UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

A conjectura de Auslander-Reiten para anéis locais Cohen-Macaulay

Victor Daniel Mendoza Rubio

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Victor Daniel Mendoza Rubio

A conjectura de Auslander-Reiten para anéis locais Cohen-Macaulay

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Peréz

USP – São Carlos
Abril de 2022

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

R894c Rubio, Victor Daniel Mendoza
A conjectura de Auslander-Reiten para anéis locais Cohen-Macaulay / Victor Daniel Mendoza Rubio; orientador Victor Hugo Jorge Pérez. -- São Carlos, 2022.
134 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Conjectura de Auslander-Reiten. 2. Ext. 3. Módulo projetivo . 4. Módulo Cohen-Macaulay . 5. Posto de um módulo. I. Pérez, Victor Hugo Jorge, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Victor Daniel Mendoza Rubio

Auslander-Reiten conjecture for Cohen-Macaulay local rings

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Peréz

USP – São Carlos
April 2022

Este trabalho é dedicado para Deus, minha família e meus amigos. Adicionalmente dedico este trabalho às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.
Em especial, ao pesquisadores do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC).

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos professores do meu ensino medio Jorge Tuñoque Larrea, Jorge Oliva Porro, Tito Zuñiga Collantes; pela atenção e paciência brindada cada vez que eu trazia para eles una dúvida de Matemática.

Agradeço ao professor Aléx Peréz Rubio, quem foi a primeira pessoa que me falou sobre a carreira de Matemática Pura uma vez que já tinha decidido estudar Matemática. Agradeço adicionalmente sua motivação .

Agradeço ao professor Oscar Jacinto Fiestas, professor do meu ensino médio quem respaldo e me apoio uma vez que eu já tinha decidido estudar a carreira matemática.

Agradeço a todos meus professores da Graduação por todos seus ensinamentos e por ter-me dado uma base em matemática para realizar com sucesso meu mestrado. Entre eles quero agradecer especialmente aos professores Dr.Rubén Burga Barboza, Mg. Oscar Santamaría Santisteban, Dr. Raul Reupo Vallejos e Dra. Gloria Ortiz Basauri, quem foram meus principais motivadores e guias na graduação.

Agradeço a Comissão Coordenadora do Programa de Pós-Graduação Matemática do ICMC do semestre 2019-II por me dar a confiança de realizar no mestrado em seu instituto. Agradeço a todos os professores do ICMC que tiveram a oportunidade de ministrar-me em alguma disciplina do mestrado; por seus ensinamentos. Em geral quero agradecer ao Programa de Pós-Graduação do ICMC, em especial ao de Matemática.

Um agradecimento especial ao prof Dr. Victor Hugo Jorge Pérez; pela orientação, por seu tempo, por seus ensinamentos e seus conselhos.

Agradeço ao professor Ryo Takahashi por sua atenção e resposta ante eventuais dúvidas em relação a um artigo dele que serviu de inspiração na realização deste trabalho.

Agradeço a minha família por seu apoio. Agradeço a minha tia Viviana Gonzales Mendoza e a meu tio Arturo Vargas Machuca, por sua motivação e apoio.

Agradeço a Alexandre, Victor Julio, João Paulo, Giovanny, Iván, Lucas Destro; por sua amizade, por seu apoio e pelas atividades acadêmicas que há gente desenvolvia juntos.

Agradeço a Luíza; minha primeira amiga do Brasil, por ser a primeira pessoa em me ensinar o português e me orientar no Brasil. Agradeço a ela também por sua amizade, companhia, apoio, confiança e pela comunicação constante que tem comigo.

Agradeço a Claudia Ayala, por suas orações por mim cada vez que tinha uma avaliação.

Agradeço a David Carbajal, Richard e a Juan Kamaska por os conselhos dados para exercer meu mestrado da melhor maneira.

Agradeço adicionalmente a Devis, Drahcir, Andrés Pérez, Angelo Rojas, Leonel Ccama, Mariano Rengifo, Abraham Rojas, Julián, Gabriel Esteban, Gabriel André, Matheus, Hermes, Rafael, Elvis, Martín Ramos, Daniel Puyén, Jonathan Castro, Diego Pezo, Jhon Astoquillca, Juana Ruiz, Ana Julisa, Fernanda Martins, Alexandra, por sua amizade e apoio nesta etapa.

Agradeço a CNPQ pelo apoio financeiro.

De maneira super especial, agradeço a Deus.

Ser grato dá as pessoas esperança e razões para seguir tentando melhorar. Acho que todos podemos e devemos ser mais gratos.

"A matemática nos torna mais livres e menos manipuláveis"
(Eduardo Saenz de Cabezon)

RESUMO

RUBIO, M. V. **A conjectura de Auslander-Reiten para anéis locais Cohen-Macaulay**. 2022. 134 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

A conjectura de Auslander-Reiten afirma que dados um anel (comutativo) Noetheriano R e um R-módulo M finitamente gerado, se $\mathrm{Ext}^i_R(M,M) = \mathrm{Ext}^i_R(M,R) = 0$ para todo $i > 0$, então M é projetivo. O objetivo deste trabalho é mostrar que esta conjectura é valida para módulos Cohen-Macaulay maximais de posto 1 sobre anéis locais normais Cohen-Macaulay. A demonstração da validade da conjectura nesse caso especial requer de um resultado chave sobre anulamento de módulos Ext sobre anéis locais Cohen-Macaulay. Nesta dissertação, desenvolveremos a teoria necessária para mostrar esse resultado; posteriormente, faremos sua demonstração; e finalizamos mostrando algumas de suas consequências, entre elas a validade da conjectura no caso especial mencionado acima.

Palavras-chave: Conjectura de Auslander-Reiten, Ext, Módulo projetivo, Módulo Cohen-Macaulay, Posto de um módulo.

ABSTRACT

RUBIO, M. V. **Auslander-Reiten conjecture for Cohen-Macaulay local rings**. 2022. 134 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

The Auslander-Reiten conjecture states that given a Noetherian (commutative) ring R and a finitely generated R-module M, if $\operatorname{Ext}^i_R(M,M) = \operatorname{Ext}^i_R(M,R) = 0$ for all $i > 0$, then M is projective. The objective of this work is to prove that this conjecture holds for maximal Cohen–Macaulay modules of rank one over Cohen–Macaulay normal local rings. The proof of the validity of the conjecture in this special case requires of a key result about vanishing of Ext modules over Cohen–Macaulay local rings. In this dissertation, we will develop the theory necessary to show this result; subsequently, we will make its proof; and we finish proving some of consequences, including the validity of the conjecture in the special case mentioned above.

Keywords: Auslander-Reiten conjecture, Ext, Projective module, Cohen-Macaulay module, Rank of a module.

SUMÁRIO

CAPÍTULO

0

INTRODUÇÃO

Motivados pela conjectura de Nakayama (NAKAYAMA, 1958), Auslander e Reiten (AUSLANDER M; REITEN, 1975) propuseram a seguinte conjectura, chamada a *Conjectura de Nakayama generalizada*:

Conjectura 0.0.1. Seja Λ uma álgebra de Artin (isto é, Λ é uma álgebra sobre um anel Artiniano comutativo R que é finitamente gerado como R-módulo). Se M é um Λ-módulo injetivo indecomponível, então M é um somando direto em um dos termos da resolução injetiva minimal de Λ.

Auslander e Reiten provaram que a Conjectura de Nakayama generalizada é verdadeira se, e somente se, a seguinte conjectura é verdadeira.

Conjectura 0.0.2. Seja Λ uma álgebra de Artin. Se M é um Λ-módulo finitamente gerado M e um gerador (isto é, Λ é um somando direto de uma soma direta finita de copias de M) tal que $\mathrm{Ext}^i_R(M,M) = 0$ para todo $i > 0$, então M é projetivo.

Auslander, Ding e Solberg (AUSLANDER M; DING, 1993) formularam a seguinte conjectura, a qual é equivalente a Conjectura 0.0.2 sobre anéis Noetherianos.

Conjectura 0.0.3. Seja R um anel Noetheriano. Se M um R-módulo finitamente gerado tal que $\mathrm{Ext}^i_R(M,M) = \mathrm{Ext}^i_R(M,R) = 0$ para todo $i > 0$, então M é projetivo.

Essa conjectura é conhecida como a *Conjectura de Auslander-Reiten* e é uma das conjecturas mais importantes da Álgebra Comutativa. Muita pesquisa tem sido feita em relação a essa conjectura, e como consequência atualmente se conhecem alguns casos na que ela vale, como por exemplo:

- R é um anel local de interseção completa (AUSLANDER M; DING, 1993, Proposição 1.9);

- R é um anel local e M tem dimensão de interseção completa finita (ARAYA T; YOSHINO, 1998, Teorema 4.3);
- R é um anel local Gorenstein de codimensão no máximo 4 (SEGA, 2002, Teorema 3.4);
- R é um anel local normal Cohen-Macaulay e M é um R-módulo Cohen-Macaulay maximal de posto 1. (GOTO S.;TAKAHASHI, 2017, Corolário 4.3).

Neste trabalho mostramos, basando-nos em (GOTO S.;TAKAHASHI, 2017), que a conjectura de Auslander-Reiten cumpre para módulos Cohen-Macaulay maximais de posto 1 sobre anéis (comutativos com identidade) locais normais Cohen-Macaulay. O resultado principal para lograr este objetivo é o seguinte:

Teorema 0.0.4. Sejam R um anel (comutativo) local Cohen-Macaulay de dimensão $d > 0$ e M um R-módulo Cohen Macaulay maximal de posto 1. Se

$$\mathrm{Ext}^i_R(M,M) = \mathrm{Ext}^j_R(M,\mathrm{Hom}_R(M,M)) = 0$$

para todo $1 \leq i \leq d-1$ e $1 \leq j \leq d$, então M é livre.

Este trabalho consta de três capítulos e dois apêndices.

No primeiro capítulo desenvolvemos as ferramentas da Álgebra Homológica necessárias para dar uma pequena introdução à teoria de módulos Cohen-Macaulay e para provar o Teorema 0.0.4, entre elas principalmente: as noções e algumas propriedades de Ext e dimensão projetiva, e a equivalência de das noções de módulos projetivos, livres e planos entre si em módulos finitamente gerados sobre anéis locais Noetherianos.

No segundo capítulo damos uma introdução à teoria de módulos e anéis Cohen-Macaulay, incluindo a teoria necessária para mostrar o resultado principal.

No terceiro capítulo demonstramos o Teorema principal e algumas de suas consequências, entre elas a validade da conjectura de Auslander-Reiten no caso especial mencionado acima.

No primeiro apêndice apresentamos as definições e resultados da Álgebra Comutativa básica considerados neste trabalho.

No segundo apêndice desenvolvemos a teoria sobre o posto de um módulo (não necessariamente livre) que vai ser considerada neste trabalho.

Nesta dissertação os anéis são considerados comutativos (com identidade) e afim de não haver perigo de confusão, usaremos simplesmente a expressão “R-módulo”.

CAPÍTULO

1

ALGUMAS FERRAMENTAS DE ÁLGEBRA HOMOLÓGICA

Neste capítulo desenvolvemos as seguintes ferramentas da Álgebra Homológica: Tor, Ext e dimensão projetiva. Também, mostramos, usando Tor, que em módulos finitamente gerados sobre anéis locais Noetherianos, as noções de projetivos, planos e livres são equivalentes. As referencias principais para este capítulo são (HILTON P.; STAMMBACH, 1971), (OSBORNE, 2000), (WEIBEL, 1994) e (ROTMAN, 2008).

1.1 Complexos e Cocomplexos

Definição 1.1.1. Um *complexo de cadeias* (ou simplesmente *complexo*) $M_\bullet = \{M_n, \alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sobre um anel R é uma sequência de R-módulos e de R-homomorfismos

$$M_\bullet : \cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} M_n \xrightarrow{\alpha_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

tal que $\alpha_n \circ \alpha_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Cada α_n é chamado de *operador diferencial*.

Definição 1.1.2. Dado um complexo $M_\bullet = \{M_n, \alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sobre um anel R, definimos para cada $n \in \mathbb{Z}$, o n-ésimo *módulo de homologia* de $M_\bullet$ por

$$H_n(M_\bullet) = \frac{\ker(\alpha_n)}{\operatorname{im}(\alpha_{n+1})}.$$

Lema 1.1.3. Seja $\{M^i_\bullet\}_{i\in I}$ uma família de complexos $M^i_\bullet = \{M^i_n, \alpha^i_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sobre um anel R. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, tem-se:

(1) $H_n(\prod_{i\in I} M^i_\bullet) \cong \prod_{i\in I} H_n(M^i_\bullet)$;

(2) $H_n(\bigoplus_{i\in I} M^i_\bullet) \cong \bigoplus_{i\in I} H_n(M^i_\bullet)$.

Demonstração. Mostremos (1). Temos

$$\begin{aligned} H_n\big(\prod_{i\in I} M_\bullet^i\big) &= \frac{\ker\big(\prod_{i\in I}\alpha_n^i\big)}{\operatorname{im}\big(\prod_{i\in I}\alpha_{n+1}^i\big)} \\ &= \frac{\prod_{i\in I}\ker(\alpha_n^i)}{\prod_{i\in I}\operatorname{im}(\alpha_{n+1}^i)} \\ &\cong \prod_{i\in I}\frac{\ker(\alpha_n^i)}{\operatorname{im}(\alpha_{n+1}^i)}, \end{aligned}$$

onde o isomorfismo é obtido de aplicar o primeiro teorema do isomorfismo para a aplicação natural $\prod_{i\in I}\ker(\alpha_n^i) \to \dfrac{\prod_{i\in I}\ker(\alpha_n^i)}{\prod_{i\in I}\operatorname{im}(\alpha_{n+1}^i)}$.
A prova de (2) é análoga.

□

Lema 1.1.4. Seja $M_\bullet = \{M_n, \alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ um complexo sobre um anel R.

(1) Se N é um R-módulo plano, então $H_n(M_\bullet \otimes_R N) \cong H_n(M_\bullet)\otimes_R N$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.

(2) Se S é um subconjunto multiplicativo de R, então $H_n(S^{-1}M_\bullet) \cong S^{-1}H_n(M_\bullet)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.

Demonstração. (1) Sejam $i : \ker(\alpha_n) \to M_n$ e $j : \operatorname{im}(\alpha_{n+1}) \to \ker(\alpha_n)$ inclusões e considere a sequência exata

$$\ker(\alpha_n) \xrightarrow{\ i\ } M_n \xrightarrow{\ \alpha_n\ } M_{n-1}\ .$$

Pela planaridade de N, os R-homomorfismos $j\otimes \mathrm{Id}_N$ e $i\otimes\mathrm{Id}_N$ são injetivos, e a sequência

$$\ker(\alpha_n)\otimes_R N \xrightarrow{\ i\otimes\mathrm{Id}_N\ } M_n\otimes_R N \xrightarrow{\ \alpha_n\otimes\mathrm{Id}_N\ } M_{n-1}\otimes_R N$$

é exata, isto é $\operatorname{im}(i\otimes\mathrm{Id}_N) = \ker(\alpha_n\otimes\mathrm{Id}_N)$. Defina $h = (i\otimes\mathrm{Id}_N)\circ(j\otimes\mathrm{Id}_N) : \operatorname{im}(\alpha_{n+1})\otimes_R N \to M_n\otimes_R N$. Observe que h é injetiva e que $\operatorname{im}(h) = \operatorname{im}(\alpha_{n+1}\otimes\mathrm{Id}_N)$. Portanto, temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{im}(\alpha_{n+1})\otimes_R N \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \ker(\alpha_n)\otimes_R N \arrow[r] \arrow[d, "i\otimes\mathrm{Id}_N"] & \frac{\ker(\alpha_n)}{\operatorname{im}(\alpha_{n+1})}\otimes_R N \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{im}(\alpha_{n+1}\otimes\mathrm{Id}_N) \arrow[r] & \ker(\alpha_n\otimes\mathrm{Id}_N) \arrow[r] & \frac{\ker(\alpha_n\otimes\mathrm{Id}_N)}{\operatorname{im}(\alpha_{n+1}\otimes N)} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

com linhas exatas (onde a exatidão da primeira linha é porque N é plano) e colunas sendo R-isomorfismos. Assim, tal diagrama induz um R-isomorfismo

$$\frac{\ker(\alpha_n)}{\operatorname{im}(\alpha_{n+1})}\otimes_R N \cong \frac{\ker(\alpha_n\otimes\mathrm{Id}_N)}{\operatorname{im}(\alpha_{n+1}\otimes\mathrm{Id}_N)},$$

ou seja $H_n(M_\bullet)\otimes_R N \cong H_n(M_\bullet\otimes_R N)$.

(2) Resulta de tomar $N = S^{-1}R$ em (1) e da Proposição A.1.48.

$\square$

Definição 1.1.5. Sejam $M_\bullet = \{M_n, \alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, N_\bullet = \{N_n, \beta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dois complexos sobre um anel R. Uma *aplicação de complexos* $f_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ é uma família de R-homomorfismos $f_\bullet = \{f_n : M_n \to N_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$, tem-se $\beta_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \alpha_n$, ou equivalentemente o seguinte diagrama comuta para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\alpha_{n+1}"] & M_n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "f_n"'] & M_{n-1} \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\beta_{n+1}"] & N_n \arrow[r, "\beta_n"] & N_{n-1} \arrow[r, "\beta_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Proposição 1.1.6. Seja $f_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ uma aplicação de complexos. Então, para todo $i \in \mathbb{Z}$, a aplicação $H_i(f_\bullet) : H_i(M_\bullet) \to H_i(N_\bullet)$, definida por

$$H_i(f_\bullet)(x + \mathrm{im}(\alpha_{i+1})) = f_i(x) + \mathrm{im}(\beta_{i+1}),$$

está bem definida e é um R-homomorfismo.

Demonstração. Dado $i \in \mathbb{Z}$, para a boa definição de $H_i(f_\bullet)$, note que temos que mostrar que dado $x \in M_i$, valem as seguintes afirmações:

(1) Se $x \in \ker(\alpha_i)$, então $f_i(x) \in \ker(\beta_i)$;

(2) Se $x \in \mathrm{im}(\alpha_{i+1})$, então $f_i(x) \in \mathrm{im}(\beta_{i+1})$.

Como $f_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ é uma aplicação de complexos, então $\beta_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Daí, segue que:

- Se $x \in \ker(\alpha_i)$, então $\beta_i(f_i(x)) = f_{i-1}(\alpha_i(x)) = f_{i-1}(0) = 0$; e
- Se $x \in \mathrm{im}(\alpha_{i+1})$, então $x = \alpha_{i+1}(y)$ com $y \in M_i$, donde $f_i(x) = f_i(\alpha_{i+1}(y)) = \beta_{i+1}(f_{i+1}(y))$.

Assim, ficam mostrados os itens (1) e (2). Agora, resta mostrar que $H_i(f_\bullet)$ é um R-homomorfismo, mas isto segue facilmente do fato de ser f_i um R-homomorfismo. $\square$

Observação 1.1.7. (Funtorialidade de H_i) Se $f_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ e $g_\bullet : N_\bullet \to P_\bullet$ são aplicações de complexos, então $H_i(g_\bullet \circ f_\bullet) = H_i(g_\bullet) \circ H_i(f_\bullet)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Além disso, $H_i(\mathrm{Id}_{M_\bullet}) = \mathrm{Id}_{H_i(M_\bullet)}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.1.8. Sejam $f_\bullet, g_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ duas aplicações de complexos. Uma *homotopia* $\phi_\bullet : f_\bullet \to g_\bullet$ de $f_\bullet$ para $g_\bullet$ é uma família $\phi_\bullet = \{\phi : M_i \to N_{i+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de R-homomorfismos tais que $f_i - g_i = \beta_{i+1} \circ \phi_i + \phi_{i-1} \circ \alpha_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Neste caso dizemos que $f_\bullet$ e $g_\bullet$ são homotópicas e escrevemos $f_\bullet \approx g_\bullet$.

Dizemos que dois complexos $M_\bullet$ e $N_\bullet$ tem o *mesmo tipo de homotopia* e escrevemos $M_\bullet \cong N_\bullet$, se existem aplicações de complexos $f_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ e $g_\bullet : N_\bullet \to M_\bullet$ tais que $f_\bullet \circ g_\bullet \approx \mathrm{Id}_{N_\bullet}$ e $g_\bullet \circ f_\bullet \approx \mathrm{Id}_{M_\bullet}$.

Proposição 1.1.9. Se duas aplicações de complexos $f_\bullet, g_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ são homotópicas, então $H_i(f_\bullet) = H_i(g_\bullet)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Como $f_\bullet, g_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ são homotópicas, então existe uma família $\phi_\bullet = \{\phi_i : M_i \to N_{i+1}\}$ de R-homomorfismos tal que $f_i - g_i = \beta_{i+1} \circ \phi_i + \phi_{i-1} \circ \alpha_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Assim, dado $i \in \mathbb{Z}$, para todo $x \in \ker(\alpha_i)$, temos que

$$f_i(x) - g_i(x) = \beta_{i+1}(\phi_i(x)) + \phi_{i-1}(\alpha_i(x)) = \beta_{i+1}(\phi_i(x)) + \phi_{i-1}(0) = \beta_{i+1}(\phi_i(x)) \in \mathrm{im}(\beta_{i+1}),$$

donde $H_i(f_\bullet)(x + \mathrm{im}(\alpha_{i+1})) = f_i(x) + \mathrm{im}(\beta_{i+1}) = g_i(x) + \mathrm{im}(\beta_{i+1}) = H_i(g_\bullet)(x + \mathrm{im}(\alpha_{i+1}))$. Portanto, $H_i(f_\bullet) = H_i(g_\bullet)$. □

Proposição 1.1.10. Se dois complexos $M_\bullet$ e $N_\bullet$ tem o mesmo tipo de homotopia, então

$$H_i(M_\bullet) \cong H_i(N_\bullet)$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Se $M_\bullet$ e $N_\bullet$ tem o mesmo tipo de homotopia, então existem aplicações de complexos $f_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ e $g_\bullet : N_\bullet \to M_\bullet$ tal que $f_\bullet \circ g_\bullet \approx \mathrm{Id}_{N_\bullet}$ e $g_\bullet \circ f_\bullet \approx \mathrm{Id}_{M_\bullet}$. Portanto, pela Observação 1.1.7 e pela Proposição 1.1.9,

$$H_i(f_\bullet) \circ H_i(g_\bullet) = H_i(f_\bullet \circ g_\bullet) = H_i(\mathrm{Id}_{M_\bullet}) = \mathrm{Id}_{H_i(M_\bullet)}, \text{ e}$$
$$H_i(g_\bullet) \circ H_i(f_\bullet) = H_i(g_\bullet \circ f_\bullet) = H_i(g_\bullet) \circ H_i(f_\bullet) = H_i(\mathrm{Id}_{N_\bullet}) = \mathrm{Id}_{H_i(N_\bullet)}$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Segue que cada $H_i(f_\bullet)$ é um R-isomorfismo, e portanto $H_i(M_\bullet) \cong H_i(N_\bullet)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. □

Definição 1.1.11. Um *cocomplexo de cadeias* (ou simplesmente *cocomplexo*) $M^\bullet = \{M^n, \alpha^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sobre um anel R é uma sequência de R-módulos e de R-homomorfismos

$$M^\bullet : \cdots \longrightarrow M^{n-1} \xrightarrow{\alpha^{n-1}} M^n \xrightarrow{\alpha^n} M^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

tal que $\alpha^n \circ \alpha^{n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Cada α_n é chamado de *cooperador diferencial*.

Definição 1.1.12. Dado um cocomplexo $M^\bullet = \{M^n, \alpha^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sobre um anel R, definimos para cada $n \in \mathbb{Z}$, o n-ésimo *módulo de cohomologia* de $M^\bullet$ por

$$H^n(M^\bullet) = \frac{\ker(\alpha^n)}{\mathrm{im}(\alpha^{n-1})}.$$

Observação 1.1.13. Se $M^\bullet = \{M^n, \alpha^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é um cocomplexo e definimos $M_n = M^{-n}$ e $\alpha_n = \alpha^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então $M_\bullet = \{M_n, \alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é um complexo. Nesse caso, $M^\bullet$ é dito o *complexo associado* ao cocomplexo $M^\bullet$. Note que $H^i(M^\bullet) = H_{-i}(M_\bullet)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Assim como definimos cohomologia; também podemos definir para cocomplexos as noções de aplicações de cocomplexos, de homotopia entre aplicações de cocomplexos, e de ter o mesmo tipo de homotopia.

Usando a Observação 1.1.13 note que os resultados dados na subseção anterior também podem ser dados para cocomplexos.

1.2 Módulos Projetivos

Definição 1.2.1. Um R-módulo P é *projetivo* se para todo R-homomorfismo sobrejetivo $\pi : M \to N$ e todo R-morfismo $\phi : P \to N$, existe um R-homomorfismo $\tilde{\phi} : P \to M$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\tilde{\phi}"'] \arrow[d, "\phi"] \\ M \arrow[r, "\pi"'] & N \end{tikzcd}$$

comuta.

Proposição 1.2.2. Um R-módulo P é projetivo se, e somente se, $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ preserva sequências exatas curtas.

Demonstração. Considere as seguintes afirmações:

(1) P é projetivo;

(2) Para todo R-homomorfismo sobrejetivo $\pi : M \to N$ e todo R-homomorfismo $\phi : P \to N$, existe um R-homomorfismo $\tilde{\phi} : P \to M$ tal que $\pi \circ \tilde{\phi} = \phi$;

(3) Para todo R-homomorfismo sobrejetivo $\pi : M \to N$, a aplicação induzida $\pi_* : \mathrm{Hom}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_R(P, N)$ é sobrejetiva;

(4) Para toda sequência exata

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0\,,$$

a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P, M'') \longrightarrow 0$$

é exata.

É claro que (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). Além disso, como $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ é exato a esquerda, temos que (3) $\Leftrightarrow$ (4). Logo, (1) $\Leftrightarrow$ (4). □

Proposição 1.2.3. Seja $\{P_i\}_{i\in I}$ uma família de R-módulos. Então, cada P_i é um módulo projetivo se, e somente se, $\bigoplus_{i\in I} P_i$ é projetivo.

Demonstração. Dada uma sequência exata curta $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$, pela Proposição A.1.30(2), a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\textstyle\bigoplus_{i\in I} P_i, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} P_i, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} P_i, N) \longrightarrow 0$$

é exata, se e somente se a sequência

$$0 \longrightarrow \textstyle\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(P_i, L) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(P_i, M) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(P_i, N) \longrightarrow 0$$

é exata, e isto ocorre se, e somente se, para cada $i \in I$, a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_i, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_i, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_i, N) \longrightarrow 0$$

é exata. Desse modo, o resultado segue da Proposição 1.2.2. □

Lema 1.2.4. Seja R um anel. Então, R é um R-módulo projetivo.

Demonstração. Seja

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ M & \xrightarrow{\pi} & N \end{array}$$

um diagrama de R-homomorfismos com $\pi : M \to N$ sendo sobrejetivo. Então, $\pi(m) = \phi(1)$ para algum $m \in M$. Defina $\tilde{\phi} : R \to M$ por $\tilde{\phi}(r) = rm$. É claro que $\tilde{\phi}$ é um R-homomorfismo. Além disso,

$$(\pi \circ \tilde{\phi})(r) = \pi(\tilde{\phi}(r)) = \pi(rm) = r\pi(m) = r\phi(1) = \phi(r)$$

para todo $r \in R$. Logo, $\tilde{\phi}$ faz comutar o diagrama acima. Segue, que R é projetivo. □

Proposição 1.2.5. Todo R-módulo livre é projetivo.

Demonstração. É imediato do Lema 1.2.4 e da Proposição 1.2.3. □

Assim, como todo R-módulo é imagem homomórfica de um R-módulo livre (Proposição A.1.23), temos o seguinte:

Corolário 1.2.6. Todo R-módulo é imagem homomórfica de um R-módulo projetivo.

Proposição 1.2.7. Se $f : N \to P$ é um R-epimorfismo e P um R-módulo projetivo, então P é um somando direto de N.

Demonstração. Como P é projetivo, existe um R-homomorfismo $g : P \to N$ que faz comutar o diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_P"] \\ N \arrow[r, "f"] & P, \end{tikzcd}$$

isto é $f \circ g = \mathrm{Id}_P$. Então, $N \cong \mathrm{im}(g) \oplus \ker(f)$ (Proposição A.1.24) e g é injetiva. A injetividade de g implica em $\mathrm{im}(g) \cong P$. Logo, $N \cong P \oplus \ker(f)$. □

Proposição 1.2.8. Um R-módulo P é projetivo se, e somente se, P é um somando direto de um R-módulo livre.

Demonstração. Suponha que P é projetivo. Pela Proposição A.1.23, existem un conjunto de índices I e um R-homomorfismo sobrejetivo $f : \bigoplus_I R \to P$. Pela Proposição 1.2.7, P é um somando direto de $\bigoplus_I R$.

Reciprocamente, suponha que existe um R-módulo Q tal que $P \oplus Q$ é livre, e em particular, pela Proposição 1.2.5, projetivo. Então, pela Proposição 1.2.3, P é projetivo. □

Proposição 1.2.9. Todo R-módulo projetivo é plano.

Demonstração. Seja P um R-módulo projetivo. Pela Proposição 1.2.8, existe um R-módulo Q tal que $P \oplus Q$ é livre. Então, pela Proposição A.1.40, $P \oplus Q$ é plano. Logo, pela Proposição A.1.41, P é plano. □

Em vista das Proposições 1.2.5 e 1.2.9, se M é um R-módulo temos que

$$M \text{ é livre} \Rightarrow M \text{ é projetivo} \Rightarrow M \text{ é plano.}$$

Nem todo módulo projetivo é livre. O anel $\mathbb{Z}_6$ é claramente um $\mathbb{Z}_6$-módulo livre. Agora, $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$, donde , pela Proposição 1.2.8, $\mathbb{Z}_2$ é um $\mathbb{Z}_6$-módulo projetivo. Porém, $\mathbb{Z}_2$ não é um $\mathbb{Z}_6$-livre, pois caso contrário $\mathbb{Z}_2 \cong \oplus_I \mathbb{Z}_6$ para algum conjunto de índices I, o que não acontece por um argumento de cardinalidade. Para outros exemplos de módulos projetivos não livres veja (WEIBEL, 1994, Exemplo 2.2.2).

Mais adiante, usando Tor, vamos mostrar que no caso em que R seja local Noetheriano, para módulos finitamente gerados, as noções de projetivo, livre e plano são equivalentes.

1.3 Resoluções Projetivas e Livres

Definição 1.3.1. Uma *resolução projetiva* de um R-módulo M é uma sequência exata da forma

$$P_\bullet : \ \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0\ ,$$

em que P_i é um R-módulo projetivo para todo $i \geq 0$.

Observe que se retirarmos o R-módulo M da sequência exata obteremos um complexo

$$P_{\bullet,M}: \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \longrightarrow 0\ ,$$

o qual é chamado a *resolução projetiva deletada* do R-módulo M.

De maneira similar, definimos resolução livre.

Definição 1.3.2. Uma *resolução livre* de um R-módulo M é uma sequência exata da forma

$$F_\bullet: \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\alpha_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0\ ,$$

em que F_i é um R-módulo livre para todo $i \geq 0$.

Pela Proposição 1.2.5, toda resolução livre é projetiva.

Lema 1.3.3. Todo R-módulo M possui uma resolução livre, e em particular, uma resolução projetiva. Todo R-módulo M finitamente gerado possui uma resolução livre de posto finito.

Demonstração. Seja M um R-módulo. Pela Proposição A.1.23, podemos obter sequências exatas

$$0 \longrightarrow K_0 \xrightarrow{j_0} F_0 \xrightarrow{\beta_0} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K_1 \xrightarrow{j_1} F_1 \xrightarrow{\beta_1} K_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K_2 \xrightarrow{j_2} F_2 \xrightarrow{\beta_2} K_1 \longrightarrow 0$$

$$\vdots$$

$$0 \longrightarrow K_i \xrightarrow{j_i} F_i \xrightarrow{\beta_i} K_{i-1} \longrightarrow 0$$

$$\vdots$$

onde para todo $i \geq 0$, F_i é um R-módulo livre, $K_i = \ker(\beta_i)$ e $j_i : K_i \to F_i$ é a inclusão.

Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_i \arrow[rr, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\beta_i"'] & & F_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\beta_1"'] & & F_0 \arrow[r, "\alpha_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & K_{i-1} \arrow[ur, "j_{i-1}"'] \arrow[dr] & & & & K_0 \arrow[ur, "j_0"'] \arrow[dr] & & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

em que $\alpha_0 = \beta_0$ e $\alpha_i = j_{i-1} \circ \beta_i$ para $i \geq 1$. Note que

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(\alpha_i) &= \operatorname{im}(\beta_i) \\ &= K_{i-1} \\ &= \ker(\beta_{i-1}) \\ &= \ker(\alpha_{i-1}) \end{aligned}$$

para todo $i \geq 1$. Logo,

$$F_\bullet : \ \cdots \longrightarrow F_i \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de M.

Se M é finitamente gerado, note que podemos escolher os F_i com $i \geq 0$ da forma R^{n_i} com $n_i \geq 0$, e nesse caso $F_\bullet$ seria uma resolução livre de posto finito de M. $\square$

Lema 1.3.4 (Teorema de Comparação)**.** Sejam

$$P_\bullet : \ \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de um R-módulo M e

$$Q_\bullet : \ \cdots \longrightarrow Q_i \xrightarrow{\beta_i} Q_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{\beta_1} Q_0 \xrightarrow{\beta_0} N \longrightarrow 0$$

uma sequência exata. Então, para todo R-homomorfismo $f : M \to N$, existe uma aplicação de complexos $f_\bullet : P_{\bullet,M} \to Q_{\bullet,N}$ tal que $\beta_0 \circ f_0 = f \circ \alpha_0$. Além disso, se $g_\bullet : P_{\bullet,M} \to Q_{\bullet,N}$ é outra aplicação de complexos satisfazendo o mesmo, então $f_\bullet$ e $g_\bullet$ são homotópicas.

Demonstração. Devemos construir uma família $\{f_i : P_i \to Q_i\}_{i \geq 0}$ de R-homomorfismos de maneira que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "f_i"'] & P_{i-1} \arrow[r, "\alpha_{i-1}"] \arrow[d, "f_{i-1}"'] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & Q_i \arrow[r, "\beta_i"] & Q_{i-1} \arrow[r, "\beta_{i-1}"] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "\beta_1"] & Q_0 \arrow[r, "\beta_0"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

seja comutativo. A construção será feita por indução.

Construamos primeiro f_0. Como P_0 é projetivo e β_0 sobrejetiva, existe um R-homomorfismo $f_0 : P_0 \to N_0$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\ N_0 \arrow[r, "\beta_0"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

comuta.

Agora suponha $i > 0$ e que temos R-homomorfismos $f_0, f_1, \cdots, f_{i-1}$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
P_i \arrow[r, "\alpha_i"] & P_{i-1} \arrow[r, "\alpha_{i-1}"] \arrow[d, "f_{i-1}"'] & P_{i-2} \arrow[r, "\alpha_{i-2}"] \arrow[d, "f_{i-2}"'] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\
Q_i \arrow[r, "\beta_i"] & Q_{i-1} \arrow[r, "\beta_{i-1}"] & Q_{i-2} \arrow[r, "\beta_{i-2}"] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "\beta_1"] & Q_0 \arrow[r, "\beta_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Vamos construir um R-homomorfismo $f_i : P_i \to Q_i$ de forma que mantenha a comutatividade do diagrama acima. Como $\beta_{i-1} \circ f_{i-1} = f_{i-2} \circ \alpha_{i-1}$ (com $f_{-1} = f$ no caso $i = 1$), então $\beta_{i-1} \circ f_{i-1} \circ \alpha_i = f_{i-2} \circ \alpha_{i-1} \circ \alpha_i = f_{i-2} \circ 0 = 0$. Portanto, $\mathrm{im}(f_{i-1} \circ \alpha_i) \subset \ker(\beta_{i-1}) = \mathrm{im}(\beta_i)$. Agora, como P_i é projetivo, existe $f_i : P_i \to Q_i$ tal que

$$\begin{tikzcd}
 & P_i \arrow[dl, dashed, "f_i"'] \arrow[d, "f_{i-1}\circ\alpha_i"] \\
Q_i \arrow[r, "\beta_i"] & \mathrm{im}(\beta_i)
\end{tikzcd}$$

comuta.

