
Sobre classificação de ações Anosov de R^k em
($k+2$)-variedades fechadas

Vinicius Augusto Takahashi Arakawa

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Sobre classificação de ações Anosov de R^k em $(k+2)$ - variedades fechadas

Vinicius Augusto Takahashi Arakawa

***Orientador:* Prof. Dr. Carlos Alberto Maquera Apaza**

***Coorientador:* Prof. Dr. Thierry Barbot**

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação - ICMC-USP, como parte dos
requisitos para obtenção do título de Doutor em
Ciências - Matemática . *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Agosto de 2012

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A658s Arakawa, Vinicius Augusto Takahashi
Sobre classificação de ações Anosov de R^k em $(k+2)$ -
variedades fechadas / Vinicius Augusto Takahashi
Arakawa; orientador Carlos Alberto Maquera Apaza; co-
orientador Thierry Barbot. -- São Carlos, 2012.
68 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2012.

1. Sistemas Anosov. 2. Ações Anosov. 3.
Irreduzibilidade. 4. Losangos invariantes no
recobrimento. 5. Classificação de ações Anosov. I.
Maquera Apaza, Carlos Alberto, orient. II. Barbot,
Thierry, co-orient. III. Título.

À minha família.

Agradecimentos

Talvez muitos não saibam o quanto foi difícil a realização desse trabalho. A falta de motivação aliada às dificuldades de convivência de trabalho muitas vezes me fizeram pensar em desistir no meio do caminho. Porém sou muito agradecido a Matemática, pois ela me fez ser um pouco do que sou hoje e me proporcionou todas essas experiências maravilhosas que aconteceram durante esses quatro anos e meio. Conheci pessoas fantásticas e também conheci pessoas que não seguirei como modelo no meu futuro. De todas elas, sempre é possível tirar um pouco de aprendizado. Busco estar completo e feliz. Não busco grandiosidades, nem sou orgulhoso o suficiente para querer tudo e mostrar ao mundo do que sou capaz, quero apenas ajudar as pessoas que estiverem a minha volta e também poder ensiná-las coisas que pude aprender com os melhores e os piores. A matemática é muitas vezes dura, muitas vezes devastadora, porém, devo agradecê-la por me proporcionar essa beleza misteriosa que sempre foi para mim, desde meus primeiros anos de vida.

Gostaria de agradecer a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização desse trabalho.

Primeiramente para o trabalho paciente e enriquecedor do meu orientador Prof. Carlos Maquera e meu co-orientador Thierry Barbot. Também pela oportunidade de pesquisa e conhecimento indispensável para minha formação como Matemático.

À minha família, minha fonte de carinho, força e perseverança. Meus pais Natal e Brasília, e irmãos Vack, Victor e Vi que sempre foram muito presentes em todos os momentos difíceis ou não e condições adversas. Meus sobrinhos Lalá, João Gabriel e Lavínia que, sem mesmo saberem, me deram força para ser um exemplo para eles.

Aos meus amigos, que, com certeza, foram meu alicerce de força nesse tempo de desânimo, dificuldades mas também de alegrias, novas experiências e crescimento. Em especial (em ordem alfabética para não ter brigas!): Alessandra, Ana Paula, Anderson Algarte, Andréa, André Malvezzi, Angélica, Carla, Dani, Éder, Edson, Eduardo, Ernani, Fausto, Flávia Longhi, Flávia Manzano, Grasielle, Guilherme, Henrique, Hesfran, Iara, Igor Catalão, Jean-Yves, João Calefi, Juliana Carolina, Juliana Landim, Júnior Shinagawa, Lari Gatte, Leonardo, Ligia, Luciane, Marcelo Araújo, Mariele, Marília Kotait, Mirela, Nahara, Natânia, Paulinho, Rafael Pierini, Renato, Ricardinho, Simone, Suzi, Tatê, Tati Vidotti, Tati Shinagawa, Thatá, Tiago Neves, Tiago Santana, Tiemi, Tukas e Zops.

Aos ilustres membros da banca examinadora: Ali Tahzibi, Claudio Aguinaldo Buzzi, Sebastião Marcos Antunes Firmo e Clodoaldo Grotta Ragazzo, pelas preciosas observações que enriqueceram nosso trabalho e o tornaram mais completo.

Ao ICMC - USP pela base e apoio geral tanto na formação matemática como pela convivência entre colegas de doutorado e departamento.

Ao IBILCE - UNESP, pela formação sólida como matemático, principalmente ao meu orientador de mestrado Claudio Aguinaldo Buzzi. Pessoa que sempre terei respeito e me espelharei para meu futuro acadêmico.

À CAPES, pelo fomento imprescindível para me manter motivado durante todo o período.

“A Matemática parece dotar uma pessoa de algo como um novo sentido.”

Charles Robert Darwin.

Resumo

Nesse trabalho são apresentados alguns resultados sobre classificação de Ações Anosov de \mathbb{R}^k em $(k + 2)$ -variedades fechadas. Obtivemos dois teoremas (Teoremas *A* e *B*) que classificam tais ações. Essencialmente, mostramos que a ação será uma \mathbb{T}^{k-1} extensão de um fluxo Anosov. Na demonstração é usada teoria das folheações de codimensão um; técnicas desenvolvidas por Fenley, como o estudo da ação levantada no recobrimento universal e a construção de losangos invariantes nesse espaço; bem como resultados obtidos por Maquera e Barbot, que iniciaram os estudos de Ações Anosov visando a classificação topológica destas.

Palavras-chave: Sistemas Anosov, Ações Anosov, Classificação de Sistemas Anosov, Irreduzibilidade, Losangos Invariantes no Recobrimento.

Abstract

In this work is presented some important results about Anosov actions of \mathbb{R}^k in $(k + 2)$ -closed manifolds. We obtained two classification theorems (Theorems *A* and *B*) which give us, essentially, that the system is a \mathbb{T}^{k-1} -extension of an Anosov flow. In order to show that, we used the theory of foliations of codimension one, techniques developed by Fenley, such as study of the lift of the action in the universal cover and the construction of invariant lozenges, what is more, we used some results by Maquera and Barbot, who began the studies of Anosov Actions generalizing some classic results on the way to classify them.

Keywords: Anosov Systems, Anosov Actions, Classification of Anosov Systems, Irreducibility, Invariant Lozenges.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	xi
1 Preliminares	1
1.1 Introdução à teoria das folheações	1
1.1.1 Integrabilidade de campos de planos	3
1.1.2 Orientação e recobrimento duplo orientável	4
1.1.3 Uniformidade transversal e holonomia	5
1.2 Ações de grupos de Lie	6
1.3 Grupo fundamental e espaços de recobrimento	10
1.3.1 Grupo fundamental	10
1.3.2 Espaços de recobrimento e aplicações de recobrimento	12
1.3.3 Recobrimento universal	13
2 Ações Anosov: resultados preliminares	17
2.1 Definições e alguns resultados	17
2.2 Exemplos de ações Anosov	22
2.3 Um teorema de redução e consequências	23
2.3.1 Irreduzibilidade	24
2.3.2 Os espaços transversos	25
3 Classes de ações Anosov de \mathbb{R}^k numa $(k + 2)$-variedade	29
3.1 Algumas considerações particulares	30
3.2 Ação produto e propriedades	31
3.3 Ações splitting, skewed e inseparável	36
3.4 Losangos no recobrimento universal	38
3.5 Existência de losangos invariantes: casos inseparável e skewed	45
3.5.1 Caso inseparável	45
3.5.2 Caso skewed	50

4	Classificação de ações Anosov de \mathbb{R}^k numa $(k + 2)$-variedade	53
4.1	Caso splitting e o Teorema <i>A</i>	54
4.2	Demonstração do Teorema <i>B</i>	58
4.3	Algumas consequências	60
4.4	Trabalhos futuros	62
	Referências Bibliográficas	62
	Índice Remissivo	67

Introdução

A teoria de sistemas Anosov é uma das jóias em dinâmica. A noção representa o tipo mais perfeito de comportamento hiperbólico que torna a análise qualitativa relativamente fácil enquanto que a classificação global ainda permanece um mistério. O conceito foi introduzido por D.V. Anosov em [1] e os fundamentos da teoria foram desenvolvidas nessa sua monografia clássica que durante todos esses anos de publicação tem servido e ainda serve como fonte de ideias e inspirações para novos trabalhos. Anosov chamava essa classe de sistemas de “U-systems”, como é visto em suas primeiras cartas com a palavra russa “usloviye”, que quer dizer simplesmente condição, e o nome de “U-systems” foi usado em publicações russas durante vários anos. Entretanto, o termo “sistema Anosov” surgiu em [45] por Smale, que, imediatamente reconheceu tanto a importância da noção quanto os créditos ao autor e, a partir de então, tornou-se corrente em publicações fora da União Soviética e foi adotada universalmente.

Nosso intuito não é introduzir toda a história sobre os sistemas Anosov e seus impactos em dinâmica ou mesmo na ciência como um todo, estaremos preocupados em abordar aqui uma linha dos estudos de Anosov. Inicialmente, a noção de sistema Anosov veio em duas variantes: os difeomorfismos de Anosov (ou “cascadas” na terminologia de Anosov), isto é, ações do grupo \mathbb{Z} dos números inteiros, e fluxos de Anosov, isto é, ações do grupo \mathbb{R} . O desenvolvimento que nos interessará aqui lida com a noção de ações Anosov de \mathbb{R}^k . A definição que daremos aqui será tanto para \mathbb{Z}^k quanto para \mathbb{R}^k (veja Definição 2.1), mas nos restringiremos para o caso \mathbb{R}^k em variedades fechadas de dimensão $(k + 2)$. Este conceito foi originalmente introduzido por Pugh e Shub ([41]) no início da década de 70 e tornou-se importante apenas após o progresso da abordagem de “rigidez geométrica” para ações de grupos de Lie semisimples com rank alto e reticulados em tais grupos iniciado por Zimmer ([50]) nos anos 80.

Como comentamos anteriormente, os objetos que consideramos nesse trabalho são: ϕ uma C^2 -ação Anosov de \mathbb{R}^k numa variedade suave fechada M (munida de uma norma Riemanniana $\|\cdot\|$), de dimensão $(k+2)$. Assim, ϕ admite um elemento Anosov $a \in \mathbb{R}^k$ (também dito regular), isto é, existem números reais $\lambda > 0$ e $C > 0$ e uma decomposição contínua, Dg -invariante do fibrado tangente da variedade (onde $g = \phi(a, \cdot)$ é o difeomorfismo fixando o elemento Anosov a) em três subfibrados como a seguir:

$$TM = E_a^{ss} \oplus T\phi \oplus E_a^{uu},$$

tal que $T\phi$ é o fibrado tangente às órbitas da ação ϕ e para todo $p \in M$, todo $v \in E_a^{ss}(p)$ ($v \in E_a^{uu}(p)$, respectivamente) temos que $g_* : TM \rightarrow TM$, a diferencial de g satisfaz:

$$\|g_*^n(v)\| \leq Ce^{-\lambda|n|}\|v\|.$$

Chamamos E_a^{ss} e E_a^{uu} de distribuições estável e instável de a , respectivamente. Hirsch, Pugh e Shub (em [20]) desenvolveram a teoria básica de transformações normalmente hiperbólicas e como consequência deste trabalho, esta decomposição do fibrado tangente de M é Hölder contínua e os subfibrados E_a^{ss} , E_a^{uu} , $E_a^{ss} \oplus T\phi$ e $E_a^{uu} \oplus T\phi$ são integráveis. As folheações correspondentes, \mathcal{F}^{ss} , \mathcal{F}^{uu} , \mathcal{F}^s e \mathcal{F}^u são chamadas de folheação estável forte, folheação instável forte, folheação estável fraca e folheação instável fraca, respectivamente.

Observemos que as folheações \mathcal{F}^{uu} e \mathcal{F}^{ss} são unidimensionais, e dizemos que a ação ϕ é de codimensão um (para a definição, basta que \mathcal{F}^{uu} seja unidimensional).

Note que se uma m -variedade fechada M admite uma ação Anosov de codimensão um de \mathbb{R}^k e $m < k+3$, então $m = k+2$. Para o caso $m \geq k+3$, Barbot e Maquera em ([31]) e ([32]) buscam resolver a Conjectura de Verjovsky, que daria uma classificação, a menos de equivalência topológica, de tais sistemas.

Conjectura de Verjovsky para ações. *Toda Ação Anosov irredutível de codimensão 1 de \mathbb{R}^k numa variedade de dimensão maior ou igual a $k+3$ é topologicamente conjugada a uma suspensão de uma ação Anosov de \mathbb{Z}^k numa variedade fechada.*

Um passo muito importante para a resolução de tal conjectura diz respeito a transitividade do sistema, isto é, a ação ϕ admite uma órbita densa em M . Em [31], obtiveram com sucesso tal passo (Todo sistema Anosov de \mathbb{R}^k em M^{k+n} de codimensão um, com $n > 2$, M fechada, é transitivo).

Entretanto, quando $m = k+2$, esse resultado não é verdadeiro (Franks e Williams em [17] deram um exemplo de um sistema Anosov ϕ com folheações fortes unidimensionais e

ϕ não transitivo).

Apenas como observação, quando temos uma ação ϕ de \mathbb{Z}^k de codimensão um, a ação do elemento Anosov como difeomorfismo é topologicamente conjugado com um automorfismo hiperbólico do toro ([37] e [16]). Isso dá uma conjugação topológica da ação ϕ com uma ação linear Anosov de \mathbb{Z}^k no toro.

Para ações Anosov de \mathbb{R}^k de codimensão um sobre variedades de dimensão $n + k$ com $n > 2$, em [32] Barbot e Maquera, sob certas condições, mostraram que estas ações são topologicamente equivalentes a suspensões de ações Anosov de \mathbb{Z}^k por automorfismos lineares do toro \mathbb{T}^n .

Neste trabalho obtivemos alguns resultados de classificação de Ações Anosov de \mathbb{R}^k no caso que $n = 2$, isto é, sobre uma variedade de dimensão $(k + 2)$.

Como ferramenta para provar nossos resultados de classificação, entre outras, usamos ideias baseadas nos trabalhos de Thierry Barbot ([2], [5], [6], [3], [4]), Sérgio Fenley ([10], [11], [12], [14], [15] e [13]), para fluxos de Anosov em 3-variedades, e nos trabalhos de Barbot e Maquera ([31] e [32]) que, de certa forma, deram início aos estudos de classificação topológica destas ações.

Os ingredientes fundamentais que serão explorados para atingir o nosso objetivo são:

- Espaço das Órbitas: Trata-se do quociente do recobrimento universal \widetilde{M} de M pela relação de equivalência que relaciona dois pontos se eles pertencem a mesma órbita da ação levantada, que denotaremos por $\widetilde{\phi}$. Denotaremos tal espaço por \mathcal{Q}^ϕ .
- Espaço das Folhas: Cada uma das folheações fracas de ϕ são levantadas em \widetilde{M} (denotaremos tais folheações por $\widetilde{\mathcal{F}}^\sigma$, $\sigma = u, s$). O espaço das folhas estáveis (resp. instáveis) de ϕ é o quociente de \widetilde{M} pela relação de equivalência que relaciona dois pontos se eles pertencem a mesma folha $\widetilde{F}^s \in \widetilde{\mathcal{F}}^s$ (resp. $\widetilde{F}^u \in \widetilde{\mathcal{F}}^u$). Tal espaço será denotado por \mathcal{L}^s (resp. \mathcal{L}^u).

A ação do grupo fundamental Γ da variedade, por automorfismos de recobrimento passam aos quocientes (espaço das órbitas e espaço das folhas) dando origem a novas ações (efetivas) sobre cada um dos espaços.

Se sabe, por um resultado de Barbot e Maquera [31], que o espaço das órbitas do nosso sistema será difeomorfo à \mathbb{R}^2 , além disso a aplicação quociente $\widetilde{M} \rightarrow \mathcal{Q}^\phi$ é uma fibração localmente trivial (ver Capítulo 2).

As duas folheações fracas levantadas em \widetilde{M} , sendo tangentes à ação levantada, são projetadas no quociente. Elas definem duas folheações em \mathcal{Q}^ϕ suplementares que iremos

denotá-las por \mathcal{G}^s e \mathcal{G}^u . Observe que o espaço das folhas dessas folheações são exatamente \mathcal{L}^s e \mathcal{L}^u . Conforme mostrado no Capítulo 2, temos exatamente três possibilidades:

- \mathcal{L}^s e \mathcal{L}^u são difeomorfos a \mathbb{R} , e cada folha de \mathcal{G}^s intersecta cada folha de \mathcal{G}^u (em exatamente um ponto). Este caso é chamado de *splitting*;
- \mathcal{L}^s e \mathcal{L}^u são difeomorfos a \mathbb{R} , e existe uma folha de \mathcal{G}^s e uma folha de \mathcal{G}^u que não se intersectam. Este caso é chamado de *skewed*;
- \mathcal{L}^s e \mathcal{L}^u são não Hausdorff, neste caso dizemos que existe um “branching” no espaço das órbitas \mathcal{Q}^ϕ . Iremos denominar esta situação como o caso *inseparável*.

Para Fluxos de Anosov em 3-variedades (ou seja, para $k = 1$) os três casos citados acima foram amplamente estudados por Fenley e Barbot ([2], [5], [6], [3], [4], [10], [11], [12], [14], [15] e [13]).

A motivação da tese foi explorar resultados de classificação. Veremos no Capítulo 3, que a ação ϕ só pode ser de um dos seguintes tipos: *splitting* (ver Definição 3.9), *skewed* (ver Definição 3.9) ou *inseparável* (ver Definição 3.10). O Teorema A lida com o caso *Splitting* e o Teorema B com os outros casos, isto é, *skewed* e *inseparável*. Mais precisamente:

Teorema A. *Seja ϕ uma C^r -ação ($r \geq 2$) Anosov de \mathbb{R}^k sobre uma variedade fechada M^{k+2} do tipo *splitting*. Então ϕ é uma \mathbb{T}^{k-1} extensão de uma suspensão de um automorfismo hiperbólico do toro \mathbb{T}^2 .*

Teorema B. *Seja ϕ uma C^r -ação ($r \geq 2$) Anosov de \mathbb{R}^k sobre uma variedade fechada M^{k+2} do tipo *inseparável*, isto é, o espaço das folhas estável não é Hausdorff, ou ϕ do tipo *skewed*. Então ϕ é uma \mathbb{T}^{k-1} extensão de um fluxo de Anosov.*

O motivo da separação em dois teoremas é pela abordagem distinta que é feita para cada caso. Para as demonstrações, usaremos algumas ferramentas encontradas no trabalho de Fenley para mostrar (no caso de ações) que se existe um par de folhas inseparáveis, elas são periódicas, isto é, existe um automorfismo do recobrimento não trivial que deixa a folha invariante. Isso será um passo importante para a demonstração do Teoremas B.

Uma ferramenta poderosa para o estudo de sistemas Anosov, dadas as nossas configurações ($\dim(E^{ss}) = \dim(E^{uu}) = 1$), é fazer um estudo topológico da estrutura das folheações estável e instável fracas quando levantadas no recobrimento universal (estudo

este introduzido por Verjovsky, em [48]), e é por isso que tais espaços e tais dimensões consideradas no nosso sistema serão tão importantes para o nosso estudo.

Dada tal configuração, será possível também definir objetos importantes para o estudo do sistema como por exemplo, perfect fit e losangos invariantes objetos estes que não estão bem definidos em casos mais gerais de ações de codimensão um ($\dim(E^{ss}) > 1$). Faremos o estudos e as definições de tais objetos no Capítulo 3.

Nosso trabalho está dividido da seguinte forma:

No Capítulo 1, daremos uma introdução aos conceitos básicos e definições que serão úteis para o desenvolvimento do trabalho tais como: variedade diferenciável, folheações, ações de grupo de Lie, espaços fibrados e espaços de recobrimento. Todas as demonstrações desse capítulo serão omitidas, por se tratarem de resultados clássicos, porém, estaremos sempre preocupados em deixar ao leitor, referências para os interessados a aprofundar. Alguns resultados de Topologia Algébrica serão essenciais para nós, como por exemplo, o isomorfismo entre o grupo fundamental da variedade e o grupo dos automorfismos do recobrimento universal, e a caracterização das órbitas de uma ação localmente livre.

No Capítulo 2, daremos o conceito de Ação Anosov e faremos toda a preparação para iniciar o estudo de tais ações. Resolvemos deixar os resultados de uma forma mais geral (Ações Anosov de \mathbb{R}^k em $(k+n)$ -variedade fechada, $n \geq 2$) para que o leitor conheça os resultados já conhecidos em configurações menos restritas. Os resultados mais importantes desse capítulos são: Teorema 2.22 que reduz o nosso problema para o caso irredutível e o Teorema 2.25 que afirma que espaço das órbitas é homomorfo à \mathbb{R}^n . Mais ainda, citaremos o Closing Lema e o Teorema de Decomposição Espectral para o contexto de Ações.

No Capítulo 3, definiremos algumas ferramentas importantes para a demonstração dos Teoremas A e B, como por exemplo perfect fit e losangos invariantes no recobrimento universal. Veremos que tais objetos serão somente bem definidos nos casos skewed e inseparável e mostramos a existência de losangos invariantes (no espaço das órbitas), o que será primordial para a demonstração do Teorema B. No caso splitting, por não existirem tais objetos, trataremos diferentemente. Aqui, nos restringiremos para as dimensões que nos interessa, isto é, para o estudo de ações Anosov de \mathbb{R}^k em $(k+2)$ -variedades.

No último capítulo desta tese, o objetivo principal é demonstrar os Teoremas A, B e C. Abordaremos separadamente os casos: splitting, skewed e inseparável, pois cada classe terá suas propriedades e natureza próprias. Finalizando esse capítulo e o trabalho, iremos dar alguns corolários dos nossos resultados, como por exemplo:

Teorema C. *Seja $f : N^{k+1} \rightarrow N^{k+1}$ um difeomorfismo parcialmente hiperbótico de*

classe C^r , $r \geq 2$, e $\phi : \mathbb{R}^{k-1} \times N \rightarrow N$ uma C^r -ação, $r \geq 2$, localmente livre que comuta com f , (isto é, $f \circ \phi^v = \phi^v \circ f, \forall v \in \mathbb{R}^{k-1}$). Então,

1. ϕ é periódica (todas as órbitas são compactas)
2. ou $f^{n_0} = \phi^{b_0}$, para $n_0 \in \mathbb{Z}$ e $b_0 \in \mathbb{R}^{k-1}$.

O segundo item significa que um iterado de f é uma aplicação de Poincaré do fluxo ϕ^{tb} tendo, necessariamente, que $b \in \mathbb{R}^k$ um elemento Anosov.

Preliminares

Com o intuito de introduzir os conceitos e os estudos feitos nesse trabalho sobre ações Anosov, neste primeiro capítulo iremos apresentar alguns conceitos básicos e importantes para o desenvolvimento do trabalho, tais como definições clássicas de folheações, espaços fibrados, ações de grupos, espaços de recobrimento e grupo fundamental, dentre outros que serão muito úteis para o desenvolvimento desta tese e que também tiveram um papel importante para o entendimento de alguns resultados. Faremos referências a alguns resultados sem prová-los por se tratar de resultados clássicos, sendo assim, convidamos aos leitores já familiarizados com tais conceitos, de fazer uma breve leitura desse capítulo introdutório.

1.1 Introdução à teoria das folheações

Nessa seção, iremos tratar alguns resultados e definições a respeito de folheações numa variedade, que podem ser encontrados em [7].

Uma folheação de dimensão n de uma variedade diferenciável M^m (com $0 \leq n \leq m$) é, a grosso modo, uma partição \mathcal{F} de M em subvariedades imersas conexas de dimensão constante n chamadas folhas de \mathcal{F} , as quais se aglomeram localmente como subconjuntos de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ com segunda coordenada constante.

Os conjuntos da forma $\mathbb{R}^n \times \{*\}$ são chamadas de placas de \mathcal{F} . Uma folha de \mathcal{F} é a união de placas de \mathcal{F} . A topologia intrínseca de uma folha F de \mathcal{F} é precisamente o atlas

de F formado por placas de \mathcal{F} contidas em F . Dizemos que um conjunto $B \subset M$ é \mathcal{F} -invariante se todas as folhas de \mathcal{F} que intersectam B estão contidas em B . Uma folheação é transversalmente orientável se tem um campo de planos complementar orientável.

Iremos formalizar todas as definições feitas anteriormente e colocaremos alguns resultados que precisaremos durante a tese.

