SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 20.01.2005

Assinatura:

Multiplicidades e multiplicidades mixtas de ideais m-primários

Márcio Alexandre de Oliveira Reis

Orientador: ***Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez***

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP – São Carlos
Janeiro/2005

Aluno: *Marcio Alexandre de Oliveira Reis*

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez _____

Prof. Dr. Daniel Levcovitz _____

Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella _____

AGRADECIMENTOS

À minha família, especialmente aos meus pais, Florêncio Reis que nunca se conformou por eu ter parado de estudar, e Zilda de Oliveira Reis por ter sido uma mãe zelosa com seus filhos.

Ao meu primo Cláudio de Oliveira, por ter conseguido um emprego para mim em Montenegro, sem o qual talvez eu jamais tivesse voltado às salas de aulas, depois de sete longos anos.

À memória do meu chefe, Ercílio Leindorff, por ter permitido que eu me ausentasse do trabalho, em alguns momentos, para terminar o Ensino Médio e por seus incentivos para que eu fizesse um curso superior.

Aos meus colegas do "Barraco"em Montenegro, os melhores amigos que tive.

Ao Prof. Dr. Penereiro, por ter acreditado em mim.

Ao Prof. Dr. Osmar Giuliani pela bolsa e pelo incentivo tão necessários.

A todos os professores da UFSM, por terem me suportado, em especial a Profa. Dr. Maria de Lourdes.

Aos meus amigos da UFSM, principalmente ao Marcio Paim e ao Fabiano Becker.

Ao Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez, pelo profissionalismo, seriedade e paciência demonstrados durante a realização deste trabalho.

À minha esposa, Cristina Spohr, pelo companheirismo, paciência e o apoio, que foram fundamentais desde que a conheci. Também a Deus, por ter me presenteado com uma pessoa tão maravilhosa como ela e por ter me dado tantas oportunidades nesta vida, que por muitas vezes eu acho não ter merecido.

Ao Thiago de Melo pela ajuda com o LaTeX.

Aos funcionários da USP, pelo profissionalismo, competência e pela simpatia que

demonstram no desenvolver de suas tarefas.

À CAPES pela bolsa.

E a mim por ter largado a Biologia e mesmo tendo desistido várias vezes da Matemática (foram três vezes), ter voltado a trás.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos as principais propriedades da teoria geral da multiplicidade algébrica de um ideal I de um anel A, com relação a um A-módulo M. A definição da multiplicidade surge a partir do conceito de comprimento e a partir disto estudamos as relações entre o símbolo da multiplicidade e o comprimento. Também estudamos a função de Hilbert associada a vários ideais $\mathcal{M}$-primários e definimos as multiplicidades mixtas, definidas originalmente por B. Teissier e J.J. Risler. Utilizando as propriedades da multiplicidades algébrica, calculamos o número de Milnor de algumas hipersuperfícies complexas com singularidade isolada.

ABSTRACT

In this work, we study the main properties of general theory of algebraic multiplicities of an ideal of a ring A, with respect to A-module M. The definition of multiplicities arises out from concept of length and from this concept we study the relations among the multiplicity's symbol and the length. We also study the Hilbert's functions associated to many ideals $\mathcal{M}$-primary and we define the mixed multiplicities which was defined originally by B. Teissier and J.J. Risler. Using the properties of algebraic multiplicities we calculate the Milnor's number of some complex hypersurface with isolated singularity.

Sumário

Introdução **1**

Capítulo 1: Preliminares **5**

1.1 Preliminares 5

1.2 Módulos Cohen-Macaulay 13

1.3 Anéis e Módulos Graduados 15

1.4 Singularidades 20

Capítulo 2: Multiplicidades **23**

2.1 Introdução 23

2.2 Sistemas de Multiplicidades 24

2.3 O Símbolo da Multiplicidade 27

2.4 Relação entre Multiplicidade e Comprimento 42

2.5 A Fórmula Limite de Lech 56

2.6 Funções de Hilbert 59

2.7 A Fórmula Limite de Samuel 66

Capítulo 3: Multiplicidades Mixtas de dois Ideais $\mathcal{M}$-primários **75**

3.1 Introdução 75

3.2 Resultados Preliminares 76

3.3 Ideais Bihomogêneos 81

3.4 A Função de Hilbert de dois Ideais $\mathcal{M}$-primários 88

3.5 Multiplicidade Mixta e Dependência Integral 95

Capítulo 4: Multiplicidades Mixtas **103**

4.1 Introdução 103

4.2 Resultados Básicos 103

4.3 A Definição de Multiplicidade Mixta 107

Capítulo 5: Aplicações **115**

5.1 O Número de Milnor 115

5.2 O Cálculo do Número de Milnor 117

5.3 Multiplicidades Mixtas e o Número de Milnor 119

Apêndice A: Localização **123**

A.1 Localização e Multiplicidades 123

Apêndice B: Teorema de Rees **127**

B.1 O Complexo de Koszul 127

B.2 Complexo de Koszul e Multiplicidades Mixtas 135

Referências Bibliográficas **145**

Introdução

Em [20], Samuel provou que se I é um ideal $\mathcal{M}$-primário de uma anel local Noetheriano $(A, \mathcal{M})$, então para valores suficientemente grandes de n, a função $H : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$H(n) = L_A(A/I^n)$$

é um polinômio em n, onde $L_A(A/I^n)$ denota o comprimento do anel A/I^n. O fato mais importante neste resultado, é que o coeficiente de maior grau deste polinômio, é igual a $\frac{e(I|A)}{d!}$, onde $e(I|A)$ é um número inteiro o qual é chamado a multiplicidade de Hilbert-Samuel do ideal I em A. A partir deste artigo, vários matemáticos passaram a investigar as propriedades deste número, entre eles podemos citar C. Lech, D. Northcott, D. Rees, etc. Mais tarde, Teissier e Risler mostraram que se $I_1, \ldots, I_s$ é um conjunto finito de ideais $\mathcal{M}$-primários do anel Noetheriano local $(A, \mathcal{M})$, então a função $H : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, definida por

$$H(n_1, \ldots, n_s) = L_A(M/(I_1^{n_1} \cdots I_s^{n_s}))$$

também é um polinômio em $n_1, \ldots, n_s$, desde que estes inteiros positivos fossem suficientemente grandes. Além disso, os coeficientes do termo de maior grau deste polinômio foram chamados de multiplicidades mixtas. A contribuição de Teissier e Risler, foi a de mostrar que estes coeficientes, eram na verdade, a multiplicidade de Hilbert-Samuel de um ideal gerado por uma sequência de elementos, os quais eles chamaram de superficiais. Além disso, eles deram uma interpretação geométrica para estas multiplicidades.

Nesta dissertação, nós seguimos basicamente o ponto de vista de [32] e [13], para estudar o símbolo da multiplicidade. Durante o estudo do símbolo da multiplicidade,

em algumas situações, nos restringimos ao caso local para estudar alguns resultados importantes de Álgebra Comutativa, como por exemplo, mostrar que se M é um A-módulo Cohen-Macaulay, onde A é anel Noetheriano local e I é um ideal gerado por um sistema de parâmetros, então o comprimento $L_A(M/IM)$ e a multiplicidade do ideal I coincidem numericamente, com relação ao módulo M.

Também é feito um estudo da função de Hilbert de mais de um ideal $\mathcal{M}$-primário e algumas fórmulas clássicas na teoria da multiplicidade, como a Fórmula Limite de Samuel e a Fórmula Limite de Samuel, são estabelecidas nesta dissertação.

Este texto também contém dois apêndices. O primeiro contém vários resultados da teoria da multiplicidade como, por exemplo, o Princípio da Localização e a Lei Associativa. No segundo, utilizamos o complexo de Koszul para demonstrar uma generalização do Teorema de Teissier devida a D. Rees. A justificativa destes apêndices está no fato de que se estes resultados fossem acrescentados no corpo da dissertação, está ficaria muito estensa, por isto, a sua leitura pode ser omitida, ou pode ser lida como cultura matemática. Os resultados dos apêndices não são tão detalhados como aqueles que fazem parte dos cinco capítulos que a compõe e em algumas situações, sua leitura é um pouco difícil.

Procuramos dar as referências sobre praticamente todos os resultados que não foram demonstrados neste texto. Infelizmente, não é possível dar os créditos merecidos a cada autor, pois isto exigiria um trabalho de pesquisa bibliográfico que demandaria muito tempo, e talvez ainda assim não teríamos sidos justos.

Apesar de termos corrigido cuidadosamente todos os detalhes das demonstrações feitas aqui, temos a certeza de que alguns erros, quer sejam de natureza gramatical ou matemático, permaneceram. A bibliografia é estensa e não temos a pretensão de que o leitor acredite que as lemos na integra, mas todas elas foram consultadas, em maior ou menor grau para que tivéssemos um visão da teoria da multiplicidade, bem como sua história, seu desenvolvimento atual e aplicações quer sejam geométricas ou puramente algébricas.

Este trabalho não contém nenhum resultado original, talvez apenas alguns erros ou equívocos matemáticos que eventualmente persistiram, após o trabalho final de correção.

O trabalho está organizado do seguinte modo.

No Capítulo 1, encontram-se os pré-requisitos de Álgebra Comutativa e da Teoria de Singularidades. Alguns exemplos são apresentados para fixar alguns conceitos deste capítulo. As principais referências para este capítulo foram basicamente as seguintes: sobre Álgebra Comutativa [1], [9], [21], [12] e principalmente [13].

No Capítulo 2, definimos sistemas de multiplicidades e estudamos as principais propriedades do símbolo da multiplicidade, que é definido indutivamente e a relacionamos com o comprimento de um módulo. Também usamos a função de Hilbert para estabelecer a fórmula Limite de Samuel. A fórmula Limite de Lech também é provada. Neste capítulo utilizamos basicamente [32] e [13].

No Capítulo 3, estudamos a função de Hilbert de dois ideais $\mathcal{M}$-primários num anel Noetheriano local e provamos que ela é um polinômio em duas variáveis. Várias propriedades da multiplicidade são estabelecidas, sendo que um dos principais resultados é que em determinadas situações, a multiplicidade e o fecho integral estão intimamente relacionados, bem como o conceito de redução. Aqui usamos as referências [3],[11] e [28].

No Capítulo 4, mostramos que as multiplicidades mixtas são de fato a multiplicidade de Samuel de um ideal gerado por uma sequência de elementos superficiais. Também mostramos o Teorema de Teissier e Risler. Convém observar que segundo alguns autores, o conceito de uma sequência de elementos superficiais é muito "vaga", pois é muito difícil exibir uma sequência constituída inteiramente por estes elementos, num caso geral. Neste capítulo utilizamos [23] e [34].

No Capítulo 5, usamos as propriedades do símbolo da multiplicidade para calcular o número de Milnor de uma hipersuperfície complexa analítica com singularidade isolada na origem. Vários exemplos são calculados usando as propriedades do símbolo da multiplicidade estudadas no Capítulo 2. Aqui utilizamos [23] e [24].

No Apêndice A enunciamos, sem demonstração, vários resultados sobre o símbolo da multiplicidade, tais como o Princípio da Localização, a Fórmula da Extensão e a Lei Associativa. Os resultados deste apêndice podem ser encontrados em [32] e [13].

No Apêndice B mostramos que o símbolo da multiplicidade e a característica de Euler-Poincaré são numericamente iguais. Também apresentamos a demonstração do

Teorema de Teissier, devida a Rees, utilizando o complexo de Koszul. As referências para este apêndice são [13], [17] e [22].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Preliminares

Por um *anel* A, entendemos um *anel Noetheriano comutativo com unidade* $(1 \neq 0)$. Todo anel $A \neq 0$, possui pelo menos um ideal maximal. No caso de A possuir exatamente um ideal maximal, diremos que A é um *anel local*. Usaremos $(A, \mathcal{M})$ para denotar o anel local A com o seu ideal maximal $\mathcal{M}$. Se A é um anel local com ideal maximal $\mathcal{M}$, então o corpo $k = A/\mathcal{M}$, é chamado o *corpo residual* do anel A, que supomos ser sempre infinito.

Corpos são exemplos de anéis locais. Também o anel das coordenadas $\mathcal{O}_{X,0}$ de $K(X) = k[x_1, \ldots, x_n]/I$, localizado no ideal maximal $\mathcal{M} = (x_1, \ldots, x_n)$, onde I é o ideal que define X, é local.

A intersecção de todos os ideais maximais do anel A é um ideal, chamado o *radical de Jacobson* de A, denotado por $\mathcal{R}(A)$. Se $(A, \mathcal{M})$ é um anel local, então $\mathcal{R}(A)$ é exatamente seu ideal maximal $\mathcal{M}$.

Definição 1.1.1: Diremos que um A-módulo M é *Noetheriano* se todo submódulo N de M é finitamente gerado. Como todo anel A é um A-módulo sobre si mesmo, diremos que A é um *anel Noetheriano* se todo ideal I de A é finitamente gerado.

Na verdade, não é necessário verificar se todos os ideais de A são finitamente

gerados, pois se todos os ideais primos de A são finitamente gerados, então A é Noetheriano ([9], pag. 17).

Mostra-se que as duas afirmações abaixo, são equivalentes em qualquer A-módulo Noetheriano M:

i) Vale a condição de cadeia ascendente, isto é, qualquer cadeia ascendente de submódulos de M

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_n \subset \cdots$$

é estacionária, ou seja, existe um inteiro positivo n, tal que $N^n = N^{n-r}$, para todo inteiro $r \geq 1$;

ii) Qualquer coleção não-vazia de submódulos de M, contém um elemento máximo (com relação à inclusão de conjuntos).

Anéis principais e corpos são exemplos de anéis Noetherianos.

Teorema 1.1.2: (**Teorema da Base de Hilbert**) ([9], pag. 16) Se A é um anel Noetheriano, então os anéis $A[x_1, \ldots, x_n]$ e $A\{x_1, \ldots, x_n\}$, dos polinômios e das séries convergentes sobre A, respectivamente, nas indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$, também são Noetherianos.

O Teorema da Base de Hilbert, além de sua importância própria, nos fornece uma maneira concreta de obtermos uma infinidade de exemplos de anéis Noetherianos. Para ver isto, basta tomar um anel Noetheriano e um conjunto finito de indeterminadas sobre o anel A e construir o anel de polinômios sobre A nestas indeterminadas.

Definição 1.1.3: Um A-módulo M é chamado *Artiniano* se qualquer cadeia descendente de submódulos

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots$$

é estacionária. Diremos que um anel A é *Artiniano* se ele é Artiniano como A-módulo.

Espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo k, são exemplos de k-módulos Artinianos. Todo anel Artiniano é Noetheriano ([9], pag. 16), mas a recíproca não é

válida, por exemplo, o anel $\mathbb{Z}$ é Noetheriano, mas não é Artiniano.

O próximo Teorema reúne várias propriedades sobre anéis Artinianos que usaremos durante este trabalho. A prova destes resultados se encontram em ([1], Capítulo 8).

Um elemento b do anel A é chamado *nilpotente*, se existe um inteiro positivo s (dependendo de b), tal que $b^s = 0$. O conjunto de todos os elementos nilpotentes de um anel A é um ideal, chamado de ideal *nilradical* de A e denotado por $nil(A)$. Um ideal I de um anel A é chamado *nilpotente*, se existe um inteiro positivo r (dependendo de I), tal que $I^r = 0$.

Teorema 1.1.4: 1) Um anel A é Artiniano se, e somente se, A é Noetheriano e $\dim A = 0$.

2) Num anel Artiniano A, o nilradical de A é um ideal nilpotente.

3) Todo ideal primo num anel Artiniano A é maximal. Além disso, num anel Artiniano existe apenas um número finito de ideais maximais.

Uma *série normal* num A-módulo M, é uma cadeia descendente finita de submódulos de M tal que

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_l = \{0\} \tag{1.1}$$

com $M_i \neq M_{i+1}$, para $i = 0, \ldots, l-1$. O número natural l é chamado o *comprimento da série normal*. A série normal (1.1) é chamada uma *série de composição* , se M_i/M_{i+1} é um módulo, cujos únicos submódulos são o $\{0\}$ e o próprio M_i/M_{i+1}, para $i = 0, \ldots, l-1$.

Teorema 1.1.5: ([1], pag. 77) Se um A-módulo M tem uma série de composição de comprimento finito, então todas as outras séries de composição de M têm comprimento finito e, além disso, todas elas têm o mesmo comprimento.

O Teorema 1.1.5 permite definir o comprimento de um A-módulo M.

Definição 1.1.6: O *comprimento* de um A-módulo M, denotado por $L_A(M)$, é

definido como o comprimento de qualquer série de composição de M. Neste caso, diremos que M tem comprimento finito.

Afirmar que um A-módulo M é Noetheriano, é equivalente a dizer que todos os seus submódulos são finitamente gerados, mas isto não significa dizer que ele tem comprimento finito. O próximo resultado esclarece definitivamente esta questão.

Teorema 1.1.7: ([1], pag. 77) Um A-módulo M tem uma série de composição se, e somente se, satisfaz ambas as condições de cadeia.

Por exemplo, o anel $k[x_1, \ldots, x_n]$ é Noetheriano, pelo Teorema 1.1.2, mas não tem comprimento finito, pois não satisfaz a condição de cadeia descendente. Basta, por exemplo, tomar a cadeia descendente

$$(x) \supset (x^2) \supset \cdots \supset (x^n) \supset \cdots,$$

que não é estacionária.

Definição 1.1.8: Seja $\mathcal{C}$ uma classe de A-módulos. Uma função $\mathcal{L}$ de $\mathcal{C}$ em $\mathbb{Z}$ é chamada *aditiva*, se para toda sequência exata da forma

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

onde M, M' e M'' pertencem a $\mathcal{C}$, tem-se

$$\mathcal{L}(M') - \mathcal{L}(M) + \mathcal{L}(M'') = 0.$$

Por exemplo, o comprimento $L_A(M)$, é uma função aditiva na classe de todos os A-módulos de comprimento finito. Mais precisamente, se

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de A-módulos, ambos de comprimento finito, então

$$L(M) = L(M') + L(M'').$$

O mesmo acontece para a dimensão de espaços vetoriais, $\dim_k(V)$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo k.

Um elemento $a \in A$, é chamado um *divisor do zero* em A, se existe um elemento não nulo $y \in A$, tal que $ay = 0$. O conjunto dos divisores do zero num anel Noetheriano A, é caracterizado como a união de todos os ideais primos minimais do ideal nulo de A ([1], pag. 53).

Um ideal I do anel A é chamado *primário*, se qualquer divisor do zero no anel A/I for um elemento nilpotente, ou equivalentemente, se $a, b \in A$ com $ab \in I$ e a não pertence a I, então existe $n \in \mathbb{N}$ (dependendo de b e I), tal que $b^n \in I$.

Seja I um ideal do anel A. O conjunto

$$\{a \in A \text{ tais que } a^n \subset I, \text{ para algum inteiro } n > 0\}$$

é um ideal de A, chamado o *radical* do ideal I e é denotado por $\sqrt{I}$. Claramente $I \subseteq \sqrt{I}$. No caso particular, em que $I = 0$, $\sqrt{0}$ é o nilradical de A. Outras propriedades que usaremos do radical são as seguintes:

i) Sejam I e J dois ideais de um anel A. Então $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

ii) Se $\mathcal{P}$ é um ideal primo de A, então $\sqrt{\mathcal{P}^n} = \mathcal{P}$, para todo inteiro $n > 0$.

Observação 1.1.9: Sejam I e J dois ideais $\mathcal{M}$-primários do anel local $(A, \mathcal{M})$. Então dados r e s inteiros positivos, o ideal $I^r J^s$ é $\mathcal{M}$-primário, pelo item (ii) acima. Na verdade, esta afirmação vale para um número finito de ideais $\mathcal{M}$-primários.

Seja $(A, \mathcal{M})$ um anel local. Um ideal I de $(A, \mathcal{M})$ é chamado *$\mathcal{M}$-primário* se $\sqrt{I} = \mathcal{M}$. Mais geralmente, se $\mathcal{P}$ é um ideal primo de A, um ideal I de A é chamado *$\mathcal{P}$-primário* se $\sqrt{I} = \mathcal{P}$. Por exemplo, o radical de um ideal primário é um ideal primo.

O próximo resultado, fornece uma caracterização muito útil dos ideais $\mathcal{M}$-primários de um anel local $(A, \mathcal{M})$.

Teorema 1.1.10: ([12], pag, 23) Seja I um ideal do anel Noetheriano local $(A, \mathcal{M})$. Então um ideal I de A é $\mathcal{M}$-primário se, e somente se, contém alguma potência de $\mathcal{M}$, isto é, existe um inteiro positivo r (dependendo de I e $\mathcal{M}$), tal que $\mathcal{M}^r \subseteq I$.

Vamos definir o comprimento de um ideal $\mathcal{M}$-primário I num anel Noetheriano local $(A, \mathcal{M})$. Para isto, suponha que que $I_1, \ldots, I_s$ são ideais $\mathcal{M}$-primários tais que

$$I = I_1 \subset \cdots \subset I_s = \mathcal{M},$$

onde todas as inclusões são estritas. Descrevemos esta situação, dizendo que $[I_1, \ldots, I_s]$ é uma *cadeia primária* que começa no ideal I e termina no ideal maximal $\mathcal{M}$, ou simplesmente, que é uma cadeia primária do ideal I ao ideal $\mathcal{M}$. Toda cadeia primária de I a $\mathcal{M}$, pode ser refinada numa série de composição ([12], pag. 52) de I. Observe que se J é um ideal do anel $(A, \mathcal{M})$ tal que

$$I \subset J \subset \mathcal{M},$$

então desde que I é um ideal $\mathcal{M}$-primário, podemos encontrar, pelo Teorema 1.1.10 um inteiro positivo r, tal que

$$\mathcal{M}^r \subseteq I \subseteq \sqrt{J} \subseteq \mathcal{M}$$

e aplicando radicais

$$\mathcal{M} = \sqrt{\mathcal{M}^r} \subseteq \sqrt{I} \subseteq J \subseteq \sqrt{\mathcal{M}} = M.$$

Portanto, o ideal J deve ser $\mathcal{M}$-primário. Em outras palavras, isto significa que os ideais $\mathcal{M}$-primários que aparecem entre I e $\mathcal{M}$, são exatamente os ideais J do anel A que aparecem entre os ideais I e $\mathcal{M}$. Prova-se ainda, ([12],pag. 54), que existe uma correspondência bijetiva entre as cadeias de ideais de I a $\mathcal{M}$ e as cadeias de ideais entre $\mathcal{M}/I$ e o ideal nulo de A/I. Podemos então definir o comprimento de ideais $\mathcal{M}$-primários do seguinte modo.

Definição 1.1.11: Seja I um ideal $\mathcal{M}$-primário de um anel Noetheriano local $(A, \mathcal{M})$. Definimos o comprimento do ideal I, denotado por $L_A(I)$, por

$$L_A(I) = L_A(A/I).$$

Definição 1.1.12: Seja I um ideal do anel A. Se o ideal I pode ser expresso como uma intersecção finita de ideais primários, isto é,

$$I = I_1 \cap \cdots \cap I_n. \tag{1.2}$$

onde cada I_i, $i = 1, \ldots, n$ é um ideal primário de A, então dizemos que a expressão (1.2) é uma *decomposição primária* do ideal I. Cada ideal I_i, $i = 1, \ldots, n$ que aparece em (1.2), é chamado uma *componente primária* de I. Todo ideal I de A que admite uma decomposição primária é chamado *decomponível* .

Uma decomposição primária em que todos os $\sqrt{I_i}$ são distintos e cada ideal I_i não contém a intersecção dos demais, é chamada *decomposição irredundante* ou *decomposição normal.*

Toda decomposição primária pode ser refinada até uma decomposição normal. Além disso, todo ideal I de um anel Noetheriano A admite uma decomposição primária.

Definição 1.1.13: Seja I um ideal do anel A. Um ideal primo $\mathcal{P}$ de A é chamado um ideal *primo minimal* de I, se ele contém I e não existe nenhum outro ideal primo de A que esteja contido estritamente entre $\mathcal{P}$ e I.

Pode-se caracterizar o conjunto dos elementos nilpotentes num anel Noetheriano A, em função dos ideais primos minimais do ideal nulo da seguinte maneira. O conjunto dos elementos nilpotentes do anel A, é a intersecção de todos os ideais primos minimais do ideal nulo de A ([1], pag. 53).

A conexão entre o radical de um ideal I num anel A e seus ideais primos minimais está explicada no próximo teorema.

Teorema 1.1.14: ([12], pag. 14) Suponha que

$$I = I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n \tag{1.3}$$

seja uma decomposição primária do ideal I, onde cada I_i é $\mathcal{P}_i$-primário para $1 \leq i \leq n$. Então valem as seguintes afirmações:

i) Qualquer ideal primo $\mathcal{P}$ que contém I, necessariamente contém pelo menos um dos ideais $\mathcal{P}_i$.

ii) Os ideais primos minimais de I, são exatamente os ideais primos $\mathcal{P}_i$, que não contenham estritamente qualquer outro $\mathcal{P}_j$, para $i \neq j$.

iii) Temos

$$\sqrt{I} = \mathcal{P}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_n.$$

Além disso, o radical de I, é a intersecção de todos os ideais primos minimais de I.

O Teorema 1.1.14, mostra que se I é um ideal decomponível de A, então existe apenas um número finito de ideais primos minimais de I e que eles estão associados com cada decomposição primária de I.

Teorema 1.1.15: ([12], pag. 15) Suponha que o ideal I admita uma decomposição primária e, além disso, tenhamos

$$I = I_1 \cap \ldots \cap I_m = \tilde{I}_1 \cap \ldots \cap \tilde{I}_n$$

duas decomposições primárias de I, onde I_i é $\mathcal{P}_i$-primário para $i = 1, \ldots, m$ e I_j é $\tilde{\mathcal{P}}_j$-primário, para $j = 1, \ldots, n$. Então $m = n$, e é possível ordenar as componentes de modo que $\mathcal{P}_i = \tilde{\mathcal{P}}_i$ para $1 \leq i \leq m = n$.

Em outras palavras, o Teorema 1.1.15, mostra que se I é um ideal decomponível de A, então os ideais primos que que aparecem na decomposição normal de I não dependem de nenhuma decomposição normal particular, mas apenas do ideal I. Estes ideais primos serão chamados de *associados* de I, ou também são ditos *pertencer* a I. Pelo Teorema 1.1.14, todo ideal primo minimal de I, pertence a I neste sentido. Os ideais primos associados, que não são minimais, são chamados de *imersos*. O conjunto dos ideais primos associados de I será denotado por $Ass(I)$.

Por uma *cadeia de ideais primos* do anel A, entendemos uma sequência estritamente ascendente de ideais primos de A

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_k,$$

e diremos que k é o comprimento da cadeia.

Definição 1.1.16: Definimos a *dimensão de Krull* de um anel A, como sendo o supremo dos comprimentos de todas as cadeias de ideais primos em A e a denotaremos

por dim A. Para um ideal primo $\mathcal{P}$ do anel A, o supremo dos comprimentos, tomados sobre todas as cadeias estritamente decrescentes de ideais primos

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_k = \mathcal{P},$$

é chamado a *altura* de $\mathcal{P}$ e denotado por $ht\mathcal{P}$. Se I é um ideal de A, definimos a altura de I, denotada por htI como sendo o ínfimo das alturas dos ideais primos contendo I.

Observação 1.1.17: Convém observar que, dim A é um número inteiro não-negativo ou $+\infty$.

Exemplo 1.1.18: 1) Todo corpo tem dimensão 0.

O anel dos inteiros $\mathbb{Z}$ tem dimensão 1. Mais geralmente, todo domínio principal que não é corpo, tem dimensão 1, pois num domínio principal, todo ideal primo é maximal.

2) ([9], pag. 35) Seja k um corpo. Então o anel dos polinómios $k[x_1, \ldots, x_n]$ e o anel das séries de potências $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ têm dimensão n.

1.2 Módulos Cohen-Macaulay

Seja A um anel Noetheriano local com ideal maximal $\mathcal{M}$. Seja M um A-módulo finitamente gerado. O *anulador* de M, é o conjunto

$$Ann\,(M) = \{a \in A; am = 0 \text{ para todo } m \in M\}.$$

Mostra-se que $Ann\,(M)$ é um ideal de A.

A dimensão de M, denotada por dim M, é definida como a dimensão de Krull do anel $A/Ann\,(M)$, isto é,

$$\dim M = \dim\,(A/Ann(M)).$$

Note que quando $Ann(M) = \{0\}$, tem-se dim M = dim A.

Seja $(A, \mathcal{M})$ um anel Noetheriano local r-dimensional, isto é, dim $A = r$. Se os elementos $a_1, \ldots, a_r \in \mathcal{M}$, geram um ideal $\mathcal{M}$-primário, dizemos que $\{a_1, \ldots, a_r\}$ é um *sistema de parâmetros* de A.

Seja M um A-módulo finitamente gerado e $\dim M = s$. Suponha que os elementos $a_1, \ldots, a_s \in \mathcal{M}$ tenham a seguinte propriedade: o A-módulo

$$M/(a_1 M + \ldots + a_s M)$$

tem comprimento finito. Neste caso, dizemos que $a_1, \ldots, a_s$ é um *sistema de parâmetros* de M. Observe que estamos exigindo que o número de elementos num sistema de parâmetros de M seja exatamente igual a dimensão de M. Um ideal que é gerado por um sistema de parâmetros é chamado um *ideal parâmetro* de A.

Um elemento $a \in A$ é dito ser *M-regular* se $am = 0$ para todo $m \in M, m \neq 0$ implique $a = 0$.

Definição 1.2.1: Seja $(A, \mathcal{M})$ um anel Noetheriano local. Uma sequência $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{M}$ de elementos de A é chamada uma *M-sequência* se as seguintes condições forem satisfeitas:

i) a_1 é M-regular, a_2 é $(M/a_1 M)$-regular,..., a_n é $(M/(a_1, \ldots, a_{n-1})M)$-regular;

ii) $M/(a_1, \ldots, a_n)M \neq 0$.

Suponha que $M \neq 0$. Qualquer M-sequência pode ser extendida até uma M-sequência maximal. De fato, pois caso contrário, existiria uma sequência infinita $(a_1, a_2, \ldots)$ tendo a propriedade (i) da Definição 1.2.1 e uma sequência ascendente de ideais

$$(a_1) \subset (a_1, a_2) \subset \ldots,$$

o que contradiria o fato de A ser um anel Noetheriano. Prova-se ainda, que todas as M-seqüências maximais têm o mesmo número de elementos e, além disso, toda M-sequência pode ser extendida a um sistema de parâmetros ([21], pag. 61).

Definição 1.2.2: O número de elementos numa M-sequência maximal de M é chamada a *profundidade* de M, e é denotada por $depth_A M$. Um módulo M é chamado *módulo Cohen-Macaulay* se

$$\dim M = depth\, M.$$

Um anel A é chamado *anel Cohen-Macaulay*, se ele é um módulo Cohen-Macaulay quando visto como um módulo sobre si mesmo.

O próximo resultado, fornece uma caracterização muito útil de módulos Cohen-Macaulay .

Teorema 1.2.3: ([21], pag. 65) Se M é um módulo Cohen-Macaulay, todo sistema de parâmetros de M é uma M-sequência. Reciprocamente, se um sistema de parâmetros de M é uma M-sequência, então M é um módulo Cohen-Macaulay.

Finalmente, encerramos esta seção com um exemplo de um módulo Cohen-Macaulay.

Exemplo 1.2.4: Seja k um corpo e considere os anéis $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ e $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Então A e B são módulos de Cohen-Macaulay. Neste caso, $x_1, \ldots, x_n$, desempenham o papel de uma M-sequência regular em A.

1.3 Anéis e Módulos Graduados

Definição 1.3.1: Seja T um conjunto não-vazio. Um *monóide de graduação* é um par $(T, +)$, onde

$$+ : T \times T \longrightarrow T$$

é uma operação binária em T, satisfazendo os seguintes axiomas:

i) Para quaisquer a, b pertencentes a T, vale a comutatividade, isto é,

$$a + b = b + a;$$

ii) Para quaisquer a, b, c pertencentes a T, vale a associatividade, ou seja

$$a + (b + c) = (a + b) + c;$$

iii) Existe um elemento neutro em T, denotado por 0, tal que

$$a + 0 = a = 0 + a,$$

para qualquer $a \in T$;

iv) Se $a + b = a + c$, onde a, b, c estão em T, então $b = c$.

Observação 1.3.2: O elemento 0 do item (iii) é único.

Exemplo 1.3.3: 1) Qualquer grupo abeliano escrito aditivamente é um monóide de graduação;

2) O conjunto dos números naturais, com a adição usual, é um monóide de graduação;

3) O conjunto das n-uplas de números naturais, com a adição definida coordenada a coordenada, também é um monóide de graduação.

Sejam T um monóide de graduação e A um anel. Os elementos de A formam um grupo abeliano com relação à adição. Não faremos distinção entre o anel A e o grupo abeliano A.

Definição 1.3.4: Uma *T-graduação* em A é uma família $\{A\gamma\}_{\gamma\in T}$ de subgrupos do grupo A tal que:

i)$A = \oplus_{\gamma\in T} A_\gamma$;

ii) $A_\gamma A_\beta \subseteq A_{\gamma+\beta}$.

Neste caso dizemos que A é um anel *T-graduado* .

Observação 1.3.5: Sejam A um anel e T um monóide de graduação. Defina $A_0 = A$ e $A_\gamma = 0$ para todo $\gamma \in T - \{0\}$. Então $\{A_\gamma\}_{\gamma\in T}$ é uma T-graduação em A. Portanto, dados um monóide de graduação T e um anel A, sempre é possível definir uma T-graduação em A. Esta graduação é chamada de *T-graduação trivial*, ou de *graduação natural.*

Suponhamos que A seja um anel T-graduado. Pelo item (i) da Definição 1.3.4, cada elemento r de A, admite uma única representação da forma

$$r = \sum_{\gamma\in T} r_\gamma, \text{ onde } r_\gamma \in A_\gamma$$

e, além disso, esta soma contém somente um número finito de termos não nulos.

Os elementos de A_γ, são ditos ser *homogêneos*, ou *formas*, de grau γ e r_γ é chamado a *componente homogênea* de r de grau γ.

Observação 1.3.6: 1) Por convenção, o elemento zero é homogêneo de grau γ, para todo $\gamma \subset T$;

2) O elemento identidade de A é homogêneo de grau zero;

3) A_0 é um subanel de A e todos os seus elementos são homogêneos de grau zero.

Sejam $A = \oplus_{\gamma \in T} A_\gamma$ um anel T-graduado e M um A-módulo. Os elementos de M formam um grupo abeliano com relação à adição. Por abuso de notação, continuaremos a denotar este grupo por M.

Definição 1.3.7: Uma *T-graduação* em M, é uma família $\{M_\beta\}_{\beta \in T}$ de subgrupos do grupo abeliano M que satisfaz:

i) $M = \oplus_{\beta \in T} M_\beta$;

ii) $A_\gamma M_\beta \subseteq M_{\gamma+\beta}$, para quaisquer $\gamma, \beta \in T$.

Neste caso, dizemos que M é um módulo *T-graduado* sobre o anel T-graduado $A = \oplus_{\gamma \subset T} A_\gamma$.

Observação 1.3.8: Todo A-módulo M sempre admite uma graduação. De fato, se A é um anel com a graduação trivial, basta definirmos $M_0 = M$ e $M_\beta = 0$, para cada $\beta \in T - \{0\}$. Da mesma forma, dizemos que esta T-graduação é a graduação trivial ou a graduação natural de M.

Seja $M = \oplus_{\beta \in T} M_\beta$ um módulo T-graduado sobre o anel $A = \oplus_{\gamma \in T} A_\gamma$. Então cada elemento $m \in M$ admite uma única representação da forma

$$m = \sum_{\beta \in T} m_\beta \text{ onde } m_\beta \in M_\beta,$$

e a soma contém somente um número finito de termos não-nulos.

Observação 1.3.9: Segue do item (ii) da Definição 1.3.7, que M_β é um A_0-módulo para cada $\beta \in T$. Assim, $M = \oplus_{\beta \subset T} M_\beta$, é uma decomposição em soma direta de M como A_0-módulo.

Proposição 1.3.10: ([13], pag. 115) Seja K um submódulo do A-módulo T-graduado, $M = \oplus_\beta M_\beta$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $K = \oplus_{\beta \in I}(M_\beta \cap K)$;

ii) Se $m \in K$, então todas as componentes homogêneas de m pertencem a K;

iii) K pode ser gerado, como A-módulo, por elementos homogêneos.

Definição 1.3.11: Um submódulo K de um T-módulo graduado M que satisfaz qualquer uma das propriedades equivalentes da Proposição 1.3.10, é chamado de *submódulo homogêneo* de M. Os submódulos graduados de A, são chamados os ideais graduados de A.

Vamos citar várias propriedades dos ideais graduados. Suas demonstrações podem ser encontradas em ([34], pag. $152 - 153$).

Teorema 1.3.12: Sejam I e J dois ideais homogêneos de um anel graduado A. Então valem as seguintes propriedades.

1) $I + J$, IJ, $I \cap J$, $\sqrt{I}$, são ideais homogêneos de A.

2) Se I admite uma decomposição primária da forma $I = \cap_{j=1}^{n} I_j$, então ele também admite uma decomposição primária $I = \cap_{j=1}^{n} I_j^\star$, onde $I_j^\star$ são ideais primários homogêneos, para $j = 1, \ldots, n$.

Sejam $M = \oplus_{\beta \in T} M_\beta$ um módulo T-graduado sobre o anel A e K um submódulo homogêneo de M. Se definirmos

$$K_\beta = M_\beta \cap K,$$

então a família $\{K_\beta\}_{\beta \in T}$ é uma T-graduação em K. Esta graduação, é chamada a *T-graduação induzida* em K pela graduação de M.