Agora mostremos que se $g_\bullet : P_{\bullet,M} \to Q_{\bullet,N}$ é uma aplicação de complexos tal que $\beta_0 \circ g_0 = f \circ \alpha_0$, então $f_\bullet \approx g_\bullet$. Devemos construir uma família $\{\phi_i : P_i \to Q_{i+1}\}_{i \geq 0}$ de R-homomorfismos tal que $f_i - g_i = \beta_{i+1} \circ \phi_i + \phi_{i-1} \circ \alpha_i$ para todo $i \geq 0$ (se $i = 0$, definimos $\phi_{-1} : M \to Q_0$ como o R-homomorfismo nulo). A construção será feita por indução.

Construamos primeiro ϕ_0. Como $\beta_0 \circ f_0 = f \circ \alpha_0 = \beta_0 \circ g_0$, então $\beta_0 \circ (f_0 - g_0) = 0$. Daí temos que $\mathrm{im}(f_0 - g_0) \subset \ker(\beta_0) = \mathrm{im}(\beta_1)$. Já que P_0 é projetivo, existe um R-homomorfismo $\phi_0 : P_0 \to Q_1$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & P_0 \arrow[dl, dashed, "\phi_0"'] \arrow[d, "f_0-g_0"] \\
Q_1 \arrow[r, "\beta_1"] & \mathrm{im}(\beta_1)
\end{tikzcd}$$

comuta. Assim, $f_0 - g_0 = \beta_1 \circ \phi_0$, donde $f_0 - g_0 = \beta_1 \circ \phi_0 + \phi_{-1} \circ \alpha_0$.

Suponha $i > 0$ e que temos construído ϕ_{i-1} tal que $f_i - g_i = \beta_{i+1} \circ \phi_i + \phi_{i-1} \circ \alpha_i$. Então, $\beta_i \circ (f_i - g_i - \phi_{i-1} \circ \alpha_i) = \beta_i \circ \beta_{i+1} \circ \phi_i + \beta_i \circ \phi_{i-1} \circ \alpha_i - \beta_i \circ \phi_{i-1} \circ \alpha_i = 0$. Assim, $\mathrm{im}(f_i - g_i - \phi_{i-1} \circ \alpha_i) \subset \ker(\beta_i) = \mathrm{im}(\beta_{i+1})$. Sendo P_i é projetivo, existe um R-homomorfismo $\phi_i : P_i \to Q_{i+1}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & P_i \arrow[dl, dashed, "\phi_i"'] \arrow[d, "f_i-g_i-\phi_{i-1}\circ\alpha_i"] \\
Q_{i+1} \arrow[r, "\beta_{i+1}"] & \mathrm{im}(\beta_{i+1})
\end{tikzcd}$$

comuta. □

A aplicação de complexos $f_{\bullet,M} : P_{\bullet,M} \to Q_{\bullet,N}$ obtida no lema anterior é chamada de uma *aplicação de complexos gerada* por $f : M \to N$.

Proposição 1.3.5. Se $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ são duas resoluções projetivas de M, então os complexos $P_{\bullet,M}$ e $Q_{\bullet,M}$ tem o mesmo de homotopia.

Demonstração. Pelo lema acima, existem aplicações de complexos $f_\bullet : P_{\bullet,M} \to Q_{\bullet,M}$ e $g_\bullet : Q_{\bullet,M} \to P_{\bullet,M}$ geradas por f e g respectivamente, isto é, temos diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd}
P_\bullet : \cdots \arrow[r] & P_i \arrow[r] \arrow[d, "f_i"'] & P_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"'] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"'] & 0 \\
Q_\bullet : \cdots \arrow[r] & Q_i \arrow[r] & Q_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
Q_\bullet : \cdots \arrow[r] & Q_i \arrow[r] \arrow[d, "g_i"'] & Q_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{i-1}"'] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1"'] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "g_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"'] & 0\, . \\
P_\bullet : \cdots \arrow[r] & P_i \arrow[r] & P_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Note que $g_\bullet \circ f_\bullet = \{g_i \circ f_i : P_i \to P_i\}$ e $\mathrm{Id}_{P_{\bullet,M}} = \{\mathrm{Id}_{P_i} : P_i \to P_i\}$ são aplicações de complexos geradas por Id_M. Portanto, pelo lema acima, $g_\bullet \circ f_\bullet \approx \mathrm{Id}_{P_{\bullet,M}}$. Analogamente, temos que $f_\bullet \circ g_\bullet \approx \mathrm{Id}_{Q_{\bullet,M}}$. Logo, $P_{\bullet,M} \cong Q_{\bullet,M}$.

□

1.4 Ext e Tor; e suas Propriedades Elementares

Definição 1.4.1. Sejam M, N e X três R-módulos. Sejam

$$\begin{array}{ll}
P_\bullet : & \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0 \\
Q_\bullet : & \cdots \longrightarrow Q_i \xrightarrow{\beta_i} Q_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{\beta_1} Q_0 \xrightarrow{\beta_0} N \longrightarrow 0 \\
R_\bullet : & \cdots \longrightarrow R_i \xrightarrow{\gamma_i} R_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_1 \xrightarrow{\gamma_1} R_0 \xrightarrow{\gamma_0} X \longrightarrow 0
\end{array}$$

resoluções projetivas para M, N e X respectivamente. Sejam $f : M \to N$ um R-homomorfismo e $f_\bullet : P_{M,\bullet} \to Q_{\bullet,N}$ uma aplicação de complexos gerada por f. Dado $i \geq 0$, definimos

(1)

$$\mathrm{Ext}^i_R(M,X) := H^i(\mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,M},X)),$$

$$\mathrm{Ext}^i_R(f,X) := H^i(\mathrm{Hom}_R(f_\bullet,X)) : \mathrm{Ext}^i_R(N,X) \to \mathrm{Ext}^i_R(M,X),$$

$$\mathrm{Ext}^i_R(X,f) := H^i(\mathrm{Hom}_R(R_{\bullet,X},f) : \mathrm{Ext}^i_R(X,M) \to \mathrm{Ext}^i_R(X,N);$$

(2)

$$\mathrm{Tor}^R_i(M,X) := H_i(P_{\bullet,M} \otimes_R X),$$

$$\mathrm{Tor}^R_i(f,X) := H_i(f_\bullet \otimes \mathrm{Id}_X) : \mathrm{Tor}^R_i(M,X) \to \mathrm{Tor}^R_i(N,X),$$

$$\mathrm{Tor}^R_i(X,f) := H_i(\mathrm{Id}_{P_{\bullet,M}} \otimes_R f) : \mathrm{Tor}^R_i(X,M) \to \mathrm{Tor}^R_i(X,N).$$

Proposição 1.4.2. No contexto da definição acima, os R-módulos $\mathrm{Ext}^i_R(M,X)$ e $\mathrm{Tor}^R_i(M,X)$ são independentes da escolha de uma resolução projetiva para M, e os R-homomorfismos $\mathrm{Ext}^i_R(f,X)$ e $\mathrm{Tor}^R_i(f,X)$ são independentes da escolha de uma aplicação de complexos gerada por f.

Demonstração. Sejam $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ resoluções projetivas de M. Pela Proposição 1.3.5, $P_{\bullet,M} \approx Q_{\bullet,M}$. Então, pela funtorialidade de $\mathrm{Hom}_R(-,X)$ e de $-\otimes_R X$, note que $\mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,M},X) \approx \mathrm{Hom}_R(Q_{\bullet,M},X)$ e $P_{\bullet,M}\otimes X \approx Q_{\bullet,M}\otimes X$. Logo, pela Proposição 1.1.10, $H^i(\mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,M},X)) \cong H^i(\mathrm{Hom}_R(Q_{\bullet,M},X))$ e $H_i(P_{\bullet,M}\otimes X) \cong H_i(Q_{\bullet,M}\otimes X)$.

Agora, sejam $f_\bullet, g_\bullet$ aplicações de complexos geradas por f. Pelo Lema 1.3.4 , $f_\bullet \approx g_\bullet$. Então, pela funtorialidade de $\mathrm{Hom}_R(-,X)$ e de $-\otimes_R X$, note que $\mathrm{Hom}_R(f_\bullet,X) \approx \mathrm{Hom}(g_\bullet,X)$ e $f_\bullet\otimes \mathrm{Id}_X \approx g_\bullet \otimes \mathrm{Id}_X$. Logo, pela Proposição 1.1.9, $H^i(\mathrm{Hom}_R(f_\bullet,X)) = H^i(\mathrm{Hom}_R(g_\bullet,X))$ e $H_i(f_\bullet\otimes \mathrm{Id}_X) = H_i(g_\bullet\otimes \mathrm{Id}_X)$. □

Observação 1.4.3. Se R é Noetheriano e M,N são R-módulos finitamente gerados, observe que $\mathrm{Ext}^i_R(M,N)$ e $\mathrm{Tor}^R_i(M,N)$ são finitamente gerados para todo $i \geq 0$ (Basta considerar uma resolução livre de posto finito de M e usar as ProposiçõesA.2.5(2) e A.2.10).

Vejamos agora as propriedades elementares de Tor e Ext.

Proposição 1.4.4. Sejam M e N dois R-módulos. Então:

(1) $\mathrm{Tor}^R_0(M,N) \cong M\otimes_R N$;

(2) $\mathrm{Ext}^0_R(M,N) \cong \mathrm{Hom}_R(M,N)$;

(3) Se M é projetivo ou N é plano, então $\mathrm{Tor}^R_i(M,N) = 0$ para todo $i \geq 1$;

(4) Se M é projetivo, então $\mathrm{Ext}^i_R(M,N) = 0$ para todo $i \geq 1$.

Demonstração. Seja

$$P_\bullet : \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de M. Com esta resolução projetiva mostraremos os itens (1) e (2), e também o item (3) no caso que N é plano.

Mostremos (1). Como $-\otimes_R N$ é exato a direita, a sequência

$$P_1\otimes_R N \xrightarrow{\alpha_1\otimes \mathrm{Id}_N} P_0\otimes_R N \xrightarrow{\alpha_0\otimes \mathrm{Id}_N} M\otimes_R N \longrightarrow 0$$

é exata, isto é $\mathrm{im}(\alpha_1\otimes \mathrm{Id}_N) = \ker(\alpha_0\otimes \mathrm{Id}_N)$ e $\alpha_0\otimes \mathrm{Id}_N$ é sobrejetiva. Temos

$$\mathrm{Tor}^R_0(M,N) = H_0(P_{\bullet,M}\otimes_R N) = \frac{\ker(P_0\otimes_R N \to 0)}{\mathrm{im}(\alpha_1\otimes_R \mathrm{Id}_N)} = \frac{P_0\otimes_R N}{\ker(\alpha_0\otimes \mathrm{Id}_N)} \cong M\otimes_R N,$$

onde o isomorfismo é obtido de aplicar o primeiro teorema do isomorfismo para a aplicação $\alpha_0 \otimes \mathrm{Id}_N$.

Mostremos (2). Como $\mathrm{Hom}_R(-,N)$ é exato a direita, a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\alpha_0^*} \mathrm{Hom}_R(P_0,N) \xrightarrow{\alpha_1^*} \mathrm{Hom}_R(P_1,N)$$

é exata. Portanto,

$$\mathrm{Ext}_R^0(M,N) = H^0(\mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,M},N)) = \ker(\alpha_1^*) = \mathrm{im}(\alpha_0^*) \cong \mathrm{Hom}_R(M,N).$$

Mostremos (3) quando N é plano. Neste caso, a sequência

$$P_{i+1} \otimes_R N \xrightarrow{\alpha_{i+1}\otimes \mathrm{Id}_N} P_i \otimes N \xrightarrow{\alpha_i \otimes \mathrm{Id}_N} P_{i-1} \otimes N$$

é exata todo $i \geq 1$. Portanto,

$$\mathrm{Tor}_i^R(M,N) = H_i(P_{\bullet,M} \otimes N) = \frac{\ker(\alpha_i \otimes \mathrm{Id}_N)}{\mathrm{im}(\alpha_{i+1} \otimes \mathrm{Id}_N)} = 0$$

para todo $i \geq 1$.

Agora mostremos (3) e (4) no caso que M seja projetivo. Neste caso,

$$P_\bullet : \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mathrm{Id}_M} M \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de M. Assim, o cocomplexo $\mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,M},N)$ e o complexo $P_{\bullet,M} \otimes_R N$ é

$$\mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,M},N) : 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow 0 \text{ , e}$$

$$P_{\bullet,M} \otimes_R N : 0 \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow 0$$

respectivamente. Assim, $\mathrm{Ext}_R^i(M,N) = \mathrm{Tor}_i^R(M,N) = 0$ para todo $i \geq 1$. □

Proposição 1.4.5. (1) $\mathrm{Ext}_R^i(\bigoplus_{j\in J} M_j, N) \cong \prod_{j\in J} \mathrm{Ext}_R^n(M_j,N)$.

(2) $\mathrm{Ext}_R^i(M, \prod_{j\in J} N_j) \cong \prod_{j\in J} \mathrm{Ext}_R^i(M,N_j)$.

(3) $\mathrm{Tor}_i^R(M, \oplus_{j\in J} N_j) \cong \oplus_{j\in J} \mathrm{Tor}_i^R(M,N_j)$.

Demonstração. (1) Para cada $j \in J$, seja

$$P_\bullet^j : \ \cdots \longrightarrow P_i^j \longrightarrow P_{i-1}^j \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1^j \longrightarrow P_0^j \longrightarrow M_j \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de M_j. Então, pela Proposição 1.2.3,

$$\bigoplus_{j\in J} P_\bullet^j : \ \cdots \longrightarrow \oplus_{j\in J} P_i^j \longrightarrow \cdots \longrightarrow \oplus_{j\in J} P_1^j \longrightarrow \oplus_{j\in J} P_0^j \longrightarrow \oplus_{j\in J} M_j \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de $\bigoplus_{j\in J} M_j$.

Pela Proposição A.1.30(2), temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{j\in J} M_j, N) : 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\oplus_{j\in J} P_0^j, N) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\oplus_{j\in J} P_i^j, N) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \\
\prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(P^j_{\bullet,M}, N) : 0 \arrow[r] & \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(P_0^j, N) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P_i^j, N) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

com as colunas sendo R-isomorfismos. Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^i_R(\bigoplus_{j\in J} M_j, N) &= H^i(\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{j\in J} P^j_{\bullet,M}, N) \\
&\cong H^i(\prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(P^j_{\bullet,M}, N)) \\
&\cong \prod_{j\in J} H^i(\mathrm{Hom}(P^j_{\bullet,M}, N)) && \text{por Lema 1.1.3(1)} \\
&= \prod_{j\in J} \mathrm{Ext}^i_R(M_j, N)
\end{aligned}$$

para todo $i \geq 0$.

(2) Seja

$$P_\bullet : \cdots \longrightarrow P_i \longrightarrow P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de M. Pela Proposição A.1.30(1), temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,M}, \prod_{j\in J} N_j) : 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P_0, \prod_{j\in J} N_j) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P_i, \prod_{j\in J} N_j) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \\
\prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,M}, N_j) : 0 \arrow[r] & \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(P_0, N_j) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(P_i, N_j) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

com colunas sendo R-isomorfismos. Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^i_R(M, \prod_{j\in J} N_j) &= H^i(\mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,M}, \prod_{j\in J} N_j)) \\
&\cong H^i(\prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,M}, N_j)) \\
&\cong \prod_{j\in J} H^i(\mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,M}, N_j)) && \text{por Lema 1.1.3(1)} \\
&= \prod_{j\in J} \mathrm{Ext}^i_R(M, N_j)
\end{aligned}$$

para todo $i \geq 0$.

(3) Seja

$$P_\bullet : \cdots \longrightarrow P_i \longrightarrow P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de M. Pelo Teorema A.1.33(4), temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
P_{\bullet,M} \otimes \bigoplus_{j\in J} N_j : \cdots \arrow[r] & P_i \otimes_R \bigoplus_{j\in J} N_j \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \arrow[r] & P_0 \otimes_R \bigoplus_{j\in J} N_j \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & 0 \\
\bigoplus_{j\in J} (P_{\bullet,M} \otimes N_j) : \cdots \arrow[r] & \bigoplus_{j\in J} (P_i \otimes_R N_j) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bigoplus_{j\in J} (P_0 \otimes_R N_j) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

com colunas sendo R-isomorfismos. Portanto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tor}_i^R(M,\bigoplus_{j\in J} N_j) &= H_i(\bigoplus_{j\in J}(P_{\bullet,M}\otimes_R N_j)) \\
&\cong \bigoplus_{j\in J} H_i(P_{\bullet,M}\otimes_R N_j) && \text{pelo Lema 1.1.3(2)} \\
&= \bigoplus_{j\in J} \operatorname{Tor}_i^R(M,N_j)
\end{aligned}$$

para todo $i \geq 0$.

□

Uma propriedade muito interessante do Tor que vamos a considerar, mas que não vamos a mostrar, é que ele é comutativo no sentido que se M,N são R-módulos, então $\operatorname{Tor}_R^i(M,N) \cong \operatorname{Tor}_R^i(N,M)$ (OSBORNE, 2000, Proposição 3.16).

Lema 1.4.6. Seja $\varphi : R \to S$ um homomorfismo de anéis. Se P é um R-módulo projetivo, então $P\otimes_R S$ é um S-módulo projetivo.

Demonstração. Se P é um R-módulo projetivo, pela Proposição 1.2.8, existe um R-módulo Q tal que $P\oplus Q \cong \bigoplus_I R$ para algum conjunto de índices I. Então,

$$\begin{aligned}
(P\otimes_R S)\oplus(Q\otimes_R S) &\cong (P\oplus Q)\otimes_R S && \text{pelo Teorema A.1.33(4)} \\
&\cong (\bigoplus_I R)\otimes_R S \\
&\cong \bigoplus_I (R\otimes_R S) && \text{pelo Teorema A.1.33(4)} \\
&\cong \bigoplus_I S && \text{pelo Teorema A.1.33(2).}
\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.2.8, $P\otimes_R S$ é um S-módulo projetivo. □

Proposição 1.4.7. Seja $\phi : R \to S$ um homomorfismo plano de anéis. Sejam M,N dois R-módulos. Então:

(1) $S\otimes_R \operatorname{Tor}_i^R(M,N) \cong \operatorname{Tor}_i^S(M\otimes_R S, N\otimes_R S)$ para todo $i \geq 0$;

(2) Se R é Noetheriano e M é finitamente gerado, então

$$S\otimes_R \operatorname{Ext}_R^i(M,N) \cong \operatorname{Ext}_S^i(M\otimes_R S, N\otimes_R S)$$

para todo $i \geq 0$.

Demonstração. Seja

$$P_\bullet : \cdots \longrightarrow P_i \longrightarrow P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma R-resolução projetiva de M. A R-planaridade de S e o lema acima indicam que

$$P_\bullet \otimes_R S: \cdots \longrightarrow P_i \otimes_R S \longrightarrow P_{i-1} \otimes_R S \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \otimes_R S \longrightarrow P_0 \otimes_R S \longrightarrow M \otimes_R S \longrightarrow 0$$

é uma S-resolução projetiva de $M \otimes_R S$. Temos,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tor}_i^S(M \otimes_R S, N \otimes_R S) &= H_i((P_{\bullet,M} \otimes_R S) \otimes_S (N \otimes_R S)) \\
&\cong H_i((P_{\bullet,M} \otimes_R N) \otimes_R S) && \text{pelo Teorema A.1.36(1)} \\
&\cong S \otimes_R H_i(P_{\bullet,M} \otimes_R N) && \text{pelo Lema 1.1.4(1)} \\
&= S \otimes_R \operatorname{Tor}_i^R(M,N)
\end{aligned}$$

para todo $i \geq 0$.

Agora, suponha R Noetheriano e M finitamente gerado. Então, podemos supor que os R-módulos P_i são finitamente gerados, e em particular de presentação finita. Temos,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}_R^i(M \otimes_R S, N \otimes_R S) &= H^i(\operatorname{Hom}_R(P_{\bullet,M} \otimes_R S, N \otimes_R S)) \\
&\cong H^i(S \otimes_R \operatorname{Hom}_R(P_{\bullet,M}, N)) && \text{pela Proposição A.1.42} \\
&\cong S \otimes_R H^i(\operatorname{Hom}_R(P_{\bullet,M}, N)) && \text{pelo Lema 1.1.4(1)} \\
&= S \otimes_R \operatorname{Ext}_R^i(M,N)
\end{aligned}$$

para todo $i \geq 0$. □

Corolário 1.4.8. Sejam M, N dois R-módulos e S um conjunto multiplicativamente fechado de R. Então:

(1) $S^{-1}\operatorname{Tor}_i^R(M,N) \cong \operatorname{Tor}_i^{S^{-1}R}(M,N)$;

(2) Se R é Noetheriano e M finitamente gerado, então $S^{-1}\operatorname{Ext}_R^i(M,N) \cong \operatorname{Ext}_{S^{-1}R}^i(S^{-1}M, S^{-1}N)$.

Demonstração. Resulta imediato de aplicar a proposição anterior para a aplicação de localização $S \to S^{-1}R$ e da Proposição A.1.48. □

1.5 Sequências Exatas Longas para Ext e Tor

Definição 1.5.1. Uma sequência $0 \longrightarrow L_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} N_\bullet \longrightarrow 0$ de complexos e aplicações de complexos é dita *sequência exata curta* se o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\alpha_{i+2}"] & \vdots \arrow[d, "\beta_{i+2}"] & \vdots \arrow[d, "\gamma_{i+2}"] & \\
0 \arrow[r] & L_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "\alpha_{i+1}"] & M_{i+1} \arrow[r, "g_{i+1}"] \arrow[d, "\beta_{i+1}"] & N_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{i+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\alpha_i"] & M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\beta_i"] & N_i \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[d] & M_{i-1} \arrow[r, "g_{i-1}"] \arrow[d] & N_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

é comutativo com linhas exatas.

Proposição 1.5.2. Dada uma sequência exata curta $0 \longrightarrow L_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} N_\bullet \longrightarrow 0$ de complexos e aplicações de complexos, existe uma família $\{\Delta_i : H_i(N_\bullet) \to H_{i-1}(L_\bullet)\}_{i \in I}$ de R-homomorfismos tal que

$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}(N_\bullet) \xrightarrow{\Delta_{i+1}} H_i(L_\bullet) \xrightarrow{H_i(f_\bullet)} H_i(M_\bullet) \xrightarrow{H_i(g_\bullet)} H_i(N_\bullet) \xrightarrow{\Delta_i} H_{i-1}(L_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

é uma sequência exata longa de R-módulos.

Demonstração. Por hipótese, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\alpha_{i+2}"] & \vdots \arrow[d, "\beta_{i+2}"] & \vdots \arrow[d, "\gamma_{i+2}"] & \\
0 \arrow[r] & L_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "\alpha_{i+1}"] & M_{i+1} \arrow[r, "g_{i+1}"] \arrow[d, "\beta_{i+1}"] & N_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{i+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\alpha_i"] & M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\beta_i"] & N_i \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[d] & M_{i-1} \arrow[r, "g_{i-1}"] \arrow[d] & N_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

é comutativo com linhas exatas.

Dado $i \in \mathbb{Z}$, defina $\Delta_i : H_i(N_\bullet) \to H_{i-1}(L_\bullet)$ como segue: se $y \in \ker(\gamma_i)$, existe $x \in M_i$ tal que $g_i(x) = y$, donde $g_{i-1}(\beta_i(x)) = \gamma_i(g_i(x)) = \gamma_i(y) = 0$. Portanto, $\beta_i(x) \in \ker(g_{i-1}) = \mathrm{im}(f_{i-1})$, e consequentemente existe (um único) $z \in L_{i-1}$ tal que $f_{i-1}(z) = \beta_i(x)$. Observe que $z \in \ker(\alpha_{i-1})$ pela injetividade de f_{i-2} e porque $f_{i-2}(\alpha_{i-1}(z)) = \beta_{i-1}(f_{i-1}(z)) = \beta_{i-1}(\beta_i(x)) = 0$. Ponha $\Delta_i(y + \mathrm{im}(\gamma_{i+1})) = z + \mathrm{im}(\alpha_{i-1})$.

Vejamos que Δ_i está bem definida. De fato:

1. (Independência da escolha de z) Sejam $y \in \ker(\gamma_i)$, $x, x' \in M_i$ tais que $g_i(x) = g_i(x') = y$ e sejam $z, z' \in L_{i-1}$ tais que $f_{i-1}(z) = \beta_i(x)$ e $f_{i-1}(z') = \beta_i(x')$. Como $g_i(x) = g_i(x')$, então $x - x' \in \ker(g_i) = \mathrm{im}(f_i)$, donde $x - x' = f_i(w)$ para algum $w \in L_i$. Daí, $f_{i-1}(z - z') = \beta_i(x - x') = \beta_i(f_i(w)) = f_{i-1}(\alpha_i(w))$, donde, pela injetividade de f_{i-1}, segue $z - z' = \alpha_i(w) \in \mathrm{im}(\alpha_i)$.

2. (Independência do representante de um elemento em $H_i(N_\bullet)$) Sejam $y, y' \in \ker(\gamma_i)$ tais que $y - y' \in \mathrm{im}(\gamma_{i+1})$, sejam $x, x' \in M_i$ tais que $g_i(x) = y$ e $g_i(x') = y'$ e sejam $z, z' \in \ker(\alpha_{i-1})$ tais que $f_{i-1}(z) = \beta_i(x)$ e $f_{i-1}(z') = \beta_i(x')$. Como $y - y' \in \mathrm{im}(\gamma_{i+1})$, existe $w \in N_{i+1}$ tal que $\gamma_{i+1}(w) = 0$. Como g_{i+1} é sobrejetiva, existe $v \in M_{i+1}$ tal que $g_{i+1}(v) = w$, donde $g_i(\beta_{i+1}(v)) = \gamma_{i+1}(g_{i+1}(v)) = \gamma_{i+1}(w) = y - y'$. Observe que $f_{i-1}(0) = 0 = \beta_i(\beta_{i+1}(v)$. Também observe que $g_i(x - x') = y - y'$ e que $f_i(z - z') = \beta_i(x - x')$. Portanto, pelo ítem acima, $y - y' = (y - y') - 0 \in \mathrm{im}(\alpha_i)$.

Portanto, Δ_i está bem definida. Observe que, em termos simples e abusando da notação, Δ_i está definido por $\Delta_i(y + \mathrm{im}(\gamma_{i+1})) = (f_{i-1}^{-1} \circ \beta_i \circ g_i^{-1})(y) + \mathrm{im}(\alpha_i)$. É fácil ver que Δ_i é um R-homomorfismo.

Agora, vejamos que a sequência

$$H_i(L_\bullet) \xrightarrow{H_i(f_\bullet)} H_i(M_\bullet) \xrightarrow{H_i(g_\bullet)} H_i(N_\bullet) \xrightarrow{\Delta_i} H_{i-1}(L_\bullet) \xrightarrow{H_{i-1}(f_\bullet)} H_{i-1}(M_\bullet)$$

é exata.

Mostremos a exatidão em $H_i(M_\bullet)$. Como $g_i \circ f_i = 0$, observe que $H_i(g_\bullet) \circ H_i(f_\bullet) = 0$, donde $\mathrm{im}(H_i(f_\bullet)) \subset \ker(H_i(g_\bullet))$. Agora, para mostrar que $\ker(H_i(g_\bullet)) \subset \mathrm{im}(H_i(f_\bullet))$, seja $x \in \ker(\beta_i)$ tal que $x + \mathrm{im}(\beta_{i+1}) \in \ker(H_i(g_\bullet))$. Então, $g_i(x) \in \mathrm{im}(\gamma_{i+1})$, donde $g_i(x) = \gamma_{i+1}(y)$ para algum $y \in N_{i+1}$. Como g_{i+1} é sobrejetiva, existe $z \in M_{i+1}$ tal que $y = g_{i+1}(z)$. Observe que

$$g_i(\beta_{i+1}(z) - x) = g_i(\beta_{i+1}(z)) - g_i(x) = \gamma_{i+1}(g_{i+1}(z)) - g_i(x) = \gamma_{i+1}(y) - g_i(x) = 0,$$

donde $\beta_{i+1}(z) - x \in \ker(g_i) = \mathrm{im}(f_i)$. Daí, $\beta_{i+1}(z) - x = f_i(w)$ para algum $w \in L_i$. Temos que $w \in \ker(\alpha_{i-1})$ pois f_{i-1} é injetiva e

$$f_{i-1}(\alpha_i(w)) = \beta_i(f_i(w)) = \beta_i(\beta_{i+1}(z) - x) = \beta_i(\beta_{i+1}(z)) - \beta_i(x) = 0 - 0 = 0.$$

Portanto, $H_i(f_\bullet)(w + \mathrm{im}(\alpha_{i+1})) = (\beta_{i+1}(z) - x) + \mathrm{im}(\beta_{i+1}) = x + \mathrm{im}(\beta_{i+1})$. Assim, $\ker(H_i(g_\bullet)) \subset \mathrm{im}(H_i(f_\bullet))$.

Mostremos a exatidão em $H_i(N_\bullet)$. Mostremos primeiro que $\Delta_i \circ H_i(g_\bullet) = 0$ e portanto, $\operatorname{im}(H_i(g_\bullet)) \subset \ker(\Delta_i)$. Seja $x \in \ker(\beta_i)$. Por definição, $H_i(g_\bullet)(x+\operatorname{im}(\beta_{i+1})) = g_i(x)+\operatorname{im}(\gamma_{i+1})$. Claramente, $f_{i-1}(0) = 0 = \beta_i(x)$. Assim, por definição, $\Delta_i(H_i(g_\bullet))(x+\operatorname{im}(\beta_{i+1})) = \Delta_i(g_i(x)+\operatorname{im}(\gamma_{i+1})) = 0+\operatorname{im}(\alpha_i)$. Agora, mostremos que $\ker(\Delta_i) \subset \operatorname{im}(H_i(g_\bullet))$. Seja, $y \in \ker(\gamma_i)$ tal que $\Delta_i(y+\operatorname{im}(\gamma_{i+1})) = 0$. Sejam $x \in M_i$ e $z \in L_i$ tais que $g_i(x) = y$ e $f_{i-1}(z) = \beta_i(x)$. Por definição, $\Delta_i(y+\operatorname{im}(\gamma_{i+1})) = z+\operatorname{im}(\alpha_i)$, donde, pela igualdade $\Delta_i(y+\operatorname{im}(\gamma_{i+1})) = 0$, segue que $z \in \operatorname{im}(\alpha_i)$. Daí $z = \alpha_i(w)$ para algum $w \in L_i$. Temos que $f_i(w)-x \in \ker(\beta_i)$ pois

$$\beta_i(f_i(w)-x) = \beta_i(f_i(w)) - \beta_i(x) = f_{i-1}(\alpha_i(w)) - \beta_i(x) = f_{i-1}(z) - \beta_i(x) = 0.$$

Temos também que $g_i(f_i(w)-x) = g_i(f_i(w)) - g_i(x) = 0 - g_i(x) = y$. Portanto, $H_i(g_\bullet)((f_i(w)-x)+\operatorname{im}(\beta_{i+1})) = y+\operatorname{im}(\gamma_{i+1})$.

Mostremos a exatidão em $H_{i-1}(L_\bullet)$. Mostremos primeiro que $H_{i-1}(f_\bullet)\circ\Delta_i = 0$, e portanto $\operatorname{im}(\Delta_i) \subset \ker(H_{i-1}(f_\bullet))$. Sejam $y \in \ker(\gamma_i)$, $x \in M_i$ e $z \in L_i$ tais que $g_i(x) = y$ e $f_{i-1}(z) = \beta_i(x)$. Por definição, $\Delta_i(y+\operatorname{im}(\gamma_{i+1})) = z+\operatorname{im}(\alpha_i)$. Então, $H_{i-1}(f_\bullet)(\Delta_i(y+\operatorname{im}(\gamma_{i+1}))) = f_{i-1}(z)+\operatorname{im}(\beta_i) = \beta_i(x)+\operatorname{im}(\beta_i) = 0$. Agora, mostremos que $\ker(H_{i-1}(f_\bullet)) \subset \operatorname{im}(\Delta_i)$. Seja $x \in \ker(\alpha_{i-1})$ tal que $H_{i-1}(f_\bullet)(x+\operatorname{im}(\alpha_i)) = 0$. Então, $f_{i-1}(x) \in \operatorname{im}(\beta_i)$, donde $f_{i-1}(x) = \beta_i(y)$ para algum $y \in M_i$. Observe que $\gamma_i(g_i(y)) = g_{i-1}(\beta_i(y)) = g_{i-1}(f_{i-1}(x)) = 0$, donde $g_i(y) \in \ker(\gamma_i)$. Por definição, note que $\Delta_i(g_i(y)+\operatorname{im}(\gamma_{i+1})) = x+\operatorname{im}(\alpha_i)$. $\square$

Observação 1.5.3. Cada R-homomorfismo $\Delta_i : H_i(N_\bullet) \to H_{i-1}(L_\bullet)$ é chamado de *homomorfismo conectante*. Da demonstração da Proposição 1.5.2, por meio de um abuso de notação, observe que cada Δ_i é definido por $y+\operatorname{im}(\gamma_{i+1}) \longmapsto (f_{i-1}^{-1}\circ\beta_i\circ g_i^{-1})(y)+\operatorname{im}(\alpha_i)$.

Lema 1.5.4 (Lema da ferradura)**.** Seja

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\alpha_2"] & & \vdots \arrow[d, "\gamma_2"'] & \\
 & P_1 \arrow[d, "\alpha_1"] & & R_1 \arrow[d, "\gamma_1"] & \\
 & P_0 \arrow[d, "\alpha_0"] & & R_0 \arrow[d, "\gamma_0"] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

um diagrama de R-homomorfismos onde a sequência $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ é exata e; $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ são resoluções projetivas de L e N respectivamente. Então, existe uma resolução projetiva $Q_\bullet$ de M e aplicações de complexos $f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ e $g_\bullet : Q_\bullet \to R_\bullet$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\alpha_2"] & \vdots \arrow[d, "\beta_2"] & \vdots \arrow[d, "\gamma_2"] & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & Q_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta_1"] & R_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\alpha_0"] & Q_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "\beta_0"] & R_0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

é comutativo com linhas exatas. Além disso, para cada $n \geq 0$, podemos escolher $Q_n = P_n \oplus R_n$, $f_n : P_n \to Q_n$ como a injeção e $g_n : Q_n \to R_n$ como a projeção.

Demonstração. Ponha $f_{-1} = f, g_{-1} = g, P_{-1} = L, Q_{-1} = M$, e $R_{-1} = N$. Para cada $n \geq 0$, sejam $Q_n = P_n \oplus R_n$, $f_n : P_n \to Q_n$ a injeção canônica e $g_n : Q_n \to P_n$ a projeção natural. Então, note que Q_n é projetivo quando $n \geq 0$ (Proposição 1.2.3) e que a sequência

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} Q_n \xrightarrow{g_n} R_n \longrightarrow 0$$

é exata para todo $n \geq 0$. Vamos construir agora os β_i por indução.

Construamos primeiro β_0. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & P_0 \arrow[d, "\alpha_0"'] & & R_0 \arrow[d, "\gamma_0"'] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Como R_0 é projetivo, existe um R-homomorfismo $h : R_0 \to M$ tal que $g \circ h = \gamma_0$. Defina $\beta_0 : Q_0 \to M$ por $\beta_0(x,y) = (f \circ \alpha_0)(x) + h(y)$. Então,

- β_0 é um R-homomorfismo (é fácil verificar).
- β_0 é sobrejetivo. De fato, seja $m \in M$. Como γ_0 é sobrejetora, existe $r_0 \in R_0$ tal que $\gamma_0(r_0) = g(m)$. Então, $g(m - h(r_0)) = g(m) - g(h(r_0)) = g(m) - \gamma_0(r_0) = 0$. Daí, $m - h(r_0) \in \ker(g) = \operatorname{im}(f)$. Portanto, $m - h(r_0) = f(l)$ para algum $l \in L$. Por outro lado, por sobrejetividade de α_0, existe $p_0 \in P_0$ tal que $l = \alpha_0(p_0)$. Logo,

$$\beta_0(p_0, r_0) = f(\alpha_0(p_0)) + h(r_0) = f(l) + h(r_0) = m - h(r_0) + h(r_0) = m.$$

- $f\circ\alpha_0=\beta_0\circ f_0$ e $g\circ\beta_0=\gamma_0\circ g_0$. De fato, dados $l\in L, p_0\in P_0, q_0\in Q_0$, temos

$$(\beta_0\circ f_0)(l)=\beta_0(f_0(l))=\beta_0(l,0)=(f\circ\alpha_0)(l)+h(0)=(f\circ\alpha_0)(l), \text{ e}$$

$$(g\circ\beta_0)(p_0,q_0)=g((f\circ\alpha_0)(p_0)+h(q_0))=g(f(\alpha_0(p_0)))+g(h(q_0))=0+\gamma(q_0)=\gamma(g(p_0,q_0)).$$

Portanto, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\alpha_0"] & Q_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "\beta_0"] & R_0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

é comutativo e exato.