Definição 1.1 Seja M uma variedade de dimensão m ($m \geq 0$) e classe C^∞ . Uma folheação de classe C^r ($r \geq 0$) e dimensão n ($n \geq 0$) de M , é um atlas \mathcal{F} de classe C^r em M com as seguintes propriedades:

1. Se $(U, \phi) \in \mathcal{F}$ então $\phi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, onde U_1 e U_2 são discos abertos de \mathbb{R}^n e de \mathbb{R}^{m-n} , respectivamente;
2. Se (U, ϕ) e $(V, \psi) \in \mathcal{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$, então a mudança de coordenadas $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é localmente da seguinte forma, $\psi \circ \phi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$. Dizemos também que M é folheada por \mathcal{F} , ainda que \mathcal{F} é uma estrutura folheada de dimensão n e classe C^r de M .

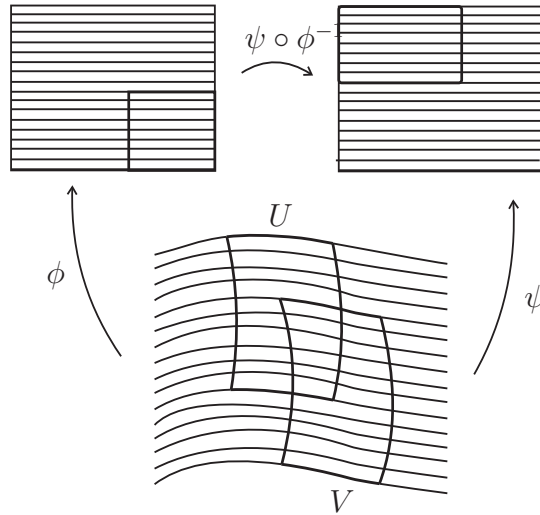


Figura 1.1: Diagrama da mudança de coordenadas folheadas.

Definição 1.2 Seja M^m uma variedade folheada por uma folheação \mathcal{F} de dimensão $n < m$ ($n \geq 0$). Consideremos uma carta local (U, φ) de \mathcal{F} tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Os conjuntos da forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$ são chamados *placas* de U , ou ainda, placas

de \mathcal{F} . Observemos que as placas são subvariedades conexas de dimensão n e classe C^r de M .

Um *caminho de placas* de \mathcal{F} é uma sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas de \mathcal{F} tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Como M é recoberta por placas de \mathcal{F} , podemos definir em M a seguinte relação de equivalência: pRq se existe um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$. As classes de equivalência da relação R são chamadas as *folhas* de \mathcal{F} . O *espaço das folhas* de \mathcal{F} , M/\mathcal{F} , é o espaço quociente de M pela relação de equivalência R , que identifica dois pontos de M se eles estão na mesma folha de \mathcal{F} . Observe que aqui, a relação é a mesma R . Da definição de folha, segue que uma folha de \mathcal{F} é um subconjunto de M conexo por caminhos. Outro fato importante para salientar é que toda folha F de \mathcal{F} possui uma estrutura de variedade C^r de dimensão n naturalmente induzida pelas cartas de \mathcal{F} .

No espaço das folhas M/\mathcal{F} , consideremos a topologia quociente, que em geral pode ser bem complicada. Seja $A \subset M$. O saturado de A por \mathcal{F} é por definição o conjunto $\mathcal{F}(A) = \{x \in M \mid xRy \text{ para algum } y \in A\}$. Se $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{F}$ é a projeção no quociente, temos $\mathcal{F}(A) = \pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{x \in A} F_x$, onde F_x denota a folha de \mathcal{F} que contém x .

1.1.1 Integrabilidade de campos de planos

Definição 1.3 Um *campo de k -planos* numa variedade M é uma aplicação P que associa a cada ponto $q \in M$ um subespaço vetorial de dimensão k de $T_q M$. Dizemos que um campo de k -planos P em M é de classe C^r se para todo $q \in M$, existem k campos de vetores C^r , X_1, \dots, X_k , definidos numa vizinhança V de q tais que para todo $x \in V$, $\{X_1(x), \dots, X_k(x)\}$ é uma base de $P(x)$.

Temos que toda folheação \mathcal{F} de dimensão k e classe C^r , $r \geq 1$, em M , define um campo de k -planos de classe C^{r-1} em M , o qual será denotado por $T\mathcal{F}$. Logo, se M não admite campos contínuos de k -planos, então M não possui folheação de dimensão k . Agora, reciprocamente podemos questionar o seguinte: dado um campo de k -planos P em M , sob que condições existe uma folheação \mathcal{F} de dimensão k tal que, para todo $q \in M$, $T_q \mathcal{F} = P(q)$?

Tal resposta é o famoso teorema de Frobenius, cuja demonstração pode ser encontrada em [7]. Antes de enunciá-lo, daremos a definição de campo involutivo.

Definição 1.4 Diz-se que um campo de planos P é *involutivo*, se dados dois campos de vetores X e Y tais que, para todo $q \in M$, $X(q)$ e $Y(q) \in P(q)$, então $[X, Y](q) = DX(q).Y(q) - DY(q).X(q) \in P(q)$.

Teorema 1.5 (*Teorema de Frobenius, [7]. Teorema 1, Apêndice 2. Pag 215.*) Seja P um campo de k -planos de classe C^r , $r \geq 1$, em M . Se P é involutivo, então existe uma folheação \mathcal{F} de dimensão k e classe C^r em M tal que $T_q(\mathcal{F}) = P(q)$ para todo $q \in M$. Reciprocamente, se \mathcal{F} é uma folheação de classe C^r ($r \geq 2$) e P é o campo de planos tangentes a \mathcal{F} , então P é involutivo. Dizemos também que um campo de planos involutivos é completamente integrável.

1.1.2 Orientação e recobrimento duplo orientável

Dado um espaço vetorial E de dimensão $n \geq 1$, dizemos que duas bases ordenadas de E , $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$, definem a mesma orientação de E se a matriz de mudança de base tem determinante positivo.

Seja P um campo de k -planos contínuo em M . Dizemos que P é orientável se para cada $x \in M$ for possível escolher uma orientação de $\mathcal{O}(x)$ em $P(x)$ de tal forma que a aplicação $x \mapsto \mathcal{O}(x)$ seja contínua.

O recobrimento duplo orientável de um campo de k -planos P é definido da seguinte maneira. Sejam $\widetilde{M} = \{(x, \mathcal{O}) | x \in M \text{ e } \mathcal{O} \text{ é uma das orientações de } P(x)\}$ e $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ a projeção $\pi(x, \mathcal{O}) = x$. Para cada $x \in M$, $\pi^{-1}(x) = \{(x, \mathcal{O}), (x, -\mathcal{O})\}$, onde \mathcal{O} é uma das orientações em $P(x)$ e $-\mathcal{O}$ é a outra. Definimos uma topologia em \widetilde{M} de tal forma que π é um recobrimento de duas folhas, e assim, a topologia co-induzida por π define uma estrutura diferenciável C^∞ em \widetilde{M} .

Definição 1.6 O *recobrimento duplo orientável* de P é por definição o campo de k -planos $\pi^*(P)$ dado por $\pi^*(P)_x = D\pi(x)^{-1}P(\pi(x))$.

Teorema 1.7 ([7]. *Teorema 4, Capítulo II. Pag 37.*) Suponhamos M conexa e seja P um campo de k -planos contínuo em M . Seja $(\widetilde{M}, \pi, \pi^*(P))$ o recobrimento duplo orientável de P . Então

(a) $\pi^*(P)$ é orientável

(b) \widetilde{M} é conexa se, e somente se, P é não orientável.

Agora, seja P um campo de k -planos em M . Dizemos que \widetilde{P} é um campo complementar a P ou transversal a P , se para todo $x \in M$ tivermos $P(x) + \widehat{P}(x) = T_x M$ e $P(x) \cap \widehat{P}(x) = \{0\}$.

Definição 1.8 Seja P um campo contínuo de k -planos. Dizemos que P é *transversalmente orientável* se existe um campo complementar a P contínuo e orientável.

Definição 1.9 Uma folheação \mathcal{F} de classe C^r ($r \geq 1$) é *orientável* se o campo de planos tangente a \mathcal{F} é orientável. Similarmente, \mathcal{F} é *transversalmente orientável* se o campo de planos tangentes a \mathcal{F} é transversalmente orientável. Denotaremos o campo de planos tangente a \mathcal{F} por $T\mathcal{F}$.

Com as definições e com o teorema anteriores, algumas propriedades verdadeiras para folheações orientáveis são passadas, via recobrimento de ordem 2^k , para algum $k \geq 1$, para contextos mais gerais. Ou seja, quando a folheação não é necessariamente orientável ou transversalmente orientável.

1.1.3 Uniformidade transversal e holonomia

Definição 1.10 Seja Σ uma subvariedade de M . Dizemos que Σ é transversal a \mathcal{F} quando Σ é transversal a todas as folhas de \mathcal{F} que ela encontra. Quando $\dim(\Sigma) + \dim(\mathcal{F}) = \dim(M)$, dizemos que Σ é uma *seção transversal* de \mathcal{F} .

Os próximos resultados serão muito importantes no nosso estudo.

Teorema 1.11 (*Uniformidade Transversal de \mathcal{F} - [7]. Teorema 3, Capítulo III. Pag 49.*)
Seja F uma folha de uma folheação \mathcal{F} de classe C^r ($r \geq 1$). Dados $q_1, q_2 \in F$, então existem seções transversais de \mathcal{F} , Σ_1 e Σ_2 , com $q_i \in \Sigma_i$ ($i = 1, 2$) e um difeomorfismo C^r , $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ tal que para qualquer folha F' de \mathcal{F} tem-se $f(F' \cap \Sigma_1) = F' \cap \Sigma_2$.

Sejam $\gamma : [0, 1] \rightarrow F$ um caminho contínuo e Σ_0 e Σ_1 pequenas seções transversais a \mathcal{F} de dimensão n passando por $p_0 = \gamma(0)$ e $p_1 = \gamma(1)$, respectivamente. Defini-se uma transformação local entre Σ_0 e Σ_1 ao longo das folhas de \mathcal{F} , sobre o caminho γ levando p_0 em p_1 , que será chamada aplicação de holonomia associada a γ e a denotaremos por f_γ .

Teorema 1.12 ([7]. *Teorema 1, Capítulo IV. Pag 64.*) *Sejam $\gamma_i : I \rightarrow M$, $i = 0, 1$ caminhos contidos numa folha F de \mathcal{F} tais que $\gamma_i(0) = p_0$ e $\gamma_i(1) = p_1$, $i = 0, 1$. Sejam Σ_0 e Σ_1 seções transversais a F em p_0 e p_1 , respectivamente. Sejam $f_{\gamma_i} : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$ aplicações de holonomia associadas a γ_i e φ_{γ_i} o germe de f_{γ_i} em p_0 . Então*

- *Se $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ rel(0, 1), então $\varphi_{\gamma_0} = \varphi_{\gamma_1}$.*
- *Se $p_0 = p_1$ e $\Sigma_0 = \Sigma_1$, então a transformação $\gamma \rightarrow \varphi_{\gamma_1}$ induz um homomorfismo*

$$\Phi : \pi_1(F, p_0) \rightarrow G(\Sigma_0, p_0),$$

dado por $\Phi([\gamma]) = \varphi_{\gamma^{-1}}$, e $G(\Sigma_0, p_0)$ denota o grupo de germes de difeomorfismos C^r de Σ_0 que deixam p_0 fixo.

Definição 1.13 O subgrupo $Hol(F, p_0) = \Phi(\pi_1(F, p_0))$ de $G(\Sigma_0, p_0)$ é chamado *grupo de holonomia* de F em p_0 .

1.2 Ações de grupos de Lie

Definição 1.14 Um *grupo de Lie* é um grupo G que possui uma estrutura de variedade diferenciável C^∞ tal que a aplicação $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ é de classe C^∞ . Uma subvariedade imersa $H \subset G$ de classe C^∞ que é também um subgrupo de G é chamada subgrupo de Lie de G .

O exemplo de folheação interessante para o nosso estudo será aquela definida por uma ação num grupo de Lie, que é dado como abaixo.

Definição 1.15 Uma *ação* de classe C^r de um grupo de Lie $(G, *)$ numa variedade M é uma aplicação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ de classe C^r tal que $\varphi(e, x) = x$ e $\varphi(g_1 * g_2, x) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, x))$, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $x \in M$. A variedade M , munida de uma G -ação, é chamada de G -variedade.

Definição 1.16 Seja M uma G -variedade. Dizemos que G atua *livremente* em M se, para quaisquer dois elementos distintos $g, h \in G$ e para qualquer $x \in M$, tem-se que $gx \neq hx$, ou equivalentemente, se dado $g \in G$ e qualquer $x \in X$, com $gx = x$, tem-se,

$g = 1$. Dizemos que G atua *fielmente ou efetivamente* em M se, para quaisquer dois elementos $g, h \in G$, existe $x \in M$ tal que $gx \neq hx$. Equivalentemente, se $g \neq 1$, $g \in G$, então existe $x \in M$ tal que $gx \neq x$.

Obsevação 1.17 *Claramente, toda ação livre é fiel.*

Definição 1.18 Seja M uma G -variedade. Dizemos que a ação de G em M é *propriamente descontínua* se, para qualquer $x \in M$, existe uma vizinhança U de x tal que $g.U \cap U = \emptyset$, para qualquer $g \in G$, com $g \neq 1$ e onde $g.U = \{g.u | u \in U\}$. Neste caso, dizemos que M é propriamente descontínuo.

Obsevação 1.19 *Se G age própria e descontinuamente em M , então a ação de G em M é livre.*

Definição 1.20 A *órbita* de um ponto $x \in M$ pela ação φ é o subconjunto

$$\mathcal{O}_x(\varphi) = \{\varphi(g, x) = gx \in M | g \in G\}.$$

Também podemos ver esse conjunto, denotando-se por $G.x$ da seguinte forma: dois elementos $x, y \in M$ são G -equivalentes se, existe $g \in G$ tal que $gx = y$. Esta relação é uma relação de equivalência e o conjunto de todos os gx , com $g \in G$ é a classe de equivalência determinada por $x \in M$.

Definição 1.21 O conjunto quociente X/G constituído pelas classes $G.x$ (para $x \in M$) munido da topologia quociente definida pela projeção $\pi : X \rightarrow X/G$ dada por $\pi(x) = G.x$ é chamado de *espaço das órbitas*.

Definição 1.22 O *subgrupo de isotropia* de $x \in M$ é o subgrupo

$$G_x(\varphi) = \{g \in G | \varphi(g, x) = gx = x\}.$$

É claro que $G_x(\varphi)$ é um subgrupo fechado de G . A aplicação $\psi_x : G \rightarrow M$ dada por $\psi_x(g) = \varphi(g, x)$ induz a aplicação $\overline{\psi}_x : G/G_x(\varphi) \rightarrow M$, $\overline{\psi}_x(\overline{g}) = \psi_x(g)$, onde $\overline{g} = g * G_x(\varphi)$, que é bem definida e injetiva. O espaço $G/G_x(\varphi)$ possui uma estrutura diferenciável e $\overline{\psi}_x$ é uma imersão injetiva cuja imagem é exatamente $\mathcal{O}_x(\varphi)$.

Definição 1.23 Dizemos que $\varphi : G \times M \rightarrow M$ é uma ação *folheada* se para todo $x \in M$ o espaço tangente à órbita de φ passando por x tem dimensão k fixa. Quando k é a dimensão de G , dizemos que a ação φ é *localmente livre*. Isso equivale a dizer que o grupo de isotropia é discreto para todo ponto $x \in M$. Quando essa configuração acontece, temos que todas as órbitas terão dimensão fixa k .

Os dois últimos parágrafos, na verdade, podem ser encontrado como um teorema em ([7] - Teorema 1 Cap. VIII, pags.166-168). Com tais definições, podemos ver como seriam, por exemplo, as órbitas de uma ação de \mathbb{R}^k numa variedade M .

Proposição 1.24 ([7]. *Proposição 1, Cap VIII, Pag 169.*) *Seja H um subgrupo fechado de \mathbb{R}^k . Então H é isomorfo a $\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{Z}^s$, para alguns inteiros não negativos ℓ e s com $0 \leq \ell + s \leq k$. Consequentemente, as órbitas de uma ação de \mathbb{R}^k são imersões de alguma das seguintes variedades: $\mathbb{R}^{k-s-\ell} \times \mathbb{T}^s$.*

Vamos ver um exemplo de uma ação de \mathbb{R}^2 em S^3 para ilustrar um pouco esses resultados e definições.

Exemplo 1.25 Seja $D \times S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, y_1^2 + y_2^2 = 1\}$. Consideremos os campos de vetores

$$X(x_1, x_2, y) = (\rho(r)x_1 - \beta x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (\beta x_1 + \rho(r)x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$Y(x_1, x_2, y_1, y_2) = -\alpha x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Onde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e $\rho(r)$ é uma função C^∞ não negativa tal que $\rho(r) = 0$ se, e só se, $r = 1$, $\frac{d^n \rho}{dr^n}(1) = 0$ para todo $n \geq 1$, e $\rho(r) = 1$ para r numa vizinhança de zero.

Computando facilmente, temos que X_t e Y_t comutam (isto é, $X_s \circ Y_t = Y_t \circ X_s$, $s, t \in \mathbb{R}$) em $D^2 \times S^1$ e dessa forma, definem uma ação ϕ de classe C^∞ de \mathbb{R}^2 em $D^2 \times S^1$, possuindo duas órbitas compactas que são $\{0\} \times S^1$ e $\partial(D^2 \times S^1)$. No caso em que α é um número irracional, todas as outras órbitas são planos densos em $D^2 \times S^1$. Quando α é racional, elas são cilindros mergulhados.

Tomando duas cópias de $D^2 \times S^1$ e identificando-se ao longo do bordo $\partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1$ por meio de um difeomorfismo que leva paralelos de um em meridianos do outro e vice-versa, obtemos exemplos de ações de \mathbb{R}^2 em S^3 em que as órbitas são de dimensão < 2 são dois círculos entrelaçados.

Veja Figura (1.2).

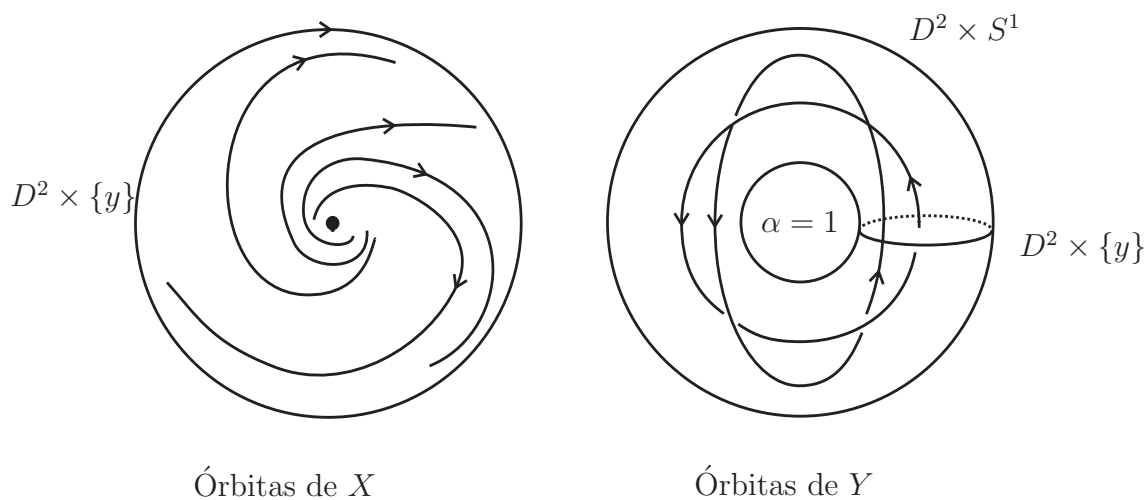
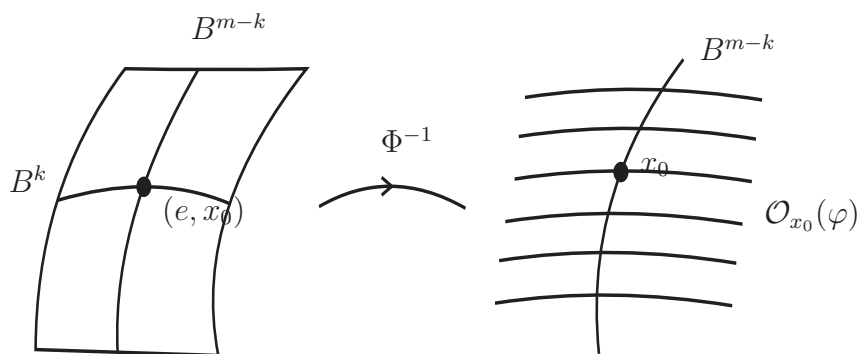


Figura 1.2: Órbitas do Exemplo 1.25.

Obsevação 1.26 *As órbitas de uma ação localmente livre definem as folhas de uma folheação de dimensão $\dim G$.*

Com efeito, seja $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação localmente livre cujas órbitas tem dimensão $k = \dim G$. Fixado $x_0 \in M$ seja $E \subset T_e G$ um subespaço complementar ao espaço tangente a $G_{x_0}(\varphi)$ e $i_1 : B^k \rightarrow G$, $i_1(0) = e$, um mergulho de um k -disco tangente a E em e . Se $i_2 : B^{m-k} \rightarrow M$, $i_2(0) = x_0$, denota o mergulho de uma pequena seção transversal à órbita $\mathcal{O}_{x_0}(\varphi)$ em x_0 , podemos definir a aplicação $\Phi : B^k \times B^{m-k} \rightarrow M$ dada por $\Phi = \varphi(i_1, i_2)$. Como $D\Phi(0, 0) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \rightarrow T_{x_0} M$ é um isomorfismo, existe uma vizinhança U de x_0 tal que $\Phi^{-1} : U \rightarrow B^k \times B^{m-k}$ é um difeomorfismo levando a órbita de $i_2(x) \in U \cap i_2(B^{m-k})$ num aberto da superfície $B^k \times \{x\}$. Isto define uma carta local da folheação por órbitas de φ .



1.3 Grupo fundamental e espaços de recobrimento

Nessa seção, iremos enunciar resultados importante sobre a teoria de homotopia e espaços de recobrimento. Recomendamos [29] e [19] para maiores detalhes e demonstrações dos resultados aqui citados. Cabe ressaltar que estes resultados serão ferramentas fundamentais para mostrar os nossos resultados da tese (Capítulo 3).

1.3.1 Grupo fundamental

Definição 1.27 Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ duas aplicações contínuas. Dizemos que f e g são *homotópicas* se existe uma aplicação contínua $F : X \times I \rightarrow Y$, onde $I = [0, 1]$, tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. A aplicação F é chamada de *homotopia* entre f e g .

No caso quando temos caminhos $\gamma : I \rightarrow X$ em X , dizemos que dois caminhos α e β em X com extremos fixos, isto é, com $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$, são homotópicos se existe uma homotopia $F : I \times I \rightarrow X$ tal que dados $s, t \in I$, então $F(s, 0) = \alpha(s)$, $F(s, 1) = \beta(s)$, para todo $s \in I$ e $F(0, t) = \alpha(0) = \beta(0)$ e $F(1, t) = \alpha(1) = \beta(1)$, para todo $t \in I$. No caso em que α e β são curvas fechadas, isto é, $\alpha(0) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(1) = x_0$, usamos a notação $\alpha \simeq \beta$.

É imeditado da definição acima que tanto a homotopia quanto a homotopia com extremos fixos são relações de equivalência, isto é, satisfazem as propriedades de reflexão, simetria e transitividade ([19], Proposição 1.2, Capítulo 1. Pag 26.).

Usamos a notação $[\alpha]$ para designar a classe de homotopia da curva α e a notação $\pi_1(X, x_0)$ para designar o conjunto das classes de homotopia de curvas fechadas $\alpha : I \rightarrow X$ tais que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. O ponto x_0 é chamado de ponto base de $\pi_1(X, x_0)$.

Agora, sejam α e β caminhos em X tais que o fim de α coincide com o início de β , isto é $\alpha(1) = \beta(0)$. Definimos o produto $\alpha * \beta : I \rightarrow X$, também conhecido como justaposição de caminhos, por

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

O caminho inverso de α é por definição o caminho $\alpha^{-1} = \alpha(1 - t)$. Não é difícil mostrar que esse produto induz uma estrutura de grupo em $\pi_1(X, x_0)$ com a multiplica-

ção $([\alpha], [\beta]) \mapsto [\alpha * \beta]$, com a identidade sendo o caminho constante $[C_{x_0}]$ em x_0 ([19], Proposição 1.3, Capítulo 1. Pag 26.).