Ainda, assumindo que K seja um submódulo homogêneo de M, considere

$$\phi : M \longrightarrow M/K,$$

onde ϕ é a *projeção canônica*. Agora como M e M/K podem ser considerados como A_0-módulos, e portanto, ϕ pode ser considerada como um A_0-homomorfismo de A_0-módulos. Definimos

$$\phi(M_\beta) = (M/K)_\beta,$$

para todo $\beta \in T$. Então $(M/K)_\beta$ é um A_0-submódulo de M/K e portanto, um subgrupo do grupo aditivo M/K. Além disso, $\{(M/K)_\beta\}$ é uma T-graduação em M/K, chamada de *T-graduação quociente.*

Exemplo 1.3.13: Sejam $T = \mathbb{N}$, $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. Então com a notação usual, família $\{(k[X])_r\}_{r\in\mathbb{N}}$, onde $(k[X])_r$ é o subgrupo de $k[X]$ formado pelos polinômios homogêneos de grau $r \in \mathbb{N}$, é uma $\mathbb{N}$-graduação de $A = k[X]$.

Seja I um ideal homogêneo de $k[X]$. Então a família $\{(k[X]/I)_r\}_{r\in\mathbb{N}}$, onde $(k[X]/I)_r = (k[X]_r + I)/I$ é uma $\mathbb{N}$-graduação para o anel $k[X]/I$, isto é,

$$k[X]/I = \oplus_{r\in\mathbb{N}}(k[X]/I)_r.$$

Definição 1.3.14: Sejam $M = \oplus_{\beta\in T}M_\beta$ e $N = \oplus_{\beta\in T}N_\beta$ dois A-módulos T-graduados. Suponha que

$$f : M \longrightarrow N$$

seja um homomorfismo de A-módulos. Se existe $\gamma \in T$ tal que

$$f(M_\beta) \subseteq N_{\beta+\gamma}$$

para todo $\beta \in T$, dizemos que f é um homomorfismo de grau γ entre A-módulos graduados. Se $\gamma = 0$, dizemos que f *preserva grau.*

Sejam I um ideal do anel A e M um A-módulo. Considere os seguintes grupos abelianos

$$G_I(A) = \oplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1}$$

e

$$G_I(M) = \oplus_{n=0}^{\infty} I^n M/I^{n-1}M.$$

É possível ([34], pag. 248) introduzir uma estrutura de anel em $G_I(A)$ que o torna um anel graduado onde os elementos de I^n/I^{n+1} são os elementos homogêneos de grau n. Como $G_I(A)$ é um anel graduado pode-se munir $G_I(M)$ com uma estrutura de $G_I(A)$-módulo graduado. Dizemos que $G_I(A)$ é o *anel graduado associado* de A com relação a I e que $G_I(M)$ é o *módulo graduado associado* a M com relação ao ideal I.

1.4 Singularidades

Sejam z um ponto arbitrário de $\mathbb{C}^n$ e $\mathcal{V}$ uma vizinhança aberta de z em $\mathbb{C}^n$. Considere o seguinte conjunto

$$S = \{h : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ onde } \mathcal{V} \subset \mathbb{C}^n \text{ é uma vizinhança aberta de } z\},$$

das aplicações contínuas definidas numa vizinhança aberta do ponto $z \in \mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}$.

Definição 1.4.1: Dizemos que duas funções contínuas $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$, são equivalentes no ponto z se:

i) existe uma vizinhança $\mathcal{W}$ de z tal que $\mathcal{W} \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$;

ii) $f_{|\mathcal{W}}(w) = g_{|\mathcal{W}}(w)$, para todo $w \in \mathcal{W}$.

Denotamos por $f \sim_z g$, o fato de f ser equivalente a g no ponto z. Convém observar, que $\sim_z$ é uma relação de equivalência no conjunto de todas as funções contínuas de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}$. Cada classe de equivalência é chamada de um *germe de aplicações contínuas*. Em particular, o conjunto de todas as funções contínuas que são equivalentes a f no ponto $z \in \mathbb{C}^n$, é chamado o *germe* da f, com relação ao ponto z, denotado por $[f]$.

Observação 1.4.2: 1) O item *ii*), nos diz que o germe de uma função f num ponto z de $\mathbb{C}^n$, depende do comportamento da função em toda uma vizinhança aberta $\mathcal{W}$ de z, não somente do valor da função no ponto z. Por exemplo, os polinômios z e z^2 tem o mesmo valor na origem do plano complexo, mas determinam germes bem distintos na origem. Para ver isto, basta considerar estes dois polinômios restritos, por exemplo, ao eixo real, pois neste eixo, $z \neq z^2$, para toda vizinhança aberta $\mathcal{U} - \{0\}$.

2) O conjunto de germes das funções contínuas pode ser munido de uma estrutura de anel como segue. Para quaisquer dois germes $[f]$ e $[g]$ em z, selecione representantes $f_{\mathcal{U}}$ e $g_{\mathcal{V}}$, respectivamente. Se $\mathcal{W}$ é uma vizinhança aberta de z tal que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, o germe da função $f_{\mathcal{U}}|W + g_{\mathcal{V}}|W$ é definido como a soma $[f] + [g]$ e o germe da função $(f_{\mathcal{U}}|\mathcal{W})(g_{\mathcal{V}}|\mathcal{W})$ é definido como sendo o produto $[f][g]$. Verifica-se que estas operações são bem definidas, no sentido de serem independentes da escolha dos representantes.

Se considerarmos apenas as funções analíticas complexas de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}$, o anel resultante será chamado o *anel dos germes analíticos*, e o germe de uma função analítica complexa é chamado de *germe analítico*. Os germes analíticos de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}$, no ponto z, serão denotados por $\mathcal{O}_{n,z}$. Se $z = 0$, então $\mathcal{O}_{n,0}$ será simplesmente denotado por $\mathcal{O}_n$.

As translações de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$ estabelecem um isomorfismo entre os anéis $\mathcal{O}_{n,z}$ e $\mathcal{O}_n$. Mais precisamente, a aplicação

$$\mathcal{O}_{n,a} \longrightarrow \mathcal{O}_n$$

definida por $f \longmapsto g$, onde $g(x) = f(x - a)$, é um isomorfismo. Estes isomorfismos preservam todas as propriedades analíticas de interesse e, portanto, basta estudar apenas as propriedades analíticas do anel $\mathcal{O}_n$.

Pode-se provar que o anel $\mathcal{O}_n$ goza das seguintes propriedades algébricas:

i) ([6], pag. 3) $\mathcal{O}_n$ é isomorfo ao anel $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ das séries de potências convergentes em n indeterminadas sobre $\mathbb{C}$, que convergem na origem;

ii) ([6], pag. 7) $\mathcal{O}_n$ é um anel Noetheriano.

Capítulo 2

Multiplicidades

2.1 Introdução

As idéias modernas da teoria da multiplicidade emergiram da aplicação da teoria das funções de Hilbert aos anéis locais. Neste capítulo, desenvolveremos a teoria da multiplicidade algébrica, também chamada de multiplicidade de Samuel. Uma definição indutiva será dada para o símbolo da multiplicidade geral para s elementos $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ de um anel A, relativamente a um A-módulo M de modo que o comprimento

$$L_A(M/(a_1, \ldots, a_r)M),$$

seja finito. O conceito de multiplicidade surge a partir da definição de comprimento. Embora a definição de comprimento não exige que o anel A seja comutativo, voltamos a enfatizar que por todo o nosso trabalho, a palavra *anel*, deverá ser sempre entendida como anel Noetheriano comutativo com unidade.

Os resultados deste capítulo, encontram-se basicamente nas seguintes referências: [13] e [32] e a definição de multiplicidade que daremos na segunda seção, difere ligeiramente da definição devida a [32] . Tratamentos diferentes do aqui apresentado, podem ser encontrados em [9], [10].

Segundo alguns autores, o artigo [20], marca o início do tratamento moderno da teoria da multiplicidade, como é conhecida atualmente.

2.2 Sistemas de Multiplicidades

Nesta seção, definiremos sistemas de multiplicidades e estudaremos algumas de suas principais propriedades, que utilizaremos no desenvolvimento deste capítulo. Os resultados aqui apresentados fazem parte do livro [13].

Sejam $a_1, \ldots, a_r$ elementos arbitrários do anel A. Escreveremos $I = (a_1, \ldots, a_r)$, para indicar o ideal de A, gerado por estes elementos. Por outro lado, escreveremos, IM, para denotar o submódulo $a_1M + \ldots + a_rM$ de M. Outra notação, que eventualmente podemos usar é a seguinte: $(a_1, \ldots, a_s)M$.

Definição 2.2.1: Sejam M um A-módulo e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elementos do anel A. Dizemos que $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ é um *sistema de multiplicidade* em M, se o A-módulo

$$M/(\gamma_1 M + \ldots + \gamma_r M)$$

tem comprimento finito. Quando $s = 0$, entende-se que M tem comprimento finito.

Sejam A um anel Noetheriano local, M um A-módulo finitamente gerado e $x_1, \ldots, x_r$, um sistema de parâmetros para M. Então, pela Definição 2.2.1, todo sistema de parâmetros para M também é um sistema de multiplicidade para M.

Exemplo 2.2.2: Sejam k um corpo e $x_1, \ldots, x_s$ um conjunto finito de indeterminadas sobre k. Então o conjunto $\{x_1, \ldots, x_s\}$ é um sistema de multiplicidade, tanto no anel dos polinômios $A = k[x_1, \ldots, x_s]$, quanto no anel das séries de potências formais $A' = k\{x_1, \ldots, x_s\}$. De fato, desde que

$$A/(x_1, \ldots, x_s)A \simeq k \text{ e } A'/(x_1, \ldots, x_s)A' \cong k$$

segue da Definição 2.2.1, que $x_1, \ldots, x_s$ é um sistema de multiplicidade tanto em $k[x_1, \ldots, x_s]$ quanto em $k\{x_1, \ldots, x_s\}$.

As seguintes propriedades sobre sistemas de multiplicidades serão úteis no estudo do símbolo da multiplicidade, que estudaremos na próxima seção. Para não nos estendermos muito, iremos apenas enunciá-las, omitindo suas demonstrações.

Na proposição abaixo, não é necessário que os comprimentos sejam finitos.

Proposição 2.2.3: ([13], pag. 296) Sejam M um A-módulo e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elementos do anel A. Então temos que

$$L_A(M/(\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)) \leq n_1 \cdots n_s L_A(M/(\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M)),$$

para quaisquer inteiros positivos $n_1, \ldots, n_s$.

A partir desta proposição, segue facilmente que se $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ $(s \geq 0)$ é um sistema de multiplicidade em M, então $\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}$ também é um sistema de multiplicidade em M, para quaisquer inteiros positivos $n_1, \ldots, n_s$.

A proposição abaixo, apesar do seu caracter elementar, desempenhará um papel importante em várias demonstrações.

Proposição 2.2.4: ([13], pag. 297) Sejam M um A-módulo e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Então temos as seguintes propriedades:

i) Os elementos $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, permanecem um sistema de multiplicidade em M mesmo se alterarmos a sua ordem. Além disso, eles continuarão a formar um sistema de multiplicidade em M se excluirmos qualquer γ_i, para o qual tenhamos $\gamma_i M = 0$.

ii) Para quaisquer inteiros positivos $n_1, \ldots, n_s$ os elementos $\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}$ também formam um sistema de multiplicidade em M.

iii) Se M' é um módulo quociente de M, então $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ também é um sistema de multiplicidade em M'.

iv) Seja $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M e J um ideal do anel A tal que $JM = 0$. Seja $\bar{A} = A/J$. Denote por $\bar{\gamma}_i$ a imagem de γ_i em $\bar{A}$. Então $\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_s$ é um sistema de multiplicidade em M, quando M for considerado como um $\bar{A}$-módulo.

A próxima proposição, nos fornece uma condição necessária e suficiente, para que dados um A-módulo M e um conjunto de elementos de A, decidir se estes são ou não um sistema de multiplicidade em M.

Proposição 2.2.5: ([13], pag. 296) Sejam

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de A-módulos Noetherianos e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elementos do anel A. Então $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ é um sistema de multiplicidade em M se, e somente se, é um sistema de multiplicidade nos A-módulos M' e M''.

Sejam K um submódulo do A-módulo M e U um subconjunto qualquer do anel A. Então o conjunto

$$(K :_M U) = \{x \in M | \, \gamma x \in K \text{ para todo } \gamma \in U\},$$

é um submódulo de M.

Proposição 2.2.6: ([13], pag. 291 – 292) Sejam γ e γ' elementos do anel A e $K \subset L$ submódulos do A-módulo M. Então as seguintes propriedades são verdadeiras:

i) $((K :_M \gamma) :_M \gamma') = (K :_M \gamma\gamma')$;

ii) $\gamma M \cap K = \gamma(K :_M \gamma)$;

iii) $M/(K + \gamma M) \cong (M/K)/\gamma(M/K)$;

iv) $(L :_M \gamma)/K = ((L/K) :_{M/K} \gamma)$;

v) $(K :_M \gamma)/K = (0 :_{M/K} \gamma)$.

Para definirmos o símbolo da multiplicidade, precisaremos de um resultado bem conhecido em Álgebra Comutativa, mas por conveniência vamos apenas enunciá-lo.

Proposição 2.2.7: ([13], pag. 175) Seja

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de A-módulos. Então M satisfaz a condição maximal para seus submódulos se, e somente se, M' e M'' também satisfazem a condição maximal para seus submódulos.

2.3 O Símbolo da Multiplicidade

Sejam M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elementos do anel A que formam um sistema de multiplicidade em M. Vamos definir a multiplicidade de $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ em M, isto é, a multiplicidade do ideal I, gerado por este sistema de multiplicidade, o qual iremos denotar pelo símbolo

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M).$$

Algumas vezes, iremos denotar o símbolo $e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M)$, simplesmente por $e_A(I; M)$, para simplificar a notação, ou ainda, por razões tipográficas. Se $M = A$, então escreveremos $e_A(I)$ ou $e(I)$. O símbolo $e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M)$, vai ser um número inteiro, não-negativo e, para defini-lo vamos usar indução sobre s, o número de elementos do sistema de multiplicidade.

Sejam M um A-módulo, I o ideal do anel A, gerado pelo sistema de multiplicidade $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, isto é, $I = (\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ e $L_A(.)$ a função comprimento, definida na classe de todos os A-módulos de comprimento finito.

Se $s = 0$, então o conjunto vazio é, por convenção, um sistema de multiplicidade em M e, portanto, $L_A(M)$ é finito. Podemos então definir $e_A(.)$ pela igualdade

$$e_A(.|M) = L_R(M), \tag{2.1}$$

ou seja, quando $s = 0$, o símbolo da multiplicidade está bem definido.

Suponha agora, que $s \geq 1$ e que o símbolo da multiplicidade já foi definido para A-módulos Noetherianos e sistemas de multiplicidades em M com no máximo $s - 1$ elementos.

Seja $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M, consistindo de exatamente s elementos distintos. Considere as seguintes seqüências exatas de A-módulos Noetherianos.

$$0 \longrightarrow \gamma_1 M \dashrightarrow M \longrightarrow M/\gamma_1 M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow (0 :_M \gamma_1) \longrightarrow M \longrightarrow M/(0 :_M \gamma_1) \dashrightarrow 0.$$

Pela Proposição 2.2.7, $M/\gamma_1 M$ e $(0 :_M \gamma_1)$ são A-módulos Noetherianos. Então pela Proposição 2.2.5, o conjunto $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ é um sistema de multiplicidade tanto em $M/\gamma_1 M$ quanto em $(0 :_M \gamma_1)$. Mas γ_1 anula os A-módulos $M/\gamma_1 M$ e $(0 :_M \gamma_1)$. Daí, tomando $\bar{M} = M/\gamma_1 M$ e $\bar{N} = (0 :_M \gamma_1)$ temos as seguintes igualdades

$$\bar{M}/\{\gamma_1\bar{M} + \ldots + \gamma_s\bar{M}\} = \bar{M}/\{\gamma_2\bar{M} + \ldots + \gamma_s\bar{M}\},$$
$$N/(\gamma_1 N + \ldots + \gamma_s N) = N/(\gamma_2\bar{N} + \ldots + \gamma_s\bar{N}).$$

Como

$$L_A(\bar{M}/\{\gamma_2\bar{M} + \ldots + \gamma_s\bar{M}\}) = L_A(\bar{M}/\{\gamma_1\bar{M} + \ldots + \gamma_s\bar{M}\}) < \infty$$

e

$$L_A(\bar{N}/(\gamma_2\bar{N} + \ldots + \gamma_s\bar{N})) = L_A(\bar{N}/(\gamma_1\bar{N} + \ldots + \gamma_s\bar{N})) < \infty,$$

segue pela Definição 2.2.1, que o conjunto $\gamma_2, \ldots, \gamma_s$, é um sistema de multiplicidade tanto em $M/\gamma_1 M$ quanto em $(0 :_M \gamma_1)$. Então, pela hipótese de indução, os símbolos $e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | M/\gamma_1 M)$ e $e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | (0 :_M \gamma_1))$ estão bem definidos.

Definição 2.3.1: Sejam M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elementos do anel A tais que $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ é um sistema de multiplicidade em M. Definimos a *multiplicidade* do ideal I, gerado por $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ em M, que denotaremos por $e(I; M) = e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M)$, pela equação

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M) = e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | M/\gamma_1 M) - e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | (0 :_M \gamma_1)). \tag{2.2}$$

Observação 2.3.2: 1) Apesar da Definição 2.3.1, não parecer muito natural à primeira vista, ela é motivada pelo teorema 3.3 de [2].

2) O cálculo da multiplicidade de um ideal I gerado por um sistema de multiplicidade $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ é, em geral, muito complicado. Para se ter uma idéia disto, note que para calcularmos $e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M)$ devemos saber inicialmente, os valores de $e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | M/\gamma_1 M)$ e $e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | (0 :_M \gamma_1))$. Agora pela Definição 2.3.1, temos

$$\begin{aligned} e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | M/\gamma_1 M) \;=\; & e_A(\gamma_3, \ldots, \gamma_s | (M/\gamma_1 M)/\gamma_2(M/\gamma_1 M)) - \\ & e_A(\gamma_3, \ldots, \gamma_s | (0 :_{(M/\gamma_1 M)} \gamma_2) \end{aligned}$$

e

$$e_A(\gamma_2,\ldots,\gamma_s|(0:_M\gamma_1)) = e_A(\gamma_3,\ldots,\gamma_s|(0:_M\gamma_1)/\gamma_2((0:_M\gamma_1)))- e_A(\gamma_3,\ldots,\gamma_s|(0:_{(0:_M\gamma_1)}\gamma_2)).$$

Esperamos com isto, que o leitor tenha percebido as dificuldades que podem surgir numa situação muito geral.

Observação 2.3.3: Se continuássemos com o processo acima, teríamos obtido a seguinte igualdade.

$$\begin{aligned} e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M) &= e_A(.|M/(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)M) - e_A(.|(0:M/(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)M)) \\ &- L_A(M/(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)M) - L_A((0:M/(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)M)). \end{aligned}$$

Isto mostra, que o símbolo da multiplicidade realmente está relacionado com o comprimento, como era de se esperar, uma vez que ele foi definido a partir do comprimento. Portanto, é natural questionar que propriedades o símbolo da multiplicidade e o comprimento possuem em comum. Discutiremos esta questão com maiores detalhes no decorrer deste capítulo.

Observação 2.3.4: ([13], pag. 331) Sejam $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ e $\gamma'_1,\ldots,\gamma'_s$ elementos de A tais que $(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)=(\gamma'_1,\ldots,\gamma'_s)$. Então para todo A-módulo Noetheriano M que admite $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ e $\gamma'_1,\ldots,\gamma'_s$ como sistemas de multiplicidades tem-se que

$$e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|\,M) = e_A(\gamma'_1,\ldots,\gamma'_s|\,M).$$

As seguintes propriedades do símbolo da multiplicidade, decorrem imediatamente da Definição 2.3.1.

i) $e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M)$ é um numero inteiro;

ii) $e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M)=0$ se $M=\{0\}$;

iii) Se $M\simeq M'$ então

$$e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M) = e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M'),$$

em outras palavras, o símbolo da multiplicidade é invariante por isomorfismos, isto é, quando M é substituído por um módulo M' isomorfo a M, os símbolos da multiplicidade $e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M)$ e $e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M')$, têm o mesmo valor.

Suponha que M é um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ é um sistema de multiplicidade em M. Suponha que J é um ideal de A tal que $JM = 0$. Seja $\bar{A} = A/J$ e $\bar{\gamma}_i$ a imagem natural de γ_i em $\bar{A}$. Pela Proposição 2.2.4 (iv), $\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_s$ também é um sistema de multiplicidade em M.

iv) (Ver [13] pag. 300) Com a notação acima

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = e_{\bar{A}}(\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_s|M).$$

Antes de continuarmos o nosso estudo sobre o símbolo da multiplicidade, gostaríamos de dar alguns exemplos, que embora simples, ilustram a teoria e motivam novas perguntas. Em algumas ocasiões, por razões tipográficas, omitiremos o índice do símbolo da multiplicidade $e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M)$, escrevendo simplesmente $e(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M)$, desde que isto não cause confusão.

Exemplo 2.3.5: Seja $A = k\{x, y\}$ o anel das séries de potências sobre o corpo k, nas indeterminadas x e y. Considere o ideal $I = (x, y^2)$. Inicialmente note que

$$k\{x, y\}/(x, y^2) \simeq k\{y\}/(y^2).$$

Segue deste isomorfismo que

$$\begin{aligned} L(k\{x, y\}/(x, y^2)) &= L(k\{y\}/(y^2)) \\ &\leq 2L(k\{y\}/(y)) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Na verdade, tem-se $L(k\{x, y\}/(x, y^2)) = 2$. Portanto, $\{x, y^2\}$ é um sistema de multiplicidade em $A = k\{x, y\}$.

Antes de calcularmos a multiplicidade do ideal $I = (x, y^2)$, observemos que y não é um divisor do zero em $A = k\{x, y\}$, e por isso, $(0 :_{(k\{x,y\})} y) = 0$. Da mesma forma, $(0 :_{(k\{y\}/(y^2))} x) = 0$. Agora pela Definição 2.3.1, temos

$$\begin{aligned} e(x, y^2|k\{x, y\}) &= e(y^2| k\{x, y\}/(x)) - e(y^2|(0 :_{(k\{x,y\})} x)) \\ &= e(y^2| k\{y\}) \\ &= e(.| k\{y\}/(y^2)) \quad c(0 :_{k\{y\}} y^2) \\ &= L(k\{y\}/(y^2)) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Em particular, $e(x, y|\, k\{x, y\}) = 1$. De fato, poderíamos ainda, ter mostrado que, $e(x, y^r|\, k\{x, y\}) = r$, para qualquer inteiro $r > 0$.

■

Uma questão natural que surge a partir deste exemplo é a seguinte: será que $e(x, y^2|\, k\{x, y\}) = e(y^2, x|\, k\{x, y\})$? A resposta é afirmativa. Na verdade, provaremos no final desta seção, que se $i_1, \ldots, i_s$ é uma permutação qualquer do conjunto $\{1, \ldots, s\}$, então $e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = e_A(\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_s}|M)$.

Apesar do símbolo da multiplicidade ser um número inteiro, ainda não temos condições de provarmos que ele é um número inteiro não-negativo. A demonstração deste fato importante, será feita mais adiante, quando tivermos obtido outras propriedades interessantes sobre ele.

Uma propriedade importante do símbolo da multiplicidade, que demonstraremos a seguir, é a propriedade aditiva. Esta propriedade é crucial para o desenvolvimento da teoria da multiplicidade, como veremos na sequência deste capítulo. O seguinte lema será usado na demonstração desta importante propriedade.

Lema 2.3.6: ([13], pag. 301) Sejam

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

uma sequência exata de A-módulos Noetherianos e $\gamma \in A$. Então podemos construir a seguinte sequência exata de A-módulos Noetherianos

$$0 \to (0 :_{M'} \gamma) \to (0 :_M \gamma) \to (0 :_{M''} \gamma) \to M'/\gamma M' \to M/\gamma M \to M''/\gamma M'' \to 0.$$

Teorema 2.3.7: Sejam $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elementos do anel A. Suponha que

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

seja uma sequência exata de A-módulos Noetherianos e, além disso, que $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ seja um sistema de multiplicidade em cada termo desta sequência. Então

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M') + e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M''). \tag{2.3}$$

É conveniente provar o Teorema 2.3.7, junto com o seu corolário.

Corolário 2.3.8: Seja

$$0 \longrightarrow M_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de A-módulos Noetherianos e suponha que $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ seja um sistema de multiplicidade em cada termo desta sequência. Então

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^i e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M_i) = 0.$$

Demonstração: Quando $s = 0$, a aditividade da função comprimento garante que o Teorema 2.3.7 e o Corolário 2.3.8 sejam verdadeiros.

Vamos supor que $s \geq 1$ e que tanto o teorema quanto o seu corolário sejam válidos para sistemas de multiplicidades contendo apenas $s-1$ elementos. Considere então, $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M', M e em M'', contendo exatamente s elementos distintos.

Então pelo Lema 2.3.6, temos a seguinte sequência exata de A-módulos Noetherianos

$$0 \to (0 :_{M'} \gamma_1) \to (0 :_M \gamma_1) \to (0 :_{M''} \gamma_1) \to M'/\gamma_1 M' \to M/\gamma_1 M \to M''/\gamma_1 M'' \to 0, \tag{2.4}$$

onde γ_1, é um elemento do sistema de multiplicidade $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ em M.

Como nesta sequência exata, cada termo é um A-módulo Noetheriano, segue pela Proposição 2.2.4 (ii), que $\gamma_2, \ldots, \gamma_s$ é um sistema de multiplicidade para cada um dos termos da sequência exata (2.4). Consequentemente estamos em posição de aplicar o Corolário 2.3.8 em (2.4). Daí temos

$$\begin{aligned} e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | M/\gamma_1 M) - e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | (0 :_M \gamma_1)) = \; & e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | M'/\gamma_1 M') - \\ & e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | (0 :_{M'} \gamma_1)) + \\ & e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | M''/\gamma_1 M'') - \\ & e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | (0 :_{M''} \gamma_1)). \end{aligned}$$

Mas isto pode ser escrito, pela Definição 2.3.1, como

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M)) = e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M') + e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M''),$$

Assim o teorema está provado para um sistema de multiplicidade contendo s elementos. ■

Para provar o corolário, basta usar indução no número de elementos da sequência exata.

Observação 2.3.9: Na Proposição 2.3.19, provaremos que se $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ é um sistema de multiplicidade num A-módulo Noetheriano M e para algum $i \in \{1, \ldots, s\}$, tivermos $\gamma_i^m M = 0$ para algum inteiro positivo m, então

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M) = 0.$$

Exemplo 2.3.10: Considere o ideal (x, y) do anel $\mathbb{C}\{x, y\}$. Então (x, y) pode ser visto como um submódulo de $\mathbb{C}\{x, y\}$. Assim temos a seguinte sequência exata de $\mathbb{C}\{x, y\}$-módulos Noetherianos

$$0 \longrightarrow (x, y) \longrightarrow \mathbb{C}\{x, y\} \longrightarrow \mathbb{C}\{x, y\}/(x, y) \longrightarrow 0.$$

Agora, o conjunto $\{x, y^2\}$ é um sistema de multiplicidade no módulo $\mathbb{C}\{x, y\}$. Então pela Proposição 2.2.5, $\{x, y^2\}$ também é um sistema de multiplicidade tanto em $\{x, y\}$ quanto $\mathbb{C}\{x, y\}/(x, y)$. Mas, pela Observação 2.3.9, temos que $x\mathbb{C}\{x, y\}/(x, y)) = 0$, ou seja, $e(x, y^2 | \mathbb{C}\{x, y\}/(x, y)) = 0$. Mas pelo Exemplo 2.3.5, $e(x, y^2 | \mathbb{C}\{x, y\}) = 2$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} e(x, y^2 | (x, y)) &= e(y^2 | (x, y)/(x)) - e(y^2 | (0 :_{(x,y)} x)) \\ &= e(. | (y)/(y^2)) - e(. | (0 :_{(y)} y^2)) \\ &= L((y)/(y^2)) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$e(x, y^2 | \mathbb{C}\{x, y\}) = e(x, y^2 | (x, y)) + e(x, y^2 | \mathbb{C}\{x, y\}/(x, y)).$$

Veremos mais adiante, uma fórmula que possibilita o cálculo imediato da multiplicidade de um ideal I, gerado por um sistema de multiplicidade da forma $\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}$, onde $n_1, \ldots, n_s$, são inteiros positivos.

Corolário 2.3.11: Sejam M_1, M_2 dois submódulos de um A-módulo Noetheriano M e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade para os A-módulos M_1 e M_2. Então $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ é um sistema de multiplicidade para os A-módulos Noetherianos $M_1 + M_2$ e $M_1 \cap M_2$. Além disso, se I é o ideal de A gerado por $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, temos a seguinte igualdade:

$$e_A(I|\, M_1 + M_2) + e_A(I|\, M_1 \cap M_2) = e_A(I|\, M_1) + e_A(I|\, M_2). \tag{2.5}$$

Demonstração: Inicialmente, observe que $M_1 \cap M_2$ é um submódulo de M. Desde que $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ é um sistema de multiplicidade para M_1 e M_2, segue das seqüências exatas

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 + M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M_1 \cap M_2 \longrightarrow M \longrightarrow M_2/M_1 \cap M_2,$$

e da Proposição 2.2.5, que $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ também é um sistema de multiplicidade, tanto para $M_1 + M_2$ quanto para $M_1 \cap M_2$. Isto mostra que todos os símbolos da multiplicidade em (2.5), estão bem definidos.

Considere agora, a seguinte sequência exata de A-módulos Noetherianos

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 + M_2 \longrightarrow (M_1 + M_2)/M_1 \longrightarrow 0.$$

Então do isomorfismo de A-módulos

$$(M_1 + M_2)/M_2 \cong M_2/(M_1 + M_2),$$

temos que a sequência

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 + M_2 \longrightarrow M_2/(M_1 + M_2) \longrightarrow 0, \tag{2.6}$$

é uma sequência exata de A-módulos Noetherianos. Logo aplicando o Teorema 2.3.7 na sequência exata (2.6) obtemos a igualdade

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M_1 + M_2) = e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M_1) + e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M_2/(M_1 + M_2)). \tag{2.7}$$

Usando o mesmo raciocínio com a seguinte sequência exata baixo

$$0 \longrightarrow M_1 \cap M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_2/M_1 \cap M_2 \longrightarrow 0$$

obtemos a seguinte igualdade numérica

$$e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M_2) = e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M_1 \cap M_2) + e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M_2/(M_1+M_2)) \quad (2.8)$$

Pondo em evidência $e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M_2/(M_1+M_2))$ em (2.8), e em seguida substituindo em (2.7), obtemos a igualdade desejada. ■

Teorema 2.3.12: ([13], pag. 303) Sejam M_1 e M_2 submódulos de um A-módulo M (M não necessariamente Noetheriano) tais que M/M_1 e M/M_2 sejam Noetherianos. Se $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ é um sistema de multiplicidade em M/M_1 e em M/M_2, então é um sistema de multiplicidade tanto em $M/M_1 \cap M_2$ quanto em $M/(M_1+M_2)$. Além disso, definindo $I=(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)$ tem-se que

$$e_A(I|M/M_1\cap M_2) + e_A(I|M/(M_1+M_2)) = e_A(I|M/M_1) + e_A(I|M/M_2).$$

Já observamos anteriormente, que se M e M' são dois módulos isomórfos, então $e(I|M) = e(I|M')$. Por isso, é interessante e útil, ter algum critério que possamos utilizar no caso de dados dois módulos M e M', dizer se eles são ou não isomorfos. O próximo teorema, classicamente conhecido como o *Primeiro Teorema do Isomorfismo*, é uma ferramenta muito valiosa para responder a esta questão, e por isso, iremos enunciá-lo, mesmo que sem demonstração.

Teorema 2.3.13: ([13], pag. 16) Sejam $f: M \to N$ um epimorfismo de A-módulos, L um submódulo de N e $f^{-1}(L)$ um submódulo de M. Então os módulos

$$M/f^{-1}(L) \ \text{e} \ N/L$$

são isomorfos. Em particular, $M/Ker(f) \simeq N$. Se, além disso, f for injetora, isto é, $Ker(f)=\{0\}$, então $M \simeq N$.

No que segue, vamos mostrar que o símbolo da multiplicidade é invariante por permutações, isto é, o valor de $e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M)$ não depende da ordem em que cada um dos γ_i, $i=1,\ldots,s$ aparecem no símbolo da multiplicidade. Como a prova deste

resultado envolve vários cálculos técnicos, é mais conveniente dividirmos a sua demonstração, o que facilitará a sua compreensão. Antes de iniciarmos a demonstração, vamos fazer algumas observações quanto a notação. O próximo lema, pode ser considerado como o primeiro passo indutivo.

Observação 2.3.14: Sejam K um A-submódulo Noetheriano de M e $\gamma_3, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidades em K. Para representar esta afirmação, usaremos a seguinte notação.

$$(K) = e_A(\gamma_3, \ldots, \gamma_s | M).$$

Observação 2.3.15: Suponha que $L \subset N$ são submódulos de um A-módulo Noetheriano M e que $\gamma_3, \ldots, \gamma_s$ seja um sistema de multiplicidade em M/L. Desde que as inclusões

$$N/L \subseteq M/L,$$

são sempre verdadeiras, a seguinte sequência de A-módulos Noetherianos

$$0 \longrightarrow N/L \longrightarrow M/L \longrightarrow (M/L)/(N/L) \longrightarrow 0$$

é exata. Do isomorfismo

$$(M/L)/(N/L) \simeq M/N,$$

segue que a seguinte sequência

$$0 \longrightarrow N/L \longrightarrow M/L \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

também é exata. Então, pela Proposição 2.2.5, $\gamma_3, \ldots, \gamma_s$ também é um sistema de multiplicidade tanto em N/L quanto em M/N. Além disso, pelo Teorema 2.3.7, temos

$$(N/L) = (N/M) + (M/L). \tag{2.9}$$

Lema 2.3.16: Sejam M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ $(s \geq 2)$ um sistema de multiplicidade em M. Então

$$e_A(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s | M) = e_A(\gamma_2, \gamma_1, \ldots, \gamma_s | M).$$

Demonstração: Sejam $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Então pela Definição 2.3.1, tem-se que

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M) = e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | M/\gamma_1 M) - e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | (0 :_M \gamma_1)).$$

Mas, usando novamente a Definição 2.3.1, nos módulos $M/\gamma_1 M$ e $(0 :_{M/\gamma_1 M} \gamma_2)$, temos as seguintes relações

$$\begin{aligned} e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | M/\gamma_1 M) &= +e_A(\gamma_3, \ldots, \gamma_s | (M/\gamma_1 M)/\gamma_1(M/\gamma_1 M)) \\ & \quad e_A(\gamma_3, \ldots, \gamma_s | (0 :_{M/\gamma_1 M} \gamma_2)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | (0 :_M \gamma_1)) &= -e_A(\gamma_3, \ldots, \gamma_s | (0 :_M \gamma_1)/\gamma_2(0 :_M \gamma_1)) + \\ & \quad e_A(\gamma_3, \ldots, \gamma_s | (0 :_{(0:_M \gamma_1)} \gamma_2)). \end{aligned}$$

Para simplificar o nosso trabalho, vamos fazer uso da seguinte notação

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M) = (1) - (2) - (3) + (4),$$

onde

$$\begin{aligned} (1) &= ((M/\gamma_1 M)/\gamma_2(M/\gamma_1 M)) \\ (2) &= ((0 :_{M/\gamma_1 M} \gamma_2)) \\ (3) &= ((0 :_M \gamma_1)/\gamma_2(0 :_M \gamma_1)) \\ (4) &= ((0 :_{(0:_M \gamma_1)} \gamma_2)). \end{aligned}$$

Agora, pela Proposição 2.2.6 (iii), temos o seguinte isomorfismo de A-módulos

$$M/(\gamma_1 M + \gamma_2 M) \cong (M/\gamma_1 M)/(M/\gamma_2 M).$$

Assim podemos reescrever (1) como

$$(1) = ((M/\gamma_1 M))/(\gamma_2 M/\gamma_1 M))) - (M/(\gamma_1 M + \gamma_2 M)).$$

Além disso, a igualdade abaixo

$$(0 :_{(0:_M \gamma_1)} \gamma_2) = (0 :_M \gamma_1) \cap (0 :_M \gamma_2),$$

nos permite reescrever (4) de uma maneira mais conveniente como

$$(4) = ((0 :_{(0:_M \gamma_1)} \gamma_2)) = ((0 :_M \gamma_1) \cap (0 :_M \gamma_2)).$$

Vemos com isto, que tanto (1) quanto (4) envolvem γ_1 e γ_2 simetricamente, ou seja, não importa como eles aparecem na expressão da multiplicidade, numericamente elas são iguais. Falta então provar que o mesmo acontece com a soma (2) + (3).