Suponha agora $n>0$ e que temos construído β_{n-1}. Ele teve que ser construído de maneira que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & Q_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d, "\beta_{n-1}"] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_{n-2} \arrow[r, "f_{n-2}"] & Q_{n-2} \arrow[r, "g_{n-2}"] & R_{n-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo, donde $f_{n-1}(\ker(\alpha_{n-1}))\subset\ker(\beta_{n-1})$ e $g_{n-1}(\ker(\beta_{n-1}))\subset\ker(\gamma_{n-1})$.

Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& P_n \arrow[d, "\overline{\alpha}_n"'] & & R_n \arrow[d, "\overline{\gamma}_n"'] & \\
0 \arrow[r] & \ker(\alpha_{n-1}) \arrow[r, "\overline{f}_{n-1}"] \arrow[d] & \ker(\beta_{n-1}) \arrow[r, "\overline{g}_{n-1}"] & \ker(\gamma_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

onde $\overline{\alpha}_n, \overline{\gamma}_n, \overline{f}_{n-1}, \overline{g}_{n-1}$ são restrições de α_n, γ_n, f_n e g_{n-1} respectivamente. Observe que sua linha e suas colunas são exatas. Então, pelo argumento mostrado na construção do β_0, existe um R-homomorfismo $\overline{\beta}_n : Q_n\to\ker(\beta_{n-1})$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\overline{\alpha}_n"] & Q_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\overline{\beta}_n"] & R_n \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\gamma}_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(\alpha_{n-1}) \arrow[r, "\overline{f}_{n-1}"] \arrow[d] & \ker(\beta_{n-1}) \arrow[r, "\overline{g}_{n-1}"] \arrow[d] & \ker(\gamma_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

é comutativo e exato. Deste modo, se $\beta_n : Q_n \to Q_{n-1}$ é definido por $\beta_n(x,y) = \overline{\beta}_n(x,y)$, então o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\alpha_n"] & Q_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\beta_n"] & R_n \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & Q_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d, "\beta_{n-1}"] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"] & 0 \\
 & P_{n-2} & Q_{n-2} & R_{n-2} &
\end{tikzcd}$$

é comutativo e exato. □

Teorema 1.5.5 (Ext-**Sequência exata longa na primeira variável).** Suponha que

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de R módulos. Então, para todo R-módulo X, existe uma sequência exata longa

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M,X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(L,X) \xrightarrow{\Delta^0}$$
$$\xrightarrow{\Delta^0} \mathrm{Ext}^1_R(N,X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(g,X)} \mathrm{Ext}^1_R(M,X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(f,X)} \mathrm{Ext}^1_R(L,X) \xrightarrow{\Delta^1} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\Delta^{i-1}} \mathrm{Ext}^i_R(N,X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^i_R(g,X)} \mathrm{Ext}^i_R(M,X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^i_R(f,X)} \mathrm{Ext}^i_R(L,X) \xrightarrow{\Delta^i} \cdots.$$

Demonstração. Sejam $P_\bullet$ e $R_\bullet$ resoluções projetivas de L e N respectivamente. Pelo Lema da Ferradura, existe uma resolução projetiva $Q_\bullet$ de M com $Q_i = P_i \oplus R_i$ para todo $i \geq 0$, de tal maneira que se $f_\bullet : P_{\bullet,L} \to Q_{\bullet,M}$ e $g_\bullet : Q_{\bullet,M} \to R_{\bullet,N}$ são as aplicações de complexos dadas pelas injeções e projeções respectivamente, então

$$0 \longrightarrow P_{\bullet,L} \xrightarrow{f_\bullet} Q_{\bullet,M} \xrightarrow{g_\bullet} R_{\bullet,N} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de complexos. Como $\mathrm{Hom}_R(-,X)$ preserva exatidão de sequências exatas curtas que cindem, temos que as colunas do seguinte diagrama comutativo são exatas.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(R_0,X) \arrow[r, "\gamma_1^*"] \arrow[d, "g_0^*"] & \mathrm{Hom}_R(R_1,X) \arrow[r, "\gamma_2^*"] \arrow[d, "g_1^*"'] & \mathrm{Hom}_R(R_2,X) \arrow[r] \arrow[d, "g_2^*"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P_0 \oplus R_0,X) \arrow[r, "\beta_1^*"] \arrow[d, "f_0^*"] & \mathrm{Hom}_R(P_1 \oplus R_1,X) \arrow[r, "\beta_2^*"] \arrow[d, "f_1^*"'] & \mathrm{Hom}_R(P_2 \oplus R_2,X) \arrow[r] \arrow[d, "f_2^*"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P_0,X) \arrow[r, "\alpha_1^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(P_1,X) \arrow[r, "\alpha_2^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(P_2,X) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Deste modo, temos a seguinte sequência exata curta de complexos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R_{\bullet,N},X) \xrightarrow{g_\bullet^*} \mathrm{Hom}_R(Q_{\bullet,M},X) \xrightarrow{f_\bullet^*} \mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,L},X) \longrightarrow 0.$$

Dessa maneira, das Proposiçoes 1.5.2 e 1.4.4(2) segue o resultado. □

A sequência exata longa do Teorema 1.5.5 é chamada a $\mathrm{Ext}^i_R(-,X)$-*sequência exata longa associada* a $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$.

Corolário 1.5.6. Seja $0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de R-módulos com P sendo um módulo projetivo. Então, $\mathrm{Ext}^n_R(M,X) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_R(N,X)$ para todo R-módulo X e todo $n \geq 1$.

Demonstração. Dados $n \geq 1$ e um R-módulo X, do Teorema 1.5.5 e da Proposição 1.4.4(4), temos uma sequência exata

$$0 = \mathrm{Ext}^n_R(P,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(M,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_R(N,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_R(P,X) = 0\ .$$

Portanto, $\mathrm{Ext}^n_R(M,X) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_R(N,X)$. □

Teorema 1.5.7 (Tor-**Sequência exata longa na primeira variável).** Suponha que

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de R-módulos. Então para todo R-módulo X, existe uma sequência exata longa

$$\begin{array}{l}\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}^R_i(L,X) \overset{\mathrm{Tor}^R_i(f,X)}{\longrightarrow} \mathrm{Tor}^R_i(M,X) \overset{\mathrm{Tor}^R_i(g,X)}{\longrightarrow} \mathrm{Tor}^R_i(N,X) \overset{\Delta_i}{\longrightarrow} \\ \ldots \overset{\Delta_2}{\longrightarrow} \mathrm{Tor}^R_1(L,X) \overset{\mathrm{Tor}^R_1(f,X)}{\longrightarrow} \mathrm{Tor}^R_1(M,X) \overset{\mathrm{Tor}^R_1(g,X)}{\longrightarrow} \mathrm{Tor}^R_1(N,X) \overset{\Delta_1}{\longrightarrow} \\ L \otimes_R X \overset{f\otimes \mathrm{Id}_X}{\longrightarrow} M \otimes_R X \overset{g\otimes \mathrm{Id}_X}{\longrightarrow} N \otimes_R X \longrightarrow 0.\end{array}$$

Demonstração. Sejam $P_\bullet$ e $R_\bullet$ resoluções projetivas de L e N respectivamente. Pelo Lema da Ferradura, existe uma resolução projetiva $Q_\bullet$ de M com $Q_i = P_i \oplus R_i$ para todo $i \geq 0$, de tal maneira que se $f_\bullet : P_{\bullet,L} \to Q_{\bullet,M}$ e $g_\bullet : Q_{\bullet,M} \to R_{\bullet,N}$ são as aplicações de complexos dadas pelas injeções e projeções respectivamente, então

$$0 \longrightarrow P_{\bullet,L} \xrightarrow{f_\bullet} Q_{\bullet,M} \xrightarrow{g_\bullet} R_{\bullet,N} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de complexos. Como $-\otimes_R X$ preserva composição e exatidão em sequências exatas curtas que cindem, obtemos que

$$0 \longrightarrow P_{\bullet,L} \otimes_R X \xrightarrow{f_\bullet \otimes_R \mathrm{Id}_X} Q_{\bullet,M} \otimes_R X \xrightarrow{g_\bullet \otimes \mathrm{Id}_X} R_{\bullet,N} \otimes_R X \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de complexos. Aplicando a Proposição 1.5.2 e a Proposição 1.4.4(1) obtemos a sequência exata longa desejada. □

A sequência exata longa do Teorema 1.5.7 é chamada a $\mathrm{Tor}(-,X)$-*sequência exata longa associada* a $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$.

Corolário 1.5.8. Suponha que $0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow N \longrightarrow 0$ é uma sequência exata curta de R-módulos com F sendo um R-módulo plano. Então, $\mathrm{Tor}_n^R(M,X) \cong \mathrm{Tor}_{n+1}^R(N,X)$ para todo R-módulo X e todo $n \geq 1$.

Demonstração. Dados $n \geq 1$ e um R-módulo X, do Teorema 1.5.7 e da Proposição 1.4.4(3), temos uma sequência exata

$$0 = \mathrm{Tor}_{n+1}^R(F,X) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^R(N,X) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(M,X) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(F,X) = 0 .$$

Segue que $\mathrm{Tor}_n^R(M,X) \cong \mathrm{Tor}_{n+1}^R(N,X)$. □

Teorema 1.5.9 (Ext-**Sequência exata longa na segunda variável).** Suponha que

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de R-módulos. Então, para todo R-módulo X, existe uma sequência exata longa

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X,L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(X,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(X,N) \xrightarrow{\Delta^0} \\ \xrightarrow{\Delta^0} \mathrm{Ext}_R^1(X,L) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_R^1(X,f)} \mathrm{Ext}_R^1(X,M) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_R^1(X,g)} \mathrm{Ext}_R^1(L,N) \xrightarrow{\Delta^1} \cdots \\ \cdots \xrightarrow{\Delta^{i-1}} \mathrm{Ext}_R^i(X,L) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_R^i(X,f)} \mathrm{Ext}_R^i(X,M) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_R^i(X,g)} \mathrm{Ext}_R^i(X,N) \xrightarrow{\Delta^i} \cdots . \end{gathered}$$

Demonstração. Seja $P_\bullet$ uma resolução projetiva de X. Pela Proposição 1.2.2, a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_i,L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P_i,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P_i,N) \longrightarrow 0$$

é exata para todo $i \geq 0$. Então, note que temos uma sequência exata curta de cocomplexos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,X},L) \xrightarrow{f_{\bullet *}} \mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,X},M) \xrightarrow{g_{\bullet *}} \mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,X},N) \longrightarrow 0 .$$

Aplicando a Proposição 1.5.2 (para a sequência acima), e posteriormente a Proposição 1.4.4(2) segue o resultado. □

A sequência exata longa do Teorema 1.5.9 é chamada a $\mathrm{Ext}(X,-)$-*sequência exata longa associada* a $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$.

Corolário 1.5.10. Se M é um R-módulo, as seguintes condições são equivalentes:

(1) M é projetivo;

(2) $\mathrm{Ext}_R^n(M,X) = 0$ para todo $n \geq 1$ e para todo R-módulo X;

(3) $\mathrm{Ext}^1_R(M,X) = 0$ para todo R-módulo X.

Demonstração. A implicação $(1) \Rightarrow (2)$ vale pela Proposição 1.4.4(4). A implicação $(2) \implies (3)$ é obvia. Vejamos agora que $(3) \implies (1)$. Seja

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de R-módulos. De sua $\mathrm{Ext}^1_R(M,-)$-sequência exata longa associada, temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M,N')\ .$$

Por hipótese, o extremo direito da sequência é zero. A projetividade de M segue da Proposição 1.2.2. □

Teorema 1.5.11 (Tor-**Sequência exata longa na segunda variável).** Suponha que

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de R módulos. Então, para todo R-módulo X, existe uma sequência exata longa

$$\begin{aligned}
&\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}^R_i(X,L) \xrightarrow{\mathrm{Tor}^R_i(X,f)} \mathrm{Tor}^R_i(X,M) \xrightarrow{\mathrm{Tor}^R_i(X,g)} \mathrm{Tor}^R_i(X,N) \xrightarrow{\Delta_i} \\
&\ldots \xrightarrow{\Delta_2} \mathrm{Tor}^R_1(X,L) \xrightarrow{\mathrm{Tor}^R_1(X,f)} \mathrm{Tor}^R_1(X,M) \xrightarrow{\mathrm{Tor}^R_1(X,g)} \mathrm{Tor}^R_1(X,N) \xrightarrow{\Delta_1} \\
&X \otimes_R L \xrightarrow{\mathrm{Id}_X \otimes f} X \otimes_R M \xrightarrow{\mathrm{Id}_X \otimes g} X \otimes_R N \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Demonstração. Seja

$$P_\bullet : \cdots \to P_i \to P_{i-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

uma resolução projetiva de M. Como cada P_i é projetivo, então também é plano (Proposição 1.2.9). Assim, para todo $i \geq 0$ a sequência

$$0 \to P_i \otimes_R L \to P_i \otimes_R M \to P_i \otimes_R N \to 0$$

é exata. Este fato junto com a funtorialidade de $- \otimes_R L$ nos fornece uma sequência exata curta de complexos

$$0 \to P_{\bullet,M} \otimes_R L \to P_{\bullet,M} \otimes_R M \to P_{\bullet,M} \otimes_R N \to 0.$$

Aplicando as Proposições 1.5.2 e 1.4.4(1) obtemos a sequência exata longa desejada. □

A sequência exata longa do Teorema 1.5.11 é chamada a $\mathrm{Tor}(X,-)$-*sequência exata longa associada* a $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$.

Corolário 1.5.12. Seja M um R-módulo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) M é plano;

(2) $\operatorname{Tor}_n^R(M,N) = 0$ para todo R-módulo N e todo $n \geq 1$;

(3) $\operatorname{Tor}_1^R(M,N) = 0$ para todo R-módulo N.

Demonstração. A implicação $(1) \Rightarrow (2)$ vale pela Proposição 1.4.4(3). A implicação $(2) \Rightarrow (3)$ é obvia. Vejamos agora a implicação $(3) \Rightarrow (1)$. Seja

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0.$$

uma sequência exata. Então, por hipótese e pelo Teorema 1.5.11 obtemos uma sequência exata

$$0 = \operatorname{Tor}_1^R(M,N'') \to M \otimes_R N' \to M \otimes_R N \to M \otimes_R N'' \to 0.$$

Portanto, M é plano (Proposição A.1.38). □

Teorema 1.5.13. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local e Noetheriano. Se M é um R-módulo finitamente gerado, então as seguintes condições são equivalentes:

(1) M é um R-módulo livre;

(2) M é um R-módulo projetivo;

(3) M é um R-módulo plano;

(4) $\operatorname{Tor}_i^R(M,N) = 0, \forall i > 0$ e para qualquer R-módulo N;

(5) $\operatorname{Tor}_1^R(M,k) = 0$.

Demonstração. As implicações $(1) \Rightarrow (2)$, $(2) \Rightarrow (3)$ e $(3) \Rightarrow (4)$ valem pelas Proposições 1.2.5, 1.2.9 e 1.4.4(3) respectivamente. A implicação $(4) \Rightarrow (5)$ é obvia. Resta mostrar a implicação $(5) \Rightarrow (1)$. Seja $n = \mu(M)$. Então, temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Já que, por hipótese, $\operatorname{Tor}_1^R(M,k) = 0$, a $\operatorname{Tor}(-,k)$-sequencia longa associada à sequência acima indica que a sequência

$$0 \to S \otimes_R k \to R^n \otimes k \to M \otimes k \to 0$$

é exata. Assim, pelo Teorema A.1.33(5), obtemos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \frac{S}{\mathfrak{m}S} \longrightarrow \frac{R^n}{\mathfrak{m}R^n} \longrightarrow \frac{M}{\mathfrak{m}M} \longrightarrow 0$$

de k-espaços vetoriais. Já que $n = \dim_k(M/\mathfrak{m}M)$ (Corolário A.1.22), os k-espaços vetoriais $R^n/\mathfrak{m}R^n$ e $M/\mathfrak{m}M$ tem a mesma k-dimensão. Assim, aplicando o Teorema do posto e nulidade para o k-homomorfismo $\frac{R^n}{\mathfrak{m}R^n} \longrightarrow \frac{M}{\mathfrak{m}M}$, segue que ele é injetivo, donde $S/\mathfrak{m}S = 0$. Pelo Lema de Nakayama, $S = 0$, e consequentemente $R^n \cong M$. □

1.6 Dimensão Projetiva

Definição 1.6.1. Seja M um R-módulo. Se

$$P_\bullet : \ 0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de M, diremos que ela tem *comprimento* n. A *dimensão projetiva* de M é dada por

$$\mathrm{pdim}(M) := \inf\{n : \ n \text{ é comprimento de uma resolução projetiva de } M\}.$$

Observação 1.6.2. Um R-módulo M é projetivo se, e somente se, $\mathrm{pdim}(M) = 0$.

Lema 1.6.3 (Deslocamento de Dimensão)**.** Seja $0 \to L_n \to L_{n-1} \to \cdots \to L_0 \to M \to 0$ uma sequência exata de R-módulos onde, $n > 0$ e os L_i são projetivos para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Então, para qualquer R-módulo N, temos que

$$\mathrm{Ext}_R^i(L_n, N) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+n}(M, N)$$

para todo $i \geq 1$

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre n.

Para $n = 1$, temos uma sequência $0 \to L_1 \to L_0 \to M \to 0$ exata. Então, pelo Corolário 1.5.6, $\mathrm{Ext}_R^i(L_1, N) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+1}(M, N)$.

Suponha $n > 1$ e que o resultado vale para $n-1$. Da sequência exata podemos obter as seguintes sequências exatas

$$0 \to K \to L_0 \to M \to 0, \text{ e}$$
$$0 \to L_n \to L_{n-1} \to \cdots \to L_1 \to K \to 0.$$

Então,

$$\mathrm{Ext}_R^i(L_n, K) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+n-1}(K, N) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+n}(M, N),$$

onde o primeiro isomorfismo é por hipótese indutiva e o segundo é pelo caso $n = 1$. □

Teorema 1.6.4. Se M é um R-módulo e $n > 0$, as seguintes condições são equivalentes:

(1) $\mathrm{pdim}(M) \leq n$;

(2) $\mathrm{Ext}_R^i(M, X) = 0$ para todo $i > n$ e todo R-módulo X;

(3) $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, X) = 0$ para qualquer R-módulo X;

(4) Se

$$0 \to K_{n-1} \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

é uma sequência com P_i projetivo para $i = 0, \ldots, n-1$, então K_{n-1} é projetivo.

Demonstração. $(1) \Rightarrow (2)$. Ponha $l = \mathrm{pdim}(M) \le n$. Então, existe uma resolução projetiva da forma

$$P_\bullet : 0 \to P_l \to P_{l-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0.$$

Daí note que o cocomplexo $\mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,M}, X)$ é

$$\mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,M}, X) : 0 \to \mathrm{Hom}_R(P_0, X) \to \mathrm{Hom}_R(P_1, X) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_R(P_l, X) \to 0.$$

Como $l \le n$, é fácil ver que $\mathrm{Ext}_R^i(M,X) = H^i(\mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,M}, X)) = 0$ para $i > n$.

A implicação $(2) \Rightarrow (3)$ é obvia.

$(3) \Rightarrow (4)$. Seja

$$0 \to K_{n-1} \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

uma sequência com P_i projetivo para $i = 0, \dots, n-1$. Então, pelo Lema de Deslocamento e pela hipótese,

$$\mathrm{Ext}_R^1(K_{n-1}, X) \cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,X) = 0$$

para todo R-módulo X. Segue, do Corolário 1.5.10, que K_{n-1} é projetivo.

$(4) \Rightarrow (1)$. Seja

$$P_\bullet : \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de M. Daí, temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \qquad (1.1)$$

onde $K_{n-1} = \ker(\alpha_{n-1})$. Por hipótese, K_{n-1} é projetivo. Logo, a sequência (1.1) é uma resolução projetiva para M de comprimento n, e portanto $\mathrm{pdim}(M) \le n$. □

Corolário 1.6.5. Para um R-módulo $M \neq 0$ tem-se que

$$\mathrm{pdim}(M) = \sup\{n : \mathrm{Ext}_R^n(M,N) \neq 0 \text{ para algum } R\text{-módulo } N\}.$$

Demonstração. Ponha $k = \mathrm{pdim}(M)$ e $l = \sup\{n : \mathrm{Ext}_R^n(M,N) \neq 0$ para algum R-módulo $N\}$.

Consideremos primeiro o caso $l < \infty$. Então $\mathrm{Ext}_R^{l+1}(M,N) = 0$ para todo R-módulo N, donde $k \le l$ (Teorema 1.6.4). Assim $k < \infty$. Por outro lado, pelo Teorema 1.6.4, temos $\mathrm{Ext}_R^i(M,N) = 0$ para todo $i > k$ e todo R-módulo N, donde $l \le k$. Portanto, $l = k$ quando $l < \infty$.

Agora, suponha $l = \infty$. Então, existem uma sequência de R-módulos $N_1, N_2, \dots$ e de números naturais $1 < k_1 < k_2 < \cdots < \cdots$ tais que $\mathrm{Ext}_R^{k_i}(M, N_i) \neq 0$. Assim, se $N = \prod_{i=1}^{n} N_i$, observe, da Proposição 1.4.5(2), que $\mathrm{Ext}_R^{k_i}(M,N) \neq 0$ para todo $i \ge 1$. Então, pelo teorema anterior, $\mathrm{pdim}(M) > k_i - 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como os k_i são estritamente crescentes, segue que $k = \mathrm{pdim}(M) = \infty$. □

Corolário 1.6.6. Se $\{M_j\}_{j\in J}$ uma família de R-móduos, então

$$\mathrm{pdim}(\bigoplus_{j\in J} M_j) = \sup_{j\in J} \mathrm{pdim}(M_j).$$

Demonstração. Consideremos primeiro o caso $\sup_{j\in J} \mathrm{pdim}(M_j) < \infty$ e chamemos de n tal número. Então, existe $j' \in J$ tal que $n = \mathrm{pdim}(M_{j'})$. Pelo Corolário1.6.5, $\mathrm{Ext}_R^n(M_{j'}, N) \neq 0$ para algum R-módulo N. Observe, da Proposição 1.4.5(1), que $\mathrm{Ext}_R^n(\bigoplus_{j\in J} M_j, N) \neq 0$. Logo, pelo Corolário 1.6.5, $\mathrm{pdim}(\bigoplus_{j\in J} M_j, N) \geq n$. Por outro lado, da definição de n, temos que $n \geq \mathrm{pdim}(M_j)$ para todo $j \in J$. Desse modo, pelo Teorema 1.6.4 , para todo R-módulo N, temos $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M_j, N) = 0$ para todo $j \in J$, e consequentemente, pela Proposição 1.4.5(1), $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(\bigoplus_{j\in J} M_j, N) = 0$. Assim, segue do Teorema 1.6.4 que $\mathrm{pdim}(\bigoplus_{j\in J} M_j) \leq n$.

Agora, consideremos o caso $\sup_{j\in J} \mathrm{pdim}(M_j) = \infty$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um $j_n \in J$ tal que $\mathrm{pdim}(M_{j_n}) > n$, e consequentemente, pelo Teorema 1.6.4, existe um R-módulo N_n tal que $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M_{j_n}, N_n) \neq 0$. Se $N' = \prod_{n=1}^{\infty} N_n$, observe, da Proposição 1.4.5(2), que $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M_{j_n}, N') \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Novamente, da Proposição 1.4.5, observe que $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(\bigoplus_{j\in J} M_j, N') \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desse modo, o Teorema 1.6.4 indica que $\mathrm{pdim}(\bigoplus_{j\in J} M_j) > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\mathrm{pdim}(\bigoplus_{j\in J} M_j) = \infty$. □

Observação 1.6.7. Do Teorema 1.6.4 e com as ideias das demonstrações do Corolário 1.5.6 e do Lema 1.6.3, pode-se mostrar o seguinte: Seja $0 \to L_n \to L_{n-1} \to \cdots \to L_0 \to M \to 0$ uma sequência exata de R-módulos onde $\mathrm{pdim}(L_i) \leq l$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Então, para qualquer R-módulo N, temos que

$$\mathrm{Ext}_R^i(L_n, N) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+n}(M, N)$$

para todo $i > l$.

Vamos introduzir agora a noção de resolução livre minimal para mostrar uma caracterização da dimensão projetiva de um módulo finitamente gerado sobre um anel local Noetheriano.

Proposição 1.6.8. Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local e M um R-módulo finitamente gerado. Suponha que

$$F_\bullet : \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\alpha_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de posto finito. São equivalentes:

(1) $\alpha_i(F_i) \subset \mathfrak{m}F_{i-1}, \forall i \geq 1$;

(2) $\overline{\alpha}_i = \alpha_i \otimes_R \mathrm{Id}_k = 0, \forall i \geq 1$;

(3) $\alpha_i^* := \mathrm{Hom}_R(\alpha_i, k) = 0, \forall i \geq 1$;

(4) $\dim_k(\mathrm{Tor}_i^R(M, k)) = \mathrm{rank}(F_i)$, $\forall i \geq 0$;

(5) $\dim_k(\mathrm{Ext}^i_R(M,k)) = \mathrm{rank}(F_i)$, $\forall i \geq 0$.

Demonstração. Para cada $i \geq 0$, seja n_i o posto do R-módulo livre F_i.

Vejamos que $(1) \iff (2)$. Dado $i \geq 1$, pelo Teorema A.1.33(5), temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} F_i \otimes_R k \arrow[r, "\overline{\alpha}_i"] \arrow[d, "\cong"'] & F_{i-1} \otimes_R k \arrow[d, "\cong"] \\ F_i/\mathfrak{m}F_i \arrow[r, "\psi"'] & F_{i-1}/\mathfrak{m}F_{i-1} \end{tikzcd}$$

onde $\psi : F_i/\mathfrak{m}F_i \to F_{i-1}/\mathfrak{m}F_{i-1}$ é o R-homomorfismo definido por $\psi(x+\mathfrak{m}F_i) = \alpha_i(x) + \mathfrak{m}F_{i-1}$. Daí é claro que $\overline{\alpha}_i = 0$ se, e somente se,$\psi = 0$ se, e somente se, $\alpha_i(F_i) \subset \mathfrak{m}F_{i-1}$.

Vejamos que $(1) \iff (3)$. Para $i \geq 0$, fixe uma R-base $\mathscr{B}_i = \{e^i_1, \ldots, e^i_{n_i}\}$ de F_i e para $j = 1, \ldots, n_i$ defina $f^i_j : F_i \to k$ como o R-homomorfismo tal que $e^i_j \mapsto 1$ e $e^i_l \mapsto 0$ para $l \neq j$. Note que $\mathscr{C}_i := \{f^i_1, \ldots, f^i_{n_i}\}$ é uma k-base de $\mathrm{Hom}_R(F_i, k)$. Seja $i \geq 1$. Para $j = 1, \ldots, n_i$ e para $x \in F_i$ observe que $\alpha^*_i(f^{i-1}_j)(x) = [\alpha_i(x)]_j + \mathfrak{m}$, onde $[\alpha_i(x)]_j$ denota a j-ésima coordenada de $\alpha_i(x)$ em relação à base $\mathscr{B}_{i-1}$. Então,

$$\begin{aligned} \alpha_i(F_i) \subset \mathfrak{m}F_{i-1} &\iff \alpha_i(x) \in \mathfrak{m}F_{i-1}, \forall x \in F_i \\ &\iff [\alpha_i(x)]_j \in \mathfrak{m}, \forall j = 1, \ldots, n_i, \forall x \in F_i \\ &\iff \alpha^*_i(f^{i-1}_j) = 0, \forall j = 1, \ldots, n_i \\ &\iff \alpha^*_i = 0. \end{aligned}$$

$(2) \Rightarrow (4)$. Note que

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_i = 0, \forall i \geq 1 &\Rightarrow \mathrm{im}(\overline{\alpha}_{i+1}) = 0,\ \forall i \geq 0 \text{ e } \ker(\overline{\alpha}_i) = F_i \otimes_R k,\ \forall i \geq 1 \\ &\Rightarrow \mathrm{Tor}^R_i(M,k) \cong H_i(F_{\bullet,M} \otimes_R k) \cong F_i \otimes_R k \cong k^{n_i},\ \forall i \geq 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{rank}(\mathrm{Tor}^R_i(M,k)) = n_i, \forall i \geq 0. \end{aligned}$$

$(4) \Rightarrow (2)$. Seja $i \geq 1$ e defina $l_i = \dim_k(\ker(\overline{\alpha}_i))$ e $r_i = \dim_k(\mathrm{im}(\overline{\alpha}_{i+1}))$. Como $\ker(\overline{\alpha}_i) \subset F_i \otimes_R k \cong k^{n_i}$, então $l_i \leq n_i$. Dado que $\mathrm{Tor}^R_i(M,k) = \frac{\ker(\overline{\alpha}_i)}{\mathrm{im}(\overline{\alpha}_{i+1})}$, veja que $\dim_k(\mathrm{Tor}^R_i(M,k)) = l_i - r_i$. Assim, como $n_i = \dim_k(\mathrm{Tor}^R_i(M,k))$, note que $0 \leq l_i \leq n_i = l_i - r_i$, donde $n_i = l_i$. Já que $\ker(\overline{\alpha}_i)$ e um k-subespaço de $F_i \otimes_R k$, segue que $\ker(\overline{\alpha}_i) = F_i \otimes_R k$, isto é $\overline{\alpha}_i = 0$.

De maneira similar a como mostramos $(2) \Rightarrow (4)$ e $(4) \Rightarrow (2)$, podem mostrar-se $(3) \Rightarrow (5)$ e $(5) \Rightarrow (3)$.

□

Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e M um R-módulo finitamente gerado. Se $F_\bullet$ é uma resolução livre de posto finito de M, dizemos que $F_\bullet$ é uma *resolução livre minimal* se satisfaz uma (e portanto todas) as condições da Proposição 1.6.8.

Observação 1.6.9. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Então, M tem uma resolução livre minimal. De fato, seja $b_0 = \mu(M)$ e ponha $F_0 = R^{b_0}$. Existe um R-homomorfismo sobrejetivo $\varphi_0 : F_0 \to M$. Temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & F_0 \arrow[r, "\varphi_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& M_1 := \ker(\varphi_0) \arrow[ur, "j_0"] & & & \\
0 \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

onde $j_0 : M_1 \to F_0$ é a inclusão.

Como M é um R-módulo Noetheriano (Proposição A.2.5(2)), temos que M_1 é finitamente gerado (como um R-módulo). Sejam $b_1 = \mu(M_1)$ e $F_1 = R^{b_1}$. Então existe um R-homomorfismo sobrejetivo $\beta_1 : F_i \to M_1$. Então, temos um diagrama

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[rr, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\beta_1"'] & & F_0 \arrow[r, "\varphi_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& M_1 \arrow[ur, "j_0"'] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

onde $\varphi_1 = j_0 \circ \beta_1$. Repetindo esse processo, obteremos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_i \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\beta_i"'] & & F_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[rr, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\beta_1"'] & & F_0 \arrow[r, "\varphi_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & M_i \arrow[ur, "j_{i-1}"'] \arrow[dr] & & & & M_1 \arrow[ur, "j_0"'] \arrow[dr] & & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

com $b_i = \mu(M_i)$, $F_i = R^{b_i}$, $\beta_i : F_i \to M_i$ sendo um R-homomorfismo sobrejetivo, $j_i : M_i \to F_{i-1}$ sendo a inclusão, $\varphi_i = \circ j_{i-1} \circ \beta_i$ e $M_i = \ker(\varphi_{i-1})$ para todo $i \geq 1$. Para $i \geq 1$, observe que

$$\operatorname{im}(\varphi_i) = \operatorname{im}(\beta_i) = M_i = \ker(\varphi_{i-1}).$$

Desse modo,

$$F_\bullet : \quad \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\varphi_i} \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre. Vejamos que tal resolução livre é minimal. Se $f \in \operatorname{Hom}_R(L, N)$ é um R-homomorfismo, denote por $\tilde{f}$ ao R-homomorfismo em $\operatorname{Hom}_R(L/\mathfrak{m}L, N/\mathfrak{m}N)$ induzido por f. Pela Proposição 1.6.8, é suficiente mostrar que $\tilde{\varphi}_i = 0$ para todo $i \geq 1$. Coloque $M_0 = M$ e $\beta_0 = \varphi_0$. Dado $i \geq 1$, note que a sequência

$$0 \longrightarrow M_i \xrightarrow{j_{i-1}} F_{i-1} \xrightarrow{\beta_{i-1}} M_{i-1} \longrightarrow 0$$

é exata. Tensorizando ela por $k = R/\mathfrak{m}$ e aplicando o Teorema A.1.33(5), temos que a sequência

$$M_i/\mathfrak{m}M_i \xrightarrow{\tilde{j}_{i-1}} F_{i-1}/\mathfrak{m}F_{i-1} \xrightarrow{\tilde{\beta}_{i-1}} M_{i-1}/\mathfrak{m}M_{i-1} \longrightarrow 0$$

é exata. Como $F_{i-1} = R^{b_{i-1}}$ e $b_{i-1} = \mu(M_{i-1})$, note que os k-espaços vetoriais $F_{i-1}/\mathfrak{m}F_{i-1}$ e $M_{i-1}/\mathfrak{m}M_{i-1}$ tem a mesma dimensão. Assim, o k-homomorfismo sobrejetivo $\tilde{\beta}_{i-1}$ é um k-isomorfismo, donde $\ker(\tilde{\beta}_{i-1}) = 0$. Já que $\mathrm{im}(\tilde{j}_{i-1}) = \ker(\tilde{\beta}_{i-1})$, segue que $\mathrm{im}(\tilde{j}_{i-1}) = 0$, isto é $\tilde{j}_{i-1} = 0$. Como $\varphi_i = j_{i-1} \circ \beta_i$, temos $\tilde{\varphi}_i = \tilde{j}_{i-1} \circ \tilde{\beta}_i = 0 \circ \tilde{\beta}_i = 0$.

Corolário 1.6.10. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado não nulo. Seja

$$F_\bullet : \cdots \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \stackrel{\alpha_0}{\to} M \to 0$$

uma resolução livre minimal de M. Então,

$$\mathrm{pdim}(M) = \sup\{i \geq 0 : F_i \neq 0\}.$$

Demonstração. Ponha $n = \mathrm{pdim}(M)$. Note que $F_0 \neq 0$ pois α_0 é um R-homomorfiso sobrejetivo e $M \neq 0$.

Provemos o resultado primeiramente quando $n < \infty$. Neste caso, pelo Teorema 1.6.4, $\mathrm{Ext}^i_R(M,k) = 0$ para todo $i > n$ e, consequentemente, pela Proposição 1.6.8, $F_i = 0$ para todo $i > n$. Por outro lado note que $F_n \neq 0$ pois se $F_n = 0$, note que $n > 0$ (já que $F_0 \neq 0$) e que podemos obter de $F_\bullet$ uma resolução projetiva de M de comprimento menor que n, o que contradiz que $\mathrm{pdim}(M) = n$. Portanto, $n = \sup\{i \geq 0 : F_i \neq 0\}$.

Agora mostremos o resultado para $n = \infty$. Neste caso, não existe resolução projetiva de M de comprimento finito, e portanto note que $F_i \neq 0$ para todo $i \geq 0$. Logo, é claro $\sup\{i \geq 0 : F_i \neq 0\} = \infty$. □

Corolário 1.6.11. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado não nulo. Se $n = \mathrm{pdim}(M)$, então existe uma resolução livre minimal de M da forma

$$F_\bullet : 0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

com $F_n \neq 0$. Reciprocamente, se

$$F_\bullet : 0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

é uma resolução livre minimal de M com $F_n \neq 0$, então $n = \mathrm{pdim}(M)$.

Demonstração. A primeira afirmação segue da Observação 1.6.9 e do corolário acima; enquanto, a segunda segue do corolário acima. □

Corolário 1.6.12. Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Então,

$$\operatorname{pdim}(M) = \sup\{i : \operatorname{Ext}_R^i(M,k) \neq 0\},$$

$$\operatorname{pdim}(M) = \sup\{i : \operatorname{Tor}_i^R(M,k) \neq 0\}.$$

Demonstração. Resulta imediato da Observação 1.6.9, do Corolário 1.6.10 e da Proposição 1.6.8. $\square$

CAPÍTULO

2

INTRODUÇÃO À TEORIA DE MÓDULOS COHEN-MACAULAY.

Anéis e módulos Cohen-Macaulay são uma classe muito rica em propriedades dentro da Álgebra Comutativa. Esta classe tem muitas aplicações na Geometria Algébrica, Teoria de números e Teoria de singularidades. A noção de Cohen-Macaulay, foi primeiramente definida em anéis de polinômios por Macaulay em 1916. Nesta seção damos a uma introdução aos módulos Cohen-Macaulay. A referência principal para este capítulo é (BRUNS W.; HERZOG, 1998, Capítulos 1 e 2).

