \cap (U(x;f) \cap X^{d(\alpha_x)+m}) \neq \emptyset$, temos que $\overline{e_\alpha} \cap B_n(x) \neq \emptyset$. Assim, $K = \{e_\alpha : \overline{e_\alpha} \cap B_n(x) \neq \emptyset\} = \{e_\alpha : \overline{e_\alpha} \cap U(x;f) \neq \emptyset\}$. Acrescentando a K as células que formam as bordas das células de K (que é apenas um número finito de células para cada elemento de K) obtemos X_K um subcomplexo de X com menos do que κ células e tal que $x \in U(x;f) \subset X_K$, provando que X é localmente menor do que κ.

($\Longrightarrow$) Por hipótese, existe um subcomplexo X' com menos do que κ células tal que $x \in int(X')$. Claramente, todas as células e_α de X tais que $\overline{e_\alpha} \cap B_n(x) \neq \emptyset$ estão em X', concluindo a demonstração. $\square$

Proposição 2.3.23. Seja X um CW complexo. Se X não é localmente finito, então X contém uma cópia fechada de S_ω ou S_2.

Demonstração. Primeiramente, como X não é localmente finito, temos pela proposição anterior que existe $x \in X$ tal que para cada vizinhança $B_n(x), n \in \mathbb{N}$, o conjunto de células $\{e_\alpha : \overline{e_\alpha} \cap B_n(x) \neq \emptyset\}$ tem pelo menos ω células. Fixado um n_0 arbitrário, seja então K uma coleção enumerável de tais células.

Se existe um ponto $x_0 \in B_{n_0}(x)$ tal que $x_0 \in \bigcap_{e_\alpha \in K} \overline{e_\alpha} \cap B_{n_0}(x)$, podemos tomar sequências $\{x_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\}$ em $\overline{e_\alpha}$, para cada célula $e_\alpha \in K$, convergindo para x_0. Denotemos $S = \bigcup_{e_\alpha \in K} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n^\alpha\} \cup \{x_0\}$. Afirmamos que S é uma cópia fechada de S_ω em X. De fato, é simples observar que cada ponto das sequências fora x_0 é isolado em S e que uma vizinhança de x_0 em S tem a mesma forma de uma vizinhança de a em S_ω. Ainda, como S é uma união de sequências e seu limite, S é claramente sequencialmente fechado e, portanto, fechado em X pela Proposição 2.1.9.

Suponha agora que não existe tal x_0. Para cada célula e_α em K, seja $\{x_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência em $\overline{e_\alpha}$ que converge para algum $x^\alpha \in \overline{e_\alpha} \cap B_{n_0}(x)$. Ainda, podemos escolher as células de K de forma que os limites x^α formam uma sequência convergente para x. Denotemos agora $S = \bigcup_{e_\alpha \in K} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n^\alpha\} \cup \{x^\alpha\} \cup \{x\}$. Afirmamos que S é uma cópia fechada de S_2 em X. De fato, como anteriormente, é simples observar que os pontos x_n^α são isolados em S, que uma vizinhança de x^α em S tem a mesma forma de uma vizinhança de b^m em S_2 e que uma vizinhança de x em S tem a mesma forma de uma vizinhança de b em S_2. Além disso, como novamente S é a união de sequências convergentes com seus limites, segue que S é sequencialmente fechado e, portanto, fechado em X. □

Com o auxílio dessas proposições podemos enfim provar os lemas que nos fornecerão nosso resultado desejado.

Lema 2.3.24. Sejam X e Y CW complexos e $x \in X$ com e_x a célula de X contendo x. Suponha que para cada vizinhança U de x em e_x existem pelo menos $\mathfrak{b}$ células e_α cuja borda toca U, isto é, tais que $(\overline{e_\alpha} \setminus e_\alpha) \cap U \neq \emptyset$. Então, se Y não é localmente finito, $X \times Y$ não é um CW complexo.

Demonstração. Considere a base local decrescente de x em e_x expressa por $\{B_n(x) : x \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que existe uma família dois a dois disjunta $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ de coleções de células de X tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\overline{e_\alpha^n} \setminus e_\alpha^n) \cap B_n(x) \neq \emptyset$ para todo $e_\alpha^n \in X_n$, e cada X_n tem cardinalidade $\mathfrak{b}$.

De fato, a escolha de tais X_n pode ser feita indutivamente. Vamos construir primeiramente X_0. Por hipótese, existe um conjunto A de $\mathfrak{b}$ células cujas bordas tocam $B_0(x)$. Denotemos então A' o subconjunto de A das células cujas bordas não tocam $B_1(x)$ e A'' o subconjunto das células cujas bordas tocam $B_1(x)$. Como $A = A' \cup A''$ e $|A| = \mathfrak{b}$, temos que $|A'| = \mathfrak{b}$ ou $|A''| = \mathfrak{b}$. Se $|A'| = \mathfrak{b}$, tomamos simplesmente $X_0 = A'$. Caso contrário, dividimos A'' arbitrariamente em dois conjuntos A''_1 e A''_2 disjuntos, ambos com cardinalidade $\mathfrak{b}$. Definimos então $X_0 = A''_1$.

Para definir X_1 tomamos A''_2 como o conjunto A do argumento anterior e repetimos o processo. Da mesma forma, repetindo recursivamente o processo definimos X_n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Continuando a demonstração, dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, para cada célula $e^n_\alpha \in X_n$ seja x^n_α um ponto em $(\overline{e^n_\alpha} \setminus e^n_\alpha) \cap B_n(x)$. Afirmamos que para cada x^n_α existe uma sequência $\{x^n_\alpha(i) : i \in \mathbb{N}\} \subset e^n_\alpha$ que converge para x^n_α em $\overline{e^n_\alpha}$. De fato, para cada x^n_α, existem uma célula e que o contém e faz parte da borda de e^n_α e uma base local $\{B_i(x^n_\alpha) : i \in \mathbb{N}\}$ para x^n_α em e. Considere então os conjuntos $C^{e^n_\alpha}_i(B_i(x^n_\alpha))$, $i \in \mathbb{N}$, que formam uma base local para x^n_α em $\overline{e^n_\alpha}$. Basta então escolhermos $x^n_\alpha(i) \in C^{e^n_\alpha}_i(B_i(x^n_\alpha))$.

Suponhamos agora que $X \times Y$ é um CW complexo. Temos então pela Proposição 2.1.7 que $X \times Y$ é compactamente gerado. Ainda, pela Proposição 2.3.23, sabemos que Y contém uma cópia fechada de S_ω ou de S_2. Se Y contém cópia de S_ω, segue que $X \times S_\omega$ é compactamente gerado. Por outro lado, se Y contém cópia de S_2, então $X \times S_2$ é compactamente gerado. Mas podemos considerar $X \times S_\omega$ como espaço quociente de $X \times S_2$ conforme a Observação 2.3.20, e segue então pelo Lema 2.3.21 que $X \times S_\omega$ é compactamente gerado também neste caso.

Com isso em mente, seja agora $F = \{f_\alpha : f_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \alpha < \mathfrak{b}\}$ uma coleção de funções de cardinalidade $\mathfrak{b}$ tal que para cada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existe $f_\alpha \in F$ tal que $f(n) < f_\alpha(n)$ para uma quantidade infinita de valores $n \in \mathbb{N}$. Tal F existe pela definição do cardinal $\mathfrak{b}$. Da mesma forma, como cada X_n tem cardinalidade $\mathfrak{b}$, podemos indexar $X_n = \{e^n_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos:

- $H_i = \bigcup\limits_{\alpha < \mathfrak{b}} \{(x^i_\alpha(m), a^m_n) : f_\alpha(m) \geq n\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$;

- $H = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} H_i$.

Afirmamos que dado K um compacto qualquer em $X \times S_\omega$, temos que $K \cap H$ é finito.

De fato, se K é compacto, então a projeção $\pi_2[K]$ de K em S_ω é um compacto em S_ω e, como todo ponto em S_ω fora o centro a é isolado, $\pi_2[K]$ é finito. Portanto, $\pi_2[K \cap H]$ é finito e, consequentemente, compacto em S_ω. Agora, observe que $\pi_1[H]$ contém no máximo um ponto de cada célula e^i_α para cada sequência de S_ω. Como $\pi_2[K \cap H]$ é finito (e, portanto, toca um número finito de sequências de S_ω), a projeção $\pi_1[K \cap H]$ de $K \cap H$ em X toca no máximo um número finito de células (pois $\pi_1[K]$ é compacto em X) e $e^i_\alpha \neq e^j_\beta$, para todo $\alpha, \beta < \mathfrak{b}$, quando $i \neq j$, concluímos que $K \cap H$ é finito e, portanto, fechado em $X \times S_\omega$.

Utilizando então o fato de que $X \times S_\omega$ é compactamente gerado, segue que H é fechado em $X \times S_\omega$. Afirmamos agora que $(x, a) \in \overline{H}$, gerando uma contradição, uma vez que $(x, a) \notin H$.

Primeiramente, seja $U \times V$ uma vizinhança aberta de (x, a) em $X \times S_\omega$ e seja $q \in \mathbb{N}$ tal que $B_q(x) \subset U$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, como V é uma vizinhança de a, existe $p_m > m$ tal que se $n \geq p_m$, então $a^m_n \in V$. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(m) = p_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Existe então $\alpha_0 < \mathfrak{b}$ tal que $f_{\alpha_0}(m) > f(m)$ para uma quantidade infinita de valores $m \in \mathbb{N}$. Agora, como $\{x^m_{\alpha_0}(i) : i \in \mathbb{N}\}$ converge para $x^m_{\alpha_0}$ para cada $m \in \mathbb{N}$ e $x^q_{\alpha_0} \in B_q(x) \subset U$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x^q_{\alpha_0}(n_0) \in U$ e

$f_{\alpha_0}(n_0) > f(n_0)$. Portanto, $(x^q_{\alpha_0}(n_0), a^{n_0}_{f_{\alpha_0}(n_0)}) \in H_q \cap (U \times V) \subset H \cap (U \times V)$, completando a demonstração. $\square$

Como consequência direta do lema anterior juntamente com a Proposição 2.3.22 obtemos o seguinte resultado:

Corolário 2.3.25. Sejam X e Y CW complexos não localmente finitos e tais que $X \times Y$ é um CW complexo. Então X e Y são localmente menores do que $\mathfrak{b}$.

Lema 2.3.26. Seja X um CW complexo. Seja $x \in X$, com e^X a célula de X contendo x, tal que toda vizinhança de x em e^X toca as bordas de ao menos ω_1 células de X. Analogamente, sejam Y CW complexo e $y \in e^Y \subset Y$ com as mesmas condições. Então $X \times Y$ não é um CW complexo.

Demonstração. Primeiramente, considere as bases locais $\{B_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{B_n(y) : n \in \mathbb{N}\}$ de x em e^X e de y em e^Y, respectivamente. Para cada ordinal $\alpha < \omega_1$, definimos uma função $f_\alpha : \omega_1 \to \mathbb{N}$ tal que $f_\alpha \restriction \alpha$ é bijetiva sobre $\mathbb{N}$. Ainda, analogamente ao feito na demonstração do Lema 2.3.24, consideramos a sequência $\{x^n_\alpha(i) : i \in \mathbb{N}\}$ na célula $e^{X,n}_\alpha$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha < \omega_1$ e a sequência $\{y^n_\alpha(i) : i \in \mathbb{N}\}$ na célula $e^{Y,n}_\alpha$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha < \omega_1$.

Definimos também:

- $M_n = \bigcup_{\alpha,\beta<\omega_1} \{(x^n_\alpha(i), y^n_\beta(f_\beta(\alpha))) : i < f_\beta(\alpha)\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$.

Suponhamos que $X \times Y$ é CW complexo e, consequentemente, compactamente gerado. Novamente, analogamente à demonstração do Lema 2.3.24, obtemos que $K \cap M$ é finito e, portanto, fechado para cada $K \subset X \times Y$ compacto. Logo M é fechado em $X \times Y$. Assim como antes, vamos mostrar que $(x,y) \in \overline{M}$, criando assim uma contradição.

Seja $U \times V$ uma vizinhança aberta de (x,y) em $X \times Y$, e seja também $q \in \mathbb{N}$ tal que $B_q(x) \subset U$ e $B_q(y) \subset V$. Existe uma função $g : \omega_1 \to \mathbb{N}$ tal que, para cada $\alpha < \omega_1$, temos $\{x^q_\alpha(n) : n \geq g(\alpha)\} \subset U$ e $\{y^q_\alpha(n) : n \geq g(\alpha)\} \subset V$, pela convergência das sequências. Existe também, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g(\alpha) = n_0$, para todo $\alpha \in A$, sendo A algum subconjunto não enumerável de ω_1, pois $\omega_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g^{-1}(n)$. Seja então $\gamma \in A$ com infinitos antecessores em A. Existe $\delta \in A$ tal que $\delta < \gamma$ e $f_\gamma(\delta) > n_0$. Assim, $(x^q_\delta(n_0), y^q_\gamma(f_\gamma(\delta))) \in M \cap (U \times V)$, provando portanto que $(x,y) \in \overline{M}$ e concluindo a demonstração. $\square$

Como anteriormente, utilizando o lema anterior juntamente com a Proposição 2.3.22, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 2.3.27. Sejam X e Y CW complexos, ambos não localmente enumeráveis. Então $X \times Y$ não é um CW complexo.

Finalmente, unindo o Corolário 2.3.25 e o Corolário 2.3.27, obtemos a recíproca de nosso resultado principal:

Proposição 2.3.28. Sejam X e Y CW complexos tais que $X \times Y$ é também um CW complexo. Então uma das seguintes condições é satisfeita:

- X ou Y é localmente finito;
- X é localmente menor do que $\mathfrak{b}$ e Y é localmente enumerável, ou vice-versa.

Com isso, está finalmente concluída a demonstração do Teorema 2.3.2.

CAPÍTULO

3

RELAÇÃO ENTRE ESPAÇO MÉTRICO E CARDINALIDADE DO GRUPO FUNDAMENTAL

O estudo do grupo fundamental de um espaço é uma das formas mais básicas de estudar a sua forma. Como um objeto algébrico, surge naturalmente o interesse em avaliar possíveis isomorfismos entre o grupo fundamental de um espaço e outros grupos conhecidos, como o grupo dos inteiros ou dos racionais.

Neste capítulo, estudaremos o resultado exibido no artigo (SHELAH, 1988), que mostra condições nas quais o grupo fundamental de um espaço métrico com certas propriedades desejáveis é não enumerável e, portanto, não pode ter seu grupo fundamental isomorfo ao grupo aditivo dos racionais.

3.1 Definições

Começamos este capítulo estabelecendo as notações e nomenclaturas que serão utilizadas:

- Denotaremos por I o intervalo $[0,1] = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ munido da topologia usual como subespaço de $\mathbb{R}$;

- Sendo M um espaço métrico munido da métrica d, denotaremos $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ para $x \in M$;

- Sendo X um espaço topológico com $x, y \in X$ e $f : I \to X$ um caminho de x a y, isto é, uma função contínua tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$, denotaremos por $f^{-} : I \to X$ a função que faz o caminho reverso de f, dada pela relação $f^{-}(t) = f(1-t)$, para todo $t \in I$;

- Se dois caminhos $f,g : I \to X$ são tais que $f(1) = g(0)$, denotamos por $fg : I \to X$ o caminho dado pela concatenação de f e g da forma

$$fg(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases};$$

- Dado $x \in X$, denotamos $E(x,X)$ o conjunto dos caminhos em X que ligam o ponto x a si mesmo. Com isso, denotamos por $\pi(x,X)$ o grupo obtido quocientando $E(x,X)$ pela relação de equivalência dada pela homotopia de caminhos em $E(x,X)$. Se f é um tal caminho, denotamos $[f]$ a classe de equivalência de f;

- Se X é conexo por caminhos e, portanto, $\pi(x,X)$ é o "mesmo"para todo $x \in X$ (a menos de isomorfismos), denotamos simplesmente $\pi(X)$ o grupo fundamental de X.

Além disso, serão necessárias algumas definições:

Definição 3.1.1. Dado X um espaço topológico, dizemos que um subespaço $Y \subset X$ é perfeito se $Y \neq \emptyset$, Y é fechado e Y não contém pontos isolados.