Definição 1.28 Tal grupo $\pi_1(X, x_0)$ com a multiplicação, é dito *grupo fundamental* com ponto base x_0 . Quando o espaço X é conexo por caminhos, é fácil ver que a definição do grupo fundamental não depende do ponto base escolhido, e então, muitas vezes podemos encontrar a seguinte notação $\pi_1(X)$ apenas. Quando, além disso, o grupo fundamental do espaço X é trivial, isto é $\pi_1(X) = \{1\}$, dizemos que o espaço é *simplesmente conexo*.

Exemplo 1.29 *Todo conjunto convexo, por exemplo os conjuntos \mathbb{R}^n , são simplesmente conexos. Basta considerarmos a homotopia $F(x, t) = tx$ que é uma homotopia entre a identidade de \mathbb{R}^n com a função constante $F(x, 0) = 0$. Logo, todos os caminhos são homotópicos a identidade.*

Teorema 1.30 ([19], Proposição 1.7, Capítulo 1. Pag 29.) $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$, isto é, a aplicação $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1)$ que associa cada inteiro n a classe de homotopia do laço $\omega_n(s) = (\cos 2\pi ns, \sin 2\pi ns)$ com ponto inicial em $(1, 0)$ é um isomorfismo.

Definição 1.31 Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ induz uma aplicação $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$, definida por $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$. Como $\alpha \simeq \alpha'$ implica que $f \circ \alpha \simeq f \circ \alpha'$, esta aplicação está bem definida. Além disso, verifica-se facilmente que f_* é um homomorfismo de grupos. Tal homomorfismo é chamado de *homomorfismo induzido*.

Proposição 1.32 ([19], Proposição 1.18, Capítulo 1. Pag 37.) *Se $\varphi : X \rightarrow Y$ é uma equivalência homotópica, isto é, X e Y possuem a mesma homotopia, então o homomorfismo induzido $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ é um isomorfismo para todo $x_0 \in X$.*

1.3.2 Espaços de recobrimento e aplicações de recobrimento

Definição 1.33 Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação qualquer. O conjunto aberto $U \subset B$ é dito uma vizinhança distinguida se a imagem inversa $p^{-1}(U)$ pode ser escrito como união disjunta de conjuntos abertos V_α em E tal que para cada α , a restrição $p|_{V_\alpha}$ é um homeomorfismo de V_α em U . A coleção $\{V_\alpha\}$ é dita uma partição de $p^{-1}(U)$ em pedaços e as pré-imagens do tipo $p^{-1}(\{x\})$, para $x \in E$ são chamadas fibras de x . Claramente, p é um homeomorfismo local. Se para todo ponto $b \in B$, existe uma vizinhança distinguida U contendo o ponto b , então p é chamada de *aplicação de recobrimento* e B é chamado base do recobrimento. O par (E, p) é dito o *espaço de recobrimento* de B .

Exemplo 1.34 Seja \mathbb{P}^n o quociente de S^n pela relação de equivalência que identifica dois pontos antípodas $\{x, -x\}$. A aplicação $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ que associa cada ponto $x \in S^n$ a sua classe de equivalência $\{x, -x\}$ é um recobrimento.

Exemplo 1.35 A aplicação $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definida por $p(t) = e^{2\pi it}$ é um recobrimento de S^1 .

Obsevação 1.36 Sejam (E, p) e (F, q) recobrimentos de X e Y , respectivamente. Então $(E \times F, p \times q)$ é recobrimento de $X \times Y$, sendo a aplicação $p \times q$ definida como $(p \times q)(x, y) = (p(x), q(y))$. Agora, se U e V são vizinhanças distinguidas de $x \in X$ e $y \in Y$, então $U \times V$ é uma vizinhança distinguida de $(x, y) \in X \times Y$.

Exemplo 1.37 Como o toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$, temos que um recobrimento é $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Proposição 1.38 ([33] V.4.1.) Seja (E, p) um recobrimento de X , $b \in E$ e $x = p(b)$. Então, o homomorfismo induzido $p_* : \pi_1(E, b) \rightarrow \pi_1(X, x)$ é um monomorfismo.

Definição 1.39 Seja (E, p) um recobrimento de X . Um homeomorfismo $\phi : E \rightarrow E$ é dito uma *transformação de recobrimento* (ou *Deck transformation*) se $p \circ \phi = p$. Ainda, o conjunto de todas as transformações de recobrimento (denotaremos por $A(E, p)$) é um grupo com a operação de composição.

Proposição 1.40 ([19] V1.39 - Pag. 71.) O grupo $A(E, p)$ atua livremente sobre E , isto é, $g.x = x$ se, e somente se, $g = 1$.

Definição 1.41 Seja $\pi : E \rightarrow X$ um recobrimento e $f : Y \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Dizemos que $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ é um *levantamento* de f se $\pi \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Agora, sejam $\pi : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ com $\pi(e_0) = x_0$ um recobrimento e $\alpha : I \rightarrow X$ um caminho contínuo tal que $\alpha(0) = x_0$. Então existe um único caminho contínuo $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E$ que levanta α , com $\tilde{\alpha}(0) = e_0$. O ponto e_0 é chamado de ponto base de $\tilde{\alpha}$.

1.3.3 Recobrimento universal

Nessa subseção, o resultado principal a ser apresentado é a Proposição 1.51 que garante que o grupo fundamental da variedade M é isomorfo ao grupo dos automorfismos do recobrimento universal de M . Consideremos inicialmente um espaço de recobrimento $\pi : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ e uma aplicação contínua $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$. Observamos primeiramente uma condição suficiente para que f possa ser levantada.

Teorema 1.42 ([33], Lema 3.1 Pag 123) *Sejam f e π como acima. Suponhamos que Y é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos. Então existe um único levantamento $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ de f tal que $\tilde{f}(y_0) = e_0$.*

Um corolário importante desse teorema é o seguinte:

Corolário 1.43 ([33], Lema 3.2 Pag 124) *Sejam $\pi : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ e $\pi' : (E', e'_0) \rightarrow (X, x_0)$ dois recobrimentos de X tais que E e E' são simplesmente conexos e localmente conexos por caminhos. Então existe um único homeomorfismo $h : (E, e_0) \rightarrow (E', e'_0)$ tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{array}{ccc} (E, e_0) & \xrightarrow{h} & (E', e'_0) \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & (X, x_0) & \end{array} .$$

Com esses resultados, podemos definir, finalmente, o recobrimento universal de um espaço.

Definição 1.44 Dizemos que o recobrimento $\pi : E \rightarrow X$ é um *recobrimento universal* se E for simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos. O corolário acima, nos diz que dois recobrimentos universais de um mesmo espaço são homeomorfos. Por este motivo, sempre que um espaço X possuir um recobrimento universal, nos referimos a ele como o recobrimento universal de X .

Exemplo 1.45 Se X é simplesmente conexo, então qualquer recobrimento universal de X é homeomorfo a X .

Exemplo 1.46 O recobrimento $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dado por $\pi(x) = e^{2\pi i x}$ é um recobrimento universal de S^1 .

Definição 1.47 Um recobrimento (E, π) é dito *recobrimento regular* se $\pi_*(\pi_1(E, e_0))$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$. Ainda, esta condição independe da escolha do ponto base $e_0 \in \pi^{-1}(x_0)$.

Exemplo 1.48 Todo recobrimento universal é regular.

Definição 1.49 Seja G um grupo e E um conjunto no qual G atua. Seja $x \in E$. Dizemos que G opera *transitivamente* em E se, dados $x, y \in E$, existe $g \in G$ tal que $x.g = y$. Também dizemos, neste caso, que o espaço E é um G -espaço homogêneo.

Claramente, se G opera transitivamente em E então $G.x = E$, para todo $x \in E$.

Proposição 1.50 ([19], Proposição 1.40 - Pag.72) Seja (E, p) um espaço de recobrimento de X , $e \in p^{-1}(x), x \in X$. Então

- $p^{-1}(x)$ é um $\pi_1(X, x)$ -espaço homogêneo.
- O subgrupo de isotropia correspondente a $e \in p^{-1}(x)$ é precisamente o subgrupo $p_*(\pi_1(E, e))$ de $\pi_1(X, x)$.
- O número de folhas do recobrimento de (E, p) é o índice do subgrupo $p_*(\pi_1(E, e))$ em $\pi_1(X, x)$.

Proposição 1.51 ([33], Teorema 7.2 Pag 134) Seja (E, p) um recobrimento regular de X . Então $A(E, p)$ é isomorfo ao grupo quociente $\pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(E, p))$, para todo $x \in X$ e todo $e \in p^{-1}(x)$.

Obsevação 1.52 *Em particular, se o recobrimento é universal, $p_*(\pi_1(E, p)) \simeq \{1\}$ e portanto, $A(E, p) \simeq \pi_1(X, x)$ e a ordem de $\pi_1(X)$ é igual ao número de folhas do recobrimento (E, p) , ou seja, $\#p^{-1}(x) = \#\pi_1(X)$.*

Proposição 1.53 ([33], V.8.2.) *Sejam Y um espaço topológico conexo, localmente conexo por caminhos e G um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de Y e $p : Y \rightarrow Y/G$ a aplicação quociente sobre o espaço de órbitas de G . Então (Y, p) é um recobrimento regular de Y/G , com $G = A(Y, p)$.*

Para ilustrar um pouco todos esses resultados que serão importantes para o desenvolvimento daqui pra frente, daremos um exemplo simples.

Exemplo 1.54 *Seja $Y = \mathbb{R}$ a reta real, e, para algum inteiro n , defina $\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi_n(x) = x + n$. Seja $G = \{\varphi_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Então, G é um grupo de homeomorfismos de \mathbb{R} propriamente descontínuo. De fato, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tomamos U um intervalo aberto $(x - \frac{1}{3}, x + \frac{1}{3})$, então as vizinhanças $\varphi_n(U)$ são duas a duas disjuntas. Então, pela proposição anterior, \mathbb{R} é um recobrimento regular do espaço quociente \mathbb{R}/G . Assim, \mathbb{R}/G é homeomorfo ao espaço quociente do intervalo unitário fechado $[0, 1]$ obtido identificando os dois extremos. Então, \mathbb{R}/G é um círculo. Mais uma vez, provamos que o recobrimento universal do círculo é a reta real, e também que o grupo de automorfismos é cíclico e infinito.*

Ações Anosov: resultados preliminares

Neste capítulo introduzimos a noção de ação Anosov e estabelecemos alguns resultados preliminares sobre estas ações. Salientamos que, o nosso trabalho principal da tese (que aparece no seguinte capítulo), será concentrado com dimensão fixa da variedade em $k + 2$ (ou seja, quando $n = 2$). Entretanto, a princípio, colocaremos os resultados em condições mais gerais para que o leitor se interesse do que já está feito de modo mais geral, não prendendo, assim, a atenção para as dimensões do nosso trabalho. Para mais detalhamento e explanações, orientamos o leitor a ver [31], [32] e [44].

2.1 Definições e alguns resultados

Lembremos que, dada uma ação $\phi : G \times M \rightarrow M$ de um grupo de Lie G numa variedade diferenciável M , $\mathcal{O}_p = \{\phi(\omega, p) | \omega \in G\}$ é a órbita de $p \in M$ por ϕ e $\Gamma_p(\phi) = \{\omega \in G | \phi(\omega, p) = p\}$ é o subgrupo de isotropia de p . A ação é dita localmente livre se o grupo de isotropia de todos os pontos da variedade são discretos. Se $G = \mathbb{R}^k$, as órbitas são difeomorfas a $\mathbb{R}^l \times \mathbb{T}^{k-l}$, com $0 \leq l \leq k$ (Como foi feita a observação em 1.24).

Seja, \mathcal{F} uma folheação topológica de M . Denotamos a folha que contém $p \in M$ por $F(p)$. Para um subconjunto aberto U de M , contendo p , seja $\mathcal{F}|_U$ a folheação de U tal que $(\mathcal{F}|_U)(p)$ é a componente conexa de $F(p) \cap U$ contendo $p \in M$. Uma coordenada $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ em U é chamada de coordenada folheada de \mathcal{F} se x_{m+1}, \dots, x_n são funções constantes em cada folha de $\mathcal{F}|_U$, onde m é a dimensão de \mathcal{F} .

Uma folheação é de classe C^{r+} (isto é, é de classe C^r e com diferencial Lipschitz) se é coberta por coordenadas folheadas de classe C^r . Denotemos o fibrado tangente de M por TM . Se \mathcal{F} é uma folheação de classe C^1 , então denotamos o fibrado tangente de \mathcal{F} por $T\mathcal{F}$.

Vamos, primeiramente, fazer a definição mais importante do trabalho, que é a de uma ação Anosov. Em toda essa seção, ϕ é uma ação localmente livre, de classe C^r ($r \geq 1$) de $A = \mathbb{R}^k$ ou \mathbb{Z}^k sobre uma variedade M^{k+n} ($n \geq 2$) uma variedade suave, fechada com norma Riemanniana $\| \cdot \|$.

Definição 2.1 Chamamos um elemento $a \in A$ de *regular ou Anosov* se existem números reais $\lambda > 0$ e $C > 0$ e uma decomposição contínua, Dg -invariante (onde $g = \phi(a, \cdot) = \phi^a$) do fibrado tangente da variedade e tal que

$$TM = E_a^{ss} \oplus T\phi \oplus E_a^{uu},$$

onde $T\phi$ é o fibrado tangente às A -órbitas da ação e para todo $p \in M$, todo $v \in E_a^{ss}(p)$ ($v \in E_a^{uu}(p)$, respectivamente) temos que a diferencial de g , $g_* : TM \rightarrow TM$ satisfaz:

$$\|g_*^n(v)\| \leq Ce^{-\lambda|n|}\|v\|, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Chamamos uma A -ação *Anosov* se ela possui um elemento Anosov. Chamamos E_a^{ss} e E_a^{uu} de distribuições estável e instável de a , respectivamente.

Se M é compacta, essas noções não dependem da métrica Riemanniana ambiente. Note que a decomposição e as constantes da definição dependem do elemento Anosov a .

Hirsch, Pugh e Shub em [20] desenvolveram a teoria básica de transformações normalmente hiperbólicas e como consequência, temos os seguintes resultados:

Teorema 2.2 *Suponha que $a \in A$ seja um elemento Anosov. Então existem folheações Hölder contínuas \mathcal{F}_a^{ss} e \mathcal{F}_a^{uu} tangentes às distribuições E_a^{ss} e E_a^{uu} , respectivamente. Chamamos essas folheações de folheações estável forte e instável forte de a . Cada folha dessas folheações são subvariedades C^r -imersas de M .*

Teorema 2.3 *Seja M uma variedade fechada e $\phi : A \times M \rightarrow M$ uma ação C^r ($r \geq 1$) com um elemento Anosov a . Se $\tilde{\phi} : A \times M \rightarrow M$ é uma segunda ação de A suficientemente próxima a ϕ na topologia C^1 , então $\tilde{\phi}$ também é um elemento Anosov de $\tilde{\phi}$. As variedades estável e instável fortes de $\tilde{\phi}$ tendem para aquelas de ϕ na C^k -topologia quando $\tilde{\phi}$ tende*

para ϕ na C^k -topologia. Mais ainda, existe um homeomorfismo Hölder $H : M \rightarrow M$ próximo a id_M tal que H leva folhas da folheação da distribuição das órbitas de $\tilde{\phi}$ naquelas de ϕ .

Assim, podemos definir as folheações como abaixo.

Definição 2.4 As folheações $\mathcal{F}_a^{ss}, \mathcal{F}_a^{uu}, \mathcal{F}_a^s, \mathcal{F}_a^u$ tais que $T\mathcal{F}_a^{ss} = E_a^{ss}, T\mathcal{F}_a^{uu} = E_a^{uu}, T\mathcal{F}_a^s = E_a^{ss} \oplus T\phi, T\mathcal{F}_a^u = E_a^{uu} \oplus T\phi$, são chamadas de *folheação estável forte, instável forte, estável fraca e instável fraca*, respectivamente.

Para simplificarmos a notação, iremos denotar as folheações correspondentes como sendo $\mathcal{F}^{ss}, \mathcal{F}^{uu}, \mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$. Para todo $\delta > 0$, denotemos por $\mathcal{F}_\delta^i(x)$ a bola aberta de $F^i(x)$ (folha que contém o ponto x) com a métrica induzida com centro em x e raio δ , onde $i = ss, uu, s$ ou u .

Teorema 2.5 (do produto de Vizinhanças - [31], Teorema 3, pág. 5.) *Seja $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ uma ação Anosov, C^r ($r \geq 1$). Então, existe uma constante $\delta_0 > 0$ tal que para todo $\delta \in (0, \delta_0)$ e para todo $x \in M$, as aplicações*

$$[\cdot, \cdot]^u : \mathcal{F}^s(x) \times \mathcal{F}^{uu}(x) \rightarrow M; [y, z]^u = \mathcal{F}_{2\delta}^s(x) \cap \mathcal{F}_{2\delta}^{uu}(x)$$

$$[\cdot, \cdot]^s : \mathcal{F}^{ss}(x) \times \mathcal{F}^u(x) \rightarrow M; [y, z]^s = \mathcal{F}_{2\delta}^{ss}(x) \cap \mathcal{F}_{2\delta}^u(x)$$

são homeomorfismos sobre suas imagens.

Obsevação 2.6 .

- Toda folheação $\mathcal{F}_a^{ss}, \mathcal{F}_a^{uu}, \mathcal{F}_a^s$ ou \mathcal{F}_a^u é invariante por quaisquer difeomorfismos ϕ^b que comute com ϕ^a . Isto é, $\phi^b \circ \phi^a = \phi^a \circ \phi^b$. Em particular, é invariante por todo difeomorfismo ϕ^b cujo elemento b comute com a . Logo para todo $b \in \mathbb{R}^k$.
- Todas as folhas de \mathcal{F}_a^{ss} e \mathcal{F}_a^{uu} são planos, isto é, são difeomorfos a \mathbb{R}^l , para algum $l = \{0, \dots, k\}$. Pois todo domínio compacto em uma folha de \mathcal{F}_a^{ss} (respectivamente de \mathcal{F}_a^{uu}) é contraído pela iteração positiva (respectivamente negativa) de ϕ^a .

Definição 2.7 Dizemos que ϕ é uma ação de Anosov de *codimensão um*, se E_a^{uu} é 1-dimensional para algum elemento Anosov a em \mathbb{R}^k .

Obsevação 2.8 *Seja $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\phi)$ o conjunto dos elementos de Anosov de ϕ .*

1. \mathcal{A} é sempre um subconjunto aberto de \mathbb{R}^k . Pelo Teorema 2.3.
2. Toda componente conexa de \mathcal{A} é um cone convexo e aberto de \mathbb{R}^k . Com efeito, seja a' um elemento Anosov. Todo elemento próximo de a' compartilha as mesmas fibrações estável e instável, então, todos os elementos Anosov na mesma componente conexa que a' admite a mesma decomposição estável/instável. As propriedades de contração e expansão ao longo de um dado fibrado é estável pela composição ou pela multiplicação do campo de vetores gerador por uma constante positiva. Segue então, que a componente conexa é um cone convexo. Tal componente conexa é chamada de “chamber”. Mais geralmente, um subcone regular é qualquer conjunto convexo e aberto contido numa “chamber”.
3. Seja \mathcal{A}_a a chamber contendo a , então $\mathcal{F}_a^{ss} = \mathcal{F}_b^{ss}$, $\mathcal{F}_a^{uu} = \mathcal{F}_b^{uu}$, $\mathcal{F}_a^s = \mathcal{F}_b^s$ e $\mathcal{F}_a^u = \mathcal{F}_b^u$, para todo $b \in \mathcal{A}_a$.
4. Qualquer ϕ -órbita cujo subgrupo de isotropia contém um elemento de Anosov v' é compacta. De fato, seja y um ponto no fecho da órbita. É claramente fixo por $\phi^{v'}$, e existe uma seção transversal Σ a ϕ contendo x tal que para qualquer z em Γ próximo a y , a imagem $\phi^{v'}(z)$ pertence a Γ . Então, y é um ponto fixo de $\phi^{v'}$ do tipo sela, em particular, é um ponto fixo por $\phi^{v'}$ isolado. Então y pertence a ϕ -órbita de x .

Outro resultado importante e básico a respeito de \mathbb{R}^k -ações Anosov é o Closing Lema para Ações que é uma generalização imediata do caso para fluxos de Anosov.

Teorema 2.9 (*Closing Lemma*, [20]) *Seja $a \in \mathbb{R}^k$ um elemento Anosov da ação ϕ de \mathbb{R}^k numa variedade fechada M , C^r ($r \geq 1$). Então, existem constantes positivas ε_0, C e λ dependendo continuamente de ϕ na C^1 -topologia tal que: se para algum $x \in M$ e $t > 0$*

$$d(\phi(ta, x), x) < \varepsilon_0,$$

então existe um ponto $y \in M$, e uma aplicação diferenciável $\gamma : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que para todo $s \in [0, t]$ temos

$$(1) \quad d(\phi(sa, x), \phi(\gamma(s), y)) < Ce^{\lambda(\min\{s, t-s\})}d(\phi(ta, x), x),$$

$$(2) \quad \phi(\gamma(t), y) = \phi(\delta, y), \text{ onde } \|\delta\| < Cd(\phi(ta, x), x),$$

$$(3) \quad \|\gamma' - a\| < Cd(\phi(ta, x), x).$$

Obsevação 2.10 *Seja \mathcal{C} um subcone regular contendo a (por exemplo, uma chamber). Como a é fixo, o item (3) do Closing Lemma implica que se $d(\phi(ta, x), x)$ é suficientemente pequena, a velocidade γ' pertence a \mathcal{C} , então, a imagem de γ está contida em \mathcal{C} . Mais ainda, novamente, se $d(\phi(ta, x), x)$ é suficientemente pequena, o item (2) implica que $\gamma(t) - \delta$ pertence a \mathcal{C} . De acordo com as Observações em 2.8, a órbita de y é compacta.*

Aqui, iremos dar uma definição equivalente do conjunto não-errante, e estaremos mais preocupados com a definição no contexto do nosso estudo: Ações de \mathbb{R}^k .

Definição 2.11 Um ponto $x \in M$ é dito *não-errante* com respeito a um subcone regular \mathcal{C} se para qualquer conjunto aberto U contendo x , existe um $v \in \mathcal{C}$, $\|v\| > 1$, tal que $\phi^v(U) \cap U \neq \emptyset$, onde $\phi^v = \phi(v, \cdot)$. O conjunto de todos os pontos não-errantes, com respeito a \mathcal{C} é denotado por $\Omega(\mathcal{C})$.

Usando o Closing Lemma para ações de \mathbb{R}^k , obtemos:

Proposição 2.12 ([31], Proposição 1, Pág. 8) *Para qualquer subcone regular \mathcal{C} , a união das órbitas compactas de ϕ é densa em $\Omega(\mathcal{C})$.*

Obsevação 2.13 *Seja a um elemento não trivial de \mathbb{R}^k . O conjunto não-errante $\Omega(\phi^{ta})$ do (semi-)fluxo gerado por a está claramente contido em $\Omega(\phi)$. Por outro lado, o conjunto não-errante de qualquer fluxo linear no toro é todo o toro. Então, órbitas compactas de \mathbb{R}^k estão contidas em $\Omega(\phi^{ta})$. Então, segue, da Proposição 2.12 que os conjuntos $\Omega(\phi^{ta})$ e $\Omega(\phi)$ coincidem. Em particular, o conjunto não-errante $\Omega(\mathcal{C})$ é independente da escolha do subcone regular \mathcal{C} .*

Lema 2.14 ([31], Lema 1, Pág. 8) *O subgrupo de isotropia de qualquer órbita compacta contém um elemento de \mathcal{C} .*

Temos que a métrica Riemanniana induz uma forma de área em todas as ϕ -órbitas.

Teorema 2.15 (*Decomposição Espectral-* [31], Teorema 5, pág. 9.) *Seja M uma variedade suave fechada e seja $\phi \in C^r$ ($r \geq 1$) uma \mathbb{R}^k -ação Anosov em M . O conjunto não-errante de ϕ pode ser particionado num número finito de conjuntos fechados ϕ -invariantes, chamados de blocos básicos:*

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^l \Lambda_i$$

tais que para qualquer subcone regular \mathcal{C} , cada Λ_i é \mathcal{C} -transitivo, isto é, contém uma \mathcal{C} -órbita densa.

2.2 Exemplos de ações Anosov

A seguir daremos alguns exemplos de ações Anosov de \mathbb{R}^k . Para mais exemplos recomendamos [31]. Enquanto que no caso de fluxos e difeomorfismos existe uma abundância de exemplos, no contexto de ações de \mathbb{Z}^k e \mathbb{R}^k , muito poucos exemplos são conhecidos, além dos padrões (que iremos mencionar logo em seguida), como por exemplo, aqueles vindos de produtos e outras construções óbvias. Faremos aqui a apresentação de alguns desses exemplos e depois exploramos outros exemplos conhecidos da literatura.