2.1 Elementos e Sequências Regulares

Elementos Regulares

Dado um R-módulo M, lembremos que um elemento $x \in R$ é um *divisor de zero* de M se existe $m \in M$ com $m \neq 0$ tal que $x \cdot m = 0$.

Definição 2.1.1. Seja M um R-módulo. Um elemento $x \in R$ é um *elemento M-regular* se x não é um divisor de zero de M. Um elemento R-regular é dito simplesmente *elemento regular*.

Para um R-módulo M e um elemento $x \in R$, denotamos por $x_M : M \to M$ o R-homomorfismo dado pela multiplicação por x sobre M. Em alguns casos, quando não haja risco de confusão sobre o módulo em questão denotaremos x_M apenas por x.

Observação 2.1.2. Dados um R-módulo M e $x \in R$, são equivalentes:

(1) x é um elemento M-regular;

(2) $x \cdot m = 0,\ m \in M \implies m = 0$;

(3) $x : M \to M$ é injetiva.

Proposição 2.1.3. Sejam R um anel Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Um ideal $I \subset R$ consiste de divisores de zero de M, se e somente se, $I \subset \mathfrak{p}$ para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$.

Demonstração. Como R é Noetheriano e M é finitamente gerado, pelas Proposições A.2.7 e A.2.8(2),

$$\operatorname{ZD}(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)} \mathfrak{p}$$

e $\operatorname{Ass}(M)$ é finito.

Se $I \subset \operatorname{ZD}(M)$, pelo Lema dos Primos Avoidance, segue que $I \subset \mathfrak{p}$ para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$. Reciprocamente, suponha que existe $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ tal que $I \subset \mathfrak{p}$. A igualdade acima, e a pertencia $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ implicam em $\mathfrak{p} \subset \operatorname{ZD}(M)$, donde $I \subset \operatorname{ZD}(M)$. □

Proposição 2.1.4. Seja R um anel e M,N dois R-módulos. Seja $I = \operatorname{ann}(N)$.

(1) Se I contém um elemento M-regular, então $\operatorname{Hom}_R(N,M) = 0$.

(2) Reciprocamente, se R é Noetheriano, M,N são dois R-módulos finitamente gerados e $\operatorname{Hom}_R(N,M) = 0$, então I contém um elemento M-regular.

Demonstração. (1) Sejam $x \in I$ um elemento M-regular e $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(N,M)$. Dado $n \in N$, temos que $xn = 0$ (pois $x \in I = \operatorname{ann}(N)$). Então, $x\varphi(n) = \varphi(xn) = 0$. Desse modo, a M-regularidade de x implica em $\varphi(n) = 0$. Portanto, por arbitrariedade, $\varphi = 0$ e $\operatorname{Hom}_R(N,M) = 0$.

(2) Por absurdo, suponha que todos os elementos de I são divisores de zero de M. Pela Proposição 2.1.3, $I \subset \mathfrak{p}$ para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$.

Como $V(I) = \operatorname{Supp}(N)$ (Proposição A.1.54) , temos que $N_\mathfrak{p} \neq 0$. Dessa maneira, se denotamos por $k(\mathfrak{p})$ ao corpo residual de $R_\mathfrak{p}$, pelo Lema de Nakayama, $N_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} k(\mathfrak{p}) \cong N_\mathfrak{p}/(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})N_\mathfrak{p} \neq 0$. Em vista disso, podemos achar um $R_\mathfrak{p}$-homomorfismo sobrejetivo $N_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} k(\mathfrak{p}) \to k(\mathfrak{p})$. Componendo ele com o $R_\mathfrak{p}$-homomorfismo natural $N_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} k(\mathfrak{p})$, obtemos um $R_\mathfrak{p}$-homomorfismo sobrejetivo $N_\mathfrak{p} \to k(\mathfrak{p})$.

Agora, como $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$, então $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$. Em vista disso, podemos achar um $R_\mathfrak{p}$-homomorfismo injetivo $k(\mathfrak{p}) \to M_\mathfrak{p}$ (se $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = \operatorname{ann}_{R_\mathfrak{p}}(m/x)$, o homomorfismo requerido é definido de maneira que $1 \in k(\mathfrak{p})$ corresponda para m/x).

Note que a composta $N_\mathfrak{p} \to k(\mathfrak{p}) \to M_\mathfrak{p}$ é um $R_\mathfrak{p}$-homomorfismo não nulo. Assim, $0 \neq \operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(N_p, M_\mathfrak{p})$. Como $\operatorname{Hom}_R(N,M)_\mathfrak{p} \cong \operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(N_p, M_\mathfrak{p})$ (Corolário 1.4.8(2) e Proposição 1.4.4(2)), isto mostra que $\operatorname{Hom}(N,M)_\mathfrak{p} \neq 0$. Em consequência $\operatorname{Hom}_R(N,M) \neq 0$, contradizendo à hipótese.

□

Lema 2.1.5. Seja $x \in R$ um elemento R-regular. Se M é um $R/(x)$-módulo projetivo, então $\operatorname{pdim}_R(M) \leq 1$.

Demonstração. Como x é um elemento R-regular, a sequência

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{x} R \longrightarrow R/(x) \longrightarrow 0$$

é exata, donde $\operatorname{pdim}_R(R/(x)) \leq 1$. Como M é um $R/(x)$-módulo projetivo, pela Proposição 1.2.8, existe um $R/(x)$-módulo N tal que $M \oplus N \cong \bigoplus_{i \in I} R/(x)$ para algum conjunto de índices I. Assim, pelo Corolário 1.6.6,

$$\operatorname{pdim}_R(M) \leq \operatorname{pdim}_R(M \oplus N) = \operatorname{pdim}_R(\bigoplus_{i \in I} R/(x)) = \operatorname{pdim}_R(R/(x)) \leq 1.$$

□

Proposição 2.1.6. Seja M um R-módulo. Seja $x \in R$ um elemento R-regular e M-regular. Seja N um R-módulo tal que $xN = 0$. Então

$$\operatorname{Ext}^i_{R/(x)}(N, M/xM) \cong \operatorname{Ext}^{i+1}_R(N, M)$$

para todo $i \geq 0$.

Demonstração. Como $x \in R$ é um elemento M-regular, a sequência

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot x} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

é exata. De sua $\operatorname{Ext}_R(N, -)$-sequência exata longa associada, obtemos uma sequência exata

$$\operatorname{Hom}_R(N, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M/xM) \xrightarrow{\Delta_N} \operatorname{Ext}^1_R(N, M) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}^1_R(N, M) .$$

Como $xN = 0$, observe que $\operatorname{im}\big(\operatorname{Ext}^1_R(N, M) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}^1_R(N, M)\big) = 0$ e que, pela Proposição 2.1.4, $\operatorname{Hom}_R(N, M) = 0$. Portanto, $\operatorname{Hom}_R(N, M/xM) \cong \operatorname{Ext}^1_R(N, M)$ e deste modo temos o resultado para $i = 0$.

Mostremos agora o resultado quando $i = 1$. Pero Corolário 1.2.6, existe uma sequência exata de $R/(x)$-módulos

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow 0 \tag{2.2}$$

com L sendo um $R/(x)$-módulo projetivo. Pela Proposição 1.4.4(4), $\operatorname{Ext}^1_{R/(x)}(L, M/xM) = 0$. Pelo Lema 2.1.5 e pelo Teorema 1.6.4, $\operatorname{Ext}^2_R(L, M) = 0$.

Temos um diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{R/(x)}(L, M/xM) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_L"'] & \operatorname{Hom}_{R/(x)}(Q, M/xM) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_Q"'] & \operatorname{Ext}^1_{R/(x)}(N, M/xM) \arrow[r] & 0 , \\
\operatorname{Ext}^1_R(L, M) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_R(Q, M) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^2_R(N, M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde a primeira linha e segunda linha são correspondentes à $\operatorname{Ext}_{R/(x)}(-, M/xM)$-sequência exata longa e $\operatorname{Ext}_R(-, M)$-sequência exata longa associadas a (2.2) respectivamente.

Pela demonstração do caso $i = 0$, Δ_L e Δ_Q são isomorfismos. Assim, tal diagrama induz um isomorfismo $\operatorname{Ext}^1_{R/(x)}(N, M/xM) \cong \operatorname{Ext}^2_R(N, M)$. Deste modo, temos o resultado mostrado para $i = 1$.

Agora assumamos $i > 1$. Peguemos uma resolução projetiva $L_\bullet$ de R/xR-módulos de N, e seja $T = \operatorname{im}(L_i \to L_{i-1})$. Assim temos uma sequência exata de R/xR-módulos

$$0 \to T \to L_{i-2} \to \cdots \to L_0 \to N \to 0.$$

Pelo Lema 1.6.3, temos

$$\operatorname{Ext}^i_{R/(x)}(N, M/xM) \cong \operatorname{Ext}^1_{R/(x)}(T, M/xM).$$

Pelo caso $i = 1$ tratado acima, temos

$$\operatorname{Ext}^1_{R/(x)}(T, M/xM) \cong \operatorname{Ext}^2_R(T, M).$$

Pelo Lema 2.1.5, $\operatorname{pdim}_R(L_i) \leq 1$ para todo $i \geq 1$. Considerando a sequência exata acima como de R-módulos, pela Observação 1.6.7,

$$\operatorname{Ext}^2_R(T, M) \cong \operatorname{Ext}^{i+1}_R(N, M).$$

Dos últimos tres isomorfismos segue que $\operatorname{Ext}^i_R(N, M/xM) \cong \operatorname{Ext}^{i+1}_R(N, M)$. com isto concluímos a prova. $\square$

Sequências Regulares

Definição 2.1.7. Seja M um R-módulo. Dada uma sequência $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ de elementos de R, considere as seguintes condições:

(1) x_i é um elemento $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$-regular para todo $i = 1, \ldots, n$;

(2) $M/\boldsymbol{x}M \neq 0$.

Se (1) vale, dizemos que a sequência $\boldsymbol{x}$ é uma *sequência M-regular fraca*. Se (1) e (2) valem, dizemos que a sequência $\boldsymbol{x}$ é uma *sequência M-regular*. Uma *sequência regular* é uma sequência R-regular.

Observação 2.1.8. O item (1) equivale a cada uma das seguintes condições:

- Dados $i = 1, \ldots, n$ e $m \in M$,

$$x_i \cdot m \in (x_1, \ldots, x_{i-1})M \Rightarrow m \in (x_1, \ldots, x_{i-1})M;$$

- Para todo $i = 1,\dots,n$, $x_i : M/(x_1,\dots,x_{i-1})M \to M/(x_1,\dots,x_i)M$ a aplicação é injetiva.

Em relação ao item (2), ele vale, pelo Lema de Nakayama, quando R é local com ideal maximal $\mathfrak{m}$, $M \neq 0$ é finitamente gerado e $\boldsymbol{x} \subset \mathfrak{m}$.

Observação 2.1.9. Sejam I é um ideal próprio de R e $\pi : R \to R/I$ a projeção natural. Sejam M um R-módulo e $\boldsymbol{x} = x_1,\dots,x_n$ uma sequência de elementos de R. Suponha $I \subset \operatorname{ann}(M)$. Então:

(1) $\boldsymbol{x} \subset R$ é uma sequência M-regular fraca se, e somente se, $\pi(\boldsymbol{x}) \subset R/I$ é uma sequência M-regular fraca;

(2) $\boldsymbol{x} \subset R$ é uma sequência M-regular se, e somente se, $\pi(\boldsymbol{x}) \subset R/I$ é uma sequência M-regular.

Como exemplo clássico de sequências regulares temos o seguinte:

Exemplo 2.1.10. Sejam k um corpo e $R = k[X_1,\dots,X_n]$. Então, $X_1,\dots,X_n$ é uma sequência R-regular.

Proposição 2.1.11. Sejam M um R-módulo e $\boldsymbol{x} \subset R$ uma sequência M-regular fraca. Suponha que $\varphi : R \to S$ é um homomorfismo de anéis e que N é um S-módulo R-plano. Então, $\boldsymbol{x}$ e $\varphi(\boldsymbol{x}) \subset S$ são sequências $M \otimes_R N$-regulares fracas. Portanto, se $\boldsymbol{x}(M \otimes_R N) \neq M \otimes_R N$, então $\boldsymbol{x}$ e $\varphi(\boldsymbol{x})$ são $M \otimes_R N$-sequências regulares.

Demonstração. Escreva $\boldsymbol{x} = x_1,\dots,x_n$.

Vejamos primeiro que $\boldsymbol{x}$ é uma sequência $M \otimes_R N$-regular fraca. Dado $i = 1,\dots,n$, por definição, devemos mostrar que x_i é $\frac{M\otimes_R N}{(x_1,\dots,x_{i-1})(M\otimes_R N)}$-regular. Pelo Teorema A.1.33, temos

$$\frac{M \otimes_R N}{(x_1,\dots,x_{i-1})(M \otimes_R N)} \cong \frac{M}{(x_1,\dots,x_{i-1})M} \otimes_R N.$$

Deste modo, é suficiente mostrar que x_i é $\frac{M}{(x_1,\dots,x_{i-1})M} \otimes_R N$-regular. Como $\boldsymbol{x}$ é uma sequência M-regular fraca, então $(x_i)_{M/(x_1,\dots,x_{i-1})M} : M/(x_1,\dots,x_{i-1})M \to M/(x_1,\dots,x_{i-1})M$ é injetiva. Como N é plano, o R-homomorfismo $(x_i)_{M/(x_1,\dots,x_{i-1})M} \otimes_R \mathrm{Id}_N$ é injetivo. Note que $(x_i)_{M/(x_1,\dots,x_{i-1})\otimes_R N} = (x_i)_{M/(x_1,\dots,x_{i-1})M} \otimes_R \mathrm{Id}_N$. Assim $(x_i)_{M/(x_1,\dots,x_{i-1})\otimes_R N}$ é injetivo, e portanto x_i é $\frac{M}{(x_1,\dots,x_{i-1})M} \otimes_R N$-regular.

Vejamos agora que $\varphi(\boldsymbol{x}) \subset S$ é uma sequência $M \otimes_R N$-regular fraca. Dado $i = 1,\dots,n$, note que

$$(x_i)_{\frac{M\otimes_R N}{(x_1,\dots,x_{i-1})(M\otimes_R N)}} = (\varphi(x_i))_{\frac{M\otimes_R N}{(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_{i-1}))(M\otimes_R N)}}.$$

Como $\boldsymbol{x}$ é uma sequência $M \otimes_R N$-regular, a aplicação $(x_i)_{\frac{M\otimes_R N}{(x_1,\dots,x_{i-1})(M\otimes_R N)}}$ é injetiva. Assim, a igualdade anterior implica que $(\varphi(x_i))_{\frac{M\otimes_R N}{(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_{i-1}))(M\otimes_R N)}}$ é injetiva, donde $\varphi(x_i)$ é $\frac{M\otimes_R N}{(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_{i-1}))(M\otimes_R N)}$-regular. □

Corolário 2.1.12. Sejam R um anel Noetheriano, $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado e $\boldsymbol{x} \subset R$ uma sequência M-regular.

(1) Se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ e $\boldsymbol{x} \subset \mathfrak{p}$, então $\boldsymbol{x} \subset R_{\mathfrak{p}}$ é uma $M_{\mathfrak{p}}$-sequência regular.

(2) Suponha que R é local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e que $\boldsymbol{x} \subset \mathfrak{m}$. Então, $\boldsymbol{x} \subset \hat{R}$ é uma sequência $\hat{M}$-regular.

Demonstração. (1) Aplicando a Proposição 2.1.11 para a aplicação de localização $R \to R_{\mathfrak{p}}$, temos que $\boldsymbol{x} \subset R_{\mathfrak{p}}$ é uma sequência $R \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$-regular fraca. Assim, já que $R_{\mathfrak{p}} \cong R \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$ (Teorema A.1.33(2)), segue que $\boldsymbol{x} \subset R_{\mathfrak{p}}$ é uma sequência $R_{\mathfrak{p}}$-regular fraca. Como $\boldsymbol{x} \subset \mathfrak{p}$, então $\boldsymbol{x} \subset \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ e portanto, já que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$, segue da Observação 2.1.8, que a sequência $\boldsymbol{x} \subset R_{\mathfrak{p}}$ é uma sequência $M_{\mathfrak{p}}$-regular.

(2) Aplicando a Proposição 2.1.11 para o R-homomorfismo natural $R \to \hat{R}$, temos que $\boldsymbol{x} \subset \hat{R}$ é uma sequência $M \otimes_R \hat{R}$-regular fraca. Assim, o isomorfismo $\hat{M} \cong M \otimes_R \hat{R}$ (Teorema A.6.4(1)) indica que a sequência $\boldsymbol{x} \subset \hat{R}$ é uma sequência $\hat{M}$-regular fraca. Como $\boldsymbol{x}$ (visto em R) está contido em $\mathfrak{m}$, então $\boldsymbol{x} \subset \hat{R}$ está contido em $\mathfrak{m}\hat{R} = \hat{\mathfrak{m}}$; e portanto, pela Observação 2.1.8(2), a sequência $\boldsymbol{x} \subset \hat{R}$ é $\hat{R}$-regular.

□

Proposição 2.1.13. Seja R um anel, M um R-módulo e $\boldsymbol{x} \subset R$ uma M-sequencia regular fraca. Então, uma sequência exata

$$N_2 \xrightarrow{\varphi_2} N_1 \xrightarrow{\varphi_1} N_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

induz uma sequência exata

$$N_2/\boldsymbol{x}N_2 \xrightarrow{\overline{\varphi_2}} N_1/\boldsymbol{x}N_1 \xrightarrow{\overline{\varphi_1}} N_0/\boldsymbol{x}N_0 \xrightarrow{\overline{\varphi_0}} M/\boldsymbol{x}M \longrightarrow 0\,. \tag{2.4}$$

Demonstração. Dados um R-módulo N e ideais I, J de R, existe um isomorfismo natural $\frac{(N/IN)}{J(N/IN)} \cong N/(I+J)N$. Portanto, por indução, é suficiente mostrar para o caso em que $\boldsymbol{x}$ consista de um elemento $x \in R$.

Como $- \otimes_R R/(x)$ é exato a direita, a sequência

$$N_1 \otimes_R R/(x) \longrightarrow N_0 \otimes_R R/(x) \longrightarrow M \otimes_R R/(x) \longrightarrow 0$$

é exata. Então, pelo Teorema A.1.33(5), a sequência

$$N_1/xN_1 \xrightarrow{\overline{\varphi}_1} N_0/xN_0 \xrightarrow{\overline{\varphi}_0} M/xM \longrightarrow 0$$

é exata. Deste modo, para mostrar a exatidão de (2.4) resta ver que $\mathrm{im}(\overline{\varphi}_2) = \ker(\overline{\varphi_1})$. Por exatidão de (2.3), $\varphi_1 \circ \varphi_2 = 0$, donde $\overline{\varphi}_1 \circ \overline{\varphi}_2 = 0$; e portanto $\mathrm{im}(\overline{\varphi}_2) \subset \ker(\overline{\varphi}_1)$. Para a outra inclusão, seja $y \in N_1$ tal que $\overline{\varphi}_1(y + xN_1) = 0$. Então, $\varphi_1(y) \in xN_0$, donde $\varphi_1(y) = xz$ para algum $z \in N_0$. Portanto,

$$x\varphi_0(z) = \varphi_0(xz) = \varphi_0(\varphi_1(y)) = 0.$$

Como x é um elemento M-regular, segue que $z \in \ker(\varphi_0) = \operatorname{im}(\varphi_1)$. Assim, $z = \varphi_1(z_1)$ para algum $z_1 \in N_1$. Deste modo,

$$\varphi_1(y - xz_1) = \varphi_1(y) - x\varphi_1(z_1) = xz - xz = 0,$$

donde $y - xz_1 \in \ker(\varphi_1) = \operatorname{im}(\varphi_2)$. Portanto, $y - zx_1 = \varphi_2(z_2)$ com $z_2 \in N_2$. Daí $y - \varphi_2(z_2) = xz_1 \in xN_1$. Isto mostra que $y + xN_1 = \overline{\varphi}_2(z_2 + xN_2) \in \operatorname{im}(\overline{\varphi}_2)$. □

Proposição 2.1.14. Sejam R um anel e

$$N_\bullet : \cdots \longrightarrow N_m \xrightarrow{\varphi_m} N_{m-1} \xrightarrow{\varphi_{m-1}} \cdots \longrightarrow N_0 \xrightarrow{\varphi_0} N_{-1} \longrightarrow 0$$

um complexo exato de R-módulos . Se $\boldsymbol{x} \subset R$ é uma sequência N_i-regular fraca para todo i, então o complexo $N_\bullet \otimes_R R/\boldsymbol{x}R$ é também exato.

Demonstração. Por indução é suficiente mostrar para o caso em que $\boldsymbol{x}$ consista de um único elemento x. Pelo Teorema A.1.33(5), é suficiente mostrar que o complexo $N_\bullet/xN_\bullet$ é exato.

Dado $i \geq 0$, como x é N_{i-1}-regular e $\operatorname{im}(\varphi_i) \subset N_i$, então x é $\operatorname{im}(\varphi_i)$-regular. Por outro lado, da hipótese observe que

$$N_{i+2} \to N_{i+1} \to N_i \to \operatorname{im}(\varphi_i) \to 0$$

é exata. Pela proposição anterior,

$$N_{i+2}/xN_{i+2} \to N_{i+1}/xN_{i+1} \to N_i/xN_i \to \frac{\operatorname{im}(\varphi_i)}{x\operatorname{im}(\varphi_i)} \to 0$$

é exata. Assim, se $i = 0$, obtemos que a sequência

$$N_2/xN_2 \to N_1/xN_1 \to N_0/xN_0 \to N_{-1}/xN_{-1} \to 0$$

é exata; e se $i \geq 1$, obtemos que a sequência

$$N_{i+2}/xN_{i+2} \to N_{i+1}/xN_{i+1} \to N_i/xN_i$$

é exata. Portanto, o complexo $N_\bullet/xN_\bullet$ é exato. □

Como consequência desta proposição temos as duas seguintes proposições.

Proposição 2.1.15. Seja M um R-módulo. Seja $x \in R$ um elemento R-regular e M-regular. Seja N um R-módulo tal que $xN = 0$. Então,

$$\operatorname{Ext}^i_{R/(x)}(M/xM, N) \cong \operatorname{Ext}^i_R(M, N)$$

para todo $i \geq 0$.

Demonstração. Seja

$$F_\bullet : \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\alpha_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

uma resolução livre de M. Como cada F_i é livre e $x \in \mathfrak{m}$ é um elemento R-regular, então x é um elemento F_i-regular para todo i. Pela Proposição 2.1.14 e pelo Teorema A.1.33(5), a sequência

$$F_\bullet/xF_\bullet : \cdots \longrightarrow F_i/xF_i \xrightarrow{\tilde{\alpha}_i} F_{i-1}/xF_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1/xF_1 \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} F_0/xF_0 \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} M/xM \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de $R/(x)$-módulos. Como cada F_i é um R-módulo livre, note que F_i/xF_i é um $R/(x)$-módulo livre pois se $F_i \cong \bigoplus_{J_i} R$, então

$$\begin{aligned}
F_i/xF_i &\cong F_i \otimes_R R/(x) && \text{pelo Teorema A.1.33(5)}\\
&\cong \Big(\bigoplus_{J_i} R\Big) \otimes_R R/(x) &&\\
&\cong \bigoplus_{J_i} (R \otimes_R R/(x)) && \text{pelo Teorema A.1.33(4)}\\
&\cong \bigoplus_{J_i} (R/(x)) && \text{pelo Teorema A.1.33(2).}
\end{aligned}$$

Assim, $F_\bullet/xF_\bullet$ é uma $R/(x)$-resolução livre de M/xM. Agora,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}^i_{R/(x)}(M/xM, N) &= H^i(\operatorname{Hom}_{R/(x)}(F_{\bullet,M}/xF_{\bullet,M}, N))\\
&\cong H^i(\operatorname{Hom}_{R/(x)}(F_{\bullet,M} \otimes_R R/(x), N)) && \text{pelo Teorema A.1.33(5)}\\
&\cong H^i(\operatorname{Hom}_R(F_{\bullet,M}, N)) && \text{por Proposição A.1.37}\\
&\cong \operatorname{Ext}^i_R(M, N).
\end{aligned}$$

□

Corolário 2.1.16. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano. Seja M um R-módulo finitamente gerado e $x \in \mathfrak{m}$ um elemento R-regular e M-regular. Então,

$$\operatorname{pdim}_R(M) = \operatorname{pdim}_{R/(x)}(M/xM).$$

Demonstração. Segue do Corolário 1.6.12 e da Proposição 2.1.15. □

O seguinte exemplo mostra que a permutação de uma sequência M-regular não é necessariamente uma sequência M-regular.

Exemplo 2.1.17. Seja k um corpo e $R = k[X, Y, Z]$. Então, é fácil verificar que $X, Y(1-X), Z(1-X)$ é uma sequência R-regular. Porém, $Y(1-X), Z(1-X), X$ não é uma sequência R-regular. De fato, $Y \notin (Y(1-X))$ mas $YZ(1-X) \in (Y(1-X))$.

Proposição 2.1.18. Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e $\boldsymbol{x} = x_1,\ldots,x_n \subset \mathfrak{m}$ uma sequência M-regular. Então, toda permutação de $\boldsymbol{x}$ é uma sequência M-regular.

Demonstração. Como toda permutação é um produto de transposições de elementos adjacentes, é suficiente mostrar que $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},x_i,x_{i+2},\ldots,x_n$ é uma sequência M-regular. Como $\boldsymbol{x}$ é uma sequência M-regular, por definição é suficiente mostrar que x_{i+1} é um elemento $M/(x_1,\ldots,x_{i-1})M$-regular e x_i é um elemento $M/(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1})M$-regular; ou seja que se $\overline{M} = M/(x_1,\ldots,x_{i-1})M$, então x_{i+1} é um elemento $\overline{M}$-regular e x_i é um elemento $\overline{M}/x_{i+1}\overline{M}$-regular, isto é que x_{i+1},x_i é uma sequência $\overline{M}$-regular. Como x_i,x_{i+1} é uma sequência $\overline{M}$-regular (por ser $\boldsymbol{x}$ uma sequência M-regular), isto segue do seguinte lema. □

Lema 2.1.19. Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Se $x_1,x_2 \subset \mathfrak{m}$ é uma sequência M-regular, então x_2,x_1 é uma sequência M-regular.

Demonstração. Por definição devemos mostrar que x_2 é um elemento M-regular e que x_1 é um elemento M/xM-regular.

Vejamos primeiro que x_2 é um elemento M-regular. Seja $K = \ker(x_2 : M \to M)$. Afirmamos que $K = x_1K$. De fato, seja $z \in K$. Então $x_2z = 0$. Como x_2 é um elemento M/x_1M-regular, existe $z' \in M$ tal que $z = x_1z'$. Logo, $x_1(x_2z') = x_2z = 0$. Mas como x_1 é um elemento M-regular, segue que $x_2z' = 0$, e consequentemente $z' \in K$. Assim, a igualdade $z = x_1z'$ mostra que $z \in x_1K$, obtendo assim que $K = x_1K$. Do Lema de Nakayama, segue que $K = 0$, isto é $x_2 : M \to M$ é injetiva, ou seja x_2 é um elemento M-regular.

Agora mostremos que x_1 é um elemento M/x_2M-regular. Seja $z \in M$ tal que $x_1 \cdot z \in x_2M$. Então, existe $z' \in M$ tal que $x_1z = x_2z'$. Essa igualdade indica que $x_2z' \in x_1M$. Sendo x_2 um elemento M/x_1M-regular, segue que $z' \in x_1M$, isto é $z' = x_1z''$ para algum $z'' \in M$. Logo, $x_1z = x_2(x_1z'') = x_1(x_2z'')$; donde, por ser x_1 um elemento M-regular, $z = x_2z'' \in x_2M$. □

2.2 Grau e Profundidade

Definição 2.2.1. Seja M um R-módulo. Uma sequência M-regular $\boldsymbol{x} = x_1,\ldots,x_n$ (contida em um ideal I de R) é *maximal* (em I) se $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}$ não é uma sequência M-regular para todo $x_{n+1} \in I$.

Observação 2.2.2. Se R é um anel Noetheriano, I un ideal de R e M um R-módulo finitamente gerado, então toda sequência M-regular em I pode-se estender a uma sequência M-regular maximal em I.

Lema 2.2.3. Sejam R um anel, M,N dois R-módulos e $\boldsymbol{x} = x_1,\ldots,x_n$ uma sequência M-regular fraca em $\operatorname{ann}(N)$. Então,

$$\operatorname{Hom}_R(N, M/\boldsymbol{x}M) \cong \operatorname{Ext}^n_R(N,M).$$

Demonstração. Faremos a prova por indução. Se $n = 0$, o resultado vale pela Proposição 1.4.4(2).

Suponha agora $n \geq 1$. Ponha $\boldsymbol{x}' = x_1, \ldots, x_{n-1}$. Por indução,

$$\mathrm{Hom}_R(N, M/\boldsymbol{x}'M) \cong \mathrm{Ext}_R^{n-1}(N, M).$$

Como $\boldsymbol{x}$ é uma sequência M-regular fraca em $\mathrm{ann}(N)$, então $x_n \in \mathrm{ann}(N)$ é um elemento $M/\boldsymbol{x}'M$-regular. Pela Proposição 2.1.4(1), $\mathrm{Hom}_R(N, M/\boldsymbol{x}'M) = 0$; de modo que, pelo isomorfismo acima, $\mathrm{Ext}_R^{n-1}(N, M) = 0$. Assim, da $\mathrm{Ext}(N, -)$-sequência exata longa associada à sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x_1} M \longrightarrow M/x_1M \longrightarrow 0$$

temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n-1}(N, M/x_1M) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Ext}_R^n(N, M) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Ext}_R^n(N, M) ,$$

onde $\varphi = \mathrm{Ext}_R^n(N, x_1)$. Como $x_1 \in \mathrm{ann}(N)$, note que $\varphi = 0$. Logo, por exatidão da sequência acima, ψ é um isomorfismo. Deste modo,

$$\mathrm{Ext}_R^{n-1}(N, M/x_1M) \cong \mathrm{Ext}_R^n(N, M).$$

Por outro lado, como $\boldsymbol{x}$ é uma M-sequência regular fraca em $\mathrm{ann}(N)$, então $x_2, \ldots, x_n$ é uma sequência M/x_1M-regular fraca em $\mathrm{ann}(N)$. Logo, por indução,

$$\mathrm{Ext}_R^{n-1}(N, M/x_1M) \cong \mathrm{Hom}_R(N, M/\boldsymbol{x}M).$$

Dos dois últimos isomorfismos segue que

$$\mathrm{Hom}_R(N, M/\boldsymbol{x}M) \cong \mathrm{Ext}_R^n(N, M).$$

□

Teorema 2.2.4 (Rees)**.** Sejam R um anel Noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e I um ideal tal que $IM \neq M$. Então, todas as sequência M- regulares maximais em I tem o mesmo comprimento n dado por

$$n = \min\{i : \mathrm{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0\}.$$

Demonstração. Seja $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma sequência M-regular maximal em I. Então, para $i = 1, \ldots, n$, temos que $x_i \in I$ é um elemento $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$-regular. Assim, pelo Lema 2.2.3 e pela Proposição 2.1.4(1),

$$\mathrm{Ext}_R^{i-1}(R/I, M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M) = 0, \forall\, i = 1, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Por outro lado, novamente pelo Lema 2.2.3, $\mathrm{Ext}_R^n(R/I, M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, M/\boldsymbol{x}M)$. Como I não contém elementos $M/\boldsymbol{x}M$-regulares (por maximalidade da M-regularidade de $\boldsymbol{x}$ em I), então, pela Proposição 2.1.4(2), $\mathrm{Hom}_R(R/I, M/\boldsymbol{x}M) \neq 0$. Assim,

$$\mathrm{Ext}_R^n(R/I, M) \neq 0. \tag{2.6}$$

De (2.5) e (2.6), segue que $n = \min\{i : \mathrm{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0\}$. □

Definição 2.2.5. Sejam R um anel Noetheriano, I um ideal de R e M um R-módulo finitamente gerado. Se $IM \neq M$, então o comprimento comum de todas sequências M- regulares maximais em I é chamado o *grau* de I sobre M e denotado por $\operatorname{grau}(I,M)$. No caso $IM = M$, definimos $\operatorname{grade}(I,M) = \infty$.

Observação 2.2.6. No contexto de acima, podemos definir também o grau de I sobre M por

$$\operatorname{grade}(I,M) = \inf\{i : \operatorname{Ext}^i_R(R/I,M) \neq 0\}.$$

Isso fica claro, pelo Teorema de Rees, no caso $IM \neq M$. No caso $IM = M$, é suficiente que mostrar que $\operatorname{Ext}^i_R(R/I,M) = 0$ para todo $i \geq 0$. Para isso, vamos mostrar que $\operatorname{Ext}^i_R(R/I,M)_\mathfrak{p} = 0$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R. Com efeito, suponha por absurdo que $\operatorname{Ext}^i_R(R/I,M)_\mathfrak{p} \neq 0$. Então, pelo isomorfismo $\operatorname{Ext}^i_R(R/I,M)_\mathfrak{p} \cong \operatorname{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}((R/I)_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p})$ (Corolário 1.4.8(2)), temos que $\operatorname{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}((R/I)_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}) \neq 0$. Daí note que $M_\mathfrak{p} \neq 0$ e que $(R/I)_\mathfrak{p} \neq 0$. Agora, o fato de que $(R/I)_\mathfrak{p} \neq 0$ indica que $\mathfrak{p} \supset I$ (pois $\operatorname{supp}(R/I) = V(I)$ pela Proposição A.1.54); donde $I_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. Como $IM = M$, então $I_\mathfrak{p}M_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}$. Pelo Lema de Nakayama, $M_\mathfrak{p} = 0$, o que contradiz claramente ao fato de que $M_\mathfrak{p} \neq 0$.

Definição 2.2.7. Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Definimos a *profundidade* de M, denotada por $\operatorname{depth}(M)$, como sendo o grau de $\mathfrak{m}$ sobre M.

Teorema 2.2.8. Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local Noetheriano e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. Então,

$$\operatorname{depth}(M) = \min\{i : \operatorname{Ext}^i_R(k,M) \neq 0\}.$$

Demonstração. Imediato do Teorema 2.2.4. □

Proposição 2.2.9. Sejam R um anel Noetheriano, $I \subset R$ um ideal de R e

$$0 \to U \to M \to N \to 0$$

uma sequência exata de R-módulos finitamente gerados. Então:

(1) $\operatorname{grade}(I,M) \geq \min\{\operatorname{grade}(I,U), \operatorname{grade}(I,N)\}$;

(2) $\operatorname{grade}(I,U) \geq \min\{\operatorname{grade}(I,M), \operatorname{grade}(I,N)+1\}$;

(3) $\operatorname{grade}(I,N) \geq \min\{\operatorname{grade}(I,U)-1, \operatorname{grade}(I,M)\}$.

Demonstração. A sequência exata curta $0 \to U \to M \to N \to 0$ induz uma sequência exata longa

$$\cdots \to \operatorname{Ext}^{i-1}_R(R/I,N) \to \operatorname{Ext}^i_R(R/I,U) \to \operatorname{Ext}^i_R(R/I,M) \to \operatorname{Ext}^i_R(R/I,N) \to \operatorname{Ext}^i_R(R/I,U) \to \cdots. \tag{2.7}$$

(1) Ponha $l = \operatorname{grade}(I,M)$ e suponha, pelo absurdo, que $l < \min\{\operatorname{grade}(I,U), \operatorname{grade}(I,N)\}$. Então, $l < \operatorname{grade}(I,U)$ e $l < \operatorname{grade}(I,N)$. Logo, pela Observação 2.2.6, $\operatorname{Ext}_R^l(R/I,U) = \operatorname{Ext}_R^l(R/I,N) = 0$. Segue, da exatidão de (2.7), que $\operatorname{Ext}_R^l(R/I,M) = 0$, donde pela Observação 2.2.6, $l \neq \operatorname{grade}(I,U)$, uma contradição.

(2) Ponha $l = \operatorname{grade}(I,U)$ e suponha, pelo absurdo, que $l < \min\{\operatorname{grade}(I,M), \operatorname{grade}(I,N)+1\}$. Então, $l < \operatorname{grade}(I,M)$ e $l < \operatorname{grade}(I,N)+1$. Logo, pela Observação 2.2.6, $\operatorname{Ext}_R^l(R/I,M) = \operatorname{Ext}_R^{l-1}(R/I,N) = 0$. Segue da exatidão de (2.7), que $\operatorname{Ext}_R^l(R/I,U) = 0$, donde pela Observação 2.2.6, $l \neq \operatorname{grade}(I,U)$, uma contradição.