Definição 3.1.2. Dado X um espaço topológico, dizemos que ele é gráfico se existe uma cobertura aberta $\mathscr{U}$ tal que para cada $U,V \in \mathscr{U}$ e cada $x \in U$ e $y \in V$, quaisquer dois caminhos de x para y em $U \cup V$ são homotópicos em X.

Observe que a definição não garante a existência de caminhos entre $x \in U$ e $y \in V$ para $U,V \in \mathscr{U}$. De fato, quando $U \cap V = \emptyset$, tais caminhos não existirão. A definição nos fornece então espaços que podem ser divididos em partes que são bem comportadas com relação a homotopias quando consideradas isoladamente, mas sem exigir que o espaço como um todo o seja.

Exemplo 3.1.3. O plano euclideano $\mathbb{R}^2$ é claramente gráfico, uma vez que é simplesmente conexo. Por outro lado, a circunferência $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ é também um espaço gráfico. De fato, basta considerar a cobertura $\{B(x,1) : x \in S^1\}$.

Definição 3.1.4. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é fracamente localmente conexo por caminhos (que abreviaremos como FLCC) se, para cada $x \in X$ e cada vizinhança aberta U de x, existe um aberto V tal que $x \in V \subset U$ e para todo $y \in V$ existe um caminho em U de x para y.

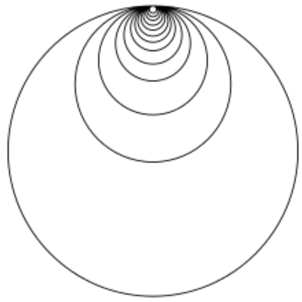
Observe que, diferentemente de um espaço localmente conexo por caminhos, um espaço FLCC não exige que existam caminhos entre os pontos de V e x contidos em V, ou seja, não exige que V seja em si conexo por caminhos.

Definição 3.1.5. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é semilocalmente simplesmente conexo (que abreviaremos como SLSC) se, para cada $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U de x tal que quaisquer dois caminhos de x para x em U são homotópicos em X.

Exigimos aqui apenas a existência de uma tal vizinhança, e não de um sistema fundamental de vizinhanças. Ainda, similarmente à definição de FLCC, caminhos nessa vizinhança apenas precisam ser homotópicos no espaço, e não necessariamente na vizinhança em si.

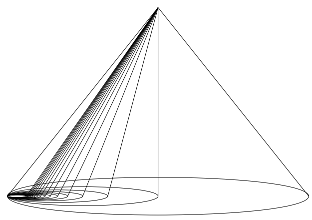
Exemplo 3.1.6. Considere o espaço

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y) - (\tfrac{1}{n}, 0)\| = \tfrac{1}{n}\},$$



dado pela união das circunferências de centro $(\frac{1}{n}, 0)$ e raio $\frac{1}{n}$. Podemos observar que ponto $(0,0)$ não admite vizinhança conforme a definição e, portanto, H não é SLSC.

Por outro lado, considere o cone em $\mathbb{R}^3$ com base H, que é simplesmente conexo. Note que uma vizinhança qualquer $B((0,0,0),r), r > 0$, do ponto $(0,0,0)$ contém caminhos de $(0,0,0)$ a $(0,0,0)$ que, apesar de poderem ser não homotópicos na vizinhança, são homotópicos no cone.



3.2 Propriedades básicas

Com as definições que necessitaremos, podemos agora enunciar o resultado principal deste capítulo.

Teorema 3.2.1. Seja X um espaço métrico compacto, FLCC e conexo por caminhos. Então, se o grupo fundamental $\pi(X)$ não é finitamente gerado, temos que $\pi(X)$ tem a cardinalidade do contínuo $\mathfrak{c}$ como conjunto.

Exemplo 3.2.2. Observe que o espaço H definido no exemplo anterior é um exemplo de espaço que satisfaz as condições do teorema. Portanto, pelo teorema podemos concluir que $|\pi(H)| = \mathfrak{c}$.

Antes de seguir para a demonstração do teorema, ainda precisaremos de alguns resultados.

Proposição 3.2.3. Seja X um espaço compacto, gráfico e FLCC. Então o grupo $\pi(x_0, X)$ é finitamente gerado para cada $x_0 \in X$.

Demonstração. Primeiramente, seja $\mathscr{U}$ uma cobertura aberta de X satisfazendo as condições da definição de espaço gráfico. Para cada $x \in X$, seja $U_x^0 \in \mathscr{U}$ contendo x.

Como X é FLCC, existe um aberto U_x^1 tal que $x \in U_x^1 \subset U_x^0$ e para cada ponto $y \in U_x^1$ existe um caminho em U_x^0 de x para y. Observe que $\{U_x^1 : x \in X\}$ forma uma cobertura aberta para X que, por ser compacto, admite uma subcobertura $\{U_x^1 : x \in X'\}$ para algum $X' \subset X$ finito.

Como $x_0 \in U_x^1$ para algum $x \in X'$, temos que existe um caminho em U_x^0 ligando x_0 a x. Podemos então supor sem perda de generalidade que $x_0 \in X'$.

Sejam agora $y_0, ..., y_n \in X'$ e $f : I \to X$ um caminho em X. O caminho f será dito de tipo $\langle y_0, ..., y_n \rangle$ se existem $t_0, ..., t_n \in I$, sendo $t_0 = 0$, $t_n = 1$ e $t_i \leq t_j$ quando $i \leq j$, tais que $f[[t_m, t_{m+1}]] \subset U_{x_m}^0 \cup U_{x_{m+1}}^0$ para cada $m < n$ e $f(t_m) \in U_{x_m}^1$ para cada $m \leq n$. Neste caso dizemos que $\langle t_0, ..., t_n \rangle$ descreve o tipo de f. Observe que o tipo de um caminho não é necessariamente único, mas todo caminho tem um tipo, pois para cada $t \in I$, existe algum $x \in X'$ tal que $f(t) \in U_x^1$. Dado então um $x \in X$ arbitrário, afirmamos que se dois caminhos $f_1, f_2 \in E(x, X)$ tem um tipo em comum, então f_1 e f_2 são homotópicos.

De fato, seja $\langle y_0, ..., y_n \rangle$ um tipo de f_1 e f_2, descrito por $\langle t_0^1, ..., t_n^1 \rangle$ e $\langle t_0^2, ..., t_n^2 \rangle$ para f_1 e f_2, respectivamente. Para cada $m \leq n$, os pontos $f_1(t_m^1)$ e $f_2(t_m^2)$ estão em $U_{x_m}^1$, e logo existe um caminho g_m em $U_{x_m}^0$ de $f_1(t_m^1)$ para $f_2(t_m^2)$. Para cada $m < n$, denotemos $f_1^m = f_1 \upharpoonright [t_m^1, t_{m+1}^1]$ e $f_2^m = f_2 \upharpoonright [t_m^2, t_{m+1}^2]$. Temos então

$$
\begin{aligned}
[f_1] &= [f_1^0 f_1^1 ... f_1^{n-1}] \\
&= [f_1^0][f_1^1]...[f_1^{n-1}] \\
&= ([f_1^0][g_1])([g_1^-][f_1^1][g_2])([g_2^-][f_1^2][g_3])...([g_{n-1}^-][f_1^{n-1}]) \\
&= [f_1^0 g_1][g_1^- f_1^1 g_2][g_2^- f_1^2 g_3]...[g_{n-1}^- f_1^{n-1}]
\end{aligned}
$$

e também

$$[f_2] = [f_2^0 f_2^1 ... f_2^{n-1}] = [f_2^0][f_2^1]...[f_2^{n-1}],$$

nos restando provar:

- $[f_1^0 g_1] = [f_2^0]$;
- $[g_m^- f_1^m g_{m+1}] = [f_2^m], \forall m \in \{1, ..., n-2\}$;
- $[g_{n-1}^- f_1^{n-1}] = [f_2^{n-1}]$.

Mas note que essas homotopias seguem das hipóteses sobre X e da escolha de $\mathscr{U}$, provando assim a afirmação.

Retomando agora a demonstração da proposição, vamos nos referir ao número $n+1$ de elementos de um tipo $\langle y_0, ..., y_n \rangle$ como seu comprimento. Assim, definimos $F \subset \pi(x_0, X)$ a família das classes de equivalência de caminhos de x_0 a x_0 em X que possuem tipo com comprimento menor do que ou igual a $2|X'| + 8$, isto é,

$$F = \{[f] : f \in E(x_0, X), f \text{ com tipo } \langle y_0, ..., y_{n-1} \rangle \text{ tal que } n \leq 2|X'| + 8\}.$$

Observe que, dado $n \in \mathbb{N}$, a quantidade de tipos com comprimento n que um caminho de x_0 para x_0 pode ter é menor do que ou igual a $|X'|^n$. Além disso, como caminhos com mesmo tipo são homotópicos, temos que

$$|F| \leq \sum_{i \leq 2|X'|+8} |X'|^i,$$

ou seja, F é finito. Provaremos então que F gera o grupo $\pi(x_0,X)$ de X.

Seja $f \in E(x_0,X)$ com tipo $\langle y_0,...,y_{n-1}\rangle$ descrito por $\langle t_0,...,t_{n-1}\rangle$. Mostraremos por indução sobre o comprimento n que $[f]$ está no grupo gerado por F.

Primeiramente, se $n \leq 2|X'|+8$, então $[f] \in F$, provando o caso inicial. Se $n > 2|X'|+8$, suponha que caminhos com tipo de comprimento menor do que n tem suas classes de equivalência geradas por F e considere $i = |X'|+4$. Seja então $\langle z_0,...,z_k\rangle$ um tipo de comprimento mínimo satisfazendo $z_0 = x_0$ e $z_k = y_i$ e tal que $U^1_{z_j} \cap U^1_{z_{j+1}} \neq \emptyset$ para cada $j \leq k-1$. Desta forma, temos que $k+1 \leq |X'|$. Novamente pela escolha de $\mathscr{U}$, existe um caminho h_j em $U^0_{z_j} \cup U^0_{z_{j+1}}$ de z_j para z_{j+1} para cada $j \leq k-1$. Ainda, existe também um caminho h em $U^0_{y_i}$ de $z_k = y_i$ para $f(t_i)$, pois $f(t_i) \in U^1_{y_i}$. Observe que $h_0...h_{k-1}$ é um caminho de x_0 a y_i de tipo $\langle z_0,...,z_k\rangle$.

Denotando então $f_m = f \restriction [t_m,t_{m+1}]$ para cada $m < n-1$ obtemos

$$\begin{aligned}
[f] &= [f_0...f_{n-1}] = [f_0]...[f_{n-1}] \\
&= [f_0]...[f_{i-1}][h^-][h^-_{k-1}]...[h^-_0][h_0]...[h_{k-1}][h][f_i]...[f_{n-1}] \\
&= [f_0...f_{i-1}h^-h^-_{k-1}...h^-_0][h_0...h_{k-1}hf_i...f_{n-1}].
\end{aligned}$$

Observe agora que $f_0...f_{i-1}h^-h^-_{k-1}...h^-_0$ é um caminho em $E(x_0,X)$ e tem o tipo $\langle y_0,...,y_i,z_{k-1},...,z_0\rangle$, que tem comprimento $i+k+1 \leq 2|X'|+4 < n$ e, portanto, $[f_0...f_{i-1}h^-h^-_{k-1}...h^-_0]$ é gerado por F por hipótese de indução.

Similarmente, observe que $h_0...h_{k-1}hf_i...f_{n-1}$ é um caminho em $E(x_0,X)$ e tem o tipo $\langle z_0,...,z_{k-1},y_i,...,y_{n-1}\rangle$, que tem comprimento $k+n-i \leq n-4 < n$ e, portanto, $[h_0...h_{k-1}hf_i...f_{n-1}]$ é gerado por F por hipótese de indução. Temos então que $[f]$ é gerado por F, concluindo a demonstração. □

Proposição 3.2.4. Seja X um espaço métrico, FLCC e SLSC. Então X é gráfico.

Demonstração. Para cada $x \in X$, seja $\varepsilon(x) > 0$ tal que $B(x,\varepsilon(x))$ satisfaz as condições da definição de SLSC, isto é, tal que quaisquer caminhos em $E(x,B(x,\varepsilon(x)))$ são homotópicos em X. Seja, ainda, $\delta(x) > 0$ tal que $B(x,\delta(x)) \subset B(x,\varepsilon(x)/3)$ satisfaz as condições da definição de FLCC, isto é, tal que qualquer ponto em $B(x,\delta(x))$ pode ser ligado a x por um caminho em $B(x,\varepsilon(x)/3)$. Temos em $\{B(x,\delta(x)) : x \in X\}$ uma cobertura aberta para X.

Sejam agora $x_1,x_2 \in X$ quaisquer. Denotemos $B_1 = B(x_1,\varepsilon(x_1)/3)$, $B'_1 = B(x_1,\delta(x_1))$, $B_2 = B(x_2,\varepsilon(x_2)/3)$ e $B'_2 = B(x_2,\delta(x_2))$. Sejam então $y_1 \in B'_1$, $y_2 \in B'_2$ quaisquer e $f,g : I \to$

$B_1' \cup B_2'$ caminhos de y_1 a y_2. Sejam, ainda, $h_1 : I \to B_1$ e $h_2 : I \to B_2$ caminhos de x_1 a y_1 e de x_2 a y_2, respectivamente. Temos então $h_1 f h_2^-$ e $h_1 g h_2^-$ dois caminhos de x_1 a x_2 em $B_1 \cup B_2$.

Suponhamos sem perda de generalidade que $\varepsilon(x_2) \leq \varepsilon(x_2)$. Neste caso, pela desigualdade triangular temos que $B_1 \cup B_2 \subset B(x_1, \varepsilon(x_1))$ e, portanto, $[(h_1 f h_2^-)(h_1 g h_2^-)^-] = [h_1 f g^- h_1^-]$ é o elemento neutro em $\pi(x_1, X)$ e logo f é homotópico a g. □

Usando as últimas duas proposições, podemos obter o seguinte corolário:

Corolário 3.2.5. Seja X um espaço métrico compacto e FLCC tal que $\pi(x, X)$ não é finitamente gerado para algum $x \in X$. Nesse caso, existe $x_0 \in X$ tal que para toda vizinhança U de x_0 existe um caminho $f \in E(x, U)$ cuja classe de equivalência $[f]$ não é o elemento neutro em $\pi(x, X)$, isto é, X não é SLSC.

De fato, nas condições do corolário, se X é SLSC segue pela Proposição 3.2.4 que X é gráfico e, consequentemente, segue pela Proposição 3.2.3 que $\pi(x, X)$ é finitamente gerado para todo $x \in X$, contradizendo a hipótese.

3.3 Cardinalidade do grupo fundamental

Consideremos agora X um espaço métrico e $x_0 \in X$ conforme as condições do Corolário 3.2.5. Sejam $f_n \in E(x_0, B(x_0, 1/n)), n \in \mathbb{Z}_{>0}$, caminhos tais que $[f_n]$ não é o elemento neutro em $\pi(x_0, X)$. Seja, ainda, $\{t_n : n \in \mathbb{N}\} \subset I$ uma sequência crescente tal que $t_0 = 0$ e $\lim_{n\to\infty} t_n = 1$. Para $A \subset \mathbb{Z}_{>0}$ definimos $f_A : I \to X$ da seguinte forma:

$$f_A(t) = \begin{cases} f_n\left(\frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}\right) & \text{se } n \in A, t \in [t_{n-1}, t_n] \\ x_0 & \text{se } n \notin A, t \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases};$$

Observe que a função f_A é, a menos de reparametrizações, a concatenação dos caminhos $f_n, n \in A$, percorrendo todo o trajeto de f_n sobre $[t_{n-1}, t_n]$ se $n \in A$ e sendo constante em x_0 sobre $[t_{n-1}, t_n]$ caso contrário. Sendo assim, é simples observar que $f_A \in E(x_0, X)$. Mais ainda, é evidente que $f_{\{n\}}$ é homotópico a f_n e que, se n é o elemento mínimo de A e $B = A \setminus \{n\}$, então $f_n f_B$ é homotópico a f_A. Podemos, ainda, extrair o seguinte resultado que será útil mais adiante:

Lema 3.3.1. Sejam $A, B \subset \mathbb{Z}_{>0}$ tais que $A = B \cup \{n\}$ sendo $n \notin B$. Então f_A e f_B não são homotópicos.