Pela Proposição 2.2.6 (v), temos

$$(0 :_{M/\gamma_1 M} \gamma_2) = (\gamma_1 M :_M \gamma_2)/\gamma_1 M,$$

e pelas inclusões abaixo

$$\gamma_1 M \subseteq \gamma_1 M + (0 :_M \gamma_2) \subseteq (\gamma_1 M :_M \gamma_2),$$

temos por (2.9) que

$$\begin{aligned}
(2) &= ((0 :_{M/\gamma_1} \gamma_2)) \\
&= (\gamma_1 M :_M \gamma_2)/\gamma_1 M) \\
&= ((\gamma_1 M :_M \gamma_2))/(\gamma_1 M + (0 :_M \gamma_2))) + (\gamma_1 M + (0 :_M \gamma_2)/\gamma_1 M) \\
&= ((\gamma_1 M :_M \gamma_2))/(\gamma_1 M + (0 :_M \gamma_2))) + ((0 :_M \gamma_2)/(\gamma_1 M \cap (0 :_M \gamma_2))).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

pois pelo Teorema 2.3.13,

$$\gamma_1 M + (0 :_M \gamma_2)/\gamma_1 M \simeq (0 :_M \gamma_2)/(\gamma_1 M \cap (0 :_M \gamma_2)).$$

Mas novamente pela Proposição 2.2.5 (ii), (i), respectivamente, temos que

$$(0 :_M \gamma_2)/(\gamma_1 M \cap (0 :_M \gamma_2)) = \gamma_1 (0 :_M \gamma_1 \gamma_2).$$

Assim a equação (2.10) torna-se

$$(2) = (5) + (6),$$

onde

$$(5) = ((0 :_M \gamma_2)/\gamma_1 (0 :_M \gamma_1 \gamma_2)),$$

e

$$(6) = ((\gamma_1 M :_M \gamma_2)/\gamma_1 M + (0 :_M \gamma_2)).$$

Logo temos a igualdade

$$(1) - (2) - (3) + (4) = (1) + (4) - (5) - (6) - (3).$$

Agora a multiplicação por γ_2 fornece um epimorfismo de A-módulos

$$(\gamma_1 M :_M \gamma_2) \longrightarrow \gamma_2(\gamma_1 M :_M \gamma_2).$$

Mas pela Proposição 2.2.5 (ii), temos $\gamma_2(\gamma_1 M :_M \gamma_2) = \gamma_1 M \cap \gamma_2 M$. Assim temos o epimorfismo de A-módulos

$$(\gamma_1 M :_M \gamma_2) \longrightarrow \gamma_1 M \cap \gamma_2 M,$$

cujo núcleo é exatamente $(0 :_M \gamma_2)$ e está contido em $\gamma_1 M + (0 :_M \gamma_2)$ que é levado por esse epimorfismo em $\gamma_1\gamma_2 M$. Segue, do Teorema 2.3.13, o seguinte isomorfismo

$$(\gamma_1 M :_M \gamma_2)/(\gamma_1 M + (0 :_M \gamma_2)) \cong (\gamma_1 M \cap \gamma_2 M)/\gamma_1\gamma_2 M).$$

Assim sendo,

$$(6) = ((\gamma_1 M \cap \gamma_2 M)/\gamma_1\gamma_2 M),$$

que também é simétrico em relação a γ_1 e a γ_2.

Resta examinar a soma (3) + (5). As seguintes inclusões são triviais

$$\gamma_2(0 :_M \gamma_1) \subseteq \gamma_2(0_M\gamma_1\gamma_2) \subseteq (0 :_M \gamma_1).$$

Mas pela pela equação (2.9), temos

$$(3) + (5) = (7) + \{8\},$$

onde

$$(7) = (\gamma_2(0 :_M \gamma_1\gamma_2)/\gamma_2(0 :_M \gamma_1))$$

e

$$\{8\} = ((0 :_M \gamma_1)/\gamma_2(0_M\gamma_1\gamma_2)) + ((0 :_M \gamma_2)/\gamma_1(0_M\gamma_1\gamma_2)).$$

A última dessas igualdades tem a propriedade de simetria desejada. Novamente, a multiplicação por γ_2 produz um epimorfismo

$$(0 :_M \gamma_1\gamma_2) \longrightarrow \gamma_2(0 :_M \gamma_1\gamma_2)$$

cuja imagem inversa de $\gamma_2(0 :_M \gamma_1)$ por este epimorfismo é exatamente $(0 :_M \gamma_1) + (0 :_M \gamma_2)$. Assim, temos pelo Teorema 2.3.13, o seguinte isomorfismo

$$(0 :_M \gamma_1\gamma_2)/(0 :_M \gamma_1) + (0 :_M \gamma_2) \cong \gamma_2(0 :_M \gamma_1\gamma_2)/\gamma_2(0 :_M \gamma_1),$$

e portanto,

$$(7) = ((0 :_M \gamma_1\gamma_2)/(0 :_M \gamma_1) + (0 :_M \gamma_2))$$

que é outra expressão simétrica em relação a γ_1 e a γ_1.

Como

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = (1) + (4) - (6) - (7) - \{8\}$$

e cada um dos termos do lado direito tem a propriedade de permanecer inalterado quando γ_1 e γ_2 são permutados, a proposição está provada. ■

Proposição 2.3.17: Sejam M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Se $\{i_1, \ldots, i_s\}$ é uma permutação do conjunto $\{1, \ldots, s\}$, então

$$e_A(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s|M) = e_A(\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots, \gamma_{i_s}|M).$$

Demonstração: É suficiente mostrarmos que

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_s|M),$$

permanece inalterado se trocarmos γ_m por γ_{m+1}.

Agora por meio de $m - 1$ aplicações sucessivas da Definição 2.3.1, obtemos uma expressão para $e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M)$ como uma soma finita da forma

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = \sum_v \epsilon_v e_A(\gamma_m, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_s|M_v),$$

onde cada ϵ_v é igual a ± 1 e cada M_v é um A-módulo Noetheriano que admite $\gamma_m, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_s$ como um sistema de multiplicidade. Além disso, os números ϵ_v e os módulos M_v são determinados unicamente por $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}$, isto significa dizer que eles independem de $\gamma_m, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_s$. Então pelo Lema 2.3.16, se trocarmos γ_m por γ_{m+1} obteremos

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_s|M) = \sum_v \epsilon_v e_A(\gamma_m, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_s|M_v),$$

onde ϵ_v e M_v têm o mesmo significado como antes. Mas novamente pelo Lema 2.3.16

$$e_A(\gamma_m, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_s|M_v) = e_A(\gamma_{m+1}, \gamma_m, \ldots, \gamma_s|M_v).$$

Segue disto que

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_s; M) = \sum_v \epsilon_v e_A(\gamma_m, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_s|M_v)$$

e assim a proposição está provada. ■

Observação 2.3.18: 1) No Exemplo 2.3.5 havíamos questionado se os símbolos da multiplicidade $e(x, y^2|k[x, y])$ e $(y^2, x|k[x, y]$, eram numericamente iguais ou não. Após a Proposição 2.3.17, podemos afirmar com certeza que eles são iguais.

2) A Proposição 2.3.17, também é conhecida como *"Propriedade da Mudança"*, e desempenhará um papel importante em algumas demonstrações no decorrer desta seção. A próxima proposição é uma aplicação imediata dela.

Proposição 2.3.19: Sejam M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Suponha que para algum valor particular de $i \in \{1, \ldots, s\}$ tenhamos $\gamma_i^m M = 0$, onde m é um inteiro positivo. Então

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = 0.$$

Demonstração: A Proposição 2.3.17 mostra que podemos supor que $i = 1$. Tendo feito esta hipótese adicional, provaremos a proposição por indução sobre m.

Primeiro suponha que $m = 1$. Então $\gamma_1 M = 0$, e portanto, $M/\gamma_1 M \cong M$ e $(0 :_M \gamma_1) = M$. Assim, pela Definição 2.3.1, temos

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s; M) = e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s|M) - e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s|M) = 0.$$

Agora vamos supor que $m > 1$, e que o resultado desejado já foi provado para valores menores da variável indutiva, isto é, para $m - 1$. Pelo Teorema 2.3.7 e pela sequência exata,

$$0 \longrightarrow \gamma_1 M \longrightarrow M \longrightarrow M/\gamma_1 M \longrightarrow 0,$$

temos que

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|\gamma_1 M) + e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M/\gamma_1 M).$$

Porém $\gamma_1^{m-1}(\gamma_1 M) = 0$ e $\gamma_1(M/\gamma_1 M) = 0$. Assim pela nossa hipótese indutiva, tanto $e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|\gamma_1 M)$ quanto $e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M/\gamma_1 M)$ são ambos iguais a zero.

Portanto

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = 0,$$

como queríamos demonstrar. ■

2.4 Relação entre Multiplicidade e Comprimento

Sejam M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Nesta seção iremos procurar relações entre a multiplicidade $e(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M)$ e o comprimento $L(M/(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)M)$. No caso de um anel A, podemos adiantar o seguinte resultado.

Teorema 2.4.1: ([9], pag. 138) Num anel local Noetheriano $(A, \mathcal{M})$, são equivalentes:

i) A é um anel Cohen-Macaulay;

ii) L(A/I)=e(I,A), para qualquer ideal parâmetro I de A;

iii) L(A/I)=e(I,A), para algum ideal parâmetro I de A.

Observação 2.4.2: ([9], pag. 109) Vamos observar que se $(A, \mathcal{M})$ é um anel local d-dimensional e $x_1, \ldots, x_d$ é um sistema de parâmetros de A e $I = (x_1, \ldots, x_d)$ então

$$L_A(A/I) > e_A(I|A).$$

Portanto, o Teorema 2.4.1 mostra que a igualdade ocorre se, somente se, o anel é Cohen-Macaulay.

No caso de um A-módulo M, com $\dim A > 0$, temos um resultado semelhante ao Teorema 2.4.1.

Mas como já observamos, um sistema de multiplicidade pode não ser um sistema de parâmetros a menos que consideremos anéis Noetheriano que também sejam locais. Vamos voltar ao caso em que não exigimos que A seja local.

Lema 2.4.3: Seja M um A-módulo Noetheriano e γ um elemento de A. Seja $F_m = M/(0 :_M \gamma^m)$, então $(0 :_{F_m} \gamma) = 0$ desde que m seja um inteiro suficientemente grande.

Demonstração: Desde que M é um A-módulo Noetheriano, a sequência ascendente de submódulos de M

$$(0 :_M \gamma_1) \subseteq (0 :_M \gamma_1^2) \subset (0 :_M \gamma_1^3) \subseteq ...$$

deve ser estacionária.

Suponhamos que m é suficientemente grande para garantir que

$$(0 :_M \gamma_1^m) = (0 :_M \gamma_1^{m+1}).$$

Então, pela Proposição 2.2.5 (v) e (i), temos as igualdades

$$\begin{aligned}(0 :_{F_m} \gamma) &= ((0 :_M \gamma_1^m) :_M \gamma)/((0 :_M \gamma_1^m)) \\ &= (0 :_M \gamma_1^{m-1})/(0 :_M \gamma_1^m) \\ &= (0 :_M \gamma_1^m)/(0 :_M \gamma_1^m) \\ &= 0,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

O próximo teorema, mostra que dados um sistema de multiplicidade, $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ de um A-módulo M, então a multiplicidade $e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M)$ é limitada, inferiormente pelo 0 e superiormente pelo inteiro não-negativo $L_A(M/\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M)$. Observamos que não estamos dizendo que o símbolo da multiplicidade é uma função limitada no conjunto de todos os sistemas de multiplicidades do anel A.

Teorema 2.4.4: Sejam M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Então

$$0 \leq e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) \leq L_A(M/\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M). \tag{2.11}$$

Demonstração: Para provarmos que

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) \geq 0,$$

usaremos indução sobre o número de elementos no sistema de multiplicidade.

Se $s = 0$, então $e_A(.|M) = L_A(M) \geq 0$, pela definição do símbolo de multiplicidade e pelo fato que o comprimento é sempre um número inteiro não-negativo.

Portanto assuma que $s \geq 1$ e que o símbolo de multiplicidade é um inteiro não-negativo para qualquer sistema de multiplicidades consistindo apenas de $s-1$ elementos.

Seja $F = M/(0 :_M \gamma_1^m)$, onde m foi escolhido suficientemente grande para assegurar que $(0 :_F \gamma_1) = 0$, o que é possível pelo Lema 2.4.3.

Em seguida, aplicando o Teorema 2.3.7 na sequência exata abaixo

$$0 \longrightarrow (0 :_M \gamma_1^m) \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

temos que

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|F) + e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|(0 :_M \gamma_1^m)). \tag{2.12}$$

Como $\gamma_1^m(0 :_M \gamma_1^m) = 0$, segue da Proposição 2.3.19, que $e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|(0 :_M \gamma_1^m)) = 0$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|F) &= e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s|F/\gamma_1 F) + e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s|(0 :_F \gamma_1)) \\ &= e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s|F/\gamma_1 F), \end{aligned} \tag{2.13}$$

pois $\gamma_1(0 :_F \gamma_1) = 0$. Portanto das equações 2.12 e 2.13, temos

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s|F/\gamma_1 F).$$

Mas pela hipótese indutiva, como $\gamma_2, \ldots, \gamma_s$ é um sistema de multiplicidade contendo $s-1$ elementos, obtemos a seguinte desigualdade

$$e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s|F/\gamma_1 F) \geq 0,$$

ou seja,

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) \geq 0,$$

e isto prova a primeira desigualdade.

Vamos estabelecer a segunda desigualdade. Se $s \geq 1$ temos, pela Definição 2.3.1, que

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s|M/\gamma_1 M) - e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s|(0 :_M \gamma_1)),$$

ou seja,

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) \leq e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M/\gamma_1 M),$$

pois $e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|(0 :_M \gamma_1)) \geq 0$, pelo que acabamos de provar acima.

Seja $M' = M/\gamma_1 M$. Segue pelo mesmo argumento anterior, que

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) \leq e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s|M') \leq e_A(\gamma_3, \ldots, \gamma_s|M'/\gamma_2 M').$$

Mas pela Proposição 2.2.5 (*iii*) temos que

$$M/(\gamma_1 M + \gamma_2 M) \cong (M/\gamma_1 M)/\gamma_2(M/\gamma_1 M) = M'/\gamma_2 M'.$$

Portanto

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) \leq e_A(\gamma_3, \ldots, \gamma_s|M/(\gamma_1 M + \gamma_2 M)).$$

Procedendo desta maneira teremos

$$\begin{aligned} e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) &\leq e_A(.|M/\gamma_1 M + \ldots - \gamma_s M) \\ &- L_A(M/\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M), \end{aligned}$$

e assim o teorema está provado. ■

Corolário 2.4.5: Se $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ é um sistema de multiplicidade num A-módulo Noetheriano M tal que $\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M = M$. Então

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = 0.$$

Demonstração: Pelo Teorema 2.4.4,

$$0 \leq e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) \leq L_A(M/\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M).$$

Mas como, por hipótese, $\gamma_1 M + ... + \gamma_s M = M$, então

$$(M/\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M) \cong \{0\}.$$

Portanto, $e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M)=0$. ■

O próximo teorema mostra que o símbolo da multiplicidade comporta-se como uma aplicação aditiva no conjunto dos sistemas de multiplicidades do anel A.

Teorema 2.4.6: Sejam M um A-módulo Noetheriano $\gamma_1,\ldots,\gamma_i,\ldots,\gamma_s$ e $\gamma_1,\ldots,\gamma_i',\ldots,\gamma_s$ dois sistemas de multiplicidades em M. Então $\gamma_1,\ldots,\gamma_i\gamma_i',\ldots,\gamma_s$ também é um sistema de multiplicidade em M. Além disso,

$$e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_i\gamma_i',\ldots,\gamma_s|M)=e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_i,\ldots,\gamma_s)|M)+e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_i',\ldots,\gamma_s|M). \tag{2.14}$$

Demonstração: Seja $F=\gamma_1M+\ldots+\gamma_iM+\ldots+\gamma_sM$. Então F é um submódulo de M e portanto, pela Proposição 2.2.5, $\gamma_1,\ldots,\gamma_i',\ldots,\gamma_s$ é um sistema de multiplicidade em F.

Das inclusões abaixo

$$\gamma_1F+\ldots+\gamma_i'F+\ldots+\gamma_sF\subseteq F\subseteq M$$

temos pela Observação 2.3.15

$$L_A(M/\gamma_1F+\ldots+\gamma_i'F+\ldots+\gamma_sF)=L_A(M/F)+L_A(F/\gamma_1F+\ldots+\gamma_i'F+\ldots+\gamma_sF),$$

e nesta equação, os termos do lado direito são finitos. Das inclusões abaixo

$$\gamma_1F+\ldots+\gamma_i'F+\ldots+\gamma_sF\subseteq\gamma_1M+\ldots+\gamma_i\gamma_i'M+\ldots+\gamma_sM\subseteq M$$

obtemos a seguinte igualdade numérica

$$L_A(M/\gamma_1F+\ldots+\gamma_i'F+\ldots+\gamma_sF)=L_A(M/\gamma_1M+\ldots+\gamma_i\gamma_i'M+\ldots+\gamma_sM)$$

$$+L_A((\gamma_1M+\ldots+\gamma_i\gamma_i'M+\ldots+\gamma_sM)/(\gamma_1F+\ldots+\gamma_i'F+\ldots+\gamma_sF)),$$

e como o comprimento só assume valores não negativos, segue que

$$L_A(M/\gamma_1M+\ldots+\gamma_i\gamma_i'M+\ldots+\gamma_sM)\leq\infty.$$

Portanto, $\gamma_1, \ldots, \gamma_i\gamma_i', \ldots, \gamma_s$ é, por definição, um sistema de multiplicidade em M. Vamos provar a equação (2.14) observando, que em vista da Proposição 2.3.17 podemos supor que $i = s$. Por aplicações sucessivas da Definição 2.3.1, obtemos

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_i\gamma_i', \ldots, \gamma_s|M) = \sum_v \epsilon_v e_A(\gamma_s|M_v),$$

onde o lado direito acima é uma soma finita e cada $\epsilon_v = \pm 1$ e M_v são A-módulos Noetherianos para os quais γ_s é um sistema de multiplicidade. Além disso, os números ϵ_v e M_v dependem somente de M e dos elementos $\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}$. Segue que

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, \gamma_s'|M) = \sum_v \epsilon_v e_A(\gamma_s'|M_v)$$

e

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, \gamma_s\gamma_s'|M) = \sum_v \epsilon_v e_A(\gamma_s\gamma_s'|M_v),$$

com os mesmos ϵ_v e M_v de antes.

A partir das duas igualdades acima, vemos que basta provarmos o teorema no caso em que $s = 1$. No que segue, assumiremos que temos esta hipótese adicional e simplificaremos a notação, escrevendo $\gamma = \gamma_s$ e $\gamma' = \gamma_s'$.

Pela Definição 2.3.1, temos

$$\begin{aligned} e_A(\gamma/M) &= L_A(M/\gamma M) - L_A((0 :_M \gamma)) \\ e_A(\gamma'/M) &= L_A(M/\gamma' M) - L_A((0 :_M \gamma')) \\ e_A(\gamma\gamma'/M) &= L_A(M/\gamma\gamma' M) - L_A((0 :_M \gamma\gamma')). \end{aligned}$$

Agora, a multiplicação por γ, produz um epimorfismo

$$M \longrightarrow \gamma M$$

com a propriedade que a imagem inversa de $\gamma\gamma' M$ é exatamente $(0 :_M \gamma) + \gamma' M$. Assim temos o isomorfismo

$$\gamma M/\gamma\gamma' M \cong M/((0 :_M \gamma) + \gamma' M). \tag{2.15}$$

Das inclusões

$$\gamma' M \subseteq (0 :_M \gamma) + \gamma' M \subseteq M$$

temos a igualdade

$$L_A(M/\gamma' M) = L_A(M/(0 :_M \gamma) + \gamma' M) + L_A(((0 :_M \gamma) + \gamma' M)/\gamma' M),$$

mas do isomorfismo (2.15), obtemos a seguinte igualdade

$$L_A(\gamma M/\gamma\gamma' M) = L_A(M/\gamma' M) - L_A(((0 :_M \gamma) + \gamma' M)/\gamma' M). \tag{2.16}$$

Porém valem das seguintes relações

$$((0 :_M \gamma) + \gamma' M)/\gamma' M \cong (0 :_M \gamma)/(\gamma' M \cap (0 :_M \gamma)) = (0 :_M \gamma)/\gamma'(0 :_M \gamma\gamma'),$$

obtemos a seguinte igualdade

$$L_A(((0 :_M \gamma) + \gamma' M)/\gamma' M) = L_A((0 :_M \gamma)) - L_A(\gamma'(0 :_M \gamma\gamma')),$$

e assim, (1.16) torna-se

$$L_A(\gamma M/\gamma\gamma' M) = L_A(M/\gamma' M) - L_A(0 :_M \gamma) + L_A(\gamma'(0 :_M \gamma\gamma')).$$

Além disso, somando-se $L_A(M/\gamma M)$ a ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$L_A(M/\gamma\gamma' M) = L_A(M/\gamma M) - L_A(0 :_M \gamma) + L_A(M/\gamma' M) + L_A(\gamma'(0 :_M \gamma\gamma')).$$

Para completar a prova será suficiente mostrar que

$$L_A(\gamma'(0 :_M \gamma\gamma')) = L_A(0 :_M \gamma\gamma') - L_A(0 :_M \gamma').$$

Mas isto é verdade, pois a multiplicação por γ' produz um epimorfismo

$$(0 :_M \gamma\gamma') \longrightarrow \gamma'(0 :_M \gamma\gamma'),$$

cujo núcleo é exatamente $(0 :_M \gamma')$. Daí pelo Teorema 2.3.13, temos o seguinte isomorfismo

$$(0 :_M \gamma\gamma')/(0 :_M \gamma') \cong \gamma'(0 :_M \gamma\gamma').$$

Por outro lado, a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow (0 :_M \gamma') \longrightarrow (0 :_M \gamma\gamma') \longrightarrow (0 :_M \gamma\gamma')/(0 :_M \gamma') \longrightarrow 0$$

nos fornece a igualdade

$$L_A(0 :_M \gamma\gamma') = L_A(0 :_M \gamma') + L_A((0 :_M \gamma\gamma')/(0 :_M \gamma')),$$

e disto obtemos novamente a partir do Teorema 2.3.13 o seguinte isomorfismo

$$L_A(M/\gamma' M) - L_A(0 :_M \gamma\gamma') = L_A(M/\gamma M) - L_A(0 :_M \gamma) + L_A(M/\gamma' M) - L_A(0 :_M \gamma'),$$

ou seja,

$$e_A(\gamma\gamma'|M) = e_A(\gamma|M) + e_A(\gamma'|M),$$

como queríamos demonstrar. ■

O Teorema 2.4.6, permite resolvermos o Exemplo 2.3.5, mais rapidamente, sem termos que nos envolver em cálculos que muitas vezes são trabalhosos. Basta ver que $\{x, y\}$ é um sistema de multiplicidade em $\mathbb{C}[x, y])$ e portanto, pelo Teorema 2.4.6, $\{x, y^2\}$ também. Logo temos,

$$e(x, y^2|\, \mathbb{C}[x, y]) = e(x, y|\, \mathbb{C}[x, y]) + e(x, y|\, \mathbb{C}[x, y]) = 2.$$

Corolário 2.4.7: Sejam M um A-módulo Noetheriano, $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M e $n_1, \ldots, n_s$ inteiros positivos. Então

$$e_A(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}|M) = n_1 \cdots n_s e_A(\gamma_1, ..., \gamma_s|M).$$

Demonstração: Basta usar o Teorema 2.4.6 sucessivamente. ■

Exemplo 2.4.8: O Corolário 2.4.7 permite concluir imediatamente que

$$e(x^2, y|\, \mathbb{C}[x, y]) = 2.$$

Observe que pelo Teorema 2.4.6, $x_1^{n_1}, \ldots, x_s^{n_s}$, é um sistema de multiplicidades em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_s]$. Podemos então calcular facilmente a multiplicidade do ideal gerado pelo elementos $x_1^{n_1}, \ldots, x_s^{n_s}$. De fato, pelo Corolário 2.4.7,

$$e(x_1^{n_1}, \ldots, x_s^{n_s}|\, \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_s]) = n_1 \cdots n_s.$$

Corolário 2.4.9: Sejam M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Então

$$0 \leq e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M) \leq \frac{L_A(M/\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)}{n_1 \cdots n_s},$$

para inteiros positivos arbitrários $n_1, \ldots, n_s$.

Demonstração: Pelos Corolário 2.4.7 e Teorema 2.4.4, temos

$$0 \leq n_1 \cdots n_s e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M) = e_A(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} | M) \leq L_A(M/\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M),$$

pois $\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}$ também é um sistema de multiplicidade em M.

Dividindo por $n_1 \cdots n_s$, obtemos

$$0 \leq e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M) \leq \frac{L_A(M/\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)}{n_1 \cdots n_s},$$

como queríamos provar. ■

Corolário 2.4.10: Sejam M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Suponha que

$$\gamma_i^m M \subseteq \gamma_1 M + \ldots + \gamma_{i-1} M + \gamma_{i+1} M + \ldots + \gamma_s M,$$

onde m é um inteiro positivo. Então $e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M) = 0$.

Demonstração: Pela Proposição 2.3.17, podemos supor que $i = 1$. Se $n > m$, então

$$\gamma_1^n M + \gamma_2 M + \ldots + \gamma_s M = \gamma_2 M + \ldots + \gamma_s M,$$

e assim pelo Corolário 2.4.10,

$$0 \leq n e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M) \leq L_A(M/\gamma_1^n M + \ldots + \gamma_s M) = L_A(M/\gamma_2 M + \ldots + \gamma_s M).$$

Como $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ é um sistema de multiplicidades em M, $\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}$ também é um sistema de multiplicidades em M. Logo temos que $L_A(M/\gamma_2 M + \ldots + \gamma_s M)$ é finito. Portanto, dividindo por n e fazendo n tender ao infinito, o resultado segue. ■

Já sabemos que se M é um A-módulo Noetheriano, então valem as desigualdades

$$0 \leq e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M) < L_A(M/\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M).$$

Naturalmente, segue da definição de multiplicidade, que se $s = 0$, então a igualdade é sempre verdadeira. Gostaríamos então, que dado um sistema de multiplicidade $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, com $s > 0$, obter condições sobre ele, de modo que tivéssemos a igualdade entre a multiplicidade $e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M)$ e o comprimento $L_A(M/\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M)$. O teorema abaixo, dá uma condição suficiente para esta questão.

Teorema 2.4.11: Sejam M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Se

$$((\gamma_1 M + \ldots + \gamma_i M) :_M \gamma_{i+1}) = (\gamma_1 M + \ldots + \gamma_i M),$$

para $0 \leq i \leq s-1$, então

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = L_A(M/\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M).$$

Demonstração: Seja $M_i = M/(\gamma_1 M + \ldots + \gamma_i M)$. Então pela Proposição 2.2.6 (v), temos

$$\begin{aligned}(0 :_{M_i} \gamma_{i+1}) &= (0 :_{M/(\gamma_1 M + \ldots + \gamma_i M)} \gamma_{i+1}) \\ &= ((\gamma_1 M + \ldots + \gamma_i M) :_M \gamma_{i+1}))/(\gamma_1 M + \ldots + \gamma_i M) \\ &\cong 0,\end{aligned}$$

pois por hipótese,

$$((\gamma_1 M + \ldots + \gamma_i M) :_M \gamma_{i+1}) = (\gamma_1 M + \ldots + \gamma_i M),$$

para $0 \leq i \leq s-1$. Em particular, quando $i = 0$, $(0 :_M \gamma_1) = 0$. Agora, pela Proposição 2.2.6 (iii), $M_i/\gamma_{i+1} M_i$ e M_{i+1} são isomórficos, pois

$$\begin{aligned}M_i/\gamma_{i+1} M_i &= (M/(\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s))/(\gamma_{i+1}(M/(\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s)) \\ &\cong M/\gamma_1 M + \ldots + \gamma_{i+1} M \\ &= M_{i+1}.\end{aligned}$$

Assim sendo, como $(0 :_M \gamma_1) = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) &= e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s|M/\gamma_1 M) - e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s|(0 :_M \gamma_1)) \\ &= e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s|M/\gamma_1 M) \\ &= e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s|M_1) \\ &= e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s|M_1/\gamma_2 M_1) - e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s|(0 :_{M_1} \gamma_2)) \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= e_A(.|M_s) \\ &= L_A(M/\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M). \end{aligned}$$

Portanto

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = L_A(M/\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M),$$

como queríamos demonstrar. ■

Naturalmente, gostaríamos de obter uma recíproca para o Teorema 2.4.11, mesmo que seja parcial. Para isto, precisamos inicialmente, de um resultado da Álgebra Comutativa. O resultado abaixo, é uma conseqüência do Teorema da Interseção de Krull [13], pag.293.

Teorema 2.4.12: ([13],pag. 295) Sejam M um A-módulo Noetheriano e I um ideal contido no radical de Jacobson de A. Então

$$\cap_{n=1}^{\infty} I^n M = 0.$$

O proximo resultado, fornece uma importante recíproca parcial do Teorema 2.4.11.

Teorema 2.4.13: Sejam M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M, cujos elementos estão contidos no radical de Jacobson de A. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) $e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = L_A(M/\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M)$

b) $((\gamma_1 M + \ldots + \gamma_i M) :_M \gamma_{i+1}) = (\gamma_1 M + \ldots + \gamma_i M)$, para $0 \leq i \leq s-1$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.4.11, $(b) \rightarrow (a)$. Então precisamos apenas provar que $(a) \longrightarrow (b)$.

A prova é por indução sobre s. Se $s = 1$ temos pela Definição 2.3.1, que

$$e_A(\gamma_1|M) - L_A(M/\gamma_1 M) - L_A(0 :_M \gamma_1),$$

e assim desde que (a) é verdadeiro, devemos ter $L_A(0 :_M \gamma_1) = 0$. Logo $(0 :_M \gamma_1) = 0$, e isto é tudo que precisávamos provar neste caso.

De agora em diante vamos assumir que $s > 1$ e também que a afirmação "(a) implica (b)," foi provada para sistemas de multiplicidades tendo apenas $s-1$ elementos.

Seja $n_1, \ldots, n_s$ inteiros positivos. Então pelos Teorema 2.4.4, Proposição 2.2.3 e Corolário 2.4.7 segue que

$$\begin{aligned} e_A(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}|M) &\leq L_A(M/(\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)) \\ &\leq n_1 \cdots n_s L_A(M/(\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M)) \\ &= n_1 \cdots n_s e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) \\ &= e_A(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}|M). \end{aligned}$$

Assim temos que

$$e_A(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}|M) = L_A(M/(\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)), \tag{2.17}$$

para quaisquer inteiros positivos $n_1, \ldots, n_s$.

Seja $K = M/(0 :_M \gamma_1)$. Então segue da sequência exata abaixo e do Teorema 2.3.7

$$0 \longrightarrow (0 :_M \gamma_1) \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

a seguinte igualdade numérica

$$e_A(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}|M) = e_A(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}|K) + e_A(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}|(0 :_M \gamma_1)).$$

Mas pela Proposição 2.3.19, desde que $\gamma_1^{n_1}(0 :_M \gamma_1) = 0$, temos que

$$e_A(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}|(0 :_M \gamma_1)) = 0.$$

e portanto, vale a igualdade

$$e_A(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}|M) = e_A(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}|K).$$

Assim por 2.17 e pelo Teorema 2.4.4,

$$\begin{aligned} L_A(M/(\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)) &= e_A(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}|K) \\ &\leq L_A(K/(\gamma_1^{n_1}K + \ldots + \gamma_s^{n_s}K)) \\ &\leq L_A(M/((0 :_M \gamma_1) + \gamma_1^{n_1}K + \ldots + \gamma_s^{n_s}K)). \end{aligned}$$

A última desigualdade se justifica pelo Teorema 2.3.13, pois os seguintes módulos

$$K/(\gamma_1^{n_1}K + \ldots + \gamma_s^{n_s}K) \ , \ M/((0 :_M \gamma_1) + \gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)$$

são isomorfos. Mas desde que

$$(\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M) \subseteq ((0 :_M \gamma_1) + \gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M),$$

então

$$\begin{aligned} L_A(M/(\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)) &= L_A(M/((0 :_M \gamma_1) + \gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)) \\ &+ L_A(((0 :_M \gamma_1) \\ &+ \gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)/\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)) \\ &\geq L_A(M/((0 :_M \gamma_1) + \gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)). \end{aligned}$$

Portanto

$$L_A(M/(\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)) = L_A(M/((0 :_M \gamma_1) + \gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)),$$

e desde que

$$\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M) \subseteq (0 :_M \gamma_1) + \gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M,$$

segue que $\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M = (0 :_M \gamma_1) + \gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M$. Logo

$$(0 :_M \gamma_1) \subseteq \gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M),$$

para quaisquer inteiros positivos $n_1, \ldots, n_s$.

Seja $I = \gamma_1 A + \ldots + \gamma_s A$. Então para cada inteiro positivo n temos

$$(0 :_M \gamma_1) \subseteq \gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M) \subseteq I^n M,$$

pois $\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}$. Porém pelo Teorema 2.4.12,

$$\cap_{n=1}^{\infty} I^n M = 0,$$

pois I é um ideal contido no radical de Jacobson de A. Assim temos que $(0 :_M \gamma_1) = 0$.

Seja $\bar{M} = M/\gamma_1 M$. Desde que $(0 :_M \gamma_1) = 0$, temos o seguinte isomorfismo de A-módulos

$$M/(\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M) \cong \bar{M}/(\gamma_2 M + \ldots + \gamma_s \bar{M}),$$

e segue deste isomorfismo que

$$\begin{aligned} e_A(\gamma_2,\ldots,\gamma_s|\bar{M}) &= e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M) \\ &= L_A(M/(\gamma_1 M+\ldots+\gamma_s M)) \\ &= L_A(\bar{M}/(\gamma_1\bar{M}+\ldots+\gamma_s\bar{M})). \end{aligned}$$

Agora é possível aplicar a hipótese de indutiva. Isto mostra que

$$((\gamma_2\bar{M}+\ldots+\gamma_i\bar{M}):_{\bar{M}}\gamma_{i+1}) = \gamma_2\bar{M}+\ldots+\gamma_i M,$$

para $1 \leq i < s$. Mas

$$\gamma_2 M+\ldots+\gamma_i\bar{M} = (\gamma_1 M+\ldots+\gamma_i M)/\gamma_1 M.$$

Portanto, pela Proposição 2.2.6 (iii), temos que

$$((\gamma_1 M+\ldots+\gamma_i M):_M \gamma_{i+1}) = (\gamma_1 M+\ldots+\gamma_i M),$$

não apenas para $i=0$, mas também para $1 \leq i < s$. ■

Teorema 2.4.14: Sejam M um A-módulo e I um ideal parâmetro de A. Então M é um A-módulo Cohen-Macaulay se, e somente se,

$$L(M/IM) = e(I,M).$$

Demonstração: Suponha que M seja um A-módulo Cohen-Macaulay e I um ideal parâmetro de A. Se $\dim M = s$, então $I=(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)$ onde $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ é um sistema de parâmetros de M, e portanto, $L(M/IM)$ é finito, e além disso, $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ é uma M-sequência em M pela condição (b) do Teorema 2.4.13. Portanto $L(M/IM)=e(I;M)$.

Reciprocamente, suponha que I seja um ideal parâmetro de A e $L(M/IM) = e(I;M)$. Então pelo Teorema 1.2.3 temos

$$(\gamma_1 M+\ldots+\gamma_i M):_M \gamma_{i+1}) = (\gamma_1 M+\ldots+\gamma_i M),$$

para $0 \leq i \leq s-1$. Mas isto significa que $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ é uma M-sequência em M, e portanto, M é um A-módulo Cohen-Macaulay. ■

2.5 A Fórmula Limite de Lech

Nesta seção, vamos expressar a multiplicidade de um ideal I gerado por um sistema de multiplicidade $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, de uma forma aparentemente mais concreta, isto é, explicitamente dependendo do comprimento do módulo $M/(\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M)$.

Considere o caso em que M é um A-módulo Noetheriano e γ seja um sistema de multiplicidade em M. Então, desde que

$$(0 :_M \gamma_1) \subseteq (0 :_M \gamma_1^2) \subseteq (0 :_M \gamma_1^3) \subseteq \cdots$$

é uma cadeia ascendente de submódulos de M, existe um inteiro $n > 0$ tal que

$$(0 :_M \gamma_1^n) \subseteq (0 :_M \gamma_1^m) \text{ para todo } n \geq m.$$

Assim quando $n \geq m$, temos pela Definição 2.3.1,

$$\begin{aligned} e_A(\gamma^n|M) &= L_A(M/\gamma^n M) - L_A((0 :_M \gamma_1^n)) \\ &= L_A(M/\gamma^n M) - L_A((0 :_M \gamma_1^m)), \end{aligned}$$

mas pelo Corolário 2.4.7 do Teorema 2.4.6,

$$e_A(\gamma^n|M) - n e_A(\gamma|M).$$

Segue que

$$L_A(M/\gamma^n M) = n e_A(\gamma|M) + C,$$

para todo $n \geq m$, onde $C = L_A((0 :_M \gamma_1^m))$ é independente de n. Em particular, vemos que

$$lim_{n\to\infty} \frac{(L_A(M/\gamma^n M))}{n} = e_A(\gamma|M).$$

Este é o caso mais simples da Fórmula Limite de Lech. O resultado mais geral está contido no próximo teorema.

Teorema 2.5.1: (**A Fórmula Limite de Lech**) Sejam M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Então

$$lim_{n_i\to\infty} \frac{L_A(M/(\gamma_1^{n_1} M + \ldots + \gamma_s^{n_s} M))}{n_1 \cdots n_s} = e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M)$$

onde $n_1, \ldots, n_s$ são inteiros não-negativos e $n_i = \min\{n_1, \ldots, n_s\}$.

Demonstração: Usaremos indução em s e observemos que o caso $s = 1$ já foi provado acima. Vamos supor que $s > 1$ e que a fórmula já foi estabelecida para o caso de sistemas de multiplicidades em M, tendo apenas $s-1$ elementos. O objetivo inicial da primeira parte é mostrar, que sem perda de generalidades, podemos supor a hipótese adicional de que $(0 :_M \gamma_1)$ é o submódulo nulo de M. Uma vez que isto tenha sido feito, a conclusão decorre facilmente.

Tome $F = M/(0 :_M \gamma_1^p)$, onde p é escolhido suficientemente grande para assegurar que $(0 :_F \gamma_1) = 0$. Isto pode ser feito pelo Lema 2.4.3.