(3) Ponha $l = \operatorname{grade}(I,N)$ e suponha, pelo absurdo, que $l < \min\{\operatorname{grade}(I,U)-1, \operatorname{grade}(I,M)\}$. Então, $l < \operatorname{grade}(I,U)-1$ e $l < \operatorname{grade}(I,M)$. Logo, pela Observação 2.2.6, $\operatorname{Ext}_R^{l+1}(R/I,U) = \operatorname{Ext}_R^l(R/I,N) = 0$. Segue da exatidão de (2.7), que $\operatorname{Ext}_R^l(R/I,N) = 0$, donde pela Observação 2.2.6, $l \neq \operatorname{grade}(I,U)$, uma contradição.

□

Proposição 2.2.10. Sejam R um anel Noetheriano, I e J ideais de R e M um R-módulo finitamente gerado. Então:

(1) $\operatorname{grade}(I,M) = \inf\{\operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}) : \mathfrak{p} \in V(I)\}$;

(2) $\operatorname{grade}(I,M) = \operatorname{grade}(\sqrt{I},M)$;

(3) $\operatorname{grade}(I \cap J,M) = \min\{\operatorname{grade}(I,M), \operatorname{grade}(J,M)\}$;

(4) Se $\boldsymbol{x} = x_1,\dots,x_n$ é uma sequência M-regular em I, então

$$\operatorname{grade}(I,M/\boldsymbol{x}M) = \operatorname{grade}(I/\boldsymbol{x}I, M/\boldsymbol{x}M) = \operatorname{grade}(I,M) - n;$$

(5) Se N é um R-módulo finitamente gerado com $\operatorname{Supp}(N) = V(I)$, então

$$\operatorname{grade}(I,M) = \inf\{i : \operatorname{Ext}_R^i(N,M) \neq 0\}.$$

Demonstração. (1) Mostremos primeiro para o caso $IM = M$. Neste caso, $\operatorname{grade}(I,M) = \infty$. Dado $\mathfrak{p} \in V(I)$, como $IM = M$, pelo Lema de Nakayama, $M_{\mathfrak{p}} = 0$. Deste modo, é claro que $\operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}) = \infty$ para todo $\mathfrak{p} \in V(I)$. Portanto, é claro que $\operatorname{grade}(I,M) = \infty = \inf\{\operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}) : \mathfrak{p} \in V(I)\}$.

Agora passemos ao caso $IM \neq M$. Dado $\mathfrak{p} \in V(I)$, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{grade}(I,M) &\leq \operatorname{grade}(\mathfrak{p},M) && \text{por definição}\\
&\leq \operatorname{grade}(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}},M_{\mathfrak{p}}) && \text{pela Proposição 2.1.12(1)}\\
&= \operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}),
\end{aligned}$$

donde $\operatorname{grade}(I,M) \leq \operatorname{depth}(M_\mathfrak{p})$ para todo $\mathfrak{p} \in V(I)$. Assim, para mostrar a igualdade requerida, é suficiente mostrar que $\operatorname{grade}(I,M) = \operatorname{depth}(M_\mathfrak{p})$ para algum $\mathfrak{p} \in V(I)$. Seja $\boldsymbol{x}$ uma sequência M-regular maximal em I. Então, I consiste de divisores de zero de $M/\boldsymbol{x}M$ (por maximalidade). Logo, pela Proposição 2.1.3, $I \subset \mathfrak{p}$ para algum ideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M/\boldsymbol{x}M)$. Então, $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M_\mathfrak{p}/\boldsymbol{x}M_\mathfrak{p})$. Deste modo, a Proposição 2.1.3, indica que $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \subset R_\mathfrak{p}$ consiste de divisores de zero de $M_\mathfrak{p}/\boldsymbol{x}M_\mathfrak{p}$. Portanto, $\boldsymbol{x}$ (visto em $R_\mathfrak{p}$) é uma sequência $M_\mathfrak{p}$-regular maximal. Isto mostra que $\operatorname{grade}(I,M) = \operatorname{depth}(M_\mathfrak{p})$.

(2) De (1) porque $V(\sqrt{I}) = V(I)$.

(3) Temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{grade}(I \cap J, M) &= \inf\{\operatorname{depth}(M_\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in V(I \cap J)\} \\
&= \inf\{\operatorname{depth}(M_\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in V(I) \text{ ou } \mathfrak{p} \in V(J)\} \\
&= \min\{\inf\{\operatorname{depth}(M_\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in V(I)\}, \inf\{\operatorname{depth}(M_\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in V(J)\}\} \\
&= \min\{\operatorname{grade}(I,M), \operatorname{grade}(J,M)\}.
\end{aligned}$$

(4) Pela Observação 2.1.9, $\operatorname{grade}(I, M/\boldsymbol{x}M) = \operatorname{grade}(I/\boldsymbol{x}I, M/\boldsymbol{x}M)$. Mostremos que $\operatorname{grade}(I, M/\boldsymbol{x}M) = \operatorname{grade}(I,N) - n$. Seja $\boldsymbol{y}$ uma sequência $M/\boldsymbol{x}M$-regular maximal em I. Como $\boldsymbol{x}$ é uma sequência M-regular em I, então $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ é uma sequência M-regular maximal em I. Isto mostra que $\operatorname{grade}(I,M) = \operatorname{grade}(I, M/\boldsymbol{x}M) + n$, donde $\operatorname{grade}(I, M/\boldsymbol{x}M) = \operatorname{grade}(I,N) - n$.

(5) Como $V(I) = \operatorname{Supp}(N)$ e $\operatorname{Supp}(N) = V(\operatorname{ann}(N))$, então $\sqrt{I} = \sqrt{\operatorname{ann}(N)}$. Desta maneira, item (2) nos diz que podemos supor $I = \operatorname{ann}(N)$.

Se $IM \neq M$, podemos repetir a prova do Teorema 2.2.4 com N em lugar de I.

Se $IM = M$, podemos repetir o argumento feito na Observação 2.2.6.

□

Definição 2.2.11. Seja R um anel Noetheriano.

(1) Se M é um R-módulo finitamente gerado, definimos o *grau* de M por

$$\operatorname{grade}(M) := \min\{i : \operatorname{Ext}_R^i(M,R) \neq 0\}.$$

(2) Se I é um ideal de R, definimos o *grau* de I por

$$\operatorname{grade}(I) := \operatorname{grade}(I,R).$$

Em vista da definição acima, note que temos duas maneiras de interpretar o grau de um ideal; uma no sentido do item (1) (com $M = I$) e outra como no sentido do item (2). No que segue quando nos referimos ao grau de um ideal sempre será no segundo sentido.

Lema 2.2.12. Se $M \neq 0$ é um R-módulo M finitamente gerado e I é um ideal de R, então

$$\sqrt{\operatorname{ann}(M/IM)} = \sqrt{I + \operatorname{ann}(M)}.$$

Demonstração. Pela Proposição A.1.7,

$$\sqrt{\operatorname{ann}(M/IM)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\operatorname{ann}(M/IM))} \mathfrak{p} \quad \text{e} \quad \sqrt{I + \operatorname{ann}(M)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I + \operatorname{ann}(M))} \mathfrak{p}.$$

Assim, é suficiente mostrar que $V(\operatorname{ann}(M/IM)) = V(I + \operatorname{ann}(M))$.

A inclusão $V(\operatorname{ann}(M/IM)) \subset V(I + \operatorname{ann}(M))$ segue observando que $I + \operatorname{ann}(M) \subset \operatorname{ann}(M/IM)$.

Para a outra inclusão, seja $\mathfrak{p} \in V(I + \operatorname{ann}(M))$. Então, $\mathfrak{p} \in V(I)$ e $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{ann}(M)) = \operatorname{supp}(M)$. Assim, pelo Lema de Nakayama, $M_{\mathfrak{p}} \neq I_{\mathfrak{p}} M_{\mathfrak{p}}$, donde $\mathfrak{p} \in \operatorname{supp}(M/IM) = V(\operatorname{ann}(M/IM))$.

□

Proposição 2.2.13. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. Se $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n \subset \mathfrak{m}$ é um sequência M-regular, então:

(1) $\operatorname{depth}(M/\boldsymbol{x}M) = \operatorname{depth}(M) - n$;

(2) $\dim(M/\boldsymbol{x}M) = \dim(M) - n$.

Demonstração. (1) É imediato do item (4) da Proposição 2.2.10.

(2) Pela Proposição A.5.5, é suficiente mostrar que $\dim(M/\boldsymbol{x}M) \leq \dim(M) - n$. Por indução é suficiente mostrar esta desigualdade para o caso $n = 1$, isto é, se $x \in \mathfrak{m}$ é um elemento M-regular, então $\dim(M/xM) \leq \dim(M) - 1$. Basta mostrar que $\dim(M/xM) < \dim(M)$. É claro que $\operatorname{supp}(M/xM) \subset \operatorname{supp}(M)$, donde, pela Proposição A.2.17, $\dim(M/xM) \leq \dim(M)$. Assim, só devemos mostrar que $\dim(M/xM) \neq \dim(M)$. Por absurdo, suponha $\dim(M/xM) = \dim(M)$ e seja d esse valor comum. Então, pela Proposição A.2.17, existem uma cadeia estritamente crescente

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_d$$

com $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{supp}(M/xM)$. Note que $\mathfrak{p}_0$ deve ser um primo minimal em $\operatorname{supp}(M/xM)$ e em $\operatorname{supp}(M)$ (pois $d = \dim(M/xM) = \dim(M)$). Pelo Teorema A.2.9, $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Ass}(M)$. Deste modo, pela Proposição 2.1.3, $\mathfrak{p}_0 \subset \operatorname{ZD}(M)$. Esta inclusão indica que $x \notin \mathfrak{p}_0$ desde que x é um elemento M-regular. Mas, por outro lado, como $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{supp}(M/xM) = V(\operatorname{ann}(M/xM))$, então $\mathfrak{p}_0 \supset \operatorname{ann}(M/xM)$, donde $x \in \mathfrak{p}_0$. Isto é uma contradição.

□

Corolário 2.2.14. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. Então, $\operatorname{depth}(M) \leq \dim(M)$.

Demonstração. Seja $n = \operatorname{depth}(M)$. Se $n = 0$, o resultado é obvio. Suponha agora $n \neq 0$. Então, existe uma sequência M-regular maximal $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_n \subset \mathfrak{m}$. Pela Proposição anterior, $0 \leq \dim(M/\boldsymbol{x}M) = \dim(M) - n$. Daí, note que $n \leq \dim(M)$. □

Proposição 2.2.15. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. Então, $\operatorname{depth}(M) \leq \dim(R/\mathfrak{p})$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$.

Demonstração. A prova é por indução sobre $\operatorname{depth}(M)$. Se $\operatorname{depth}(M)$=0, o resultado é claro.

Suponha agora $\operatorname{depth}(M) > 0$. Então, existe um elemento $x \in \mathfrak{m}$ que é um elemento M-regular. Sejam $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ e $m \in M$ tal que $\mathfrak{p} = \operatorname{ann}(m)$.

Seja
$$\mathscr{C} = \{\langle z \rangle : z \in M \text{ e } \mathfrak{p}z = 0\}.$$

Note que $\langle m \rangle \in \mathscr{C}$; assim que $\mathscr{C}$ é não vazio. Como M é Noetheriano (Proposição A.2.5(2)), $\mathscr{C}$ tem um elemento maximal, digamos $\langle z \rangle \in \mathscr{C}$ com $z \in M$. Note $z \neq 0$ (se $z = 0$, então $\langle z \rangle \subsetneq \langle m \rangle$, o que contradiz à maximalidade de $\langle z \rangle$).

Temos que $z \notin xM$. De fato, por absurdo, suponha que $z \in xM$. Então $z = xm'$ para algum $m' \in M$, e portanto $\langle z \rangle \subsetneq \langle m' \rangle$ (onde a inclusão é estrita pois caso contrario, teria-se $\langle z \rangle = y\langle z \rangle$ com $y \in \mathfrak{m}$, donde, pelo Lema de Nakayama, $z = 0$, o que não acontece) e $\mathfrak{p}m' = 0$ (pois $\mathfrak{p}z = 0$ e x é um elemento M-regular). Deste modo, temos uma contradição à maximalidade de $\langle z \rangle$.

Como $\mathfrak{p}z = 0$ e $z \notin xM$, note que $\mathfrak{p} \subset \operatorname{ZD}(M/xM)$. Então, pela Proposição 2.1.3, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ para algum $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(M/xM)$.

Agora, como x é um elemento M-regular e $m \neq 0$, note que $x \notin \operatorname{ann}(m) = \mathfrak{p}$, donde $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp}(M/xM)$ desde que, pela Proposição A.1.54 e pelo Lema 2.2.12, $\operatorname{Supp}(M/xM) = V(\operatorname{ann}(M/xM)) = V(\operatorname{ann}(x + \operatorname{ann}(M)) \subset V(x))$. Portanto, pela inclusão $\operatorname{Ass}(M/xM) \subset \operatorname{Supp}(M/xM)$ (Proposição A.2.9), $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Ass}(M/xM)$. Desta maneira, $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$, donde $\dim(R/\mathfrak{q}) < \dim(R/\mathfrak{p})$.

Pela Proposição 2.2.13(2), $\operatorname{depth}(M/xM) = \operatorname{depth}(M) - 1$, donde, por indução, depth $(M/xM) \leq \dim(R/\mathfrak{q})$. Temos

$$\operatorname{depth}(M) - 1 = \operatorname{depth}(M/xM) \leq \dim(M/xM) \leq \dim(R/\mathfrak{q}) < \dim(R/\mathfrak{p}),$$

donde resulta $\operatorname{depth}(M) \leq \dim(R/\mathfrak{p})$. □

Proposição 2.2.16. Sejam R um anel Noetheriano e $I \subset R$ um ideal. Então,

$$\operatorname{grade}(I) \leq \operatorname{ht}(I).$$

Demonstração. Pela Proposição 2.2.10(1),

$$\operatorname{grade}(I) = \inf\{\operatorname{depth}(R_{\mathfrak{p}}) : \mathfrak{p} \in V(I)\}.$$

Sabemos que

$$\mathrm{ht}(I) = \inf\{\dim(R_{\mathfrak{p}}) : \mathfrak{p} \in V(I)\}.$$

Deste modo, como $\mathrm{depth}(R_{\mathfrak{p}}) \leq \dim(R_{\mathfrak{p}})$ para todo $\mathfrak{p} \in V(I)$ (pelo Corolário 2.2.14), segue que $\mathrm{grade}(I) \leq \mathrm{ht}(I)$. $\square$

Definição 2.2.17. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado de profundidade t. O número

$$r(M) := \dim_k(\mathrm{Ext}^t_R(k, M))$$

é chamado o *tipo* de M.

Proposição 2.2.18. Seja $\varphi : (R, \mathfrak{m}, k) \to (S, \mathfrak{n}, l)$ um R-homomorfismo local de anéis Noetherianos. Suponha que M é um R-módulo finitamente gerado e N é um S-módulo finitamente gerado que é plano como R-módulo. Então:

(1) $\mathrm{depth}_S(M \otimes_R N) = \mathrm{depth}_R(M) + \mathrm{depth}_S(N/\mathfrak{m}N)$;

(2) $r_S(M \otimes_R N) = r_R(M) \cdot r_S(N/\mathfrak{m}M)$.

Para a prova da proposição acima precisamos do seguinte lema.

Lema 2.2.19. Com as hipóteses da proposição anterior vale que:

(1) $\dim_l(\mathrm{Hom}_S(l, M \otimes_R N) = \dim_k(\mathrm{Hom}_R(k, M)) \cdot \dim_l(\mathrm{Hom}_S(l, N/\mathfrak{m}N))$;

(2) Se $\boldsymbol{y} \subset S$ é uma sequência $N/\mathfrak{m}N$-regular, então $\boldsymbol{y}$ é uma sequência $M \otimes_R N$-regular, e $N/\boldsymbol{y}N$ é plano sobre R.

Demonstração. (1) Temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_S(l, \mathrm{Hom}_S(S/\mathfrak{m}S, M \otimes_R N) &\cong \mathrm{Hom}_S(l \otimes_S S/\mathfrak{m}S, M \otimes_R N) && \text{pelo Teorema A.1.33(6)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_S(l, M \otimes_R N) && \text{pelo Teorema A.1.33(5),} \end{aligned}$$

donde

$$\mathrm{Hom}_S(l, \mathrm{Hom}_S(S/\mathfrak{m}S, M \otimes_R N) \cong \mathrm{Hom}_S(l, M \otimes_R N). \tag{2.8}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_S(S/\mathfrak{m}S, M \otimes_R N) &\cong \mathrm{Hom}_S(k \otimes_R S, M \otimes_R N) && \text{pelo Teorema A.1.33(5)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_R(k, M \otimes_R N) && \text{pela Proposição A.1.37} \\ &\cong \mathrm{Hom}_R(k, M) \otimes_R N, && \text{pela Proposição A.1.43} \end{aligned}$$

donde,

$$\mathrm{Hom}_S(S/\mathfrak{m}S, M \otimes_R N) \cong \mathrm{Hom}_R(k, M) \otimes_R N. \tag{2.9}$$

Seja $r = \dim_k(\mathrm{Hom}_R(k,M)) < \infty$. É claro que

$$\mathrm{Hom}_R(k,M) \cong k^r. \tag{2.10}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_S(l, M\otimes_R N) &\cong \mathrm{Hom}_S(l, \mathrm{Hom}_S(S/\mathfrak{m}S, M\otimes_R N)) && \text{pelo isomorfismo (2.8)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_S(l, \mathrm{Hom}_R(k,M)\otimes_R N) && \text{pelo isomorfismo (2.9)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_S(l, k^r\otimes_R N) && \text{pelo isomorfismo (2.10)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_S(l, (k\otimes_R N)^r) && \text{pelo Teorema A.1.33(4)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_S(l, (N/\mathfrak{m}N)^r) && \text{pelo Teorema A.1.33(5)}\\
&\cong \big(\mathrm{Hom}_S(l, N/\mathfrak{m}N)\big)^r && \text{pela Proposição A.1.30(1) ,}
\end{aligned}$$

donde $\dim_l(\mathrm{Hom}_S(l, M\otimes_R N)) = r\cdot \dim_l(\mathrm{Hom}_S(l, N/\mathfrak{m}N))$.

(2) Por indução, podemos supor $\boldsymbol{y} = y$.

Vejamos primeiro que $y \in S$ é um elemento $M\otimes_R N$-regular. Dado $z \in M\otimes_R N$ tal que $y\cdot z = 0$, devemos mostrar que $z = 0$.

Pelo absurdo, suponha $z \neq 0$. Como $\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i(M\otimes_R N) = 0$ (Corolário A.3.3), existe $i \geq 0$ tal que $z \in \mathfrak{m}^i(M\otimes_R N) - \mathfrak{m}^{i+1}(M\otimes_R N)$. Deste modo, já que $yz = 0$, note que $y \in S$ não é $\mathfrak{m}^i(M\otimes_R N)/\mathfrak{m}^{i+1}(M\otimes_R N)$-regular.

Vamos concluir agora que $y \in S$ é $\mathfrak{m}^i(M\otimes_R N)/\mathfrak{m}^{i+1}(M\otimes_R N)$-regular para uma contradição. De fato, temos a seguinte cadeia de isomorfismos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{m}^i(M\otimes_R N)}{\mathfrak{m}^{i+1}(M\otimes_R N)} &\cong \frac{\mathfrak{m}^i M}{\mathfrak{m}^{i+1} M}\otimes_R N && \text{porque } N \text{ é um } R\text{-módulo plano}\\
&\cong k^t\otimes_R N && \text{por definição de } t\\
&\cong (k\otimes_R N)^t && \text{pelo Teorema A.1.33(4)}\\
&\cong (N/\mathfrak{m}N)^t && \text{pelo Teorema A.1.33(5)}
\end{aligned}$$

onde $t = \dim_k(\mathfrak{m}^i M/\mathfrak{m}^{i+1} M)$. Agora, como y é um elemento $N/\mathfrak{m}N$-regular, então y é um elemento $(N/\mathfrak{m}N)^t$-regular; donde pela cadeia acima de isomorfismos, resulta que y é $\mathfrak{m}^i(M\otimes_R N)/\mathfrak{m}^{i+1}(M\otimes_R N)$-regular.

Vejamos agora que N/yN é plano sobre R. Seja

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

uma sequência exata curta de R-módulos finitamente gerados. Pelo recentemente mostrado acima, y é um elemento $M_3\otimes_R N$-regular. Então, pela Proposição 2.1.13,

$$0 \to \frac{M_1\otimes_R N}{y(M_1\otimes_R N)} \to \frac{M_2\otimes_R N}{y(M_2\otimes_R N)} \to \frac{M_3\otimes_R N}{y(M_3\otimes_R N)} \to 0$$

é exata. Do Teorema A.1.33(5), segue que

$$0 \to M_1 \otimes_R N/yN \to M_2 \otimes_R N/yN \to M_3 \otimes_R N/yN$$

é exata. Pelo Corolário A.1.39, N/yN é um R-módulo plano.

$\square$

Demonstração da Proposição 2.2.18. Ponha $m = \operatorname{depth}(M)$ e $n = \operatorname{depth}_S(N/\mathfrak{m}N)$. Então, existe uma sequência M-regular $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_m$ maximal em $\mathfrak{m}$ e existe uma sequência $N/\mathfrak{m}N$-regular $\boldsymbol{y} = y_1, \dots, y_n$ maximal em $\mathfrak{n}$.

Pelo Lema 2.1.11, $\varphi(\boldsymbol{x}) \subset \mathfrak{n}$ é uma sequência $M \otimes_R N$-regular. Além disso, $\boldsymbol{y}$ é uma sequência $\dfrac{M \otimes_R N}{\varphi(\boldsymbol{x})(M \otimes_R N)}$-regular desde que

- $\dfrac{M \otimes_R N}{\varphi(\boldsymbol{x})(M \otimes_R N)} = \dfrac{M \otimes_R N}{\boldsymbol{x}(M \otimes_R N)} \cong \dfrac{M}{\boldsymbol{x}M} \otimes_R N \cong \overline{M} \otimes_R N$, onde $\overline{M} := M/\boldsymbol{x}M$, e
- $\boldsymbol{y}$ é uma sequência $\overline{M} \otimes_R N$-regular (pelo item (2) do lema acima).

Portanto, a sequência $\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \subset S$ é uma sequência $M \otimes_R N$-regular em $\mathfrak{n}$. Note que ela tem comprimento $m+n$, e portanto $m+n \leq \operatorname{depth}_S(M \otimes_R N)$.

Pelo Lema 2.2.3, temos os seguintes isomorfismos

$$\operatorname{Ext}_R^m(k, M) \cong \operatorname{Hom}_R(k, \overline{M}), \tag{2.11}$$

$$\operatorname{Ext}_S^n(l, N/\mathfrak{m}N) \cong \operatorname{Hom}_S\left(l, \frac{N/\mathfrak{m}N}{\boldsymbol{y}(N/\mathfrak{m}N)}\right) \cong \operatorname{Hom}_S\left(l, \frac{N'}{\mathfrak{m}N'}\right), \text{ e} \tag{2.12}$$

$$\operatorname{Ext}_S^{m+n}(l, M \otimes_R N) \cong \operatorname{Hom}_S\left(l, \frac{M \otimes_R N}{(\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})(M \otimes_R N)}\right) \cong \operatorname{Hom}_S\left(l, \overline{M} \otimes_R N'\right) \tag{2.13}$$

onde $N' = N/\boldsymbol{y}N$.

Agora,

$$\begin{aligned}
\dim_l(\operatorname{Ext}_S^{m+n}(l, M \otimes_R N)) &= \dim_l(\operatorname{Hom}_S(l, \overline{M} \otimes_R N')) && \text{por (2.13)}\\
&= \dim_k(\operatorname{Hom}_R(k, \overline{M})) \cdot \dim_l(\operatorname{Hom}_S(l, N'/\mathfrak{m}N')) && \text{pelo Lema 2.2.19(1)}\\
&= \dim_k(\operatorname{Ext}_R^m(k, M)) \cdot \dim_l(\operatorname{Ext}_R^n(l, N/\mathfrak{m}N)) && \text{por (2.11) e (2.12).}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\dim_l(\operatorname{Ext}_S^{m+n}(l, M \otimes_R N)) = \dim_k(\operatorname{Ext}_R^m(k, M)) \cdot \dim_l(\operatorname{Ext}_R^n(l, N/\mathfrak{m}N)). \tag{2.14}$$

Pelo Teorema 2.2.8, $\operatorname{Ext}_R^m(k, M) \neq 0$ e $\operatorname{Ext}_R^n(l, N/\mathfrak{m}N)) \neq 0$. Assim, de (2.14), note que $\operatorname{Ext}_S^{m+n}(l, M \otimes_R N) \neq 0$. Deste modo, pelo Teorema 2.2.8, $\operatorname{depth}_S(M \otimes_R N) \leq m+n$.

Segue que $\operatorname{depth}_S(M \otimes_R N) = m+n$. Em consequência, pela igualdade (2.14), $r_S(M \otimes_R N) = r_R(M) \cdot r_S(N/\mathfrak{m}N)$. $\square$

Definição 2.2.20. Seja M um R-módulo sobre um anel local $(R,\mathfrak{m},k)$. Definimos o *socle* de M por

$$\operatorname{Soc}(M) := (0 :_M \mathfrak{m}).$$

Observação 2.2.21. $\operatorname{Soc}(M) \cong \operatorname{Hom}_R(k,M)$. De fato, a aplicação $\Phi : \operatorname{Soc}(M) \to \operatorname{Hom}_R(k,M)$, definida por $\Phi(x)(\overline{a}) = ax$, é um R-isomorfismo.

Lema 2.2.22. Sejam $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local Noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e $\boldsymbol{x}$ uma sequência M-regular maximal em $\mathfrak{m}$ de comprimento n. Então,

$$r(M) = \dim_k(\operatorname{Soc}(M/\boldsymbol{x}M)).$$

Demonstração. Seja $\boldsymbol{x} = x_1,\ldots,x_n$. Então, claramente $\operatorname{depth}(M) = n$ e $r(M) = \dim_k(\operatorname{Ext}^n_R(k,M))$. Pela Observação 2.2.21 e pelo Lema 2.2.3, $\operatorname{Soc}(M/\boldsymbol{x}M) \cong \operatorname{Hom}_R(k,M/\boldsymbol{x}M) \cong \operatorname{Ext}^n_R(k,M)$. Logo,

$$\dim_k(\operatorname{Soc}(M/\boldsymbol{x}M)) = \dim_k(\operatorname{Ext}^n_R(k,M)) = r(M).$$

□

Lema 2.2.23. Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local e M um R-módulo. Se $M \neq 0$ tem comprimento finito, então $\operatorname{Soc}(M) \neq 0$.

Demonstração. Pela Observação 2.2.21, é suficiente mostrar que $\operatorname{Hom}_R(k,M) \neq 0$. Mostraremos isto por indução sobre $n := \operatorname{length}(M)$.

Se $n = 1$, então $M \cong k$, e portanto $\operatorname{Hom}_R(k,M) \cong \operatorname{Hom}_R(k,k) \neq 0$.

Agora, suponha $n > 1$. Então, existe um submódulo próprio $N \neq 0$ de M que tem comprimento $n-1$. Por indução, existe um R-homomorfismo $k \to N$ não nulo. Compondo este R-homomorfismo com a inclusão $N \to M$, obtemos um R-homomorfismo $k \to M$ não nulo. □

2.3 Profundidade e Dimensão Projetiva

Uma relação entre as noções de profundidade e de dimensão projetiva é dada pelo Teorema de Auslander-Buschbaum (Teorema 2.3.4). O objetivo de esta seção é enunciar e mostrar esse resultado.

Lema 2.3.1. Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e $M,N \neq 0$ dois R-modulos finitamente gerados. Se $\operatorname{depth}(M) > 0$ e $\operatorname{depth}(N) > 0$, existe um elemento $x \in \mathfrak{m}$ que é um elemento M-regular e N-regular.

Demonstração. Como $\operatorname{depth}(M) > 0$ e $\operatorname{depth}(N) > 0$, $\mathfrak{m}$ contém elementos M-regulares e também contém elementos N-regulares. Pela Proposição 2.1.3, $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass}(M)$ e $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass}(N)$. Pelos Teoremas A.2.7 e A.2.8(2), e pelo Lema dos Primos Avoidance, $\mathfrak{m} \not\subset \operatorname{ZD}(M) \cup \operatorname{ZD}(N)$. Daí, existe $x \in \mathfrak{m}$ que é um elemento M-regular e N-regular. □

Lema 2.3.2. Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local e $\varphi : F \to G$ um homomorfismo de R-módulos finitamente gerados. Suponha que F é livre, e seja M um R-módulo tal que $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(M)$. Suponha que $\varphi \otimes \mathrm{Id}_M$ é injetivo. Então:

(1) $\varphi \otimes \mathrm{Id}_k$ é injetivo;

(2) Se G é um R-módulo livre, então φ é injetiva e existe um R-módulo livre N tal que $G = \varphi(F) \oplus' N$.

Demonstração. (1) Como $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(M)$, existe um R-homomorfismo $i : k \to M$ não nulo e portanto injetivo. Temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} F \otimes_R k \arrow[r, "\mathrm{Id}_F \otimes_R i"] \arrow[d, "\varphi\otimes\mathrm{Id}_k"'] & F \otimes_R M \arrow[d, "\varphi\otimes\mathrm{Id}_M"] \\ G \otimes_R k \arrow[r, "\mathrm{Id}_G \otimes i"] & G \otimes_R M \end{tikzcd}$$

Como F é livre, F é plano e portanto $\mathrm{Id}_F \otimes_R i$ é injetivo. Por hipótese, $\varphi \otimes_R \mathrm{Id}_M$ é injetiva. Logo, $\varphi \otimes_R \mathrm{Id}_k$ é um R-homomorfismo injetivo.

(2) Como $\varphi \otimes_R \mathrm{Id}_k$ é injetivo, note que o R-homomorfismo $\overline{\varphi} : F/\mathfrak{m}F \to G/\mathfrak{m}G$ definido por $\varphi(x + \mathfrak{m}F) = \varphi(x) + \mathfrak{m}G$ é injetivo. Sejam $l = \mathrm{rank}(F)$ e $r = \mathrm{rank}(G)$. Note que $l = \dim_k(F/\mathfrak{m}F)$ e que $r = \dim_k(G/\mathfrak{m}G)$. A injetividade de $\overline{\varphi}$ indica que $l \le r$.

Seja $\{e_1,\dots,e_l\}$ uma R-base de F. Então, $\{\overline{\varphi}(e_1 + \mathfrak{m}F),\dots,\overline{\varphi}(e_l + \mathfrak{m}F)\}$ é um conjunto linearmente independente em $G/\mathfrak{m}G$. Existem $z_{l+1} + \mathfrak{m}G,\dots,z_r + \mathfrak{m}G \in G/\mathfrak{m}G$ tais que $\{\overline{\varphi}(e_1 + \mathfrak{m}F),\dots,\overline{\varphi}(e_l + \mathfrak{m}F), z_{l+1} + \mathfrak{m}G,\dots,z_r + \mathfrak{m}G\}$ é uma base de $G/\mathfrak{m}G$. Deste modo, pelo Lema de Nakayama (mais específicamente, pelo Corolário A.1.21), $\{\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_l), z_{l+1},\dots,z_r\}$ é um conjunto de r elementos que gera G. Como $\mathrm{rank}(G) = r$, esse conjunto é uma R-base para G e portanto $\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_l)$ são linearmente independentes. Isto mostra que φ é injetiva.

Vejamos que $\varphi(F)$ é um somando direto interno de G. Como $\{\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_l), z_{l+1},\dots,z_r\}$ é uma base de G note que $G = \varphi(F) \oplus' \langle z_{l+1},\dots,z_r\rangle$, e que $\langle z_{l+1},\dots,z_r\rangle$ é um R-módulo livre.

□

Observação 2.3.3. Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. Seja $n = \mathrm{pdim}_R(M) < \infty$. Pelo Corolário 1.6.11, existe uma resolução livre minimal de M

$$F_\bullet : 0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

com $F_n \neq 0$. Suponha $n \ge 1$. Então $M_1 := \ker(F_0 \to M) = \mathrm{im}(F_1 \to F_0)$ é não nulo. Temos que:

(1) $\mathrm{pdim}(M_1) = n - 1$;

(2) Se $\operatorname{depth}(M) = 0$ e $\operatorname{depth}(R) > 0$, então $\operatorname{depth}(M_1) = 1$.

Com efeito, mostremos (1). Observe que

$$F_\bullet : 0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to M_1 \to 0$$

é uma resolução livre minimal de M_1, donde, $\operatorname{pdim}_R(M_1) = n-1$.

Mostremos (2). Temos uma sequência exata

$$0 \to M_1 \to F_0 \to M \to 0.$$

Da Proposição 2.2.9,

$$\begin{gathered}\operatorname{depth}(M_1) \geq \min\{\operatorname{depth}(F_0), \operatorname{depth}(M)+1 = 1\} \text{ e} \\ 0 = \operatorname{depth}(M) \geq \min\{\operatorname{depth}(M_1)-1, \operatorname{depth}(F_0)\}.\end{gathered}$$

Como $\operatorname{depth}(R) > 0$ e F_0 é livre, então $\operatorname{depth}(F_0) > 0$, assim, pela primeira desigualdade, $\operatorname{depth}(M_1) \geq 1$ e consequêntemente, pela segunda desigualdade, $\operatorname{depth}(M_1) - 1 = 0$.

Teorema 2.3.4 (Auslander-Buchsbaum)**.** Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. Se $\operatorname{pdim}(M) < \infty$, então

$$\operatorname{depth}(M) + \operatorname{pdim}(M) = \operatorname{depth}(R).$$

Demonstração. A prova será por indução sobre $\operatorname{depth}_R(R)$.

Suponha primeiramente que $\operatorname{depth}_R(R) = 0$. Então $\mathfrak{m}$ não contém elementos R-regulares, e portanto, pela Proposição 2.1.3, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}(R)$. Seja $n = \operatorname{pdim}_R(M)$. Pelo Corolário 1.6.11, existe uma resolução livre minimal

$$F_\bullet : 0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

de M. Se $n \geq 1$, pelo Lema 2.3.2(2), $F_{n-1} = \varphi(F_n) \oplus' H$ com H sendo um R-módulo livre; donde obtem-se de $F_\bullet$ uma resolução livre

$$0 \to H \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

de M de comprimento $n-1$; o que contradiz a que $\operatorname{pdim}_R(M) = n$. Portanto, $\operatorname{pdim}_R(M) = n = 0$, isto é M é livre. Assim, como $\mathfrak{m}$ não contém elementos R-regulares, também não contém elementos M-regulares; donde $\operatorname{depth}_R(M) = 0$. Já que $\operatorname{depth}_R(R) = \operatorname{pdim}_R(M) = \operatorname{depth}_R(M) = 0$, a igualdade $\operatorname{depth}_R(M) + \operatorname{pdim}_R(M) = \operatorname{depth}_R(R)$ é satisfeita.

Suponha agora $\operatorname{depth}_R(R) > 0$. Mostraremos a igualdade nos seguintes casos.

Caso $\operatorname{depth}_R(M) > 0$. Pelo Lema 2.3.1, existe $x \in \mathfrak{m}$ um elemento R-regular e M-regular. Pela Proposição 2.2.10(4) e pelo Corolário 2.1.16,

$$\operatorname{depth}_{R/(x)}(R/(x)) = \operatorname{depth}_R(R) - 1 \text{ e } \operatorname{pdim}_{R/(x)}(M/xM) = \operatorname{pdim}_R(M) < \infty.$$

Por indução,

$$\operatorname{pdim}_{R/(x)}(M/xM) + \operatorname{depth}_{R/(x)}(M/xM) = \operatorname{depth}_{R/(x)}(R/(x)),$$

donde, pela Proposição 2.2.10(4), resulta $\operatorname{pdim}_R(M) + \operatorname{depth}_R(M) - 1 = \operatorname{depth}_R(R) - 1$, donde

$$\operatorname{pdim}_R(M) + \operatorname{depth}_R(M) = \operatorname{depth}_R(R).$$

Caso $\operatorname{depth}_R(M) = 0$. Como $\operatorname{depth}_R(M) = 0$ e $\operatorname{depth}_R(R) > 0$, note que M não é livre e portanto não projetivo. Portanto, $\operatorname{pdim}_R(M) \geq 1$. Pela Observação 2.3.3, existe um R-módulo M_1 tal que $\operatorname{depth}_R(M_1) = 1 > 0$ e $\operatorname{pdim}_R(M_1) = \operatorname{pdim}_R(M) - 1$. Pelo caso mostrado acima,

$$\operatorname{pdim}_R(M_1) + \operatorname{depth}_R(M_1) = \operatorname{depth}_R(R).$$

Segue que $\operatorname{pdim}_R(M) = \operatorname{depth}_R(R)$.