Demonstração. Sejam $A' = \{m \in A : m < n\}$ e $A'' = \{m \in A : m > n\}$. Se definirmos analogamente B' e B'', note que $A' = B'$ e $A'' = B''$. Temos agora que

$$[f_A] = [f_{A'}][f_n][f_{A''}] \text{ e}$$
$$[f_B] = [f_{A'}][f_{A''}].$$

Assim, se f_A e f_B são homotópicos, devemos ter que f_n é homotópico ao caminho constante em x_0, isto é, $[f_n]$ é o elemento neutro do grupo $\pi(x_0, X)$, contradizendo a escolha de f_n. $\square$

Nessas condições, definimos a relação $\mathscr{H}$ sobre o conjunto das partes de $\mathbb{Z}$, que denotaremos como Γ:

Definição 3.3.2. Sejam $A, B \in \Gamma$. Dizemos que A é relacionado com B via $\mathscr{H}$ e denotamos $A\mathscr{H}B$ se, e somente se, f_A é homotópico a f_B.

Obtemos naturalmente das propriedades básicas de homotopia que $\mathscr{H}$ caracteriza uma relação de equivalência sobre Γ. Além disso, consideramos sobre Γ a métrica $d : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}$ dada da seguinte forma:

$$d(A,B) = \underset{n \in \mathbb{Z}_{>0}}{inf} \{\tfrac{1}{2^n} : A \cap \{1, ..., n\} = B \cap \{1, ..., n\}\}.$$

Proposição 3.3.3. A função $d : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}$ conforme descrita acima caracteriza uma métrica sobre Γ.

Demonstração. Nesta demonstração, considere $A, B, C \in \Omega$ quaisquer.

Primeiramente, é imediato da definição da função d que $d(A,B) = d(B,A)$, que $d(A,B) \geq 0$, e que $d(A,B) = 0$ se, e somente se, $A = B$. Nos resta então demonstrar a desigualdade triangular, isto é, $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$.

Se $A = B$, $B = C$ ou $A = C$, a desigualdade segue trivialmente. Suponhamos então A, B, C dois a dois distintos. Sejam n o maior inteiro tal que $A \cap \{1, ..., n\} = C \cap \{1, ..., n\}$ e m o maior inteiro tal que $A \cap \{1, ..., m\} = B \cap \{1, ..., m\}$. Se $m \leq n$, então $d(A,C) \leq d(A,B)$ e a desigualdade segue. Por outro lado, se $m > n$, então $d(B,C) = d(A,C)$, pois nesse caso n é também o maior inteiro tal que $B \cap \{1, ..., n\} = C \cap \{1, ..., n\}$, e novamente a desigualdade segue. $\square$

Observação 3.3.4. Com isso, o conjunto Γ munido da métrica d é um espaço métrico. Mas observe, ainda, que pela métrica d a maior distância possível entre quaisquer $A, B \in \Gamma$ é 1, o que implica que Γ é limitado e, portanto, compacto. Ainda, como Γ é métrico e compacto, temos também que é completo e separável.

Podemos finalmente provar o Teorema 3.2.1 através dos dois próximos resultados. Deixaremos para depois a explicação do conceito de relação de equivalência analítica presente no primeiro deles.

Lema 3.3.5. Seja $\mathscr{H}$ uma relação de equivalência analítica sobre Γ satisfazendo: se $A, B \in \Gamma$ são tais que $A = B \cup \{n\}$ para algum $n \notin B$, então A não é relacionado com B via $\mathscr{H}$. Nessas condições, existe um subconjunto perfeito P de Γ (isto é, fechado e sem pontos isolados) tal que, para cada $A, B \in P$, A não é relacionado com B via $\mathscr{H}$.

A demonstração desse lema pode ser encontrada em (SHELAH, 1988) (Lema 13, p. 5). Ela será aqui omitida, uma vez que faz uso de linguagem e métodos de teoria de modelos e de forcing que não fazem parte deste trabalho.

Iremos definir um pouco mais adiante o que é uma relação de equivalência analítica. Antes disso, eis o segundo resultado:

Proposição 3.3.6. Um subconjunto perfeito de um espaço métrico completo tem cardinalidade maior ou igual a $\mathfrak{c}$.

Demonstração. Seja M um espaço métrico munido de uma métrica d_M e seja $P \subset M$ um subconjunto perfeito. Seja, ainda, S o conjunto das sequências de 0s e 1s finitas e, para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, seja $S_n = \{s \in S : |s| = n\}$, onde $|s|$ denota o comprimento da sequência s.

Dados $s \in S$ e $i \in \{0,1\}$, denotamos por $s+i$ a sequência obtida acrescentando i como termo no final s. Além disso, dados $s,t \in S$, denotamos $s < t$ se $|s| < |t|$ e s coincide com t em seus primeiros $|s|$ termos.

Iremos construir abertos U_s para cada $s \in S$ tais que $U_s \cap P$ é infinito. Tal construção será feita indutivamente sobre o comprimento das sequências.

Sejam $x_\emptyset \in P$ qualquer e $U_\emptyset = B(x_\emptyset, 1)$, usando aqui $\emptyset$ para nos referir a sequência de comprimento 0. Como P é perfeito, $x_\emptyset$ é ponto de acumulação de P e, portanto, $P \cap U_\emptyset$ é infinito.

Suponha agora definido U_s para $s \in S_n$ tal que $P \cap U_s$ é infinito e sejam $x_{s+0}, x_{s+1} \in P \cap U_s$ distintos. Existe $0 < r \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ tal que $B(x_{s+0}, r) \cap B(x_{s+1}, r) = \emptyset$ e $\overline{B(x_{s+i}, r)} \subset U_s$ para cada $i \in \{0,1\}$. Definimos então $U_{s+i} = B(x_{s+i}, r)$ para cada $i \in \{0,1\}$. Como P é perfeito, x_{s+0} e x_{s+1} são pontos de acumulação de P e, portanto, $P \cap U_{s+0}$ e $P \cap U_{s+1}$ são infinitos, concluindo assim a indução. Da construção, podemos observar que os abertos U_s tem as seguintes propriedades:

(a) $P \cap U_s \neq \emptyset$ para todo $s \in S$;

(b) dados $s,t \in S$, se $s < t$ temos que $\overline{U_t} \subset U_s$;

(c) se $s \in S_n$, então $\phi(U_s) \leq \frac{1}{2^n}$, sendo $\phi(U_s)$ o diâmetro de U_s;

(d) dados $s,t \in S_n$ distintos, temos que $U_s \cap U_t = \emptyset$.

Considere agora S_ω o conjunto das sequências de 0s e 1s infinitas, que tem cardinalidade $\mathfrak{c}$. Para cada $s \in S_\omega$ e $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, denotamos por s^n a sequência finita dada pelos primeiros n termos de s. Para cada $s \in S_\omega$ seja então

$$F_s = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}>0} S \cap \overline{U_{s^n}}.$$

Utilizando as propriedades (a),(b) e (c), mais a completude do espaço, temos que $F_s = \{y_s\}$ para algum $y_s \in M$. Ainda, da propriedade (d), temos que se $s,t \in S_\omega$ são distintos, então $F_s \cap F_t = \emptyset$, isto é, $y_s \neq y_t$.

Agora, como $\{y_s : s \in S_\omega\} \subset P$ e $|\{y_s : s \in S_\omega\}| = |S_\omega| = \mathfrak{c}$, temos que $|P| \geq \mathfrak{c}$. $\square$

Dem. do Teorema 3.2.1. Suponha que a relação $\mathscr{H}$ é analítica. Então, com o Lema 3.3.1, temos que $\mathscr{H}$ satisfaz todas as hipóteses do Lema 3.3.5. Portanto temos que existe $P \subset \Gamma$ perfeito cujos elementos são dois a dois não relacionados via $\mathscr{H}$.

Agora, pela Proposição 3.3.6, como o espaço Γ é completo devemos ter que $|P| \geq \mathfrak{c}$. Mas como $|P| \leq |\Gamma| = \mathfrak{c}$, temos que $|P| = \mathfrak{c}$.

Finalmente, como cada par $A, B \in \Gamma$ não relacionado via $\mathscr{H}$ corresponde diretamente a um par de caminhos f_A, f_B não homotópicos em X, o conjunto $\{f_A : A \in P\}$ é um conjunto de caminhos em $E(x_0, X)$, dois a dois não homotópicos, com cardinalidade $|P| = \mathfrak{c}$. Assim, o grupo fundamental $\pi(X)$ tem cardinalidade $\mathfrak{c}$. $\square$

Para concluir então a demonstração do teorema, nos resta estudar a analiticidade da relação $\mathscr{H}$ e demonstrar o Lema 3.3.5. Para ambos, precisamos começar exibindo uma de diversas definições equivalentes de conjunto analítico.

Definição 3.3.7. Um espaço topológico X é dito um espaço polonês se for completamente metrizável e separável.

Um subconjunto $A \subset X$ é dito subconjunto de Borel de X se pertence a σ-álgebra obtida fechando a topologia de X por uniões e interseções enumeráveis e complementos.

Definição 3.3.8. Seja X um espaço polonês. Um subconjunto $A \subset X$ é dito analítico se A é a projeção em X de um subconjunto de Borel P de $X \times Y$ para algum espaço polonês Y.

Uma relação $\mathscr{R}$ sobre X é dita analítica se o conjunto $\{(a,b) \in X \times X : a\mathscr{R}b\}$ é analítico em $X \times X$.

Temos assim:

Proposição 3.3.9. A relação $\mathscr{H}$ sobre Γ é analítica.

Demonstração. Primeiramente, como X é métrico e compacto, é também separável. Seja então $Z = \{z_n : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ um subconjunto denso em X.

Considere agora f_A e f_B, $A, B \in \Gamma$, dois caminhos homotópicos em $E(x_0, X)$. Assim, existe homotopia g entre f_A e f_B, ou seja, uma função contínua $g : I \times I \to X$ tal que $g(0,t) = f_A(t)$, para todo $t \in I$, e $g(1,t) = f_B(t)$, para todo $t \in I$. Para cada tal g, definimos o conjunto

$$C_g = \{(l_1, k_1, l_2, k_2, m, n) \in \mathbb{Z}^6_{>0} : l_1 \leq k_1, l_2 \leq k_2, d_X(g(\tfrac{l_1}{k_1}, \tfrac{l_2}{k_2}), z_n) < \tfrac{1}{m}\} \in \Gamma_6,$$

onde Γ_6 denota o conjunto das partes de $\mathbb{Z}^6_{>0}$.

Observe que cada homotopia g entre f_A e f_B naturalmente define um único C_g que a descreve. Além disso, um conjunto $C \in \Gamma_6$ corresponde a no máximo uma homotopia g.

De fato, sejam g_1, g_2 duas homotopias entre f_A e f_B e suponha que ambas sejam descritas por $C_g \in \Gamma_6$. Dado $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ qualquer, considere as bolas

$$B^i_m = B(g_i(\tfrac{l_1}{k_1}, \tfrac{l_2}{k_2}), \tfrac{1}{m}), \text{ para todo } i \in \{1,2\}.$$

Como Z é denso, existe $z_n \in Z$ tal que $z_n \in B^1_m$. Para cada m, denotemos $z_n = z_{n(m)}$. Obtemos assim em $\{z_{n(m)} : m \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ uma sequência que converge para $g_1(\frac{l_1}{k_1}, \frac{l_2}{k_2})$ e, como C_g descreve g_1, temos também que $(l_1, k_1, l_2, k_2, m, n(m)) \in C_g$ para cada $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Agora, como C_g também descreve g_2, segue que $z_{n(m)} \in B^2_m$ para cada $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Portanto a sequência $\{z_{n(m)} : m \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ converge também para $g_2(\frac{l_1}{k_1}, \frac{l_2}{k_2})$, e logo devemos ter que $g_1(\frac{l_1}{k_1}, \frac{l_2}{k_2}) = g_2(\frac{l_1}{k_1}, \frac{l_2}{k_2})$ para todos $l_1, k_1, l_2, k_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ com $l_1 \leq k_1$ e $l_2 \leq k_2$. Mas observe que o conjunto $\{(\frac{l_1}{k_1}, \frac{l_2}{k_2}) : l_1, k_1, l_2, k_2 \in \mathbb{Z}_{>0}, l_1 \leq k_1, l_2 \leq k_2\}$ é denso em $I \times I$. Assim, como g_1 e g_2 são contínuas, segue que $g_1 = g_2$.

Retomando a demonstração, observe agora também que Γ_6 é metrizável analogamente a Γ, sendo também compacto e, consequentemente, completo e separável. Γ_6 é então um espaço polonês.

Considere agora o conjunto

$$P = \{(A, B, C_g) \in \Gamma \times \Gamma \times \Gamma_6 : g \text{ é uma homotopia entre } f_A \text{ e } f_B\}.$$

Segue naturalmente das definições da relação $\mathscr{H}$ e dos conjuntos C_g que f_A e f_B são homotópicos se, e somente se, $(A, B, C) \in P$ para algum $C \in \Gamma_6$. Além disso, podemos observar que P é subconjunto de Borel de $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma_6$ e é evidente que $\{(A, B) \in \Gamma \times \Gamma : A \mathscr{H} B\}$ é a projeção de P em $\Gamma \times \Gamma$, concluindo a demonstração da proposição. $\square$

Com isso, concluímos também a demonstração do Teorema 3.2.1. O Teorema é incomum, em que nos permite determinar algo sobre a natureza do grupo fundamental de um espaço não apenas em função da cardinalidade de seu gerador, mas em função da cardinalidade do próprio grupo como conjunto.

Para ilustrar esse ponto, encerramos este capítulo com a seguinte consequência imediata do Teorema 3.2.1:

Corolário 3.3.10. Seja X um espaço métrico compacto, FLCC e conexo por caminhos, cujo grupo fundamental $\pi(X)$ não é finitamente gerado. Nesse caso, $\pi(X)$ não é isomorfo ao grupo aditivo dos racionais.

CAPÍTULO

4

O PROBLEMA DE WHITEHEAD

Até este capítulo, estávamos adotando ZFC como nosso sistema axiomático sem dedicar nenhuma atenção especial a esse fato, uma vez que se trata do sistema axiomático mais comumente utilizado em diversas áreas da matemática. No entanto, este capítulo estuda o resultado exibido no artigo (EKLOF, 1976), que trata da validade de uma afirmação sobre teoria de grupos em ZFC, com a conclusão de que a mesma é indecidível, isto é, não pode ser provada verdadeira ou falsa em ZFC sem adição de outros axiomas.

4.1 Preliminares

Naturalmente, devemos começar enunciando tal afirmação, mas antes precisaremos abordar alguns requisitos. Primeiramente, iremos estabelecer algumas notações e terminologias:

- Neste capítulo, todos os grupos tomados serão abelianos. Assim, na falta de menção sobre a comutatividade de qualquer grupo, presume-se que o mesmo é abeliano;

- Dado um grupo A, denotaremos como uma adição a operação de A, isto é, a operação de A realizada sobre dois elementos $a_1, a_2 \in A$ será denotada por $a_1 + a_2$. Desta forma, o elemento neutro de A será denotado por 0_A, ou simplesmente 0 quando não houver ambiguidade sobre o grupo em questão. Ainda, denotamos por $1_A : A \to A$ a função identidade em A;

- Dados um grupo A, $a \in A$ e $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, denotamos por na a soma $a + a + ... + a$ com n parcelas. Ainda, dado $n \in \mathbb{Z}_{<0}$, denotamos por $-na$ a soma $(-a) + ... + (-a)$ com n parcelas. Sendo $0 \in \mathbb{Z}$, entendemos como $0a$ simplesmente o elemento neutro 0_A;

- Dados um grupo A e $B \subset A$, uma combinação de elementos de B é uma aplicação finita da operação de A sobre elementos de B, isto é, algo da forma $p_1 b_1 + ... + p_n b_n$ onde $b_1, ..., b_n \in B$ e $p_1, ..., p_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Se $a \in A$ pode ser obtido através de uma combinação de elementos de B dizemos que a é gerado por B, e denotamos por $\langle B\rangle$ o grupo dos elementos gerados por B;

- Denotaremos simplesmente por $\mathbb{Z}$ o grupo aditivo dos números inteiros.