Exemplo 2.16 Podemos obter ações Anosov da seguinte maneira. Produto cartesiano de duas ações Anosov, recobrimento finito de uma ação Anosov e restrições de uma \mathbb{Z}^k -ação Anosov para um subgrupo que contém pelo menos um elemento regular.

Exemplo 2.17 (Suspensão de uma ação de \mathbb{R}^{k-1} por um difeomorfismo) Seja $f : N^{k+1} \rightarrow N^{k+1}$ um difeomorfismo parcialmente hiperbótico, C^r ($r \geq 1$), e $\phi : \mathbb{R}^{k-1} \times N \rightarrow N$ uma ação, C^r ($r \geq 1$), localmente livre que comuta com f , (isto é, $f \circ \phi^v = \phi^v \circ f, \forall v \in \mathbb{R}^{k-1}$).

A suspensão de ϕ por f é a ação Φ de $\mathbb{R}^k \approx \mathbb{R}^{k-1} \oplus \mathbb{R}$ dada por

$$(a, b).[x, t] = [\phi^a(x), t + b].$$

A variedade N_f , que é o quociente de $N \times \mathbb{R}$ pela relação de equivalência: $\sim : (x, t) \sim (f^m(x), t + m), \forall m \in \mathbb{Z}$, munida dessa ação de \mathbb{R}^k é chamada de *1-suspensão* Anosov. Claramente, é uma ação Anosov de \mathbb{R}^k , para o qual o elemento de coordenadas $(0, 1)$ em $\mathbb{R}^k \approx \mathbb{R}^{k-1} \oplus \mathbb{R}$ é Anosov. Observe que a variedade $N \times \{0\}$ projeta para uma seção transversal ao fluxo induzido pela translação da coordenada t , isto é, toda órbita do fluxo intersecta essa variedade infinitas vezes.

Exemplo 2.18 (\mathbb{T}^ℓ extensões) Seja ϕ uma ação C^r ($r \geq 1$) de \mathbb{R}^k numa variedade m -dimensional fechada M , e seja $p : \widehat{M} \rightarrow M$, o \mathbb{T}^ℓ -fibrado flat principal sobre M . Por flat, queremos dizer que é munido com uma conexão \mathbb{T}^ℓ -invariante, isto é, uma folheação m -dimensional \mathcal{H} transversa às fibras de p e preservadas por \mathbb{T}^ℓ . Então, a \mathbb{R}^k -ação em M é levantada como uma \mathbb{R}^k -ação tangente a \mathcal{H} . Mais ainda, essa ação comuta com a ação à direita de \mathbb{T}^ℓ tangente às fibras. Então, ambas ações combinam como uma $\mathbb{R}^{k+\ell}$ -ação em \widehat{M} . Claramente esta é Anosov, se ϕ é Anosov.

Exemplo 2.19 (Suspensão de uma ação de \mathbb{Z}^k) Seja ϕ_0 uma ação C^r ($r \geq 1$) de \mathbb{Z}^k em N_0 . Consideremos a ação C^r ($r \geq 1$) de \mathbb{Z}^k em $\mathbb{R}^k \times N$ definida por $z_0(x, p) = (x - z, \phi_0(z, p))$. Tome o espaço das órbitas dessa ação:

$$M = \mathbb{R}^k \times N / \mathbb{Z}^k.$$

Note que a ação de \mathbb{R}^k em $\mathbb{R}^k \times N$ por $x(y, n) = (x + y, n)$ comuta com a \mathbb{Z}^k -ação e então induz em M uma \mathbb{R}^k -ação, C^r ($r \geq 1$), que é chamada de suspensão de ϕ_0 .

Agora, suponha que pelo menos um elemento $a \in \mathbb{Z}^k$ age como um difeomorfismo de Anosov em N . Então, a suspensão é uma \mathbb{R}^k -ação Anosov. De fato, a, pensado como um elemento de \mathbb{R}^k , é um elemento regular, isto é, Anosov.

2.3 Um teorema de redução e consequências

Nesta seção apresentamos dois resultados de redução e suas implicações. O primeiro, Teorema 2.22, foi mostrado em [31] e afirma que toda ação Anosov de \mathbb{R}^k de codimensão um é uma \mathbb{T}^ℓ extensão de uma ação Anosov irreduzível (ver Definição 2.20) de $\mathbb{R}^{k-\ell}$. Mencionaremos algumas implicações deste resultado, em particular: os espaços associados a uma ação Anosov irreduzível de codimensão um têm várias propriedades topológicas interessantes. Por exemplo, o recobrimento universal da variedade ambiente é difeomorfa a \mathbb{R}^n (Teorema 2.29) e o espaço das órbitas é difeomorfo a \mathbb{R}^{n-k} (Mencionaremos que qualquer ação Anosov de codimensão um, tomando uma redução para o fibrado do toro principal se necessário, tem várias propriedades topológicas interessantes, a mais importante que será feita nessa seção será mostrar que o recobrimento universal da variedade ambiente é difeomorfa a \mathbb{R}^n (Teorema 2.29).

2.3.1 Irredutibilidade

Definição 2.20 Uma ação Anosov ϕ de codimensão um de \mathbb{R}^k em M é dita *irredutível* se para todo $v \in \mathbb{R}^k - \{0\}$ e $x \in M$ com $\phi^v(x) = x$, temos que Hol_γ , a holonomia ao longo de $\gamma = \{\phi^{sv}(x); s \in [0, 1]\}$ de $\mathcal{F}^s(x)$ é uma contração topológica ou uma expansão topológica.

Obsevação 2.21 Quando $k = 1$, caso em que a ação é um fluxo, todas as ações Anosov de codimensão um são irredutíveis.

Teorema 2.22 ([31], Teorema 8, pág. 18.) Seja $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ uma ação, C^r ($r \geq 1$), Anosov de codimensão um. Então, existe um subgrupo abeliano livre $H_0 \approx \mathbb{R}^l$ de \mathbb{R}^k , um reticulado $\Gamma_0 \subset H_0$, uma $(n - l)$ -variedade suave \overline{M} , e $p : M \rightarrow \overline{M}$ uma \mathbb{T}^l -principal fibração tal que:

- Γ_0 é o núcleo de ϕ . $v \in \Gamma_0$, se para todo $x \in M$ a holonomia h_x^v é trivial;
- Toda órbita de $\phi_0 = \phi|_{H_0 \times M}$ é uma fibra de $p : M \rightarrow \overline{M}$. Em particular, \overline{M} é o espaço de órbitas de ϕ_0 ;
- ϕ induz uma ação Anosov de codimensão um irredutível $\overline{\phi} : \overline{H} \times \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ de classe C^r ($r \geq 1$), onde $\overline{H} = \mathbb{R}^k / H_0$.

A demonstração do Teorema 2.22 essencialmente se baseia no seguinte lema:

Lema 2.23 ([31], Lema 5, pág. 17.) Seja v um elemento de \mathbb{R}^k e x um elemento de M tal que $\phi^v(x) = x$. Então, ou x é ponto fixo repulsor ou atrator (e então, único) da restrição de ϕ^v a \mathcal{F}^{uu} , ou a ação ϕ na variedade toda M é trivial.

Obsevação 2.24 Seja $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ uma ação, C^r ($r \geq 1$), Anosov de codimensão um e $\overline{\phi}$ a ação de \overline{H} (que é isomorfo a \mathbb{R}^{k-l}) em \overline{M} como no Teorema 2.22. Então:

- $\dim M > k + 2 \Leftrightarrow \dim \overline{M} > \dim \overline{H} + 2$;
- ϕ é transitiva $\Leftrightarrow \overline{\phi}$ é transitiva;
- ϕ é irredutível $\Leftrightarrow \overline{H} = \mathbb{R}^k$.

2.3.2 Os espaços transversos

Muitas vezes, em vez de estudarmos a dinâmica do sistema na variedade ambiente, o fazemos no recobrimento universal da variedade. Primeiramente pelas propriedades topológicas (grupo fundamental da variedade ambiente agindo no recobrimento por deck transformations, o fato de ser simplesmente conexa), também pelas folheações levantadas no recobrimento universal possuírem propriedades interessantes (transversalidade, folhas mergulhadas), e, principalmente, por ser possível definirmos espaços importantes como o espaço das órbitas e o espaço das folhas, que, muitas vezes, são essenciais para obtermos resultados para o sistema dinâmico original. Aqui, iremos considerar ainda a variedade suave, fechada e de dimensão $(k + 2)$.

Faremos, então, algumas definições e resultados primordiais do sistema dinâmico no recobrimento universal da variedade, como segue.

Seja $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ o recobrimento universal de M e $\tilde{\phi}$ o levantamento de ϕ em \widetilde{M} . As folheações $\mathcal{F}^{ss}, \mathcal{F}^{uu}, \mathcal{F}^s$ e \mathcal{F}^u são levantadas para folheações $\tilde{\mathcal{F}}^{ss}, \tilde{\mathcal{F}}^{uu}, \tilde{\mathcal{F}}^s$ e $\tilde{\mathcal{F}}^u$ em \widetilde{M} . Denotemos por \mathcal{Q}^ϕ o espaço das órbitas de $\tilde{\phi}$ e $\pi^\phi : \widetilde{M} \rightarrow \mathcal{Q}^\phi$ a projeção canônica. O nosso objetivo é demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 2.25 ([31], Teorema 8, pág. 18.) *Se ϕ é uma ação Anosov irreduzível de codimensão um de \mathbb{R}^k e classe C^r ($r \geq 2$) em M , então \mathcal{Q}^ϕ , o espaço das órbitas de $\tilde{\phi}$, é homeomorfo a \mathbb{R}^{n-k} .*

Se $p = n - 1 - k$, como por hipótese \mathcal{F}^{uu} tem dimensão um, p é a dimensão de \mathcal{F}^{ss} .

Proposição 2.26 ([31], Proposição 2, pág. 19.) *Seja ϕ é uma ação Anosov irreduzível de codimensão um de \mathbb{R}^k e classe C^r ($r \geq 2$) em M . Todo laço em M transversal a \mathcal{F}^s é homotopicamente não-trivial em M .*

Corolário 2.27 ([31], Corolário 1, pág. 19.) *Seja ϕ é uma ação Anosov irreduzível de codimensão um de \mathbb{R}^k e classe C^r ($r \geq 2$) em M . As órbitas de ϕ são incompressíveis. Isto é, todo laço em uma ϕ -órbita \mathcal{O}_x que é homotopicamente não-trivial em \mathcal{O}_x é homotopicamente não trivial em M .*

Uma folheação é dita ser por planos fechados se todas as folhas são planos fechados e imagens de mergulhos de \mathbb{R}^n .

Corolário 2.28 ([31], Corolário 2, pág. 19.) *Seja ϕ uma ação, C^r ($r \geq 2$), Anosov irreduzível de codimensão um em M . As folheações $\tilde{\mathcal{F}}^{ss}, \tilde{\mathcal{F}}^{uu}, \tilde{\mathcal{F}}^s$ e $\tilde{\mathcal{F}}^u$ e a folheação definida por $\tilde{\phi}$ são por planos fechados. A intersecção entre uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}^u$ e uma folha $\tilde{\mathcal{F}}^s$ é no máximo uma órbita de $\tilde{\phi}$. Todas as órbitas de $\tilde{\phi}$ intersectam uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}^{ss}$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^{uu}$ no máximo uma vez.*

Como uma consequência do Teorema de Palmeira (ver [40]), temos:

Corolário 2.29 ([31], Corolário 3, pág. 20.) *Seja ϕ uma ação, C^r ($r \geq 2$), Anosov irreduzível de codimensão um em M . Então o recobrimento universal de M é difeomorfo a \mathbb{R}^n .*

Proposição 2.30 ([31], Lema 6, pág. 20.) *Se ϕ é uma ação, C^r ($r \geq 2$), Anosov de codimensão um em M , então o espaço das órbitas de $\tilde{\phi}$ é Hausdorff.*

Como uma consequência imediata do Teorema 2.22, obtemos:

Corolário 2.31 ([31], Corolário 4, pág. 21.) *Seja $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ uma ação, C^r ($r \geq 2$), Anosov de codimensão um, não necessariamente irreduzível. Então todas as ϕ -órbitas não compactas são difeomorfas a $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^{k-l}$.*

Definição 2.32 O espaço das folhas estáveis é o quociente de \tilde{M} pela relação de equivalência que identifica dois pontos se eles pertencem a mesma folha de $\tilde{\mathcal{F}}^s$. Denotamos esse espaço por \mathcal{L}^s , e por $\pi^s : \tilde{M} \rightarrow \mathcal{L}^s$ a aplicação quociente.

O espaço das folhas estáveis é uma 1-variedade. De fato, a restrição de π^s a uma folha instável forte de $\tilde{\mathcal{F}}^{uu}$ define uma atlas de subconjuntos abertos homeomorfos a \mathbb{R} . Observe que tal atlas é de classe C^1 . Mais ainda, como toda folha estável fraca é um plano fechado, ele desconecta \tilde{M} . Segue, então, que \mathcal{L}^s é simplesmente conexo.

Entretanto, \mathcal{L}^s pode não satisfazer a propriedade de separação Hausdorff, e então não necessariamente temos que é difeomorfa ou mesmo homeomorfa a \mathbb{R} .

Finalmente, como $\tilde{\mathcal{F}}$ é tangente às órbitas, as projeções por π^s de duas folhas diferentes de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ (respectivamente $\tilde{\mathcal{F}}^u$) são disjuntas. Essas projeções definem duas folheações em $\mathcal{Q}^\phi \approx \mathbb{R}^n$, o espaço das órbitas. Tais folheações são denotadas por \mathcal{G}^s e \mathcal{G}^u , respectivamente. Observe que as folhas de \mathcal{G}^u são linhas fechadas, e as folhas de \mathcal{G}^s são hiperplanos fechados difeomorfos a \mathbb{R}^{n-1} .

Como a ação de $\pi_1(M)$ por automorfismos de recobrimento preserva as folhas estáveis, ela induz uma ação de $\pi_1(M)$ em \mathcal{L}^s . A próxima proposição é um corolário imediato da descrição das folhas de \mathcal{F}^s de ações Anosov irreduzíveis de codimensão um: folhas estáveis não-planares são folhas estáveis de órbitas compactas.

Proposição 2.33 ([32], *Proposição 1, pág.9*) *Suponha que ϕ , C^r ($r \geq 2$), seja irreduzível. Então, o subgrupo de isotropia em $\pi_1(M)$ de todos os elementos de \mathcal{L}^s ou é trivial (quando a folha em \mathcal{L}^s corresponde a uma órbita não compacta de ϕ), ou isomorfo a \mathbb{Z}^k (quando a folha em \mathcal{L}^s corresponde a uma órbita compacta de ϕ).*

Mais ainda, dada uma folha estável ou instável esta contém no máximo uma ϕ -órbita compacta:

Lema 2.34 ([32], *Lema 2, Pág.9*) *Seja g uma folha de \mathcal{G}^s ou \mathcal{G}^u preservada por um elemento não trivial γ de $\pi_1(M)$. Então, γ preserva um, e somente um, ponto da folha g .*

Classes de ações Anosov de \mathbb{R}^k numa $(k + 2)$ -variedade

A partir desse capítulo, iremos começar a abordar algumas configurações específicas no nosso sistema, isto é, iremos estudar as ações Anosov de classe C^r , $r \geq 2$, de \mathbb{R}^k em $(k + 2)$ -variedades fechadas, já que o objetivo principal da tese é obter resultados de classificação destas ações. Observamos que $r \geq 2$ pois usaremos os resultados da Seção 2.3.2.

Veremos que a ação só poderá ser de um dos seguintes tipos: splitting (ver Definição 3.9), skewed (ver Definição 3.9) ou inseparável (ver Definição 3.10).

Um resultado importante da Seção 3.2 será que as ações produto são topologicamente transitivas (Teorema 3.8). Na seção 3.4 é definida a noção de losango e losango invariante e pela Observação 3.22, veremos que ações splitting não admitem losangos. Na observação 3.27 é dada uma condição necessária e suficiente para um losango ser invariante. Finalmente, na Seção 3.5 é mostrado que nos casos inseparável e skewed existem losangos invariantes (ver Corolário 3.29 e Teorema 3.30, respectivamente).

3.1 Algumas considerações particulares

A partir daqui, vamos considerar ϕ uma ação C^r , $r \geq 2$, Anosov de \mathbb{R}^k sobre uma $(k+2)$ -variedade suave e fechada M .

Como os nossos resultados mostram que a menos de \mathbb{T}^ℓ extensões a ação é um fluxo, podemos supor que a ação ϕ é irredutível. Neste caso devemos mostrar que $k = 1$. A primeira consequência da escolha das dimensões é que os fibrados estável forte e o instável forte são unidimensionais. Logo, as folheações fracas são de codimensão 1 e de classe C^1 (ver [20]). Iremos supor que todas essas folheações são orientáveis e transversalmente orientáveis, o que é sempre verdade a menos de um recobrimento finito.

Lembramos que, pelo fato de ϕ ser irredutível, temos as seguintes propriedades:

- o recobrimento universal \widetilde{M} de M é difeomorfo a \mathbb{R}^{k+2} (Corolário 2.29);
- o espaço das folhas \mathcal{L}^σ de $\widetilde{\mathcal{F}}^\sigma$, para $\sigma = u, s$, é uma variedade 1-dimensional, não necessariamente Hausdorff. Logo a folheação $\widetilde{\mathcal{F}}^\sigma$ é também definida pela projeção $\pi^\sigma : \widetilde{M} \rightarrow \mathcal{L}^\sigma$ que é um fibrado localmente trivial.
- o espaço das órbitas \mathcal{Q}^ϕ da ação $\widetilde{\phi}$ é difeomorfo a \mathbb{R}^2 (Proposição 2.30).

Além disso, como a ação do grupo fundamental de M preserva as folheações $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ e $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ então:

- a projeção $\pi^\phi : \widetilde{M} \rightarrow \mathcal{Q}^\phi$ induz duas folheações suplementares $\mathcal{G}^s = \pi_*^\phi(\widetilde{\mathcal{F}}^s)$ e $\mathcal{G}^u = \pi_*^\phi(\widetilde{\mathcal{F}}^u)$, e uma ação de Γ sobre \mathcal{Q}^ϕ que preserva estas folheações.
- a projeção $\pi^\sigma : \widetilde{M} \rightarrow \mathcal{L}^\sigma$ induz uma ação de Γ sobre \mathcal{L}^σ , para $\sigma = u, s$.

Resumiremos alguns resultados já provados no capítulo anterior, agora vistas nas dimensões específicas do trabalho, para organizarmos as idéias para este novo capítulo.

Proposição 3.1 .

- *Nenhuma órbita periódica de ϕ é homotopicamente trivial. (Proposição 2.26).*
- *Cada folha de \mathcal{F}^{uu} (também, \mathcal{F}^{ss}) é a imagem de uma imersão injetiva da reta real \mathbb{R} . (Corolário 2.27).*
- *Cada folha de $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}$ intersecta cada folha de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ no máximo num ponto. (Corolário 2.28).*

3.2 Ação produto e propriedades

Definiremos uma noção muito importante para o nosso trabalho que é a de ação produto. Estas ações têm propriedades dinâmicas muito importantes, entre outras, elas são topologicamente transitivas (Teorema 3.8).

Definição 3.2 A ação Anosov ϕ é *produto* se o espaço das folhas \mathcal{L}^s é Hausdorff.

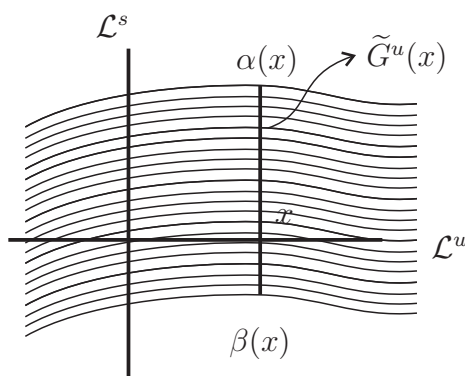
Teorema 3.3 Se a ação ϕ é produto, então o espaço das folhas instáveis é também separável.

Demonstração:

Suponhamos que a variedade e as diversas folheações são todas orientáveis.

Lembremos que o espaço das órbitas \mathcal{Q}^ϕ é naturalmente munido de duas folheações por retas transversais \mathcal{G}^s e \mathcal{G}^u . O espaço das folhas dessas folheações não são outras senão \mathcal{L}^s e \mathcal{L}^u . Chamemos de $p^s : \mathcal{Q}^\phi \rightarrow \mathcal{L}^s \simeq \mathbb{R}$ e $p^u : \mathcal{Q}^\phi \rightarrow \mathcal{L}^u$ as submersões que definem \mathcal{G}^s e \mathcal{G}^u .

Para todo elemento x de \mathcal{Q}^ϕ , nós associamos a imagem por p^s da folha de \mathcal{G}^s que o contém: trata-se de um intervalo $]\alpha(x), \beta(x)[$ de $\mathcal{L}^s \simeq \mathbb{R}$. Os valores de $\alpha(x)$ e de $\beta(x)$ são reais ou $\pm\infty$. É imediato que a aplicação α é semi-contínua superiormente e que β é semi-contínua inferiormente (fixada uma orientação).



Lema 3.4 A aplicação α ou apenas atinge valores finitos, ou então é sempre $-\infty$.

Prova.

O conjunto das órbitas para as quais α atinge o valor $-\infty$ é Γ -invariante e saturado por \mathcal{G}^u . A ação sendo transitiva (veja Teorema 3.8), é suficiente mostrar que este conjunto é aberto.

Seja x um elemento de tal conjunto: chamaremos, respectivamente, de τ^s e F as folhas de \mathcal{G}^s e de \mathcal{G}^u passando por x . Como a órbita de F por Γ é densa em \mathcal{Q}^ϕ , existem dois elementos y e z de τ^s enquadrando x e pertencendo cada um a um iterado de F . Essas duas órbitas são também antecedentes de $-\infty$ por α , o que significa que para cada folha de \mathcal{G}^u que as contém intersectam todas as folhas de \mathcal{G}^s inferiores à τ^s . Segue que α não pode ter valores diferentes de $-\infty$ para todo intervalo $[y, z]$ de τ^s . ■

O resultado análogo para β segue quase imediatamente. Isto é, ou β toma apenas valores finitos ou, então, β vale $+\infty$ para todo domínio de definição).

Lema 3.5 *Se α possui apenas valores infinitos, então o mesmo ocorre com β .*

Prova.

Suponhamos que α vale $-\infty$ e que β , por contradição, seja finito para todo domínio. Considere uma órbita x de \mathcal{Q}^ϕ que seja ponto fixo de um elemento γ de Γ . Então, a folha $\beta(x)$ é também fixa por γ . Segue que ela deve também conter uma órbita x' fixada por γ . O que é um absurdo: as folhas $\mathcal{G}^s(x)$ e $\mathcal{G}^u(x')$ deveriam se intersectar, o que implicaria que cada uma conteria duas órbitas fixas por γ . ■

Se α e β só tomam valores infinitos, segue o resultado trivialmente. Logo, vamos supor que α e β só tomam valores finitos.

Uma folha $\mathcal{G}^u(x)$ desconecta ou não as folhas $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ de \mathcal{G}^s . Se elas desconectam, a órbita de x é dita do tipo **D**. Ela é dita do tipo **C**, caso contrário. Iremos mostrar que só o tipo **D** é possível.

De fato, para cada órbita x do tipo **C**, a componente conexa de $\mathcal{Q}^\phi \setminus \mathcal{G}^u(x)$ não contém nem $\alpha(x)$ nem $\beta(x)$ será denotada por \mathcal{D}_x . É claro que todos os elementos de \mathcal{D}_x são todos do tipo **C**. As órbitas periódicas sendo densas, o aberto \mathcal{D}_x contém um ponto fixo de um elemento γ de Γ . Podemos, então, reduzir ao caso onde x é esse ponto fixo. Então, as folhas $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ de \mathcal{G}^s são também fixas por γ . Elas contêm cada uma um ponto fixo de γ : aquele de α será denotado por x' e o de $\beta(x)$ será denotado por x'' .

A folha $\mathcal{G}^u(x')$ não pode intersectar $\beta(x)$. Da mesma forma, $\mathcal{G}^u(x'')$ não pode intersectar $\alpha(x)$. Como $\mathcal{G}^s(x)$ é a única folha de \mathcal{G}^s contida entre $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ que são fixadas por γ , então segue que ela é $\alpha(x'')$ e $\beta(x')$.