□

2.4 Complexo de Koszul

Nesta seção introduzimos o complexo de Koszul e com ajuda deele caracterizamos a regularidade de uma sequência (sobre um módulo finitamente gerado) contida em um ideal próprio de um anel local Noetheriano (Ver Proposição 2.4.8.) As referências para esta seção são (HUNEKE, 2012, Capítulo 1, Subseção 1.2) e (BRUNS W.; HERZOG, 1998, Capítulo 1, Seção 6).

Sejam

$$C_\bullet: \quad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d^C_{n+1}} C_n \xrightarrow{d^C_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$D_\bullet: \quad \cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{d^D_{n+1}} D_n \xrightarrow{d^D_n} D_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

dois complexos de R-módulos como segue. O produto tensorial $\left(C_\bullet, d^{C_\bullet}\right) \otimes \left(D_\bullet, d^{D_\bullet}\right)$ dos complexos $C_\bullet$ e $D_\bullet$ é um complexo de cadeias com o n-ésimas componentes dadas por

$$\bigoplus_{i+j=n} \left(C_i \otimes_R D_j\right)$$

e $\delta_n = \bigoplus_{i+j=n} \delta_{i+j}$, onde

$$\begin{array}{ccc} C_i \otimes_R D_j & \xrightarrow{\delta_{i+j}} & \left(C_{i-1} \otimes_R D_j\right) \oplus \left(C_i \otimes_R D_{j-1}\right) \\ x \otimes y & \mapsto & \left(d_i^{C_*}(x) \otimes y\right) \oplus \left((-1)^i x \otimes d_j^{D_*}(y)\right). \end{array}$$

Definição 2.4.1. Para $x \in R$, definimos o *complexo de Koszul* de x como sendo o complexo

$$K_\bullet(x;R):\ 0 \longrightarrow R_1 \xrightarrow{\cdot x} R_0 \longrightarrow 0$$

onde $R_1 = R_0 = R$.

Dado $x \in R$ e um complexo

$$C_\bullet: \quad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^{C_\bullet}} C_n \xrightarrow{d_n^{C_\bullet}} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

de R-módulos, definimos $C_\bullet(x) := C_\bullet \otimes K(x,R)$.

Observação 2.4.2. (1) Uns cálculos e uns isomorfismos naturais, mostram que $C_\bullet(x) = \{C_{n-1} \oplus C_n, \delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ onde para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\delta_n : C_{n-1} \oplus C_n \to C_{n-2} \oplus C_{n-1}$ é dado pela correspondência

$$(\alpha_{n-1}, \alpha_n) \mapsto (d_{n-1}^{C_\bullet}, (-1)^{n-1} x\alpha_{n-1} + d_n^{C_\bullet}(\alpha_n)).$$

(2) Em vista de (1), temos uma sequência exata curta de complexos

$$0 \to C_\bullet \to C_\bullet(x) \to C_\bullet(-1) \to 0.$$

Ela induz uma sequência exata longa,

$$\cdots \longrightarrow H_n(C_\bullet) \longrightarrow H_n(C_\bullet(x)) \longrightarrow H_n(C_\bullet(-1)) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(C_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

onde é R-homomorfismo conectante $\Delta_n : H_n(C_\bullet(-1)) \to H_{n-1}(C_\bullet)$ é dado pela correspondência $z \mapsto (-1)^{n-1}xz$. Como $H_n(C_\bullet(-1)) = H_{n-1}(C_\bullet)$, temos uma sequência exata longa

$$\cdots \xrightarrow{\cdot x} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(C_\bullet(x)) \xrightarrow{\psi_n} H_{n-1}(C_\bullet(-1)) \xrightarrow{\cdot x} \cdots.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$\ker(\psi_n) = \operatorname{im}(\varphi_n) = \frac{H_n(C_\bullet)}{\ker(\varphi_n)} = \frac{H_n(C_\bullet)}{\operatorname{im}(x : H_n(C_\bullet) \to H_n(C_\bullet))} = \frac{H_n(C_\bullet)}{xH_n(C_\bullet)}$$

e

$$\operatorname{im}(\psi_n) = \ker(x : H_{n-1}(C_\bullet) \to H_{n-1}(C_\bullet)) = \operatorname{ann}_{H_{n-1}(C_\bullet)}(x).$$

Substituindo o obtido na sequência exata

$$0 \longrightarrow \ker(\psi_n) \longrightarrow H_n(C_\bullet(x)) \xrightarrow{\psi_n} \operatorname{im}(\psi_n) \longrightarrow 0\ ,$$

obtemos uma sequência exata

$$0 \to \frac{H_n(C_\bullet)}{xH_n(C_\bullet)} \to H_n(C_\bullet(x)) \to \operatorname{ann}_{H_{n-1}(C_\bullet)}(x) \to 0.$$

(3) Para todo $n \in \mathbb{Z}$, tem-se que $xH_n(C_\bullet(x)) = 0$. De fato, seja (α_{n-1}, α_n) um representante de um elemento em $H_n(C_\bullet \otimes K_\bullet(x;R))$, isto é,

$$\delta_n(\alpha_{n-1}, \alpha_n) = \left(d_{n-1}^{C_\bullet}(\alpha_{n-1}), (-1)^{n-1}x\alpha_{n-1} + d_n^{C_\bullet}(\alpha_n)\right) = (0,0)$$

Daqui temos $d_n^C \cdot (\alpha_n) = (-1)^n x\alpha_{n-1}$ Mas, como

$$\delta_{n+1}(\alpha_n, \alpha_{n+1}) = \left(d_n^{C_\bullet}(\alpha_n), (-1)^n x\alpha_n + d_{n+1}^{C_\bullet}(\alpha_{n+1})\right),$$

temos que

$$x \cdot (\alpha_{n-1}, \alpha_n) = (x\alpha_{n-1}, x\alpha_n) = \delta_{n+1}\left((-1)^n\alpha_n, 0\right) \in \operatorname{im}(\delta_{n+1}).$$

Definição 2.4.3. Sejam $x_1, \ldots, x_n \in R$ e M um R-módulo. O *complexo de Koszul* é definido indutivamente por

$$K_\bullet(x_1, \ldots, x_n; M) := K_\bullet(x_1, \ldots, x_{n-1}; M) \otimes K_\bullet(x_n, R),$$

onde $K_\bullet(x;M) = K(x;R) \otimes_R M$.

Observação 2.4.4. Sejam R um anel, $x_1, \ldots, x_n \in R$ e M um R-módulo.

(1) Pode verificarse por indução que,

$$K_\bullet(x_1, \ldots, x_n; M) = K_\bullet(x_1, \ldots, x_n; R) \otimes_R M.$$

(2) Por indução, pode-se mostrar que o complexo $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n; R)$ é

$$K_\bullet(x_1, \ldots, x_n; R) : 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\begin{pmatrix} \pm x_1 \\ \pm x_2 \\ \vdots \\ \pm x_n \end{pmatrix}} R^{\binom{n}{1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R^{\binom{n}{n-1}} \xrightarrow{(x_1, \ldots, x_n)} R \longrightarrow 0\,.$$

Portanto,

$$K_\bullet(x_1, \ldots, x_n; M) : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\begin{pmatrix} \pm x_1 \\ \pm x_2 \\ \vdots \\ \pm x_n \end{pmatrix}} M^{\binom{n}{1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{\binom{n}{n-1}} \xrightarrow{(x_1, \ldots, x_n)} M \longrightarrow 0\,.$$

Observe que é complexo de Koszul é invariante por permutações.

Dados um anel R, elementos $x_1, \ldots, x_n \in R$ e um R-módulo M, definimos para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$H_i(x_1, \ldots, x_n; M) := H_i(K_\bullet(x_1, \ldots, x_n; M)).$$

Teorema 2.4.5. Seja R um anel, $x_1,\dots,x_n \in R$ e M um R módulo finitamente gerado. Então:

(1) $H_0\,(x_1,\dots,x_n;M) \cong \dfrac{M}{(x_1,\dots,x_n)\,M}$;

(2) $H_n\,(x_1,\dots,x_n;M) \cong \operatorname{ann}_M\,(x_1,\dots,x_n)$;

(3) $(x_1,\dots,x_n)H_i(x_1,\dots,x_n;M) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Mostremos (1) e (2). Da Observação 2.4.4, sabemos que $K_\bullet(x_1,\dots,x_n;M)$ é dado por

$$K_\bullet(x_1,\dots,x_n;M) : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_n} M^{\binom{n}{1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{\binom{n}{n-1}} \xrightarrow{d_1} M \longrightarrow 0\ ,$$

onde

$$d_n = \begin{pmatrix} \pm x_1 \\ \pm x_2 \\ \vdots \\ \pm x_n \end{pmatrix} \text{ e } d_1 = (x_1,\dots,x_n).$$

Daí, note que

$$H_0(x_1,\dots,x_n;M) = \frac{\ker(M\to 0)}{\operatorname{im}(d_1)} = \frac{M}{(x_1,\dots,x_n)M}, \text{ e}$$
$$H_n(x_1,\dots,x_n;M) = \frac{\ker(d_n)}{\operatorname{im}(0\to M)} = \frac{\operatorname{ann}_M(x_1,\dots,x_n)}{0} \cong \operatorname{ann}_M(x_1,\dots,x_n).$$

Mostremos (3). É suficiente mostrar que $x_jH_i(x_1,\dots,x_n;M) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ e todo $j = 1,\dots,n$. Seja $1 \le j < n$. Como o complexo de Koszul é invariante, por permutações, então $H_i(x_1,\dots,x_n;M) \cong H_i(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n,x_j;M)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Como, pela Observação 2.4.2(3), $x_jH_i(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n,x_j;M) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, segue que $x_jH_i(x_1,\dots,x_n;M) = 0$.

□

Lema 2.4.6. Sejam R um anel, $\boldsymbol{x} = x_1,\dots,x_n$ uma sequência em R. Suponha que

$$0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$$

é uma sequência exata de R-módulos. Então, existe uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow H_i\,(\boldsymbol{x},M_1) \longrightarrow H_i(\boldsymbol{x},M) \longrightarrow H_i\,(\boldsymbol{x},M_2) \longrightarrow H_{i-1}\,(\boldsymbol{x},M_1) \longrightarrow \dots.$$

Demonstração. Cada $K_i(\boldsymbol{x},R)$ é livre e portanto é plano; portanto, note que temos uma sequência exata curta de complexos

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes_R K_\bullet(\boldsymbol{x};R) \longrightarrow M \otimes_R K_\bullet(\boldsymbol{x};R) \longrightarrow M_2 \otimes_R K_\bullet(\boldsymbol{x},R) \longrightarrow 0\ .$$

Pela Observação 2.4.4(1) a sequência acima vira para uma sequência exata curta de complexos

$$0 \longrightarrow K_\bullet(\boldsymbol{x};M_1) \longrightarrow K_\bullet(\boldsymbol{x};M) \longrightarrow K_\bullet(\boldsymbol{x},M_2) \longrightarrow 0\ .$$

Pela Proposição 1.5.2, ela induz uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow H_i\,(\boldsymbol{x},M_1) \longrightarrow H_i(\boldsymbol{x},M) \longrightarrow H_i\,(\boldsymbol{x},M_2) \longrightarrow H_{i-1}\,(\boldsymbol{x},M_1) \longrightarrow \cdots.$$

□

Teorema 2.4.7. Seja R um anel Noetheriano e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado . Seja I um ideal em R gerado por $\boldsymbol{x} = x_1,\ldots,x_n$. Suponha que existe i tal que $H_i(\boldsymbol{x};M) \neq 0$. Seja $q = \max\{i : H_i(\boldsymbol{x};M) \neq 0\}$ Então, $\operatorname{grade}(I,M) = n-q$.

Demonstração. Procederemos por indução sobre $s := \operatorname{grade}(I,M)$. Se $s = 0$, então I consiste de divisores de zero, e portanto, pela Proposição 2.1.3, I está contido em um primo associado $\mathfrak{p}$ de M, digamos com $\mathfrak{p} = \operatorname{ann}(m)$ onde $m \in M - \{0\}$. Então, $Im = 0$, donde $m \in \operatorname{ann}_M(x_1,\ldots,x_n)$. Já que $m \neq 0$, o Teorema 2.4.5(2), mostra que $H_n(x_1,\ldots,x_n;M) \neq 0$. Deste modo $q = n$ e consequentemente $s = 0 = n-q$.

Suponha agora $s > 0$. Então, existe um elemento M-regular $z_1 \in I$. Assim, a sequência

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{z_1} M \longrightarrow M/z_1M \longrightarrow 0$$

é exata e pelo Lema 2.4.6, para cada $i \in \mathbb{Z}$, temos uma sequências exata longa

$$\cdots \longrightarrow H_i(\boldsymbol{x},M) \xrightarrow{z_1} H_i(\boldsymbol{x};M) \longrightarrow H_i(\boldsymbol{x};M/z_1M) \longrightarrow H_{i-1}(\boldsymbol{x};M) \xrightarrow{z_1} \cdots.$$

Já que, pelo Teorema 2.4.5(3), z_1 anula $H_i(\boldsymbol{x};M)$ para todo i, esta sequência exata induz sequências exatas

$$0 \to H_i(\boldsymbol{x};M) \to H_i(\boldsymbol{x};M/z_1M) \to H_{i-1}(\boldsymbol{x};M) \to 0 \tag{2.15}$$

para todo i. Para $i > q+1$, por definição de q, temos que $H_i(\boldsymbol{x};M) = H_{i-1}(\boldsymbol{x};M) = 0$; donde, por exatidão, $H_i(\boldsymbol{x};M/z_1M) = 0$. Agora, se $i = q+1$ em (2.15), temos uma sequência exata

$$0 \to H_{q+1}(\boldsymbol{x};M) \to H_{q+1}(\boldsymbol{x};M/z_1M) \to H_q(\boldsymbol{x};M) \to 0.$$

Assim, já que, por definição de q, tem-se que $H_{q+1}(\boldsymbol{x};M) = 0$ e $H_q(\boldsymbol{x};M) \neq 0$, segue que $H_{q+1}(\boldsymbol{x};M/z_1M) \neq 0$. Portanto, $q+1 = \sup\{i : H_i(\boldsymbol{x};M/z_1M) \neq 0\}$. Como z_1 é um elemento M-regular, pela Proposição 2.2.10, temos que $\operatorname{grade}(I,M/z_1) = s-1$. Por indução, $s-1 = n-(q+1)$, donde $s = n-q$. □

Proposição 2.4.8. Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano, $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado e $I \subset \mathfrak{m}$ um ideal gerado por $\boldsymbol{x} = x_1,\ldots,x_n$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $\text{grade}(I, M) = n$;

(2) $H_i(\boldsymbol{x}; M) = 0, \forall i \geq 1$;

(3) $H_1(\boldsymbol{x}; M) = 0$;

(4) $\boldsymbol{x}$ é uma sequência M-regular.

Demonstração. $(1) \Rightarrow (2)$. Pelo Teorema 2.4.5(1) e pelo Lema de Nakayama, note que $H_0(\boldsymbol{x}; M) \neq 0$. Como $\text{grade}(I; M) = n$, pela Proposição 2.4.7, $\max\{i : H_i(\boldsymbol{x}; M) \neq 0\} = 0$. Isto indica que $H_i(\boldsymbol{x}; M) = 0$ para todo $i \geq 1$.

A implicação $(2) \Rightarrow (3)$ é clara.

$(3) \Rightarrow (4)$. Procederemos por indução. Suponha primeiro $n = 1$, isto é $H_1(x_1; M) = 0$. Como, pelo Teorema 2.4.5(2), $H_1(x_1; M) = \text{ann}_M(x_1)$, segue que $\text{ann}_M(x_1)$=0; donde x_1 é um elemento M-regular. Agora, suponha $n > 1$ e seja $\boldsymbol{x}' = x_1, \ldots, x_{n-1}$. Pela Observação 2.4.2(2), temos uma sequência exata curta

$$0 \to \frac{H_1(\boldsymbol{x}'; M)}{x_n H_1(\boldsymbol{x}'; M)} \to H_1(\boldsymbol{x}; M) \to \text{ann}_{H_0(\boldsymbol{x}'; M)}(x_n) \to 0.$$

Como $H_1(\boldsymbol{x}; M) = 0$, segue, por exatidão, que

(i) $\dfrac{H_1(\boldsymbol{x}'; M)}{x_n H_1(\boldsymbol{x}'; M)} = 0$, e

(ii) $\text{ann}_{H_0(\boldsymbol{x}'; M)}(x_n) = 0$.

Como M é Noetheriano (Proposição A.2.5(2)), então $K_1(\boldsymbol{x}'; M) = M^{\binom{n-1}{n-2}}$ é Noetheriano (Corolário A.2.6), portanto $H_1(\boldsymbol{x}'; M)$ é Noetheriano (Proposição A.2.5(1)) e, em particular, finitamente gerado. Consequentemente, de (i) do Lema de Nakayama, segue que $H_1(\boldsymbol{x}'; M) = 0$ para todo $i \geq 1$. Deste modo, por indução, $\boldsymbol{x}'$ é uma sequência M-regular.

Por outro lado, (ii) indica que x_n é um elemento $H_0(x_1, \ldots, x_n; M)$-regular; assim, já que $H_0(x_1, \ldots, x_{n-1}; M) \cong M/(x_1, \ldots, x_{n-1})$ (pelo Teorema 2.4.5(1)), segue que x_n é um elemento $M/(x_1, \ldots, x_{n-1})M$-regular.

Como $\boldsymbol{x}' = x_1, \ldots, x_{n-1}$ é uma sequência M-regular e x_n é um elemento $M/(x_1, \ldots, x_{n-1})M$-regular, segue que $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência M-regular.

$(4) \Rightarrow (1)$. É suficiente mostrar que a sequência M-regular $\boldsymbol{x}$ é maximal em I. Seja $y \in I \subset \mathfrak{m}$. Pelo lema de Nakayama, $IM \neq M$. Existe $z \in M$ tal que $z \notin IM$. Deste modo, z é não nulo em M/IM. Mas por outro lado é claro que yz é zero em M/IM. Logo, y é um divisor de zero de M/IM. Deste modo, todo elemento de I é um divisor de zero de M/IM; e por coinseguinte, a sequência M-regular $\boldsymbol{x}$ é maximal em I. $\square$

2.5 Módulos Cohen-Macaulay

Definição 2.5.1. Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano. Um R-módulo M finitamente gerado é *Cohen-Macaulay* se $M=0$; ou $M\neq 0$ com $\operatorname{depth}(M)=\dim(M)$. Se além disso, $\dim(M)=\dim(R)$, dizemos que M é Cohen-Macaulay maximal.

Observação 2.5.2. Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e M um R-módulo. Se $I\subset \operatorname{ann}(M)$, então M é Cohen-Macaulay como R-módulo se, e somente se, M é Cohen-Macaulay como R/I-módulo.

Mais geralmente, podemos definir módulos Cohen-Macaulay sobre anéis Noetherianos não necessariamente locais como segue: Sejam R é um anel Notheriano e M é um R-módulo finitamente gerado. Dizemos que M é *Cohen-Macaulay* se $M_{\mathfrak{m}}$ é um $R_{\mathfrak{m}}$-módulo Cohen-Macaulay para todo $\mathfrak{m}\in \operatorname{Specm}(R)$. Dizemos que M é *Cohen-Macaulay maximal* se $M_{\mathfrak{m}}$ é Cohen-Macaulay maximal para todo $\mathfrak{m}\in \operatorname{Specm}(R)$. O anel R é *anel Cohen-Macaulay* se R é Cohen-Macaulay como R-módulo.

Nesta dissertação, vamos nos restringir a módulos Cohen-Macaulay sobre anéis locais Noetherianos.

Exemplo 2.5.3. (1) Se R é um anel local Noetheriano e M é um R-módulo finitamente gerado com $\dim(M)=0$, então M é Cohen-Macaulay. Em particular, os corpos são anéis Cohen-Macaulay.

(2) Se $R=\frac{k[[x,y]]}{(x^2,xy)}$, com k sendo um corpo, então R não é um anel Cohen-Macaulay. De fato, note que $\dim(R)=1$ e $\operatorname{depth}(R)=0$.

(4) Os anéis locais regulares são Cohen-Macaulay (Veja a Seção 2.6). Em particular, o anel das series formais $k[[x_1,\dots,x_n]]$, com k sendo um corpo, é Cohen-Macaulay.

(3) Se R é como no item (2), então $R/(x)\cong k[[y]]$ é um anel Cohen-Macaulay e um R-módulo Cohen-Maximal.

(5) Um anel local Noetheriano reduzido 1-dimensional é Cohen-Macaulay. Em particular, um domínio local Noetheriano 1-dimensional é Cohen-Macaulay.

(6) Se R é um anel local Noetheriano e M é um R-módulo Cohen-Macaulay, então os quocientes de M sobre sequências M-regulares em $\mathfrak{m}$ são R-módulos Cohen-Macaulay (Teorema 2.5.7)

Teorema 2.5.4. Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e $M\neq 0$ um R-módulo Cohen-Macaulay. Então:

(1) $\dim(R/\mathfrak{p})=\operatorname{depth}(M)$ para todo $\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}(M)$;

(2) $\operatorname{grade}(I,M) = \dim(M) - \dim(M/IM)$ para todo ideal $I \subset \mathfrak{m}$ de R, en particular

$$\operatorname{depth}(M) = \dim(M) - \dim(M/\mathfrak{m}M);$$

(3) Uma sequência $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_r \subset \mathfrak{m}$ é uma sequência M-regular se, e somente $\dim(M/\boldsymbol{x}M) = \dim(M) - r$.

Demonstração. (1) Seja $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$. Pela Proposição 2.2.15, $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq \operatorname{depth}(M)$.

Como M é Cohen-Macaulay, então $\operatorname{depth}(M) = \dim(M) = \dim(R/\operatorname{ann}(M))$. Por outro lado, como $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M) \subset \operatorname{Supp}(M) = V(\operatorname{ann}(M))$, então $\mathfrak{p} \supset \operatorname{ann}(M)$, e portanto $\dim(R/\mathfrak{p}) \leq \dim(R/\operatorname{ann}(M))$. Temos, então que $\dim(R/\mathfrak{p}) \leq \operatorname{depth}(M)$.

Segue que $\operatorname{depth}(M) = \dim(R/\mathfrak{p})$.

(2) Vamos mostrar o resultado por indução sobre $\operatorname{grade}(I,M)$.

Mostremos para o caso $\operatorname{grade}(I,M) = 0$. Neste caso, devemos mostrar que $\dim(M) = \dim(M/IM)$. Como $\operatorname{grade}(I,M) = 0$, então I consiste de divisores de zero, e portanto, pela Proposição 2.1.3, $I \subset \mathfrak{p}$ para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$. É claro que $\operatorname{supp}(M/IM) \subset \operatorname{supp}(M)$, donde, pela Proposição A.2.17, $\dim(M/IM) \leq \dim(M)$. Mostremos que $\dim(M) \leq \dim(M/IM)$. Pelo item (1), $\dim(M) = \dim(R/\mathfrak{p})$. Agora, como $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M) \subset \operatorname{supp}(M) = V(\operatorname{ann}(M))$, então $\mathfrak{p} \supset \operatorname{ann}(M)$. Daí, $I + \operatorname{ann}(M) \subset \mathfrak{p}$ e em consequência, pelo Lema 2.2.12, $\sqrt{\operatorname{ann}(M/IM)} = \sqrt{I + \operatorname{ann}(M)} \subset \mathfrak{p}$. Note então, que

$$\dim(M) = \dim(R/\mathfrak{p}) \leq \dim(R/\operatorname{ann}(M/IM)) = \dim(M/IM).$$

Agora suponha $\operatorname{grade}(I,M) > 0$. Então, existe um elemento $x \in I$ que é um elemento M-regular. Pela Proposição 2.2.13,

$$\dim(M/xM) = \dim(M) - 1 \text{ e } \operatorname{depth}(M/xM) = \operatorname{depth}(M) - 1.$$

Daí, como $\dim(M) = \operatorname{depth}(M)$, segue que $\dim(M/xM) = \operatorname{depth}(M/xM)$. Portanto, M/xM é Cohen-Macaulay.

Pela Proposição 2.2.10(4), $\operatorname{grade}(I, M/xM) = \operatorname{grade}(I,M) - 1$.

Por indução, segue que

$$\operatorname{grade}(I, M/xM) = \dim(M/xM) - \dim\left(\frac{M/xM}{I(M/xM)}\right) = \dim(M/xM) - \dim(M/IM),$$

onde a segunda igualdade é porque $\frac{M/xM}{I(M/xM)} \cong M/IM$. Daí,

$$\operatorname{grade}(I,M) - 1 = \dim(M) - 1 - \dim(M/IM),$$

donde $\operatorname{grade}(I,M) = \dim(M) - \dim(M/IM)$.

(3) Pelo ítem (2), $\operatorname{grade}(\boldsymbol{x}, M) = \dim(M) - \dim(M/\boldsymbol{x}M)$. Em vista disso e da Proposição 2.4.8, temos que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} \text{ é uma } M\text{- sequência regular} &\Leftrightarrow \operatorname{grade}(\boldsymbol{x}; M) = r \\
&\Leftrightarrow r = \dim(M) - \dim(M/\boldsymbol{x}M) \\
&\Leftrightarrow \dim(M/xM) = \dim(M) - r.
\end{aligned}$$

□

Observação 2.5.5. O item (1) da Proposição 2.2.10, indica que todos os primos associados de um módulo Cohen-Macaulay são minimais.

Proposição 2.5.6. Sejam R um anel local Cohen-Macaulay e M um R-módulo Cohen-Macaulay maximal. Então, M é livre de torção.

Demonstração. Sejam $s \in R$ um não divisor de zero de R e $m \in M$ tais que $sm = 0$. Devemos mostrar que $m = 0$. Por absurdo, suponha $m \neq 0$. Então a igualdade $sm = 0$ indica que $s \in \operatorname{ZD}(M)$, e desse modo, pela Proposição A.2.7(2), $s \in \mathfrak{p}$ para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$.

Como $s \in \mathfrak{p}$ não é um divisor de zero de R, então $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \geq 1$. De fato, se $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 0$, então $\mathfrak{p}$ é um primo minimal de s e consequentemente, pelo Teorema do ideal principal de Krull (mais especificamente pelo Corolário A.5.4), $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, o qual contradiz a que $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 0$.

Como $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$, então pelo Teorema 2.5.4(1)

$$\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(M) = \dim(R) \geq \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \dim(R/\mathfrak{p}) \geq 1 + \dim(R/\mathfrak{p}),$$

o que não pode acontecer. □

Teorema 2.5.7. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado.

(1) Suponha que $\boldsymbol{x}$ é uma sequência M-regular em $\mathfrak{m}$. Então, M é Cohen-Macaulay se, e somente se, $M/\boldsymbol{x}M$ é Cohen-Macaulay (como R-módulo e $R/\boldsymbol{x}R$-módulo).

(2) Suponha que M é Cohen-Macaulay. Então $M_{\mathfrak{p}}$ é Cohen-Macaulay para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Além disso, se $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, então $\operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{grade}(\mathfrak{p}, M)$ e $\dim(M) = \dim(M_{\mathfrak{p}}) + \dim(M/\mathfrak{p}M)$.

Demonstração. (1) Pela Observação 2.5.2 é suficiente considerar $M/\boldsymbol{x}M$ como R-módulo. Seja n o comprimento de $\boldsymbol{x}$. Pela Proposição 2.2.13, temos que

$$\operatorname{depth}(M/\boldsymbol{x}M) = \operatorname{depth}(M) - n \text{ e } \dim(M/\boldsymbol{x}M) = \dim(M) - n.$$

Assim, note que

$$\dim(M) = \operatorname{depth}(M) \Longleftrightarrow \dim(M/\boldsymbol{x}M) = \operatorname{depth}(M/\boldsymbol{x}M).$$

Portanto, M é Cohen-Macaulay se, e somente se, $M/\boldsymbol{x}M$ é Cohen-Macaulay.

(2) Seja $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Se $M_{\mathfrak{p}} = 0$, então $M_{\mathfrak{p}}$ é Cohen-Macaulay por definição. Suponha $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Devemos mostrar que $M_{\mathfrak{p}}$ é Cohen-Macaulay e que $\operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{grade}(\mathfrak{p}, M)$. Isto será feito por indução sobre $\operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}})$.

Suponha primeiramente que $\operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}) = 0$. Então, pela Proposição 2.2.10(1), $\operatorname{grade}(\mathfrak{p}, M) = 0$. Deste modo, temos que $\operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{grade}(\mathfrak{p}, M)$. Agora, o fato que $\operatorname{grade}(\mathfrak{p}, M) = 0$ também implica que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ para algum $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(M)$ (pela Proposição 2.1.3). Pela Observação 2.5.5, $\mathfrak{q}$ é um primo minimal e $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Temos

$$0 \leq \dim(M_{\mathfrak{p}}) = \dim\left(R_{\mathfrak{p}}/\operatorname{ann}(M_{\mathfrak{p}})\right) \leq \dim(R_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 0,$$

onde a última igualdade é porque $\mathfrak{p}$ é um primo minimal de R. Assim, $\dim(M_{\mathfrak{p}}) = 0 = \operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}})$, e em consequência $M_{\mathfrak{p}}$ é Cohen-Macaulay.

Suponha agora $\operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}) > 0$. Então, pela Proposição 2.2.10(1), $\operatorname{grade}(\mathfrak{p}, M) > 0$, de modo que existe um elemento M-regular $x \in \mathfrak{p}$.

Pelo item (1), M/xM é Cohen-Macaulay. Como $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, pelo Lema de Nakayama $(M/xM)_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}}/xM_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Além disso, pela Proposição 2.2.13(1) e pelo Corolário 2.1.12(1),

$$\operatorname{depth}(M/xM)_{\mathfrak{p}} = \operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}/xM_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}) - 1. \tag{2.16}$$

Por indução, $(M/xM)_{\mathfrak{p}}$ é Cohen-Macaulay e

$$\operatorname{depth}(M/xM)_{\mathfrak{p}} = \operatorname{grade}(\mathfrak{p}, M/xM) = \operatorname{grade}(\mathfrak{p}, M) - 1, \tag{2.17}$$

onde a igualdade direita em (2.17) é pela Proposição 2.2.10(4).

Segue de (2.16) e (2.17), que $\operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{grade}(\mathfrak{p}, M)$.

Como $(M/xM)_{\mathfrak{p}}$ é Cohen-Macaulay e $M_{\mathfrak{p}}/xM_{\mathfrak{p}} \cong (M/xM)_{\mathfrak{p}}$, temos que $M_{\mathfrak{p}}/xM_{\mathfrak{p}}$ é Cohen-Macaulay. Como x (visto em $R_{\mathfrak{p}}$) é um elemento $M_{\mathfrak{p}}$-regular (pela Proposição 2.1.12(1)), segue do item (1) que $M_{\mathfrak{p}}$ é Cohen-Macaulay.

A igualdade $\dim(M) = \dim(M_{\mathfrak{p}}) + \dim(M/\mathfrak{p}M)$ segue do item(2) do teorema anterior.

□

Corolário 2.5.8. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Cohen-Macaulay e I um ideal próprio de R. Então, $\operatorname{grade}(I) = \operatorname{ht}(I)$. Portanto, $\operatorname{ht}(I) + \dim(R/I) = \dim(R)$.

Demonstração. Sabemos que

$$\operatorname{ht}(I) = \min\{\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in V(I)\}$$

e que, pela Proposição 2.2.10(1),

$$\mathrm{grade}(I) = \mathrm{grade}(I,R) = \min\{\mathrm{depth}(R_\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in V(I)\}.$$

Pelo Teorema 2.5.7(2), para todo $\mathfrak{p} \in V(I)$, $R_\mathfrak{p}$ é Cohen-Macaulay e por conseguinte, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(R_\mathfrak{p}) = \mathrm{depth}(R_\mathfrak{p})$. Portanto, $\mathrm{ht}(I) = \mathrm{grade}(I)$. A igualdade $\mathrm{ht}(I) + \dim(R/I) = \dim(R)$ segue do item (2) do Teorema 2.5.4. □

Corolário 2.5.9. Suponha que R é um anel local Cohen-Macaulay e seja I um ideal próprio de R. São equivalentes:

(1) I tem posto 1;

(2) I tem um elemento R-regular;

(3) I tem altura positiva.

Demonstração. A equivalência $(1) \Leftrightarrow (2)$ vale pela Proposição B.0.12. Pelo Corolário 2.5.8, $(2) \Leftrightarrow (3)$. □

Teorema 2.5.10. Seja $\varphi : (R,\mathfrak{m}) \to (S,\mathfrak{l})$ um homomorfismo local de anéis locais Noetherianos. Suponha que M é um R-módulo finitamente gerado e que N é um S-módulo finitamente gerado que é plano como R-módulo. Então,

$M \otimes_R N$ é um S-módulo Cohen-Macaulay se, e somente se, M é um R-módulo Cohen-Macaulay e $N/\mathfrak{m}N$ é um S-módulo Cohen-Macaulay.

Demonstração. Pelo Teorema A.5.6(2), sabemos que

$$\dim_S(M \otimes_R N) = \dim_R(M) + \dim_S(N/\mathfrak{m}N).$$

Além disso, pela Proposição 2.2.18,

$$\mathrm{depth}_S(M \otimes_R N) = \mathrm{depth}_R(M) + \mathrm{depth}_S(N/\mathfrak{m}N).$$

Então,

$$\dim_S(M \otimes_R N) - \mathrm{depth}_S(M \otimes_R N) = (\dim_R(M) - \mathrm{depth}_R(M)) + (\dim_S(N/\mathfrak{m}N) - \mathrm{depth}_S(N/\mathfrak{m}N)).$$

Pelo Corolário 2.2.14, sabemos que os números $\dim_S(M \otimes_R N) - \mathrm{depth}_S(M \otimes_R N), \dim_R(M) - \mathrm{depth}_R(M)$ e $\dim_S(N/\mathfrak{m}N) - \mathrm{depth}_S(N/\mathfrak{m}N)$ são não negativos. Logo,

$$\dim_S(M \otimes_R N) = \mathrm{depth}_S(M \otimes_R N) \Longleftrightarrow \dim_R(M) = \mathrm{depth}_R(M) \text{ e } \dim_S(N/\mathfrak{m}N) = \mathrm{depth}_S(N/\mathfrak{m}N)$$

Segue que $M \otimes_R N$ é um S-módulo Cohen-Macaulay se, e somente se, M é um R-módulo Cohen-Macaulay e $N/\mathfrak{m}N$ é um S-módulo Cohen-Macaulay. □

Proposição 2.5.11. Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e $\hat{M}$ o completamento $\mathfrak{m}$-adico. Então:

(1) $\dim_R(M) = \dim_{\hat{R}}(\hat{M})$ e $\operatorname{depth}_R(M) = \operatorname{depth}_{\hat{R}}(\hat{M})$;

(2) M é Cohen-Macaulay se, e somente se, $\hat{M}$ é Cohen-Macaulay.

Demonstração. (1) Temos que $\hat{M} \cong M \otimes_R \hat{R}$ (Teorema A.6.4(1)). Como a aplicação natural $R \to \hat{R}$ é um homomorfismo local plano de anéis Noetherianos, pelo Teorema A.5.6(2), temos que

$$\dim_{\hat{R}}(\hat{M}) = \dim_{\hat{R}}(M \otimes_R \hat{R}) = \dim_R(M) + \dim_{\hat{R}}(\hat{R}/\mathfrak{m}\hat{R}) = \dim_R(M)$$

e, pela Proposição 2.2.18,

$$\operatorname{depth}_{\hat{R}}(\hat{M}) = \operatorname{depth}_{\hat{R}}(M \otimes_R \hat{R}) = \operatorname{depth}_R(M) + \operatorname{depth}_{\hat{R}}(\hat{R}/\mathfrak{m}\hat{R}) = \operatorname{depth}_R(M).$$

(2) Resulta imediato do item (1).

□

2.6 Anéis Locais Regulares, de Interseção Completa e Gorenstein

.

Nesta seção mostramos que os anéis locais regulares são Cohen-Macaulay. Além disso, definiremos os anéis locais de interseção completa e Gorenstein; e mostramos que eles são também anéis Cohen-Macaulay.

Lembremos que um anel local Noetheriano $(R,\mathfrak{m})$ de dimensão d é *regular* se $\mathfrak{m}$ é gerado por d elementos. Vamos mostrar agora que um anel local regular é um anel Cohen-Macaulay. Para isso precisamos da definição de sequência prima e de dois lemas.