Segue da sequência exata abaixo e do Teorema 2.3.7

$$0 \longrightarrow (0 :_M \gamma_1^p) \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

que

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|F) + e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|(0 :_M \gamma_1^p)).$$

Mas pela Proposição 2.3.19, como $\gamma_1^p(0 :_M \gamma_1^p) = 0$, temos que

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|\,(0 :_M \gamma_1^p)) = 0,$$

logo

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|F). \tag{2.18}$$

Em seguida do isomorfismo

$$F/(\gamma_1^{n_1}F + \ldots + \gamma_s^{n_s}F) \cong M/((0 :_M \gamma_1^p) + \gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)$$

e das inclusões

$$\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M \subseteq (0 :_M \gamma_1^p) + \gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M \subseteq M$$

deduzimos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq L_A(M/(\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)) - L_A(F/(\gamma_1^{n_1}F + \ldots + \gamma_s^{n_s}F)) \\ &= L_A(((0 :_M \gamma_1^p) + \gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)/(\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M) \\ &= L_A((0 :_M \gamma_1^p)/(0 :_M \gamma_1^p) \cap (\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)). \end{aligned}$$

Ainda, pela inclusão

$$\gamma_2^{n_2}(0 :_M \gamma_1^p) + \ldots + \gamma_s^{n_s}(0 :_M \gamma_1^p) \subseteq (0 :_M \gamma_1^p) \cap (\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)$$

e pela Proposição 2.2.3, tem-se que

$$\begin{aligned} B &= L_A((0 :_M \gamma_1^p)/(0 :_M \gamma_1^p) \cap (\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)) \\ &\leq L_A((0 :_M \gamma_1^p)/(\gamma_2^{n_2}(0 :_M \gamma_1^p) + \ldots + \gamma_s^{n_s}(0 :_M \gamma_1^p))) \\ &= n_2 \cdots n_s L_A((0 :_M \gamma_1^p)/(\gamma_2(0 :_M \gamma_1^p) + \ldots + \gamma_s(0 :_M \gamma_1^p))) \end{aligned}$$

Afirmamos que $L_A((0 :_M \gamma_1^p)/(\gamma_2(0 :_M \gamma_1^p) + \ldots + \gamma_s(0 :_M \gamma_1^p))$ é finito. Para isto, é suficiente provarmos que $\gamma_2, \ldots, \gamma_s$ é um sistema de multiplicidade em $(0 :_M \gamma_1^p)$. Porém $\gamma_1^p, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ é um sistema de multiplicidade em M, e assim, também é um sistema de multiplicidade em $(0 :_M \gamma_1^p)$. Além disso,$\gamma_1^p(0 :_M \gamma_1^p) = 0$, e por isso, $\gamma_2, \ldots, \gamma_s$ é um sistema de multiplicidade em $(0 :_M \gamma_1^p)$.

Portanto, pela definição de sistema de multiplicidade,

$$C = L_A((0 :_M \gamma_1^p)/(\gamma_2(0 :_M \gamma_1^p) + \ldots + \gamma_s(0 :_M \gamma_1^p)))$$

é finito.

Estas observações, mostram que temos as seguintes desigualdades numéricas

$$0 \leq \frac{L_A(\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M) - L_A(\gamma_1^{n_1}F + \ldots + \gamma_s^{n_s}F)}{n_1 \cdots n_s} \leq \frac{C}{n_1},$$

e pela equação (2.18) é suficiente mostrar que

$$lim_{n_i \to \infty} \frac{L_A(F/(\gamma_1^{n_1}F + \ldots + \gamma_s^{n_s}F))}{n_1 \cdots n_s} = e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|F),$$

onde $n_i = \min\{n_1, \ldots, n_s\}$. Em vista disto, é possível assumir que $(0 :_M \gamma_1) = 0$ é satisfeito.

Seja $\bar{M} = M/\gamma_1 M$. Então pelo Corolário 2.4.9 do Teorema 2.4.6, e da Proposição 2.2.3,

$$\begin{aligned} 0 &\leq n_1 \cdots n_s e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s; M) \\ &\leq L_A(M/(\gamma_1^{n_1}M + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)) \\ &\leq n_1 L_A(M/(\gamma_1 M + \gamma_2^{n_2}M \ldots + \gamma_s^{n_s}M)) \\ &= n_1 L_A(\bar{M}/(\gamma_2^{n_2}\bar{M} + \ldots + \gamma_s^{n_s}M)), \end{aligned}$$

pois temos o seguinte isomorfismo

$$M/(\gamma_1 M + \gamma_2^{n_2} M \ldots + \gamma_s^{n_s} M) \cong \bar{M}/(\gamma_2^{n_2}\bar{M} + \ldots + \gamma_s^{n_s}\bar{M}).$$

Assim sendo temos

$$\begin{aligned} 0 \leq e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M) &\leq \frac{L_A(M/(\gamma_1^{n_1} M + \ldots + \gamma_s^{n_s} M))}{n_1 \cdots n_s} \\ &\leq \frac{L_A(\bar{M}/(\gamma_2^{n_2}\bar{M} + \ldots + \gamma_s^{n_s}\bar{M}))}{n_2 \cdots n_s}. \end{aligned}$$

Porém, nossa hipótese indutiva permite concluir que esta expressão tende a

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | \bar{M}),$$

e desde que $(0 :_M \gamma_1) = 0$, temos

$$e_A(\gamma_2, \ldots, \gamma_s | \bar{M}) = e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M),$$

como queríamos demonstrar. ■

2.6 Funções de Hilbert

Sejam A um anel e $x_1, \ldots, x_s$ um conjunto finito de indeterminadas sobre o anel A. Por toda esta seção, vamos denotar o anel dos polinômios $A[x_1, \ldots, x_s], s \geq 0$, por $A[X]$. Os anéis graduados que nos interessam aqui são os anéis dos polinômios. Vamos considerar o anel $A[X]$ graduado, da forma usual, pelos inteiros não-negativo. Assim sendo, se $m \geq 0$ é um inteiro, então um polinômio é homogêneo de grau m, se ele pode ser expresso na forma

$$\sum_{\mu_1 + \ldots + \mu_s = m} r_{\mu_1 \cdots \mu_s} x_1^{\mu_1} \cdots x_s^{\mu_s},$$

onde $r_{\mu_1 \cdots \mu_s} \in A$.

Quando $s = 0$, $A[X]$ é exatamente o anel A e a graduação em A é a trivial, isto é, todos os elementos não-nulos são elementos homogêneos de grau zero.

Seja M um $A[X]$-módulo graduado. Então para cada $n \geq 0$, inteiro, os elementos homogêneos de M de grau n formam um subgrupo aditivo, denotado por M_n, do grupo aditivo M. Assim temos a seguinte soma direta de M

$$M = M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \oplus \cdots.$$

Além disso, se um elemento de M_n é multiplicado por um polinômio homogêneo r do anel A, de grau m, então o elemento resultante pertence a M_{n+m}, por definição de graduação. Agora os polinômios homogêneos de grau zero formam um subanel de $A[X]$, que naturalmente identificamos com A. Assim cada M_n é um A-módulo.

Defina a função $H : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ pela seguinte expressão numérica

$$H(n, M) = L_A(M_n). \tag{2.19}$$

Então, $H(n. M)$ é uma função de n, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ e seus valores são sempre inteiros positivos ou mesmo ∞, caso M_n tenha comprimento infinito, para pelo menos um valor de n.

Definição 2.6.1: A função $H(n, M)$ da equação (2.19), é chamada a *função de Hilbert* do $A[X]$-módulo graduado M.

Do ponto de vista da teoria da multiplicidade, não é $H(n, M)$ que nos interessa, mas a função

$$H^*(n, M) = H(0, M) + H(1, M) + \ldots + H(n, M),$$

que é chamada a *função iterada de Hilbert* de M.

Se M é um $A[X]$-módulo graduado e N é um $A[X]$-submódulo homogêneo de M, então a graduação de M induz uma graduação em N. M/N também pode ser considerado como um $A[X]$-módulo graduado de modo natural. Essas graduações são tais, que na sequência exata usual

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0, \tag{2.20}$$

as aplicações preservam grau, isto significa dizer, que um elemento homogêneo sempre é levado num elemento homogêneo de mesmo grau. Segue que, para cada inteiro $n \geq 0$, a sequência exata 2.20 fornece a seguinte sequência

$$0 \to N_n \to M_n \to (M/N)_n \to 0,$$

que também é uma sequência exata de A-módulos. Assim sendo, pela aditividade da função comprimento

$$L_A(M_n) - L_A(N_n) + L_A((M/N)_n),$$

e pelas equações 2.19 e 2.20, temos

$$H(n, M) = H(n, N) + H(n, M/N). \tag{2.21}$$

Mais geralmente, se

$$0 \to N \to M \to K \to 0$$

é uma sequência exata de $A[X]$-módulos em que as aplicações preservam grau, tem-se

$$H(n, M) = H(n, N) + H(n, K), \tag{2.22}$$

para todo $n \geq 0$ e portanto

$$H^*(n, M) = H^*(n, N) + H^*(n, K),$$

para todo $n \geq 0$.

Definição 2.6.2: Um $A[X]$-módulo graduado M é um $A[X]$-*módulo de Hilbert* se satisfazer as seguintes condições:

i) M é um $A[X]$-módulo finitamente gerado;

ii)$H(n, M) < \infty$ para todo $n \geq 0$.

Exemplo 2.6.3: O anel dos polinômios $\mathbb{C}[X]$ é um exemplo de um $\mathbb{C}[X]$-módulo de Hilbert, pois $H(n, M)$ é exatamente a dimensão do $\mathbb{C}$-espaço vetorial formado pelos polinômios homogêneos de grau n.

Os próximos resultados, além de sua importância, serão utilizados mais adiante. As suas demonstrações, apesar de não serem extensas, precisam de mais resultados, por isso, apenas iremos enunciá-las.

Proposição 2.6.4: ([13], pag. 319) Seja M um $A[X]$-módulo de Hilbert. Então M é um $A[X]$-módulo Noetheriano e $x_1, \ldots, x_s$ é um sistema de multiplicidade em M.

A próxima proposição nos fornece vários exemplos de módulos de Hilbert.

Proposição 2.6.5: ([13], pag. 318) Sejam M um $A[X]$-módulo de Hilbert e N um submódulo homogêneo de M. Então N e M/N com as graduações usuais também são $A[X]$-módulos de Hilbert.

Proposição 2.6.6: ([13], pag. 319) Sejam M um $A[X]$-módulo de Hilbert e suponha que $s = 0$. Então $H(n, M) = 0$, para todo n suficientemente grande. Além disso, $L_A(M)$ é finito e $H^*(n, M) = L_A(M)$, para todo n suficientemente grande.

A Proposição 2.6.6, nos diz tudo sobre a função de Hilbert de um módulo de Hilbert, no caso onde o número de variáveis é zero.

Teorema 2.6.7: ([13],pag. 320) Seja M um $A[x_1, \ldots, x_s]$-módulo de Hilbert. Então para n suficientemente grande, $H(n, M)$ é dado por uma relação da forma

$$H(n, M) = \sum_{v=0}^{s-1} c_v \binom{n+v}{v}, \tag{2.23}$$

onde $c_0, c_1, \ldots, c_{s-1}$, são inteiros independentes de n. Além disso, a expressão (2.23) é única.

Observação 2.6.8: O Teorema 2.6.7 é o resultado chave da teoria das funções de Hilbert. Primeiro, note que $\binom{n+v}{v}$ denota o coeficiente binomial usual, isto é,

$$\binom{n+v}{v} = \frac{(n+v)(n+v-1)\cdots(n+1)}{1.2\cdots v}$$

de modo que, para um valor fixo de $v \geq 0$, $\begin{pmatrix} n+v \\ v \end{pmatrix}$ é um polinômio em n de grau v, cujo termo dominante é $\frac{n^v}{v!}$. O Teorema 2.6.7 mostra portanto, que para valores suficientemente grande de n,

$$H(n, M) - c_{s-1}\frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + \text{ termos de menor grau}$$

é um polinômio em n, cujo grau é menor ou igual do que $s-1$.

Observação 2.6.9: O Teorema 2.6.7 nos diz que se M é um $A[X]$-módulo de Hilbert, então existem inteiros unicamente determinados por M,

$$h_0(M), h_1(M), \ldots, h_{s-1}(M)$$

tais que

$$H(n, M) = \sum_{v=0}^{s-1} h_v(M) \begin{pmatrix} n+v \\ v \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

para todo n suficientemente grande.

Listaremos agora duas propriedades dos coeficientes binomiais que serão utilizados no decorrer desta seção.

i) Para quaisquer inteiros n, v, com $n \geq 1, v \geq 1$ tem-se:

$$\begin{pmatrix} n+v \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n+v-1 \\ v-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1+v \\ v \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

ii) Para quaisquer inteiros n e v não-negativos vale:

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} k+v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+v+1 \\ v+1 \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Nós iremos chamar os inteiros $h_v(M)$, $v = 0, 1, \ldots, s-1$ de os *coeficientes de Hilbert de* M . A expressão (2.24) mostra que

$$H(k, M) = \sum_{v=0}^{s-1} h_v(M) \begin{pmatrix} n+v \\ v \end{pmatrix} + \mu_k, \tag{2.27}$$

para todo $k \geq 0$, onde $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_s$ é uma sequência de inteiros com a propriedade que $\mu_k = 0$, desde que k seja suficientemente grande. Suponha que $\mu_k = 0$ quando $k > q$. Se agora $k > q$ e somarmos a equação (2.27) para $k = 0, 1, \ldots, n$, então encontraremos

$$\begin{aligned} H^*(n, M) &= H(0, M) + H(1, M) + \ldots + H(n, M) \\ &= \sum_{v=0}^{s-1} h_v(M) \sum_{k-0}^{n} \binom{k+v}{v} + \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k + \sum_{v=0}^{s\ 1} h_v(M) \binom{n+v+1}{v+1} \end{aligned}$$

em virtude da equação (2.26). Segue que existem únicos inteiros

$$h_0^*(M), h_v^*(M), \ldots, h_s^*(M),$$

tais que

$$H^*(n, M) = \sum_{v=0}^{s} h_1^*(M) \binom{n-v}{v}, \tag{2.28}$$

desde que n seja suficientemente grande. Além disso,

$$h_0(M), h_1(M), \ldots, h_{s-1}(M),$$

são os mesmos que os números

$$h_1^*(M), h_1^*(M), \ldots, h_s^*(M).$$

Em particular, quando $s \geq 1$ temos

$$h_s^*(M) = h_{s\ 1}(M). \tag{2.29}$$

Além disso, prova-se em ([13]. pag. 324) que

$$H(n, M) = h_s^*(M) \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + \cdots$$

e

$$h_s^*(M) = h_{s-1}^*(M/x_s M) - h_{s-1}^*(0 :_M x_s). \tag{2.30}$$

O próximo teorema, mostra que se M é um $A[x_1,\ldots,x_s]$-módulo de Hilbert, então a multiplicidade de um sistema de multiplicidade $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ é o coeficiente de maior grau do polinômio de Hilbert.

Teorema 2.6.10: Seja M um $A[x_1,\ldots,x_s]$-módulo de Hilbert. Então

$$h_s^*(M) = e_{A[X]}(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M).$$

Demonstração: Usaremos indução sobre s. Se $s=0$, então $A[x_1,\ldots,x_s]=A$ e daí

$$e_{A[X]}(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M) = e_A(.|M) = L_A(M).$$

Por outro lado, a Proposição 2.6.6 mostra que $h_s^*(M) = L_A(M)$ neste caso particular.

Vamos supor que $s \geq 1$ e que o teorema já foi provado quando apenas $s-1$ indeterminadas estão envolvidas. Pela Proposição 2.6.4, $e_{A[X]}(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M)$ está bem definido. Agora

$$e_{A[X]}(x_1,\ldots,x_{s-1},x_s|M) = e_{A[X]}(x_1,\ldots,x_{s-1}|M/x_sM) - e_{A[X]}(x_1,\ldots,x_{s-1}|(0:_M x_s)).$$

Além disso, o anel $A[x_1,\ldots,x_s]/(x_s)$ é isomorfo ao anel $A[x_1,\ldots,x_{s-1}]$ e o isomorfismo é tal que, para cada $1 \leq i \leq s-1$, a imagem de x_i em $A[x_1,\ldots,x_s]/(x_s)$ corresponde a x_i considerado como um elemento de $A[x_1,\ldots,x_{s-1}]$. Note que o ideal (x_s) anula M/x_sM. Então podemos aplicar o fato de que

$$e_{A[x_1,\ldots,x_{s-1}]}(x_1,\ldots,x_{s-1}|M/x_sM) = e_{A[x_1,\ldots,x_{s-1}]}(x_1,\ldots,x_s|M/x_sM)$$

Mas pelo Proposição 2.6.5 , M/x_sM é um $A[x_1,\ldots,x_{s-1}]$-módulo de Hilbert. Assim sendo, pela hipótese indutiva

$$e_{A[x_1,\ldots,x_{s-1}]}(x_1,\ldots,x_{s-1}|M/x_sM) = h_{s-1}^*(M/x_sM).$$

Analogamente podemos mostrar que

$$e_{A[x_1,\ldots,x_{s-1}]}(x_1,\ldots,x_{s-1}|(0:_M x_s)) = h_{s-1}^*((0:_M x_s))$$

Assim

$$\begin{aligned} e_{A[X]}(x_1,\ldots,x_s|M) &= h_{s-1}^*(M/x_sM) - h_{s-1}^*(0:_M x_s) \\ &= h_s^*(M) \end{aligned}$$

pela equação (2.30). ■

2.7 A Fórmula Limite de Samuel

Seja M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Considere o ideal I do anel A gerado por este sistema de multiplicidade, isto é,

$$I = \gamma_1 A + \ldots + \gamma_s A.$$

Temos que I é um ideal de A finitamente gerado e usaremos os símbolos $x_1, \ldots, x_s$, para denotar as indeterminadas sobre o anel A. Note que existe exatamente uma indeterminada para cada elemento do sistema de multiplicidade.

Sejam $n, n_1, \ldots, n_s$ números inteiros positivos. Então temos as seguintes inclusões

$$\gamma_1^{n_1} M + \ldots + \gamma_s^{n_s} M \subseteq I^n M \subseteq M.$$

Daí temos

$$L_A(M/(\gamma_1^{n_1} M + \ldots + \gamma_s^{n_s} M)) = L_A(M/I^n M) + L_A(A^n M/(\gamma_1^{n_1} M + \ldots + \gamma_s^{n_s} M)).$$

Como $\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s}$ é um sistema de multiplicidade em M então $L_A(M/(\gamma_1^{n_1} M + \ldots + \gamma_s^{n_s} M))$ é finito. Segue que $L_A(M/I^n M)$ é finito para todo inteiro positivo n.

Seja

$$G_I(M) = (M/IM) \oplus (IM/I^2 M) \oplus \cdots.$$

Afirmamos que $G_I(M)$ admite uma estrutura de $A[X]$-módulo, no qual o grupo dos elementos homogêneos de grau n são precisamente $I^n M/I^{n+1} M$, para qualquer inteiro $n \geq 0$. Para isto, seja η um elemento de $I^n M/I^{n+1} M$, isto é,

$$\eta = y + I^{n+1} M,$$

onde $y \in I^n M$.

Seja

$$\phi(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{\mu_1 + \ldots + \mu_s = m} r_{\mu_1 \cdots \mu_s} x_1^{\mu_1} \cdots x_s^{\mu_s},$$

um elemento homogêneo de $A[X]$ de grau m, onde $r_{\mu_1 \cdots \mu_s} \in A$. Então $\phi(x_1, \ldots, x_s)\eta$ é um elemento de $I^{n+m} M/I^{n+m+1} M$ que é representado por

$$\sum_{\mu_1 + \ldots + \mu_s = m} r_{\mu_1 \cdots \mu_s} \gamma_1^{\mu_1} \cdots \gamma_s^{\mu_s} y.$$

Verifica-se, que com este produto definido acima, $G_I(M)$ torna-se um $A[X]$-módulo graduado.

Desde que M é um A-módulo Noetheriano, ele é finitamente gerado. Seja $m_1, \ldots, m_q$, um conjunto gerador de M, então

$$M = Rm_1 + \ldots + Rm_q,$$

e denote por $\tilde{m}_i$ a imagem de m_i em M/IM de modo que $\tilde{m}_i$ seja um elemento homogêneo de $G_I(M)$ de grau zero. Então

$$G_I(M) = A[X]\tilde{m}_1 + \ldots + A[X]\tilde{m}_q.$$

Agora,

$$L_A(M_n) = L_A(I^n M/I^{n+1}M) \tag{2.31}$$

é finito para todo n. Assim sendo $G_I(M)$ é um $A[X]$-módulo de Hilbert. Além disso, pela equação (2.31),

$$L_A(M/I^n M) = L_A(M_0) + L_A(M_1) + \ldots + L_A(M_{n-1}), \tag{2.32}$$

pois para quaisquer $n \geq 0$. De fato das seguintes inclusões

$$I^{n+1}M \subset I^n M \subseteq M,$$

obtemos as igualdades numéricas

$$\begin{aligned} L(M_0) &= L(M/IM) \\ L(M_1) = L(IM/I^2M) &= L(M/I^2M) - L(M/IM) \\ L(M_2) = L(I^2M/I^3M) &= L(M/I^3M) - L(M/I^2M) \\ \cdots &= \cdots \\ L(M_{n-1}) = L(I^{n-1}M/I^nM) &= L(M/I^nM) - L(M/I^{n-1}M). \end{aligned}$$

Mas, somando todas estas igualdades, obtemos a equação (2.32), ou seja,

$$L_A(M/I^n M) = H^*(n-1, G_I(M)).$$

Portanto, pela equação (2.28), para n suficientemente grande, $L_A(M/I^nM)$, é um polinômio cujo grau não excede s. De fato, novamente pela equação (2.28), tem-se que

$$L_A(M/I^nM) = h_s^*(M)\frac{n^s}{s!} + \text{ termos de menor ordem} \tag{2.33}$$

para n suficientemente grande.

Defina $e(s, A, M)$ da seguinte forma

$$e(s, A, M) = lim_{n\to\infty}\frac{L_A(M/I^nM)}{n^s/s!} = h_s^*(G_I(M)). \tag{2.34}$$

Para simplificar a notação, vamos denotar o A-módulo $G_I(M)$, simplesmente por $G(M)$.

Lema 2.7.1: Seja I um ideal de $A[x_1, \ldots, x_s]$ gerado pelas indeterminadas $x_1, \ldots, x_s$ e seja n um inteiro satisfazendo $n \geq n_1 - \ldots + n_s$, onde $n_1, \ldots, n_s$ são inteiros não-negativos. Então

$$L_A(G(M)/(x_1^{n_1}G(M) + \ldots + x_s^{n_s}G(M))) = L_{A[X]}(G(M)/(x_1^{n_1}G(M) + \ldots + x_s^{n_s}G(M)))$$

Demonstração: De fato, das seguintes inclusões

$$x_1^{n_1}G(M) + \ldots + x_s^{n_s}G(M) \subseteq I^nG(M) \subseteq G(M),$$

temos que

$$L_A(G(M)/(x_1^{n_1}G(M) + \ldots + x_s^{n_s}G(M))) \geq L_{A[X]}(G(M)/(x_1^{n_1}G(M) + \ldots + x_s^{n_s}G(M)))$$

e

$$L_A(I^nG(M)/(x_1^{n_1}G(M) + \ldots + x_s^{n_s}G(M))) \geq L_{A[X]}(I^nG(M)/(x_1^{n_1}G(M) + \ldots + x_s^{n_s}G(M))),$$

pois todo $A[X]$-submódulo também é um A-submódulo. Assim sendo, o resultado seguirá do seguinte fato

$$L_A(G(M)/I^nG(M)) = L_{A[X]}(G(M)/I^nG(M)) < \infty.$$

Mas

$$L_A(G(M)/IG_A(M)) = \sum_{v=0}^{n-1} L_A(I^vG(M)/I^{v+1}G(M))$$

e

$$L_{A[X]}(G(M)/I^nG(M)) = \sum_{v=0}^{n-1} L_{A[X]}(I^vM/I^{v+1}G(M))$$

e cada elemento $x_1, \ldots, x_s$ anula $I^vG(M)/I^{v+1}G(M)$.

Assim os $A[X]$-submódulos $I^vG(M)/I^{v+1}G(M)$ coincidem quando vistos como A-submódulos, e assim temos

$$L_A(G(M)/I^nG(M)) = L_{A[X]}(G(M)/I^nG(M).$$

Mas pela Proposição 2.6.4, $x_1, \ldots, x_r$ é um sistema de multiplicidade em $G(M)$ e daí

$$L_A(G(M)/I^nG(M)) < L_A(M/(x_1^{n_1}M + \ldots + x_s^{n_s}M)) < \infty,$$

e assim $L_{A[X]}(G(M)/I^nG(M))$ é finito.

Finalmente

$$\begin{aligned} L_{A[X]}(G(M)/I^nG(M)) &= L_{A[X]}(G(M)/(x_1^{n_1}G(M) + \ldots + x_s^{n_s}G(M))) \\ &+ L_{A[X]}(I^nG(M)/(x_1^{n_1}G(M) + \ldots + x_s^{n_s}G(M))) \\ &\leq L_A(G(M)/(x_1^{n_1}G(M) + \ldots + x_s^{n_s}G(M))) \\ &+ L_A(I^nG(M)/(x_1^{n_1}G(M) + \ldots + x_s^{n_s}G(M))) \\ &= L_A(G(M)/I^nG(M)), \end{aligned}$$

e isto implica que

$$L_A(G(M)/(x_1^{n_1}G(M) + \ldots + x_s^{n_s}G(M))) = L_{A[X]}(G(M)/(x_1^{n_1}G(M) + \ldots + x_s^{n_s}G(M)))$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema 2.7.2: (**Fórmula Limite de Samuel**) Seja M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Se agora $I = \gamma_1 A + \ldots + \gamma_s A$, então

$$lim_{n\to\infty} \frac{L_A(M/I^nM)}{n^s/s!} = e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M). \tag{2.35}$$

Além disso,

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M) = e_{A[X]}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | G(M)),$$

onde

$$G(M) = (M/IM) \oplus (IM/I^2M) \oplus \cdots.$$

Demonstração: A demonstração é por indução sobre s. Se $s = 0$ obtemos pela equação (2.34).

$$e(0, (0), M) = lim_{n\to\infty} \frac{M/(0)M}{n^0 0!} - L_A(M). \tag{2.36}$$

Agora suponha que $s \geq 1$ e ponha $\bar{M} = M/\gamma_1 M$, $I = \gamma_2 A + \ldots + \gamma_s A$. Então $\bar{M}$ é um A-modulo Noetheriano e admite $\gamma_2, \ldots, \gamma_s$ como um sistema de multiplicidade. Como γ_1 anula M, temos $(I)^n \bar{M} = I^n \bar{M}$ e portanto temos

$$\bar{M}/(\bar{I})^n \bar{M} \cong M/(\gamma_1 M + I^n M)$$

Assim sendo

$$\begin{aligned} L_A(\bar{M}/(I)^n M) &= L_A(M/I^n M) - L_A((\gamma_1 M + I^n M)/I^n M) \\ &= L_A(M/I^n M) - L_A(\gamma_1 M/(\gamma_1 M \cap I^n M)) \\ &= L_A(M/I^n M) - L_A(\gamma_1 M/\gamma_1 (I^n M :_M \gamma_1)), \end{aligned}$$

pela Proposição 2.2.6 (ii).

Porém o epimorfismo

$$M \longrightarrow \gamma_1 M,$$

produzido pela multiplicação por γ_1, é tal que a imagem inversa de $\gamma_1(A^n M :_M \gamma_1)$ é exatamente $(A^n M :_M \gamma_1)$. Assim temos pelo Teorema 2.3.13 o isomorfismo

$$\gamma_1 M/\gamma_1 (I^n M :_M \gamma_1) \cong M/(I^n M :_M \gamma_1),$$

e assim

$$\begin{aligned} L_A(\bar{M}/(\bar{I})^n \bar{M}) &= L_A(M/I^n M) - L_A(M/(I^n M :_M \gamma_1) \\ &\geq L_A(M/I^n M) - L_A(M/I^{n-1} M), \end{aligned}$$

pois $I^{n-1} M \subseteq (I^n M :_M \gamma_1)$. Em seguida pelas equações (2.33) e (2.34) temos

$$L_A(M/I^n M) = e(s, I, M)\frac{n^s}{s!} + \text{ termos de menor ordem,} \tag{2.37}$$

para n suficientemente grande. Segue que para n suficientemente grande

$$L_A(M/I^nM) - L_A(M/I^{n-1}M) = e(s, I, M)\frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + \text{termos de menor ordem.}$$

e portanto

$$L_A(\bar{M}/(\bar{I})^n\bar{M}) \geq e(s, I, M)\frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + \text{termos de menor ordem.}$$

Vamos dividir por $\frac{n^{s-1}}{(s-1)!}$ e depois fazer n tender para o infinito. Isto nos fornece

$$e(s-1, \bar{I}, \bar{M}) \geq e(s, I, M).$$

Se $s \geq 2$, então o argumento acima pode ser repetido para obtermos

$$e(s-2, \bar{\bar{I}}, \bar{\bar{M}}) \geq e(s-1, \bar{I}, \bar{M}),$$

onde $\bar{\bar{I}} = \gamma_3 A + \ldots + \gamma_s A$ e $\bar{\bar{M}} = \bar{M}/\gamma_2\bar{M}$. Mas pela Proposição 2.2.6 (iii), $\bar{M}$ é isomorfo a $M/(\gamma_1 M + \gamma_2 M)$ e assim provamos que

$$e(s, I, M) \leq e(s-1, I, \bar{M}) \leq e(s-2, \bar{I}, M/(\gamma_1 M + \gamma_2 M)).$$

Procedendo desta forma obteremos

$$e(s, I, M) \leq e(0, (0), M/\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M) = L_A(M/(\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M)$$

pela equação (2.36) , ou mudando a notação,

$$lim_{n\to\infty}\frac{L_A(M/I^nM)}{n^s/s!} \leq L_A(M/\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M).$$

Nesta relação podemos substituir $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ por $\gamma_1^p, \ldots, \gamma_s^p$, onde p é um inteiro positivo arbitrário e observemos ao mesmo tempo que

$$(\gamma_1^p I + \ldots + \gamma_s^p I)^n \subseteq (\gamma_1 I + \ldots + \gamma_s I)^{np}.$$

Este artifício mostra que

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty}\frac{L_A(M/(\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M)^{np}M)}{n^s/s!} &\leq lim_{n\to\infty}\frac{L_A(M/(\gamma_1^p M + \ldots + \gamma_s^p M)^n M)}{n^s/s!} \\ &\leq \frac{L_A(M/(\gamma_1^p M + \ldots + \gamma_s^p M))}{p^s}. \end{aligned}$$

Mas, o primeiro desses limites é $e(s, I, M)$. Portanto

$$e(s, I, M) \leq \frac{L_A(M/(\gamma_1^p M + \ldots + \gamma_s^p M))}{p^s}$$

Agora fazendo p tender para o infinito e aplicando a Fórmula Limite de Lech, isto nos dá

$$e(s, I, M) \leq e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M). \tag{2.38}$$

Resta estabelecer a desigualdade oposta. Para este fim, seja $n_1, \ldots, n_s$ inteiros positivos. Ponha

$$U = \ominus_{n=0}^{\infty} \{I^n M \cap (I^{n+1} M + \gamma_1^{n_1} M + \ldots + \gamma_s^{n_s} M)/I^{n+1} M\}.$$

É fácil verificar que U é um $A[X]$-submódulo homogêneo de $G(M)$ e que

$$x_1^{n_1} G(M) + \ldots + x_s^{n_s} G(M) \subseteq U.$$

Assim sendo

$$L_A(G(M)/x_1^{n_1} G(M) + \ldots + x_s^{n_s} G(M)) \geq L_A(G(M)/U). \tag{2.39}$$

Tome agora $F = \gamma_1^{n_1} M + \ldots + \gamma_s^{n_s} M$. Então temos o isomorfismo

$$G(M)/U \cong \oplus_{n=0}^{\infty} \{I^n M \cap (I^{n+1} M + F)\}$$

de A-módulos. Mas

$$\begin{aligned} I^n M/(I^n M \bigcap (I^{n+1} M + F)) &\cong (I^n M + I^{n+1} M + F)/(I^{n+1} M + F) \\ &\cong (I^n M + F)/(I^{n+1} M + F), \end{aligned}$$

e assim

$$G(M)/U \cong \oplus_{n=0}^{\infty} (I^n M + F)/(I^{n+1} M + F).$$

Porém quando $n \geq n_1 + \ldots + n_s$ temos $I^n M \subseteq F$ e portanto $I^n M = F$. Segue então que

$$L_A(G(M)/U) = \sum_{n \geq 0} L_A((I^n M + F)/(I^{n+1} M + F)) = L_A(M/F),$$

e então pela equação (2.38) que

$$L_A(M/(\gamma_1^{n_1} M + \ldots + \gamma_s^{n_s} M)) \leq L_{A[X]}(G(M)/(x_1^{n_1} G(M) + \ldots + x_s^{n_s} G(M))).$$

Mas desde que

$$\frac{L_A(M/(\gamma_1^{n_1}M+\ldots+\gamma_s^{n_s}M))}{n_1\cdots n_s} < \frac{L_{A[X]}G(M)/(x_1^{n_1}G(M)+\ldots+x_s^{n_s}G(M)))}{n_1\cdots n_s},$$

segue pela Fórmula Limite de Lech que

$$e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M) \leq e_{A[X]}(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|G(M)).$$

Mas pelo Teorema 2.6.10 e pela equação (2.34), que

$$e_{A[X]}(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|G(M)) = h_s^*(G(M)) = e(s,I,A).$$

Assim $e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M) \leq e(s,I,A)$, que em vista da equação (2.38) completa a demonstração do teorema. ■

Teorema 2.7.3: ([13], pag. 330) Sejam M um A-módulo Noetheriano, $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ e $\gamma_1',\ldots,\gamma_s'$ dois sistemas de multiplicidades em M. Suponha que

$$\gamma_1 M+\ldots+\gamma_s M \subseteq \gamma_1' M+\ldots+\gamma_s' M.$$

i) Suponha que

$$\gamma_1 M+\ldots+\gamma_s M \subsetneq \gamma_1' M+\ldots+\gamma_s' M.$$

Então para qualquer submódulo N de M tem-se a seguinte desigualdade

$$e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|\,N) \geq e_A(\gamma_1',\ldots,\gamma_s'|\,N).$$

A afirmação continua válida se substituirmos N por um módulo quociente de M.

ii) Suponha que

$$\gamma_1 M+\ldots+\gamma_s M = \gamma_1' M+\ldots+\gamma_s' M.$$

Então para qualquer submódulo N de M tem-se a seguinte desigualdade

$$e_A(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|\,N) = e_A(\gamma_1',\ldots,\gamma_s'|\,N).$$

A afirmação continua válida se substituirmos N por um módulo quociente de M.

Capítulo 3

Multiplicidades Mixtas de dois Ideais $\mathcal{M}$-primários

3.1 Introdução

Seja $(A, \mathcal{M})$ um anel local de dimensão d. Seja I um ideal $\mathcal{M}$-primário. Samuel [20] provou que o comprimento do ideal I^r, é um polinômio em r, para valores suficientemente grande de r, cujo grau é igual a dimensão de A. Além disso, o coeficiente de maior grau deste polinômio é chamado a multiplicidade do ideal I, denotada por $e(I, A)$.

Sejam B um anel Artiniano primário e $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ e $Y = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ dois conjuntos de indeterminadas sobre o anel B. Na Seção 3.4 deste capítulo, provaremos que a função de Hilbert, $H(B, s, I)$, de um ideal bihomogêneo $\bar{I}$ do anel $B[X; Y]$ é um polinômio em r e s, para valores suficientemente grandes de r e s. Faremos uso deste resultado para mostrar que no anel local $(A, \mathcal{M})$, de dimensão $d > 0$, o comprimento do ideal $I^r J^s$, onde I e J são dois ideais $\mathcal{M}$-primários é, para valores suficientemente grandes de r e s, um polinômio em r e s de grau total $d' = d - 1$, onde d é a dimensão do anel local A.

Para orientar o leitor, este capítulo, com exceção da última seção, constitui basicamente um detalhamento do artigo [3]. A referência [11], contém os mesmos resultados do primeiro artigo, com a diferença de que estuda a função de Hilbert no caso de apenas um ideal $\mathcal{M}$-primário e trata de outros assuntos.

3.2 Resultados Preliminares

Nesta seção, estudaremos alguns resultados que serão usados posteriormente de uma forma direta ou indireta.

Definição 3.2.1: Um anel A é chamado *primário* se ele contém no máximo um ideal primo.

Alguns autores definem um anel com apenas um ideal primo pelo nome de *anel Artiniano local*. Nós continuaremos a chamar tais anéis de primários.

Note que todo corpo é um anel primário e que todo anel primário é um anel local, desde que todo ideal maximal é um ideal primo.

Observação 3.2.2: Durante esta seção, usaremos a letra B para denotar um anel primário e a letra A para denotar um anel local.

Teorema 3.2.3: ([33], pag. 204) Seja A um anel e I um ideal primário de A. Então o $B = A/I$ é um anel primário.

Lema 3.2.4: Sejam A um anel local, $\mathcal{M}$ seu ideal maximal e I um ideal $\mathcal{M}$-primário. Então $B = A/I$ é um anel primário Artiniano tendo $\tilde{I} = \mathcal{M}/I$ como seu único ideal primo e, portanto B é um anel local.

Demonstração: O ideal $\tilde{I} = \mathcal{M}/I$ é primo e maximal. Como o ideal I é $\mathcal{M}$-primário, o Teorema 3.2.3, garante que o anel A é primário. Além disso, como A tem apenas um ideal primo tem-se que $\dim A = 0$ e como A também é Noetheriano, segue que é Artiniano.

Corolário 3.2.5: Seja $\tilde{I} = \mathcal{M}/I$ o único ideal primo de $B = A/I$. Então $\tilde{I}$ pertence ao ideal nulo de B.

Demonstração: Sejam $\tilde{0}$ o ideal nulo de B e

$$\tilde{0} = I_i \cap \ldots \cap I_n$$

a decomposição primária de $\tilde{0}$ em B. Então pelo Lema 3.2.4 cada I_j é $\tilde{I}$-primário em

B, $j = 1, \ldots, n$. Como

$$\sqrt{\tilde{0}} = \sqrt{I_i \cap \ldots \cap I_n} = \sqrt{I_i} \cap \ldots \cap \sqrt{I_n} = \tilde{I},$$

temos pelo Teorema 1.1.14 (*iii*), que $\tilde{I}$ pertence ao ideal nulo de B como queríamos demonstrar. ■

Definição 3.2.6: Sejam A e C dois anéis tais que $A \subset C$. Então dizemos que C é uma *extensão* de A.

Se I é um ideal de A então o conjunto

$$I^e = \{ \sum_{finita} a_i r_i, \text{ onde } a_i \in I \text{ e } r_i \in C \}$$

é chamado a *extensão* de I em C.