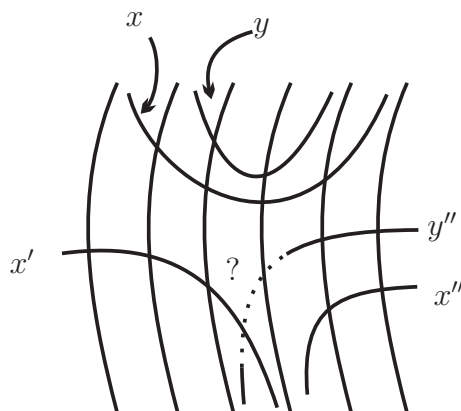


Figura 3.1: Tipo D.

Pela densidade das folhas cilíndricas, existe em \mathcal{D}_x uma folha de \mathcal{G}^u intersectando $\mathcal{G}^s(x)$ e fixada por um elemento γ' de Γ . Essa folha não intersecta nem $\alpha(x)$, nem $\beta(x)$, nem $\mathcal{G}^u(x)$. Ela está, então, inteiramente contida em \mathcal{D}_x . Seja y a órbita fixada por γ' contida nessa folha fixa: ela pertence a \mathcal{D}_x . Como ela não pode ser fixada por γ , a folha $\mathcal{G}^s(y)$ é disjunta de $\mathcal{G}^s(x)$. Ela intersecta então $\mathcal{G}^u(x')$ ou $\mathcal{G}^u(x'')$. Sendo esses dois casos análogos, iremos estudar o primeiro caso.

O que nós acabamos de mostrar para x , se aplica para y . Em particular, a folha $\mathcal{G}^s(y)$ é a “ α ” de algum y'' . O que nos leva a uma contradição: as folhas $\mathcal{G}^u(y'')$ e $\mathcal{G}^u(x')$ deveriam se interseccionar, mesmo sendo distintas.

O que mostra que todas as órbitas são do tipo D. É fácil de se deduzir que \mathcal{L}^u também é separável, e daí segue o resultado. \square

As duas aplicações α e β introduzidas durante a demonstração do Teorema 3.3 são constantes ao longo das folhas de \mathcal{G}^u . Elas induzem, então, duas aplicações α_u e β_u de \mathcal{L}^u em \mathcal{L}^s . E, de maneira análoga, definimos duas aplicações α_s e β_s de \mathcal{L}^s em \mathcal{L}^u . Essas aplicações conjugam as ações de Γ sobre \mathcal{L}^s e \mathcal{L}^u . E será importante conhecer a natureza topológica de tais aplicações.

Antes de definirmos as três classes de ações Anosov, iremos fazer mais algumas considerações a respeito de ações produto.

Proposição 3.6 *Se a ação ϕ é produto, então a ação de Γ sobre \mathcal{L}^s é efetiva. A ação de um elemento de Γ diferente da identidade numa vizinhança de um de seus pontos fixos é contratante ou dilatante. Além disso, o subgrupo de isotropia para essa ação de todos os*

elementos de \mathcal{L}^s é trivial ou cíclica. Enfim, a união de todos os elementos fixos de Γ é denso em \mathcal{L}^s .

Prova.

As três primeiras afirmações decorrem da Proposição 3.1. A última vem do fato que o saturado por \mathcal{F}^s é a aderência da união das órbitas periódicas de ϕ que é todo M (Proposição 2.12). ■

Lembremos que a ação é topologicamente transitiva se ela admite uma órbita densa. Nosso próximo resultado será mostrar que toda ação Anosov produto é topologicamente transitiva. Para isso, precisamos, primeiramente, mostrar que o conjunto das órbitas compactas (denotado por $Comp(\phi)$) da ação ϕ é denso em M .

Proposição 3.7 *Se a ação ϕ é produto, então o conjunto das órbitas compactas é denso em M . Isto é $\overline{Comp(\phi)} = M$.*

Prova.

Para mostrarmos este resultado, basta provarmos que todos os pontos de M são não errantes. De fato, pelo Teorema de decomposição espectral, teremos

$$\Omega(\phi) = \overline{Comp(\phi)} = M.$$

Seja $x \in M$ e suponhamos que x seja errante, isto é, x não pertence a $\Omega(\phi)$. Logo, para qualquer vizinhança U de x , temos que $\phi^{ta}(U) \cap U = \emptyset$, para todo $a \in \mathbb{R}^k$, $a \neq 0$ e t grande.

Tomemos um elemento $a \in \mathbb{R}^k$, a Anosov e consideremos o fluxo φ^{ta} do ponto x e tome $p \in \omega_{\varphi^{ta}}(x)$ um ponto limite de x pelo fluxo φ^{ta} .

Sabemos que p não pertence a U . Sejam $F^s(x) \in \mathcal{F}^s$, $F^u(x) \in \mathcal{F}^u$, $F^{ss}(x) \in \mathcal{F}^{ss}$ e $F^{uu}(x) \in \mathcal{F}^{uu}$ as folhas estável fraca, instável fraca, estável forte e instável forte que passam por x , respectivamente.

Tomemos $\mathcal{I}_x^{ss} = F^{ss}(x) \cap U$ (um segmento estável forte em U) e saturamos por φ^{ta} .

Claramente em p , teremos um segmento \mathcal{I} (pela continuidade de φ^{ta}) contido em $Sat_{\varphi^{ta}}(\mathcal{I}_x^{ss})$. Como mostra a Figura (3.2).

Dessa forma, o que obtemos são dois abertos $A \subset \mathcal{I}_x^{ss}$ e $B \subset \mathcal{I}$ tais que (A, B) são inseparáveis no sentido que todas as folhas estáveis de \mathcal{F}^s que intersectam A também intersectam B .

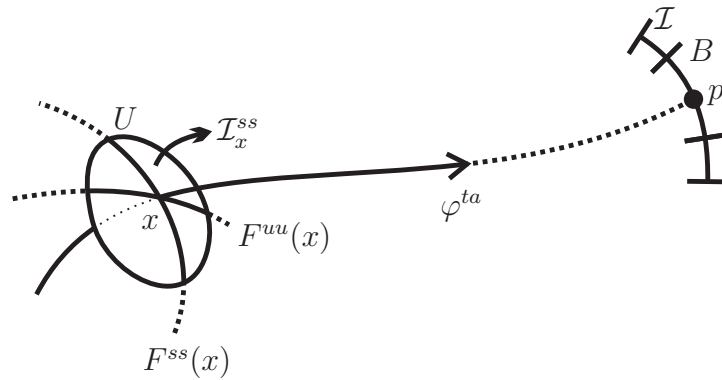


Figura 3.2: Vizinhanças Inseparáveis

Agora, tomando elementos Anosov que geram a ação ϕ , fazemos o mesmo raciocínio para cada gerador e assim podemos concluir que as folhas F_x^s e F_p^s são inseparáveis, no sentido que para toda vizinhança de F_x^s , existe uma folha instável fraca que intersecta F_x^s e F_p^s e assim \mathcal{L}^s não é Hausdorff. Absurdo, pois temos que ϕ é Produto. ■

Teorema 3.8 *Se a ação ϕ é produto, então ela é topologicamente transitiva.*

Demonstração:

Suponhamos que a ação ϕ seja produto mas que não seja transitiva. Existe, em particular, uma órbita de Γ em $\mathcal{L}^s \simeq \mathbb{R}$ cuja aderência μ não é todo \mathcal{L}^s . Seja I uma componente conexa do complementar de μ . Seja a uma extremidade de I . Pela Proposição 3.6, existe em I uma infinidade de pontos com isotropia não trivial. Ou, todos os elementos de Γ fixando um elemento de I preserva I , então, tomando recobrimento finito se não preserva orientação, ele fixa a . Seja γ um gerador do grupo de isotropia de a : todas as folhas cilíndricas pertencendo a I são, então, pontos fixos de γ . Ou, novamente pela Proposição 3.6, o conjunto dos pontos fixos de γ é um fechado discreto. E portanto não é denso em I . Contradição. \square

3.3 Ações splitting, skewed e inseparável

Como definido anteriormente, a ação é dita produto quando \mathcal{L}^s é Hausdorff, e portanto, difeomorfo a reta real \mathbb{R} . Neste caso vimos, no Teorema 3.3, que o espaço das folhas instáveis também será Hausdorff, e daí difeomorfo a \mathbb{R} . Existem dois tipos de ações produto que a seguir definimos.

Definição 3.9 Dizemos que uma ação Anosov produto ϕ é *splitting* quando todas as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ intersectam todas as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}^u$. E é dito *do tipo skewed* ou simplesmente *skewed*, caso contrário.

Definição 3.10 Quando o espaço das folhas (seja o instável ou o estável) não é Hausdorff, dizemos que existe um “*branching*” ou *ramificação* no espaço das folhas. Isto é, existe um par (F, G) , $F, G \in \tilde{\mathcal{F}}^i$, $i = u, s$ de folhas inseparáveis. Qualquer vizinhança (saturada pela ação ϕ) de F intersecta qualquer vizinhança de G . Neste caso, diremos que a ação é *do tipo inseparável* ou simplesmente *inseparável*.

Obsevação 3.11 *Observemos que podemos definir tais aplicações α e β quando estamos no caso que ϕ é produto. Mais ainda se α e β tomam valores infinitos, temos que ϕ é do tipo splitting e é do tipo skewed, caso contrário, que vimos, ser equivalente a α e β tomarem valores finitos para todos os pontos.*

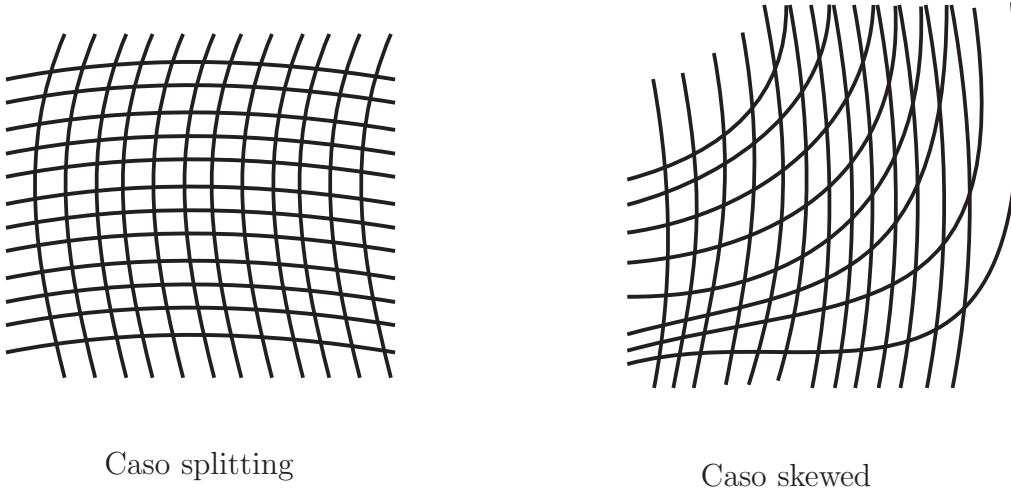


Figura 3.3: As folheações no caso produto

Agora, veremos um resultado que nos dá uma propriedade importante das aplicações acima definidas, para o caso skewed.

Lema 3.12 *Se a ação ϕ é do tipo skewed, as aplicações $\alpha_u, \alpha_s, \beta_u$ e β_s são homeomorfismos.*

Prova.

Iremos demonstrar apenas para as aplicações α_s e β_s . O caso de α_u e β_u são tratados de maneira análoga. Lembremos que, como a ação não é topologicamente equivalente a uma suspensão, as aplicações α_s e β_s atingem apenas valores finitos. É suficiente mostrar o lema para α_s , o caso β_s é análogo.

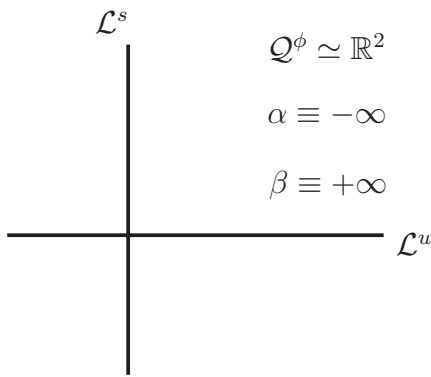
Seja φ a aplicação de \mathcal{Q}^ϕ em $\mathcal{L}^s \times \mathcal{L}^u$ que a uma órbita associa às suas folhas estáveis e instáveis. Temos que φ é injetiva, e, então, trata-se de um homeomorfismo sobre sua imagem Ω . Este aberto Ω é o conjunto dos pares (x, y) tais que $\alpha_s(x) < y < \beta_s(x)$. A intersecção do aberto Ω por uma horizontal $\mathcal{L}^s \times \{y\}$ é identificada via φ a uma folha y de \mathcal{G}^u . Portanto, ela é conexa. Aqui, significa que se $x < x' < x''$ são três elementos de \mathcal{L}^s podemos ter $\alpha_s(x)$ e $\alpha_s(x'')$ inferiores à $\alpha_s(x')$. Então, se α_s não é monótona, existe um trio $x < x' < x''$ tal que:

$$\alpha_s(x') < \alpha_s(x) \quad \alpha_s(x') < \alpha_s(x'').$$

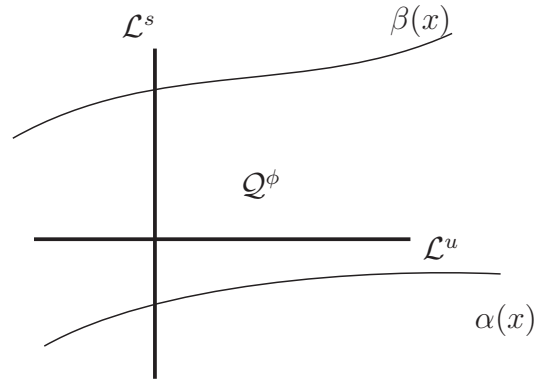
O que implicaria que α_s fosse decrescente em $] - \infty, x[$ e crescente em $]x'', +\infty[$. Seja y_0 o limite superior dos elementos y tais que α_s é crescente nos intervalos do tipo $] - \infty, y[$.

É claro que y_0 deveria ser um ponto fixo comum a todos os elementos de Γ , o que é um absurdo.

A aplicação α_s é, portanto, monótona. Se \mathcal{L}^s e \mathcal{L}^u estão convenientemente orientados, ela é crescente. Afirmamos que ela é contínua. Com efeito, se α_s admite um salto de descontinuidade, existiria em \mathcal{L}^u um intervalo I disjunto da imagem de α_s . O que contradiz a invariância da imagem de α_s , por uma ação de Γ de da minimalidade dessa ação. Em particular, a imagem de α_s é um intervalo aberto de \mathcal{L}^u . Uma extremidade deste intervalo seria um ponto fixo comum a todos os elementos de Γ . Não existe, então, o que mostra a sobrejetividade de α_s . Enfim, o conjunto dos pontos de \mathcal{L}^s numa vizinhança dos quais α_s é constante é um aberto preservado pela ação de Γ . Sempre por minimalidade da última, se este aberto fosse não vazio, ele seria o \mathcal{L}^s inteiro. O que significaria que α_s é constante, o que contradiz sua sobrejetividade. Logo α_s é injetiva. ■



Caso splitting



Caso skewed

3.4 Losangos no recobrimento universal

A noção de losango é um ingrediente fundamental para provarmos o Teoremas B. Na próxima seção provamos a existência de losangos (invariantes) no recobrimento universal da variedade M , quando a ação ϕ é inseparável ou skewed, que são exatamente os casos correspondentes a esse teorema. Iremos estudar um pouco o que acontece no espaço das órbitas e das folhas e para definir losango (invariante) faremos algumas definições complementares e essenciais como por exemplo, a noção de perfect fit e retângulo.

Definição 3.13 Se L é uma folha de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou de $\widetilde{\mathcal{F}}^u$, então uma *semifolha* de L é uma componente conexa A de $L - \gamma$, onde γ é uma órbita inteira em L . A semifolha fechada é $\overline{A} = A \cup \gamma$ e seu bordo é $\partial A = \gamma$. Uma *faixa de ação* B definida por duas órbitas $\gamma_1 \neq \gamma_2$ em L é a componente conexa de $L - \{\gamma_1, \gamma_2\}$ que não é uma semifolha de L . A faixa de ação fechada associada a ela é $\overline{B} = B \cup \{\gamma_1, \gamma_2\}$ e seu bordo é $\partial B = \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Como \widetilde{M} é simplesmente conexa temos que $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ e $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ são transversalmente orientáveis. Suponhamos, então, que tais orientações foram fixadas. Note que, em geral, automorfismos de recobrimento não preservam orientações transversais.

Para $p \in \widetilde{M}$, seja $\widetilde{F}_+^s(p)$ a meia folha de $\widetilde{F}^s(p)$ definida por \mathcal{O}_p (órbita de p) e a orientação transversal positiva a $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ em p . Ela é chamada de semifolha positiva de $\widetilde{F}^s(p)$. Analogamente, definimos $\widetilde{F}_-^s(p)$ (semifolha negativa), e também $\widetilde{F}_+^u(p)$ e $\widetilde{F}_-^u(p)$.

Como observado anteriormente, vamos listar algumas propriedades fundamentais das folhas e suas intersecções. Temos que qualquer folha $L \in \widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ separa \widetilde{M} . Isso é consequência do fato de \widetilde{M} ser \mathbb{R}^{k+2} e pelo Teorema de Häefliger (ver [7]). Como L é um hiperplano fechado, L é propriamente mergulhada.

Definimos a parte da frente de L como sendo a componente de $\widetilde{M} - L$ definida pela orientação transversal positiva a L . Também a chamamos de lado positivo de L . Similarmente, definimos a parte de atrás de L (ou lado negativo) de L . Para $p \in \widetilde{M}$ seja $\widetilde{F}_+^{ss}(p) = \widetilde{F}_+^s(p) \cap \widetilde{F}^{ss}(p)$. Analogamente, definimos $\widetilde{F}_-^{ss}(p)$, $\widetilde{F}_+^{uu}(p)$ e $\widetilde{F}_-^{uu}(p)$.

Sabemos que, se $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^s$ e $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^u$, então F e G se intersectam em no máximo uma órbita, já que duas intersecções forçariam uma tangência de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ e $\widetilde{\mathcal{F}}^u$. Isso é mais fácil visualizado em \mathcal{Q}^ϕ , já que \mathcal{G}^s e \mathcal{G}^u são folheações unidimensionais do plano.

Definição 3.14 Dizemos que as folhas $F, L \in \widetilde{\mathcal{F}}^s$ e $G, H \in \widetilde{\mathcal{F}}^u$ formam um *retângulo* se F intersecta ambas G e H então L também os intersectará, veja a Figura (3.4). Também dizemos que E intersecta G entre F e L se $E \cap G$ está contido na faixa de ação em G definido por $G \cap F$ e $G \cap L$. É fácil ver que se $E \in \widetilde{\mathcal{F}}^s$ intersecta G entre F e L , então E também intersecta H entre F e L . Então, existe uma estrutura produto de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ e $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ na região limitada por F, L, G e H .

Definição 3.15 Dado $p \in \widetilde{M}$ (ou $p \in \mathcal{Q}^\phi$), seja

$$\mathcal{I}_+^u(p) = \{F \in \widetilde{\mathcal{F}}^s \mid F \cap \widetilde{F}_+^u(p) \neq \emptyset\},$$

um conjunto aberto de \mathcal{L}^s . Note que a folha $\widetilde{F}^s(p) \notin \mathcal{I}_+^u(p)$. Analogamente, defina $\mathcal{I}_-^u(p)$,

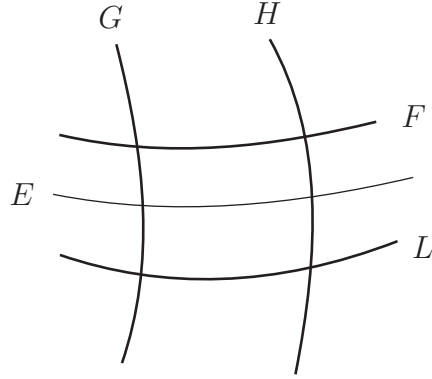


Figura 3.4: Retângulo

$\mathcal{I}_+^s(p)$ e $\mathcal{I}_-^s(p)$. Seja também $\mathcal{L}_+^u(p) = \bigcup\{p \in \widetilde{M} | p \in F \in \mathcal{I}_+^u(p)\}$. Então $\mathcal{L}_+^u(p)$ é um subconjunto aberto de \widetilde{M} e $\widetilde{W}^s(p) \subset \partial\mathcal{L}_+^u(p)$. Similarmente, defina $\mathcal{L}_-^u(p)$, $\mathcal{L}_-^s(p)$ e $\mathcal{L}_+^s(p)$.

Definição 3.16 Duas folhas $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^s$ e $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^u$, formam um *perfect fit* (F, G) se $F \cap G = \emptyset$ e existem duas semifolhas F_1 de F e G_1 de G e também duas faixas de ação $L_1 \subset L \in \widetilde{\mathcal{F}}^s$ e $H_1 \subset H \in \widetilde{\mathcal{F}}^u$, tais que:

$$\overline{L_1} \cap \overline{G_1} = \partial L_1 \cap \partial G_1,$$

$$\overline{L_1} \cap \overline{H_1} = \partial L_1 \cap \partial H_1,$$

$$\overline{H_1} \cap \overline{F_1} = \partial H_1 \cap \partial F_1,$$

$$(1) \forall S \in \widetilde{\mathcal{F}}^u, S \cap L_1 \neq \emptyset \Rightarrow S \cap F_1 \neq \emptyset$$

$$(2) \forall E \in \widetilde{\mathcal{F}}^s, E \cap H_1 \neq \emptyset \Rightarrow E \cap G_1 \neq \emptyset$$

Veja a Figura (3.6). As faixas de ação L_1 e H_1 (ou as folhas L e H) não são unicamente determinadas pelo *perfect fit* (F, G) .

Obsevação 3.17 As implicações (1) e (2), na verdade, são equivalências. Isto é

$$S \cap L_1 \neq \emptyset \Leftrightarrow S \cap F_1 \neq \emptyset$$

$$E \cap H_1 \neq \emptyset \Leftrightarrow E \cap G_1 \neq \emptyset$$

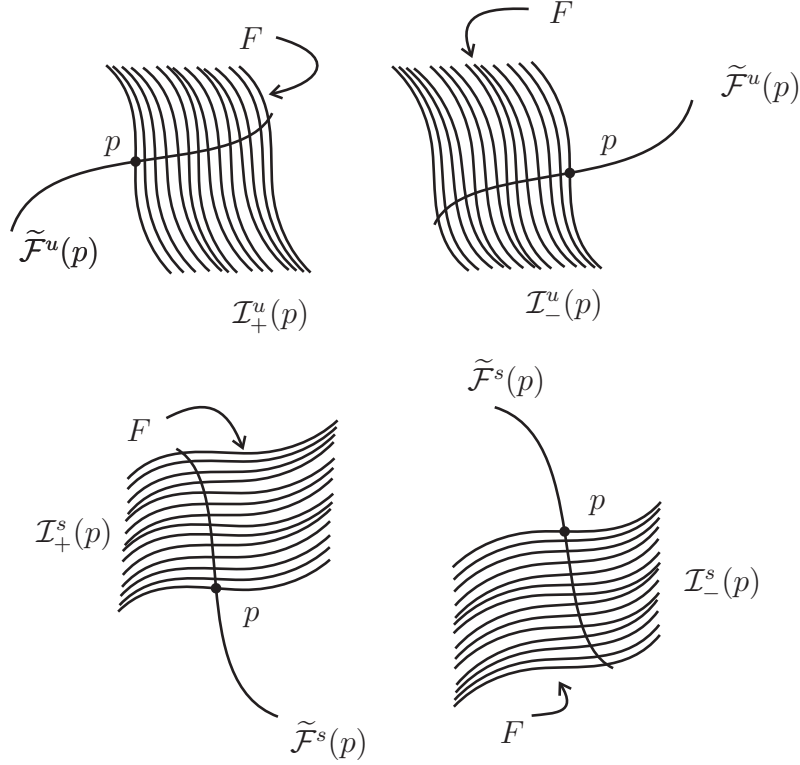


Figura 3.5: Os conjuntos $\mathcal{I}_{\pm}^q(p)$

De fato, seja $S \in \tilde{\mathcal{F}}^u$ com $S \cap F_1 \neq \emptyset$. Escolha $R \in \tilde{\mathcal{F}}^s$ próxima o suficiente de F , tal que $R \cap H_1 \neq \emptyset$ e $R \cap S \neq \emptyset$. Por (2), $R \cap G_1 \neq \emptyset$. Se $S = G$, então $G \cap F \neq \emptyset$, contradição. Se G separa H de S , então G separa F de S , contradição pois $F_1 \cap S \neq \emptyset$. Então S intersecta R entre G e H . Como R, L, G, H formam um retângulo, isto implica que S intersecta L entre G e H , isto é, S intersecta L_1 . Isso motra a equivalência forte em (1) e analogamente, prova-se a equivalência de (2).