A seguir, precisaremos também de algumas definições:

Definição 4.1.1. Sejam A e B grupos abelianos e $f : B \to A$ um homomorfismo sobrejetor. Dizemos que tal homomorfismo cinde se existe homomorfismo $g : A \to B$ tal que $f \circ g = 1_A$. Nesse caso, dizemos que g cinde f ou que f é cindido por g.

Observação 4.1.2. É simples observar que o homomorfismo g que cinde f é injetor. De fato, basta notar que se $a \in A$ é tal que $a \in Ker(g)$, então $a = f \circ g(a) = 0$ e, portanto, $Ker(g) = \{0\}$.

Definição 4.1.3. Seja A um grupo abeliano. Tal grupo é dito um W-grupo se, para todo grupo abeliano B e todo homomorfismo sobrejetor $f : B \to A$ tal que $Ker(f)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$, temos que f cinde.

Definição 4.1.4. Seja A um grupo abeliano. Uma base de A é um conjunto $A' \subset A$ tal que todo elemento $a \in A$ é obtido de forma única (a menos de comutações) através de uma combinação de elementos de A', isto é, existem $a_1,...,a_n \in A'$ e $p_1,...,p_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ únicos tais que $p_1a_1 + ... + p_na_n = a$.

Um grupo abeliano que admite uma base é dito um grupo abeliano livre.

Observação 4.1.5. Vale ressaltar que existe um conceito de grupo livre não equivalente à definição de grupo abeliano livre apresentada. Com isso em mente, neste capítulo toda menção de grupos livres se refere a grupos abelianos livres definidos conforme a definição acima.

Definição 4.1.6. Seja A um grupo abeliano. Um subconjunto B de A é dito linearmente independente se nenhum elemento $b \in B$ pode ser obtido como combinação dos demais elementos de B. Os elementos de B são ditos linearmente independentes.

Observação 4.1.7. Uma definição claramente equivalente para conjuntos linearmente independentes é:

Sejam A um grupo abeliano e B um subconjunto de A. B é dito linearmente independente se, para quaisquer $b_1,...,b_n \in B$, a equação

$$p_1b_1 + ... + p_nb_n = 0$$

é satisfeita se, e somente se, $p_1 = ... = p_n = 0$.

Iremos agora enunciar a seguinte caracterização de grupos livres, a qual aponta a motivação para o resultado deste capítulo:

Teorema. *Seja A um grupo abeliano. O grupo A é livre se, e somente se, todo homomorfismo sobrejetor $f : B \to A$ cinde, para cada B grupo abeliano arbitrário.*

Provaremos esse teorema um pouco adiante. Antes disso, podemos extrair imediatamente do teorema o seguinte corolário:

Corolário. *Todo grupo abeliano livre é um W-grupo.*

O corolário naturalmente levanta a pergunta sobre a veracidade da recíproca, isto é, se todo W-grupo é também livre. Nos referimos então à afirmação de que todo W-grupo é um grupo livre como Problema de Whitehead. Mais especificamente, sendo κ um cardinal, chamamos de Problema de Whitehead para κ afirmação de que todo W-grupo de cardinalidade κ é um grupo livre.

Provaremos mais adiante que o Problema de Whitehead para $\aleph_0$ é válido em ZFC. Isso nos permite observar de maneira simples alguns exemplos de W-grupos:

Exemplo 4.1.8. O grupo aditivo $\mathbb{Z}$ é claramente livre, gerado pela base $\{1\}$. Mais ainda, o grupo $\mathbb{Z}^n$ obtido pela soma direta de $\mathbb{Z}$ n vezes é também livre. Como tais grupos são enumeráveis, segue pelo corolário que são também W-grupos.

Por outro lado, é possível observar que o grupo aditivo $\mathbb{Q}$ não admite base. Como veremos um pouco mais adiante, por $\mathbb{Q}$ ser enumerável, isto implica que $\mathbb{Q}$ não é W-grupo.

Finalmente, podemos claramente definir o objetivo deste capítulo: demonstrar que o Problema de Whitehead para $\aleph_1$ é indecidível em ZFC. Para isto, precisaremos primeiramente estudar algumas propriedades de grupos livres e de W-grupos.

4.2 Grupos abelianos livres

Imediatamente, vamos enunciar alguns resultados importantes sobre grupos abelianos livres.

Proposição 4.2.1. Todo grupo A livre é livre de torções, isto é, para todo $a \in A \setminus \{0\}$ e todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ temos $na \neq 0$.

Demonstração. Seja A' uma base para A e suponha que existe $a \in A \setminus \{0\}$ tal que $na = 0$ para algum $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Pela definição de base, existem únicos $a_1, ..., a_m \in A'$ e $p_1, ..., p_m \in \mathbb{Z}_{>0}$ tais que $a = p_1a_1 + ... + p_ma_m$. Mas como $na = 0$, e, consequentemente, $(n+1)a = a$, temos que $a = (n+1)p_1a_1 + ... + (n+1)p_ma_m$, contradizendo a unicidade. □

Presumimos conhecido o seguinte resultado algébrico:

Proposição 4.2.2. Seja A um grupo livre com base $\{a_1,...,a_n\} \subset A$. Então A é isomorfo a $\mathbb{Z}^n$.

Em particular, todo grupo A cíclico (isto é, tal que $A = \langle a \rangle$ para algum $a \in A$) infinito é isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Além disso, se A é um grupo cíclico finito, com $A = \langle a \rangle$, e $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ é o menor inteiro positivo tal que $na = 0$, então A é isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Corolário 4.2.3. Seja A um grupo abeliano livre finitamente gerado. Quaisquer duas bases de A tem a mesma cardinalidade.

Teorema 4.2.4. Todo subgrupo de um grupo abeliano livre é também livre.

Demonstração. Sejam F um grupo abeliano livre gerado pela base $A' = \{a_k : k \in K\}$ para algum conjunto de índices K e $B \subset F$ um subgrupo. Se $B = \{0\}$ o resultado é trivial, então suponhamos G um subgrupo não trivial.

Primeiramente, vamos provar o teorema para o caso em que A' é finito por meio de indução sobre $|A'|$.

Suponhamos inicialmente que $A' = \{a\}$ para algum $a \in A$. Como A é livre e então, pela proposição anterior, livre de torções, temos que $\langle A' \rangle$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$, que é claramente um grupo abeliano livre.

Suponhamos agora que se um grupo abeliano livre A é gerado por uma base finita de tamanho menor ou igual a $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, então todo subgrupo de A é também livre. Sejam A um grupo abeliano livre gerado pela base $A' = \{a_1,...,a_{k+1}\} \subset A$ e $B \subset A$ um subgrupo. Seja, ainda, $\pi : B \to A$ a projeção dada por $\pi(b) = n_1a_1$ para cada $b = n_1a_1 + ... + n_{k+1}a_{k+1} \in B$. Note que se $\pi[B] = \{0\}$, então B é subgrupo de $\langle A' \setminus \{a_1\} \rangle$ e, consequentemente, temos pela hipótese de indução que B é livre.

Resta o caso em que $\pi[B]$ é não trivial. Seja então $m > 0$ o menor inteiro positivo tal que $ma_1 \in \pi[B]$ e seja $x \in B$ tal que $\pi(x) = ma_1$. É simples observar que $x \notin Ker(\pi)$ (sendo $Ker(\pi) = \pi^{-1}[\{0\}]$), pois A livre de torções. Além disso, pela minimalidade de m temos que $B \subset \langle \{x, a_2,...,a_{k+1}\} \rangle$ e, portanto, para qualquer $b \in B$ temos que $b = nx + y$ para algum $n \in \mathbb{Z}$ e algum $y \in Ker(\pi)$. Assim, $B = \langle \{x\} \rangle \oplus Ker(\pi)$. No entanto, $Ker(\pi)$ é grupo livre pois é subgrupo de $\langle A' \setminus \{a_1\} \rangle$ e $\langle \{x\} \rangle$ é grupo livre pois é isomorfo a $\mathbb{Z}$, o que implica que B é livre. Concluímos assim o processo de indução e a demonstração do resultado para A finitamente gerado.

Consideremos agora A um grupo abeliano livre gerado por um conjunto $A' = \{a_k : k \in K\} \subset A$ para um conjunto arbitrário de índices K. Para cada $J \subset K$, denotamos por A_J o grupo gerado por $\{a_k : k \in J\}$. Como os elementos do conjunto gerador são linearmente independentes, temos que cada A_J é um subgrupo livre de A.

Denotamos agora $B_J = A_J \cap B$ e definimos

$$S = \{(B_J, w) : B_J \text{ é um grupo livre não trivial e } w \text{ define umaa base de } B_J\}.$$

Especificamente, w é uma função injetora $w : J \to B_J$ tal que $w[J]$ é uma base para B_J.

Afirmamos que S é não vazio. De fato, dado $b \in B$, este pode ser expresso na forma $b = n_1 a_{k_1} + ... + n_m a_{k_m}$ para certos $n_1, ..., n_m \in \mathbb{Z}$ e algum $J = \{k_1, ..., k_m\} \subset K$. Temos então que $b \in \langle \{a_k : k \in J\} \rangle = A_J$. Assim, $b \in A_J \cap B$ e, portanto, B_J é um subgrupo não trivial de A_J. Mais ainda, como A_J é um grupo livre finitamente gerado, já provamos anteriormente que B_J deve também ser livre.

Dados $(B_J, w), (B_L, v) \in S$, definimos a ordem $\leq$ sobre S tal que $(B_J, w) \leq (B_L, v)$ se, e somente se, $J \subset L$ e v é uma extensão de w. Assim, se $\{(B_{J_r}, w_r) : r \in R\} \subset S$ é uma cadeia com respeito a $\leq$ para algum R bem ordenado, claramente temos que

$$\Big(\bigcup_{r \in R} B_{J_r}, \bigcup_{r \in R} w_r\Big) \in S.$$

Temos então, pelo Lema de Zorn, que existe (B_J, w) maximal em S. Resta então mostrar que $J = K$, uma vez que $B_K = A \cap B = B$.

Suponhamos que existe $k \in K \setminus J$ e seja então $J' = J \cup \{k\}$. Se $B_{J'} = A_{J'} \cap B = B_J$, temos que $(B_J, w) \leq (B_{J'}, w)$, contradizendo a maximalidade de (B_J, w). Caso contrário, existe $na_k + y \in B_{J'}$ para algum $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $y \in B_J \subset A_J$. Agora, observe que o conjunto de valores $n \in \mathbb{Z}$ tais que $na_k + y \in B$ para algum $y \in B_J$ caracteriza um subgrupo de $\mathbb{Z}$. Sejam assim $n_0 \in \mathbb{Z}$ um gerador desse grupo e $k' = n_0 a_k + y \in B$ com $y \in A_J$. Dado $b \in B_{J'}$, podemos tomar $b = b - mk' + mk'$ para algum $m \in \mathbb{Z}$, sendo que $b - mk' \in B_J$. Por outro lado, podemos observar que $\langle \{k'\} \rangle \cap B_J = \{0\}$, logo $w' = w \cup \{(k, k')\}$ é uma base para $B_{J'}$. Portanto, temos que $(B_J, w) \leq (B_{J'}, w')$, contradizendo novamente a maximalidade de (B_J, w). □

Teorema 4.2.5. Seja A um grupo abeliano livre de torções e finitamente gerado. Então A é um grupo abeliano livre.

Demonstração. Afirmamos que existem $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e um conjunto finito $S \subset A$ de elementos linearmente independentes tais que $nA \subset \langle S \rangle$, onde $nA = \{na : a \in A\}$. Provaremos esta afirmação por indução sobre o tamanho de um conjunto gerador de A.

Primeiramente, se $A = \langle \{a\} \rangle$ para algum $a \in A$, basta tomarmos $n = 1$ e $S = \{a\}$. Como A é livre de torções, o conjunto S é linearmente independente.

Suponhamos agora que a afirmação é válida para todo grupo abeliano livre de torções gerado por $m-1$ de seus elementos. Considere então A gerado por $A' = \{a_1, ..., a_m\} \subset A$. Se A' é um conjunto linearmente independente, basta tomarmos $S = A'$. Caso contrário, existem $n_1, ..., n_m \in \mathbb{Z}$ não todos nulos tais que $n_1 a_1 + ... + n_m a_m = 0$. Suponhamos sem perda de generalidade que $a_m \neq 0$.

Seja $B \subset A$ o subgrupo gerado por $A' \setminus \{a_m\}$. Observe que $n_m a_m \in B$. Como B é gerado por $m-1$ elementos, temos pela hipótese de indução que existem um $n' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e um conjunto $S \subset B$ tais que $n'B \subset \langle S \rangle$. Vamos tomar $n = n_m n'$. Agora, como A é gerado por A', para cada $a = p_1 a_1 + ... + p_m a_m \in A$, $p_1, ..., p_m \in \mathbb{Z}$, temos que

$$na = n_m n'(p_1 a_1 + ... + p_m a_m) =$$

$$= n'(n_m p_1 a_1 + ... + n_m p_{m-1} a_{m-1}) + n' p_m (n_m a_m).$$

É possível observar que ambas as parcelas pertencem a $n'B$, logo $na \in n'B$ e, portanto, $nA \subset n'B$. Como $n'B \subset \langle S \rangle$, segue que $nA \subset \langle S \rangle$, concluindo a demonstração da afirmação.

Retomando a demonstração do teorema, seja $f : A \to A$ o homomorfismo dado por $f(a) = na$, sendo $n \in \mathbb{Z}$ conforme a afirmação, a qual então nos fornece que $f[A] \subset \langle S \rangle$ para algum subconjunto $S \subset A$ finito e linearmente independente. Ainda, como A é livre de torções, temos que f é injetor. Em outras palavras, A é isomorfo ao subgrupo $f[A]$ do grupo abeliano livre $\langle S \rangle$. Finalmente, pelo teorema anterior, temos que como $\langle S \rangle$ é livre, $f[A]$ também é, concluindo a demonstração. □

Podemos agora retornar aos teoremas da seção anterior e demonstrá-los.

Teorema 4.2.6. Seja A um grupo abeliano. O grupo A é livre se, e somente se, todo homomorfismo sobrejetor $f : B \to A$ cinde, para cada B grupo abeliano arbitrário.

Demonstração. Primeiramente, vamos provar que se A é livre então todo homomorfismo sobrejetor para A cinde. Para isso, sejam $f : B \to A$ sobrejetor e $A' = \{a_k : k \in K\}$ uma base de A. Seja então $\{b_k \in B : f(b_k) = a_k\}$. Existe um único homomorfismo $g : A \to B$ tal que $g(a_k) = b_k$, para todo $k \in K$, pois A' gera A. Basta notar que g cinde f.

Consideremos agora a recíproca. Seja C um grupo abeliano livre com uma base $C' = \{c_a : a \in A\}$. Seja, ainda, $f : C \to A$ o homomorfismo tal que $f(c_a) = a$, para todo $a \in A$. Pela hipótese, devemos ter que f cinde. Se $g : A \to C$ é o homomorfismo que cinde f, como g é injetor, temos que A é isomorfo a um subgrupo de C. Segue então pelo Teorema 4.2.4 que A é livre. □

Extraímos agora do teorema os seguintes resultados, um dos quais já vimos anteriormente e segue diretamente do teorema, e o outro que será útil mais adiante.

Corolário 4.2.7. Todo grupo abeliano livre é um W-Grupo.

Corolário 4.2.8. Sejam A um grupo abeliano e $B \subset A$ um subgrupo livre tal que A/B é também livre, sendo A/B o grupo quociente de A por B. Temos então que A é livre.

Demonstração. Seja $f : A \to A/B$ o homomorfismo canônico dado por $f(a) = a + B$, para todo $a \in A$, onde $a + B$ denota a classe dos elementos $a + b$, para todo $b \in B$, em A/B. Pelo Teorema 4.2.6, temos que existe homomorfismo $g : A/B \to A$ que cinde f.

Afirmamos que $A = g[A/B] \oplus B$. De fato, seja $a \in A$ qualquer. Temos então a representação de a como soma de elementos de $g[A/B]$ e B dada por $a = g \circ f(a) + (a - g \circ f(a))$, onde podemos ver que $g \circ f(a) \in g[A/B]$ e $a - g \circ f(a) \in B$. Ainda, tal representação é única, pois se $a' \in A$ e $b \in B$ são tais que $a = g(a' + B) + b$, aplicando f temos

$$a + B = f(a) = f \circ g(a' + B) + f(b) = a' + B$$

e, portanto, $a = a'$. Como $a' + B = f(a')$ e $b = a - g(a' + B)$, segue que $a = g \circ f(a') + a - g \circ f(a')$.