Se J é um ideal do anel C, então a *contração* de J em A é o conjunto $J \cap A$.

Segue da Definição 3.2.6, que os conjuntos I^e e $J \cap A$ são ideais de C e A, respectivamente.

Exemplo 3.2.7: Sejam A um anel e $x_1, \ldots, x_n$ indeterminadas sobre o anel A. Então o anel dos polinômios $A[x_1, \ldots, x_n]$ é uma extensão do anel A.

■

Seja A um anel Noetheriano e $A[x_1, \ldots, x_n]$ o anel dos polinômios do exemplo acima. Denotaremos $A[x_1, \ldots, x_n]$ simplesmente por $A[X]$ para simplificar a notação. Um elemento $F(x_1, \ldots, x_n)$ será escrito como $F(X)$. Como A é um anel Noetheriano, segue do Teorema da Base de Hilbert que $A[X]$ também é um anel Noetheriano.

Lema 3.2.8: Sejam A um anel e I um ideal de A. Um elemento $F(X)$ pertencente a $A[X]$, pertence ao ideal I^e se, e somente se, todos os seus coeficientes estão em I.

Demonstração: Se todos os coeficientes de $F(X)$ estão em I, então segue da Definição 3.2.6, que $F(X)$ pertence a I^e.

Reciprocamente, se $F(X)$ pertence a I^e, então pela Definição 3.2.6

$$F(X) - a_1 F_1(X) + \ldots + a_n F_n(X)$$

onde cada a_i pertence a I, $i = 1, \ldots, n$ e $F_i(X)$ são polinómios em $A[X]$, tais que

$$F_i(X) = \sum_{finita} a_{i_1} \ldots a_{i_m} x^{i_1} \cdots x^{i_m}$$

Agora como todos os coeficientes de $F_i(X)$ estão em A, para $i = 1, \ldots, n$ e I é um ideal de A segue, por definição de ideal, que todos os coeficientes de $F(X)$ estão em I. ■

Corolário 3.2.9: Para qualquer ideal I de A tem-se

$$I^e \cap A = I$$

Em outras palavras, a contração de um ideal extendido é o próprio ideal.

Demonstração: Com efeito, se $a \in I$ então $a \in A$ e portanto, pela Definição 3.2.6, temos que $I \subset I^e$, e por conseguinte $a \in I^e \cap A$, ou seja, $I \subset I^e \cap A$.

Por outro lado, se $a \in I^e \cap A$, em particular a pertence a A, isto é, a pode ser considerado como um polinômio constante em $A[X]$. Como a pertence a I^e, segue do Lema 3.2.8 que $a \in I$. Isto completa a prova. ■

O próximo resultado estabelece uma relação entre a decomposição primária de um ideal I de um anel A e a decomposição primária de sua extensão I^e, num anel C que é extensão de A.

Corolário 3.2.10: Sejam I um ideal do anel A e $I = I_1 \cap \ldots \cap I_n$ a sua decomposição primária em A. Então $I^e = I_1^e \cap \ldots \cap I_n^e$ é a decomposição primária de I^e no anel $A[X]$.

Demonstração: Seja $F(X)$ pertencente a I^e, então pelo Lema 3.2.8 temos que todos os seus coeficientes estão em I, ou seja, pertencem a $I_1 \cap \ldots \cap I_n$, mas pelo Corolário 3.2.9, segue que eles pertencem a $I_1^e \cap \ldots \cap I_n^e$.

Para provarmos a inclusão contrária, seja $F(X) \in I_1^e \cap \ldots \cap I_n^e$. Então $F(X)$ pertence a cada I_i^e para $i = 1, \ldots, n$ e novamente pelo Lema 3.2.8, todos os coeficientes de $F(X)$ estão em I_i, para $i = 1, \ldots, n$. Isto mostra que todos os coeficientes de $F(X)$ estão em I, e novamente pelo Lema 3.2.8 eles também estão em I^e, logo $F(X)$ pertence a I^e e isto completa a demonstração. ■

Teorema 3.2.11: ([12], pag. 23) Suponha que A é um anel Noetheriano e que I é um ideal próprio de A e que J seja um ideal arbitrário de A. Então $(I : J) = I$ se, e somente se, J não está contido em nenhum ideal primo pertencente a I. Em particular, b é um divisor do zero em A se, e somente se, b pertence a algum ideal primo de A que pertence ao ideal nulo de A.

Proposição 3.2.12: ([12], pag. 82) Seja A um anel e $C = A[X]$. Se I é um ideal $\mathcal{P}$-primário do anel A, então I^e é um ideal $\mathcal{P}^e$-primário do anel C.

Teorema 3.2.13: Seja

$$I = I_1 \cap \ldots \cap I_n$$

a decomposição primária do ideal I, onde cada I_i é $\mathcal{P}_i$-primário para $i = 1, \ldots, n$. Então

$$I^e = I_1^e \cap \ldots \cap I_n^e,$$

onde cada I_i^e é $\mathcal{P}_i^e$-primário para $i = 1, \ldots, n$. Além disso, se a primeira decomposição é normal, a segunda também é.

Demonstração: Da Proposição 3.2.12, temos que I_i^e é $\mathcal{P}_i^e$-primário para cada $i = 1, \ldots, n$. Agora suponha que

$$I = I_1 \cap \ldots \cap I_n$$

é a decomposição normal de I. Desde que pelo Corolário 3.2.9, $I_i^e \cap A = I_i$ e todos os I_i's são distintos, segue que todos os I_i^e's também são distintos. Além disso, a decomposição

$$I^e = I_1^e \cap \ldots \cap I_A^e$$

também é irredutível, pois se tivéssemos

$$I^e \supset \cap_{i \neq j} I_j^e$$

então teríamos

$$I_i = I_i^e \cap A = I_i \supseteq \cap I_j^e = \cap_{i \neq j} I_j$$

o que contradiria o fato da primeira decomposição ser normal. ■

Teorema 3.2.14: Seja A um anel local, $\mathcal{M}$ seu ideal maximal, I um ideal $\mathcal{M}$-primário e $k = A/\mathcal{M}$, $\tilde{I} = I/\mathcal{M}$ seu único ideal primo e $\tilde{I}^e$ sua extensão em $A[x]$. Então $\tilde{I}^e$ é o único ideal primo pertencente ao ideal nulo de $A[X]$.

Demonstração: Seja

$$(0) = I_1 \cap \ldots \cap I_n$$

a decomposição normal do ideal 0 em A. Pelo Teorema 3.2.13,

$$(0) = I_1^e \cap \ldots \cap I_n^e$$

é a decomposição normal do ideal nulo de $A[X]$. Como $\tilde{I}$ é o único ideal primo de A, temos que

$$\sqrt{I_i} = \tilde{I},$$

para cada $i = 1, \ldots, n$, ou seja,

$$\sqrt{I_i^e} = \tilde{I}^e,$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Portanto, $\tilde{I}^e$ é o único ideal primo pertencente ao ideal nulo de $A[X]$, como queríamos demonstrar. ■

Corolário 3.2.15: Seja A um anel e $A[X]$ o anel dos polinômios nas indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$ sobre A. Então:

i) Todo ideal primo de $A[X]$ contém $\tilde{I}^e$;

ii) Se $F(X)$ não pertence a $\tilde{I}^e$, então $F(X)$ não é um divisor do zero em $A[X]$.

Demonstração: i) Todo ideal primo $\mathcal{P}$ de $A[X]$ contém o ideal nulo. Seja

$$\bar{0} = I_1^e \cap \ldots \cap I_r^e$$

a decomposição normal do ideal nulo em $A[X]$. Então

$$\tilde{I}^e = \sqrt{\bar{0}} \subseteq \sqrt{\mathcal{P}} = \mathcal{P}.$$

ii) Se $F(X)$ fosse um divisor do zero em $A[X]$, então pelo Teorema 3.2.11, ele pertenceria a algum ideal primo $\mathcal{P}$, pertencente a algum ideal primo do ideal nulo de $A[X]$, ou seja, ele pertenceria a $\tilde{I}^e$, o que contradiz a nossa hipótese. ■

3.3 Ideais Bihomogêneos

Sejam A uma anel local, $\mathcal{M}$ seu único ideal maximal e I um ideal $\mathcal{M}$-primário de A. Então pelo Lema 3.2.4 $B = A/I$ é um anel Artiniano primário tendo $\mathcal{P} = \mathcal{M}/I$ como seu único ideal primo e portanto B é um anel local. No que segue, B é um anel Artiniano primário arbitrário.

Seja $X = \{x_0, x_1 \ldots, x_m\}$ e $Y = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ dois conjuntos de indeterminadas sobre o anel B. Então o anel de polinômios $B[X;Y]$ é um anel bigraduado. Seja R_{rs} o B-módulo gerado pelos monômios da forma PQ onde P é um monômio de grau r em X e Q é um monômio de grau s em Y. Nós dizemos que PQ é um monômio de bigrau (r,s). Seja $R = \oplus_{r,s\geq 0} R_{rs}$ e $R_{rs}R_{ab} = R_{r-a,s+b}$ para todo $r,s,a,b \in \mathbb{N}$. Um elemento de R_{rs} é chamado *bihomogêneo* de bigrau (r,s). Um ideal $I \subset R$ gerado por elementos bihomogêneos é chamado um ideal *bihomogêneo*. Portanto o anel R/I é bigraduado e as *componentes bigraduadas* de bigrau (r,s) sendo $A_{rs} = R_{rs}/I_{rs}$ Para simplificar a notação, escreveremos, $F(X;Y)$ para denotar a forma $F(x_0, x_1 \ldots, x_m; y_0, y_1, \ldots, y_n)$ em $B[X;Y]$.

Observação 3.3.1: Em artigos mais recentes, alguns autores, referem-se aos ideais bihomogêneos, chamando-os de ideais bigraduados. Nós continuaremos a chamá-los por bihomogêneos.

Observação 3.3.2: Seja $\mathcal{F}(r,s)$ o A-módulo de todas as formas de $B[X,Y]$ de bigrau (r,s). Desde que o B-módulo $\mathcal{F}(r,s)$ tem base finita, $\dim_B \mathcal{F}(r,s)$, o comprimento de uma série de composição de B-submódulos de $\mathcal{F}(r,s)$ é definida e finita. Se $\bar{I}$ é um ideal bihomogêneo de $B[X,Y]$, então $\mathcal{F}(r,s;\bar{I})$ irá denotar o B-submódulo de todas as formas de bigrau (r,s) contidas em $\bar{I}$.

Se $\bar{J}$ é outro ideal bihomogêneo de $B[X,Y]$, então temos facilmente que:

$$\mathcal{F}(r,s;\bar{I}+\bar{J}) = \mathcal{F}(r,s;\bar{I}) + \mathcal{F}(r,s;\bar{J})$$

e

$$\mathcal{F}(r,s;\bar{I}\cap\bar{J}) = \mathcal{F}(r,s;\bar{I}) \cap \mathcal{F}(r,s;\bar{J}) \ .$$

Lema 3.3.3: Sejam $\bar{I}$ e $\bar{J}$ ideais bihomogêneos de $B[X,Y]$. Então

$$\dim_B \mathcal{F}(r,s;\bar{I}+\bar{J}) + \dim_B \mathcal{F}(r,s;\bar{I}\cap J) = \dim_B \mathcal{F}(r,s;\bar{I}) - \dim_B \mathcal{F}(r,s;\bar{J}) \ .$$

Demonstração: Considere as seguintes sequências exatas de B-módulos:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(r,s;\bar{I}) \longrightarrow \mathcal{F}(r,s;\bar{I}+\bar{J}) \longrightarrow \mathcal{F}(r,s;\bar{I}+\bar{J})/\mathcal{F}(r,s;\bar{I})$$

e

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(r,s;\bar{I}\cap\bar{J}) \longrightarrow \mathcal{F}(r,s;\bar{J}) \longrightarrow \mathcal{F}(r,s;\bar{J})/\mathcal{F}(r,s;\bar{I}\cap\bar{J}).$$

Como $\dim_B$ é uma função aditiva temos que:

$$\begin{aligned}
\dim_B \mathcal{F}(r,s;\bar{I}+\bar{J}) - \dim_B \mathcal{F}(r,s;\bar{I}) &= \dim_B \mathcal{F}(r,s;\bar{I}+\bar{J})/\mathcal{F}(r,s;\bar{I}) \\
&= \dim_B(\mathcal{F}(r,s;\bar{I}) + \mathcal{F}(r,s;\bar{J}))/\mathcal{F}(r,s:\bar{I}) \\
&= \dim_B \mathcal{F}(r,s;J)/\mathcal{F}(r,s;I)\cap\mathcal{F}(r,s;\bar{J}) \\
&= \dim_B \mathcal{F}(r,s;J)/\mathcal{F}(r,s;I\cap J).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Da mesma forma obtemos

$$\dim_B \mathcal{F}(r,s;\bar{J}) - \dim_B \mathcal{F}(r,s;\bar{I}\cap\bar{J}) - \dim_B(\mathcal{F}(r,s;\bar{J})/\mathcal{F}(r,s;\bar{I}\cap\bar{J})). \tag{3.2}$$

Portanto combinando (3.1) e (3.2) temos a fórmula desejada. ■

Definição 3.3.4: Seja $\bar{I}$ um ideal bihomogêneo de $B[X;Y]$. Definimos a *função de Hilbert* do ideal $\bar{I}$,denotada por $H(r,s;\bar{I})$, pela seguinte expressão

$$H(r,s;I) = \dim_B f(r,s) - \dim_B f(r,s;\bar{I}). \tag{3.3}$$

Observação 3.3.5: A função de Hilbert $H(r,s;\bar{I})$, nada mais é do que o comprimento da componente R_{rs} do anel bigraduado $R/\bar{I}$.

Teorema 3.3.6: Sejam $\bar{I}$ e $\bar{J}$ dois ideais bihomogêneos do anel $B[X,Y]$. Então

$$H(r,s;\bar{I}+\bar{J}) = H(r,s;I) + H(r,s;\bar{J}) - H(r,s;\bar{I}\cap\bar{J}).$$

Demonstração: Pela Definição 3.3.4, temos:

$$\begin{aligned} H(r,s;\bar{I}+\bar{J}) &= \dim_B \mathcal{F}(r,s) - \dim_B \mathcal{F}(r,s;\bar{I}+\bar{J}) \\ H(r,s;\bar{I}) &= \dim_B \mathcal{F}(r,s) - \dim_B \mathcal{F}(r,s;\bar{I}) \\ H(r,s;\bar{J}) &= \dim_B \mathcal{F}(r,s) - \dim_B \mathcal{F}(r,s;\bar{J}) \\ H(r,s;I\cap J) &= \dim_B \mathcal{F}(r,s) - \dim_B \mathcal{F}(r,s;\bar{I}\cap\bar{J}). \end{aligned}$$

Logo

$$H(r,s;\bar{I}+\bar{J}) - H(r,s;\bar{I}) - H(r,s;J) - H(r,s;I\cap J) = 0,$$

ou equivalentemente,

$$H(r,s;\bar{I}+\bar{J}) = H(r,s;\bar{I}) + H(r,s;\bar{J}) + H(r,s;\bar{I}\cap\bar{J}),$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema 3.3.7: Seja I um ideal bihomogêneo próprio de $B[X;Y]$ e seja $F(X;Y)$ uma forma de bigrau $(a;b)$ tal que

$$(\bar{I} : F(X;Y)) = \bar{I}.$$

Então para $r \geq a$ e $s \geq b$ temos

$$H(r,s;\bar{I}+(F)) = H(r,s;\bar{I}) - H(r-a,s-b;\bar{I}).$$

Demonstração: Vamos provar inicialmente que $F(X;Y)$ não é um divisor do zero em $B[X;Y]$. Se $F(X;Y)$ fosse um divisor do zero, então ela pertenceria ao único ideal primo $\tilde{P}$ que pertence ao ideal zero de $B[X;Y]$, mas como todo ideal primo de $B[X;Y]$ contém $\tilde{P}$, então $F(X;Y)$ pertenceria a qualquer ideal primo de $\bar{I}$ o que contraria pelo Teorema 3.2.11 a nossa hipótese de que $(\bar{I} : F(X;Y)) = \bar{I}$. Portanto $F(X,Y)$ não é um divisor de zero em $B[X;Y]$. As seguintes igualdades são facilmente verificáveis:

$$\mathcal{F}(r,s;I\cap F) = F(X,Y)\mathcal{F}(r-a,s-b;\bar{I})$$

e

$$\mathcal{F}(r,s;F) = F(X,Y)\mathcal{F}(r-a,s-b).$$

Desde que $F(X;Y)$ não é um divisor de zero, temos os seguintes isomorfismos entre B-módulos.

$$\mathcal{F}(r,s;I\cap(F)) \cong \mathcal{F}(r-a,s-b;I)$$

e

$$\mathcal{F}(r,s;(F)) \cong \mathcal{F}(r-a,s-b).$$

Portanto

$$\begin{aligned} H(r,s;\bar{I}+(F)) &= \dim_B \mathcal{F}(r,s) - \dim_B \mathcal{F}(r,s;\bar{I}+(F)) \\ &= \dim_B \mathcal{F}(r,s) - \dim_B \mathcal{F}(r,s;\bar{I}) - \\ &\quad \dim_B \mathcal{F}(r,s;(F)) + \dim_B \mathcal{F}(r,s;\bar{I}\cap(F)) \\ &= H(r,s;\bar{I}) - H(r-a,r-b;\bar{I}). \end{aligned}$$

Isto completa a prova do teorema. ■

Lema 3.3.8: Seja $\mathcal{X} = (\mathcal{P},X;Y)$ um ideal bihomogêneo de $B[X;Y]$. Então se qualquer ideal bihomogêneo $\bar{I}$ de $B[X;Y]$ contém uma potência de $(X;Y)$ então $\bar{I}$ é $\mathcal{X}$-primário.

Demonstração: Como $\mathcal{X} = (\mathcal{P},X;Y)$ é o ideal bihomogêneo maximal de $B[X;Y]$ ele contém todo ideal bihomogêneo de $B[X;Y]$, portanto contém $\bar{I}$. Assim temos que $\sqrt{I} \subset \mathcal{X}$. Desde que $\mathcal{P}$ é um ideal nilpotente, segue que para algum inteiro positivo k temos $\mathcal{P}^k = 0$. Portanto para esse mesmo inteiro k temos

$$\mathcal{X}^k \subset (X;Y).$$

Como $\bar{I}$ contém uma potência de $\mathcal{X}$, segue que para algum inteiro positivo s tem-se

$$\mathcal{X}^{ks} \subset (X;Y)^s \subset \bar{I}.$$

Portanto temos que $\sqrt{\mathcal{X}^{rs}} \subset \sqrt{\bar{I}}$, como queríamos demonstrar. ■

Definição 3.3.9: Um ideal bihomogêneo próprio $\bar{I}$ que contém o ideal $(X)^a(Y)^b$ para inteiros não negativos a e b, é chamado de *ideal projetivamente irrelevante* do anel $B[X;Y]$.

Segue do lema anterior que se um ideal bihomogêneo I é $\mathcal{X}$-primário então ele é necessariamente projetivamente irrelevante.

Lema 3.3.10: Seja $\bar{I}$ um ideal bihomogêneo projetivamente irrelevante de $B[X;Y]$. Então para valores suficientemente grandes de r e s, $H(r,s;I)=0$.

Demonstração: Como $\bar{I}$ é um ideal projetivamente irrelevante, temos que I contém alguma potência de $(X;Y)$ e portanto, é $\mathcal{X}$-primário pelo Lema 3.3.8. Segue disto que $\mathcal{X}^r \subset I$ e $\mathcal{X}^s \subset I$, logo $\mathcal{F}(r,s) \subset \mathcal{F}(r,s;\bar{I})$, como a outra inclusão sempre vale, temos que $\mathcal{F}(r,s)=\mathcal{F}(r,s;\bar{I})$. Portanto $H(r,s;I)=0$. ■

O próximo teorema afirma que, para valores suficientemente grande de r e s, a função de Hilbert $H(r,s;I)$ de um ideal bihomogêneo I, é um polinômio em r e s.

Teorema 3.3.11: Se $\bar{I}$ é um ideal bihomogêneo de $B[X;Y]$, então $H(r,s;\bar{I})$ é representada, para valores suficientemente grande de r e s, por uma expressão da forma

$$H(r,s;\bar{I}) = \sum_{i+j\leq d-2} a_{ij} \binom{r}{i} \binom{s}{j}, \tag{3.4}$$

onde a_{ij} são inteiros e d denota a dimensão de $\bar{I}$.

Demonstração: Se $d=0$ ou $d=1$, então $\bar{I}$ é projetivamente irrelevante, então pelo Lema 3.3.10, para valores suficientemente grandes de r e s, $H(r,s;\bar{I})=0$,ou seja, $H(r,s;\bar{I})$ é dado pelo polinômio nulo que tem a expressão (3.4). Então o teorema vale para $d=0$ e $d=1$.

Suponha que $d>1$, e suponha que o teorema foi provado para ideais bihomogêneos de dimensões menores. Suponha, além disso, que $\bar{I}$ seja $\mathcal{X}$-primário. Se I é projetivamente irrelevante, então nós já sabemos que $H(r,s;I)=0$ para valores suficientemente grandes de r e s e, portanto o teorema vale neste caso.

Se $\bar{I}$ não é projetivamente irrelevante, então existem x_i e y_j tais que x_i não pertence

a $\mathcal{I}^e$ e y_j não pertence a $\mathcal{I}^e$. Então os ideais $\bar{I}+(x_i)$, $\bar{I}+(y_j)$ têm dimensão no máximo $d-1$. Portanto pelo Teorema 3.3.7 temos que:

$$H(r,s;\bar{I}+(x_i)) = H(r,s;\bar{I}) - H(r-1,s;\bar{I}) \tag{3.5}$$

e

$$H(r,s;I+(y_i)) = H(r,s;\bar{I}) - H(r,s-1;\bar{I}). \tag{3.6}$$

Por hipótese, existem r_0 e s_0, tais que, para $r \geq r_0, s \geq s_0$,

$$H(r,s;\bar{I}+(x_i)) = \sum_{i+j\leq d-3} b_{ij}\binom{r}{i}\binom{s}{j} \tag{3.7}$$

e

$$H(r,s;I+(y_i)) = \sum_{i+j<d-3} c_{ij}\binom{r}{i}\binom{s}{j}. \tag{3.8}$$

Das equações (3.5) e (3.7) obtemos por somatório

$$H(r,s;\bar{I}) - H(r_0,s;\bar{I}) = \sum_{i+j<d-3} b_{ij}\left\{\binom{r+1}{i+1} - \binom{r_0+1}{i+1}\right\}\binom{s}{j}. \tag{3.9}$$

Analogamente pelas equações (3.6) e (3.8) temos que

$$H(r_0,s;\bar{I}) - H(r_0,s_0;\bar{I}) = \sum_{i+j\leq d-3} c_{ij}\left\{\binom{s+1}{j+1} - \binom{s_0-1}{j+1}\right\}\binom{r_0}{i}. \tag{3.10}$$

Adicionando as equações (3.9) e (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} H(r,s;\bar{I}) \;=\; & H(r_0,s_0\bar{I}) + \sum_{i+j\leq d-3} b_{ij}\binom{r+1}{i+1}\binom{s}{j} - \\ & \sum_{i+j\leq d-3} b_{ij}\binom{r_0+1}{i+1}\binom{s}{j} + \sum_{i+j\leq d-3} c_{ij}\binom{r_0}{i}\binom{s+1}{j-1} - \\ & \sum_{i+j\leq d-3} c_{ij}\binom{r_0}{i}\binom{s_0+1}{j+1}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

que tem a forma (3.4).

Vamos remover a restrição de que $\bar{I}$ seja primário. Seja

$$\bar{I} = \bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 \cap \ldots \cap I_l$$

a decomposição normal de $\bar{I}$ em ideais primários homogêneos. Desde que $\dim \bar{I} = d$ podemos supor que $\dim I_l = d$, Seja

$$\bar{L} = \bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 \cap \ldots \cap \bar{I}_{l-1}.$$

Então $\bar{I} = \bar{L} \cap \bar{I}_l$, onde $\bar{L}$ tem menos do que l componentes primárias e $\bar{I}_l$ é primário de dimensão d. Se $l - 1$ o teorema já foi provado. Suponhamos portanto, que o teorema vale para ideais bihomogêneos com menos do que l componentes primárias. Pela Equação (3.2) podemos escrever

$$H(r, s; \bar{I}) = H(r, s; \bar{L}) + H(r, s; \bar{I}_l) - H(r, s; \bar{I}_l + \bar{L}).$$

Os dois primeiros termos no lado direito referem-se a ideais com menos do que l componentes primárias e o terceiro termo refere-se a um ideal de dimensão menor do que d. Portanto todas as funções no lado direito têm a forma (3.4), e portanto, $H(r, s; \bar{I})$ tem a forma (3.4), para valores suficientemente grandes de r e s. ■

Definição 3.3.12: Os coeficientes a_{ij} dos termos da função de Hilbert tais que $i + j = d - 2$, onde d é a dimensão do ideal bihomogêneo $\bar{I}$, são chamados os *bigraus* de $\bar{I}$, denotados por $e_{ij}(\bar{I})$.

O próximo resultado é uma consequência direta do Teorema 3.3.11.

Teorema 3.3.13: Qualquer bigrau $e_{ij}(\bar{I})$ de um ideal bihomogêneo $\bar{I}$ é a soma dos bigraus correspondentes de $\bar{I}$ com a mesma dimensão.

Na Teorema 6 de [3], Bhattacharya afirma que se $\bar{I}$ não é projetivamente irrelevante, então cada $e_{ij}(\bar{I})$ é maior do que 0. Na verdade, o que ele prova realmente é que os bigraus são todos não-negativos e que pelo menos um $e_{ij}(\bar{I})$ é de fato maior que zero. O próximo exemplo esclarece melhor esta questão.

Exemplo 3.3.14: Se $\bar{I} = 0$ então 0 não é um ideal projetivamente irrelevante e temos

$$H(r, s; \bar{0}) = \begin{pmatrix} r+m \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+n \\ n \end{pmatrix},$$

de modo que $e_{mn}(\bar{0}) \neq 0$ e todos os demais $e_{ij}(\bar{0})$ são zero.

3.4 A Função de Hilbert de dois Ideais $\mathcal{M}$-primários

Antes de passarmos ao próximo resultado, vamos definir o anel de Rees e fazermos algumas observações que facilitarão a compreensão da demonstração do teorema abaixo.

Sejam A um anel, I um ideal de A e t uma indeterminada sobre A. Considere o anel graduado $A[t]$ com a graduação natural ($\mathbb{N}$-graduado). O conjunto

$$R_+ = R_+(I, A) = \{\sum c_n t^n | c_n \in I^n\} = \oplus_n I^n t^n \subset A[t],$$

é um subanel de $A[t]$. Se $I = (a_1, \ldots, a_r)$, então R_+ pode ser escrito como $R_+ = A[a_1 t, \ldots, a_r t]$, de modo que R_+ é Noetheriano se A também for. Agora seja $u = t^{-1}$, e considere $A[t, u] = A[t, t^{-1}]$ como um $\mathbb{Z}$-anel graduado da maneira usual

$$R = R(I, A) = R_+[u] = \{\sum c_n t^n | c_n \in I^n \text{ para } n \geq 0 \text{ e } c_n \in A \text{ para } n \leq 0\}.$$

O anel $R(I, A) \subset A[t, t^{-1}]$ é chamado o *anel de Rees* de A com relação ao ideal I. Mostra-se que $\dim R(I, A) = \dim A + 1$, por exemplo, ([9], pag. 122). O anel $R(I, t^{-1}) = A[a_1 t, \ldots, a_r t, t^{-1}]$ é chamado o *anel de Rees extendido* de A com relação ao ideal I. Mais geralmente, sejam A um anel, $I_1, \ldots, I_r$ ideais de altura positiva de A e $t_1, \ldots, t_r$ indeterminadas sobre A. O anel de Rees $R = A[I_1 t_1, \ldots, I_r t_r]$, é o subanel dos polinômios $A[t_1, \ldots, t_r]$ consistindo de todas as somas finitas do tipo

$$\sum a_{(\mu_1, \ldots, \mu_r)} t_1^{\mu_1} \cdots t_r^{\mu_r},$$

onde $a_{(\mu_1, \ldots, \mu_r)} \subset I_1^{\mu_1} \cdots I_r^{\mu_r}$, para todo $(\mu_1, \ldots, \mu_r) \in \mathbb{N}^r$.

Teorema 3.4.1: Se J é um ideal $\mathcal{M}$-primário e I é um ideal próprio qualquer do anel local $(A, \mathcal{M})$. Então para valores suficientemente grande de r e s,

$$\dim_{A/J}(J^r I^s / J^r I^{s+1})$$

é um polinômio em ρ e σ. Os termos da parte homogênea de grau $d-1$ neste polinômio pode ser escrita como

$$\frac{1}{(d-1)!}\{e_0(I|J)r^{(d-1)} + \ldots + \binom{d}{i} e_i(I|J)r^{(d-1-i)}s^i + \ldots + e_d(I|J)s^{(d-1)}\}.$$

Demonstração: Sejam I e J dois ideais de $(A, \mathcal{M})$ e J sendo $\mathcal{M}$-primário. Seja $u_0, \ldots, u_m$ uma base para I e $v_0, \ldots, v_n$ uma base para J. Considere o anel de Rees

$$R = A[t_1 u_0, \ldots, t_1 u_m; t_2 v_0, \ldots, t_2 v_n, t_2^{-1}],$$

onde t_1 e t_2 são indeterminadas sobre A. Os elementos de R são polinômios da forma

$$\sum_{i=0}^{s} \sum_{j=-p}^{q} c_{ij} t_1^i t_2^j,$$

onde $c_{ij} \in I^i J^j$ e $I^i = J^j = A$ se i, j são zero ou negativos.

Considere o ideal consistindo de todos os polinômios da forma

$$\sum_{i=0}^{s} \sum_{j=-p}^{q} c_{ij} t_1^i t_2^j,$$

onde $c_{ij} \subset I^i J^{j+1}$, denotado por $t_2^{-1}R$. Portanto $R/t_2^{-1}R$ consiste de todos os polinômios da forma

$$\sum_{i=0}^{s} \sum_{j=-p}^{q} c_{ij} t_1^i t_2^j,$$

onde $c_{ij} \in I^i J^j / I^i J^{j+1}$.

Mas, tomando $B = A/J$ temos

$$R/t_2^{-1}R = B[\overline{t_1 u_0}, \ldots, \overline{t_1 u_m}; \overline{t_2 v_0}, \ldots, \overline{t_2 v_n}]$$

desde que $A \cap t_2^{-1}R = J$, onde $\overline{t_1 u_i}$, $\overline{t_2 v_j}$ são, respectivamente, as imagens de $t_1 u_i$ e $t_2 v_j$ em $R/t_2^{-1}R$.

Agora considere o homomorfismo

$$B[x_0,\ldots,x_m;y_0,\ldots,y_n] \longrightarrow B[\overline{t_1u_0},\ldots,\overline{t_1u_m};\overline{t_2v_0},\ldots,\overline{t_2v_n}],$$

onde $x_0,\ldots,x_m;y_0,\ldots,y_n$ são indeterminadas independentes sobre A/J.

Se um elemento $F(X;Y)$ de $B[x_0,\ldots,x_m;y_0,\ldots,y_n]$ é levado sobre o elemento zero de $B[\overline{t_1u_0},\ldots,\overline{t_1u_m};\overline{t_2v_0},\ldots,\overline{t_2v_n}]$, então cada forma de $F(X;Y)$ é levado sobre o elemento zero de $B[\overline{t_1u_0},\ldots,\overline{t_1u_m};\overline{t_2v_0},\ldots,\overline{t_2v_n}]$, desde que o último é um anel graduado, e portanto cada forma de $F(X;Y)$ pertence ao núcleo do homomorfismo. Portanto, o núcleo do homomorfismo acima é um ideal bihomogêneo I, digamos, de $B[x_0,\ldots,x_m;y_0,\ldots,y_n]$. Portanto

$$B[\overline{t_1u_0},\ldots,\overline{t_1u_m};\overline{t_2v_0},\ldots,\overline{t_2v_n}] \cong B[x_0,\ldots,x_m;y_0,\ldots,y_n]/\bar{I}.$$

Então desde que B é um anel Artiniano primário e $\mathcal{I}=\mathcal{M}/J$ é seu único ideal primo, em virtude do isomorfismo acima, temos que

$$\dim_B(I^rJ^s/I^rJ^{s-1}) - \dim_B[\mathcal{F}(r,s)+\bar{I}]/\bar{I},$$

onde $\mathcal{F}(r,s)$ é o B-módulo de todas as formas de $B[X,Y]$ de bigrau (r,s); assim

$$\dim_B(I^rJ^s/I^rJ^{s+1}) = \dim_B \mathcal{F}(r,s) - \dim_B \mathcal{F}(r,s;I),$$

ou seja,

$$\dim_B(I^rJ^s/I^rJ^{s+1}) = H(r,s;\bar{I}),$$

onde $H(r,s;\bar{I})$ é a função de Hilbert do ideal bihomogêneo I no anel de polinômios $B[X,Y]$. Desde que nós já provamos que para valores suficientemente grande de r,s, $H(r,s;\bar{I})$ é um polinômio em r,s de grau $d-2$, onde d é a dimensão de $\bar{I}$, e assim o teorema está provado. ■

Observação 3.4.2: Se tivéssemos mostrado que todos os bigraus do polinômio homogêneo de mais alto grau do Teorema 3.3.11, fossem estritamente positivo, então todos os coeficientes de

$$\frac{1}{(d-1)!}\{e_0(I|J)r^{(d-1)}+\ldots+\binom{d}{i}e_i(I|J)r^{(d-1-i)}s^i+\ldots+e_d(I|J)s^{(d-1)}\},$$

também seriam positivos.

Apresentaremos um exemplo, embora sem detalhamento, para exemplificar uma situação em que nem todos os coeficientes $e_i(I|J)$, $i = 0, \ldots, d-1$, são maiores que zero.

Exemplo 3.4.3: ([26], pag. 114) Seja $S = k[[X, Y, Z, W]]$o anel das séries das potências formais sobre o corpo k nas indeterminadas X, Y, Z, W. Sejam $\mathcal{M} = (X, Y, Z, W)$, $P = (Y, W)$, $Q = (X, Z)$ e $F = (XY - ZW)$ ideais de S. Escreva $R = S/(F)$, $m = \mathcal{M}R$ e $q = QR$. Neste caso $I = m$ e $J = q$ e $e_0(m|q) = 2$, $e_1(m|q) = 1$ e $e_2(m|q) = 0$.

Voltamos agora para o principal teorema desta seção.

Teorema 3.4.4: Sejam I, J dois ideais $\mathcal{M}$-primários do anel local $(A, \mathcal{M})$. Então se $L_{I,J}(\rho, \sigma)$ denota o comprimento do ideal $I^\rho J^\sigma$. Então para valores suficientemente grandes de ρ e σ, $L_{I,J}(\rho, \sigma)$ um polinômio em ρ e σ, cujo grau total é igual a dimensão de A.

Demonstração: Se A é um anel primário Artiniano o teorema é trivialmente verdadeiro. Suponhamos então que A não é um anel primário. Ponha $B_1 = A/J, B_2 = A/I$. Então B_1 e B_2 são ambos anéis primários e pelo Teorema 3.4.1 temos que

$$\dim_{B_1}(I^r J^s / I^r J^{s+1}) = H(r, s; I),$$

onde $\bar{I}$ é um ideal bihomogêneo de $B_1[X, Y]$ que não é projetivamente irrelevante. Do mesmo modo podemos mostrar que

$$\dim_{B_2}(I^r J^s / I^{r+1} J^{s-}) = H(r, s; \bar{I}'),$$

onde $\bar{I}'$ é um ideal bihomogêneo de $B_2[X, Y]$ que não é projetivamente irrelevante. Portanto existem inteiros positivos ρ e σ tais que para todos os valores de $r \geq \rho_0, s \geq \sigma_0$

$$H(r, s; \bar{I}) = \sum_{i+j \leq d-2} a_{ij} \binom{r}{i} \binom{s}{j} \tag{3.12}$$

e

$$H(r, s; \bar{I}') = \sum_{i+j \leq d'-2} a'_{ij} \binom{r}{i} \binom{s}{j}, \tag{3.13}$$

onde a_{ij} e a'_{ij} são inteiros positivos e d e d' são, respectivamente, as dimensões de $\bar{I}$ e $\bar{I}'$.