Obsevação 3.18 *Perfect fits produzem retângulos “ideais”, no sentido de que mesmo se F e G não se intersectam, existe uma estrutura produto (de $\tilde{\mathcal{F}}^u$ e $\tilde{\mathcal{F}}^s$) no interior da região limitada por F, L, G e H .*

No seguinte lema iremos mostrar agora a unicidade de perfect fits.

Lema 3.19 *(Unicidade de Perfect Fits) Seja $F \in \tilde{\mathcal{F}}^s$. Então existe no máximo uma folha instável G formando um perfect fit com F , dada uma meia folha e um lado de F .*

Prova. Seja $F \in \tilde{\mathcal{F}}^s$ e suponha que existam G_1 e $G_2 \in \tilde{\mathcal{F}}^u$ formando perfect fit com a mesma semifolha de F e ambas no mesmo lado de F . Sejam $L_i, H_i, i = 1, 2$ as faixas de

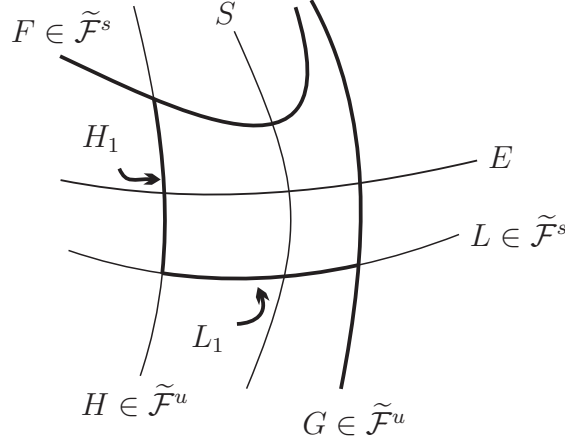


Figura 3.6: Perfect Fit

ação definindo o perfect fit (F, G_i) . Seja $p_i \in F \cap \partial H_i$. Pelo teorema de estabilidade de Reeb (Ver [42]) existem segmentos fortes abertos τ_i com $p_i \in \tau_i$ e tal que o conjunto das folhas estáveis intersectando τ_1 e τ_2 sejam os mesmos. Seja $E \in \tilde{\mathcal{F}}^s$ com $E \cap \tau_i \neq \emptyset$ e E no lado de F contendo G_i . Se E está próximo o suficiente de F , segue (novamente pelo Teorema de Estabilidade de Reeb) que $E \cap H_i \neq \emptyset$ e então $E \cap G_i \neq \emptyset$. Note que E está entre F e L_i . E além disso, $E \cap G_1$ e $E \cap G_2$ estão no mesmo lado de H_1 (e também do mesmo lado de H_2). Suponha que G_1 intersecta E entre H_2 e G_2 . As folhas E, L_2, G_2, H_2 formam um retângulo em \mathcal{Q}^ϕ , então segue que $G_1 \cap E \neq \emptyset \Rightarrow G_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Mas isso implica que $G_1 \cap F \neq \emptyset$, contradizendo o fato que (F, G_1) forma um perfect fit. Pela mesma razão, G_2 intersectando E entre H_1 e G_1 está fora de questão. Logo $G_1 = G_2$, como queríamos demonstrar. ■

Agora estamos em condições de definir o conceito de losango. Faremos duas definições equivalentes, a primeira é de caráter mais analítico e a segunda mais geométrico.

Definição 3.20 Suponha que $p, q \in \tilde{M}$ satisfaçam

$$\mathcal{I}_+^u(p) \cap \mathcal{I}_+^s(p) = \mathcal{I}_-^u(q) \cap \mathcal{I}_-^s(q). (i)$$

Então, dizemos que a intersecção é um *losango* \mathcal{B} em \tilde{M} com $(-, -)$ vértice p (ou $\tilde{\phi}_{\mathbb{R}^k}(p)$) e $(+, +)$ vértice q . Note que a equação acima (i) implica que $\mathcal{I}_+^u(p) = \mathcal{I}_-^u(q)$ e $\mathcal{I}_+^s(p) = \mathcal{I}_-^s(q)$. Se, por outro lado, p e q satisfizerem a seguinte igualdade

$$\mathcal{I}_+^s(p) \cap \mathcal{I}_-^u(p) = \mathcal{I}_-^s(q) \cap \mathcal{I}_+^u(q). (ii)$$

então a interseção será um losango \mathcal{B} com $(+, -)$ vértice p e $(-, +)$ vértice q . Em qualquer caso, segue que $\tilde{F}^s(p), \tilde{F}^u(q)$ formam um perfect fit e, também, $\tilde{F}^s(q), \tilde{F}^u(p)$ - esta é uma forma equivalente de se definir losango. O losango é, portanto, uma região aberta em \tilde{M} . Os lados do losango no caso (i) são $\tilde{F}_+^s(p), \tilde{F}_+^u(p), \tilde{F}_-^s(q), \tilde{F}_-^u(q)$, e não estão contidos em \mathcal{B} , mas estão contidos em $\partial\mathcal{B}$. Similarmente, para o caso (ii).

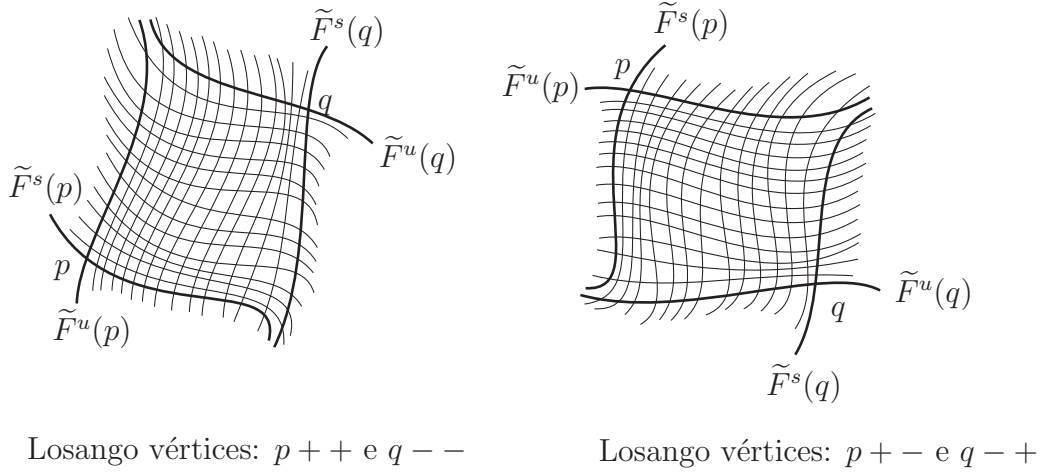


Figura 3.7: Losangos

Como dadas quatro folhas existe no máximo um losango com lado nelas, muitas vezes iremos nos referir às folhas inteiras como sendo os lados do losango.

Obsevação 3.21 *Observe que a definição de losango pode ser considerada no recobrimento universal e no espaço das órbitas. Sendo assim, muitas vezes, usaremos o espaço que nos for conveniente.*

Obsevação 3.22 *Ações splitting não admitem perfect fits, já que todas as folhas estáveis fracas intersectam todas as folhas instáveis fortes. Consequentemente, não existem losangos para ações splitting.*

No que resta desta seção introduzimos a noção de órbita e folha periódica, para finalmente definir e caracterizar um losango invariante.

Definição 3.23 Dizemos que uma órbita \tilde{O} de $\tilde{\phi}$ é *periódica* se é invariante pela ação de um elemento não trivial de Γ . Similarmente, definimos uma *folha periódica* $F \in \tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$.

Proposição 3.24 *Uma órbita $\tilde{\mathcal{O}}$ de $\tilde{\phi}$ é periódica se, e somente se, $\mathcal{O} = \pi(\tilde{\mathcal{O}})$ é uma órbita compacta de ϕ . Isto é, existe uma correspondência biunívoca entre os pontos periódicos da ação levantada com as órbitas compactas da ação original.*

Prova.

Fixemos $x_0 \in M$ e $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ tal que $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$ e seja $\tilde{\mathcal{O}} = \{\tilde{\phi}(v, \tilde{x}_0) | v \in \mathbb{R}^k\}$ uma órbita de $\tilde{\phi}$. Sabemos que $\pi(\tilde{\phi}(v, \tilde{x}_0)) = \phi(v, x_0)$, logo $\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}} = \{\phi(v, x_0) | v \in \mathbb{R}^k\}$.

(\Rightarrow) Suponhamos que $\tilde{\mathcal{O}}$ seja uma órbita periódica de $\tilde{\phi}$, ou seja, existe um automorfismo não trivial $g \in \pi_1(M)$ tal que $g(\tilde{\mathcal{O}}) = \tilde{\mathcal{O}}$. Como o único automorfismo do recobrimento que possui ponto fixo é a identidade, existe $v_0 \in \mathbb{R}^k - \{0\}$ tal que

$$g(\tilde{x}_0) = g(\tilde{\phi}(0, \tilde{x}_0)) = \tilde{\phi}(v_0, \tilde{x}_0).$$

Com isso, temos que

$$\phi(0, x_0) = \pi(\tilde{\phi}(0, \tilde{x}_0)) = \pi \circ g(\tilde{\phi}(0, \tilde{x}_0)) = \pi(\tilde{\phi}(v_0, \tilde{x}_0)) = \phi(v_0, x_0).$$

Assim, temos que \mathcal{O} é uma órbita compacta de ϕ .

(\Leftarrow) Reciprocamente, suponha que \mathcal{O} seja uma órbita compacta de ϕ . Então, existe $v_0 \in \mathbb{R}^k - \{0\}$ com $\phi(v_0, x_0) = x_0$. Tome $t_0 = \min\{t > 0 | \phi(tv_0, x_0) = x_0\}$ e defina o caminho $\alpha : [0, t_0] \rightarrow M$ por $\alpha(t) = \phi(tv_0, x_0)$, $\alpha(0) = \alpha(t_0) = x_0$. Assim, existe um único levantamento de α , $\tilde{\alpha}$ em \tilde{M} com $\tilde{\alpha} : [0, t_0] \rightarrow \tilde{M}$ com $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$. Agora, seja $\tilde{\beta} : [0, t_0] \rightarrow \tilde{M}$ o caminho definido por $\tilde{\beta}(t) = \tilde{\phi}(tv_0, \tilde{x}_0)$, $\tilde{\beta}(0) = \tilde{x}_0$ e tal que

$$\pi \circ \tilde{\beta}(t) = \pi(\tilde{\phi}(tv_0, \tilde{x}_0)) = \phi(tv_0, x_0) = \alpha(t), \forall t \in [0, t_0],$$

logo, $\tilde{\beta} = \tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}(t_0) = \tilde{y}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ e existe um único automorfismo do recobrimento $g \in \pi_1(M)$ tal que $g(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$.

Como $\tilde{x}_0 = \tilde{\phi}(0, \tilde{x}_0) \neq \tilde{\phi}(t_0 v_0, \tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$, temos que $g \neq id$ e como $g(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0 \in \tilde{\mathcal{O}}$, concluímos que $g(\tilde{\mathcal{O}}) = \tilde{\mathcal{O}}$.

Observe que o automorfismo g e a órbita $\tilde{\mathcal{O}}$ são determinados quando fixamos $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. ■

Proposição 3.25 *Uma folha $F \in \tilde{\mathcal{F}}^s$ (ou $F \in \tilde{\mathcal{F}}^u$) é periódica se, e somente se, $\pi(F)$ contém uma órbita compacta de ϕ .*

Prova.

Se F é uma folha periódica, então existe $g \in \pi_1(M) \setminus \{id\}$ com $g(F) = F$. Fixe $\tilde{x}_0 \in F$ e tome um caminho $\tilde{\alpha} : I \rightarrow F$ com $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$ e $\tilde{\alpha}(1) = g(\tilde{x}_0)$. Definindo $\alpha : I \rightarrow M$ por $\alpha = \pi \circ \tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}$ é um levantamento de α e $[\alpha]$ é a classe de equivalência associada ao automorfismo de recobrimento $g \neq id$, logo $[\alpha]$ não é trivial, e como $\alpha(I) \subset \pi(F)$ concluímos que $\pi(F)$ não é simplesmente conexa, logo existe uma órbita compacta \mathcal{O} contida em $\pi(F)$.

Reciprocamente, suponha que $\pi(F)$ contenha uma órbita compacta \mathcal{O} de ϕ , pelo que vimos na prova da Proposição 3.24, um levantamento $\tilde{\mathcal{O}} \subset F$ de \mathcal{O} satisfaz $g(\tilde{\mathcal{O}}) = \tilde{\mathcal{O}}$ para algum $g \in \pi_1(M) \setminus \{id\}$, como o grupo dos automorfismos de recobrimento preserva as folheações e $\tilde{\mathcal{O}}$ está contida em F , segue que $g(F) = F$. ■

Definição 3.26 Um losango \mathcal{L} no espaço de recobrimento é dito *invariante* se seus lados são folhas periódicas. Isto é, existe um elemento γ do grupo fundamental de M que deixa invariante os lados de \mathcal{L} .

Obsevação 3.27 Dado um losango tendo por perfect fit o par (F, G) . Então, pelo Lema 3.19, este losango é invariante se e somente se existe γ elemento de Γ que deixa invariante F e G .

3.5 Existência de losangos invariantes: casos inseparável e skewed

Como já observado, não é possível a existência de losangos no caso splitting (Obsevação 3.22). Nessa seção, o resultado que iremos mostrar será que, no caso inseparável o Teorema 3.28 mostra que a folha não separável é periódica, o que implicará na existência de um losango invariante no espaço das órbitas da ação ϕ (Corolário 3.29). Finalmente no Teorema 3.30 é mostrado também a existência de losango invariante no caso skewed.

3.5.1 Caso inseparável

Para as demonstrações que seguem, iremos usar a seguinte notação: se p, q estão na mesma folha estável forte, $[p, q]_s$ denota o segmento fechado nessa folha de p a q e seja $(p, q)_s$ o seu correspondente segmento aberto. Analogamente, defina $[p, q]_u$ e $(p, q)_u$.

Teorema 3.28 Seja ϕ uma ação Anosov de \mathbb{R}^k numa variedade $(k+2)$ -dimensional M e seja F uma folha inseparável de $\tilde{\mathcal{F}}^s$. Então existe um automorfismo de recobrimento não trivial g com $g(F) = F$, isto é, F é periódica.

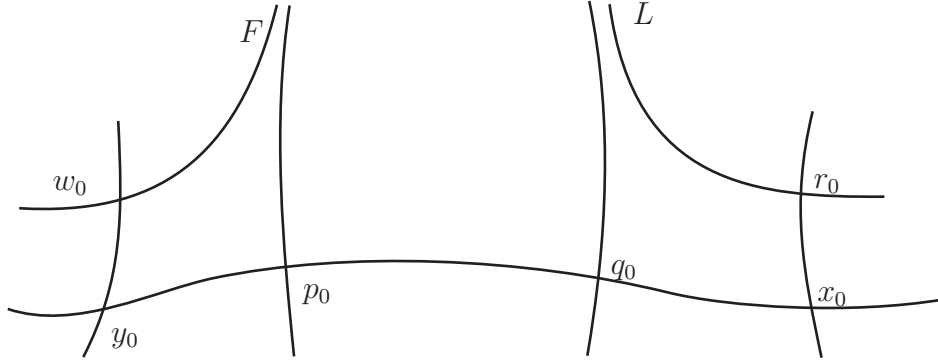
Demonstração: Tomando uma cobertura finita se necessário, iremos supor que ϕ é orientável. Seja $L \in \tilde{\mathcal{F}}^s$, $L \neq F$, tal que F, L formam um par de folhas inseparáveis de $\tilde{\mathcal{F}}^s$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que F e L não são separáveis no seu lado negativo, isto é, que elas a ramificação associada a elas de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ seja na direção positiva (ramificação positiva).

Seja $w_0 \in F$, $w' \in L$. Como F e L são não separáveis nos seus lados negativos, existe $y_0 \in \tilde{F}_+^{uu}(w_0)$ (y_0 próximo o suficiente de w_0) e $x_0 = \tilde{F}^u(w') \cap \tilde{F}^{ss}(y_0)$ de tal forma que se $r_0 = \tilde{F}_+^{uu}(x_0) \cap L$, então para qualquer $E \in \tilde{\mathcal{F}}^s$,

$$E \cap (y_0, w_0)_u \neq \emptyset \Leftrightarrow E \cap (x_0, r_0)_u \neq \emptyset. \quad (*)$$

Este fato, que segue da propriedade de separação das folhas de $\tilde{\mathcal{F}}^s$, será muitas vezes, implicitamente usada.

Troque F por L , se necessário, tal que $\tilde{F}^u(x_0)$ esteja na frente de $\tilde{F}^u(y_0)$. Primeiro, acharemos folhas únicas associadas a ramificação, que formam perfect fits com F e L . Como existem $z \in [y_0, x_0]_s$ com $\tilde{F}^u(z) \cap F \neq \emptyset$ (por exemplo, $z = x_0$), seja p_0 o ponto mais próximo de y_0 tal que $\tilde{F}^u(p_0) \cap F = \emptyset$.



As folhas F e $\tilde{F}^u(p_0)$ formam um perfect fit: De fato, tomamos como faixas de ação $A = \tilde{\phi}_{\mathbb{R}}((y_0, w_0)_s)$ e $B = \tilde{\phi}_{\mathbb{R}}((p_0, r_0)_s)$. Então $\bar{A} \cap \bar{B} = \tilde{\phi}_{\mathbb{R}}(y_0)$, $\bar{A} \cap F = \tilde{\phi}_{\mathbb{R}}(w_0)$ e $\bar{B} \cap \tilde{F}^u(p_0) = \tilde{\phi}_{\mathbb{R}}(p_0)$.

Seja $E \in \tilde{\mathcal{F}}^s$ com $E \cap A \neq \emptyset$. Então $E \cap \tilde{F}^u(x_0) \neq \emptyset$. Como $\tilde{F}^u(p_0)$ separa M , segue que $E \cap \tilde{F}^u(p_0) \neq \emptyset$. Como E está na frente de $\tilde{F}^s(y_0)$, então $E \cap \tilde{F}_+^u(p_0) \neq \emptyset$.

Seja $R \in \tilde{\mathcal{F}}^u$ com $R \cap B \neq \emptyset$. Se $R \cap F = \emptyset$, então $z = R \cap [y_0, p_0]_s$ é mais próximo de y_0 (em $\tilde{F}^{ss}(y_0)$) que p_0 , contradição. Então $R \cap F \neq \emptyset$, em particular $R \cap \tilde{F}_+^s(w_0) \neq \emptyset$. Por definição, segue que $\tilde{F}_+^s(w_0)$ e $\tilde{F}_+^u(p_0)$ formam um perfect fit. Isso termina a demonstração da afirmação.

Da mesma forma, existe um único $q_0 \in [y_0, x_0]_s$ com $\tilde{F}^u(p_0)$ e L formando um perfect fit. Por unicidade de perfect fits, as folhas $\tilde{F}^u(p_0), \tilde{F}^u(q_0)$ dependem apenas de F e L . Segue de (*) e da afirmação, que dada $E \in \tilde{\mathcal{F}}^s, E \cap \tilde{F}_+^u(p_0) \neq \emptyset \Rightarrow E \cap \tilde{F}_+^u(q_0) \neq \emptyset$. Equivalentemente, $\mathcal{I}_+^u(p_0) = \mathcal{I}_+^u(q_0)$.

Seja $G = \tilde{F}^u(p_0) = \tilde{F}^u(q_0)$. Se G é periódica, então existe $g \neq id$ com $g(G) = G$. Pela unicidade de perfect fits e preservação de orientação transversal (\mathcal{F}^s e \mathcal{F}^u são transversalmente orientáveis num recobrimento finito) temos que $g(F) = F$ e segue o resultado. Então, vamos supor que G não é periódica. Temos dois casos para ser considerados: quando $p_0 = q_0$ e $p_0 \neq q_0$. Chamemos $c_0 = \pi(p_0)$.

$\mathcal{O}(c_0)$ não é uma órbita compacta e nem é assintótica para uma órbita compacta: Suponha que $\mathcal{O}(c_0)$ tenda assintoticamente para uma órbita compacta \mathcal{O} em M . Vamos supor que seja positivamente assintótica a \mathcal{O} em M .

Como as folheações em M são todas transversais, existe um ponto $p \in \mathcal{O}$ e $F^{uu}(p)$ sua folha instável forte que é uma seção transversal a \mathcal{O} e uma sequência de pontos de $\mathcal{O}(c_0)$ da órbita de c_0 que intersectam essa folha instável forte, e tal sequência converge para p .

Absurdo, pois a dinâmica nas folhas fortes instáveis é repulsora para todos os pontos.

Segue, analogamente que $\mathcal{O}(c_0)$ não tende assintoticamente para uma órbita compacta no sentido negativo também. Basta tomar a folha estável forte e usar o mesmo raciocínio anterior.

Caso 1. $p_0 = q_0$.

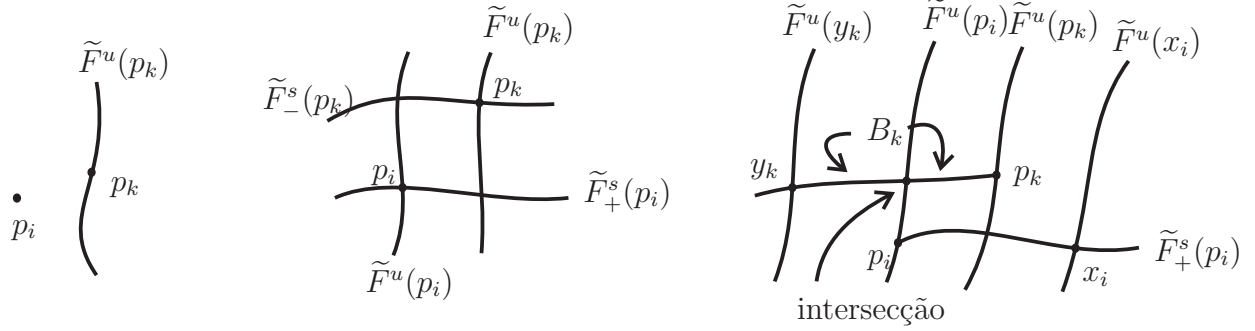
Tome c um ponto limite negativo de uma direção Anosov de $\mathcal{O}(c_0)$ (cabe salientar aqui que é possível tomarmos um elemento Anosov $v \in \mathbb{R}^k$ tal que ϕ^{tv} que é uma direção da órbita de $\mathcal{O}(c_0)$, e esta é hiperbólica e é um fluxo Anosov). Logo tome $c_i = \varphi_{t_i v}(c_0)$, com $t_i \rightarrow -\infty$, com $c_i \rightarrow c$. Se c_i e c_j estão na mesma folha instável próximos de c , então existe um caminho fechado em $F^u(c_i)$ consistindo de um segmento de “fluxo” de c_i para c_j e um pequeno arco de c_j para c_i na folha instável local passando por c_j . Esse caminho não é homotopicamente trivial em $F^u(c_i)$, então $F^u(c_i)$ contém uma órbita compacta, contradição a nossa hipótese. Essa é a ferramenta chave usada na prova do teorema e implicará que folhas periódicas no recobrimento universal não são rígidas.

Levantando c_i para $p_i \in \tilde{M}$ com $p_i \rightarrow p$ e $\pi(p) = c$. Então $p_i = g_i(\bar{\phi}_{t_i v}(p_0))$, onde g_i são automorfismos de recobrimento. Pelo argumento anterior, $\tilde{F}^u(p_i) \neq \tilde{F}^u(p_k)$, para qualquer $i \neq k$. Não é esse comportamento não rígido que estamos procurando.