Seja agora S uma base de A/B. Como g é injetor, $g[S]$ é uma base de $g[A/B]$. Assim, se B' é uma base de B, temos que $g[S] \cup B'$ é uma base de A, provando não só que A é um grupo abeliano livre, mas também que qualquer base de B pode ser estendida a uma base de A. □

Seguindo em frente, será necessário fazermos uso de mais uma ferramenta algébrica, que são cadeias de grupos. Vamos então enunciar as definições e resultados relevantes:

Definição 4.2.9. Sejam κ um ordinal e $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma coleção de conjuntos indexada por κ. Dizemos que essa coleção forma uma cadeia crescente se

$$A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset \ldots, \ \alpha < \kappa.$$

Ainda, dizemos que tal cadeia é

(a) suave se, para todo ordinal limite $\alpha < \kappa$, temos $A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$;

(b) estritamente crescente se $A_\alpha \neq A_{\alpha+1}$ para todo $\alpha < \kappa$;

(c) uma cadeia de grupos se, para todo $\alpha < \kappa$, A_α é um grupo e é subgrupo de $A_{\alpha+1}$.

Teorema 4.2.10. Seja $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$, para algum ordinal κ, uma cadeia suave de grupos tal que A_0 é livre e, para todo $\alpha < \kappa$, $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ é também livre. Se $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$, então A é livre e A/A_α é livre para todo $\alpha < \kappa$.

Demonstração. Seja S_0 uma base para A_0. Iremos construir indutivamente sobre $\alpha < \kappa$ uma cadeia crescente suave de conjuntos

$$S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_\alpha \subset \ldots, \ \alpha < \kappa,$$

tal que S_α é uma base de A_α para todo $\alpha < \kappa$. Como já temos A_0 definido, suponhamos como hipótese de indução que já construímos uma cadeia

$$S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_\alpha \subset \ldots, \ \alpha < \beta,$$

satisfazendo as condições desejadas para algum $\beta < \kappa$. Vamos definir S_β.

Se β é um ordinal limite, tomamos $S_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} S_\alpha$. Temos então que S_β é uma base para $\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha$. Mas como por hipótese de indução a cadeia é suave, temos que $\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha = A_\beta$.

Caso contrário, seja $\beta = \gamma + 1$ para algum ordinal γ. Por hipótese, $A_{\gamma+1}/A_\gamma$ é livre, portanto segue pelo Corolário 4.2.8 que S_γ pode ser estendido a uma base $S_{\gamma+1}$ de $A_{\gamma+1} = A_\beta$. Está então concluída a indução.

Com essa cadeia, agora basta notar que $S = \bigcup_{\alpha<\kappa} S_\alpha$ é uma base para A e que $\{s + A_\alpha : s \in S \setminus S_\alpha\}$ é uma base para A/A_α. □

4.3 W-grupos

Em sequência, precisaremos agora estabelecer propriedades similarmente fundamentais e importantes sobre o outro tipo de grupo central ao Problema de Whitehead, isto é, W-grupos. Para isso, nesta seção será necessário adentrarmos um pouco mais profundamente no estudo de álgebra homológica.

Como de costume, comecemos com algumas definições.

Definição 4.3.1. Sejam A e B grupos quaisquer. Denotamos $Hom(A,B)$ o grupo de todos os homomorfismos $f : A \to B$ munido da operação $+$ tal que, para cada $f,g \in Hom(A,B)$, o homomorfismo $f+g : A \to B$ é definido por $(f+g)(a) = f(a)+g(a)$ para todo $a \in A$.

Definição 4.3.2. Sejam A, B e C grupos quaisquer. Dado um homomorfismo $f : A \to B$, denotamos por f' o homomorfismo

$$f' : Hom(B,C) \to Hom(A,C)$$

definido por $f'(g) = g \circ f$ para cada $g \in Hom(B,C)$.

A seguir, começaremos a tratar de sequências de grupos. Para maior facilidade de leitura quando trabalhando com sequências, dado $f : A \to B$ um homomorfismo, passaremos a denotar $Im(f) = f[A]$. Passaremos também a denotar simplesmente por 0 o grupo trivial $\{0\}$.

Definição 4.3.3. Uma sequência

$$\ldots \to A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i-1} \to \ldots,$$

onde cada A_i é um grupo e cada f_i um homomorfismo de grupos, é dita exata se $Ker(f_i) = Im(f_{i+1})$ para todo i.

Definição 4.3.4. Seja A um grupo. Chamamos de resolução livre de A uma sequência exata

$$0 \to F_1 \xrightarrow{f} F_0 \xrightarrow{g} A \to 0 \tag{$*$}$$

tal que F_0 é livre.

Observação 4.3.5. Note que, na sequência ($*$), como a sequência é exata temos que:

- $Im(g) = A$, ou seja, g é sobrejetor;
- $Ker(f) = 0$, ou seja, f é injetor;
- como f é injetor, temos que F_1 é isomorfo a um subgrupo de F_0. Assim, como F_0 é livre, temos pelo Teorema 4.2.4 que F_1 é também livre.

Definição 4.3.6. Sejam A e B grupos e considere uma resolução livre de A na forma ($*$). Definimos

$$Ext(A,B) = Hom(F_1,B)/Im(f').$$

O grupo $Ext(A,B)$ independe da escolha da resolução livre de A. A demonstração desse fato pode ser encontrada em (JANS, 1964) (p. 35) e dependeria da construção de mais algumas ferramentas de álgebra homológica, então ela será omitida a fim de evitar desvio ainda maior do objetivo deste capítulo. Pelo mesmo motivo, será omitida a demonstração do teorema a seguir, que pode ser encontrada em (JANS, 1964) (p. 31-41).

Teorema 4.3.7. Dada uma sequência exata

$$0 \to A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3 \to 0$$

e um grupo B qualquer, existe uma sequência exata

$$0 \to Hom(A_3,B) \xrightarrow{g'} Hom(A_2,B) \xrightarrow{f'} Hom(A_1,B) \to Ext(A_3,B) \to Ext(A_2,B) \to Ext(A_1,B) \to 0.$$

Antes de usar esse teorema, precisamos caracterizar W-grupos nos termos das definições recém-estabelecidas:

Teorema 4.3.8. Seja A um grupo. A é um W-grupo se, e somente se, $Ext(A,\mathbb{Z}) = 0$.

Demonstração. Primeiramente, suponhamos A um W-grupo, para o qual consideramos uma resolução livre da forma ($*$). Como $Ext(A,\mathbb{Z}) = Hom(F_1,\mathbb{Z})/Im(f')$, devemos provar que $Hom(F_1,\mathbb{Z}) = Im(f')$. Como $Im(f') \subset Hom(F_1,\mathbb{Z})$, basta provar a outra continência.

Assim, seja $h_1 : F_1 \to \mathbb{Z}$ um homomorfismo e seja $B = (\mathbb{Z} \oplus F_0)/I$ sendo $I = \{(h_1(y), -f(y)) : y \in F_1\}$. Temos então o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{f} & F_0 & \xrightarrow{g} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \downarrow{\scriptstyle 1_A} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\phi} & B & \xrightarrow{\psi} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

onde ϕ, ψ e θ são homomorfismos definidos por $\phi(n) = (n,0) + I$, $\psi((n,x) + I) = g(x)$ e $\theta(x) = (0,x) + I$. Observe que a sequência inferior do diagrama é também exata. Agora, existe homomorfismo $\xi : B \to \mathbb{Z}$ tal que $\xi \circ \phi = 1_{\mathbb{Z}}$. Tomamos então $h_0 = \xi \circ \theta$ e obtemos que $f'(h_0) = h_1$, provando que $Hom(F_1, \mathbb{Z}) \subset Im(f')$.

Suponhamos agora que $Ext(A, \mathbb{Z}) = 0$ e consideremos a sequência exata

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} A \to 0.$$

Sendo F_0 como na sequência exata ($*$), afirmamos que existe $\theta : F_0 \to B$ sobrejetor tal que $\psi \circ \theta = g$ (a prova dessa afirmação é omitida e encontra-se em (JANS, 1964), p. 8). Tomando então um homomorfismo $h_1 : F_1 \to \mathbb{Z}$ temos novamente o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{f} & F_0 & \xrightarrow{g} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \downarrow{\scriptstyle 1_A} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\phi} & B & \xrightarrow{\psi} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Agora, como $Ext(A, \mathbb{Z}) = 0$, temos que $f' : Hom(F_0, \mathbb{Z}) \to Hom(F_1, \mathbb{Z})$ é sobrejetor e, portanto, existe $h_0 : F_0 \to B$ tal que $h_0 \circ f = h_1$.

Observe que $Ker(\theta) \subset Ker(h_0)$. De fato, se $x \in Ker(\theta)$, temos $\psi \circ \theta(x) = g(x) = 0$ e, como g é sobrejetor (pela exatidão da sequência superior), devemos ter $y \in F_1$ tal que $f(y) = x$. Logo, como ϕ é injetor pela exatidão da sequência e $\phi \circ h_1(y) = \theta \circ f(y) = \theta(x) = 0$, temos que $h_0(x) = h_0 \circ f(y) = h_1(y) = 0$. Temos então que h_0 induz uma função $\tau : B \to \mathbb{Z}$. Afirmamos que τ é tal que $\tau \circ \phi = 1_{\mathbb{Z}}$.

De fato, para cada $n \in \mathbb{Z}$, seja $\tau \circ \phi(n) = h_0(x)$ sendo x tal que $\theta(x) = \phi(n)$. Temos que $g(x) = \psi \circ \theta(x) = \psi \circ \phi(n) = 0$, logo, pela exatidão da sequência, temos que $x = f(y)$ para algum $y \in F_1$. Assim, $h_0(x) = h_0 \circ f(y) = h_1(y)$ e $\phi \circ h_1(y) = \theta \circ f(y) = \theta(x) = \phi(n)$. Novamente, como ϕ é injetor, temos que $n = h_1(y) = \tau \circ \phi(n)$. Então $\phi \circ \psi$ cinde e, portanto, A é W-grupo. □

Estamos agora preparados para provar os próximos três teoremas, que são os resultados principais desta seção.

Teorema 4.3.9. Todo subgrupo de um W-grupo é também W-grupo.

Demonstração. Sejam A um W-grupo e $B \subset A$ subgrupo. Considere a sequência

$$0 \to B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A/B \to 0$$

onde f é a inclusão canônica de B em A e g é a projeção canônica de A em A/B. Observe que tal sequência é exata. Temos então pelo Teorema 4.3.7 que existe a sequência exata

$$Ext(A,\mathbb{Z}) \to Ext(B,\mathbb{Z}) \to 0.$$

Essa sequência implica que existe um homomorfismo sobrejetor de $Ext(A,\mathbb{Z})$ para $Ext(B,\mathbb{Z})$. Mas temos pelo Teorema 4.3.8 que $Ext(A,\mathbb{Z}) = 0$, logo $Ext(B,\mathbb{Z}) = 0$ e, portanto, temos novamente pelo Teorema 4.3.8 que B é W-grupo. □

Teorema 4.3.10. Todo W-grupo é livre de torções.

Demonstração. Seja A um grupo com torção, ou seja, existem $a \in A$ e $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ mínimo tais que $na = 0$. Pelo Teorema 4.3.8, se provarmos que $\langle a \rangle$ não é W-grupo, temos que A também não o é. Mas note que $\langle a \rangle$ é um grupo cíclico finito e, portanto, é isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Basta então provarmos que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ não é W-grupo.

Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a projeção canônica. Temos que $Ker(f) = n\mathbb{Z}$, que é isomorfo a $\mathbb{Z}$. Afirmamos que f não cinde.

De fato, considere um homomorfismo $g : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Temos então, para cada $m + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

$$ng(m+n\mathbb{Z}) = g(nm+n\mathbb{Z}) = g(0+n\mathbb{Z}) = 0.$$

Como $\mathbb{Z}$ é livre de torções, devemos ter então que g é o homomorfismo trivial nulo. Portanto, não existe $g : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que cinda f e, consequentemente, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ não é W-grupo. □

Teorema 4.3.11. Sejam A e B grupos tais que B é subgrupo de A, A é um W-grupo e A/B não é W-grupo. Existe então um homomorfismo $\psi \in Hom(B,\mathbb{Z})$ que não pode ser estendido a um homomorfismo em $Hom(A,\mathbb{Z})$.

Demonstração. Considere a sequência exata

$$0 \to B \xrightarrow{f} A \to A/B \to 0$$

onde f é a inclusão canônica de B em A. Pelo Teorema 4.3.7, existe a sequência exata

$$Hom(A,\mathbb{Z}) \xrightarrow{f'} Hom(B,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi} Ext(A/B,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\xi} Ext(A,\mathbb{Z}).$$

Como A é W-grupo e A/B não é W-grupo, temos pelo Teorema 4.3.8 que $Ext(A,\mathbb{Z}) = 0$ e $Ext(A/B,\mathbb{Z}) \neq 0$. Temos então que ξ é o homomorfismo trivial nulo e ϕ é sobrejetor, logo $Im(f') = Ker(\phi) \neq Hom(B,\mathbb{Z})$, ou seja, f' não é sobrejetor.

Observe no entanto que dado $g \in Hom(A,\mathbb{Z})$, $f'(g) = g \circ f$ nada mais é do que $g \restriction B$. Em outras palavras, f' leva os homomorfismos em $Hom(A,\mathbb{Z})$ aos homomorfismos em $Hom(B,\mathbb{Z})$ que eles estendem. Portanto, como f' não é sobrejetor, existe homomorfismo $\psi \in Hom(B,\mathbb{Z})$ que não admite extensão. $\square$

4.4 Problema de Whitehead enumerável

Mencionamos no começo deste capítulo que o Problema de Whitehead para $\aleph_0$, isto é, a afirmação de que todo W-grupo enumerável é livre, é válida em ZFC. Nesta seção, visamos provar esse fato. Comecemos com as definições necessárias.

Definição 4.4.1. Seja A um grupo livre de torções com $B \subset A$ um subgrupo. Dizemos que B é puro se A/B é livre de torções.

Definição 4.4.2. Seja A um grupo livre de torções com $B \subset A$ um subgrupo qualquer. Definimos o fecho puro de B como $B' = \{a \in A : na \in B \text{ para algum } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.

Observação 4.4.3. Primeiramente, é evidente que B' é um subgrupo de A tal que $B \subset B' \subset A$.

Além disso, é também claro que o fecho puro B' de B é ele próprio um subgrupo puro de A. De fato, seja $a + B' \in A/B'$. Se $na + B' = 0$ para algum $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, então devemos ter que:

- $na = 0$, o que contradiz o fato de A ser livre de torções, ou;
- $na \in B'$ e, portanto, existe $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $(mn)a \in B$, o que implica, pela definição de B', que $a \in B'$ e, consequentemente, $a + B' = 0$.

Em seguida, alguns resultados relevantes sobre subgrupos puros.

Proposição 4.4.4. Sejam A um grupo livre e $B \subset A$ subgrupo finitamente gerado. Nesse caso, B' é também finitamente gerado.

Demonstração. Primeiramente, como A é livre, temos pelo Teorema 4.2.4 que B e B' são livres. Seja assim $\{b_1, ..., b_n\} \subset B$ uma base para B e suponha que exista $\{a_1, ..., a_{n+1}\}$ linearmente independente em B'. Como $a_i \in B'$, para todo $i \in \{1, ..., n+1\}$, existem $m_1, ..., m_{n+1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tais que $m_i a_i \in B$, para todo $i \in \{1, ..., n+1\}$. Mas $\{m_1 a_1, ..., m_{n+1} a_{n+1}\}$ não pode ser linearmente independente em B, portanto existem $p_1, ..., p_{n+1} \in \mathbb{Z}$ não todos nulos tais que

$$p_1 m_1 a_1 + ... + p_{n+1} m_{n+1} a_{n+1} = 0,$$

contradizendo a hipótese de que $\{a_1, ..., a_{n+1}\}$ é linearmente independente. $\square$

Corolário 4.4.5. Seja A um grupo livre. Então todo subgrupo finitamente gerado de A está contido em um subgrupo puro finitamente gerado de A.