Agora para $\rho > \rho_0, \sigma > \sigma_0$,

$$\begin{aligned} H_{I,J}(\rho,\sigma) - H_{I,J}(\rho_0,\sigma_0) &= \sum_{r=\rho_0}^{\rho-1} \dim_{B_2}(I^r J^{\sigma_0}/I^{r+1}J^{\sigma_0}) + \sum_{s=\sigma_0}^{\sigma-1} \dim_{B_1}(I^r J^s/I^r J^{s+1}) \\ &= \sum_{r=\rho_0}^{\rho-1}\left[\sum_{i+j\leq d'-2} a'_{ii}\begin{pmatrix} r \\ i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s-\sigma_0 \\ j\end{pmatrix}\right] + \\ &\quad \sum_{s=\sigma_0}^{\sigma-1}\left[\sum_{i+j\leq d-2} a_{ii}\begin{pmatrix} \rho \\ i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ j\end{pmatrix}\right] \\ &= \sum_{i+j\leq d'-2} a'_{ij}\left\{\begin{pmatrix} \rho \\ i+1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_0 \\ i+1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} \sigma_0 \\ j\end{pmatrix} + \\ &\quad \sum_{i+j\leq d-2} a_{ij}\left\{\begin{pmatrix} \sigma \\ j+1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ j+1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} \rho \\ i\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ou de outra forma

$$\begin{aligned} H_{I,J}(\rho,\sigma) - H_{I,J}(\rho_0,\sigma_0) &= \sum_{i+j\leq d-2} a_{ij}\begin{pmatrix} \rho \\ i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma \\ j+1\end{pmatrix} - \\ &\quad \sum_{i+j\leq d-2} a_{ij}\begin{pmatrix} \rho \\ i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_0 \\ j+1\end{pmatrix} + \\ &\quad \sum_{i+j\leq d'-2} a'_{ij}\begin{pmatrix} \rho \\ i+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_0 \\ j+k\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde k é uma constante.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} H_{I,J}(\rho,\sigma) - H_{I,J}(\rho_0,\sigma_0) &= \sum_{s=\sigma_0}^{\sigma-1} \dim_{B_1}(I^{\rho_0}J^s/I^{\rho_0}J^{s-1}) + \sum_{r=\rho_0}^{\rho-1} \dim_{B_2}(I^rJ^\sigma/I^{r+1}J^\sigma) \\ &= \sum_{s=\sigma_0}^{\sigma-1}\left[\sum_{i+j\le d-2} a_{ij}\binom{\rho}{i}\binom{s}{j}\right] + \\ &\quad \sum_{r=\rho_0}^{\rho-1}\left[\sum_{i+j\le d'-2} a'_{ij}\binom{r}{i}\binom{\sigma}{j}\right] \\ &\quad - \sum_{i+j\le d-2} a_{ij}\left\{\binom{\sigma}{j+1} - \binom{\sigma_0}{j+1}\right\}\binom{\rho_0}{i} + \\ &\quad \sum_{i+j\le d'-2} a'_{ij}\left\{\binom{\rho}{i+1} - \binom{\rho_0}{i+1}\right\}\binom{\sigma}{j}, \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} H_{I,J}(\rho,\sigma) - H_{I,J}(\rho_0,\sigma_0) &= \sum_{i+j\le d'-2} a'_{ij}\binom{\rho}{i+1}\binom{\sigma}{j} - \\ &\quad \sum_{i+j\le d'-2} a'_{ij}\binom{\rho_0}{j}\binom{\sigma}{j} + \\ &\quad \sum_{i+j\le d-2} a_{ij}\binom{\rho_0}{i}\binom{\sigma_0}{j+1} + k, \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde k é um inteiro constante.

Desde que I e J, não são ideais projetivamente irrelevantes nos anéis

$$B_1[x_0,\ldots,x_m;y_0,\ldots,y_n] \text{ e } B_2[x_0,\ldots,x_m;y_0,\ldots,y_n],$$

respectivamente, temos que os bigraus de I e J são maiores ou iguais a zero. Portanto comparando as duas últimas expressões obtemos $d = d'$, isto é, a dimensão de I em $B_1[x_0,\ldots,x_m;y_0,\ldots,y_n]$ é igual a dimensão de J em $B_2[x_0,\ldots,x_m;y_0,\ldots,y_n]$. Nós

podemos reescrever a última equação como segue:

$$H_{I,J}(\rho,\sigma) = \sum_{i+j\leq d\ \ 2} a_{ij}\binom{\rho}{i}\binom{\sigma}{j+1} - \sum_{i+j\leq d-2} a_{ij}\binom{\rho}{i}\binom{\sigma_0}{j+1} + \sum_{i+j\leq d'-2} a'_{ij}\binom{\rho}{i+1}\binom{\sigma_0}{j} + k, \tag{3.16}$$

onde k é um inteiro constante. Ou ainda,

$$H_{I,J}(\rho,\sigma) = \sum_{i+j\leq d\ \ 1} c_{ij}\binom{\rho}{i}\binom{\sigma_0}{j},$$

onde c_{ij} são inteiros e $c_{ij} \geq 0$ se $i+j = d-1$.

Se I' e J'' são outros dois ideais $\mathcal{M}$-primários de $(A,\mathcal{M})$, então pelo Teorema 1.1.10, segue que existem inteiros positivos m e n tais que

$$I^{\rho}J^{\sigma} \supset I'^{m\rho}J''^{m\sigma}$$

e

$$I'^{\rho}J'^{\sigma} \supset I^{n\rho}J^{n\sigma}.$$

Portanto valem

$$H_{I,J}(\rho,\sigma) \leq H_{I',J''}(m\rho,m\sigma)$$

e

$$H_{I',J''}(\rho,\sigma) \leq H_{I,J}(n\rho,n\sigma).$$

Estas duas equações mostram que o grau de $H_{I,J}(\rho,\sigma)$ é o mesmo que o grau de $H_{I',J''}(\rho,\sigma)$. Em particular, se $I = J$, então $H_{I,J}(\rho+\sigma) = H_I(\rho+\sigma)$. Mas o grau de $H_I(\rho+\sigma)$, que é um polinômio em $\rho+\sigma$, é igual a dimensão do anel local A. Portanto provamos que o grau do polinômio $H_I(\rho+\sigma)$ é igual a dimensão de A. ■

Vamos reformular o Teorema 3.4.4. Sejam $(A,\mathcal{M})$ um anel local de dimensão positiva d , I e J dois ideais $\mathcal{M}$-primários do anel local $(A,\mathcal{M})$. Sejam L a função comprimento e $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Então a função

$$B(r,s) : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$$

definida por $B(r,s) = L(A/I^r J^s)$, é um polinômio de grau total d, para valores suficientemente grande de r e s. Este polinômio é chamado o *polinômio de Bhattacharya* de I e J. Os termos de grau total d no polinômio de Bhattacharya de I e J têm a forma

$$\frac{1}{d!}\{e_0(I|J)r^d + \ldots + \left(\begin{array}{c} d \\ i \end{array} \right) e_i(I|J)r^{d-i}s^i + \ldots + e_d(I|J)s^d\}.$$

Definição 3.4.5: Os elementos

$$e_0(I|J), e_1(I|J), \ldots, e_d(I|J),$$

que aparecem no polinômio Bhattacharya de I e J, são todos números inteiros, chamados as *multiplicidades mixtas* dos ideais I e J.

No próximo capítulo, trataremos das multiplicidades mixtas de vários ideais $\mathcal{M}$-primários. Por enquanto, estudaremos as multiplicidades mixtas de dois ideais $\mathcal{M}$-primários I e J.

3.5 Multiplicidade Mixta e Dependência Integral

Nesta seção, estudaremos algumas das propriedades mais elementares das multiplicidades mixtas. Os resultados abordados aqui podem ser encontrados em [28]. A definição de redução de ideal aparece originalmente em [14].

Assim como a multiplicidade $e(I,A)$ de um ideal $\mathcal{M}$-primário foi estudada exaustivamente por muitos autores, o mesmo aconteceu com as multiplicidades mixtas, sendo esta última, tema atual de pesquisa de vários matemáticos . O nome multiplicidade mixta é devido a B. Teissier e a J.J. Risler.

Um dos primeiros resultados obtidos sobre os coeficientes do polinômio de Bhattacharya de dois ideais $\mathcal{M}$-primário I e J foi obtido por Rees em ([16], pag. 14). Neste trabalho, Rees provou que se I e J são dois ideais $\mathcal{M}$-primários de uma anel local $(A,\mathcal{M})$, então os termos $e_0(I|J)$ e $e_d(I|J)$ do polinômio de Bhattacharya de I e J são, respectivamente, iguais a $e(I,A)$ e $e(J,A)$, onde $e(I,A)$, denota a multiplicidade do ideal $\mathcal{M}$-primário I.

Vamos provar alguns resultados sobre as multiplicidades mixtas de dois ideais $\mathcal{M}$-primários I e J do anel local $(A, \mathcal{M})$.

Teorema 3.5.1: Sejam I e J dois ideais $\mathcal{M}$-primários do anel $(A, \mathcal{M}, d)$. Então para quaisquer r e s inteiros positivos vale:

$$e(I^r J^s) = e(I)r^d + \ldots + \left(\begin{array}{c} d \\ i \end{array} \right) e_i(I|J)r^{d-i}s^i + \ldots + e(J)s^d.$$

Demonstração: Pela Fórmula Limite de Samuel temos

$$e(I; A) = lim_{n\to\infty} \frac{d!}{n^d} L(A/I^n A).$$

Desde que $I^r J^s$ é um ideal $\mathcal{M}$-primário, para quaisquer r e s inteiros positivos vale

$$\begin{aligned}
e(I^r J^s) &= lim_{n\to\infty} \frac{d!}{n^d} L(A/(I^r J^s)^n A) \\
&= lim_{n\to\infty} \frac{d!}{n^d} L(A/(I^{rn} J^{sn}) A) \\
&= lim_{n\to\infty} \frac{d!}{n^d} B(rn, sn) \\
&= lim_{n\to\infty} \frac{d!}{n^d} \left\{ \frac{1}{d!} \sum_{i=0}^{d} \left(\begin{array}{c} d \\ i \end{array} \right) e_i(I|J)(rn)^{d-i}(sn)^i \right\} \\
&= lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{d} \left(\begin{array}{c} d \\ i \end{array} \right) e_i(I|J)r^{d-i}s^i \right\} \\
&= e(I)r^d + \ldots + \left(\begin{array}{c} d \\ i \end{array} \right) e_i(I|J)r^{d-i}s^i + \ldots + e(J)s^d,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ■

Em particular, tomando $r = s = 1$ no Teorema 3.5.1, obtemos a multiplicidade do produto de dois ideais $\mathcal{M}$-primários I e J.

$$e(IJ) = e(I) + \ldots + \left(\begin{array}{c} d \\ i \end{array} \right) e_i(I|J) + \ldots + e(J).$$

Agora , se $I = J$, então para quaisquer inteiros positivos r e s, temos

$$e(I^{r+s}) = e(I)r^d + \ldots + \left(\begin{array}{c} d \\ i \end{array} \right) e_i(I|I)r^{d-i}s^i + \ldots + e(I)s^d.$$

Mas por outro lado

$$e(I^{r+s}) = (r+s)^d e(I).$$

Segue destas igualdades que

$$e_i(I|I) = e(I),$$

para todo $i = 0, 1, \ldots d$.

Definição 3.5.2: Seja $(A, \mathcal{M}, d)$ um anel local. Dados K, I dois ideais de $(A, \mathcal{M}, d)$, dizemos que K é uma *redução* de I se:

i) $K \subseteq I$;

ii) $KI^n = I^{n+1}$ para algum inteiro positivo n.

Observação 3.5.3: Note que todo ideal é uma redução dele mesmo, ou seja, todo ideal admite pelo menos uma redução.

Lema 3.5.4: Sejam I e J dois ideais $\mathcal{M}$-primários do anel A tais que J é uma redução de I, valem as seguintes propriedades;
Se $JI^r = I^{r+1}$, então $JI^n = I^{n+1}$, para todo $n \geq r$ e, além disso, $J^m I^r = I^{r+m}$, para todo inteiro $r \geq 0$.

Demonstração: Segue diretamente da Definição 3.5.2 e por indução em m.

O próximo resultado estabelece uma relação entre a multiplicidade de um ideal $\mathcal{M}$-primário I e qualquer ideal J que seja redução de I.

Teorema 3.5.5: Sejam $(A, \mathcal{M})$ um anel Noetheriano local, J um ideal $\mathcal{M}$-primário e I uma redução de J. Então I é $\mathcal{M}$-primário e, além disso, para qualquer A-módulo M tem-se

$$e(J, M) = e(I, M).$$

Em particular, quaisquer duas reduções do ideal J têm a mesma multiplicidade.

Demonstração: Desde que I é uma redução de J, então existe um inteiro positivo

r tal que $IJ^r = J^{r+1}$ e disto segue que

$$J^{r+1} \subseteq I \subseteq J$$

e aplicando radicais temos que $\sqrt{I} = \mathcal{M}$, isto é, I é um ideal $\mathcal{M}$-primário.

Agora como $I \subset J$, temos que $e(J|M) \leq e(I|M)$. Resta então provar a desigualdade contrária. Mas as seguintes desigualdades são verdadeiras

$$L_A(M/I^{n+r}M) \geq L_A(M/J^{n+r}) = L_A(M/I^nJ^r) \geq L_A(M/I^n),$$

de modo que $e(J|M) \geq e(I|M)$. ■

O Teorema 3.5.5 tem uma recíproca parcial. Antes precisamos de uma definição necessária para a compreensão de seu enunciado.

Definição 3.5.6: Seja $(A, \mathcal{M})$ um anel Noetheriano local. Dizemos que A é um anel equidimensional se $\dim A/\mathcal{P} = \dim A < \infty$ para todos os ideais primos minimais $\mathcal{P}$ de A.

Teorema 3.5.7: ([16], pag. 16) Sejam A um anel equidimensional e I, J dois ideais $\mathcal{M}$-primários de A tais que $I \subset J$ e $e(I, A) = e(J, A)$, então I é uma redução de J.

Corolário 3.5.8: Seja $(A, \mathcal{M}, d)$ um anel local. Se K é uma redução de I então $e(I) = e(K)$.

Demonstração: Pelo Teorema 3.5.1, temos

$$e(KI^s) = e(K) + \ldots + \begin{pmatrix} d \\ i \end{pmatrix} e_i(I|J)s^i + \ldots + e(I)s^d$$

e

$$e(I^{1+s}) = e(I) + \ldots + \begin{pmatrix} d \\ i \end{pmatrix} e_i(I|I)s^i + \ldots + e(I)s^d.$$

Como esta expressão vale para todo s, temos $e(K) = e(I)$. ■

Lema 3.5.9: Se K é uma redução de I e L é uma redução de J, então K^rL^s é uma redução de I^rJ^s para quaisquer inteiros positivos r e s.

Demonstração: Como K é uma redução de I, existe um inteiro positivo n tal que

$$KI^n = I^{n+1}.$$

Da mesma forma, como L é uma redução de J, existe um inteiro positivo m tal que

$$LJ^m = J^{m+1}.$$

Assim pelo Lema 3.5.4, temos

$$K^r I^s = I^{r+s+1} \text{ e } L^s J^m = J^{m+s+1}.$$

Logo

$$\begin{aligned}(K^r L^s)(I^r J^s)^{nm} &= K^r I^{rnm} L^s J^{snm} \\ &= I^{rmn+r} J^{smn+s} \\ &= I^{r(mn+1)} J^{s(mn+1)} \\ &= (I^r J^s)^{mn+1}.\end{aligned}$$

■

Teorema 3.5.10: Se K é uma redução de I e L é uma redução de J, então

$$e_i(I|J) = e_i(K|L),$$

para todo $i = 1, \ldots d$.

Demonstração: Pelo Lema 3.5.9, $K^r L^s$ é uma redução de $I^r J^s$, para todos inteiros positivos r e s. Então temos

$$e(K^r L^s) = e(I^r J^s).$$

Mas

$$e(K^r L^s) = \sum_{i=0}^{d} e_i(K|L) r^{d-i} s^i$$

e

$$e(I^r J^s) = \sum_{i=0}^{d} e_i(I|J) r^{d-i} s^i.$$

Logo, concluímos que $e_i(I|J) = e_i(K|L)$, para todo $i = 1, \ldots d$. ■

Corolário 3.5.11: Sejam m e n dois inteiros positivos. Então para quaisquer inteiros positivos r e s temos

$$e_i(I^m|J^n) = m^{d-i}n^i e_i(K|L).$$

Demonstração: Para quaisquer inteiros positivos r e s temos

$$e(I^{rm}J^{sn}) = \sum_{i=0}^{d} e_i(I|J)(rm)^{d-i}(sn)^i.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} e(I^{rm}J^{sn}) &= e((I^m)^r(J^n)^s) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{d} e_i(I^m|J^n)r^{d-i}s^i. \end{aligned}$$

Comparando as duas expressões obtemos

$$e_i(I^m|J^n) = m^{d-i}n^i e_i(K|L).$$

■

Definição 3.5.12: Sejam x um elemento do anel A. Se I é um ideal de A, dizemos que x é *inteiro* sobre I se ele satisfaz uma equação da forma

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

onde $a_i \in I$, para $i = 1, \ldots n$.

Lema 3.5.13: Sejam A um anel e I um ideal de A. Um elemento $x \in A$ é inteiro sobre I se, e somente se, para algum $n \geq 0$,

$$I(I,x)^{n-1} = (I,x)^n.$$

Em outras palavras, I é uma redução de (I,x).

Demonstração: Note inicialmente que os ideais $I(I,x)^{n-1}$ e $(I,x)^n$, são realmente distintos, para qualquer valor de n, pois x^n não pertence a $I(I,x)^{n-1}$, apesar da inclusão $I(I,x)^{n-1} \subset (I,x)^n$, sempre valer, independente do valor de n. Na verdade,

x^n é o único elemento de $(I,x)^n$ que não pertence a $I(I,x)^{n-1}$. Mas, como por hipótese, x é inteiro sobra I, então ele satisfaz uma equação da forma

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

onde $a_i \in I$, para $i = 1, \ldots n$, ou seja,

$$x^n = -(a_1x^{n-1} + \ldots + a_n) \in (I,x)^{n-1}.$$

Reciprocamente, seja $x \in A$. Então para todo $n \geq 0$, temos $x^n \in (I,x)^n$. Como, por hipótese, $I(I,x)^{n-1} = (I,x)^n$, então $x^n \in I(I,x)^{n-1}$, ou seja,

$$x^n = \sum_{i=1}^{n-1} a_ib_i, \text{ onde } a_i \in I, b_i \in (I,x)^{n-1}, i = 1 \ldots, n-1,$$

e isto mostra que x é integral sobre I. ■

Teorema 3.5.14: Sejam $(A,\mathcal{M})$ um anel Noetheriano local e $I \subset J$ dois ideais de A. Então I é uma redução de J se, e somente se, todo elemento de J é integral sobre I.

Demonstração: Suponha que I seja uma redução de J e seja $x \in J$. Como I é uma redução de J, existe um inteiro $n > 0$ tal que $IJ^n = J^{n+1} \subset I$. Então $x^{n+1} \in J^{n+1} \subset I$. Portanto, x^{n+1} é integral sobre I, em particular, x é integral sobre I.

Reciprocamente, suponha que todo elemento de J é integral sobre I e suponha que J seja gerado pelos elementos $y_1, \ldots, y_r$, isto é, $J = (y_1, \ldots, y_r)$. Pelo Lema 3.5.13, para qualquer índice $i = 1, \ldots, r$, existem inteiros positivos $n_1, \ldots, n_r$, tais que

$$I(I,y_i)^{n_i-1} = (I,y_i)^{n_i}.$$

Antes de continuarmos a demonstração, observemos que se um elemento de J é integral sobre I, também é integral sobre todo subconjunto $K \subseteq J$ que contenha I.

Como y_1 é integral sobre I tem-se $I(I,y_1)^{n_1-1} = (I,y_1)^{n_1}$. Mas y_2 é integral sobre (I,y_1), ou seja, existe um inteiro positivo n_2 tal que pelo Lema 3.5.13,

$$(I,y_1)(I,y_1,y_2)^{n_2-1} = (I,y_1,y_2)^{n_2}. \tag{3.17}$$

Acontece que $I(I,y_1)^{n_1-1} = (I,y_1)^{n_1}$, e multiplicando a Equação (3.14) por $n_1 - 1$ e usando as propriedades de redução, obtemos

$$(I,y_1)^{n_1}(I,y_1,y_2)^{n_2-1} = (I,y_1,y_2)^{n_2+n_1-1}.$$

Mas por outro lado, temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}(I,y_1)^{n_1}(I,y_1,y_2)^{n_2-1} &= I(I,y_1)^{n_1-1}(I,y_1,y_2)^{n_2-1} \\ &= I(I,y_1,y_2)^{n_2\cdot n_1\ \ 2},\end{aligned}$$

ou seja,

$$I(I,y_1,y_2)^{n_2+n_1-2} = (I,y_1,y_2)^{n_2+n_1-1}.$$

Prosseguindo desta maneira, obteremos o resultado. ■

Vamos provar agora o principal teorema desta seção.

Teorema 3.5.15: Sejam I e J dois ideais $\mathcal{M}$-primários de um anel equidimensional local $(A,\mathcal{M})$ tais que $I \subseteq J$. Então J é integral sobre I se, e somente se, $e(I,A) = e(J,A)$.

Demonstração: Suponha que J é integral sobre I. Então pelo Teorema 3.5.14, I é uma redução de J e pelo Teorema 3.5.5, $e(I|A) = e(J|A)$.

Reciprocamente, suponha que $e(I|A) = e(J|A)$, então pelo Teorema 3.5.7, I é uma redução de J. Mas pelo Teorema 3.5.14, J é integral sobre I. ■

Capítulo 4

Multiplicidades Mixtas

4.1 Introdução

No final da Seção 3.5, definimos a multiplicidade mixta de dois ideais $\mathcal{M}$-primários I e J do anel local $(A, \mathcal{M})$, ver Definição 3.4.5. As multiplicidades mixtas para ideais, foram definidas inicialmente por Teissier e Risler em ([23], pag. 302), onde eles estudaram polinômios de Hilbert e seus coeficientes para um conjunto $\mathcal{U} = \{I_1, \ldots, I_s\}$, de ideais $\mathcal{M}$-primários arbitrários, usando o que eles chamaram de elementos "suficientemente gerais". Teissier, mostrou que as multiplicidades mixtas, eram na verdade, a multiplicidade de Samuel de um ideal $\mathcal{M}$-primário, gerado por um conjunto de elementos suficientemente gerais.

4.2 Resultados Básicos

Nesta seção, definiremos alguns conceitos necessários para a compreensão da próxima seção e também servirá para fixarmos a notação que usaremos neste capítulo. O principal conceito desta seção, é o de elemento superficial. Procuraremos mostrar ao leitor, a importância deste conceito, como um artifício para a passagem do passo indutivo de $n-1$ para n. Uma boa referência para este conceito é ([34], pag. $285-296$). Uma pergunta que pode surgir é a seguinte: não é possível imitar a demonstração do Teorema 3.4.4, para o caso de mais de dois ideais $\mathcal{M}$-primários?. A resposta é afirmativa, como se pode conferir em [19], mas neste caso, como no Teorema 3.4.4, não

conseguimos obter nenhuma informação sobre os coeficientes do termo homogêneo de maior grau do polinômio de Bhattacharya.

Teorema 4.2.1: ([34], pag. 284) Sejam I um ideal de um anel Noetheriano local $(A, \mathcal{M})$ e M um A-módulo Noetheriano. Então a aplicação,

$$H(n, I) = L_A(M/I^n M)$$

é um polinômio de grau d em n, para n suficientemente grande.

Seja I um ideal $\mathcal{M}$-primário do anel Noetheriano local $(A, \mathcal{M})$ e seja $x \in I$. Então I/Ax também é Noetheriano do anel A/Ax. O próximo teorema estabelece uma relação entre os polinômios $H(n, I)$ e $H(n, I/Ax)$.

Teorema 4.2.2: ([34], pag. 285) Seja I um ideal $\mathcal{M}$-primário de um anel local $(A, \mathcal{M})$ e seja $x \in I$. Então

$$H(n, I/xA) = H(n, I) - L_A(I^n : xA).$$

Seja s o maior inteiro tal que $x \in I^s$, mas $x \notin I^{s-1}$. Note que $I^{n-s} \subseteq (I^n : Ax)$. Se pudéssemos provar que $(I^n : Ax)$ não é muito diferente de I^{n-s}, então teríamos provado que $H(n, I/Ax)$ não é muito diferente de $H(n, I) - H(n-s, I)$, uma situação que é muito útil no caso $s = 1$, para provas que usam o processo indutivo.

Definição 4.2.3: Seja I um ideal do anel local $(A, \mathcal{M})$. Dizemos que um elemento $x \in A$ é *superficial* de ordem s para o ideal I, se $x \in I^s$ e existe um inteiro positivo c tal que

$$(I^n : Ax) \cap I^c = I^{n-s},$$

para todo n suficientemente grande.

Observação 4.2.4: A definição de elemento superficial apareceu originalmente em ([20], pag. 182). No caso do corpo ser finito, elementos superficiais de uma determinada ordem podem não existir. Por exemplo, o ideal maximal de

$$k\{x, y\}/(xy(x + y)),$$

onde k é um corpo com dois elementos, não possui elemento superficial de ordem 1.

Vejamos como fica o Teorema 4.2.2, com a hipótese de um elemento superficial de ordem s para o ideal I.

Lema 4.2.5: ([34], pag. 286) Seja I um ideal $\mathcal{M}$-primário do anel local $(A, \mathcal{M})$ e x um elemento de A superficial de ordem s para I. Então existe um inteiro c tal que

$$H(n, I) - H(n - s, I) \leq H(n, I/Ax) \leq H(n, I) - H(n - s, I) + H(c, I),$$

para todo n suficientemente grande.

O Lema 4.2.5 mostra, que se x é um elemento superficial de ordem s para um ideal I do anel A, então para n suficientemente grande, o polinômio $H(n, I/Ax)$ difere do polinômio $H(n, I) - H(n - s, I)$, apenas por uma constante.

O seguinte lema prova que elementos superficiais realmente existem.

Lema 4.2.6: ([34], pag. 286) Seja I um ideal $\mathcal{M}$-primário do anel $(A, \mathcal{M})$. Então existe um inteiro s e um elemento x do anel A tal que x é superficial de ordem s para o ideal I, isto é,

$$(I^n : Ax) \cap I^c = I^{n-s},$$

para todo inteiro n suficientemente grande.

Como estamos interessados no passo indutivo, gostaríamos que existisse elementos superficiais de ordem 1 para o ideal I, e que além disso, esses elementos possuíssem certas propriedades que fossem úteis em provas por indução. O próximo lema é uma resposta para esta pergunta.

Teorema 4.2.7: ([34], pag. 287) Seja I um ideal $\mathcal{M}$-primário do anel local $(A, \mathcal{M})$ e suponha além disso que o corpo residual $A/\mathcal{M}$ seja infinito. Então para cada conjunto finito de ideais $I_1, \ldots, I_r$, tais que $\sqrt{I_i} \neq \mathcal{M}$ e qualquer inteiro positivo $s > 0$, existe um elemento $x \in A$ que é superficial de ordem s e que não pertence a nenhum I_i, $i = 1, \ldots, r$.

Em ([34], pag. 291), mostra-se que se I é um ideal $\mathcal{M}$-primário e x é superficial para o ideal I, então

$$\dim(A/Ax) = \dim A \quad 1.$$

Sejam $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k)$ e $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_k)$ dois elementos de $\mathbb{Z}^n$. Dizemos que $\mathbf{i} \leq \mathbf{j}$ se $i_p \leq j_p$ para todo $p = 1, \ldots, k$. Ainda temos

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_k \\ j_k \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} + \mathbf{e}_p \\ \mathbf{j} + \mathbf{e}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} + \mathbf{e}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix},$$

onde $\mathbf{e}_p$ é o elemento de $\mathbb{Z}^n$ que tem 1 na p-ésima componente e 0 nas demais.

Lema 4.2.8: ([19], pag. 24) Seja $H(\mathbf{i})$ uma função definida para todo $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^n$ e suponha que

$$H(\mathbf{i}) - H(\mathbf{i} - \mathbf{e}_p) = \sum_{t=0}^{m} c_p \begin{pmatrix} \mathbf{i} + \mathbf{p} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}.$$

para $c_p \in \mathbb{Z}$ e para todo $\mathbf{i} \geq \mathbf{e}_n$. Então

$$\begin{aligned} H(\mathbf{i}) \quad = \quad & \textstyle\sum_{p=0}^{m} c_p \begin{pmatrix} \mathbf{i} \ + \ \mathbf{p} + \mathbf{e}_n \\ \mathbf{p} + \mathbf{e}_n \end{pmatrix} + H(i_1, \ldots, i_{n-1}, j_n) - \\ & \textstyle\sum_{p=0}^{m} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{i}} + \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_n + p_n - 1 \\ p_n + 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{i} \geq \mathbf{j}$, onde $\tilde{\mathbf{i}} = (i_1, \ldots, i_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n \ 1}$.

O somatório $\sum_{p=0}^{m}$, significa que estamos somando sobre todos os elementos de $\mathbb{Z}^n$ entre 0 e m com a ordem acima definida.

Vamos definir agora o que entenderemos por um elemento ser suficientemente geral.

Definição 4.2.9: Seja I um ideal do anel $(A, \mathcal{M})$. Suponha também que $a_1, \ldots, a_l$ seja um base minimal de I. Suponha que exista um aberto de Zariski $\mathcal{U} \subset k^l$ tal que se $a = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_i$ e $(\alpha_1 + \mathcal{M}, \ldots, \alpha_l + \mathcal{M}) \in \mathcal{U}$, então a satisfaz uma propriedade dada. Então esta propriedade é chamada *suficientemente geral* e qualquer elemento de I que satisfaça uma propriedade suficientemente geral é chamado *elemento suficientemente geral* com relação a esta propriedade.

A vantagem de uma propriedade ser suficientemente geral é que se o corpo k é infinito, é possível encontrar pelo menos um elemento satisfazendo finitas propriedades suficientemente gerais, pois a intersecção finita de abertos de Zariski é ainda um aberto de Zariski.

4.3 A Definição de Multiplicidade Mixta

Nesta seção, vamos provar o Teorema 3.4.4, para o caso de um número finito de ideais $\mathcal{M}$-primários. Quando provamos o Teorema 3.4.4, definimos os coeficientes do polinômio homogêneo de maior grau, como as multiplicidades mixtas de dois ideais $\mathcal{M}$-primários, mas não demos informações de quem elas eram realmente, exceto sobre algumas de suas propriedades elementares. Provaremos aqui, que elas são na verdade, a multiplicidade de Samuel de um ideal $\mathcal{M}$ primário, gerado por elementos suficientemente gerais, mais precisamente, de elementos superficiais.

O teorema abaixo, é o principal resultado deste trabalho.

Teorema 4.3.1: ([23], pag. 302) Seja $(A, \mathcal{M}, k, d)$ um anel Noetheriano local, onde k é um corpo infinito. Suponha que $I_1, \ldots, I_s$ são ideais $\mathcal{M}$-primários e que M seja um A-módulo finitamente gerado. Então existe um inteiro $c \geq 0$ tal que

$$L(M/I_1^{n_1} \cdots I_s^{n_s} M),$$

é um polinômio com coeficientes racionais em $n_1, \ldots, n_s$, de grau $\dim(M)$, se $n_i \geq c$, para cada $i, 1 \leq i \leq s$.

O polinômio homogêneo de grau $\dim(M)$ em $L(M/I_1^{n_1} \ldots I_s^{n_s} M)$ pode ser escrito

como

$$\sum_{d_1+\ldots+d_s=\dim(M)} \frac{1}{d_1!\ldots d_s!}[I^{[d_1]},\ldots,I^{[d_s]};M]\, n_1^{d_1}\cdots n_s^{d_s}$$

onde $[I^{[d_1]},\ldots,I^{[d_s]};M]$ é um inteiro positivo.

Antes de passarmos a prova do teorema, definiremos os símbolos $[I^{[d_1]},\ldots,I^{[d_s]};M]$, e enunciaremos um lema que garantirá a existência de elementos suficientemente gerais com propriedades necessárias a demonstração do Teorema 4.3.1. Também provaremos vários lemas necessários para a sua demonstração.

Definição 4.3.2: O inteiro positivo $[I^{[d_1]},\ldots,I^{[d_s]};M]$ é chamado a *multiplicidade mixta* do módulo M de tipo $(d_1,\ldots,d_s)$ com relação aos ideais $I_1,\ldots,I_s$.

Pretendemos no final desta seção, mostrar que o símbolo $[I^{[d_1]},\ldots,I^{[d_s]};M]$ é na verdade, a multiplicidade $e(I_1^{[d_1,\lambda_1]}+\ldots+I_s^{[d_s,\lambda_s]})$, de um ideal gerado por d_1 elementos superficiais de I_1,..., d_s elementos superficiais de I_s. Em resumo, queremos mostrar que

$$[I^{[d_1]},\ldots,I^{[d_s]};M] = e(I_1^{[d_1,\lambda_1]}+\ldots+I_s^{[d_s,\lambda_s]}).$$

Lema 4.3.3: ([23], pag. 303) Sejam $I_1,\ldots,I_s$ ideais $\mathcal{M}$-primários num anel Noetheriano local $(A,\mathcal{M},d,k)$ com corpo residual k infinito e M um A-módulo finitamente gerado. Defina $I=I_1$ e $J=(I_2,\ldots,I_s)$, $\mu=(n_2,\ldots,n_s)$ e $J^\mu=I_2^{n_2}\cdots I_s^{n_s}$. Então dado um sistema minimal de geradores $a_1,\ldots,a_l$ de I, existe um aberto não-vazio de Zariski $\mathcal{U}\subset k^l$ e inteiros n_0 e $\mu_0=(n_2^0,\ldots,n_s^0)$ tais que para $a=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i a_i$ tem-se para $n\geq n_0$, $\mu\geq\mu_0$ e $(\alpha_1+\mathcal{M},\ldots,\alpha_l+\mathcal{M})\subset U$. Além disso, para $a\in I$ nestas condições temos

$$(I_1^{n_1}\cdots I_s^{n_s}M :_M a)\cap I_1^c\cdots I_s^{n_s}M = I_1^{n_1}\cdots I_s^{n_s}M. \tag{4.1}$$

Definição 4.3.4: Um elemento $a\in I$ nas condições do Lema 4.3.3 é chamado um *elemento superficial* para $I_1,\ldots,I_s$ e M.

Observação 4.3.5: O Lema 4.3.3, mostra que elementos superficiais sempre existem, desde que A seja um anel local com corpo residual infinito. O mesmo lema

também prova que existem $a_1, \ldots, a_d$ elementos do anel A satisfazendo a seguinte condição: os primeiros d_1 são elementos superficiais pertencentes a $I_1, \ldots I_s$, e os últimos d_s, são elementos superficiais pertencentes a I_s.

O próximo resultado é o Lema de Artin-Rees generalizado.

Lema 4.3.6: (**Lema de Artin-Rees Generalizado**) ([9], pag. 63) Sejam $I_1, \ldots, I_s$ ideais $\mathcal{M}$-primários do anel local $(A, \mathcal{M})$ e M um A-módulo Noetheriano. Então existem um inteiro n_0 e $\mu_0 \in \mathbb{Z}^{n-1}$ tais que

$$I^n J^\mu M \cap aM = I^{n-n_0} J^{\mu-\mu_0}(I^{n_0} J^{\mu_0} M \cap aM),$$

para todos $n \geq n_0$ e $\mu \geq \mu_0$.

Lema 4.3.7: ([23], pag. 305) Sejam $I_1, \ldots, I_s$, μ, μ_0, como no Lema 4.3.6 com $\mu \geq \mu_0$ e n suficientemente grande. Então temos

$$(I^n J^\mu M :_M a) = (0 :_M a) + (I^{v_1} J^\mu M)$$

e v_1 como em (4.1).

Demonstração: Seja $m \in (0 :_M a) + I^{v_1} J^\mu M$. Então $m = m_1 + m_2$, onde $m_1 \in (0 :_M a)$ e $m_2 \in I^{v_1} J^\mu M$. Segue disto que $am_1 = 0$. Além disto, $I^{v_1} J^\mu M \subseteq (I^{n_1} J^\mu M :_M a)$, pela 4.1, o que nos fornece $m_2' \in (I^n J^\mu M :_M a)$, ou seja, $am_2' \in I^n J^\mu M$. Portanto,

$$am = am_1 + am_2' = am_2' \in I^n J^\mu M,$$

ou seja, $m \in (I^n J^\mu M :_M a)$.

Reciprocamente, seja $m \in (I^n J^\mu M :_M a)$, isto é, $am \in I^{n_1} J^\mu M$. Então pelo Lema 4.3.6, existem n_0 e μ_0 tais que

$$I^n J^\mu M \cap aM = I^{n-n_0} J^{\mu-\mu_0}(I^{n_0} J^{\mu_0} M \cap aM),$$

desde que $n \geq n_0$ e $\mu \geq \mu_0$. Como $I^{n-n_0} J^{\mu-\mu_0}(I^{n_0} J^{\mu_0} M \cap aM) \subseteq I^{n-n_0} J^{\mu-\mu_0}$, segue que $am \in I^{n-n_0} J^{\mu-\mu_0} aM$. Então escrevemos, $am = am'$ com $m' \in I^{n-n_0} J^{\mu-\mu_0}$. Como

os ideais I_i são $\mathcal{M}$-primários, se v é suficientemente grande, tem-se $m' \in I^{v-v_0}M \subseteq I^{v_1}J^{\mu_0}M$. Portanto, para v suficientemente grande, $m' \in I^{v_1}J^{\mu}M$. Finalmente

$$am = a(m - m') + am' = am' \in I^{v_1}J^{\mu}M,$$

desde que $m - m' \in (0 :_M a)$. Isto prova a igualdade. ■

Lema 4.3.8: ([23], pag. 305) Sejam $I_1, \ldots, I_s$, como no Lema 4.3.6 com μ e n suficientemente grande. Então

$$(I^nJ^{\mu}M :_M a)/(I^{n-1}J^{\mu}M) \simeq (0 :_M a).$$

Demonstração: Pelo Lema 4.3.3, $(I^nJ^{\mu}M :_M a) = (0 :_M a) + (I^{v_1}J^{\mu}M)$, v_1 como em 4.1. Então segue que

$$\begin{aligned}
(I^nJ^{\mu}M :_M a)/(I^{n-1}J^{\mu}M) &\simeq I^nJ^{\mu}M :_M a)/((I^nJ^{\mu}M :_M a) \cap I^{v_1}J^{\mu}M) \\
&\simeq ((I^nJ^{\mu}M :_M a) + I^{v_1}J^{\mu}M))/I^{v_1}J^{\mu}M \\
&= ((0 :_M a) + I^{v_1}J^{\mu}M) + I^{v_1}J^{\mu}M))/I^{v_1}J^{\mu}M \\
&\simeq (0 :_M)/(I^{v_1}J^{\mu}M \cap (0 :_M a)).
\end{aligned}$$

Fixemos $\mu \geq \mu_0$. O comprimento do lado direito da última equação, depende de v_1, mas por sua vez, o lado esquerdo não depende. Como $I^nJ^{\mu}M \cap (0 :_M a)$ é decrescente, então necessariamente devemos ter

$$I^{v_1}J^{\mu}M \subset (0 :_M a),$$

como queríamos demonstrar. ■

Lema 4.3.9: ([23], pag. 304) Sejam $I_1, \ldots, I_s$ ideais $\mathcal{M}$-primários, n e μ suficientemente grandes. Então a sequência

$$0 \longrightarrow (I^nJ^{\mu}M :_M a)/I^{n-1}J^{\mu}M \longrightarrow M/I^{n-1}J^{\mu}M \longrightarrow$$
$$M/I^nJ^{\mu}M \longrightarrow M/I^nJ^{\mu}M + aM \longrightarrow 0$$

é exata, onde a aplicação

$$M/I^{n-1}J^{\mu}M \longrightarrow M/I^nJ^{\mu}M$$

é a multiplicação pelo elemento superficial $a \in I_1$.