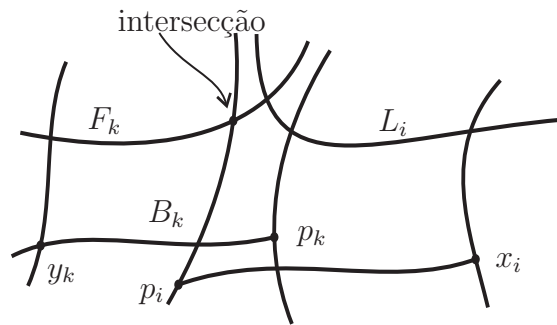
Seja $F_i = g_i(F)$, $L_i = g_i(L)$, $A_i = g_i(A)$, $B_i = g_i(B)$ e $G_i = g(G)$. Seja $y_i = g_i(\tilde{\phi}_{t_i v}(y_0))$ e seja $x_i = g_i(\tilde{\phi}_{t_i v}(x_0))$. Tomando subsequência, se necessário, suponhamos que todos os p_i estão próximos o suficiente de p , numa vizinhança produto de $\tilde{\mathcal{F}}^u$ de diâmetro $\ll 1$. Suponha, também, que para todo i ,

$$l(\tilde{\phi}_{t_i v}([y_0, p_0]_s)) > 1 \text{ e } l(\tilde{\phi}_{t_i v}([p_0, x_0]) > 1. \quad (**)$$

Escolha índices i, k de tal forma que p_i está atrás de $\tilde{F}^u(p_k)$, veja Figura (3.5.1). Como $d(p_i, p_k) \ll 1$, segue que $\tilde{F}_-^s(p_k) \cap \tilde{F}^u(p_i) \neq \emptyset$ e $\tilde{F}_+^s(p_i) \cap \tilde{F}^u(p_k) \neq \emptyset$. Por (**), isso implica que y_k está atrás de $\tilde{F}^u(p_i)$ e que x_i está na frente de $\tilde{F}^u(p_k)$, veja Figura (3.5.1).

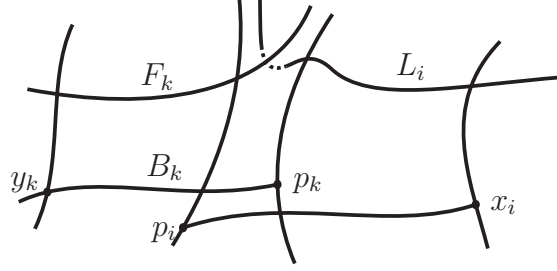


Então $\tilde{F}^u(y_k)$ está atrás de $\tilde{F}^u(p_i)$. Então $\tilde{F}^u(p_i) \cap B_k \neq \emptyset$ e pela propriedade de definição de perfect fits, temos que $\tilde{F}^u(p_i) \cap F_k \neq \emptyset$. Como L_i faz perfect fit com $\tilde{F}^u(p_i)$, então L_i está na frente de F_k , então L_i está atrás de $\tilde{F}^u(p_k)$.



Por outro lado, $L_i \cap \tilde{F}^u(x_i) \neq \emptyset$. Como $\tilde{F}^u(x_i)$ está na frente de $\tilde{F}^u(p_k)$ então $\tilde{F}^u(p_k) \cap \tilde{\phi}_{\mathbb{R}}([p_i, x_i]_s) \neq \emptyset$. Como L_i e $\tilde{F}^u(p_i)$ forma perfect fit, segue que $\tilde{F}^u(p_k) \cap L_i \neq \emptyset$ (Veja Figura (3.5.1)). Isso contradiz a conclusão do parágrafo anterior.

Isso mostra que, se $p_0 = q_0$, então G é periódica, é invariante por g , então F e L são periódicas e são invariantes também por g . Isso termina a prova do caso 1.



Aplicando esse argumento quando G é periódica, obtemos que $\tilde{F}^s(p_i) = \tilde{F}^s(p_k), \forall i, k$. Isto é, não existe perturbação na figura local que é, então, rígida.

Caso 2. $p_0 \neq q_0$.

Usaremos a mesma notação do caso 1. Como $q_0 \neq p_0$, seja $q_i = g_i(\bar{\phi}_{t_i v}(q_0))$. Escolha i, k com p_i atrás de $\tilde{F}^u(p_k)$. Como no caso 1, $\tilde{F}_+^u(p_i) \cap F_k \neq \emptyset$. Agora, não existe, a priori, contradição porque L_i não forma um perfect fit com $\tilde{F}^u(p_i)$ e, na verdade, L_i está, de fato, na frente de $\tilde{F}^u(p_k)$, veja Figura (3.5.1). Seja, então

$$e_1 = \tilde{F}^u(p_k) \cap \tilde{F}_+^{ss}(p_i), \quad e_2 = \tilde{F}^u(p_i) \cap \tilde{F}_-^{ss}(p_k).$$

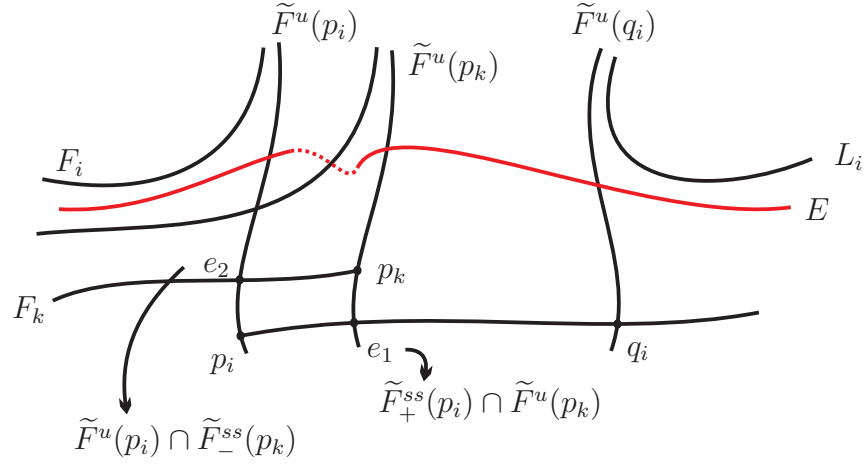
Note que $\tilde{F}_+^u(p_k)$ e F_k formam um perfect fit e $\tilde{F}_+^u(e_2) \cap F_k \neq \emptyset$. Esses dois fatos implicam que $\mathcal{I}_+^u(p_k) < \mathcal{I}_+^u(e_2)$. Além disso, a estrutura de produto local de $\tilde{\mathcal{F}}^s, \tilde{\mathcal{F}}^u$ próxima a p implica que $\mathcal{I}_+^u(p_i) > \mathcal{I}_+^u(e_1)$, veja Figura (3.5.1). Escolha $E \in \mathcal{I}_+^u(p_i) - \mathcal{I}_+^u(e_1)$. Pelas considerações anteriores, é claro que $E \cap \tilde{F}^u(p_k) = \emptyset$. Mas

$$\mathcal{I}_+^u(q_i) = \mathcal{I}_+^u(g_i(\tilde{\phi}_{t_i v}(q_0))) = g_i(\mathcal{I}_+^u(\tilde{\phi}_{t_i v}(q_0))) = g_i(\mathcal{I}_+^u(\tilde{\phi}_{t_i v}(p_0))) = \mathcal{I}_+^u(p_i),$$

então $E \in \mathcal{I}_+^u(q_i)$. Então $E \cap \tilde{F}_+^u(q_i) \neq \emptyset$. Mas $\tilde{F}^u(q_i)$ está na frente de $\tilde{F}^u(p_k)$ e como $\tilde{F}^u(p_k)$ separa \tilde{M} , então $E \cap \tilde{F}^u(p_k) \neq \emptyset$. Isso contradiz a conclusão do parágrafo anterior. Como antes, concluímos que G é periódica, invariante por $g \neq id$, então F também é invariante por g . \square

Com a demonstração desses resultados, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.29 *Seja ϕ uma ação Anosov de \mathbb{R}^k , de classe C^r , $r \geq 2$, em M^{k+2} variedade fechada. Suponha que o espaço das folhas estável \mathcal{L}^s da ação ϕ levantada não seja Hausdorff (isto é, estamos no caso inseparável ou onde existe branching). Então, existe um losango invariante no espaço das folhas da ação levantada.*



Prova.

Se existe branching, existe um par de folhas (F, L) inseparáveis, $F, L \in \tilde{\mathcal{F}}^s$. Pelo Teorema 3.28, F é periódica. Então existe $g \in \pi_1(M)$ não trivial tal que $g(F) = F$. Logo existe uma órbita periódica \mathcal{O} em F que denotaremos por $p \in \mathcal{Q}^\phi$. Tal órbita, logicamente é fixada pelo elemento g . Isto é, $g(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$, também sabemos que é o único elemento de F que é fixado por g .

Tome a folha $G \in \tilde{\mathcal{F}}^u$ tal que (F, G) formam um perfect fit (vide demonstração do Teorema 3.28). Temos que $g(G) = G$. Logo existe \mathcal{O}' contida em G tal que $g(\mathcal{O}') = \mathcal{O}'$. Denotemos tal órbita por $q \in \mathcal{Q}^\phi$.

Agora tome $\tilde{\mathcal{F}}^s(p) = F$ e $\tilde{\mathcal{F}}^u(q) = G$. Logicamente elas formam um perfect fit. Agora, da mesma forma $\tilde{F}^u(p)$ e $\tilde{F}^s(q)$ formam um perfect fit. A intersecção entre elas é vazia pois se elas se intersectassem, existiria outra órbita periódica em F e em G , fixada por g , o que é um absurdo. E assim como a propriedade produto dentro da região retangular existente entre elas, será a mesma da região produto definida para as folhas F e G .

Logo existe um losango \mathcal{L} , formado pelas folhas $F, G, \tilde{F}^u(p), \tilde{F}^s(q)$ invariante por g . ■

3.5.2 Caso skewed

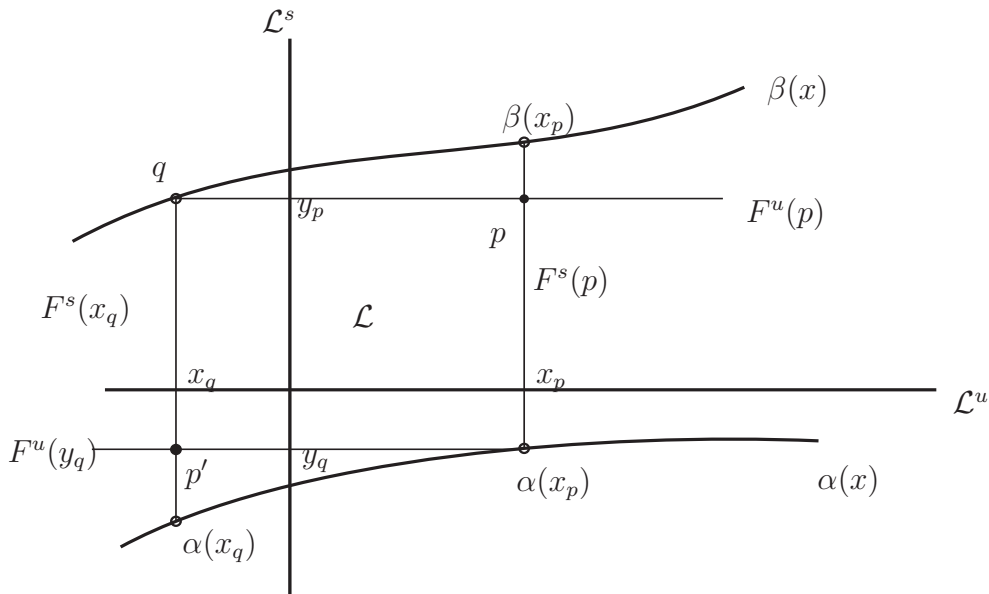
Assim, como foi feito para o caso inseparável, iremos demonstrar a existência de losango para o caso skewed.

Teorema 3.30 *Seja ϕ uma ação Anosov de \mathbb{R}^k , de classe C^r , $r \geq 2$, em M^{k+2} variedade fechada. Suponha que ϕ é produto skewed, isto é, seu espaço das folhas estável \mathcal{L}^s é Hausdorff e existe uma folha instável fraca que não intersecta uma folha estável forte. Então, existe um losango invariante no espaço das folhas da ação levantada.*

Demonstração:

Seja $p \in \mathcal{Q}^\phi$ uma órbita compacta para ϕ (existe pelo Closing Lema). Temos que existem $x_p, y_p \in \mathbb{R}^2$ tais que $y_p = \tilde{F}^u(p) \cap \{0\} \times \mathbb{R}$ e $x_p = \tilde{F}^s(p) \cap \mathbb{R} \times \{0\}$, isto é, são os pontos dos eixos coordenados que a folha estável e instável intersectam, respectivamente. Cabe salientar, que o fato de p ser uma órbita compacta, tais folhas que a definem são periódicas (fixadas por um automorfismo de recobrimento não trivial g).

Sejam α e β as aplicações definidas em 3.12, que são homeomorfismos. Logo $\tilde{F}^u(p)$ intersectará o gráfico de β ou α (suponha, sem perda de generalidade que seja o gráfico de β , chamemos tal ponto de q), agora temos que $\tilde{F}^s(p)$ intersectará o gráfico de α e β (pela definição de tais aplicações). Agora $\alpha(x_p)$ é um número real finito. Tome y_q de tal forma que y_q é a ordenada de valor $\alpha(x_p)$ e tome a folha instável que passa por y_q , isto é $\tilde{F}^u(y_q)$.



Temos que a folha $\tilde{F}^u(p)$ intersecta o gráfico de β no ponto q , que tem coordenadas finitas (x_q, y_p) . Observe que a ordenada já era conhecida. Tome $\tilde{F}^s(x_q)$, temos que existe interseção entre $\tilde{F}^s(x_q)$ e $\tilde{F}^u(y_q)$, e chamemos tal ponto de p' .

O fato de α e β serem homeomorfismos, novamente, implica que as folhas que definem p' também serão fixadas por g . Logo p' é uma órbita compacta de ϕ também.

Portanto, pela definição da região delimitada pelos gráficos de α e β , a região \mathcal{L} delimitada por $\tilde{F}^s(x_q)$, $\tilde{F}^u(y_q)$, $\tilde{F}^u(p)$ e $\tilde{F}^s(p)$ é um losango invariante por g . \square

Classificação de ações Anosov de \mathbb{R}^k numa $(k + 2)$ -variedade

Neste capítulo provamos os resultados principais da tese.

A motivação foi explorar resultados de classificação de ações Anosov ϕ de \mathbb{R}^k em $(k + 2)$ -variedades fechadas. A hipótese da ação ser de classe C^r , com $r \geq 2$ é adicionada pois para o desenvolvimento desse estudo, usamos os resultados da Seção 2.3.2, nos quais as provas usam, entre outros argumentos, os de Haefliger, que são feitos nesse contexto.

Lembramos que a ação só poderá ser de um dos seguintes tipos: *splitting*, *skewed* ou *inseparável*.

No Teorema A, obtivemos uma classificação de tais ações para o caso *splitting* e o Teorema B nos dá a classificação para os outros dois casos, isto é, quando ϕ é *inseparável* ou *skewed*.

Dizemos que a ação ϕ (não necessariamente irredutível) é *splitting*, *skewed* ou *inseparável* se sua redução para uma ação irredutível ϕ_0 dada pelo Teorema 2.22 é *splitting*, *skewed* ou *inseparável*, respectivamente.

4.1 Caso splitting e o Teorema A

Para a demonstração do Teorema A (caso splitting), a abordagem é diferente dos outros casos. Aqui não existem losangos. Maquera e Barbot em [31] caracterizaram tais sistemas, a menos de conjugação topológica, como 1-suspensões, como enunciado abaixo:

Teorema 4.1 (Teorema 2 e Teorema 8, em [32], págs. 4 e 16) *Seja ϕ uma C^r -ação ($r \geq 2$) Anosov de codimensão um e irredutível de \mathbb{R}^k em M^{k+n} variedade fechada, $n \geq 2$. Então são equivalentes:*

- ϕ é *splitting*,
- O grupo fundamental de M é solúvel,
- A folheação fraca \mathcal{F}^s admite uma estrutura afim transversal invariante pela ação.

Mais ainda, se qualquer uma das condições acima é satisfeita então ϕ é topologicamente equivalente a uma 1-suspensão de uma ação Anosov de \mathbb{R}^{k-1} .

Baseado em trabalhos já supracitados de Barbot, pensamos em tentar generalizar o resultado de classificação de fluxos de Anosov em 3-variedades fechadas para o caso de ações. Isto é,

Teorema A. *Seja ϕ uma C^r -ação ($r \geq 2$) Anosov de \mathbb{R}^k sobre uma variedade fechada M^{k+2} do tipo *splitting*. Então ϕ é uma \mathbb{T}^{k-1} extensão de uma suspensão de um automorfismo hiperbólico do toro \mathbb{T}^2 .*

Existe mais de uma forma de se provar o resultados no contexto de fluxos. Barbot, por exemplo, em sua tese de doutorado faz a demonstração usando o Teorema de Plante, porém cita, em seu memorial que existe a possibilidade de usar o Teorema de Solodov para o mesmo resultado. No contexto de ações, não é possível usarmos o Teorema de Plante, e dessa forma, passamos um tempo achando que não seria possível provar tal resultado no nosso trabalho. Contudo, usando o Teorema de Solodov, foi possível fazer uma generalização do resultado para ações.

Antes de fazermos a demonstração do Teorema A, vamos enunciar o Teorema de Solodov, que será aplicado às ações de Γ sobre cada espaço \mathcal{L}^σ com $\sigma = s, u$.

Teorema 4.2 (Teorema de Solodov, [46] e, para uma demonstração veja [6]) *Seja Γ um grupo de homeomorfismos de \mathbb{R} preservando a orientação. Suponhamos que cada elemento de Γ , diferente da identidade, admita no máximo um ponto fixo, e que se ele o admitir, esse ponto fixo é do tipo hiperbólico, isto é, atrator ou repulsor. Então, existe um homomorfismo injetivo: $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Aff}(1, \mathbb{R})$, com valores no grupo das transformações afins da reta real, e uma aplicação contínua crescente $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo γ em Γ :*

$$\varphi \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \varphi.$$

Mais ainda, se a ação de Γ em \mathbb{R} admite uma órbita densa, então ela é minimal e φ é um homeomorfismo. Em outras palavras, neste caso, a ação de Γ é conjugada a uma ação afim.

Demonstração: (do Teorema A)

Vamos supor que ϕ é irredutível e mostraremos que $k = 1$. Primeiramente, observamos que, pelo fato da ação ϕ ser produto, as ações de Γ sobre \mathcal{L}^σ satisfazem as hipóteses do Teorema de Solodov. Mais ainda como a ação de Γ sobre \mathcal{L}^σ , para $\sigma = s, u$, é minimal então, a menos de conjugação topológica, esta ação é afim.

A estrutura afim sobre \mathcal{L}^σ , para $\sigma = s, u$, que é Γ invariante (Teorema 4.1) induz uma estrutura afim sobre \mathcal{Q}^ϕ (Γ invariante), a qual torna \mathcal{Q}^ϕ isomorfo a \mathbb{R}^2 , e a ação afim de Γ sobre \mathcal{Q}^ϕ é descrita pelo homomorfismo injetivo: $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Aff}(2, \mathbb{R})$ tal que, para cada elemento γ de Γ , a parte linear $\Lambda(\gamma)$ de $\rho(\gamma)$ é uma matriz diagonal da forma:

$$\begin{pmatrix} e^{a(\gamma)} & 0 \\ 0 & e^{-b(\gamma)} \end{pmatrix}.$$

De fato, sejam as ações afins nos espaços das folhas dadas por:

$$\gamma \mapsto \gamma.x = \tilde{a}(\gamma)x + c(\gamma), x \in \mathcal{L}^s.$$

$$\gamma \mapsto \gamma.y = -\tilde{b}(\gamma)y + d(\gamma), y \in \mathcal{L}^u.$$

Logo, a ação no produto $\mathcal{Q}^\phi \simeq \mathcal{L}^s \times \mathcal{L}^u$ é dada por:

$$\gamma \mapsto \gamma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a(\gamma)} & 0 \\ 0 & e^{-b(\gamma)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(\gamma) \\ d(\gamma) \end{pmatrix}.$$

onde $a = \ln(\tilde{a}), b = \ln(\tilde{b})$.

Veja que a matriz $\begin{pmatrix} e^{a(\gamma)} & 0 \\ 0 & e^{-b(\gamma)} \end{pmatrix}$ é exatamente $\Lambda(\gamma)$, que é a parte linear do homomorfismo ρ .

Observe que os homomorfismos $a, b : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ possuem o mesmo sinal. Além disso, o núcleo de a (e de b) é o conjunto dos elementos γ de Γ que não fixam nenhum ponto em \mathcal{Q}^ϕ . Isto acontece somente quando a matriz $\Lambda(\gamma)$ for a identidade. Consequentemente: o núcleo N de Λ coincide com os núcleos de a e b , e $\rho(N)$ é um grupo de translações de \mathbb{R}^2 (em particular é abeliano).

O grupo $\rho(N)$ é discreto, abeliano, livre de torção e de posto no máximo 2: de fato, pelo Closing Lema de Anosov, todo elemento θ de \mathcal{Q}^ϕ admite uma vizinhança U tal que se um elemento não trivial γ de Γ envia θ dentro de U , então $\Lambda(\gamma)$ é não trivial. Portanto a ação de N sobre \mathcal{Q}^ϕ é livre e própria, e $\rho(N)$ é um subgrupo discreto de \mathbb{R}^2 . Isto prova a nossa afirmação.

Então, como N é isomorfo a $\rho(N)$, as possibilidades para N seriam: N trivial, N tem posto 1 ou N tem posto 2.

O grupo N não é trivial: Suponhamos o contrário, ou seja N é trivial. Então mostraremos que Γ é abeliano. De fato, tome dois elementos γ_1, γ_2 de Γ . Como são transformações afins, são da forma $\gamma_1 x = A_1 \cdot x + b_1$ e $\gamma_2 x = A_2 \cdot x + b_2$, onde A_i são matrizes reais 2×2 e os vetores b_i são bidimensionais. Calculando o comutador desses dois elementos obtemos:

$$\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2^{-1} x = A_1 \cdot A_2 \cdot A_1^{-1} \cdot A_2^{-1} x + C(\gamma_1, \gamma_2)$$

onde $C(\gamma_1, \gamma_2)$ é uma função constante. Agora, as matrizes A_i são matrizes diagonais, logo são invertíveis, daí $A_1 \cdot A_2 \cdot A_1^{-1} \cdot A_2^{-1} = Id$. Portanto $\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2^{-1}$ é uma translação, e dessa forma $\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2^{-1} \in N$, que por sua vez é trivial. Assim $\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2^{-1} = id$, mostrando que Γ é um grupo abeliano.

Por outro lado, o fato de Γ ser abeliano, implica que Γ admite um ponto fixo global em $\mathcal{Q}^\phi \approx \mathbb{R}^2$, isto é, existe um ponto $x \in \mathcal{Q}^\phi$ tal que $\gamma x = x$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Como Γ é o grupo fundamental de uma variedade compacta e sem bordo, temos que Γ é finitamente gerado. Então Γ é cíclico, consequentemente ϕ admite apenas uma órbita compacta, o que é um absurdo pois o conjunto de órbitas compactas é infinito. Esta contradição mostra que N não é trivial.

O posto de N é 2: Suponhamos que o posto de N é 1. Então, já que N é um grupo de translações do plano \mathbb{R}^2 , podemos ver este como um subgrupo de \mathbb{R}^2 de posto um. Consequentemente, deve estar contido numa reta de \mathbb{R}^2 que é $\Lambda(\Gamma)$ -invariante, pois neste caso a parte linear é a identidade. Se esta reta é invariante, então ela é $\{x = 0\}$ ou $\{y = 0\}$. Logo, uma das duas funções coordenadas, digamos a primeira, x , é $\rho(\Gamma)$ -invariante. Compondo com π^ϕ , ela define uma submersão sobrejetiva de \widetilde{M} sobre \mathbb{R} , que é constante sobre as órbitas de Γ . Como $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ também é constante ao longo das órbitas de Γ , então ela induz uma submersão de M sobre \mathbb{R} , o que é um absurdo pela compacidade de M (a compacidade implica que p admite um ponto máximo ou mínimo em M , em tal ponto, a derivada deveria se anular, o que é um absurdo pela sobrejetividade da derivada). Fica assim mostrado que o posto de N é igual a 2.

Agora, como o grupo N é abeliano, discreto e de posto 2, então N é um reticulado uniforme de \mathbb{R}^2 e $\Lambda(\Gamma)$ -invariante. Pelo fato de $\Lambda(\Gamma)$ preservar um reticulado do grupo \mathbb{R}^2 , o determinante de $\Lambda(\gamma)$ é 1, para cada γ em Γ . Isto implica que, para todo γ , os coeficientes da diagonal $a(\gamma)$ e $b(\gamma)$ são iguais. Logo, podemos considerar que o homomorfismo ρ toma valores no grupo Sol . Onde Sol é o grupo de Lie linear simplesmente conexo, conexo, solúvel, não nilpotente, de dimensão 3 formado por matrizes reais $A(t, x, y)$ de ordem 3 da forma:

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 & x \\ 0 & e^{-t} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $t, x, y \in \mathbb{R}$. Então Γ é isomorfo (via ρ) a um subgrupo do grupo Sol .