Teorema 4.4.6. Seja A um grupo livre de torções, enumerável, e tal que todo subgrupo finitamente gerado de A está contido em um subgrupo puro finitamente gerado de A. Então A é livre.

Demonstração. Seja $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração dos elementos de A. Iremos definir indutivamente sobre n uma cadeia suave $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subgrupos puros finitamente gerados de A.

Primeiramente, seja $B_0 = 0$. Supondo então definido B_n, definimos B_{n+1} um subgrupo puro finitamente gerado de A tal que $B_n \cup \{a_n\} \subset B_{n+1}$. Claramente, temos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A$.

Agora, temos que B_{n+1}/B_n, para todo $n \in \mathbb{N}$, é livre de torções, pois B_n é puro. Temos, ainda, que B_{n+1}/B_n, para todo $n \in \mathbb{N}$, é finitamente gerado, pois B_{n+1} é finitamente gerado. Portanto, pelo Teorema 4.2.5, temos que B_{n+1}/B_n é livre para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, pelo Teorema 4.2.10, temos que A é livre. □

Observação 4.4.7. Sejam B um conjunto e $C = B \times \mathbb{Z}$. Daqui em diante, denotaremos por $\pi : C \to B$ a projeção canônica de tal conjunto na primeira coordenada, dada por $\pi(b,n) = b$, para todo $(b,n) \in C$.

Definição 4.4.8. Seja B um grupo. Chamamos de $(B,\mathbb{Z})$-grupo um grupo $C = B \times \mathbb{Z}$ tal que a projeção $\pi : C \to B$ seja um homomorfismo e $(0,m)+(0,n) = (0,m+n)$, para todo $m,n \in \mathbb{Z}$.

Observação 4.4.9. Dado um grupo B, o exemplo mais básico de $(B,\mathbb{Z})$-grupo é $B \oplus \mathbb{Z}$.

Observação 4.4.10. Dado C um $(B,\mathbb{Z})$-grupo, se $\pi : C \to B$ não cinde, então C não é um W-grupo, uma vez que $Ker(\pi) = 0 \times \mathbb{Z}$, que é claramente isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Lema 4.4.11. Seja B_0 um subgrupo de B_1 tal que B_1 é um W-grupo mas B_1/B_0 não é um W-grupo. Seja C_0 um $(B_0,\mathbb{Z})$-grupo e $\rho : B_0 \to C_0$ um homomorfismo que cinde $\pi_0 : C_0 \to B_0$. Existe então C_1 um $(B_1,\mathbb{Z})$-grupo que estende C_0 e é tal que ρ não se estende para um homomorfismo que cinde $\pi_1 : C_1 \to B_1$.

Demonstração. Primeiramente, note que, como ρ cinde π_0 (e, consequentemente, é injetor), temos que $\tau : B_0 \oplus \mathbb{Z} \to C_0$ definido por $\tau(b,n) = \rho(b) + (0,n)$, para todo $(b,n) \in B \times \mathbb{Z}$, é um isomorfismo. Observe, ainda, que $\tau^{-1} \circ \rho(b) = (b,0)$, para todo $b \in B_0$, logo podemos considerar $C_0 = B_0 \oplus \mathbb{Z}$ e $\rho(b) = (b,0)$, para todo $b \in B_0$.

Seja $C_1^* = B_1 \oplus \mathbb{Z}$. Pelo Teorema 4.3.11, existe homomorfismo $\psi : B_0 \to \mathbb{Z}$ que não se estende a um homomorfismo em $Hom(B_1,\mathbb{Z})$. Definimos então $\gamma : C_0 \to C_1^*$ dado por $\gamma(b,n) = (b, n+\psi(b))$.

Suponhamos agora que existe um homomorfismo $\rho_1^* : B_1 \to C_1^*$ tal que ρ_1^* cinde $\pi_1^* : C_1^* \to B_1$ e $\rho_1^* \restriction B_0 = \gamma \circ \rho$. Sejam $\hat{\pi}_1^* : C_1^* \to B_1$ a projeção canônica na segunda coordenada e $\phi : B_1 \to \mathbb{Z}$ dado por $\phi = \hat{\pi}_1^* \circ \rho_1^*$. Para todo $b \in B_0$, temos

$$\phi(b) = \hat{\pi}_1^* \circ \rho_1^*(b) = \hat{\pi}_1^* \circ \gamma \circ \rho(b) = \psi(b),$$

ou seja, ϕ estende ψ em B_1, contradizendo a escolha de ψ. Portanto, π_1^* não cinde.

A seguir, definimos a função entre conjuntos $f : C_1^* \to B_1 \times \mathbb{Z}$ dada por

$$f(b,n) = \begin{cases} (b,n) & \text{se } b \notin B_0 \\ (b, n - \psi(b)) & \text{se } b \in B_0 \end{cases}.$$

Podemos observar que f é uma bijeção. Mais ainda, $f \circ \gamma$ é a inclusão canônica de $B_0 \oplus \mathbb{Z}$ em $B_1 \times \mathbb{Z}$. Seja então $C_1 = B_1 \times \mathbb{Z}$ o grupo munido da operação $+$ dada por $(b_1,n_1) + (b_2,n_2) = f(f^{-1}(b_1,n_1) + f^{-1}(b_2,n_2))$, para todo $(b_1,n_1),(b_2,n_2) \in C_1$, que torna f um isomorfismo. Assim, C_1 é um grupo contendo (uma cópia de) C_0 tal que ρ não se estende para um homomorfismo $\rho_1 : C_1 \to B_1$ que cinde $\pi_1 : C_1 \to B_1$, concluindo a demonstração. □

Finalmente, podemos provar:

Teorema 4.4.12. Todo W-grupo enumerável é livre.

Demonstração. Seja A um W-grupo enumerável. Sabemos pelo Teorema 4.3.10 que A é livre de torções, portanto se provarmos que todo subgrupo finitamente gerado de A está contido em um subgrupo puro finitamente gerado de A, então temos pelo Teorema 4.4.6 que A é livre.

Para isso, suponhamos que existe um subgrupo finitamente gerado B_0 de A que não está contido em um subgrupo puro finitamente gerado. Sendo então B o fecho puro de B_0, devemos ter que B não é finitamente gerado, logo B pode ser dado pela união de uma cadeia estritamente crescente $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ de grupos finitamente gerados, começando em B_0.

Note que, como B é o fecho puro de B_0, temos pela definição de fecho puro que B/B_0 não é livre de torções. De fato, para todo $a \in B$, existe $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $na \in B_0$. Logo, como $B_0 \neq B$, existe torção em B/B_0.

Agora, iremos definir por indução sobre n uma cadeia estritamente crescente de grupos $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que C_n é um $(B_n,\mathbb{Z})$-grupo livre de torções para cada $n \in \mathbb{N}$, de forma que $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ será um $(B,\mathbb{Z})$-grupo livre de torções.

Seja $S \subset B_0$ finito um conjunto que gera B_0. Observe que se $\rho : B \to C$ é um homomorfismo, ρ é determinada pelos seus valores sobre S, pois, novamente, para qualquer $a \in B$, existe $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $na \in B_0$, portanto $\rho \restriction nB_0$ é determinada pelos seus valores sobre S. Mas como C é livre de torções, dados $a \in B$ e $x \in C$, temos que $nx = \rho(na) = n\rho(a)$ se, e somente se, $x = \rho(a)$.

Definimos então $\{f_n : S \to S \times \mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\}$ a família das funções entre conjuntos tais que $\pi \circ f_n = 1_S$ (note que como S é finito tal família é de fato enumerável). Seja $C_0 = B_0 \oplus \mathbb{Z}$ e suponhamos C_n já definido.

Se f_n pode ser estendida para um homomorfismo $\rho : B_n \to C_n$ que cinde $\pi_n : C_n \to B_n$, definimos C_{n+1} uma extensão de C_n tal que ρ não se estende para um homomorfismo que cinde $\pi_{n+1} : C_{n+1} \to B_{n+1}$. Tal C_{n+1} existe pois, como para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que B_n não é puro, temos também que B_{n+1}/B_n não é livre de torções, e segue então pelo Teorema 4.3.10 que não é W-grupo. Assim, a existência de C_{n+1} é garantida pelo Lema 4.4.11.

Caso contrário, se f_n não se estende para um homomorfismo que cinde π_n, seja $\rho : B_n \to C_n$ um homomorfismo qualquer que cinda π_n. Tal ρ existe, pois B_n é livre de torções e finitamente gerado e, portanto, temos pelo Teorema 4.2.5 que B_n é livre. Definimos então C_{n+1} como uma extensão de C_n tal que ρ não se estende para um homomorfismo que cinde π_{n+1}, analogamente ao caso anterior.

Suponhamos agora que existe $\rho : B \to C$ um homomorfismo que cinde $\pi : C \to B$. Temos que $\rho \restriction S = f_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Mas então temos que $\rho \restriction B_n$ é um homomorfismo que cinde π_n e que se estende para o homomorfismo $\rho \restriction B_{n+1}$ que cinde π_{n+1}, contradizendo a construção de C_{n+1}. Portanto, $\pi : C \to B$ não cinde e, consequentemente, B não é W-grupo, contradizendo o Teorema 4.3.9. $\square$

Temos agora provado o Problema de Whitehead para $\aleph_0$.

4.5 Condição de Chase

A fim de estudar o Problema de Whitehead para $\aleph_1$, passaremos a estudar grupos de cardinalidade $\aleph_1$. Para isso, precisaremos tomar algumas generalizações de objetos estudados previamente.

Primeiramente, temos a seguinte definição, que nos fornece uma consequência direta do último teorema da seção anterior:

Definição 4.5.1. Um grupo A é dito $\aleph_1$-livre se todo subgrupo $B \subset A$ tal que $|B| < \aleph_1$ é livre.

Temos agora este corolário do Teorema 4.4.12:

Corolário 4.5.2. Todo W-grupo é $\aleph_1$-livre.

Demonstração. De fato, se A é um W-grupo, temos que todo subgrupo $B \subset A$ é também um W-grupo pelo Teorema 4.3.9. Portanto, todo subgrupo enumerável B de A é um W-grupo enumerável e temos então pelo Teorema 4.4.12 que B é livre. $\square$

Ainda precisaremos das seguintes definições, análogas ao conceito de subgrupo puro e à hipótese do Teorema 4.4.6, respectivamente:

Definição 4.5.3. Seja A um grupo $\aleph_1$-livre. Um subgrupo $B \subset A$ é dito um subgrupo $\aleph_1$-puro de A se A/B é $\aleph_1$-livre.

Definição 4.5.4. Seja A um grupo. Dizemos que A satisfaz a condição de Chase se A é $\aleph_1$-livre e todo subgrupo enumerável de A está contido em um subgrupo $\aleph_1$-puro enumerável de A.

Um grupo não enumerável que satisfaz a condição de Chase não é necessariamente livre. Nesta seção, vamos então estabelecer uma condição necessária e suficiente para que um grupo de cardinalidade $\aleph_1$ que satisfaz a condição de Chase seja livre.

Observação 4.5.5. Daqui em diante, como estaremos trabalhando com conjuntos de cardinalidade $\aleph_1$, utilizaremos o primeiro ordinal não enumerável, denotado por ω_1, para indexação de tais conjuntos.

Para manter alguma uniformidade de notação, indexaremos conjuntos enumeráveis com o ordinal ω.

Lema 4.5.6. Seja A um grupo tal que $|A| = \aleph_1$. A satisfaz a condição de Chase se, e somente se, $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ para alguma cadeia suave de grupos livres enumeráveis $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que $A_0 = 0$ e $A_{\alpha+1}$ é subgrupo $\aleph_1$-puro de A para todo $\alpha < \omega_1$.

Demonstração. Seja $A = \{a_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Primeiramente, suponhamos que A satisfaz a condição de Chase. Iremos construir indutivamente sobre $\alpha < \omega_1$ uma cadeia $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ satisfazendo as condições do lema.

Seja $A_0 = 0$ e suponhamos A_α definido para todo $\alpha < \beta$ para algum $\beta < \omega_1$. Se β é um ordinal limite, definimos $A_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha$. Como β é enumerável e A_α é enumerável para cada $\alpha < \beta$, A_β permanece enumerável. Por outro lado, se $\beta = \gamma + 1$ para algum ordinal γ, tomamos A_β como um subgrupo $\aleph_1$-puro enumerável de A que contém $A_\gamma \cup \{a_\beta\}$. Tal grupo existe pois A satisfaz a condição de Chase.

Assim, pela construção da cadeia e pelo fato de que A é $\aleph_1$-livre, temos que a cadeia satisfaz todas as condições do lema.

Suponha agora que A é a união de uma cadeia $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ que satisfaz as condições exigidas. Temos então que cada subconjunto enumerável $B \subset A$ está contido em $A_{\alpha+1}$ para algum $\alpha < \omega_1$, que é enumerável e $\aleph_1$-puro. Portanto, A satisfaz a condição de Chase. $\square$

Definição 4.5.7. Uma função $f : \omega_1 \to \omega_1$ é dita normal se:

(i) para cada $\alpha, \beta < \omega_1$ tais que $\alpha < \beta$, temos $f(\alpha) < f(\beta)$ e;

(ii) para cada ordinal limite $\beta < \omega_1$, temos que $f(\beta) = sup\{f(\alpha) : \alpha < \beta\}$.

Uma função que satisfaz a propriedade (i) é dita estritamente crescente e uma função que satisfaz a propriedade (ii) é dita contínua.

Definição 4.5.8. Um subconjunto $S \subset \omega_1$ é dito estacionário se $Im(f) \cap S \neq \emptyset$ para toda função normal f.

Observação 4.5.9. Seja $f : \omega_1 \to \omega_1$ uma função normal. Observe que, como f é estritamente crescente e, consequentemente, injetora, temos que $Im(f)$ é não enumerável. Logo $Im(f)$ necessariamente contém algum ordinal limite. Assim, o conjunto $S = \{\alpha < \omega_1 : \alpha \text{ é ordinal limite}\}$ é estacionário.

Observação 4.5.10. O grupo A no teorema a seguir satisfaz as hipóteses do Lema 4.5.6, então, na demonstração do teorema, nós manteremos a notação $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ da cadeia fornecida pelo Lema 4.5.6.

Denotaremos por E o conjunto dos ordinais limite $\beta < \omega_1$ tais que A_β não é subconjunto $\aleph_1$-puro de A.

Teorema 4.5.11. Seja A um grupo tal que $|A| = \aleph_1$ e A satisfaz a condição de Chase. Nesse caso, A é livre se, e somente se, E é um subconjunto não estacionário de ω_1.

Demonstração. Primeiramente, suponhamos E não estacionário. Existe então $f : \omega_1 \to \omega_1$ tal que $Im(f) \cap E = \emptyset$. Seja $A^*_\alpha = A_{f(\alpha)}$. Como f é normal, a cadeia $\{A^*_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ ainda será suave e tal que $A = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} A^*_\alpha$. Ainda, como $Im(f) \cap E = \emptyset$, temos que A^*_α é $\aleph_1$-puro para todo $\alpha < \omega_1$e, portanto, que $A^*_{\alpha+1}/A^*_\alpha$ é $\aleph_1$-livre. Mas como $A^*_{\alpha+1}/A^*_\alpha$ é também enumerável, isso implica que é livre. Obtemos então pelo Teorema 4.2.10 que A é livre.

Suponhamos agora que A é livre e seja $X \subset A$ uma base de A. Podemos tomar uma cadeia suave $\{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de subgrupos de X e uma função normal $f : \omega_1 \to \omega_1$ tais que X_α é uma base de $A_{f(\alpha)}$ para cada $\alpha < \omega_1$. Como sempre, essa construção será feita indutivamente sobre $\alpha < \omega_1$.

Primeiramente, definimos $X_0 = \emptyset$ e $f(0) = 0$. Suponhamos então que X_α e $f(\alpha)$ já estão definidas para todo $\alpha < \beta$ para algum $\beta < \omega_1$. Se β é um ordinal limite, definimos $X_\beta = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} X_\alpha$ e $f(\beta) = sup\{f(\alpha) : \alpha < \beta\}$. Assim, $A_{f(\beta)} = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} A_{f(\alpha)}$ e, portanto, X_β é uma base de $A_{f(\beta)}$.