Demonstração: Considere a aplicação $\times a : M/I^{n-1}J^{\mu}M \longrightarrow M/I^{n}J^{\mu}M$. Esta aplicação é definida por

$$m + I^{n-1}J^{\mu}M = am + I^{n-1}J^{\mu}M.$$

Ela é bem definida e $Ker(\times a) = (I^{n}J^{\mu}M :_{M} a)/I^{n-1}J^{\mu}M$.

Por outro lado,

$$M/(I^{n}J^{\mu}M + aM) \simeq (M/I^{n}J^{\mu}M)/a(M/I^{n}J^{\mu}M).$$

Portanto a aplicação

$$M/I^{n}J^{\mu}M \longrightarrow (M/(I^{n}J^{\mu}M))/a(M/I^{n}J^{\mu}M)$$

definida por

$$m \longmapsto m + a(M/(I^{n}J^{\mu}M)),$$

é bem definida e sobrejetora. Além disso, $Ker() = Im(\times a) = a(M/I^{n}J^{\mu}M)$. Portanto a sequência é de fato exata. ■

Demonstração do Teorema 4.3.1. A prova é por indução sobre $d = \dim M$. Se $d = 0$, então, por definição, $\dim(A/ann(M)) = 0$. Agora $\mathcal{M}/ann(M)$ é o único ideal primo de $A/ann(M)$ e pelo fato de $\dim(A/ann(M)) = 0$, ele também é seu único ideal primo. Como $\dim(A/ann(M)) = 0$, então todo ideal de $A/ann(M)$ é nilpotente. Segue que existe um inteiro positivo r dependendo de $\mathcal{M}$ tal que $(\mathcal{M}/ann(M))^{r} = \{0\}$ ($\{0\}$ é o submódulo nulo de $A/ann(M)$).

Se para algum $n_1, \ldots, n_s$ tivermos $I_1^{n_1} \cdots I_s^{n_s} \subseteq ann(M)$, então

$$M/(I_1^{n_1} \cdots I_s^{n_s}M) \simeq M,$$

e portanto, $H_M(n_1, \ldots, n_s) = L(M)$. Se $I_1^{n_1} \cdots I_s^{n_s}$ não está contido em $ann(M)$, então o ideal $(I_1^{n_1} \cdots I_s^{n_s} + ann(M))/ann(M)$ é nilpotente, isto é, existe um inteiro positivo, r' tal que

$$((I_1^{n_1} \cdots I_s^{n_s} + ann(M))/ann(M))^{r'} = 0,$$

ou seja $(I_1^{n_1} \cdots rI_s^{n_s})^{r'} \subseteq ann(M)$. Portanto para $n_1, \ldots, n_s$ suficientemente grande, podemos novamente definir $H_M(n_1, \ldots, n_s) = L(M)$.

Suponhamos que o teorema já foi provado para A-módulos Noetherianos de dimensão $d-1$, isto é, se $\dim M = d-1$ e $I_1, \ldots, I_s$ é um conjunto finito de ideais $\mathcal{M}$-primários do anel local $(A, \mathcal{M})$, então o comprimento A-módulo

$$M/I^n J^\mu M$$

é um polinômio de grau $d-1$. Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow (I^n J^\mu M :_M a)/I^{n-1} J^\mu M \longrightarrow M/I^{n-1} J^\mu M \longrightarrow$$
$$M/I^n J^\mu M \longrightarrow M/I^n J^\mu M + aM \longrightarrow 0$$

do Lema 4.3.9. Então pela aditividade da função comprimento, temos

$$\begin{aligned} L_A(M/I^n J^\mu M + aM) &= L_A(M/I^n J^\mu M) - \\ & \quad L_A(I^{n-1} J^\mu M) + L_A(I^n J^\mu M :_M a)/I^{n-1} J^\mu M). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Mas, desde que pelo Lema 4.3.8, $(I^n J^\mu M :_M a)/I^{n-1} J^\mu M \simeq (0 :_M a)$, temos da Equação (4.2) que

$$L_A(M/I^n J^\mu M + aM) = L_A(M/I^n J^\mu M) - L_A(I^{n-1} J^\mu M) + L_A((0 :_M a)), \tag{4.3}$$

ou seja

$$H_M(n_1, \ldots, n_s) - H_M(n_1 - 1, \ldots, n_s) = H_{M/aM}(n_1, \ldots, n_s) - L_A(0 :_M). \tag{4.4}$$

Acontece que $\dim(M/aM) = \dim(M) - 1$. Portanto, segue disto e pela hipótese de indução, que $H_{M/aM}(n_1, \ldots, n_s)$ é um polinômio de grau $d-1$, para $n_1, \ldots, n_s$ suficientemente grande. Como os polinômios $H_M(n_1, \ldots, n_s) - H_M(n_1 - 1, \ldots, n_s)$ diferem de $H_{M/aM}(n_1, \ldots, n_s)$ apenas por uma constante, então segue do Lema 4.2.8, que $H_M(n_1, \ldots, n_s)$ é um polinômio de grau d, como queríamos demonstrar. ■

Vamos agora mostrar que a multiplicidade mixta, é de fato, a multiplicidade de Samuel de um ideal gerado por uma sequência de elementos superficiais. Para isto, considere os termos de mais alto grau do polinômio

$$H_M(n_1, \ldots, n_s) - H_M(n_1 - 1, \ldots, n_s) = H_{M/aM}(n_1, \ldots, n_s).$$

Então, segue que

$$[I_1^{d_1}, \ldots, I_s^{d_s}; M] = [I_1^{d_1 - 1}, \ldots, I_s^{d_s}; M/aM].$$

Acontece que pelo Lema 4.3.3, é possível encontrar um elemento superficial para $I_1, \ldots, I_s$ e M/aM. Então prosseguindo teremos encontrado

$$[I_1^{d_1}, \ldots, I_s^{d_s}; M] = [a_d; M/(a_1, \ldots, a_{d-1})M],$$

onde a_d pertence a pelo menos um dos ideais $I_1, \ldots, I_s$, e é um elemento superficial para $I_1, \ldots, I_s$ e $M/(a_1, \ldots, a_{d-1})M$. Mas, suponhamos que $a_d \in I_1$, então mostra-se em ([34], pag. 294 – 295) que se $\dim A = 1$ então a multiplicidade do ideal I_1 e do ideal $a_d A$ coincidem. Mas $\dim (M/(a_1, \ldots, a_{d-1})M) = 1$, logo

$$\begin{aligned} e(a_d, M/(a_1, \ldots, a_{d-1})M) &= e(.|\, M/(a_1, \ldots, a_{d-1})M) - e(0 :_{M/(a_1, \ldots, a_{d-1})M} a_d) \\ &= L_A(M/(a_1, \ldots, a_{d-1})M) + L_A((0 :_{M/(a_1, \ldots, a_{d-1})M} a_d)), \end{aligned}$$

que é a multiplicidade de Samuel de um ideal gerado por uma sequência de elementos superficiais consistindo de d elementos, sendo que os d_1 são elementos de $I_1, \ldots$, e os d_s são elementos de I_s.

Corolário 4.3.10: ([23], pag. 306) Sejam $(A, \mathcal{M}, k, d)$, $I_j\, 1 \leq j \leq s$, M como no enunciado do Teorema 4.3.1. Seja $(d_1, \ldots, d_s))$ inteiros tais que $d_1 + \ldots + d_s = \dim M$. Então os seguintes símbolos

$$\begin{aligned} &e(I_i; M/(I_1^{[d_1, \lambda_1]} + \ldots + \hat{I}_i^{[d_i, \lambda_i]} + \ldots + I_s^{[d_s, \lambda_s]}) \\ &e(I_i^{[d_i, \lambda_i]}; M/(I_1^{[d_1, \lambda_1]} + \ldots + \hat{I}_i^{[d_i, \lambda_i]} + \ldots + I_s^{[d_s, \lambda_s]}) \\ &e(I_j; M/(I_1^{[d_1, \lambda_1]} + \ldots + \hat{I}_j^{[d_j, \lambda_j]} + \ldots + I_s^{[d_s, \lambda_s]}), \end{aligned}$$

são iguais.

Demonstração: Segue do comentário acima. ■

Em particular, se A é um anel Noetheriano local e Cohen-Macaulay com corpo residual infinito e I, J são dois ideais $\mathcal{M}$-primários, então a aplicação $H : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$H(n_1, n_2) = L_A(A/I^{n_1} J^{n_2})$$

assume os mesmos valores que um polinômio de grau $d = \dim A$ e o termo de mais alto grau se escreve como

$$\bar{H}(n_1, n_2) - \frac{1}{d!}\{\sum_{i=0}^{d} \begin{pmatrix} d \\ i \end{pmatrix} e_A(I^{[d-i]}, J^i) n_1^{d-i} n_2^i\},$$

onde

$$e_A(I^{[d-i]}, J^i) = L_A(A/(I^{[d-i]} + J^{[i]})A)$$

e $I^{[d-i]} + J^{[i]})A$ é um ideal gerado por uma sequência de elementos superficiais consistindo de $d - i$ elementos de I e i elementos de J.

Capítulo 5

Aplicações

Neste capítulo, daremos uma aplicação geométrica das multiplicidades mixtas. Consideraremos o anel $\mathcal{O}_{n-1} - \mathbb{C}\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$, das séries convergentes sobre $\mathbb{C}$, localizado no ideal maximal $\mathcal{M} = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$ e continuaremos chamando seu ideal maximal de $\mathcal{M}$.

5.1 O Número de Milnor

Para uma melhor compreensão do vocabulário matemático do início desta seção recomendamos [24].

Seja $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um polinômio não constante em $n+1$ variáveis, e $V = f^{-1}(0)$ a hipersuperfície complexa definida por f, com singularidade isolada no ponto 0.

Dado $\epsilon > 0$, consideremos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}^{n+1}$.

$$D_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : |z| < \epsilon\}$$

$$S_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : |z| = \epsilon\}$$

$$K = V \cap S_\epsilon.$$

Teorema 5.1.1: (**Teorema da Fibração de Milnor**) ([24], pag. 5) Seja z um ponto qualquer de V e se S_ϵ é uma esfera suficientemente pequena centrada em z,

então $S_\epsilon - K$ é um fibrado diferenciável localmente trivial sobre S^1, com projeção $\phi(z) = f(z)/|f(z)|$ e fibra $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$.

Teorema 5.1.2: ([24], pag. 5) Suponhamos que $z = 0$ seja uma singularidade isolada de f, então

$$f : D_\epsilon \cap f^{-1}(B_\eta - \{0\}) \longrightarrow B_\eta - \{0\},$$

é a projeção de uma fibração localmente trivial, onde $B_\eta = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq \eta\}$.

Observação 5.1.3: ([24], pag. 6) Os resultados do Teorema 5.1.1 e do Teorema 5.1.2 se correspondem, pois se $w \in \mathbb{C}$ possui módulo suficientemente pequeno, então $f^{-1}(w) \cap D_\epsilon$ é difeomorfo à F_θ.

Teorema 5.1.4: ([24], pag. 7) Cada fibra F_θ tem o mesmo tipo de homotopia de um bouquet de $S^n \mathrm{v} \ldots \mathrm{v} S^n$ esferas.

Definição 5.1.5: O número de esferas S^n do bouquet é chamado o *número de Milnor* de f em 0 e é denotado por μ.

Definição 5.1.6: Dois germes $(X, 0)$ e $(X', 0)$ são chamados *topologicamente equivalentes* se existe um germe de um homeomorfismo

$$\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \dashrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$$

tal que $\varphi(X, 0) = (X', 0)$. Também dizemos que os germes $(X, 0)$ e $(X', 0)$ são de mesmo tipo topológico.

O próximo teorema mostra que o número de Milnor é um invariante topológico.

Teorema 5.1.7: ([23], pag. 295 ou [24], pag. 11) Sejam $(X, 0)$ e $(X', 0)$ dois germes com singularidade isolada em $(\mathbb{C}^n, 0)$. Se $(X, 0)$ e $(X', 0)$ são topologicamente equivalentes então $\mu(X, 0) = \mu(X', 0)$.

Dada $f = 0$ a equação de um germe $(X, 0)$ com singularidade isolada, podemos definir o ideal jacobiano de f, denotado por $j(f)$, como o ideal de $\mathcal{O}_{n+1}$ gerado pelas

derivadas parciais de f, isto é,

$$j(f) = (\frac{\partial f}{\partial x_0}, \ldots . \frac{\partial f}{\partial x_n}).$$

Temos o seguinte resultado.

Teorema 5.1.8: ([24], pag. 23) Seja $j(f)$ o ideal jacobiano de um germe de $\mathcal{O}_{n+1}$. Então $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{j(f)} < \infty$ se, e somente se, 0 é uma singularidade isolada de f.

Observação 5.1.9: No Capítulo 4 de [24], ficou provado que o número de Milnor $\mu(f)$, de um germe com singularidade isolada, e $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{j(f)}$ são iguais.

Definição 5.1.10: Definimos o *número de Milnor* de uma hipersuperfície complexa com singularidade isolada $(X, 0)$ por

$$\mu(X, 0) = \mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{j(f)},$$

ou seja, o número de Milnor de um germe com singularidade isolada, nada mais é do que a multiplicidade do ideal jacobiano de qualquer representante do germe.

Observação 5.1.11: 1) Convém observar que o ideal $j(f)$ é um ideal $\mathcal{M}$-primário, desde que f tenha singularidade isolada.

2) O número de Milnor é um objeto geométrico, enquanto $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{j(f)}$ é um objeto algébrico

5.2 O Cálculo do Número de Milnor

Em [24], vários exemplos foram calculados para o número de Milnor. Nesta seção, pretendemos calcular alguns desses exemplos usando as técnicas que apresentamos no Capítulo 2.

Exemplo 5.2.1: Seja $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$, dada por

$$f(z_0, z_1, \ldots, z_n) = z_0^2 + z_1^2 + \ldots + z_n^2.$$

O ideal $j(f) = (2z_0, 2z_1, \ldots, 2z_n)$ é o jacobiano de f. Note que f tem uma singularidade isolada em $z = 0$. Então

$$\begin{aligned} e(2z_0, 2z_1, \ldots, 2z_n | \mathcal{O}_{n+1}) &= dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{(2z_0, 2z_1, \ldots, 2z_n)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Exemplo 5.2.2: Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ dada por

$$f(x, y) = x^2 y + y^4.$$

O ideal $(2xy, x^2 + 4y^3)$ é o jacobiano de f. Note que os conjuntos $\{2x, x^2 + 4y^3\}$ e $\{y, x^2 + 4y^3\}$ são sistemas de multiplicidades em $\mathcal{O}_2$. Portanto pelo Teorema 2.4.6, $\{2xy, x^2 + 4y^3\}$ também é um sistema de multiplicidade em $\mathcal{O}_2$. Portanto

$$\begin{aligned} e(2xy, x^2 + 4y^3 | \mathcal{O}_2) &= e(2x, x^2 + 4y^3 | \mathcal{O}_2) + e(2y, x^2 + 4y^3 | \mathcal{O}_2) \\ &= e(y^3 | \mathbb{C}\{y\}) + (x^2 | \mathbb{C}\{x\}) \\ &= 5. \end{aligned}$$

Vamos calcular o número de Milnor de germes determinados por polinômios quasi-homogêneos.

Definição 5.2.3: Sejam $d_0, d_1, \ldots, d_n$ números racionais positivos. Um polinômio $f(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ é dito *quasi-homogêneo* de tipo $(d_0, d_1, \ldots, d_n)$ se ele pode ser expresso como combinação linear de monômios $z_0^{i_0} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$ tal que

$$\frac{i_0}{d_0} + \ldots + \frac{i_n}{d_n}.$$

O próximo teorema estabelece uma fórmula que permite o cálculo do número de Milnor com relativa facilidade em determinadas situações.

Teorema 5.2.4: Seja $f(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ um polinômio quasi-homogêneo de tipo $(d_0, d_1, \ldots, d_n)$, tendo na origem uma singularidade isolada. Então

$$\mu = (d_0 - 1)(d_1 - 1) \cdots (d_n - 1).$$

Exemplo 5.2.5: Seja $f(x, y) = x^2 + y^5$. Temos que f é um polinômio quase-homogêneo de tipo $(2, 5)$ e então pelo Teorema 5.2.4,

$$\mu = (2 - 1)(5 - 1) = 4.$$

5.3 Multiplicidades Mixtas e o Número de Milnor

Seja $f = 0$, $f \in \mathbb{C}\{z_0, z_1, \ldots, z_n\} = \mathcal{O}_{n+1}$, uma equação para um germe de uma hipersuperfície complexa $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}, 0)$, isto é,

$$(X_0, 0) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : f(z) = 0\}$$

ou, de outra forma, $(X_0, 0) = f^{-1}(0)$.

Definição 5.3.1: Um ponto $z \in (X_0, 0)$ é chamado um *ponto regular*, se existe pelo menos um índice i, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(z) \neq 0.$$

Caso contrário, z é chamado um *ponto singular*, ou uma *singularidade* do germe $(X_0, 0)$.

Dizemos que $z \in (X_0, 0)$ é uma *singularidade isolada* do germe $(X_0, 0)$, se existe uma vizinhança aberta de $X_0 \quad \{0\}$ tal que o germe é regular nesta vizinhança.

Para os nossos objetivos, vamos supor que os germes são reduzidos.

Seja $G^{(i)}$ o espaço das Grassmanianas de $\mathcal{C}^{n+1}$.

Teorema 5.3.2: ([23], pag. 299) Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1})$ um germe de uma hipersuperfície analítica complexa reduzida. Para todo $0 \leq i \leq n+1$ existe uma aberto denso de Zariski $U_2^{(i)}$ de $G^{(i)}$ tal que o tipo topológico de $(X \cap H, 0)$ são independentes de $H \subset U_2^{(i)}$.

O Teorema 5.3.2, permite falar do tipo topológico de uma seção plana geral H de $(X, 0)$, que chamaremos de subespaço linear geral de dimensão h. Então pelo Teorema 5.1.7, $\mu(X \cap H, 0) = \mu(X \cap H', 0)$ para qualquer subespaço linear genérico H que passa por 0. Note também que $(X \cap H, 0)$ é uma hipersuperfície com singularidade isolada e, portanto faz sentido falar do número de Milnor de um subespaço linear geral de dimensão h, para $0 \leq h \leq n + 1$. Segue que o número

$$\mu^h(X, 0) = \mu(X \cap H, 0)$$

é bem definido.

Definição 5.3.3: Sejam $(X,0)$ um germe com singularidade isolada na origem e H um subespaço linear genérico de dimensão h, para $0 \leq h \leq n+1$. Então podemos definir o número de Milnor de $(X \cap H, 0)$ pela igualdade numérica

$$\mu(X \cap H, 0) = \mu(f|_H) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{j(f|_H)}.$$

A sequência de números

$$\mu^*(X,0) = (\mu^{n+1}(X,0), \ldots, \mu^h(X,0), \ldots, \mu^1(X,0), \mu^0(X,0)),$$

é chamada a *sequência μ^*-invariante* de $(X,0)$.

Vamos procurar determinar explicitamente a sequência $\mu^*(X,0)$. Para isto, sejam $I = \mathcal{M}$ e $J = j(f)$, onde $f = 0$ e a equação de um germe com singularidade isolada na origem. Considere também a função

$$K_{X_0,0} : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N},$$

definida por

$$K_{(X_0,0)}(r,s) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1}/m^r j(f)^s.$$

Já sabemos que para valores suficientemente grande de r e s, a função $K_{X_0,0}$ assume os mesmos valores que um polinômio em r e s de grau igual a dimensão de $\mathcal{O}_{n-1}$. Além disso, o polinômio homogêneo de maior grau tem a forma

$$\bar{K}_{(X_0,0)}(r,s) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n+1 \\ i \end{pmatrix} \tilde{\mu}^{(h)} r^{n+1-h} s^h, \tag{5.1}$$

onde $\tilde{\mu}^{(h)}$ é a multiplicidade da restrição do ideal jacobiano $j(f)$ a um subespaço linear genérico de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$.

Teissier ([23], pag. 308), mostrou que o ideal jacobiano da restrição da f com um subespaço linear genérico H de dimensão h e a restrição do ideal jacobiano a H têm a mesma multiplicidade, ou seja, $\tilde{\mu}^{(h)} = \mu^{(h)}$. Portanto, podemos reescrever a equação (5.1) da seguinte forma

$$\bar{K}_{(X_0,0)}(r,s) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n+1 \\ i \end{pmatrix} \mu^{(h)} r^{n+1-h} s^h.$$

Portanto temos o seguinte teorema.

Teorema 5.3.4: ([23], pag. 315) Seja $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um germe de uma hipersuperfície analítica complexa com singularidade isolada. Escolhemos as coordenadas $(z_0, \ldots, z_n)$ para $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ e uma equação $f = 0$ para $(X_0, 0)$. Consideremos $j(f) = (\frac{\partial f}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$, $\mathcal{M} = (z_0, \ldots, z_n)$ e aplicação $K : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$K(n_1, n_2) = L_A \mathcal{O}_{n+1} / \mathcal{M}^{n_1} j(f)^{n_2}.$$

Então para n_1, n_2 suficientemente grandes, K assume os mesmos valores que um polinômio de grau $n+1$ cujo termo homogêneo de mais alto grau se escreve como

$$\bar{K}_{(X_0,0)}(r, s) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n+1 \\ i \end{pmatrix} \mu^{(h)} r^{n-1-h} s^h,$$

onde $\mu^{(h)} = \mu^{(h)}_{x_0}(X_0)$.

Apêndice A

Localização

A.1 Localização e Multiplicidades

Seja A um anel e S um subconjunto multiplicativamente fechado não-vazio tal que $1 \in S$. A relação $\sim$ em $A \times S$ definida por

$$(a, s) \sim (b, t) \leftrightarrow (at - bs)u = 0$$

para algum $u \in S$ é uma relação de equivalência no conjunto $\sim$ em $A \times S$. O conjunto de todas as classes de equivalência em $A \times S$ é denotado por $S^{-1}A$. A classe de equivalência do par (a, s) será denotada por $\frac{a}{s}$. Vamos definir uma estrutura de anel em $S^{-1}A$. Sejam $\frac{a}{s}$ e $\frac{b}{t}$ duas classes de $S^{-1}A$. Defina a sua soma e seu produto do seguinte modo:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$$

e

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

O anel $S^{-1}A$ é chamado o *anel das frações* de A com relação a S. A aplicação $f : A \longrightarrow S^{-1}A$ definida por $f(a) = \frac{a}{1}$ é um homomorfismo de anéis, chamado de *homomorfismo natural*.

Exemplo A.1.1: Seja $\mathcal{P}$ um ideal primo de A. Claramente $S = A - \mathcal{P}$ é um subconjunto multiplicativamente fechado de A e $1 \in S$. Denote $A_{\mathcal{P}}$ para o anel $S^{-1}A$. $A_{\mathcal{P}}$ é um anel local, chamado a *localização* de $\mathcal{P}$.

Analogamente, seja M um A-módulo. Defina uma relação $\sim$ em $M \times S$ como

$$(m, s) \sim (m', s') \leftrightarrow \text{ existe } t \in S \text{ tal que } t(sm' - s'm) = 0.$$

Verifica-se que $\sim$ é uma relação de equivalência no conjunto $M \times S$. O conjunto de todas estas classes é denotado por $S^{-1}M$ e com as operações

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm + sm'}{ss'}$$

e

$$\frac{s}{s}\frac{m}{s'} = \frac{am}{ss'},$$

torna-se um $S^{-1}A$-módulo.

Passaremos de agora em diante a denotar o anel $S^{-1}A$ e o $S^{-1}A$-módulo $S^{-1}M$ por A_S e M_S, respectivamente.

Sejam A um anel Noetheriano não necessariamente local, M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1 \ldots, \gamma_s$ elementos de A que são um sistema de multiplicidade em M. Nós usaremos o símbolo $\mathcal{M}$ para denotar um elemento maximal qualquer de A e $f_{\mathcal{M}} : A \to A_{\mathcal{M}}$ para denotar o homomorfismo canônico de A na sua localização em $A_{\mathcal{M}}$.

Teorema A.1.2: ([13], pag. 332) Sejam M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1 \ldots, \gamma_s$um sistema de multiplicidade em M. Então para todo ideal maximal $\mathcal{M}$, $M_{\mathcal{M}}$ é um $A_{\mathcal{M}}$-módulo Noetheriano e $f_{\mathcal{M}}(\gamma_1) \ldots, f_{\mathcal{M}}(\gamma_s)$ é um sistema de multiplicidade em $M_{\mathcal{M}}$. Além disso, existe apenas um número finito de ideais maximais $\mathcal{M}$ para os quais $e_{A_{\mathcal{M}}}(f_{\mathcal{M}}(\gamma_1) \ldots, f_{\mathcal{M}}(\gamma_s)|M_{\mathcal{M}}) \neq 0$ e esse ideais maximais ocorrem entre os ideais maximais que contém o ideal $(Ann_A(M), \gamma_1 \ldots, \gamma_s)$.

Teorema A.1.3: (**Princípio da Localização**) ([13], pag. 333) Sejam A um anel, M um A-módulo e $\gamma_1 \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Então

$$e_A(\gamma_1 \ldots, \gamma_s|M) - \sum_{\mathcal{M}} e_{A_{\mathcal{M}}}(f_{\mathcal{M}}(\gamma_1) \ldots, f_{\mathcal{M}}(\gamma_s)|M_{\mathcal{M}}).$$

Sejam A e A' dois anéis tais que $A \subset A'$. Dizemos que A' é uma *extensão* de A se a aplicação inclusão $i : A \to A'$ é um homomorfismo de anéis. Neste caso dizemos que A é um subanel de A'.

Seja A' uma estensão do anel A. Dizemos que um elemento $x \in A'$ é *integral* sobre A se ele satisfaz uma relação da forma

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

onde $a_1, \ldots, a_n$ estão em A e $n \geq 1$. Note que todo elemento de A e integral sobre A.

Se os únicos elementos de A' que são integrais sobre A são exatamente os elementos de A, dizemos então que A é *integralmente fechado* sobre A'.

Suponha que o anel A' seja uma estensão integral do anel A. Vamos denotar por $\mathcal{M}_{A'}$ um elemento maximal de A'. $\mathcal{M}_{A'} \cap A$ é um ideal maximal de A ([13],pag. 92). Qualquer A'-módulo é automaticamente um A-módulo e, além disso, $A'/\mathcal{M}_{A'}$ pode ser considerado como um espaço vetorial sobre o corpo $A/\mathcal{M}_{A'} \cap A$ ([13], pag. 333). Denotaremos por $[A'/\mathcal{M}_{A'} : A/\mathcal{M}_{A'} \cap A]$ a dimensão deste espaço vetorial.

Teorema A.1.4: (**Fórmula da Estensão**) ([13], pag. 333) Sejam A' uma estensão integral de A, M um A'-módulo e $\gamma_1 \ldots, \gamma_s$ elementos de A. Suponha que

i) M é Noetheriano tanto como A-módulo quanto A'-módulo;

ii) $\gamma_1 \ldots, \gamma_s$ é um sistema de multiplicidade quando M for considerado tanto como A-módulo quanto A'-módulo. Então temos

$$e_A(\gamma_1 \ldots, \gamma_s | M) = \sum_{\mathcal{M}_{A'}} e_{A'_{\mathcal{M}_{A'}}}(f_{\mathcal{M}_{A'}}(\gamma_1) \ldots, f_{\mathcal{M}_{A'}}(\gamma_s) | M_{\mathcal{M}_{A'}})[A'/\mathcal{M}_{A'} : A/\mathcal{M}_{A'} \cap A],$$

onde $f_{\mathcal{M}_{A'}}$ denota o homomorfismo canônico de A' em $A'_{\mathcal{M}_{A'}}$.

Observação A.1.5: 1) Se $\mathcal{M}_{A'}$ é tal que $e_{A'_{\mathcal{M}_{A'}}}(f_{\mathcal{M}_{A'}})(\gamma_1) = 0$ e acontecer de $[A'/\mathcal{M}_{A'} : A/\mathcal{M}_{A'} \cap A] = \infty$, então seu produto pode ser considerado como sendo 0.

2) Se $A = A'$, então obtém-se o Teorema A.1.3 a partir do Teorema A.1.4.

Teorema A.1.6: ([13], pag. 334) Sejam A um anel local e $\gamma_1 \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em A. Então $s \geq dim\, A$. Além disso, $s = dim\, A$ se, e somente se, $e_A(\gamma_1 \ldots, \gamma_s | A) > 0$.

Teorema A.1.7: Sejam A um anel, M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1 \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Suponha que para todo ideal maximal m contendo

o ideal $(Ann_A(M), \gamma_1 \ldots, \gamma_s)$ tenhamos $hl\,(M/Ann(M)) < s$. Então

$$e_A(\gamma_1 \ldots, \gamma_s | M) = 0.$$

Teorema A.1.8: (**Lei Associativa**) ([13], pag. 342) Sejam A um anel e M um A-módulo finitamente gerado. Além disso, seja $\gamma_1 \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade no próprio A. Se agora i é um inteiro satisfazendo $0 \leq i \leq s$, então

$$e_A(\gamma_1 \ldots, \gamma_s | M) = \sum_{\mathcal{P}} e_{A_{\mathcal{P}}}(f_{\mathcal{P}}(\gamma_1) \ldots, f_{\mathcal{P}}(\gamma_s) | M_{\mathcal{P}}) e_{A/\mathcal{P}}(\pi_{\mathcal{P}}(\gamma_1) \ldots, \pi_{\mathcal{P}}(\gamma_s) | R/\mathcal{P}).$$

Aqui $\mathcal{P}$ percorre todos os primos minimais do ideal $(\gamma_1 \ldots, \gamma_s)$, $f_{\mathcal{P}} : A \to A_{\mathcal{P}}$ é o homomorfismo canônico de A em $A/_{\mathcal{P}}$ e $\pi_{\mathcal{P}}$ é a projeção canônica de A em $A/\mathcal{P}$.

Apêndice B

Teorema de Rees

B.1 O Complexo de Koszul

Neste apêndice, daremos duas generalizações da noção de redução, aplicada a um conjunto de ideais m-primários $\mathcal{U} = \{I_1, \ldots, I_s\}$ de um anel Noetheriano local $(A, \mathcal{M})$ de dimensão d. A primeira é chamada de redução completa de $\mathcal{U}$ e a segunda generalização é chamada de "joint reduction". Nesta última, tomaremos $s = d$. Além disso, definiremos multi-filtração de um conjunto de ideais m-primários de um anel Noetheriano local $(A, \mathcal{M})$ e demonstraremos o Teorema 3.4.4 para mais de dois ideais $\mathcal{M}$-primários I e J, mostrando que as multiplicidades mixtas, são números inteiros não-negativos. Por todo este apêndice, estaremos supondo que o anel A é Noetheriano de dimensão positiva d.

Os resultados deste apêndice, sobre complexo de Koszul, podem ser encontrados em [13].

Por um *complexo* de A-módulos entendemos uma sequência

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_{n-2} \longrightarrow \cdots \tag{B.1}$$

de A-módulos e homomorfismos, extendidos indefinidamente em ambas as direções, com a propriedade que

$$d_n \circ d_{n-1} = 0. \tag{B.2}$$

para todos os valores de n. O A-módulo M_n será chamado de o *módulo componente* de grau n, ou a *n-ésima componente do complexo.* Iremos nos referir a d_n como o n-ésimo *homomorfismo de bordo* .

O complexo (B.1), será denotado simplesmente por (M, d), onde $d : M \longrightarrow M$ é definido por $d(x_n) = d_n(x_n)$ para todo $x_n \in M$. Note que de (B.2), $d^2 = 0$.

Seja (M, d) um complexo de A-módulos. Defina

$$Z_n(M) = Ker(M_n \longrightarrow M_{n-1}) = Ker\{d_n\} \tag{B.3}$$

e

$$B_n(M) = Im(M_{n+1} \longrightarrow M_n) = Im\{d_{n-1}\}. \tag{B.4}$$

Os elementos de $Z_n(M)$ são chamados os *n-ciclos* de M e os elementos de $B_n(M)$ são chamados os *n-bordos* . Segue de (B.2) que $B_n(M) \subseteq Z_n(M)$ e, assim podemos definir o módulo quociente

$$H_n(M) = Z_n(M)/B_n(M). \tag{B.5}$$

Chamaremos $H_n(M)$ o *n-ésimo módulo de homologia* do complexo (M, d).

Sejam $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, onde $s \geq 0$ elementos do anel A. Vamos construir o *complexo de Koszul* do A-módulo M com relação aos elementos $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ do anel A, que será denotado por $K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M)$ ou, às vezes, por $K(\gamma | M)$, e tem a forma

$$0 \longrightarrow K_s(\gamma|M) \xrightarrow{d_s} K_{s-1}(\gamma|M) \xrightarrow{d_{s-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} K_0(\gamma|M) \longrightarrow 0 \tag{B.6}$$

Para $0 \leq \mu \leq s$, a μ-ésima componente de $K_\mu(\gamma|M)$ é uma soma direta de $\begin{pmatrix} s \\ \mu \end{pmatrix}$ cópias de M, onde $\begin{pmatrix} s \\ \mu \end{pmatrix}$ é o coeficiente binomial usual. Assim quando $s = 0$,

$K_0(.|M)$ é simplesmente

$$\cdots \to 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \to \cdots \tag{B.7}$$

onde M ocorre como a componente do complexo $K_0(.|M)$.

Sejam $T_{i_1}, \ldots, T_{i_\mu}$ novos símbolos e escreva

$$K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = \oplus_{i_1 < \cdots < i_\mu} M T_{i_1} \cdots T_{i_\mu},$$

onde $i_1, \ldots, i_\mu$ são inteiros que variam de modo que $0 \leq i_1 < \cdots < i_\mu \leq s$. Assim, quando $0 \leq \mu \leq s$, $K_\mu(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M)$ é de fato uma soma direta de $\begin{pmatrix} s \\ \mu \end{pmatrix}$ cópias de M. Um elemento arbitrário de $K_\mu(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M)$ tem uma única representação na forma

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_\mu} r_{i_1 \ldots i_\mu} T_{i_1} \cdots T_{i_\mu},$$

onde $r_{i_1 \ldots i_\mu} \in M$. No caso $\mu = 0$, temos $K_0(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) = M$.

Vamos definir o n-ésimo homomorfismo de bordo

$$d_\mu : K_\mu(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) \longrightarrow K_{\mu-1}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M) \tag{B.8}$$

para valores de μ tais que $0 < \mu \leq s$.

Suponha que μ seja como acima e que $i_1, \ldots, i_\mu$ sejam inteiros positivos para os quais $1 \leq i_1 < \cdots < i_\mu \leq s$. Desde que cada elemento de $K_\mu(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|M)$ é expresso de forma única como uma soma de elementos da forma $rT_{i_1} \cdots T_{i_\mu}$, onde $r \in M$ podemos definir d_μ em cada parcela desta soma e depois extender por linearidade. Desta forma defina

$$d_\mu(rT_{i_1} \cdots T_{i_\mu}) = \sum_{p=1}^{\mu} (-1)^{p-1} \gamma_{i_p} T_{i_1} \cdots \hat{T}_{i_p} \cdots T_{i_\mu}, \tag{B.9}$$

onde o símbolo $\hat{T}_{i_p}$ significa que T_{i_p} foi omitido da parcela $(-1)^{p-1} rT_{i_1} \cdots T_{i_p} \cdots T_{i_\mu}$. Note que d_μ é um homomorfismo de A-módulos, $d_\mu d_{\mu+1} = 0$ e, além disso,

$$\cdots \to K_{\mu+1}(\gamma|M) \xrightarrow{d_{\mu+1}} K_\mu(\gamma|M) \xrightarrow{d_\mu} K_{\mu-1}(\gamma|M) \to \cdots \tag{B.10}$$

é realmente um complexo de A-módulos.

Desde que $K(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M)$ é um complexo, podemos formar seus módulos de homologia. O μ-ésimo módulo de homologia será denotado por

$$H_\mu K(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M).$$

Naturalmente, $H_\mu K(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M)=0$ quando $\mu>0$ e $\mu<0$.

Quando $\mu=1$, temos que $K_1(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M)$ é igual a soma direta de s cópias de M. Então (B.9) assegura que

$$d_1(eT_{i_1})=\gamma_{i_1}e. \tag{B.11}$$

Naturalmente um elemento arbitrário de $K_1(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M)$ tem a forma

$$\sum_{i=1}^{s} e_iT_i,$$

onde $e_i\in M$ e por (B.11), temos

$$d_1(\sum_{i-1}^{s} e_iT_i)=\gamma_1e_1+\ldots+\gamma_se_s.$$

Portanto,

$$Im(d_1)=\gamma_1M+\ldots+\gamma_sM$$

e desde que $K_{\ 1}(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M)=0$, temos

$$H_0K(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M)=M/(\gamma_1M+\ldots+\gamma_sM).$$

Agora, quando $\mu=s$ temos que $K(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M)$ é a soma direta de M apenas uma vez, isto é, $K(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M)=M$. Assim cada elemento de $K(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M)$ é da forma $eT_1\ldots T_s$. Então por (B.9),

$$d_s(eT_1\ldots T_s)=\sum_{p-1}^{s}(-1)^{p-1}\gamma_peT_1\ldots T_s.$$

Desse modo, $d_s(eT_1\ldots T_s)=0$ se, e somente se, $\gamma_ie=0$ (identificamos $eT_1\ldots T_s$ com e), para $i=1,\ldots,s$. Desta forma, temos

$$Ker(d_s)=(0:_M\gamma_1A+\ldots\gamma_sA).$$

Portanto desde que $K_{s-1}(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M)=0$, temos que

$$H_sK(\gamma_1,\ldots,\gamma_s|M)=(0:_M\gamma_1A+\ldots\gamma_sA).$$

Teorema B.1.1: ([13], pag. 364) Sejam M um A-módulo e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elementos do anel A. Defina $I = \gamma_1 A + \ldots + \gamma_s A$. Então cada γ_i anula os módulos de homologia $H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M)$ do complexo de Koszul de M com relação a $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$. Em particular, I anula todos os módulos de homologia $H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M)$.