A ação ϕ é um fluxo, ou seja $k = 1$: Primeiramente, sabemos que o grupo sol pode ser considerado como o produto semidireto $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ (aqui \mathbb{R}^2 é o Nilradical de sol o qual contém N). Por outro lado, seja θ uma folha de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ tal que $\pi(\theta)$ é uma órbita compacta da ação ϕ (o conjunto das órbitas compactas é denso em M), então pela Proposição 2.33 o subgrupo de isotropia Γ_θ de ρ deste ponto é isomorfo à \mathbb{Z}^k . Como ϕ é irredutível, a ação de cada elemento de Γ_θ sobre \mathcal{L}^s (resp. \mathcal{L}^u) é uma contração (resp. expansão). Isto significa que Γ_θ está contido no subgrupo a um parâmetro

$$\{A(t, 0, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

de sol . Consequentemente $k=1$.

Agora que já sabemos que a ação ϕ é um fluxo numa 3-variedade, conforme foi mostrado em [6], o subgrupo $\rho(\Gamma)$ é um reticulado uniforme de sol , ou seja $\rho(\Gamma) = \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$. Logo M é difeomorfa à solvariedade $sol/(\rho(\Gamma))$ a qual é um \mathbb{T}^2 fibrado principal sobre \mathbb{S}^1 . O grupo a 1 parâmetro de matrizes diagonais $\{A(t, 0, 0)\}_{t \in \mathbb{R}}$ induz um fluxo em $sol/(\rho(\Gamma))$ que é uma suspensão de um automorfismo linear hiperbólico do toro \mathbb{T}^2 . Teorema A1 nos assegura que este fluxo é topologicamente equivalente a Φ . Isto conclui a demonstração do Teorema A. \square

4.2 Demonstração do Teorema B

Nesta seção demonstraremos o seguinte teorema:

Teorema B. *Seja ϕ uma C^r -ação ($r \geq 2$) Anosov de \mathbb{R}^k sobre uma variedade fechada M^{k+2} do tipo inseparável, isto é, o espaço das folhas estável não é Hausdorff, ou ϕ do tipo skewed. Então ϕ é uma \mathbb{T}^{k-1} extensão de um fluxo de Anosov.*

Antes de iniciar a demonstração deste teorema, precisaremos de um resultado sobre estrutura afim sobre as folhas fortes, que a seguir detalhamos:

Fixemos $\sigma = uu, ss$. Como estamos supondo que a folheação \mathcal{F}^σ é orientável (a menos de recobrimento finito), podemos parametrizar \mathcal{F}^σ por $u : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, uma aplicação tal que distância com sinal, via a métrica induzida, de $u(t, x) \in \mathcal{F}^\sigma(x)$ a x é t . Então cada aplicação contínua $\omega : M \rightarrow \mathbb{R}$ induz uma estrutura afim ao longo de \mathcal{F}^σ da seguinte maneira: a estrutura afim sobre $\mathcal{F}^\sigma(x)$ é definida pela 1-forma diferencial $\omega(u(t, x))dt$. Esta estrutura será chamada de *estrutura afim ao longo das folhas de \mathcal{F}^σ* definida por ω .

Dizemos que uma estrutura afim ao longo das folhas de \mathcal{F}^σ é *invariante pela ação ϕ* se, para cada $v \in \mathbb{R}^k$, a aplicação $\phi^v|_{\mathcal{F}^\sigma(x)} : \mathcal{F}^\sigma(x) \rightarrow \mathcal{F}^\sigma(\phi^v(x))$, $x \in M$, é um difeomorfismo afim.

O seguinte teorema é consequência de um resultado obtido por Barbot e Maquera em [31].

Teorema 4.3 (*Theorem 6, [31]*) *Seja ϕ uma ação Anosov C^1 de \mathbb{R}^k sobre uma variedade fechada M de dimensão $k+2$. Para cada $\sigma = uu, ss$, existe uma única estrutura afim ao longo de \mathcal{F}^σ dependendo continuamente sobre os pontos de M e invariante pela ação ϕ . Mais ainda, cada folha com esta estrutura é difeomorfa de maneira afim a \mathbb{R} .*

Agora começamos com a demonstração do Teoremas B. Em ambos os casos, skewed e inseparável, existe um losango invariante, vamos considerá-lo no espaço das órbitas \mathcal{Q}^ϕ

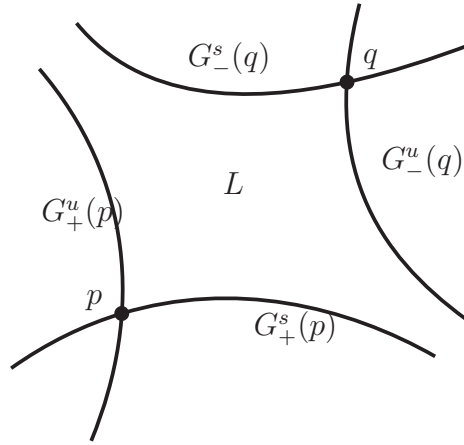


Figura 4.1: Semifolhas invariantes do losango L .

(que é definido por semifolhas das folheações \mathcal{G}^s e \mathcal{G}^u). Seja L o losango invariante em \mathcal{Q}^ϕ definido pelas semifolhas:

$$G_+^s(p), G_+^u(p), G_-^s(q), G_-^u(q)$$

Sabemos que o subgrupo de isotropia Γ_0 do ponto p , da ação de Γ sobre \mathcal{Q}^ϕ , é isomorfo a \mathbb{Z}^k . Mais ainda, como $\pi(p)$ é uma órbita difeomorfa a \mathbb{T}^k , seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ um conjunto gerador do subgrupo de isotropia, pela ação ϕ , de $\pi(p)$. Consideremos

$$\gamma_i = \{\phi^{tv_i}(p) : t \in [0, 1]\}, \text{ para } i = 1, \dots, k.$$

Para simplificar a notação denotaremos pela mesma letra os automorfismos de recobrimento definidos pelos laços γ_i , para $i = 1, \dots, k$. Então:

Γ_0 é gerado pelos automorfismos de recobrimentos $\gamma_1, \dots, \gamma_k$.

Já que o losango, que é difeomorfo ao plano \mathbb{R}^2 , é invariante, vamos considerar a ação de Γ_0 sobre L , isto é, uma ação do \mathbb{Z}^k em \mathbb{R}^2 . Logo, a estrutura de produto global em L das folheações \mathcal{G}^u e \mathcal{G}^s , induz uma ação de Γ_0 sobre $G_+^\sigma(p)$, para $\sigma = u, s$.

Se $k > 1$, então a ação de Γ_0 sobre $G_+^\sigma(p)$ é minimal, $\sigma = u, s$: De fato, como $k > 1$, o subgrupo Γ_1 de Γ_0 gerado por γ_1 e γ_2 é isomorfo a \mathbb{Z}^2 . Mostraremos que a ação de Γ_1 sobre $G_+^\sigma(p)$ é minimal. Pela escolha de γ_1 e γ_2 , e identificando $G_+^\sigma(p)$ com $\tilde{\mathcal{F}}^{\sigma\sigma}(p_0)$, onde p_0 é um ponto da órbita p de $\tilde{\phi}$, temos que $\gamma_i : G_+^\sigma(p) \rightarrow G_+^\sigma(p)$ é topologicamente equivalente a $\phi^{v_i}|_{\mathcal{F}_+^{\sigma\sigma}(p_0)} : \mathcal{F}_+^{\sigma\sigma}(p_0) \rightarrow \mathcal{F}_+^{\sigma\sigma}(p_0)$, onde p_0 é um ponto na órbita compacta

$\pi(p)$ de ϕ . Daí, só precisamos mostrar que a ação de \mathbb{Z}^2 sobre $\mathcal{F}_+^{\sigma\sigma}(p_0)$ definida pelos difeomorfismos $\phi^{v_i}|_{\mathcal{F}_+^{\sigma\sigma}(p_0)} : \mathcal{F}_+^{\sigma\sigma}(p_0) \rightarrow \mathcal{F}_+^{\sigma\sigma}(p_0)$, $i = 1, 2$, é minimal.

Pelo fato da ação ϕ ser irredutível e pelo Teorema 4.3 existe uma estrutura afim ao longo de $\mathcal{F}^{\sigma\sigma}$ invariante pela ação ϕ tal que $\phi^{v_i}(t) = a_i t$ com $0 < a_i \neq 1$, onde $u(t, p_0)$ é a parametrização de $\mathcal{F}^{\sigma\sigma}(p_0)$ como no Teorema 4.3. Como para cada n_1, n_2 em \mathbb{Z} temos que $n_1 v_1 \neq n_2 v_2$, então

$$a_1^{n_1} \neq a_2^{n_2}, \text{ para cada } n_1, n_2 \text{ em } \mathbb{Z}.$$

Isto implica que $\log a_1$ e $\log a_2$ são racionalmente independentes, daí toda órbita da ação de \mathbb{Z}^2 sobre $\mathcal{F}_+^{\sigma\sigma}(p_0)$ é densa para $\sigma = u, s$. Consequentemente a ação de Γ_1 sobre $G_+^\sigma(p)$ é minimal. Isto conclui a prova da nossa afirmação.

Por outro lado, por um resultado muito recente de Le Roux [28] o qual garante que não existe ação minimal de \mathbb{Z}^2 por homeomorfismos do plano, temos que a ação de Γ_1 (isomorfo a \mathbb{Z}^2) sobre L não é minimal. Logo existe um aberto U de L invariante pela ação de Γ_1 tal que $U \neq L$. Como U é aberto e invariante, temos que este também é invariante por $\mathcal{G}^u|_L$. Logo, pela estrutura produto em L a projeção de U ao longo das folhas de \mathcal{G}^u sobre $G_+^s(p)$ é um aberto U_0 de $G_+^s(p)$ invariante pela ação de Γ_1 . Como $U \neq L$, então $U_0 \neq G_+^s(p)$. Isto contradiz o fato da ação de Γ_1 sobre $G_+^s(p)$ ser minimal. Esta contradição prova que $k = 1$ e termina a demonstração dos Teoremas B e C. \square

4.3 Algumas consequências

Vamos citar algumas consequências importantes dessa nossa classificação.

Teorema C. *Seja $f : N^{k+1} \rightarrow N^{k+1}$ um difeomorfismo parcialmente hiperbótico de classe C^r , $r \geq 2$, e $\phi : \mathbb{R}^{k-1} \times N \rightarrow N$ uma C^r -ação, $r \geq 2$, localmente livre que comuta com f , (isto é, $f \circ \phi^v = \phi^v \circ f, \forall v \in \mathbb{R}^{k-1}$). Então,*

1. ϕ é periódica (todas as órbitas são compactas)
2. ou $f^{n_0} = \phi^{b_0}$, para $n_0 \in \mathbb{Z}$ e $b_0 \in \mathbb{R}^{k-1}$.

Prova.

Como no exemplo feito no Capítulo 2, tomamos a suspensão de f e a denotamos por ϕ^t definida na variedade N_f , quociente de $N \times \mathbb{R}$ pela relação de equivalência: $\sim: (x, t) \sim (f^m(x), t + m), \forall m \in \mathbb{Z}$. Temos então que a ação Φ de $\mathbb{R}^k \approx \mathbb{R}^{k-1} \oplus \mathbb{R}$ é dada por

$$(a, b).[x, t] = [\phi^b(x), t + a].$$

Usando a classificação que obtivemos pelos Teoremas A, B, C (pois $k \geq 2$) temos que a ação Φ é uma \mathbb{T}^{k-1} -extensão de um fluxo, e pela irreduzibilidade do sistema, existem $n_0, b_0 \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{R}^{k-1}$ com subgrupo de isotropia

$$\mathbb{Z} = \langle (n_0, b_0) \rangle .$$

Logo,

$$\forall (x, t), (n_0, b_0)[x, t] = [x, t] \Leftrightarrow (n_0, b_0)(x, t) = (\phi^{b_0}(x), t + n_0) = (x, t),$$

Por outro lado, temos

$$[(x, t)] = [(f^{n_0}(x), t + n_0)].$$

Dessa forma, temos que $\forall x \in N$,

$$f^{n_0}(x) = \phi^{b_0}x.$$

Se $n_0 = 0$, então temos que $\phi^{b_0} = Id$ e assim ϕ é periódica, e todas as órbitas são compactas.

Se $n_0 \neq 0$, então, a menos de reparametrização, temos o que queríamos. ■

Reciprocamente, temos que ações Anosov ϕ são topologicamente equivalentes a uma 1-suspensão Anosov se, e somente se, esta admite uma 1-seção transversal, isto é, uma subvariedade N fechada de codimensão 1 que é uma seção transversal ao fluxo ϕ^{ta_0} gerado por um elemento Anosov a_0 . (veja [32], Proposição 2.)

O critério de Schwartzmann nos dá a seguinte equivalência: seja ϕ uma ação Anosov de codimensão 1 numa variedade fechada M que admite uma 1-seção transversal então $\pi_1(M)$ é solúvel e ϕ é do tipo splitting. Acabamos de verificar o seguinte resultado:

Corolário A. *Seja $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ uma ação Anosov, de classe C^r , $r \geq 2$, de codimensão um. Se $\pi_1(M)$ é solúvel, então ϕ é topologicamente conjugada a uma suspensão de uma ação de \mathbb{Z}^k .*

4.4 Trabalhos futuros

O estudo de Ações Anosov de \mathbb{R}^k em $(k + 2)$ -variedades está ainda no seu início e muitos problemas que existem para o contexto de fluxos de Anosov em 3-variedades pode ser trazida para o contexto de tais ações, o que nos providencia muitos problemas importantes a serem estudados. Durante o desenvolvimento do nosso trabalho, nos deparamos com muitos problemas e resultados que pudemos ver ser possível no contexto de ações também. Como fizemos para o Teorema A1, ou mesmo, Maquera e Barbot, para a Teorema de decomposição espectral de Smale, Closing Lema de Anosov, entre outros.

Tais resultados e problemas do contexto de fluxos em 3-variedades poderão ser estudados como projetos de pesquisas futuros. Além disso, são fundamentados e foram bem desenvolvidos por pesquisadores de instituições estrangeiras, como por exemplo, Sérgio Fenley e Thierry Barbot, tendo a possibilidade de projetos com bolsas internacionais ou de estágios internacionais.

Iremos citar um problema que pensamos durante o desenvolvimento do nosso trabalho dentro do contexto de ações Anosov e mostra também a importância do estudos dos espaços transversos que tanto exploramos no nosso estudo: espaço das órbitas e os espaços das folhas.

Como vimos no Teorema A, no caso splitting, a equivalência topológica entre a ação e uma suspensão de \mathbb{Z}^k , existe a conjectura de Verjovski para o caso de Ações, que foi inicialmente investigada por Maquera e Barbot em [31], porém ainda em aberto.

Problema: *Toda ação Anosov irredutível de codimensão 1 de \mathbb{R}^k numa variedade de dimensão maior ou igual a $k + 3$ é topologicamente conjugada a uma suspensão de uma ação Anosov de \mathbb{Z}^k numa variedade fechada.*

Determinar condições suficientes para que o Problema seja resolvido seria determinar condições para que a ação seja integrável, isto é, que $E^{ss} \oplus E^{uu}$ seja integrável. De fato, estudos de Etienne Ghys, Barbot e Maquera mostraram em [32] que a integrabilidade implica na equivalência topológica para ações de codimensão 1. Também mostraram, no mesmo artigo, que se a ação preserva volume e o subfibrado $E^{ss} \oplus E^{uu}$ é de classe C^1 , então a ação é integrável. Então outro problema que poderia determinar algum tipo de classificação ou mesmo resolver a Conjectura de Verjovski seria determinarmos condições para que o subfibrado $E^{ss} \oplus E^{uu}$ seja integrável.

Referências Bibliográficas

- [1] D.V. ANOSOV, *Roughness of Geodesic flows on compact manifolds of negative curvature (In Russian)*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, **145**:707–709, 1962.
- [2] T. BARBOT, *Géométrie transverse des flot d'Anosov*. Thésis, École Normale Supérieure de Lyon, 1992.
- [3] T. BARBOT, *Flots d'Anosov sur les variétés graphées au sens de Waldhausen I: Morceaux fibrés de bifeuillements d'Anosov*.
- [4] T. BARBOT, *Flots d'Anosov sur les variétés graphées au sens de Waldhausen II: Caractérisation des exemples de Handel-Thurston*.
- [5] T. BARBOT, *Mise en position optimale d'un tore par rapport à un flot d'Anosov*. Comm. Math. Helv., **70**:113–160, 1995.
- [6] T. BARBOT, *Caractérisation des flots d'Anosov en dimension 3 par leurs feuilletages faibles*. Ergodic Theory and Dynamical Systems, **15**:247–270, 1995.
- [7] C. CAMACHO, A.L. NETO, *Teoria Geométrica das folheações*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- [8] A. CANDEL, L. CONLON, *Foliations I*. Graduate Studies in Mat., Vol. 23, 2000.
- [9] C. EHRESMANN, W. SHIH, *Sur les espaces feuilletés: théoreme de stabilité*. C. R. Ac. Sc. Paris, **243**:344–346, 1956.
- [10] S. R. FENLEY, *Incompressible tori transverse to Anosov flows in 3-manifolds*. Ergodic Theory and Dynamical Systems, **17-1**:105–121, 1997.
- [11] S. R. FENLEY, *Anosov Flows in 3-manifolds*. Ann. Math., **139**:79–115, 1994.

-
- [12] S. R. FENLEY, *Quasigeodesic Anosov flows and homotopic properties of closed orbits*. Jour. Diff. Geom., **41**:479–514, 1995.
- [13] S. R. FENLEY, *One Sided Branching in Anosov Foliations*. Comment. Math. Helvetici, **70**:248–266, 1995.
- [14] S. R. FENLEY, *Homotopic indivisibility of closed orbits of 3-dimensional Anosov flows*. Math. Zeit., **225**:289–294, 1997.
- [15] S. R. FENLEY, *The structure of branching in Anosov foliations of 3-manifolds*. Comment. Math. Helv., **73**:259–297, 1998.
- [16] J. FRANKS, *Anosov Diffeomorphisms*. Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math., AMS, XIV: 61–93, 1970.
- [17] J. FRANKS, B. WILLIAMS, *Anomalous Anosov Flows*. Lecture Notes in Math., Springer Berlin **819**: 158–174, 1980.
- [18] D. FRIED, *Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps*. Topology, **22**:299–304, 1983.
- [19] A. HATCHER, *Algebraic Topology*. New York: Cambridge University Press, 2002.
- [20] M. HIRSCH, C. PUGH, M. SHUB, *Invariant Manifolds*. Lecture Notes in Math, Springer, Berlin **583**, 1977.
- [21] M. HIRSCH, S. SMALE, *Differential equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.
- [22] B. KALININ, R. SPATZIER, *On the classification of Cartan Actions*. G.A.F.A, Geom. Funct. Anal., **17**:468–490, 2007.
- [23] A. KATOK, J. LEWIS, *ILocal rigidity for certain groups of toral automorphisms*. Israel J. of Math., **75**: 203–241, 1991.
- [24] A. KATOK, B. HASSELBLATT, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [25] A. KATOK, J. LEWIS, *Global rigidity result for lattice actions on tori and new examples of volume-preserving actions*. Isral J. Math., **93**:253–280, 1996.

-
- [26] A. KATOK, R.J. SPATZIER, *First Cohomology of Anosov actions of higher rank abelian groups and applications to rigidity*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **79**:131–156, 1994.
- [27] A. KATOK, R.J. SPATZIER, *Differential Rigidity of Anosov actions of higher rank abelian groups and algebraic lattice actions*. Proc. Steklov Inst. Math., n.1 **216**:287–314, 1997.
- [28] F. LE ROUX, *There is no minimal action of Z^2 on the plane*. Ergodic Theory and Dynamical Systems, **32**:167–172. (2012)
- [29] E. L. LIMA, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Rio de Janeiro: IMPA, 1997.
- [30] E.L. LIMA, *Variedades Diferenciáveis*. Ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2007.
- [31] C. MAQUERA, T. BARBOT, *Transitivity of codimension-one Anosov Actions of \mathbb{R}^k on closed manifolds*. Ergod. Th. and Dynam. Sys. **31**:1–22, 2011.
- [32] C. MAQUERA, T. BARBOT, *On Integrable codimension-one Anosov Actions of \mathbb{R}^k* . DCDS-A, 29 **3**:803–822, 2011.
- [33] W.S. MASSEY, *Algebraic Topology: An Introduction*. New York: Springer, 1967.
- [34] S. MATSUMOTO, *Codimension one Anosov Flows*. Lecture Notes Series n.27, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1995.
- [35] W. MELO, J. PALIS, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1978.
- [36] J.W. MILNOR, *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Princeton Landmarks In Mathematics, University Press of Virginia, 1997.
- [37] S.E. NEWHOUSE, *On codimension one Anosov diffeomorphisms*. Amer. J. Math., **92**:761–770, 1970.
- [38] S.P. NOVIKOV, *Topology of foliations*. Trans. Moscow Math. Soc., **14**: 268–305, 1963.

-
- [39] J. PALIS, J.C. YOCOZ, *Centralizers of Anosov diffeomorphisms on Tori*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **22(1)**: 99–108, 1989.
- [40] C.F.B PALMEIRA, *Open manifolds foliated by planes*. Ann. of Math., **107**:109–130, 1978.
- [41] C. PUGH, M. SHUB, *Ergodicity of Anosov actions*. Invent. Math., **15**:1–23, 1972.
- [42] G. REEB, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*. Actualités Sci. Indust., **1182**, Hermann, Paris, 1982.
- [43] C. ROBINSON, *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics and chaos*. Volume 28 of Studies in Advanced Mathematics, 2nd Edition, CRC Press, Florida, 1999.
- [44] R. R SILVA, *Toros Incompressíveis para ações Anosov de \mathbb{R}^k sobre uma variedade de dimensão $k + 2$* . Tese de Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática, ICMC, Universidade de São Paulo, 2011.
- [45] S. SMALE, *Differentiable dynamical systems*. Bull. Amer. Math. Soc. **73**: 747–817, 1967.
- [46] V.V. SOLODOV, *Topological linear structure of Euclidean space*. Proc. Cambridge Philos. Soc. **58**: 481–488, 1991.
- [47] N. STEENROD, *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press, 1951.
- [48] A. VERJOVSKY, *Codimension one Anosov flows*. Bol. Soc. Mat. Mexicana, **19(2)**:49–77, 1974.
- [49] A. VERJOVSKY, *Sistemas de Anosov*. Monografias del IMCA, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, 1999.
- [50] R. J. ZIMMER, *Ergodic Theory and Semisimple Groups*. Boston, Birkhäuser, 1984.

Índice Remissivo

- Órbita de um ponto pela ação, 8
- 1-suspensão, 22
- Ação
 - Anosov, 18
 - Anosov de codimensão um, 19
 - de grupos de Lie, 7
 - fiel, 7
 - inseparável, 38
 - irreduzível, 24
 - livre, 7
 - localmente livre, 9
 - produto, 33
 - propriamente descontínua, 7
 - skewed, 38
 - splitting, 38
- Branching, 38
- Campo
 - de k -Planos, 3
 - Involutivo, 4
 - transversalmente orientável, 5
- Caso
 - inseparável, 38, 60
 - skewed, 38, 60
 - splitting, 38, 55
- Conjunto não-errante, 21
- Deck transformation, 13
- Espaço
 - das órbitas, 8, 25
 - das folhas, 3, 26
 - de recobrimento, 12
 - simplesmente conexo, 11
- Faixa de ação, 40
- Folhas e espaço das folhas, 2
- Folheação, 2
 - definida por uma ação, 7
 - orientável, 5
 - Reebless, 3
 - transversalmente orientável, 5
- Grupo
 - de isotropia, 8
 - de Lie, 7
 - fundamental, 11
- Holonomia
 - de uma folha, 6
- Homomorfismo induzido, 12
- Homotopia, 10
- Inseparável, 38
- Irreduzibilidade, 24
- Levantamento de aplicações, 13

Losango, 44

Perfect fit, 42

Ponto não-errante, 21

Recobrimento

 duplo orientável, 5

 regular, 14

 universal, 14

Retângulo, 41

Semifolha, 40

Skewed, 38

Splitting, 38

Teorema

 da uniformidade transversal, 6

 de Frobenius, 4

Topologicamente transitiva, 36

Transformação de recobrimento, 13