Por outro lado, se $\beta = \gamma + 1$ para algum ordinal $\gamma < \omega_1$, tomamos um conjunto $Y_0 \subset X$ enumerável tal que $X_\gamma \subsetneq Y_0$ e um ordinal σ_0 tal que $Y_0 \subset A_{\sigma_0}$. Supondo definidos Y_n e σ_n, tomamos então $Y_{n+1} \subset X$ tal que $A_{\sigma_n} \subset \langle Y_{n+1} \rangle$. Definimos assim indutivamente sobre $n < \omega$ a cadeia

$$X_\gamma \subset Y_0 \subsetneq Y_1 \subset \ldots \subset Y_n \subset \ldots, n < \omega,$$

de subconjuntos enumeráveis de X e a sequência

$$f(\gamma) < \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \ldots \leq \sigma_n \leq \ldots, n < \omega$$

tal que $Y_n \subset A_{\sigma_n} \subset \langle Y_{n+1} \rangle$ para cada $n < \omega$. Finalmente, definimos $X_\beta = \bigcup_{m<\omega} Y_n$ e $f(\beta) = sup\{\sigma_n : n < \omega\}$, e temos então que X_β é uma base de $A_{f(\beta)}$, concluindo a indução.

Agora, para cada $\alpha < \omega_1$, temos que $f(\alpha) \notin E$, pois temos da construção que $A/A_{f(\alpha)}$ é isomorfo ao grupo livre gerado por $X \setminus X_\alpha$, o que implica que $A_{f(\alpha)}$ é subconjunto $\aleph_1$-puro de A. Temos então que $Im(f) \cap E = \emptyset$ e, portanto, E não é estacionário. $\square$

4.6 Axioma de construtibilidade

Recorde-se que afirmamos no início deste capítulo que nosso objetivo é provar que o Problema de Whitehead para $\aleph_1$ é indecidível em ZFC. Para obter esse resultado, iremos acrescentar axiomas consistentes com ZFC ao nosso sistema axiomático e demonstrar a validade do Problema de Whitehead para $\aleph_1$. Tomaremos então ZFC acrescido de outros axiomas consistentes e demonstraremos a invalidade do Problema.

Nesta seção, consideraremos ZFC com a adição do Axioma de Construtibilidade, comumente denotado por V = L, e demonstraremos que nessas condições temos que todo W-grupo de cardinalidade $\aleph_1$ é livre.

A fim de manter o foco deste trabalho consideraremos conhecidos os seguintes resultados fundamentais, o primeiro dos quais nos garante a consistência de nosso sistema axiomático, que denotaremos por ZFC + V = L. A demonstração pode ser encontrada em (GöDEL, 1940).

Teorema 4.6.1.
- ZF + V = L é consistente;
- ZF + V = L implica o Axioma da Escolha e a Hipótese do Contínuo.

Segue imediatamente do teorema que ZFC + V = L é consistente. O próximo teorema é uma consequência de V = L, que relaciona o axioma com os conceitos e terminologias até aqui abordados, portanto não será necessário abordarmos o enunciado formal de V = L neste trabalho. A demonstração pode ser encontrada em (JENSEN, 1972).

Teorema 4.6.2. Adote V = L. Sejam C um conjunto dado pela união de uma cadeia suave estritamente crescente de conjuntos enumeráveis $\{C_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ e $E \subset \omega_1$ um conjunto estacionário. Então existe uma sequência de conjuntos $\{S_\alpha : \alpha \in E\}$ tal que $S_\alpha \subset C_\alpha$ para todo $\alpha \in E$. Além disso, para todo subconjunto $X \subset C$, o conjunto $\{\alpha \in E : X \cap C_\alpha = S_\alpha\}$ é estacionário.

Em particular, nos será útil o seguinte corolário do último teorema:

Corolário 4.6.3. Adote V = L. Sejam B um conjunto dado pela união de uma cadeia suave estritamente crescente de conjuntos enumeráveis $\{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ e $E \subset \omega_1$ um conjunto estacionário. Seja, ainda, Y um conjunto enumerável arbitrário. Então existe uma sequência de funções $\{g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times Y : \alpha \in E\}$ tal que, para toda função $h : B \to B \times Y$ satisfazendo $h[B_\alpha] \subset B_\alpha \times Y$ para todo $\alpha < \omega_1$, existe $\beta \in E$ tal que $h \restriction B_\beta = g_\beta$.

Demonstração. Considere $C = B \times (B \times Y)$ o conjunto dado pela união da cadeia $\{C_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que $C_\alpha = B_\alpha \times (B_\alpha \times Y)$ para cada $\alpha < \omega_1$. Pelo teorema anterior, existe uma $\{S_\alpha : \alpha \in E\}$ tal que $S_\alpha \subset C_\alpha$ para todo $\alpha \in E$ e tal que o conjunto $\{\alpha \in E : X \cap C_\alpha = S_\alpha\}$ é estacionário para todo $X \subset C$.

Agora, para cada $\alpha \in E$, como $S_\alpha \subset B_\alpha \times (B_\alpha \times Y)$, podemos interpretar S_α como uma associação de elementos de B_α com elementos de $B_\alpha \times Y$. Se S_α for bem definida como função, tomamos $g_\alpha = S_\alpha$. Caso contrário, seja $g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times Y$ uma função qualquer.

Analogamente, sendo $h : B \to B \times Y$ uma função tal que $h[B_\alpha] \subset B_\alpha \times Y$ para todo $\alpha < \omega_1$, podemos interpretar h como um subconjunto de $B \times (B \times Y)$. Temos então que o conjunto $\{\alpha \in E : h \cap C_\alpha = S_\alpha\}$ é estacionário e, portanto, não vazio. Seja então β nesse conjunto. Como $h[B_\beta] \subset B_\beta \times Y$, temos que $h \cap C_\beta = h \restriction B_\beta = g_\beta$, concluindo a demonstração. $\square$

Utilizando o corolário, podemos agora trazer o resultado de volta para grupos com o seguinte teorema:

Teorema 4.6.4. Adote V = L. Seja B um grupo dado pela união de uma cadeia estritamente crescente de grupos livres enumeráveis $\{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que $E = \{\alpha < \omega_1 : B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ não é livre}\} \subset \omega_1$ é estacionário. Então B não é um W-grupo.

Demonstração. Iremos construir indutivamente sobre $\alpha < \omega_1$ uma cadeia suave de grupos $\{C_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de modo que cada C_α é um $(B_\alpha, \mathbb{Z})$-grupo e a união $C = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$ é um $(B, \mathbb{Z})$-grupo tal que $\pi : C \to B$ não cinde, provando então que B não é W-grupo.

Pelo corolário anterior, podemos tomar uma sequência de funções $\{g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z} : \alpha \in E\}$ de modo que, em particular, para todo homomorfismo $h : B \to B \times \mathbb{Z}$ tal que $\pi \circ h = 1_B$, temos que existe $\beta \in E$ tal que $h \restriction B_\beta = g_\beta$.

Começamos agora a indução tomando C_0 como um $(B_0, \mathbb{Z})$-grupo qualquer. Suponhamos definido B_α para todo $\alpha < \gamma$ tal que $\gamma < \omega_1$. Se γ é um ordinal limite, definimos $C_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} C_\alpha$. Se $\gamma = \delta + 1$ para algum ordinal $\delta < \omega_1$, temos dois casos a considerar.

O primeiro caso é se $\delta \in E$ e $g_\delta : B_\delta \to B_\delta \times \mathbb{Z}$ é um homomorfismo que cinde $\pi_\delta : C_\delta \to B_\delta$. Como $B_{\delta+1}/B_\delta$ é enumerável e não é livre, temos pelo Teorema 4.4.12 que $B_{\delta+1}/B_\delta$ não é W-grupo e, consequentemente, temos pelo Lema 4.4.11 que podemos tomar C_γ como uma extensão de C_δ tal que g_δ não se estende para um homomorfismo que cinde $\pi_\gamma : C_\gamma \to B_\gamma$.

O segundo caso é se $\delta \notin E$ ou g_δ não é um homomorfismo que cinde π_δ. Tomamos então C_γ como um $(B_\gamma, \mathbb{Z})$-grupo qualquer tal que C_γ estende C_δ.

Finalmente, seja $C = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$. Suponhamos que existe um homomorfismo $\rho : B \to C$ que cinde $\pi : C \to B$. Existe então $\beta \in E$ tal que $\rho \restriction B_\delta = g_\delta$. Observe que β e g_δ se enquadram no primeiro caso da construção. No entanto, ρ é uma extensão de g_β que cinde $\pi_\beta : C_\beta \to B_\beta$, contradizendo a construção. Portanto, temos que $\pi : C \to B$ não cinde. □

Finalmente, podemos provar o Problema de Whitehead para $\aleph_1$ em ZFC + V = L.

Teorema 4.6.5. Adote V = L. Então todo W-grupo com cardinalidade $\aleph_1$ é um grupo livre.

Demonstração. Seja A um W-grupo tal que $|A| = \aleph_1$. Primeiramente, iremos mostrar que A satisfaz a condição de Chase. Note que como A é W-grupo, temos automaticamente pelo Corolário 4.5.2 que A é $\aleph_1$-livre.

Suponhamos por contradição que A não satisfaz a condição de Chase. Temos então pela definição que existe um subgrupo enumerável $B_0 \subset A$ tal que qualquer subgrupo enumerável $C \subset A$ contendo B_0 não é $\aleph_1$-puro, ou seja, para qualquer subgrupo enumerável $C \subset A$ contendo B_0, existe um subgrupo enumerável $C' \subset A$ contendo C tal que C'/C não é livre (formalmente $\aleph_1$ livre, mas os conceitos são equivalentes para grupos enumeráveis).

Usando esse fato, podemos construir indutivamente sobre $\alpha < \omega_1$ uma cadeia suave estritamente crescente $\{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de subgrupos enumeráveis de A tal que, para cada $\alpha < \omega_1$, temos que $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ não é livre. Primeiramente, B_0 já está definido. Suponhamos então B_α já definido para todo $\alpha < \beta$ para algum $\beta < \omega_1$. Se β é um ordinal limite, tomamos $B_\beta = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} B_\alpha$. Se $\beta = \gamma + 1$ para algum $\gamma < \omega_1$, então tomamos B_β como C' obtido da hipótese de falha da condição de Chase.

Agora, se $B = \bigcup\limits_{\alpha} B_\alpha$, temos que o conjunto $E_B = \{\alpha < \omega_1 : B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ não é livre}\}$ é todo o ω_1 e, portanto, E_B é trivialmente estacionário. Segue então pelo Teorema 4.6.4 que B não é W-grupo, o que contradiz, pelo Teorema 4.3.9, o fato de A ser W-grupo. Assim, A satisfaz a condição de Chase.

Pelo Lema 4.5.6, A pode ser obtido pela união de uma cadeia suave de grupos livres enumeráveis $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que $A_{\alpha+1}$ é subgrupo $\aleph_1$-puro de A para cada $\alpha < \omega_1$. Considere os conjuntos $E = \{\alpha < \omega_1 : A_\alpha \text{ não é subgrupo } \aleph_1\text{-puro de } A\}$ e $E' = \{\alpha < \omega_1 : A_{\alpha+1}/A_\alpha \text{ não é livre}\}$.

É simples observar que $E' \subset E$. Afirmamos que $E' = E$. De fato, se $\beta < \omega_1$ é tal que $\beta \notin E'$, então $A_{\beta+1}/A_\beta$ é livre. Temos para cada $\alpha < \omega_1$ tal que $\alpha > \beta$ que $(A_\alpha/A_\beta)/(A_{\beta+1}/A_\beta)$ é isomorfo a $A_\alpha/A_{\beta+1}$, que é livre. Portanto, segue pelo Corolário 4.2.8 que A_α/A_β é livre. Observe que, como cada subgrupo enumerável A/A_β é um subgrupo de A_α/A_β para algum $\alpha > \beta$ e, consequentemente, é livre, temos que A/A_β é $\aleph_1$-livre. Assim, A_β é subgrupo $\aleph_1$-puro de A, isto é, $\beta \notin E$.

Como A é W-grupo, temos pelo Teorema 4.6.4 que E' não é estacionário. Ainda, como $E = E'$, temos que E não é estacionário, e segue então pelo Teorema 4.5.11 que A é livre, concluindo a demonstração. □

4.7 Axioma de Martin

Nesta seção, como dito anteriormente, iremos tomar outro sistema axiomático com ZFC no qual poderemos provar que o Problema de Whitehead para $\aleph_1$ é inválido. Mais especificamente, provaremos que existe um W-grupo de cardinalidade $\aleph_1$ que não é livre.

Para alcançar nosso resultado, adotaremos o Axioma de Martin, denotado MA, e pela negação da Hipótese do contínuo, denotada $\neg$CH. Como com o sistema axiomático anterior, antes de seguir em frente é importante estabelecer a consistência do sistema axiomático. Essa garantia é dada pelo seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em (SOLOVAY; TENNENBAUM, 1971).

Teorema 4.7.1. ZFC + MA + $\neg$CH é consistente.

O teorema a seguir segue da formulação geral do Axioma de Martin, que pode ser vista em (SHOENFIELD, 1975). Como tal formulação exigiria a definição de mais diversas terminologias e conceitos de teoria dos conjuntos, iremos novamente partir diretamente do teorema.

Teorema 4.7.2. Adote MA. Sejam A e B conjuntos tais que $|A|, |B| < \mathfrak{c}$, onde $\mathfrak{c}$ denota a cardinalidade do contínuo. Seja, ainda, P um conjunto de funções satisfazendo as propriedades:

(a) cada $f \in P$ é uma função $f : A' \to B$ para algum $A' \subset A$;

(b) para cada $a \in A$ e $f \in P$, existe $g \in P$ que estende f e cujo domínio contém a;

(c) para cada subconjunto não enumerável $P' \subset P$, existem $f_1, f_2 \in P'$ e $f_3 \in P$ tais que $f_1 \neq f_2$ e f_3 estende f_1 e f_2.

Nessas condições, existe uma função $g : A \to B$ tal que, para todo $F \subset A$ finito, existe $f \in P$ cujo domínio contém F e $g \restriction F = f \restriction F$.

Nosso objetivo é provar o seguinte teorema:

Teorema 4.7.3. Adote MA + $\neg$CH. Então existe um W-grupo com cardinalidade $\aleph_1$ que não é livre.

Observe que o teorema pode ser obtido como consequência direta dos seguintes dois teoremas:

Teorema 4.7.4. Existe um grupo A tal que $|A| = \aleph_1$ e A satisfaz a condição de Chase mas A não é livre.

Teorema 4.7.5. Adote MA + $\neg$CH. Seja A um grupo tal que $|A| = \aleph_1$ e A satisfaz a condição de Chase. Então A é W-grupo.

Temos então que demonstrar o Teorema 4.7.3 se resume a demonstrar os Teoremas 4.7.4 e 4.7.5.

Começaremos pelo Teorema 4.7.4. Note que para este teorema não pedimos nenhum axioma além de ZFC.

Demonstração do Teorema 4.7.4. Iremos definir indutivamente uma cadeia suave $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de grupos livres enumeráveis tal que:

(i) para cada $\alpha, \beta < \omega_1$ tais que $\beta < \alpha$ temos que $A_\alpha / A_{\beta+1}$ é livre;

(ii) para cada ordinal limite $\alpha < \omega_1$ temos que $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ não é livre.

Suponhamos por enquanto que está definida a cadeia. Afirmamos que se $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$, então A satisfaz as condições do teorema. De fato, pela propriedade (i) da cadeia, temos que $A_{\beta+1}$ é subgrupo $\aleph_1$-puro de A para cada $\beta < \omega_1$. Ainda, como cada grupo da cadeia é livre, temos pelo Lema 4.5.6 que A satisfaz a condição de Chase. Além disso, pela propriedade (ii) temos que o conjunto $E = \{\alpha < \omega_1 : \alpha \text{ é ordinal limite e } A_\alpha \text{ não é } \aleph_1\text{-puro}\}$ é o conjunto de todos os ordinais limites, que é estacionário. Temos então pelo Teorema 4.5.11.