Teorema B.1.2: ([13], pag. 369) Sejam M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elementos do anel A tais que

$$L(M/(\gamma_1 M + \ldots + \gamma_s M)$$

tem comprimento finito. Então, $H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M)$ tem comprimento finito para todo $\mu \in \{0, \ldots, s\}$.

Observação B.1.3: O Teorema (B.1.2), diz que se $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ é um sistema de multiplicidade em M, então $H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M)$ tem comprimento finito para todo $\mu \in \{0, \ldots, s\}$.

Seja M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Pelo Teorema B.1.2, cada módulo de homologia $H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M)$, tem comprimento finito. Portanto podemos definir

$$\mathcal{X}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M) = \textstyle\sum_\mu (-1)^\mu L_A(H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M)). \tag{B.12}$$

Note que esta soma é finita, desde que o somando é zero se $\mu > s$ ou $\mu < 0$. Iremos mostrar que

$$\mathcal{X}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M) = e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M). \tag{B.13}$$

Observe que se $s = 0$, então da Equação (B.12), concluímos que

$$\mathcal{X}(. | M) = e_A(. | M). \tag{B.14}$$

Antes de provarmos este resultado, vamos fazer algumas observações e enunciaremos alguns teoremas.

Suponha que (M, d) é um complexo de A-módulos tal que todos os módulos componentes tenham comprimento finito e no máximo um número finito deles são não-nulos.

Então

$$\sum_n (-1)^n L_A(M_n) \tag{B.15}$$

está bem definida. Esta soma é chamada a característica de Euler-Poincaré do complexo (M, d).

Os próximos teoremas são essenciais na demonstração de (B.13) e na compreensão do que faremos na próxima seção.

Teorema B.1.4: ([13], pag. 355) Sejam M um A-módulo e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Considere o complexo de Koszul $K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M)$. Então a sequência

$$0 \longrightarrow H_s K(\gamma|M) \longrightarrow H_{s-1} K(\gamma|M) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_1 K(\gamma|M) \longrightarrow H_0 K(\gamma|M) \longrightarrow 0 \tag{B.16}$$

é exata.

O complexo do Teorema (B.1.4), é chamado o complexo de homologia do complexo $K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M)$.

Sejam M', M e M'' complexos de A-módulos e seja $\phi : M' \longrightarrow M$ e $\psi : M \longrightarrow M''$ aplicações de complexos. Dizemos que

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0 \tag{B.17}$$

é uma sequência exata de A-módulos se

$$0 \longrightarrow M'_n \xrightarrow{\phi_n} M_n \xrightarrow{\psi_n} M''_n \longrightarrow 0 \tag{B.18}$$

é uma sequência exata de A-módulos, para todo n.

Teorema B.1.5: ([13], pag. 362) Seja $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elementos do anel A e considere a seguinte sequência exata de complexos de A-módulos.

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Então os módulos de homologia dos complexos de Koszul de M, M' e M'' com relação a $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, estão conectados pela sequência exata:

$$0 \longrightarrow H_s K(\gamma | M') \longrightarrow H_s K(\gamma | M) \longrightarrow H_s K(\gamma | M'') \longrightarrow \cdots$$

$$H_\mu K(\gamma|\, M') \longrightarrow H_\mu K(\gamma|\, M) \longrightarrow H_\mu K(\gamma|\, M'') \longrightarrow$$
$$H_{\mu-1} K(\gamma|\, M') \longrightarrow H_{\mu\ -1} K(\gamma|\, M) \longrightarrow H_{\mu-1} K(\gamma|\, M'') \longrightarrow \cdots$$
$$H_{\mu-1} K(\gamma|\, M') \longrightarrow H_{\mu-1} K(\gamma|\, M) \longrightarrow H_{\mu-1} K(\gamma|\, M'') \longrightarrow 0 \qquad \text{(B.19)}$$

Teorema B.1.6: ([13], pag. 368) Seja M um A-módulo e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elementos do anel A. Se γ_s não é um divisor do zero em M, então temos so seguinte isomorfismo

$$H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|\, M) \simeq H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s\ -1}|\, M/\gamma_s M),$$

de A-módulos para cada valor de μ.

Vamos provar agora que a característica de Euler-Poincaré $\mathcal{X}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|\, M)$ é aditiva.

Teorema B.1.7: Seja

$$0 \longrightarrow M' \quad \to M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de A-módulos Noetherianos e suponha que cada termo admite $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ como um sistema de multiplicidade. Então

$$\mathcal{X}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|\, M) = \mathcal{X}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|\, M') + \mathcal{X}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|\, M'').$$

Demonstração: Pelo Lema B.1.2, todos os módulos na sequência (B.19) têm comprimento finito. Como o comprimento é uma função aditiva, o resultado segue aplicando L_A na sequência (B.19). ■

Lema B.1.8: ([13], pag. 370) Seja M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Se $\gamma_s^m M = 0$, para algum $m > 0$, então

$$\mathcal{X}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|\, M) = 0.$$

Teorema B.1.9: Seja M um A-módulo Noetheriano e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ um sistema de multiplicidade em M. Então

$$\mathcal{X}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|\, M) = e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_s|\, M).$$

Demonstração: Faremos a demonstração por indução em s. Se $s = 0$, então por (B.13), o resultado vale. Portanto, iremos supor que o teorema já foi provado para sistemas de multiplicidades em M, contendo no máximo $s-1$ elementos.

Tome $F = M/(0 :_M \gamma_s^m)$, onde m foi escolhido de modo que γ_s não é um divisor do zero em F. Então aplicando o Teorema B.1.7 a sequência exata

$$0 \longrightarrow (0 :_M \gamma_s^m) \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

obtemos que

$$\mathcal{X}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M) = \mathcal{X}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | F) + \mathcal{X}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | (0 :_M \gamma_s^m))$$

e isto se reduz a

$$\mathcal{X}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | M) = \mathcal{X}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | F) \tag{B.20}$$

pelo Teorema B.1.8. Desde que γ_s não é um divisor de zero em F, o Teorema B.1.6, mostra que temos o seguinte isomorfismo

$$H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, \gamma_s | F) \simeq H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1} | F/\gamma_s F)$$

de A-módulos. Segue disto que

$$\mathcal{X}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s | F) = \mathcal{X}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1} | F/\gamma_s F),$$

por (B.20).

Por outro lado, temos

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, \gamma_s | M) - e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, \gamma_s | F) = e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, \gamma_s | F/\gamma_s F),$$

pelas propriedades básicas do símbolo da multiplicidade. Finalmente

$$e_A(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, \gamma_s | F/\gamma_s F) = \mathcal{X}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1} | F/\gamma_s F),$$

pela hipótese indutiva. Assim o teorema está provado. ■

B.2 Complexo de Koszul e Multiplicidades Mixtas

Nosso objetivo é provarmos o Teorema 4.3.1 usando o Complexo de Koszul. Antes de passarmos a prova do teorema, vamos fixar algumas notações que serão úteis na sua demonstração.

Suponha que $\mathcal{U}$ seja um conjunto de ideais $I_1, \ldots, I_s$ do anel $(A, \mathcal{M}, k, d)$ e $R = \{r_1, \ldots, r_s\}$ um conjunto de inteiros não negativos. Então $\mathcal{U}^R$, denotará o ideal $\mathcal{M}$-primário $I_1^{r_1} \cdots I_s^{r_s}$. Porém vamos modificar isto de modo que $r_1, \ldots, r_s$ possam ser inteiros negativos tomando $I_1^r = A$, se r for um inteiro negativo. Em seguida, seja $T = \{t_1, \ldots, t_s\}$ um conjunto de indeterminadas. Então se $r_1, \ldots, r_s$ é um conjunto de inteiros, escrevemos T^R para denotar o produto $t_1^{r_1} \cdots t_s^{r_s}$. Também escrevemos T^{-1} para o conjunto $\{t_1^{-1}, \ldots, t_s^{-1}\}$.

Definimos o anel $R(\mathcal{U})$ como sendo o subanel de $A[T, T^{-1}]$ consistindo de todas as somas finitas

$$\sum c_R T^R \quad c_R \in \mathcal{U}^R.$$

O próximo teorema mostra a existência de redução completa de um conjunto $\mathcal{U} = \{I_1, \ldots, I_d\}$ de ideais $\mathcal{M}$-primários. Sua prova, além de extensa, não é relevante para a continuação do nosso trabalho.

Teorema B.2.1: ([17], pag. 401) Sejam $I_1, \ldots, I_s$ ideais de $(A, \mathcal{M})$. Então existem elementos x_{ij} $(j = 1, \ldots, d)$ de I_i, para $i = 1, \ldots, s$, tais que se

$$y_j = x_{1j} \ldots x_{sj} \quad (j = 1, \ldots, d),$$

então o ideal $b =< y_1, \ldots, y_d >$ é uma redução de $I_1 \cdots I_s$.

Definição B.2.2: Seja x_{ij} $(j = 1, \ldots, d, i = 1, \ldots, s)$ um conjunto de elementos do anel $(A, \mathcal{M}, k, d)$ satisfazendo as condições do Teorema B.2.1. Então dizemos que esses elementos são uma *redução completa* de $\mathcal{U}$.

Definição B.2.3: Seja $\mathcal{U} = \{I_1, \ldots, I_d\}$ um conjunto de ideais $\mathcal{M}$-primários do anel $(A, \mathcal{M}, k, d)$, não necessariamente distintos. Então dizemos que um conjunto de elementos x_j $(j = 1, \ldots, d)$ é uma *"joint reduction"* do ideal $\mathcal{U}$, se $x_i \subset I_i$, para cada

i_d e para algum $R = \{r_1, \ldots, r_d\}$

$$\mathcal{U}^R = \sum_{i=1}^{d} x_i \mathcal{U}^{R_i}. \tag{B.21}$$

onde $R^i = \{r_1, \ldots, r_i - 1, \ldots, r_d\}$.

Observe que estamos definindo algo, que nem sabemos que existe. O seguinte resultado nos fornece uma direção para garantir a existência de uma "joint reduction"de um conjunto finito de ideais $\mathcal{M}$-primários.

Teorema B.2.4: Sejam $(A, \mathcal{M}, k, d)$ e $U = \{I_1, \ldots, I_d\}$ um conjunto finito de ideais $\mathcal{M}$-primários não necessariamente distintos. Então o conjunto x_i $(i = 1, \ldots, d)$, é uma "joint reduction"de $\mathcal{U}$ se, e somente se, o ideal

$$C = \sum_{i=1}^{d} x_i I_1 \ldots \hat{I}_i \ldots I_d,$$

é uma redução do ideal $I_1 \cdots I_d$, onde o símbolo $\hat{I}$, significa que o ideal I, não aparece em $x_i I_1 \ldots \hat{I}_i \ldots I_d$.

Demonstração: Vamos escrever a Equação (B.21) por extenso para entendermos melhor. Então,

$$I_1^{r_1} \cdots I_s^{r_s} = x_1 I_1^{r_1 - 1} \cdots I_s^{r_s} + \ldots + x_s I_1^{r_1} \cdots I_s^{r_s - 1}. \tag{B.22}$$

Seja $n \geq max\{r_1, \ldots, r_s\}$, então a Equação (4.1) pode ser escrita da forma

$$\begin{aligned}
(I_1 \cdots I_s)^n &= I_1^{r_n} \cdots I_s^n \\
&= x_1 I_1^{n-1} \cdots I_s^n + \ldots + x_s I_1^n \cdots I_s^{n-1} \\
&= (x_1 I_2 \cdots I_s + x_2 I_1 I_3 \cdots I_s \ldots + x_s I_1 \cdots I_{s-1})(I_1^{n-1} \cdots I_s^{n-1}) \\
&= (x_1 I_2 \cdots I_s + x_2 I_1 I_3 \cdots I_s \ldots + x_s I_1 \cdots I_{s-1})(I_1 \cdots I_s)^{n-1},
\end{aligned}$$

ou seja, o ideal $(x_1 I_2 \cdots I_s + x_2 I_1 I_3 \cdots I_s \ldots + x_s I_1 \cdots I_{s-1})$, é uma redução do ideal $I_1 \cdots I_s$.

Reciprocamente, suponha que o ideal $C = \sum_{i=1}^{d} x_i I_1 \ldots \hat{I}_i \ldots I_d$, é uma redução do ideal $I_1 \cdots I_d$. Então, existe um inteiro positivo n tal que $(I_1 \cdots I_d)^n C = (I_1 \cdots I_d)^{n+1}$, ou seja,

$$\begin{aligned}(I_1 \cdots I_d)^{n+1} &= (\sum_{i=1}^{d} x_i I_1 \ldots \hat{I}_i \ldots I_d)(I_1 \cdots I_d)^n \\ &= \sum_{i=1}^{d} x_i I_1^{n-1} \ldots I_i^n \ldots I_d^n,\end{aligned}$$

ou seja, $x_1, \ldots, x_d$, é uma "joint reduction"dos ideal $I_1 \cdots I_s$. ■

Aparentemente, poderíamos ter usado o Teorema B.2.4, para definir a "joint reduction"do conjunto $\mathcal{U}$, de ideais $\mathcal{M}$-primários, mas mesmo assim, continuaríamos sem garantir sua existência. O próximo teorema, mostra que a existência de uma redução completa de um conjunto de ideais m-primário $I_1, \ldots, I_d$, garante a existência de uma "joint reduction"para estes ideais.

Teorema B.2.5: Seja $\{x_{ij}\ i, j = 1, \ldots, d\}$ uma redução completa de $U = \{I_1, \ldots, I_d\}$. Seja $i \longrightarrow j(i)$ uma permutação do conjunto $\{1, \ldots, d\}$. Então o conjunto de elementos $x_i = x_{i,j(i)} (i = 1, \ldots, d)$ é uma "joint reduction"de $\mathcal{U}$.

Demonstração: Sejam $y_j = x_{1j}, \ldots, x_{dj}$, $j = 1, \ldots, d$, onde $b = (y_1, \ldots, y_d)$ é uma redução de $I_1 \cdots I_d$. Considere o ideal

$$C = \sum_{i=1}^{d} x_{i,j(1)} I_1 \ldots \hat{I}_i \ldots I_{d,j(d)}.$$

Então para algum inteiro $n > 0$ temos

$$\begin{aligned}(I_1 \cdots I_d)^{n+1} &= b(I_1 \cdots I_d)^n \subseteq C(I_1 \cdots I_d)^n \\ &\subseteq (I_1 \cdots I_d)^{n+1},\end{aligned}$$

ou seja, C é uma redução do ideal $(I_1 \cdots I_d)$. Note que o ideal b está contido no ideal C. Portanto pelo Lema B.2.4, $\{x_{ij} i, j = 1, \ldots, d\}$ é uma "joint reduction"de $(I_1 \cdots I_d)$. ■

No final deste capítulo, apresentaremos outra forma de garantir a existência de "joint reductions".

O leitor interessado em saber mais propriedades das "joint reduction"pode consultar as referências [17] e [22].

Definição B.2.6: Seja A um anel. Uma *filtração* F em A é uma cadeia descendente

$$A = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$$

de ideais de A tais que $I_i I_j \subset I_{i+j}$.

Também podemos definir o conceito de filtração para módulos como segue.

Definição B.2.7: Sejam M um A-módulo e I um ideal de A. Uma *filtração* F em M é uma cadeia descendente

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots$$

de submódulos de M tais que $IM_n \subset M_{n-1}$. Neste caso dizemos que F é uma *I-filtração* em M.

Exemplo B.2.8: Sejam A um anel, M um A-módulo e I um ideal de A. Então a sequência $\{I^n M\}$ é uma I-filtração de M, chamada de *filtração I-ádica.*

Queremos agora definir uma filtração para um A-módulo finitamente gerado, mas não apenas em relação a um único ideal de A. Para isto, tome R^i para denotar o conjunto $\{r_1, \ldots, r_i + 1, \ldots, r_d\}$, onde R é o conjunto $\{r_1, \ldots, r_d\}$.

Definição B.2.9: Sejam M um A-módulo finitamente gerado e $\mathcal{U} = \{I_1, \ldots, I_d\}$. I_i ideais m-primários, $i = 1, \ldots, d$. Por uma *$\mathcal{U}$-multifiltração* F, entenderemos um conjunto de submódulos $F(R)$ de M definida para todos os conjuntos de s inteiros $\{r_1, \ldots, r_s\}$ e satisfazendo as seguintes condições

$$F(R) \supseteq F(R^i) \supseteq q_i F(R),$$

para todo r e $i = 1, \ldots, s$. No caso, $s = 1$, temos uma I-filtração.

Associaremos com a $\mathcal{U}$-multifiltração F um $R(\mathcal{U})$-módulo graduado $\mathcal{F}$, consistindo de todas as somas finitas

$$\sum f(R) T^R \text{ com } f(R) \in M.$$

Definição B.2.10: Dizemos que F é uma *$\mathcal{U}$-multifiltração ótima* se as seguintes condições forem satisfeitas:

i) $\mathcal{F}$ é um $R(\mathcal{U})$-módulo finitamente gerado;

ii) $M/F(R)$ tem comprimento finito para todo R.

Associaremos com uma $\mathcal{U}$-multifiltração ótima F uma série de potências formal em $Z = (z_1, \ldots, z_r)$ definida por

$$P(F, Z) = \sum_R L(R) Z^R,$$

onde $L(R) = L(M/F(R))$, L denota a função comprimento e Z^R denota o produto $z_1^{r_1} \ldots z_s^{r_s}$. Também podemos considerar as series de potências formais

$$P_+(F, Z) = \sum_{R>0} L(R) Z^R,$$

onde $R > 0$ indica que $r_i > 0$ $(i = 1, \ldots, s)$.

Vamos listar agora algumas séries de potências formais especiais:

i) $E_i = \sum_{-\infty}^{\infty} z_i^r$. Se I é um subconjunto de $\{1, \ldots, s\}$ então $E_I = \prod_{i \in I} E_i$. Agora se $I = \{1, \ldots, s\}$, então escrevemos E para E_I.

ii) $w_i = \sum_{r=0}^{\infty} z_i^r$. Se I é um subconjunto de $\{1, \ldots, s\}$, então $W_I = \prod_{i \in I} w_i$. Se tivermos porém $I = \{1, \ldots, s\}$ então W^1 será escrito para W_I, desde que W será reservado para o conjunto $\{w_1, \ldots, w_s\}$, onde $w_i = (1 - z_i)^{-1}$.

Seja $X = \{X_1, \ldots, X_d\}$, onde $X_j = x_j t_{i(j)}$ e $j \longrightarrow i(j)$ é uma função do conjunto $\{1, \ldots, d\}$ no conjunto $\{1, \ldots, s\}$ dependendo do conjunto X e os elementos $x_1, \ldots, x_d$ são sujeitos as seguintes condições:

i) $x_j \in I_{i(j)}$;

ii) o ideal $b =< x_1, \ldots, x_d >$ é $\mathcal{M}$-primário.

Vamos considerar o complexo de Koszul de $\mathcal{F}$ com relação a X.

Para cada subconjunto I de $\{1, \ldots, d\}$ defina um símbolo $a(I)$. Para qualquer inteiro p, $0 \leq p \leq d$ defina o $R(\mathcal{U})$-módulo graduado $K_p(X, F, M)$ consistindo de

todas as somas finitas

$$\sum f(I)u(I)$$

onde $f(I)$ pertence a $\mathcal{F}$ e I percorre todos os subconjuntos que contém p elementos.

Vamos agora definir uma graduação em $K_p(X, F, M)$ da seguinte maneira. Primeiro associamos um grau a $u(I)$. Este será

$$e(I) = \sum_{j=0}^{d} e_{i(j)}$$

com $e_{i(j)}$ igual a 1 se $i(j) = i$ e zero caso contrário. Se $f(I)$ tem grau $(r_1, \ldots, r_d)$ o grau de $f(I)u(I)$ é $(r_1 + e_1, \ldots, r_d + e_d)$. Agora $K_p(X, F, M)$ é considerado como um $R(\mathcal{U})$-módulo da maneira óbvia, isto é, é uma soma direta de $\begin{pmatrix} d \\ p \end{pmatrix}$ cópias de $\mathcal{F}$ com uma mudança de grau.

Resta definir o operador diferenciação D. Se $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ está escrito em ordem ascendente, denote por $\hat{I_k}$ o conjunto obtido de I pela omissão de i_k. Então defina

$$D(f(I)u(I)) = \sum_{k-o}^{d} (-1)^{k\ 1} X_{ik} f(I)u(\hat{I}_k)$$

e estenda D por linearidade. A escolha do grau assegura que D preserva graus e além disso, $D^2 = 0$.

Assim temos o seguinte complexo

$$(K(X, F, M): \quad 0 \to K_d(X, F, M) \to K_{d-1}(X, F, M) \to \ldots \to K_0(X, F, M) \to 0$$

Considere agora os módulos de homologia deste complexo. Eles são $R(\mathcal{U})$-módulos finitamente gerados e além disso são graduados e anulados por $\{X_1, \ldots, X_d\}$ e portanto pelo ideal b. Segue que as componentes homogêneas $H_i(X, F, M)_R$ são todas A-módulos de comprimento finito e assim podemos definir as séries de Euler-Poincaré

$$\mathcal{X}(X, F, M, Z) = \sum \mathcal{X}(X, F, M, R)Z^r$$

e

$$\mathcal{X}_+(X, F, M, Z) = \sum_{R \geq 0} \mathcal{X}(X, F, M, R)Z^r$$

onde

$$\mathcal{X}(X,F,M,Z) = \sum_{i=0}^{d}(-1)^i L(H_i(X,F,M)_R)$$

No que segue , se $R = \{r_1,\ldots,r_s\}$ é um conjunto qualquer de inteiros, W^R irá denotar o produto $w_1^{r_1}\ldots w_s^{r_s}$. Em particular W^{-R} denotará $(1-z_1)^{r_1}\ldots(1-z_s)^{r_s}$.

Lema B.2.11: ([17], pag. 406) Seja h_i o número de valores de j para os quais $i(j) = i$, isto é, $\sum_{i=1}^{s} h_i = d$ e seja $H = (h_1,\ldots,h_s)$. Então

$$\mathcal{X}(X,F,M,Z) = e(b,M)E - W^{-H}P(F,Z)$$

Consideraremos agora uma escolha especial do conjunto $\{X_1,\ldots,X_d\}$. Suponhamos que $H = (h_1,\ldots,h_s)$ é dado e selecionemos os primeiros h_1 elementos x_j de q_1, os próximos h_2 elementos de q_2 e assim por diante. Suponha além disso que $\{x_1,\ldots,x_d\}$ seja uma joint reduction de $\mathcal{U}$. Dizemos neste caso que $\{x_1,\ldots,x_d\}$ é uma joint reduction de $\mathcal{U}$ de tipo H.

Seja J o conjunto dos inteiros i tais que $h_i > 0$. Então segue da definição de joint reduction que o ideal $XR(\mathcal{U})$ contém todos os elementos de grau R se r_i é suficientemente grande para todo i pertencente a J. Neste caso, segue que $H_p(X,F,M)_R = 0$ se r_i é suficientemente grande para todo $i \in J$ desde que $H_p(X,F,M)$ é anulado por $XR(\mathcal{U})$ e por conseqüência $\mathcal{X}(X,F,M,Z) = 0$ se r_i é suficientemente grande para todo $i \in J$.

Lema B.2.12: ([17], pag.407) $P_t(F,Z)$ pode ser expresso na forma $W^1 h(F,W)$ onde $h(F,W)$ é um polinômio em $w_1,\ldots,w_s,w_1^{-1},\ldots,w_s{}^{1}$.

Podemos reduzir o polinômio $h(F,W)$ a sua forma padrão $\sum_H h_H(W)W^{\ H}$, onde H denota um conjunto de inteiros não negativos e $h_H(W)$ é um polinômio envolvendo aqueles w_i para os quais $h_i - 0$.

Lema B.2.13: ([17], pag. 407) Sejam B um domínio de integridade e B_s o anel dos polinômios em $w_1, \ldots, w_s, w_1^{-1}, \ldots, w_s^{-1}$. Seja g o homomorfismo de B_s no anel das séries de potências formal com coeficientes em B nas indeterminadas $z_1, \ldots, z_s$ definido por

$$g(w_i) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i^r, \quad g(w_i^{-1}) = 1 - z_i.$$

Seja J um subconjunto de $\{1, \ldots, s\}$ e suponha que G é um elemento de B_s tal que o coeficiente de Z^R em $g(G)$ seja zero se r_i é suficientemente grande para todo $i \in J$. Então o coeficiente de W^H em F é zero se $h_i > 0$ para todo $I \in J$.

Vamos enunciar o Teorema 4.3.1 de uma forma mais completa.

Teorema B.2.14: ([17], Teorema 2.4) Seja $h(F, W)$ tendo o mesmo significado que no Lema B.2.12 e seja $\sum_H h_H(W)W^H$ sua forma padrão. Então valem as seguintes afirmações.

i) Se $0 = (0, \ldots 0)$, então $h_0(W)$ é um polinômio de grau $\leq d$ em $w_1, \ldots, w_s$;

ii) Se $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ é um conjunto de inteiros não negativos satisfazendo $\sum_{i=1}^{s} = d$, então o coeficiente de W^G em $h_0(W)$ é igual a $e(b, M)$ para qualquer ideal gerado pelos elementos de uma joint reduction de $I_1, \ldots, I_s$ de tipo G;

iii) Todos os ideais b gerados pelos elementos de uma joint reduction de $I_1, \ldots, I_s$ de tipo G tem o mesmo símbolo de multiplicidade $e(b, M)$;

iv) Os termos de grau d em $h_0(W)$ dependem apenas de $I_1, \ldots, I_s$ e M e não da multifiltração ótima F em consideração;

v) Se $H \neq 0$ então $h_H(W)$, grau $< d$.

Demonstração: Faremos a demonstração apenas do item (ii). Para a demonstração de (i) e (v) ver [17] Teorema 2.4. As demonstrações de (iii) e (iv) decorrem de (i).

Seja $G = (g_1, \ldots, g_s)$ qualquer conjunto de inteiros não-negativos tais que $\sum_{i=1}^{s} = d$ e seja J o conjunto de índices i tais que $g_i > 0$. Segue do lema B.2.11 e das

observações que o seguiram que a série de potências

$$e(b, M)W^1 - W^{-G}P_-(F, Z) \text{ onde } w_i = \sum_{i=0}^{\infty} z_i^r$$

tem coeficiente zero para Z^R se r_i é suficientemente grande para todo i pertencente a J. Portanto se aplicarmos o lema B.2.13 ao polinômio

$$e(b, M)W^1 - W^{-G}W^1h(F, W)$$

vemos que o coeficiente de W^H neste polinômio é zero se $h_i > 0$ para todo i pertencente a J. Então desde que o coeficiente de W^1 deve ser zero, segue que o coeficiente de W^G em $h_0(W)$ é $e(b, M)$ como queríamos demonstrar. ■

Vamos enunciar o Teorema B.2.14 no caso de dois ideais.

Teorema B.2.15: Sejam I_1 e I_2 dois ideais m-primários de um anel local de dimensão d. Então $e_i(I_1|I_2), i = 0, 1, \ldots, d$ denota a multiplicidade do ideal gerado por qualquer joint reduction do conjunto de ideais que consistem de $d - i$ cópias de I_1 e de i cópias de q_2.

Demonstração: Caso particular do Teorema B.2.14. ■

Exemplo B.2.16: Seja $A = \mathbb{C}[x, y, z]$ o anel dos polinômios nas indeterminadas x, y, z sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Seja $I_1 = \mathcal{M} =< x, y, z >$ e $I_2 =< x, y^2, yz, z^2 >$. Vamos calcular $e_i(I_1|\, I_2)$; $i = 0, 1, 2, 3$.

Desde que $K =< x, y^2, z^2 >$ é uma redução de I_2, temos que $e_i(I_1|\, I_2) = e_i(I_1|\, K)$ para todo $i = 0, 1, 2, 3$.

A equação

$$\mathcal{M}^2K^2 = y\mathcal{M}K^2 + z\mathcal{M}K^2 + x\mathcal{M}^2K$$

mostra que $\{y, z, x\}$ é uma joint reduction do conjunto $\{\mathcal{M}, \mathcal{M}, K\}$. Analogamente a equação

$$\mathcal{M}^2K^2 = y\mathcal{M}K^2 + z\mathcal{M}^2K + z^2\mathcal{M}^2K$$

mostra que $\{y, x, z^2\}$ é uma joint reduction do conjunto $\{m, K, K\}$.

$e_0(I_1|\, I_2) = e_0(I_1|\, A) = e(\mathcal{M}|\, A) = 1$

$$e_1(I_1|\,I_2) - e_1(\mathcal{M}|\,K) = e(y,z,x|\,A) = 1$$
$$e_2(I_1|\,I_2) = e_2(\mathcal{M}|\,K) = 2$$
$$e_3(I_1|\,I_2) - e_3(I_2|\,A) = e(x,y^2,yz,z^2|\,A) = 4$$

O Teorema 4.3.1, aparece originalmente em ([23], pag. 302). O Teorema B.2.14, é uma generalização do Teorema 4.3.1. Para ver isto, vamos enunciar um lema que nos permitirá definir elementos gerais.

Toda sequência de elementos superficiais forma uma "joint reduction" do conjunto de ideais $\{I_1,\ldots,I_1\ldots,I_s,\ldots,I_s\}$ com relação a M, onde cada I_i aparece d_i vezes [[22], pag. 4]. Assim a existência de elementos superficiais garante a existência de "joint reduction"de d ideais m-primários com relação a M. Isto fornece a generalização de falamos anteriormente.

O Teorema B.2.14, tem uma espécie de recíproca. Ele envolve outros conceitos não tratados nesta dissertação, mas vamos incluí-lo mesmo assim. Um anel Noetheriano local é chamado "*quasi-unmixed*"se seu completamento A^* é equidimensional.

Teorema B.2.17: ([22], pag. 12) Sejam (A,m) um anel Noetheriano local "quasi-unmixed", , $I_1,\ldots,I_s$ ideais e a_i um elemento de I_i para cada $i=1,\ldots,s$. Suponha que o radical do ideal $(a_i,\ldots,a_s)$ é o mesmo que o radical de todos os I_i e que sua altura comum é s. Se

$$e((a_i,\ldots,a_s)A_p;A_p) = e(I_1A_p,\ldots,I_1A_p;A_p),$$

para cada ideal primo minimal de $(a_i,\ldots,a_s)$, então $(a_i,\ldots,a_s)$ é uma "joint reduction"de $(I_i,\ldots,I_s)$.

Referências Bibliográficas

[1] Atiyah, M. F.; Macdonald, I. G. Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1969.

[2] Auslander, M.; Buchsbaum, D.; Codimension and multiplicity. Ann. of Math. (2) **68** (1958) 625 – 657.

[3] Bhattacharya, P.; The Hilbert functions of two ideals, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **53** (1957) 568 – 575.

[4] Bruns, W.; Herzog, J.; Cohen-Macaulay rings. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **39**. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[5] Fernandes, L.; Fecho integral de ideais analíticos e equisingularidades. Dissertação (Mestrado). USP-ICMC. São Carlos, 2001.

[6] Gunning, R.; Introduction to holomorphic functions of several variables. Vol. II. Local theory. The Wadsworth and Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books and Software, Monterey, CA, 1990.

[7] Lech, C.; Note on multiplicities of ideals. Ark. Mat. 4 1960 63-86.

[8] Lech, C.; On the associativity formula for multiplicities. Ark. Mat. 3 (1957), 301-314.

[9] Matsumura,H.; Commutative ring theory, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **8** 1988.

[10] Nagata, M.; The theory of multiplicity in general local rings. Proceedings of the international symposium on algebraic number theory, Tokyo and Nikko, (1955), pp. 191 – 226. Science Council of Japan, Tokyo, 1956.

[11] Northcott, D.; Hilbert's function in a local ring. Quart. J. Math., Oxford Ser. **4** (1953) 67 – 80.

[12] Northcott, D.; Ideal theory. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. **42**. Cambridge, at the University Press, 1953.

[13] Northcott, D.; Lessons on rings,modules and multiplicities. Cambridge University Press, London. 1988.

[14] Northcott, D.; Rees, D.; Reductions of ideals in local rings. Proc. Cambridge Philos. Soc. **57** (1954) 145 – 158.

[15] Northcott, D. G.; Reufel, M.A.; Generalization of the concept of length Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **16** (1965). 297 – 321.

[16] Rees, D.; a-transforms of local rings and a theorem on multiplicities of ideals. Math. proc. Cambridge Philos. Soc. **57**(1961) 8 – 17.

[17] Rees, D.; Generalizations of reductions and mixed multiplicities. J.Lond.Math.Soc.**29**,(1984) 397 – 414.

[18] Rees, D.; Lectures on the asymptotic theory of ideals. London Mathematical Society Lecture Note Series, **113**. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[19] Roberts, Paul C.; Multiplicities and Chern classes in local algebra. Cambridge Tracts in Mathematics, **133**.Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[20] Samuel, P.; La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique. (French) J. Math. Pures Appl. (9) **30**, (1951). 159-205.

[21] Serre, Jean-Pierre; Local algebra. Translated from the French by CheeWhye Chin and revised by the author. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[22] Swanson, I.; Mixed multiplicities, joint reductions and quasi-unmixed local rings. J. London Math. Soc.(2) **48** (1993) 1 – 14.

[23] Teissier. B.; Cycles évanescentes, sections planes et conditions of Whitney, Astérique **7-8**,(1973) 285 – 362.

[24] Tomazella, J. N.; Número de Milnor. Dissertação (Mestrado). USP-ICMC. Sao Carlos, 1992.

[25] Trung, N. V.; Positivity of mixed multiplicities. Math. Ann. **319** (2001), no. 1, 33-63.

[26] Verma,J.; Extended Rees algebras and mixed multiplicities. Mathematishe Zeitschrift.**202** (1989) 111 – 128.

[27] Verma, J. K.; Multigraded Rees algebras and mixed multiplicities. J. Pure Appl. Algebra **77** (1992), no. 2, 219-228.

[28] Verma, J.; Rees algebras and mixed multiplicities.Proc. of the A.M.S. **104** (1988) 1036 – 1044.

[29] Verma, J. K.; Rees algebras with minimal multiplicity. Comm. Algebra **17** (1989), no. 12, 2999-3024.

[30] Viêt, D. Q.; Mixed multiplicities of arbitrary ideals in local rings. Comm. Algebra **28** (2000), no. 8, 3803-3821.

[31] Wright, D. J.; General multiplicity theory. Proc. London Math. Soc. **15** (1965) 269 – 288.

[32] Wright, D. J.; On the uniqueness of a definition of multiplicity.Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **21** 1970 171-176.

[33] Zariski,O.and Samuel,P.; Commutative algebra. Vol. 1. Graduate Texts in Mathematics, No. 28. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1975.

[34] Zariski, O. and Samuel, P.; Commutative algebra. Vol. II. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 29. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

Índice Remissivo

altura, 13
anel
  Artiniano, 6
  Cohen-Macaulay, 15
  Noetheriano, 5
  T-graduado, 16
  de Rees extendido, 88
  de Rees, 88
  de frações, 123
  dos germes analíticos, 21
  extensão, 77
  graduado associado, 19
  local, 5
  primário, 76
anulador, 13

bigraus, 87

cadeia
  de ideais primos, 12
  primária, 10
coeficientes de Hilbert, 63
complexo
  de Koszul, 128
  de módulos, 127
componente
  bigraduada, 81
  homogênea, 16
  primária, 11
comprimento
  de cadeia, 12
  de módulo, 7
  série normal, 7
corpo
  residual, 5

decomposição
  irredundante, 11
  normal, 11
  primária, 11
dimensão
  de Krull, 12
  de módulo, 13

elemento
  M-regular, 14
  bihomogêneo, 81
  homogêneo, 16
integral sobre anel, 125
inteiro, 100
nilpotente, 7
suficientemente geral, 107

superficial, 104, 108
estensão
de anel, 124
filtração
I-ádica, 138
de anel, 138
de módulos, 138
função
aditiva, 8
de Hilbert, 60, 82
equivalente, 20
iterada de Hilbert, 60
Fórmula
Limite de Lech, 56
Limite de Samuel, 66
germe
analítico, 21
das funções contínuas, 20
de aplicações contínuas, 20
graduação natural, 16
homomorfismo
de bordo, 128
de grau, 19
natural, 123
que preserva grau, 19
I-filtração, 138
ideal
associado, 12
bihomogêneo, 81
contração, 77
decomponível, 11
extensão, 77
m-primário, 9
nilpotente, 7
nilradical, 7
p-primário, 9
parâmetro, 14
primo imerso, 12
primo minimal, 11
primário, 9
projetivamente irrelevante, 85
integralmente fechado, 125
joint reduction, 135
Lei Associativa, 126
localização, 123
M-sequência, 14
monóide de graduação, 15
multifiltração, 138
multifiltração ótima, 139
multiplicidade, 28
multiplicidades mixtas, 95
módulo
Artiniano, 6
Cohen-Macaulay, 14
Noetheriano, 5
Γ-graduado, 17
componente, 128
de Hilbert, 61

de homologia, 128
graduado associado, 19

n-bordos, 128
n-ciclos, 128
número
de Milnor, 117
número de Milnor, 116

polinômio
bihomogêneo, 81
de Bhattacharya, 95
quasi-homogêneo, 118
ponto
regular, 119
singular, 119
profundidade
de um módulo, 14

radical, 9
radical de Jacobson, 5
redução completa, 135
redução de ideal, 97

singularidade, 119
singularidade isolada, 119
sistema
de multiplicidades, 24
de parâmetros, 13
submódulo
homogêneo, 18
série
de composição, 7
normal, 7

T-graduação, 16
induzida, 18
quociente, 19
T-graduação trivial, 16
Teorema
da Base de Hilbert, 6
topologicamente equivalente, 116