Resta agora exibir a construção da cadeia $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Primeiramente, definimos $A_0 = 0$. Suponhamos que a cadeia $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$ já está definida para algum $\beta < \omega_1$. Para definir A_β temos três casos a considerar.

O primeiro caso é se β é um ordinal limite. Definimos então $A_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha$. Seja $\{\sigma_n : n < \omega\}$ uma sequência de ordinais sucessores tal que $\beta = \bigcup_{n<\omega} \sigma_n$. Temos então que $A = \bigcup_{n<\omega} A_{\sigma_n}$. Como $\sigma_n < \beta$ para todo $n < \omega$, temos por hipótese de indução e pela propriedade (i) que $A_{\sigma_{n+1}}/A_{\sigma_n}$ é livre para todo $n < \omega$. Segue então pelo Teorema 4.2.10 que A_β é livre e que A/A_{σ_n} (e, consequentemente, A_β/A_{σ_n}) é livre para cada $n < \omega$. Para cada $\alpha < \beta$ temos que $A_{\alpha+1} \subset A_{\sigma_n}$ para algum $n < \omega$, logo por hipótese de indução temos $A_{\sigma_n}/A_{\alpha+1}$ livre. Com isso, como $(A_\beta/A_{\alpha+1})/(A_{\sigma_n}/A_{\alpha+1})$ é isomorfo a A_β/A_{σ_n}, que é livre, temos pelo Corolário 4.2.8 que $A_\beta/A_{\alpha+1}$ é livre, provando a validade da propriedade (i). Quanto a propriedade (ii), não há o que verificar neste caso, uma vez que não existe ordinal $\gamma < \beta$ tal que $\gamma + 1 = \beta$, e para os demais ordinais limites menores do que β o resultado segue da hipótese de indução.

O segundo caso é se $\beta = \gamma + 1$ para algum ordinal sucessor $\gamma < \omega_1$. Definimos simplesmente então $A_\beta = A_\gamma \oplus \mathbb{Z}$. Claramente A_β é livre. Seja agora $\alpha < \beta$. Se $\alpha = \gamma$, então $A_\beta/A_{\alpha+1} = 0$. Seja então $\alpha < \gamma$. Temos por hipótese de indução que $A_\gamma/A_{\alpha+1}$ é livre. Assim, como $(A_\beta/A_{\alpha+1})/(A_\gamma/A_{\alpha+1})$ é isomorfo a A_β/A_γ, temos pelo Corolário 4.2.8 que $A_\beta/A_{\alpha+1}$ é livre, satisfazendo a propriedade (i). A propriedade (ii) é satisfeita trivialmente pelo mesmo argumento do caso anterior.

O terceiro caso é se $\beta = \gamma + 1$ para algum ordinal limite γ. Seja $\{\sigma_n : n < \omega\}$ uma sequência definida como no primeiro caso, mas escolhendo $\sigma_0 = 0$ para facilidade de notação. Recorde-se que na demonstração do Teorema 4.2.10 construímos uma cadeia suave de conjuntos $\{X_n : n < \omega\}$ tal que X_n é uma base de A_{σ_n} para cada $n < \omega$. Tomemos aqui tal cadeia. Para cada $1 < n < \omega$, tomamos um ponto $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$. Sejam $Y_n = X_n \setminus \{x_n\}$ para cada $1 < n < \omega$ e $B \subset A_\gamma$ o subgrupo gerado por $\bigcup_{1<n<\omega} Y_n$. Seja, ainda, $P = \prod_{n=1}^{\infty} \langle x_n \rangle$. Finalmente, definimos A_β como o subgrupo de $B \oplus P$ gerado por A_γ e $\{z_m : 1 \leq m < \omega\} \subset P$, onde cada z_m pode ser representado na forma $z_m = \sum_{m \leq n < \omega} (\frac{n!}{m!}) x_n$.

Podemos observar que, pela construção e pela escolha da cadeia $\{X_n : n < \omega\}$, $(\bigcup_{1<n<\omega} Y_n) \cup \{z_m : 1 \leq m < \omega\}$ é uma base de A_β e, portanto, A_β é livre. Além disso, para cada $k < \omega$, A_β / A_{σ_k} é isomorfo ao subgrupo de A_β gerado por $(\bigcup_{k<n<\omega} (Y_n \setminus Y_k)) \cup \{z_m : 1 \leq m < \omega\}$, e temos então que A_β / A_{σ_k} é livre. Analogamente ao que fizemos no primeiro caso, para cada $\alpha < \gamma$ existe $k < \omega$ tal que $A_{\alpha+1} \subset A_{\sigma_k}$ e $A_{\sigma_k} / A_{\alpha+1}$ é livre. Ainda, como $(A_\beta / A_{\alpha+1}) / (A_{\sigma_k} / A_{\alpha+1})$ é isomorfo a A_β / A_{σ_k}, que é livre, temos pelo Corolário 4.2.8 que $A_\beta / A_{\alpha+1}$ é livre, provando a propriedade (i).

Finalmente, observe que para cada $1 \leq m < \omega$ temos que $m! z_m - z_1 \in A_\gamma$. Assim, $z_1 + A_\gamma$ é um elemento não neutro de A_β / A_γ e que gera uma torção. Portanto A_β / A_γ não é livre, satisfazendo a propriedade (ii), e concluindo então a indução. □

Demonstração do Teorema 4.7.5. Seja A um grupo tal que $|A| = \aleph_1$ e satisfazendo a condição de Chase. Seja, ainda, $\rho : B \to A$, para algum grupo B tal que $|B| < \mathfrak{c}$, um homomorfismo sobrejetor tal que $Ker(\rho)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$. Iremos provar que ρ cinde.

Seja P o conjunto de todos os homomorfismos $\phi : S \to A$ tais que S é um subgrupo puro finitamente gerado de A e $\rho \circ \phi = 1_S$. Pelo Teorema 4.7.2, se P satisfaz as condições (a),(b) e (c), então existe $g : A \to B$ tal que para qualquer $F \subset A$ finito temos algum $\phi \in P$ tal que $g \restriction F = \phi \restriction F$. Assim, g caracteriza um homomorfismo que cinde ρ.

Para concluir a demonstração, resta mostrar que P satisfaz as condições do Teorema 4.7.2. Note que a condição (a) é trivialmente satisfeita pela definição de P. As condições (b) e (c) irão decorrer dos lemas que provaremos a seguir. □

Os próximos lemas presumem as mesmas hipóteses do Teorema 4.7.5, então manteremos também a mesma notação para os objetos já definidos.

Lema 4.7.6. Se ϕ é um homomorfismo em P e F é um subconjunto finito de A, então existe uma função $\phi' \in P$ que estende ϕ e que contém F em seu domínio.

Demonstração. Seja $S \subset A$ o domínio de ϕ. Seja, ainda, S' um subconjunto puro finitamente gerado de A contendo $S \cup F$, que existe pois A é $\aleph_1$-puro e podemos simplesmente tomar o fecho puro. Assim, S'/S é um grupo finitamente gerado e, como S é puro, livre de torções. Temos então pelo Teorema 4.2.5 que S'/S é livre. Agora, como uma consequência da demonstração do Corolário 4.2.8, temos que se X é uma base de S, ela pode ser estendida a um conjunto $X \cup Y$, para algum conjunto $Y \subset A$, de forma que $X \cup Y$ é base de S'. Por conveniência, consideremos $Y \cap X = \emptyset$.

Para cada $x \in X$, definimos $\phi'(x) = \phi(x)$. Para cada $y \in Y$, definimos $\phi'(y) = b_y$ sendo $b_y \in B$ tal que $\rho(b_y) = y$. Obtemos assim o homomorfismo $\phi' : S' \to B$ que estende ϕ. $\square$

O lema anterior prova diretamente que a condição (b) do Teorema 4.7.2 é satisfeita na demonstração do Teorema 4.7.5. O próximo lema nos permitirá provar a satisfação da condição (c).

Observação 4.7.7. Antes de partir para o próximo lema, vamos estudar um caso específico que nos levará a verificação da condição (c). Seja $P' \subset P$ não enumerável de modo que existe um subgrupo livre e puro A' de A tal que $Dom(\phi) \subset A'$ para todo $\phi \in P'$, sendo $Dom(\phi)$ o domínio de ϕ.

Seja $X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ uma base de A'. Pelo Lema 4.7.6, podemos tomar extensões dos homomorfismos ϕ se necessário e considerar que para cada $\phi \in P'$ existe um subconjunto finito de X que gera $Dom(\phi)$. Ainda, como a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável, podemos supor, trocando P' por outro subconjunto não enumerável $P'' \subset P'$ se necessário, que existe um número m tal que $Dom(\phi)$ é gerado por exatamente m elementos de X para cada $\phi \in P'$.

Sejam então $P' = \{\phi_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ e $Y_\alpha \subset X$ uma base de $Dom(\phi_\alpha)$ para cada $\alpha < \omega_1$. Seja $T \subset X$ tal que $T \subset Y_\alpha$ para uma quantidade não enumerável de ordinais α, podendo ser $T = \emptyset$. Agora, como $|Y_\alpha| = m$ para todo $\alpha < \omega_1$, existe $T \subset X$ maximal com a propriedade descrita. Além disso, como $Ker(\rho)$ é enumerável, temos que $T \cap P$ é enumerável. Suponhamos então, sem perda de generalidade, que se $T \subset Y_\alpha$ e $T \subset Y_\beta$, temos que $\phi_\alpha \restriction T = \phi_\beta \restriction T$.

Podemos também reindexar nossos objetos de forma que tenhamos $T \subset Y_0$. Como tomamos T maximal, para cada $y \in Y_0 \setminus T$ o conjunto $\{\alpha < \omega_1 : y \in Y_\alpha\}$ é enumerável. Assim, existe $\alpha \neq 0$ tal que $Y_\alpha \cap Y_0 = T$. Temos então que $\phi_\alpha \restriction T = \phi_0 \restriction T$ e, portanto, pelo Lema 4.7.6, existe $\psi : \langle Y_\alpha \cup Y_0 \rangle \to B$ que estende ambas.

Finalmente, temos que $\langle Y_\alpha \cup Y_0 \rangle$ é subgrupo puro de A', uma vez que é gerado por um subconjunto de uma base de A'. Como $(A/\langle Y_\alpha \cup Y_0 \rangle)/(A'/\langle Y_\alpha \cup Y_0 \rangle)$ é isomorfo a A/A', que é livre de torções pois A' é subgrupo puro de A, temos então que $\langle Y_\alpha \cup Y_0 \rangle$ é subgrupo puro de A. Portanto, temos que $\psi \in P$, provando a validade da condição (c) do Teorema 4.7.2 para esse caso específico.

Provaremos agora a satisfação da condição (c) com o lema a seguir:

Lema 4.7.8. Seja $P' \subset P$ não enumerável. Existem então um subgrupo livre e puro A' de A e um subconjunto não enumerável P'' de P' tais que o domínio de ϕ está contido em A' para todo $\phi \in P''$.

Demonstração. Seja $P' = \{\phi_\alpha : S_\alpha \to B : \alpha < \omega_1\}$. Como na observação anterior, trocando P' por um subconjunto $P'' \subset P'$ não enumerável se necessário, podemos tomar um número m tal que S_α tem uma base de cardinalidade m para cada $\alpha < \omega_1$.

Ainda como na observação, podemos tomar um subgrupo puro T de A maximal tal que temos $T \subset S_\alpha$ para uma quantidade não enumerável de ordinais $\alpha < \omega_1$. Novamente, substituindo P' por um subconjunto P'' não enumerável se necessário, podemos supor T contido em S_α para todo $\alpha < \omega_1$. Agora, como T é finitamente gerado e livre de torções, temos pelo Teorema 4.2.5 que T é livre. Sendo então X uma base de T, pelo argumento na demonstração do Corolário 4.2.8, cada S_α admite uma base $X \cup Y_\alpha$ que é uma extensão da base de T.

Definiremos agora o subgrupo A' de A como a união de uma cadeia suave de grupos $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que, para cada $\alpha < \omega_1$, A_α é subgrupo puro de A e $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ é livre. Nessas condições, A' naturalmente será subgrupo puro de A por construção e teremos pelo Teorema 4.2.10 que A' é livre.

Definimos $A_0 = T$. Para algum ordinal $\beta < \omega_1$, suponhamos já definida a cadeia $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$ e uma sequência de ordinais $\{\sigma_{\alpha+1} : \alpha < \beta\}$ tal que $Y_{\sigma_{\alpha+1}} \subset A_{\alpha+1}$ para todo $\alpha < \beta$. Se β é ordinal limite, definimos $A_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha$.

Caso contrário, se $\beta = \gamma + 1$ para algum ordinal γ, tomamos C_γ um subgrupo $\aleph_1$-puro enumerável de A tal que $A_\gamma \subset C_\gamma$. Tal C_γ existe pois A satisfaz a condição de Chase. Afirmamos que para todo $\alpha < \beta$, existe um ordinal que já chamaremos de σ_β tal que $\sigma_{\alpha+1} < \sigma_\beta$ e $\langle Y_{\sigma_\beta} \rangle \cap C_\gamma = 0$. De fato, caso contrário, como C_γ é enumerável, teríamos um $c \in C_\gamma$ e um conjunto não enumerável de ordinais $\tau < \omega_1$ tais que $c \in \langle Y_\tau \rangle$. Mas nesse caso, poderíamos tomar o fecho puro de $T + \langle c \rangle$ (sendo $T + \langle c \rangle$ o grupo obtido unindo os dois grupos e fechando pela operação do grupo), contradizendo a maximalidade de T.

Finalmente, definimos A_β como o fecho puro de $A_\gamma + \langle Y_{\sigma_\beta} \rangle$. Como $Y_{\sigma_\beta} \cap C_\gamma = 0$, temos que $A_\beta \cap C_\gamma = A_\gamma$. Obtemos então que A_β / A_γ é isomorfo a um subgrupo enumerável de A/C_γ. Assim, como C_γ é $\aleph_1$-puro e, portanto, A/C_γ é $\aleph_1$-livre, temos que A_β/A_γ é livre. Tomamos então $P'' = \{\phi_{\sigma_{\alpha+1}} : \alpha < \omega_1\}$, satisfazendo as condições do lema. $\square$

Com isso, nas hipóteses do Teorema 4.7.3, voltamos às condições da Observação 4.7.7 e concluímos a demonstração do Teorema 4.7.5.

Mostramos assim que o Problema de Whitehead para $\aleph_1$ é falso sob ZFC + MA + $\neg$CH pelo Teorema 4.7.3, mas verdadeiro sob ZFC + V = L pelo Teorema 4.6.5. Portanto, em ZFC sem axiomas adicionais, o Problema é indecidível.

REFERÊNCIAS

BROOKE-TAYLOR, A. D. Products of cw complexes. arXiv, out. 2017. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1710.05296v2>. Citado na página 15.

DUGUNDJI, J. **Topology**. Boston: Allyn and Bacon, 1966. Citado na página 19.

EKLOF, P. C. Whitehead's problem is undecidable. **The American Mathematical Monthly**, v. 83, n. 10, p. 775–788, 1976. Citado na página 49.

ENGELKING, R. **General Topology**. Berlin: Heldermann, 1989. Citado na página 23.

GöDEL, K. **The Consistency of the Continuum Hypothesis**. Princeton: Princeton University Press, 1940. Citado na página 66.

JANS, J. P. **Rings and Homology**. London: Holt-Rinehart and Winston, 1964. Citado nas páginas 57 e 58.

JENSEN, R. B. The fine structure of the constructible hierarchy. **Annals of Mathe-matical Logic**, v. 4, p. 229–308, 1972. Citado na página 66.

SHELAH, S. Can the fundamental (homotopy) group of a space be the rationals? **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 103, n. 2, p. 627–632, 1988. Citado nas páginas 39 e 46.

SHOENFIELD, J. R. Martin's axiom. **The American Mathematical Monthly**, v. 82, n. 6, p. 610–617, 1975. Citado na página 69.

SOLOVAY, R. M.; TENNENBAUM, S. Iterated cohen extensions and souslin's problems. **Annals of Mathematics**, v. 94, n. 2, p. 201–245, 1971. Citado na página 69.

TANAKA, Y. Products of cw-complexes. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 86, n. 3, p. 503–507, 1982. Citado na página 15.

ICMC USP
SÃO CARLOS