Seja R um domínio. Uma sequência $\boldsymbol{x} = x_1,\dots,x_n$ de elementos de R é dita *prima* (ou R-prima) se os ideais $(x_1,\dots,x_i)$ são primos distintos para todo $i \geq 0$.

Lema 2.6.1. Sejam R um domínio e $x_1,\dots,x_n \in R$. Se a sequência $\boldsymbol{x} = x_1,\dots,x_n$ é prima, então $\boldsymbol{x}$ é regular.

Demonstração. Temos que mostrar que x_1 é R-regular e que para $1 < i \leq n$, o elemento x_i é $R/(x_1,\dots,x_{i-1})R$-regular. O primeiro segue porque R é um domínio. Para o segundo, sejam $1 < i \leq n$ e $z \in R$ tais que $x_i z \in (x_1,\dots,x_{i-1})$. Já que $\boldsymbol{x}$ é prima, $(x_1,\dots,x_{i-1})$ é um ideal primo e $x_i \notin (x_1,\dots,x_{i-1})$. Logo, $z \in (x_1,\dots,x_{i-1})$. □

Lema 2.6.2. Sejam R um anel e $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_m$ ideais primos distintos de R. Sejam M um R-módulo e $x_1,\dots,x_n \in M$. Ponha $N := \langle x_1,\dots,x_n\rangle$. Se $N_{\mathfrak{p}_j} \not\subset \mathfrak{p}_j M_{\mathfrak{p}_j}$ para todo $j = 1,\dots,m$, então existem $a_2,\dots,a_n \in R$ tais que $x_1 + \sum_{i=2}^n a_i x_i \notin \mathfrak{p}_j M_{\mathfrak{p}_j}$ para todo $j = 1,\dots,m$.

Demonstração. Procederemos por indução sobre m. Suponha $m = 1$. Como $N = \langle x_1,\dots,x_n\rangle$ e $N_{\mathfrak{p}_1} \not\subset \mathfrak{p}_1 M\mathfrak{p}_1$, é claro que existe $i = 1,\dots,n$ tal que $x_i \notin \mathfrak{p}_1 M_{\mathfrak{p}_1}$. Então, x_i é a expressão requerida.

Suponha agora $m > 1$. Por indução, existem $a'_2,\dots,a'_n \in R$ tais que

$$x'_1 := x_1 + \sum_{i=2}^n a'_i x_i \notin \mathfrak{p}_j M_{\mathfrak{p}_j};\ \forall j = 1,\dots,m-1. \tag{2.18}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\mathfrak{p}_m$ é um elemento minimal de $\{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_m\}$. Deste modo, pela Proposição A.1.9, existe $r \in \left(\bigcap_{j=1}^{m-1}\mathfrak{p}_j\right) - \mathfrak{p}_m$. Para $i = 2,\dots,n$, defina $x'_i = r x_i$.

Defina $N' = \langle x'_1,\dots,x'_n\rangle$. Como $r \notin \mathfrak{p}_m$, observe que

$$N'_{\mathfrak{p}_m} = \langle \frac{x'_1}{r},\dots,\frac{x'_n}{r}\rangle = \langle \frac{x_1}{1},\dots,\frac{x_n}{1}\rangle = N_{\mathfrak{p}_m}.$$

Como $r \in \bigcap_{j=1}^{m-1}\mathfrak{p}_j$, observe que $x'_i \in \mathfrak{p}_j M_{\mathfrak{p}_j}$ para todo $i = 2,\dots,n$ e para todo $j = 1,\dots,m-1$; de modo que, por (2.18),

$$x'_1 + x'_i \notin \mathfrak{p}_j M_{\mathfrak{p}_j},\ \forall i = 2,\dots,n;\ \forall j = 1,\dots,m-1. \tag{2.19}$$

Se $x'_1 \notin \mathfrak{p}_m M_{\mathfrak{p}_m}$, então x'_1 é a expressão requerida.

Se $x'_1 \in \mathfrak{p} M_{\mathfrak{p}_m}$, desde que $N'_{\mathfrak{p}_m} = N_{\mathfrak{p}_m} \not\subset \mathfrak{p}_m M_{\mathfrak{p}}$, temos que $x'_1 + x'_i \notin \mathfrak{p}_m M_{\mathfrak{p}_m}$ para algum i e assim, por (2.19), tal expressão é a requerida. $\square$

Proposição 2.6.3. Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local regular de dimensão d e seja $x_1,\dots,x_d$ um conjunto (mínimo) de geradores de $\mathfrak{m}$. Então, $x_1,\dots,x_d$ é uma sequência regular. Portanto, R é Cohen-Macaulay.

Demonstração. Para mostrar a regularidade de $x_1,\dots,x_d$, pelo Lema 2.6.1 é suficiente mostrar que R é um domínio e que tal sequência é prima. Procederemos por indução.

Se $d = 0$, então $\mathfrak{m} = (0)$; donde segue que (0) é primo e portanto R um domínio.

Suponha $d > 0$. Já que o anel R é local, note que $\operatorname{ht}(\mathfrak{m}) = d > 0$ e portanto $\mathfrak{m}$ não é um primo minimal. Deste modo, já que $\operatorname{Min}(R)$ é finito (Proposição A.2.4), aplicando o Lema 2.6.2 (com $M = R$, $N = \mathfrak{m}$ e os $\mathfrak{p}_j$ como todos os elementos de $\operatorname{Min}(R)$), existem $r_2,\dots,r_d \in R$ tais que $x'_1 := x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_dx_d \notin \bigcup_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Min}(R)} \mathfrak{p}$. Observe que $\mathfrak{m} = (x'_1, x_2,\dots,x_d)$.

Pelo Teorema A.5.5, $d - 1 \leq \dim(R/x_1R)$. Por outro lado, note que

$$\frac{\mathfrak{m}}{x_1R} = (x_2 + x_1R,\dots,x_d + x_1R) = \sqrt{(x_2 + x_1R,\dots,x_d + x_1R)},$$

donde, pelo teorema da dimensão de Krull, resulta $\dim(R/x_1R) \leq d-1$. Portanto, R/x_1R é um anel local regular de dimensão $d-1$. Da mesma maneira, $R/x_1'R$ é um anel local regular de dimensão $d-1$.

Por indução, R/x_1R e $R/x_1'R$ são domínios e $x_2+x_1R,\ldots,x_d+x_1R$ é uma sequência R/x_1R-prima.

Como $R/x_1'R$ é um domínio, o ideal (x_1') é primo. Já que $x_1' \notin \bigcup_{\mathfrak{p}\in\min(R)} \mathfrak{p}$, o primo (x_1') não é um primo minimal, portanto $\mathfrak{p} \subsetneq (x_1')$ para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, donde $\mathfrak{p} = x_1'\mathfrak{p}$. Consequentemente, como R é Noetheriano, então $\mathfrak{p}$ é finitamente gerado (Proposição A.2.5(1)) , donde segue que, pelo Lema de Nakayama, que $\mathfrak{p} = 0$, obtendo assim que R é um domínio.

Como R/x_1R é um domínio e $x_2+x_1R,\ldots,x_d+x_1R$ é uma R/x_1R-sequência prima, os ideais $(x_1+x_1R,\ldots,x_i+x_1R)$ são primos distintos para todo $i \geq 0$. Portanto, pela correspondência de ideais primos de R e R/x_1R, segue que os ideais $(x_1,x_2,\ldots,x_i)$ são primos distintos para todo $i \geq 0$, donde resulta ser $x_1,\ldots,x_d$ uma sequência prima. □

Definição 2.6.4. Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano.

(1) Se R é completo, dizemos que R é *interseção completa* se existe um anel local regular S e um homomorfismo sobrejetivo $S \to R$ cujo kernel esteja gerado por uma sequência regular; em outras palavras, se existem um anel local regular S e uma sequência $f_1,\ldots,f_k \subset S$ regular tais que $R \cong S/(f_1,\ldots,f_k)$.

(2) O anel R é de *interseção completa* se seu completamento $\hat{R}$ é uma interseção completa.

Proposição 2.6.5. Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local que é interseção completa. Então, R é Cohen-Macaulay.

Demonstração. Pela Proposição 2.5.11(2), podemos supor que R é completo. Então, $R \cong S/(f_1,\ldots,f_k)$ onde S é um anel local regular e $f_1,\ldots,f_k$ é uma sequência S-regular. Pela Proposição 2.6.3, S é um anel Cohen-Macaulay. Pelo Teorema 2.5.7(1), $S/(f_1,\ldots,f_k)$ é um anel Cohen-Macaulay. Assim, o isomorfismo de anéis acima indica R é um anel Cohen-Macaulay. □

Definição 2.6.6. Um anel local Noetheriano $(R,\mathfrak{m},k)$ é *Gorenstein* se

$$\operatorname{Ext}_R^i(k,R) \cong \begin{cases} k, & \text{se } i = \dim(R); \\ 0, & \text{se } i \neq \dim(R). \end{cases}$$

Proposição 2.6.7. Se $(R,\mathfrak{m},k)$ é um anel local Gorenstein, então R é Cohen-Macaulay.

Demonstração. Por definição,

$$\operatorname{Ext}_R^i(k,R) \cong \begin{cases} k, & \text{se } i = \dim(R); \\ 0, & \text{se } i \neq \dim(R). \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.2.8, é claro que $\operatorname{depth}(R) = \dim(R)$. □

Proposição 2.6.8. Sejam $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local Noetheriano e $x \in \mathfrak{m}$ um elemento R-regular. Então, R é Gorenstein se, e somente se, $R/(x)$ é Gorenstein.

Demonstração. Pela Proposição 2.1.6,

$$\operatorname{Ext}^i_{R/(x)}(k,R/(x)) \cong \operatorname{Ext}^{i+1}_R(k,R)$$

para todo $i \geq 0$. Portanto,

$$\operatorname{Ext}^i_R(k,R) \cong \begin{cases} k, & \text{se } i = \dim(R), \\ 0, & \text{se } i \neq \dim(R) \end{cases} \Longleftrightarrow \operatorname{Ext}^i_{R/(x)}(k,R/(x)) \cong \begin{cases} k, & \text{se } i = \dim(R)-1, \\ 0, & \text{se } i \neq \dim(R)-1. \end{cases}$$

Assim, como $\dim(R/xR) = \dim(R) - 1$ (Proposição 2.2.13),

$$\operatorname{Ext}^i_R(k,R) \cong \begin{cases} k, & \text{se } i = \dim(R), \\ 0, & \text{se } i \neq \dim(R) \end{cases} \Longleftrightarrow \operatorname{Ext}^i_{R/(x)}(k,R/(x)) \cong \begin{cases} k, & \text{se } i = \dim(R/(x)), \\ 0, & \text{se } i \neq \dim(R/(x)). \end{cases}$$

Isto mostra que R é Gorenstein se, e somente se, $R/(x)$ é Gorenstein. □

Temos provado que anéis locais regulares, de interseção Cohen-Macaulay e Gorenstein são Cohen-Macaulay. Na verdade, mais geralmente as seguintes implicações valem para um anel local Noetheriano:

$$\text{regular} \Longrightarrow \text{interseção completa} \Longrightarrow \text{Gorenstein} \Longrightarrow \text{Cohen-Macaulay}.$$

(Ver (BRUNS W.; HERZOG, 1998, Proposição 3.1.20)).

Exemplo 2.6.9. (WINSTER, 2000, p. 15) Seja k um corpo.

(1) O anel $k[[x,y]]/(xy)$ é Gorenstein mas não é regular.

(2) O anel $k[[x,y]]/(x^2,xy,y^2)$ é Cohen-Macaulay mas não é Gorenstein.

CAPÍTULO

3

SOBRE A CONJECTURA DE AUSLANDER-REITEN PARA ANÉIS LOCAIS COHEN-MACAULAY

A referência principal para este capítulo é (GOTO S.;TAKAHASHI, 2017).

A célebre conjectura de Auslander-Reiten afirma o seguinte:

Conjectura 3.0.1 (Auslander-Reiten)**.** Seja R um anel Noetheriano. Se M é um R-módulo finitamente gerado e $\mathrm{Ext}_R^i(M,M) = \mathrm{Ext}_R^i(M,R) = 0$ para todo $i > 0$, então M é projetivo.

Quando o anel é local Noetheriano, a conclusão pode ser trocada por "M é livre (Teorema 1.5.13). Assim, a formulação da conjectura de Auslander-Reiten para anéis locais Cohen-Macaulay é como segue:

Conjectura 3.0.2. Sejam R um anel local Cohen-Macaulay e M um R-módulo finitamente gerado. Se $\mathrm{Ext}_R^i(M,M) = \mathrm{Ext}_R^i(M,R) = 0$ para todo $i > 0$, então M é livre.

Neste capítulo, nosso objetivo é mostrar que a conjectura de Auslander-Reiten vale para módulos Cohen-macaulay maximais de posto um sobre anéis locais normais Cohen-Macaulay. Isto equivale a mostrar que a Conjectura 3.0.2 cumpre-se quando R é normal e M é Cohen-Macaulay maximal de posto 1. O teorema principal que precisamos para mostrar este fato é o seguinte:

Teorema 3.0.3. Seja R um anel local Cohen-Macaulay de dimensão $d > 0$. Seja M um R-módulo Cohen-Macaulay maximal de posto 1. Se

$$\mathrm{Ext}_R^i(M,M) = \mathrm{Ext}_R^j(M, \mathrm{Hom}_R(M,M)) = 0$$

para todo $1 \leq i \leq d-1$ e $1 \leq j \leq d$, então M é livre.

3.1 O Teorema Principal

O objetivo desta seção é provar o Teorema 3.0.3. Começamos enunciando e mostrando cinco lemas e uma observação que ajudarão na prova desse Teorema.

Lema 3.1.1. Seja $(R,\mathfrak{m},k) \to (S,\mathfrak{n},l)$ um homomorfismo local plano de anéis locais Noetherianos. Se M é um R-módulo finitamente gerado, então M é um R-módulo livre se, e somente se, $M' := M \otimes_R S$ é um S-módulo livre.

Demonstração. Só mostraremos que se M' é S-livre, então M é livre. Pelo Teorema 1.5.13, é suficiente mostrar que M é plano.

Seja $N_1 \to N_2 \to N_3$ uma sequência exata. Temos que mostrar, que a sequência

$$N_1 \otimes_R M \to N_2 \otimes_R M \to N_3 \otimes_R M$$

é exata; isto é $H := \dfrac{\ker(N_2 \otimes_R M \to N_3 \otimes_R M)}{\mathrm{im}(N_1 \otimes_R S \to N_2 \otimes_R S)} = 0.$

Como S é R-plano, a sequência

$$N_1 \otimes_R S \to N_2 \otimes_R S \to N_3 \otimes_R S$$

é exata. Como M' é S-plano, a sequência

$$(N_1 \otimes_R S) \otimes_S M' \to (N_2 \otimes_R S) \otimes_S M' \to (N_3 \otimes_R S) \otimes_S M'$$

é exata. Pela Proposição A.1.36(1), a sequência

$$(N_1 \otimes_R M) \otimes_R S \to (N_2 \otimes_R M) \otimes_R S \to (N_3 \otimes_R M) \otimes_R S$$

é exata. Portanto,

$$H \otimes_R S \cong \frac{\ker((N_2 \otimes_R M) \otimes_R S \to (N_3 \otimes_R M) \otimes_R S)}{\mathrm{im}((N_1 \otimes_R M) \otimes_R S \to (N_2 \otimes_R M) \otimes_R S))} = 0,$$

onde o isomorfismo é pelo Lema 1.1.4(1).

Seja $x \in H$ e ponha $I = \mathrm{ann}_R(x)$.

Afirmação. $I = R$. Com efeito, seja $\phi : R/I \to H$ o R-homomorfismo tal que $1 + I \to x$. Já que $I = \mathrm{ann}_R(x)$, ϕ está bem definido e é injetivo. Como S é plano, $\varphi \otimes_R S : R/I \otimes_R S \to H \otimes_R S$ é injetivo; mas já que $H \otimes_R S = 0$, devemos ter $S/IS \cong R/I \otimes S = 0$. Se $I \neq R$, então $I \subset \mathfrak{m}$, e portanto $S/\mathfrak{m}S = 0$. Assim, $1 \in \mathfrak{m}S \subset \mathfrak{n}$, donde $1 \in \mathfrak{n}$; uma contradição. Portanto, $I = R$.

A afirmação indica que $x = 0$. Segue da arbitrariedade de x que $H = 0$. □

Observação 3.1.2. Seja R um anel local Cohen-Macaulay. Se $\rho : (R,\mathfrak{m}) \to (S,\mathfrak{n})$ é um homomorfismo local plano de anéis Noetherianos tal que $\mathfrak{m}S = \mathfrak{n}$, então S é um anel local Cohen-Macaulay da mesma dimensão de R e se S satisfaz o Teorema 3.0.3, então R também o satisfaz.

Demonstração. De fato, pelo Teorema 2.5.10, S é um anel local Cohen-Macaulay o qual, pela Proposição 2.2.18(1), tem mesma dimensão de R. Agora, suponha que S satisfaz o Teorema 3.0.3. Seja M um R-módulo Cohen-Macaulay maximal de posto 1 tal que $\mathrm{Ext}^i_R(M,M) = \mathrm{Ext}^j_R(M,\mathrm{Hom}_R(M,M)) = 0$ para todo $1 \leq i \leq d-1$ e $1 \leq j \leq d$. Então $M \otimes_R S$ é um S-módulo Cohen-Macaulay maximal (pelo Teorema 2.5.10 e pela Proposição 2.2.18(1)) de posto 1 (pela Proposição B.0.10) tal que $\mathrm{Ext}^i_S(M\otimes_R S, M\otimes_R S) = \mathrm{Ext}^j_S(M\otimes_R S, \mathrm{Hom}_S(M\otimes_R S, M\otimes_R S)) = 0$ para todo $1 \leq i \leq d-1$ e $1 \leq j \leq d$ (pela Proposição 1.4.7). Assim, como o Teorema 3.0.3 vale para S, segue que $M \otimes_R S$ é um S-módulo livre. Logo, pelo Lema 3.1.1, M é um R-módulo livre. Portanto, o Teorema 3.0.3 cumpre-se para R. □

Lema 3.1.3. Suponha que R é um anel local Noetheriano Cohen-Macaulay de dimensão $d > 0$. Se I é um ideal próprio de R que é Cohen-Macaulay maximal como R-módulo o qual tem posto 1, então R/I é um R-módulo Cohen-Macaulay de dimensão $d-1$.

Demonstração. Pela Proposição B.0.12, I contém um elemento x que é R-regular. Temos,

$$\begin{aligned}
\mathrm{depth}(R/I) &\leq \dim(R/I) && \text{pelo Corolário 2.2.14}\\
&\leq \dim(R/(x)) &&\\
&= d-1 && \text{pela Proposição 2.2.13(2)}
\end{aligned}$$

e portanto $\mathrm{depth}(R/I) \leq \dim(R/I) \leq d-1$. Por outro lado, aplicando a Proposição 2.2.9(3) para a sequência

$$0 \to I \to R \to R/I \to 0$$

temos que

$$\mathrm{depth}(R/I) \geq \min\{\mathrm{depth}(I)-1, \mathrm{depth}(R)\} = \min\{d-1, d\} = d-1.$$

Segue que $\mathrm{depth}(R/I) \leq \dim(R/I) \leq d-1 \leq \mathrm{depth}(R/I)$; donde $\mathrm{depth}(R/I) = \dim(R/I) = d-1$. Isto mostra que R/I é um R-módulo Cohen-Macaulay de dimensão $d-1$. □

Lema 3.1.4. Seja M um R-módulo finitamente gerado. Seja $x \in R$ um elemento R- e M-regular. Sejam m,n inteiros positivos tais que

$$\mathrm{Ext}^i_R(M,M) = \mathrm{Ext}^j_R(M,\mathrm{Hom}_R(M,M)) = 0$$

para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Então,

$$\mathrm{Ext}^i_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{M}) = \mathrm{Ext}^j_{\overline{R}}(\overline{M},\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{M})) = 0$$

para todo $1 \leq i \leq m-1$ e $1 \leq j \leq n-1$, onde para todo R-módulo N, definimos $\overline{N} = N/xN$.

Demonstração. Seja $t \geq 1$ e C um R-módulo tal que $x \in R$ é C-regular e $\mathrm{Ext}^i_R(M,C) = 0$ para todo $1 \leq i \leq t$.

Como $x \in R$ é C-regular, temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{x} C \longrightarrow \overline{C} \longrightarrow 0\ .$$

Como $\mathrm{Ext}^i_R(M,C) = 0$ para todo $1 \leq i \leq t$, da $\mathrm{Ext}(M,-)$-sequência exata longa associada à sequência acima, obtemos que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,C) \xrightarrow{x} \mathrm{Hom}_R(M,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,\overline{C}) \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

é exata e que

$$\mathrm{Ext}^i_R(M,\overline{C}) = 0, \forall\ 1 \leq i \leq t-1. \tag{3.2}$$

Se $C = M$ e $t = m$, por exatidão de (3.1), por um lado temos que $x : \mathrm{Hom}_R(M,M) \to \mathrm{Hom}_R(M,M)$ é injetiva, donde x é $\mathrm{Hom}_R(M,M)$-regular; e por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Hom}_R(M,M)} &= \frac{\mathrm{Hom}_R(M,M)}{x\mathrm{Hom}_R(M,M)} \\
&\cong \mathrm{Hom}_R(M,\overline{M}) && \text{pelo primeiro teorema do isomorfismo} \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{M}) && \text{pela Proposição 2.1.15.}
\end{aligned}$$

Agora, da Proposição 2.1.15 e de (3.2), temos que

$$\mathrm{Ext}^i_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{C}) = 0, \forall 1 \leq i \leq t-1.$$

Desta maneira, tomando $C = M$ e $t = m$ (resp. $C = \mathrm{Hom}_R(M,M)$ e $t = n$), segue que $\mathrm{Ext}^i_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{M}) = 0$ para todo $1 \leq i \leq m-1$ (resp. $\mathrm{Ext}^j_{\overline{R}}(\overline{M},\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{M})) = 0$ para todo $1 \leq j \leq n-1$). $\square$

Lema 3.1.5. Sejam $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local completo Noetheriano de dimensão 1 e Q o anel total de frações de R. Se $\overline{R}$ é o fecho de integral de R em Q, então $\mathfrak{m}\overline{R} \cap R = \mathfrak{m}$.

Demonstração. A inclusão $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}\overline{R} \cap R$ é clara. Deste modo, é suficiente mostrar que $\mathfrak{m}\overline{R} \cap R \subset \mathfrak{m}$, o que equivale a mostrar que o ideal $\mathfrak{m}\overline{R} \cap R$ de R é próprio.

Como $d = 1$, existe um primo minimal $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ de R, donde $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0$, e assim, pelo Teorema do ideal principal de Krull(mais específicamente, pelo Corolário A.5.4), $\mathfrak{p} \subset \mathrm{ZD}(R)$. Dessa maneira, se $S = R - \mathrm{ZD}(R)$, então $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$. Portanto, a aplicação $\varphi : Q \to \mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p})$, dada por $\frac{x}{y} \longmapsto \frac{x+\mathfrak{p}}{y+\mathfrak{p}}$, está bem definida. Observe que φ é um homomorfismo de anéis.

Por outro lado, observe que $(R/\mathfrak{p},\mathfrak{m}/\mathfrak{p})$ é um domínio completo local Noetheriano. Assim, se denotamos por $\overline{R/\mathfrak{p}}$ ao fecho integral de $R/\mathfrak{p}$ em $\mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p})$, pelo Teorema A.6.7, $\overline{R/\mathfrak{p}}$ é um $R/\mathfrak{p}$-módulo finitamente gerado.

Agora, suponha que $1 \in \mathfrak{m}\overline{R} \cap R$. Então, $1 \in \mathfrak{m}\overline{R}$, donde $1+\mathfrak{p} = \varphi(1) \in (\mathfrak{m}/\mathfrak{p})\overline{R/\mathfrak{p}} \subset \mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p})$, e portanto $(\mathfrak{m}/\mathfrak{p})\overline{R/\mathfrak{p}} = \overline{R/\mathfrak{p}}$. Segue, do Lema de Nakayama, que $\overline{R/\mathfrak{p}} = 0$, donde $R/\mathfrak{p} = 0$; o que não acontece. Portanto, $1 \notin \mathfrak{m}\overline{R} \cap R$, isto é, o ideal $\mathfrak{m}\overline{R} \cap R$ de R é próprio. $\square$

Lema 3.1.6. Seja R um anel local Cohen-Macaulay 1-dimensional. Seja M um R-módulo Cohen-Macaulay maximal tal que $\mathrm{Ext}_R^1(M, \mathrm{Hom}_R(M,M)) = 0$. Suponha que existe um R-isomorfismo $\mathrm{Hom}_R(M,M) \cong M$. Então, M é cíclico.

Demonstração. Como R é um anel Cohen-Macaulay 1-dimensional e M é um R-módulo Cohen-Macaulay maximal, então $\mathrm{depth}_R(R) > 0$ e $\mathrm{depth}_R(M) > 0$, donde, pelo Lema 2.3.1, existe um elemento $x \in \mathfrak{m}$ que é R-regular e M-regular.

Para cada R-módulo N, definimos $\overline{N} = N/xN$.

Ponha $n = \mu_R(M)$. Então, $n = \mu_{\overline{R}}(\overline{M})$. De fato, ponha $m = \mu_{\overline{R}}(\overline{M})$. Por definição de n, M é gerado por n elementos de M e é claro que as imagens desses n elementos em $\overline{M}$ geram $\overline{M}$ como $\overline{R}$-módulo, donde $m \leq n$. Agora, como $m = \mu_{\overline{R}}(\overline{M})$, existem m elementos $x_1, \ldots, x_m$ cujas imagens geram $\overline{M}$ como $\overline{R}$-módulo e portanto também como R-módulo. Assim, $M = xM + \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$, donde, pelo Lema de Nakayama generalizado, $M = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ e consequentemente $n \leq m$.

Como $x \in R$ é M-regular, a sequência

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x} M \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow 0$$

é exata. Da hipótese, note que $\mathrm{Ext}_R^1(M,M) = 0$. Desta maneira, da $\mathrm{Ext}(M,-)$-sequência exata longa associada à sequência acima, temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,M) \xrightarrow{x} \mathrm{Hom}_R(M,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,\overline{M}) \longrightarrow 0\ .$$

Então,

$$\begin{aligned}
\overline{M} &= M/xM \\
&\cong M \otimes_R R/(x) \\
&\cong \mathrm{Hom}_R(M,M) \otimes_R R/(x) \\
&\cong \mathrm{Hom}_R(M,M)/x\mathrm{Hom}_R(M,M) \\
&\cong \mathrm{Hom}_R(M,\overline{M}) && \text{pelo primeiro teorema do isomorfismo} \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{M}) && \text{pela Proposição 2.1.15.}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(k,\overline{M}) \cong \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(k,\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{M})) \cong \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M} \otimes_{\overline{R}} k,\overline{M}) \cong \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(k^n,\overline{M}) = \left(\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(k,\overline{M})\right)^n,$$

onde o último isomorfismo é porque $n = \mu_{\overline{R}}(\overline{M}) = \dim_k(\overline{M} \otimes_{\overline{R}} k)$. Agora, pela Proposição 2.1.6 e pelo Teorema 2.2.8, $\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(k,\overline{M}) \cong \mathrm{Ext}_R^1(k,M) \neq 0$, donde $\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(k,\overline{M}) \neq 0$. Portanto, $n = 1$. Isto mostra que M é cíclico. $\square$

Agora estamos prontos para mostrar o Teorema 3.0.3.

Demonstração do Teorema 3.0.3. Vamos a dividir a demonstração em seis passos.

Passo 1: Podemos assumir R completo e k infinito.

Considerando o homomorfismo natural $R \to R(X)$, onde $R(X) = R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$ (o qual tem corpo residual infinito), pela Observação 3.1.2, podemos supor que o corpo residual de R é infinito. Considerando agora o homomorfismo natural $R \to \hat{R}$ e observando que $\hat{R}$ é completo com corpo residual infinito, novamente pela Observação 3.1.2, podemos supor que R é completo e tem corpo residual infinito.

Passo 2: M é isomorfo a um ideal I de R e pode-se supor que I é próprio. Assim, é suficiente demonstrar que I é livre.

Pela Proposição 2.5.6, M é um R-módulo livre de torção. Então, pela Proposição B.0.11, M é isomorfo a um ideal I de R. Se $I = R$, então $M \cong I = R$ e temos o resultado desejado. Assim, que podemos supor que $I \neq R$.

Passo 3: Podemos supor $d = 1$.

Como I tem posto 1, existe um elemento em I que é um elemento R-regular (Proposição B.0.12). Então, pelo Lema 3.1.3, R/I é um R-módulo Cohen-Macaulay de dimensão $d-1$. Em vista da Proposição 2.2.13, podemos obter por meio de uma aplicação repetida do Lema 2.3.1, uma sequência $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_{d-1} \subset \mathfrak{m}$ que seja uma sequência R-regular e R/I-regular.

Então, temos:

a) $R/\boldsymbol{x}R$ é um anel Cohen-Macaulay de dimensão 1;

b) $\frac{I}{\boldsymbol{x}I}$ é um $R/\boldsymbol{x}R$-módulo Cohen-Macaulay maximal de dimensão 1;

c) $\frac{I}{\boldsymbol{x}I}$ tem posto 1 como $R/\boldsymbol{x}R$-módulo;

d) $\operatorname{Ext}^1_{R/\boldsymbol{x}R}(I/\boldsymbol{x}I, \operatorname{Hom}_{R/\boldsymbol{x}R}(I/\boldsymbol{x}I, I/\boldsymbol{x}I)) = 0$;

e) Se $I/\boldsymbol{x}I$ é um $R/\boldsymbol{x}R$-módulo livre, então I é um R-módulo livre.

Portanto, note que podemos supor $d = 1$. Com efeito, pelo Teorema 2.5.7(1) e pela Proposição 2.2.13(2), $R/\boldsymbol{x}R$ é um anel Cohen-Macaulay de dimensão 1, o que implica (a).

Como I tem um elemento R-regular, note que $\operatorname{ann}(I)=0$. Agora,

$$\begin{aligned}
\dim\left(\frac{I}{\boldsymbol{x}I}\right) &= \dim\left(\frac{R}{\operatorname{ann}(I/\boldsymbol{x}I)}\right) \\
&= \dim\left(\frac{R}{\boldsymbol{x}R+\operatorname{ann}(I)}\right) && \text{pelo Lema 2.2.12} \\
&= \dim\left(\frac{R}{\boldsymbol{x}R}\right) \\
&= 1 \\
&= d-(d-1) \\
&= \dim(I)-(d-1).
\end{aligned}$$

Então, $\boldsymbol{x}$ é uma sequência I-regular (pelo Teorema 2.5.4(3)), e consequentemente $I/\boldsymbol{x}I$ é um $R/\boldsymbol{x}R$-módulo Cohen-Macaulay maximal de dimensão 1 (pelo Teorema 2.5.7(1)), o que implica (b).

Considere a sequência natural

$$0 \to \frac{I}{\boldsymbol{x}I} \to \frac{R}{\boldsymbol{x}R} \to \frac{R}{I+\boldsymbol{x}R} \to 0$$

e note que ela é exata. Por outro lado, note que $\frac{R/I}{\boldsymbol{x}(R/I)} \cong \frac{R}{I+\boldsymbol{x}R}$; donde, pela Proposição 2.2.13(2), $\dim(\frac{R}{I+\boldsymbol{x}R}) = \dim(\frac{R/I}{\boldsymbol{x}(R/I)}) = 0$, o que implica que $\frac{R}{I+\boldsymbol{x}R}$ tem comprimento finito. Assim, pela Proposição B.0.13, $\frac{R}{I+\boldsymbol{x}R}$ tem posto zero como $R/\boldsymbol{x}R$-módulo. Logo, pela aditividade do posto de módulos, $I/\boldsymbol{x}I$ tem posto 1 como $R/\boldsymbol{x}R$-módulo. Isto mostra (c).

Como $\boldsymbol{x}$ é uma sequência I-regular, uma aplicação repetida do Lema 3.1.4 implica (d).

O item (e) é imediato do Corolário 2.1.16, da Observação 1.6.2 e do Teorema 1.5.13.

Passo 4: Existe $r \in I$ tal que (r) é uma redução de I. Note que $r \in I$ é um elemento R-regular.

Pelo Corolário 2.5.9, $\operatorname{ht}(I)>0$. Então, pela Proposição A.4.7, a propagação analítica de I é 1. Logo, pela Proposição A.4.6, existe $r \in I$ tal que (r) é uma redução de I.

Como (r) é uma redução de I e I tem um elemento R-regular, note que r é R-regular.

Passo 5: Seja Q o anel total de frações de R. Pensemos R como um subanel de Q por meio da aplicação de localização $R \to Q$. Defina $L := \frac{I}{r} = \{\frac{x}{r} : x \in I\}$ e $S := (L :_Q L) = \{y \in Q : yL \subset L\}$. Então, $1 \in L \cong I$, $S \cong \operatorname{Hom}_R(L,L)$, $R \subset S \subset L \subset \overline{R} \subset Q$ e $S = L$, onde $\overline{R}$ denota o fecho integral de R em Q.

Como $r \in I$ e $1 = \frac{r}{r}$, por definição de L, temos que $1 \in L$.

Defina $\varphi : I \to L$ por $\varphi(x) = \frac{x}{r}$. É fácil ver que φ é um R-isomorfismo e portanto $L \cong I$.

Agora, defina $\psi : S \to \operatorname{Hom}_R(L,L)$ por $\psi(s)(y) = sy$. Então, temos que ψ é um R-isomorfismo bem definido. De fato,

- Boa definição de ψ. Para todo $s \in S, y \in L$, por definição de S, temos que $sy \in L$. Isto mostra que ψ está bem definida.

- ψ é um R-homomorfismo. Isto é fácil de provar.

- ψ é bijetiva. Defina $\beta : \mathrm{Hom}_R(L,L) \to S$ por $\beta(f) = f(1)$. Dada $f \in \mathrm{Hom}_R(L,L)$, para todo $a \in I$, note que
$$af(1) = f\left(r\frac{a}{r}\right) = rf\left(\frac{a}{r}\right),$$
donde $\frac{a}{r}f(1) = f\left(\frac{a}{r}\right) \in L$. Isto mostra que $f(1) \in S$ para todo $f \in \mathrm{Hom}_R(L,L)$. Consequentemente β está bem definida. Note que β é a inversa de ψ.

Agora mostremos o afirmado respeito às inclusões.

- $R \subset S$. Seja $x \in R$. Para todo $y \in I$, claramente $xy \in I$; donde $x\frac{y}{r} = \frac{x}{1}\frac{y}{r} = \frac{xy}{r} \in L$. Portanto, $x \in S$.

- $S \subset L$. Seja $s \in S$. Como $1 \in L$, por definição de S, temos que $s = s \cdot 1 \in L$.

- $L \subset \overline{R}$. Como (r) é uma redução de I, pela Proposição A.4.5, $I \subset \overline{(r)}$, onde $\overline{(r)}$ denota o fecho integral do ideal (r) de R. Daí, note que $L = \frac{I}{r} \subset \overline{R}$.

Finalmente mostremos que $S = L$. Ponha $C = L/S$. Devemos mostrar que $C = 0$.

O R-isomorfismo φ induz um R-isomorfismo $L/R \cong I/rR$. Além disso I/rR tem comprimento finito pois I/rI tem comprimento finito (já que $\dim(I/rI) = \dim(I) - 1 = 0$ pela Proposição 2.2.13(2)) e o R-homomorfismo natural $I/rI \to I/rR$ é sobrejetivo. Portanto, L/R tem comprimento finito. Deste modo, a sobrejetividade do R-homomorfismo natural $L/R \to L/S = C$ implica que C tem comprimento finito.

Para mostrar que $C = 0$, suponha, pelo absurdo, que $C \neq 0$. Então, pelo Lema 2.2.23, existe $z \in \mathrm{Soc}(C)$ com $z \neq 0$.

Vamos construir um R-homomorfismo $\phi : L \to C$ tal que $\phi(1) = z$. Como $z \in \mathrm{Soc}(C) - \{0\}$, então existe um R-homomorfismo não nulo bem definido $k \to C$ tal que $1 + \mathfrak{m} \mapsto z$ (Observação 2.2.21). Por outro lado, já que $L \subset \overline{R}$ e $\mathfrak{m}\overline{R} \cap R = \mathfrak{m}$ (pelo Lema 3.1.5), note que $1 \in L - \mathfrak{m}L$; pelo que $1 + \mathfrak{m}L$ forma parte de uma base para o k- espaço vetorial $L/\mathfrak{m}L$, o qual nos indica que podemos achar um k-homomorfismo $L/\mathfrak{m}L \to k$ tal que $1 + \mathfrak{m}L \mapsto 1 + \mathfrak{m}$, o qual é também claramente um R-homomorfismo. Definimos $\phi : L \to C$ como sendo a composta $L \to L/\mathfrak{m}L \to k \to C$. Observe que $\phi(1) = z$.

Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\theta} L \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$$

onde $\theta : S \to L$ é a inclusão e $\pi : L \to C$ a projeção natural.

Por hipótese e pelos isomorfismos $L \cong I \cong M$ e $S \cong \mathrm{Hom}_R(M,M)$, temos $\mathrm{Ext}^1_R(L,S) = 0$. Então, da $\mathrm{Ext}(L,-)$-sequência exata longa associada à sequência exata acima temos que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L,S) \xrightarrow{\theta_*} \mathrm{Hom}_R(L,L) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Hom}_R(L,C) \longrightarrow 0$$

é exata; e, em particular, $\pi_* : \mathrm{Hom}_R(L,L) \to \mathrm{Hom}_R(L,C)$ é sobrejetiva. Portanto, existe $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(L,L)$ tal que $\phi = \pi \circ \gamma$. Em consequência, $\gamma(1) = \beta(\gamma) \in S$ e

$$z = \phi(1) = \pi(\gamma(1)) = \pi(\theta(\gamma(1)) = 0,$$

o que é uma contradição ao fato de que $z \neq 0$.

Passo 6: I é isomorfo a R e portanto I é livre.

Do passo 5, note que $I \cong \mathrm{Hom}_R(I,I)$. Logo, pelo Lema 3.1.6, I é cíclico. Daí, como I tem um R-elemento regular, segue que $I \cong R$. □

3.2 Consequências do Teorema Principal

Nesta seção veremos algumas consequências do Teorema 3.0.3, entre elas a validade da conjectura de Auslander-Reiten para módulos Cohen-Macaulay maximais de posto 1 sobre anéis locais normais Cohen-Macaualy.

Corolário 3.2.1. Seja R um anel local Cohen-Macaulay de dimensão $d \geq 1$. Seja I um ideal de R de altura positiva o qual é Cohen-Macaulay maximal como R-módulo. Se $\mathrm{Ext}^i_R(I,I) = \mathrm{Ext}^j_R(I,\mathrm{Hom}_R(I,I)) = 0$ para todo $1 \leq i \leq d-1$ e $1 \leq j \leq d$, então $I \cong R$.

Demonstração. Como I tem altura positiva, pelo Corolário 2.5.9, I tem posto 1. Logo, pelo Teorema 3.0.3, segue o resultado. □

Se I é um ideal de R que contém um elemento R-regular, então $R \subset \mathrm{Hom}_R(I,I) \subset Q$ (onde Q é o anel total de frações de R). No caso que $R = \mathrm{Hom}_R(I,I)$, dizemos que I é um *ideal fechado*. Pelo Corolário 2.5.9, temos como consequência imediata do Corolário 3.2.1 o seguinte.

Corolário 3.2.2. Seja R um anel local Cohen-Macaulay de dimensão $d \geq 1$. Seja I um ideal fechado de R o qual é Cohen-Macaulay maximal como R-modulo. Suponha que $\mathrm{Ext}^i_R(I,I) = \mathrm{Ext}^j_R(I,R) = 0$ para todo $1 \leq i \leq d-1$ e $1 \leq j \leq d$. Então $I \cong R$.

Corolário 3.2.3. Seja R um anel local normal Cohen-Macaulay de dimensão $d > 0$. Seja M um R-módulo Cohen-Macaulay maximal de posto 1. Suponha que

$$\mathrm{Ext}^i_R(M,M) = \mathrm{Ext}^j_R(M,R) = 0$$

para todo $1 \leq i \leq d-1$ e $1 \leq j \leq d$. Então, M é livre.

Demonstração. Pelo Teorema 3.0.3, é suficiente mostrar que $R \cong \mathrm{Hom}_R(M,M)$.

Como na prova do Teorema 3.0.3, M é isomorfo a um ideal I de R, podemos supor $I \neq R$, I tem um elemento R-regular e $\mathrm{ann}(I) = 0$ (já que I tem um elemento R-regular).

Denotemos por Q o anel total de frações de R. Consideremos R como um subanel de Q por meio da aplicação de localização $R \to Q$.

Seja $S = (I :_Q I) = \{y \in Q : yI \subset I\}$. Então, $R \subset S \subset \overline{R} \subset Q$, onde $\overline{R}$ denota o fecho integral de R em Q, e portanto, pela normalidade de R, tem-se $R = S$. Com efeito, a inclusão $R \subset S$ é clara. Provemos então a inclusão $S \subset \overline{R}$. De fato, sejam $x \in R$ e $r \in R$ um não divisor de zero de R tais que $\frac{x}{r} \in S$. Então, $\frac{x}{r}I \subset I$, donde $xI \subset rI$. Portanto, note que $rI = (r,x)I$. Logo, pela Proposição A.4.4, x é integral sobre (r). Isto indica que $\frac{x}{r}$ é integral sobre R. Em consequência, $\frac{x}{r} \in \overline{R}$.

Agora, $S \cong \mathrm{Hom}_R(I,I)$. De fato, defina $\psi : S \to \mathrm{Hom}_R(I,I)$ por $\psi(s)(y) = sy$. Então, temos

- Boa definição de ψ. Para todo $s \in S, y \in I$, por definição de S, temos que $sy \in I$. Isto mostra que ψ está bem definida.
- ψ é um R-homomorfismo. Isto é fácil de provar.
- ψ é bijetiva. Fixe um elemento R-regular $t \in I$. Defina $\varphi : \mathrm{Hom}_R(I,I) \to S$ por $\varphi(f) = \frac{f(t)}{t}$. Para todo $f \in \mathrm{Hom}_R(I,I)$ e todo $a \in I$, note que

$$a\frac{f(t)}{t} = \frac{f(at)}{t} = \frac{tf(a)}{t} = f(a) \in I.$$

  Isto mostra que $\frac{f(t)}{t} \in S$ para todo $f \in \mathrm{Hom}_R(I,I)$. Consequentemente φ está bem definida. Note que φ é a inversa de ψ.

Como $R = S \cong \mathrm{Hom}_R(I,I)$ e $I \cong M$, então $R \cong \mathrm{Hom}_R(M,M)$. □

Observe que o Corolário 3.2.3, indica claramente que a Conjectura 3.0.2 é verdadeira quando R é normal e M é um R-módulo Cohen-Macaulay maximal de posto 1, o qual como vimos, é equivalente a que a conjectura de Auslander-Reiten cumpre-se para módulos Cohen-Macaulay maximais de posto 1 sobre anéis locais normais Cohen-Macaulay. Deste modo, temos conseguido o objetivo desta dissertação.

Lema 3.2.4. Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local Noetheriano Gorestein. Se M é um R-módulo Cohen-Macaulay maximal, então $\mathrm{Ext}^i_R(M,R) = 0$ para todo $i > 0$.

Demonstração. Seja $d = \dim(R)$. Mostraremos o resultado por indução sobre d.

Suponha primeiramente $d = 0$. Neste caso, R é Artiniano e, pelo Teorema A.2.8(1), $\text{length}(M) < \infty$. Também, por ser R um anel Gorenstein,

$$\text{Ext}_R^i(k,R) \cong \begin{cases} k, & \text{se } i = 0 \\ 0, & \text{se } i \neq 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Além disso, observe que todo R-módulo não nulo finitamente gerado é Cohen-Macaulay maximal.

Mostremos o requerido por indução sobre $n := \text{length}(M)$. Se $n = 1$, então $M \cong k$ e por (3.3), $\text{Ext}_R^i(M,R) = 0$ para todo $i > 0$.

Suponha agora $n > 1$. Então, existe um submódulo N de M de comprimento $\text{length}(N) = n-1$ tal que $M/N \cong k$. Observe que N é finitamente gerado pois M é Noetheriano (pela Proposição A.2.5). Por hipótese indutiva, $\text{Ext}_R^i(N,R) = 0$ para todo $i > 0$. Por outro lado, o R-isomorfismo $M/N \cong k$ induz uma sequência exata $0 \to N \to M \to k \to 0$ e ela a sua vez, pelo Teorema 1.5.5 induz uma sequência exata longa

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}_R(k,R) &\to \text{Hom}_R(M,R) \to \text{Hom}_R(N,R) \to \\ \to \text{Ext}_R^1(k,R) &\to \text{Ext}_R^1(M,R) \to \text{Ext}_R^1(N,R) \to \cdots \\ \cdots \to \text{Ext}_R^i(k,R) &\to \text{Ext}_R^i(M,R) \to \text{Ext}_R^i(N,R) \to \cdots . \end{aligned}$$

Assim, como $\text{Ext}_R^i(k,R) = \text{Ext}_R^i(N,R) = 0$ para todo $i > 0$, segue que $\text{Ext}_R^i(M,R) = 0$ para todo $i > 0$.

Agora, suponha $d > 0$ e que o resultado vale para todos os anéis locais Gorenstein de dimensão $d-1$.

Como $d = \text{depth}_R(R) = \text{depth}_R(M) > 0$, pelo Lema 2.3.1, existe $x \in \mathfrak{m}$ R-regular e M-regular.

Pelas Proposições 2.6.8 e 2.2.13, $R/(x)$ é Gorenstein de dimensão $d-1$ e M/xM é um $R/(x)$-módulo Cohen-Macaulay maximal. Por hipótese indutiva,

$$\text{Ext}_{R/(x)}^i(M/xM, R/(x)) = 0$$

para todo $i > 0$. Logo, pela Proposição 2.1.6, $\text{Ext}_R^i(M/xM,R)$ para todo $i > 1$.

Como $x \in R$ é um elemento M-regular, temos uma sequência exata $0 \to M \xrightarrow{x} M \to M/xM \to 0$. Ela induz, pelo Teorema 1.5.5, uma sequência exata longa

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M/xM,R) &\to \text{Hom}_R(M,R) \xrightarrow{x} \text{Hom}_R(M,R) \to \\ \to \text{Ext}_R^1(M/xM,R) &\to \text{Ext}_R^1(M,R) \xrightarrow{x} \text{Ext}_R^1(M,R) \to \cdots \\ \cdots \to \text{Ext}_R^i(M/xM,R) &\to \text{Ext}_R^i(M,R) \xrightarrow{x} \text{Ext}_R^i(M,R) \to \cdots . \end{aligned}$$

Daí, como $\text{Ext}_R^i(M/xM,R) = 0$ para todo $i > 1$, observe que para todo $i > 0$, o R-homomorfismo $x : \text{Ext}_R^i(M,R) \to \text{Ext}_R^i(M,R)$ é sobrejetivo. Consequentemente, pelo Lema de Nakayama, $\text{Ext}_R^i(M,R) = 0$ para todo $i > 0$. $\square$

Corolário 3.2.5. Seja R um anel local normal Gorenstein de dimensão 2. Então, todo R-módulo Cohen-Macaulay rígido de posto 1 é livre.

Demonstração. Por definição, M é Cohen-Macaulay maximal e $\operatorname{Ext}^1_R(M,M)=0$. Além disso, pelo Lema 3.2.4, $\operatorname{Ext}^j_R(M,R)=0$ para $j=1,2$. Segue, do Corolário 3.2.3, que M é livre. □

Tomando $d=1$ no Teorema 3.0.3, temos o seguinte:

Corolário 3.2.6. Seja R um anel local Cohen-Macaulay de dimensão 1. Seja M um R-módulo Cohen-Macaulay maximal de posto 1. Se $\operatorname{Ext}^1_R(M,\operatorname{Hom}_R(M,M))=0$, então $M\cong R$.

Seja R um anel Noetheriano. Dizemos que um R-módulo M finitamente gerado satisfaz a condição de Serre (S_n) se $\operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\geq \min\{n,\operatorname{ht}(\mathfrak{p})\}$ para todo $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R)$.

Corolário 3.2.7. Sejam R um anel local Noetheriano de dimensão $d>0$ e M um R-módulo finitamente gerado de posto 1. Suponha que R e M satisfazem a condição de Serre (S_2). Se $\operatorname{Ext}^1_R(M,\operatorname{Hom}_R(M,M))=0$, então $R\cong\operatorname{Hom}_R(M,M)$.

Demonstração. Sejam $S=\operatorname{Hom}_R(M,M)$, $\phi: R\to S$ o R-homomorfismo natural e $X=\operatorname{coker}(\phi)$. Como M tem posto 1, então $\operatorname{ann}(M)=0$, donde ϕ é injetiva. Mais generalmente, mostraremos por indução sobre d que ϕ é um R-isomorfismo.

Suponha primeiramente $d=1$. Então, $\operatorname{ht}(\mathfrak{m})=1$ e assim, pelo Corolário 2.2.14, pela Proposição 2.2.10(1), e por hipótese, temos o seguinte

$$1=\dim(R)\geq\operatorname{depth}(R)=\operatorname{depth}_{R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m})\geq\min\{2,1\}=1,\ \text{e}$$
$$1=\dim(R)\geq\dim(M)\geq\operatorname{depth}(M)=\operatorname{depth}_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m})\geq\min\{2,1\}=1.$$

Portanto, M e R são Cohen-Macaulay (maximais) de dimensão 1. Pelo Corolário 3.2.6, $M\cong R$, donde $\operatorname{Hom}_R(M,M)\cong\operatorname{Hom}_R(R,R)\cong R$. Isto mostra que $\operatorname{Hom}_R(M,M)=\langle f\rangle$ para algum $f\in\operatorname{Hom}_R(M,M)$. Então, $\operatorname{Id}_M=rf$ para algum $r\in R$. Isto indica que $\operatorname{Hom}_R(M,M)=r\operatorname{Hom}_R(M,M)$, donde, pelo Lema de Nakayama, $r\notin\mathfrak{m}$, isto é r é unidade em R. Assim, da igualdade $\operatorname{Id}_M=rf$, segue que $f=t\operatorname{Id}_M=\phi(t)$ para algum $t\in R$, donde $f\in\operatorname{im}(\phi)$. Já que $\operatorname{Hom}_R(M,M)=\langle f\rangle$, isto indica que ϕ é sobrejetiva e consequentemente ϕ é um R-isomorfismo.

Suponha agora $d>1$ e que o resultado vale para todo os anéis locais Noetherianos de dimensão $<d$ satisfazendo (S_2). Devemos mostrar que ϕ é um isomorfismo. É suficiente mostrar que $X=0$.

Se $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R)-\operatorname{Specm}(R)$, então temos os seguintes fatos.

- $\dim(R_\mathfrak{p})<d$. Pois, $\dim(R_\mathfrak{p})=\operatorname{ht}(\mathfrak{p})$ e $\operatorname{ht}(\mathfrak{p})<d$ já que $\mathfrak{p}$ não é maximal.

- $M_{\mathfrak{p}}$ tem posto 1. Como M tem posto 1, pela Proposição B.0.4, existe um submódulo N de M livre de posto 1 e existe um elemento R-regular $r \in R$ tal que $rM \subset N$. Então, claramente $N_{\mathfrak{p}}$ é um submódulo livre de posto 1 de $M_{\mathfrak{p}}$, $r/1 \in R_{\mathfrak{p}}$ é $R_{\mathfrak{p}}$-regular (pela Proposição 2.1.12) e $(r/1)N_{\mathfrak{p}} \subset M_{\mathfrak{p}}$. Assim, novamente pela Proposição B.0.4, $M_{\mathfrak{p}}$ é um $R_{\mathfrak{p}}$-módulo livre de posto 1.

- $R_{\mathfrak{p}}$ e $M_{\mathfrak{p}}$ satisfazem (S_2). Pois, para todo $\mathfrak{n} \in \operatorname{Spec}(R_{\mathfrak{p}})$ existe $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R)$ tal que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ e $\mathfrak{n} = \mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}$ e nesse contexto existe um isomorfismo de anéis $(R_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{n}} \cong R_{\mathfrak{q}}$. Com base isso, como R e M satisfazem (S_2), observe que $R_{\mathfrak{p}}$ e $M_{\mathfrak{p}}$ também satisfazem (S_2).

- $\operatorname{Ext}^1_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, \operatorname{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}})) = 0$. De fato, é imediato do Corolário 1.4.8(2).

Deste modo, por hipótese indutiva, para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) - \operatorname{Specm}(R)$, o $R_{\mathfrak{p}}$-homomorfismo induzido $\phi_{\mathfrak{p}} : R_{\mathfrak{p}} \to \operatorname{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}})$ é bijetivo e consequentemente $X_{\mathfrak{p}} = 0$.

Suponha $X \neq 0$. O fato de que $X_{\mathfrak{p}} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) - \operatorname{Specm}(R)$, mostra que $\operatorname{Supp}(X) = \{\mathfrak{m}\}$, donde $\dim(X) = 0$. Assim, $\operatorname{depth}(X) = 0$.

Agora, pela Proposição 2.2.10(1) e por hipótese, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{depth}(R) &= \operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{m}}}(R_{\mathfrak{m}}) \geq \min\{2, d\} = 2, \text{ e} \\ \operatorname{depth}(M) &= \operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}) \geq \min\{2, d\} = 2. \end{aligned}$$

Como $\operatorname{depth}(M) \geq 2$, observe que $\operatorname{depth}(S) \geq 2$. De fato, se $x_1, x_2 \subset \mathfrak{m}$ é uma sequência M-regular, então note que ela é uma sequência S-regular.

Aplicando a Proposição 2.2.9 para a sequência exata

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\phi} S \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

temos que

$$0 = \operatorname{depth}(X) \geq \min\{\operatorname{depth}(R) - 1, \operatorname{depth}(S)\},$$

donde $\operatorname{depth}(R) \leq 1$ ou $\operatorname{depth}(S) = 0$. Mas nenhuma das duas desigualdades acontece desde que $\operatorname{depth}(R) \geq 2$ e $\operatorname{depth}(S) \geq 2$. Logo, $X = 0$. $\square$

REFERÊNCIAS

ARAYA T; YOSHINO, Y. Remarks on a depth formula, a grade inequality and a conjecture of auslander. **Comm. Algebra**, v. 26, p. 3793–3806, 1998. Citado na página 18.

ATIYAH M. F.; MACDONALD, I. G. **Introduction to commutative algebra**. London: Addison Wesley Publishing Company, 1969. Citado na página 105.

AUSLANDER M; DING, S. S. Liftings and weak liftings of modules. **J. Algebra**, v. 156, p. 273–317, 1993. Citado na página 17.

AUSLANDER M; REITEN, I. On a generalized version of the nakayama conjecture. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 52, p. 69–74, 1975. Citado na página 17.

BORGES H.; TENGAN, E. **Álgebra comutativa em quatro movimientos**. Río de Janeiro: IMPA, 2014. Citado na página 105.

BRUNS W.; HERZOG, J. **Cohen-Macaulay Rings**. New York: Cambridge University Press, 1998. Citado nas páginas 53, 74, 88, 105 e 129.

GOTO S.;TAKAHASHI, R. On the auslander-reiten conjecture for cohen-macaulay local rings. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 145, n. 8, p. 3289–3296, 2 2017. Citado nas páginas 18 e 89.

HILTON P.; STAMMBACH, U. **A Course in Homological Algebra**. New York Heildelberg Berlin: Springer-Verlag, 1971. Citado na página 19.

HUNEKE, C. **Commutative Algebra II**. Kanzas, 2012. Disponível em: <https://home.adelphi.edu/~bstone/commalg-notes/commalg-2/algebra-notes-II.pdf>. Citado na página 74.

MATSUMURA, H. **Commutative Algebra**. Nagoya, Japón: Benjamin-Cummings Publishing Company, 1980. Citado na página 105.

NAKAYAMA, T. On algebras with complete homology. **Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg**, v. 22, p. 300–307, 1 1958. Citado na página 17.

OSBORNE, M. **Basic Homological Algebra**. New York: Springer-Verlag, 2000. Citado nas páginas 19 e 33.

ROTMAN, J. **An introduction to homological algebra**. London: Academic Press, 2008. Citado nas páginas 19 e 105.

SEGA, L. Vanishing of cohomology over gorenstein rings of small codimension. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 131, n. 8, p. 2313–2323, 2002. Citado na página 18.

SWANSON I.; HUNEKE, C. **Integral closure of ideals, rings and modules**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015. Citado nas páginas 105, 124, 125 e 128.

WEIBEL, C. **An introduction to homological algebra**. New York: Cambridge University Press, 1994. Citado nas páginas 19 e 25.

WINSTER, L. **Gorenstein Dimensions**. [S.l.]: Springer, 2000. Citado na página 88.

APÊNDICE

A

ALGUNS RESULTADOS DE ANÉIS E MÓDULOS

Neste capítulo apresentamos as definições e resultados conhecidos da Álgebra Comutativa básica considerados nesta dissertação. Para mais detalhes, ver (BORGES H.; TENGAN, 2014), (ATIYAH M. F.; MACDONALD, 1969), (ROTMAN, 2008) (MATSUMURA, 1980), (BRUNS W.; HERZOG, 1998, Apêndice A) e (SWANSON I.; HUNEKE, 2015).

A.1 Anéis e Módulos

Anéis

Definição A.1.1. Um *anel* R é um conjunto munido com duas operações “+ e “·” tais que

(1) $(R,+)$ é um grupo abeliano;

(2) $(R,\cdot)$ é associativo;

(3) Para todos $x,y,z \in R$, temos $x(y+z) = xy + xz$.

Se $(R,\cdot)$ é comutativo, dizemos que o anel R é *comutativo*. Se existe um elemento $1 \in R$ tal que $x1 = 1x = x$ para todo $x \in R$, então 1 é chamado de *identidade* de R e dizemos que R é um *anel com identidade*.

No que segue os anéis são considerados comutativos com identidade.

Seja R um anel. Um elemento $x \in R$ é chamado de

(1) *unidade* se possui inverso multiplicativo em R, ou seja, se existe um elemento $y \in R$ tal que $xy = 1$;

(2) *divisor de zero* se existe $y \neq 0$ tal que $xy = 0$;

(3) *nilpotente* se possui existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$.

Denotamos por $R^\times$ ao conjunto das as unidades de R. Denotamos por $\mathrm{ZD}(R)$ ao conjunto dos divisores de zero de R. Denotamos por $\sqrt{(0)}$ a conjunto dos elementos nilpotentes de R. Um *corpo* é um anel no qual todo elemento distinto de zero é una unidade. Um *domínio* é um anel que não contém divisores de zero não nulos. Um anel é *reduzido* se não tem elementos nilpotentes além do zero.

Definição A.1.2. Sejam R,S anéis. Um *homomorfismo* $f : R \to S$ de anéis é uma aplicação tal que para todo $x,y \in R$ tem-se $f(x+y) = f(x)+f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ e $f(1) = 1$. Um homomorfismo de anéis bijetivo é chamado de *isomorfismo*. Se existe um isomorfismo de anéis entre R e S, escreveremos $R \cong S$.

Uma *R-álgebra* é um anel S junto com um homomorfismo de anéis $f : R \to S$.

Definição A.1.3. Um subconjunto I de um anel R é um *ideal* se I é um subgrupo aditivo de R e se para todo $x \in R, y \in I$, tem-se $xy \in I$.

Exemplo A.1.4. Seja R um anel.

(1) $(0) = \{0\}$ e R são ideais de R.

(2) A interseção de ideais de R é um ideal de R.

(3) Se $x \in R$, então $(x) := \{yx : y \in R\}$ é um ideal de R. Mais geralmente, se $x_1, \cdots, x_n \in R$, então

$$(x_1,\ldots,x_n) := \{y_1x_1 + \cdots + y_nx_n : y_i \in R, i = 1,\cdots,n\}$$

é um ideal de R. Observe que tal ideal é o menor ideal de R que contém $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

(4) Se $I_1,\ldots,I_n$ definimos os ideais

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n := \{x_1 + \cdots + x_n : x_i \in I_i, i = 1,\ldots,n\},$$
$$I_1I_2\cdots I_n := \{\sum_{finita} x_1 \ldots x_n : x_i \in I_i, i = 1,\ldots,n\}.$$

(5) Se $f : R \to S$ é um homomorfismo de anéis, então

$$\ker(f) := \{x \in R : f(x) = 0\}$$

é um ideal de R. Observe que f é injetivo se, e somente se, $\ker(f) = 0$.

(6) Se I é um ideal de R, então o *radical de I*, definido por

$$\sqrt{I} = \{x \in R : \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x^n \in I\},$$

é um ideal de R. Em particular, o conjunto $\sqrt{(0)}$ é um ideal de R.

Se I é um ideal de R, note que o grupo quociente R/I tem um produto definido por $(x+I)(y+I) = xy+I$ para todo $x, y \in R$. Assim, R/I tem estrutura de anel e com esta estrutura é chamado de *anel quociente*. Observe que o mapa quociente, definido por

$$\pi : R \to R/I, \;\; x \mapsto x+I$$

é um homomorfismo de anéis.

Teorema A.1.5. (Teorema da correspondência) Sejam R um anel e $I \subseteq A$ um ideal de R. O mapa quociente $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$ estabelece uma bijeção entre

$$\begin{aligned} \{ \text{ ideais } J \subseteq R \text{ tais que } J \supseteq I\} &\longleftrightarrow \{ \text{ ideais de } R/I\} \\ J &\longmapsto \pi(J) \\ \pi^{-1}(L) &\longleftrightarrow L. \end{aligned}$$

Definição A.1.6. Um ideal $\mathfrak{p}$ de um anel R é *primo* se para todo $x, y \in R$ tal que $xy \in \mathfrak{p}$, tem-se que $x \in \mathfrak{p}$ ou $y \in \mathfrak{p}$. O conjunto de todos os ideais primos de R é chamado o *espectro* de R e se denota por $\mathrm{Spec}(R)$. Se I é um ideal de R, denotamos por $V(I)$ ao conjunto de todos os ideais primos de R que contém I. Dizemos que $\mathfrak{p}$ é um *primo minimal* de um ideal I se $\mathfrak{p}$ é um elemento minimal do conjunto $V(I)$.

Observe que um ideal $\mathfrak{p}$ de um anel R é primo se, e somente se $R/\mathfrak{p}$ é um domínio.

Proposição A.1.7. Se I é um ideal de um anel R, então $\sqrt{I}$ é a interseção de todos os ideais primos que contém I.

Proposição A.1.8. (Primos Avoidance) Seja R um anel e $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \mathrm{Spec}(R)$. Se I é um ideal de R tal que $I \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$, então $I \subset \mathfrak{p}_i$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposição A.1.9. Sejam R um anel, $I_1, \ldots, I_n$ ideais de R e $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Se $\mathfrak{p} \supset \bigcap_{i=1}^{n} I_i$, então $\mathfrak{p} \supset I_i$ para algum i. Se $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$, então $\mathfrak{p} = I_i$ para algum i.

Definição A.1.10. Um ideal $\mathfrak{m}$ de um anel R é *maximal* se não existe um ideal I de R tal que $\mathfrak{m} \subsetneq I$. O conjunto de todos os ideais maximais de R é chamado o *espectro maximal* de R e se denota por $\mathrm{Specm}(R)$. O *radical de Jacobson* de R é a interseção de todos os ideais maximais de R e é denotada por $J(R)$.

Observe que um ideal $\mathfrak{m}$ de um anel R é maximal se, e somente se $R/\mathfrak{m}$ é corpo. Observe que $\mathrm{Specm}(R) \subset \mathrm{Spec}(R)$.

Proposição A.1.11. Seja R um anel e I um ideal próprio de R. Então, I está contido em um ideal maximal $\mathfrak{m}$.

Um anel local com um único ideal maximal são ditos *locais*. Um anel local R com ideal maximal $\mathfrak{m}$ é denotado por $(R,\mathfrak{m})$. Nesse caso, o corpo $k := R/\mathfrak{m}$ é chamado de corpo residual de R e acostumamos por escrever o anel por um par $(R,\mathfrak{m})$ ou por uma terna $(R,\mathfrak{m},k)$.

Um homomorfismo $\varphi : (R,\mathfrak{m}) \to (S,\mathfrak{n})$ de anéis locais é *local* se $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$.

Proposição A.1.12. $J(R) = \{x \in R : 1 - xy \in R^{\times}, \forall y \in R\}$.

Módulos

Definição A.1.13. Seja R um anel. Dizemos que M é um R-*módulo* se $(M,+)$ é um grupo abeliano, dotado de uma multiplicação por escalar

$$R \times M \to M$$
$$(r,m) \longmapsto rm.$$

tal que, para quaisquer $r,s \in R$ e $m,n \in M$, as seguintes propriedades sejam verificadas:

(i) $(r+s)m = rm + sm$;

(ii) $r(m+n) = rm + rn$;

(iii) $(rs)m = r(sm)$;

(iv) $1m = m$.

Afim de não haver perigo de confusão, usaremos simplesmente a expressão "R-módulo".

Se S é uma R-álgebra, observe que S tem estrutura de R-módulo.

Um *submódulo* N de um módulo M é um subconjunto de M tal que $(N,+)$ é um subgrupo de M e é fechado em relação a multiplicação por escalar.

Exemplo A.1.14. Seja M um R-módulo.

(1) $\{0\}$ e M são submódulos de M.

(2) Interseção de submódulos de M é um submódulo de M.

(3) Dado um subconjunto S de M, o conjunto

$$\langle S \rangle := \{x_1m_1 + \cdots + x_nm_n : n \in \mathbb{N}, x_i \in R, m_i \in S, i = 1,\ldots,n\}$$

é o menor submódulo de M que contém S. Se S é um conjunto finito $\{m_1,\ldots,m_n\}$, denotamos $\langle S \rangle$ apenas por $\langle m_1,\ldots,m_k \rangle$; nesse caso

$$\langle m_1,\ldots,m_n \rangle := \{x_1m_1 + \cdots + x_nm_n : x_i \in R, i = 1,\ldots,n\}.$$

(4) Se M_1, M_2 são submódulos de M, então

$$M_1 + M_2 := \{m_1 + m_2 : m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$$

é o menor submódulo de M que contém M_1 e M_2.

(5) Se I e um ideal de R, então

$$IM := \{x_1 m_1 + \cdots + x_n m_n : x_i \in I, m_i \in I, n \in \mathbb{N}\}$$

é um submódulo de R. Se $IM = 0$, observe que M tem estrutura de R/I-módulo.

(6) Se I é um ideal de R, então $\mathrm{ann}_M(I) := \{m \in M : Im = 0\}$ é um submódulo de M.

Sejam M_1 e M_2 submódulos de um R-módulo M, definimos

$$(M_1 : M_2) = \{x \in R : xM_2 \subset M_1\}.$$

Observe que $(M_1 : M_2)$ é um ideal de R. Definimos o *anulador* de M por

$$\mathrm{ann}(M) := (0 : M).$$

Definição A.1.15. Sejam M, N dois R-módulos. Um *homomorfismo* de R-módulos ou R-*homomorfismo* é uma aplicação $f : M \to N$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2), \forall m_1, m_2 \in M$;

(ii) $f(rm) = rf(m), \forall r \in R, \forall m \in M$.

Um R-homomorfismo bijetivo é chamado de R-*isomorfismo*. Se existe um R-isomorfismo entre M e N, escreveremos $M \cong N$.

Se N é um submódulo de um módulo M, então M/N tem estrutura de R-módulo induzida de M, definida por $x(m + M') = ax + M'$. A aplicação natural $M \to M/N$ é um R-homomorfismo.

Lema A.1.16. Seja $f : M \to N$ um R-homomorfismo. Então

$$\ker(f) := \{m \in M : f(m) = 0\}, \text{ e}$$
$$\mathrm{im}(f) := \{n \in N : \text{existe } m \in M \text{ tal que } f(m) = n\}$$

são submódulos de M e N respectivamente. Além disso, f é injetiva se, e somente se $\ker(f) = 0$.

Proposição A.1.17. (Teoremas de isomorfismos de módulos)

(1) Seja $f : M \to N$ um R-homomorfismo sobrejetivo. Então, $M/\ker(f) \cong N$.

(2) Se $L \supset M \supset N$ são R-módulos, então

$$(L/N)/(M/N) \cong L/M.$$

(3) Se M_1, M_2 são submódulos de M, então $(M_1 + M_2)/M_1 \cong M_2/(M_1 \cap M_2)$.

Módulos Finitamente Gerados. Lema de Nakayama

Um R-módulo M é *finitamente gerado* se existem $m_1, \dots, m_n \in M$ tais que $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$.

Proposição A.1.18. Um R-módulo M é finitamente gerado se, e somente se existem $n \in \mathbb{N}$ e um R-homomorfismo sobrejetivo $R^n \to M$.

Proposição A.1.19. (Lema de Nakayama) Sejam M um R-módulo finitamente gerado e I é um ideal de R tal que $I \subset J(R)$. Se $IM = M$, então $M = 0$.

Corolário A.1.20. Sejam M um R-módulo finitamente gerado, N um submódulo de M e I um ideal de R tal que $I \subset J(R)$. Se $M = IM + N$, então $M = N$.

Corolário A.1.21. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e M um R-módulo finitamente gerado. Se $x_1, \dots, x_n$ elementos de M cujas imagens em $M/\mathfrak{m}M$ formam uma base de este espaço vetorial. Então, $x_1, \dots, x_n$ geram M.

Corolário A.1.22. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local. Se M é um R-módulo finitamente gerado, então qualquer conjunto mínimo de geradores de M possui exatamente $\dim_{R/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m}M)$ elementos. Isto é

$$\mu_R(M) = \dim_{R/\mathrm{m}}(M/\mathrm{m}M)$$

onde $\mu_R(M) := \min\{n \mid M \text{ pode ser gerado por } n \text{ elementos }\}$.

Dizemos que um R-módulo M tem *presentação finita* se existem $m, n \geq 0$ e uma sequência exata

$$R^m \to R^n \to M \to 0.$$

Observe que os módulos de presentação finita são finitamente gerados. Observe que um R-módulo M tem presentação finita se, e somente se existe uma sequência exata da forma

$$0 \to K \to R^n \to M \to 0$$

com K sendo um R-módulo finitamente gerado.

Suma Direta e Produto Direto de Módulos

Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de R-módulos. O *produto direto* $\prod_{i \in I} M_i$ que, como conjunto, é igual ao produto cartesiano dos M_i, tem estrutura de R-módulo com a soma e o produto por escalares realizada componente a componente. A *soma direta* $\bigoplus_{i \in I} M_i$ é o submódulo do produto direto cujos elementos são as tuplas $(m_i)_{i \in I}$ "quase nulas", isto é, com $m_i \neq 0$ apenas para um número finito de índices i.

Se $\{f_i : M_i \to N_i\}_{i \in I}$ é uma família de R-homomorfismos definimos as aplicações

$$\prod_{i \in I} f_i : \prod_{i \in I} M_i \to \prod_{i \in I} N_i \text{ e } \bigoplus_{\in I} f_i : \bigoplus_{i \in I} M_i \to \bigoplus_{i \in I} M_i$$

por

$$\left(\prod_{i\in I} f_i\right)\left((x_i)_{i\in I}\right) = (f(x_i))_{i\in I} \text{ e } (\oplus_{i\in I} f_i)\left((x_i)_{i\in I}\right) = (f(x_i))_{i\in I}.$$

Observe que elas são R-homomorfismos.

Um R-módulo M é *livre* se $M \cong \bigoplus_{i\in I} R$. Nesse caso, o cardinal de I é dito o *posto* de M e está bem definido.

Proposição A.1.23. Todo R-módulo é uma imagem homomórfica de um R-módulo livre. Todo R-módulo finitamente gerado é imagem homomórfica de um R-módulo livre de posto finito.

Sejam M um R-módulo e, M_1, M_2 submódulos de M. Dizemos que M é a *suma direta interna* de M_1 e M_2, se $M = M_1 + M_2$ e $M_1 \cap M_2$. Em tal caso escreveremos $M = M_1 \oplus' M_2$. Observe que se $M = M_1 \oplus' M_2$, então $M \cong M_1 \oplus M_2$.

Proposição A.1.24. Se $f : M \to N$ e $g : N \to M$ são R-homomorfismos tais que $g \circ f = \mathrm{Id}_N$, então $N = \mathrm{im}(f) \oplus' \ker(g)$.

Sequências Exatas

Uma sequência $M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$ de R-módulos e R-homomorfismos é dita *exata* em M se $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$. Por sua vez, a sequência da forma

$$\cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \to \cdots$$

é dita *exata* se é exata em M_n, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Em particular, observe que

(1) $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$ é exata se, e somente se f é injetiva.

(2) $M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, g é sobrejetiva.

(3) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, f é um R-isomorfismo.

(4) $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, f é injetiva, g sobrejetiva e $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$.

Uma sequência exata $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ de R-módulos *cinde* se existe um R-homomorfismo $h : N \to M$ tal que $h \circ g = \mathrm{Id}_M$. Por exemplo, se M e N são R-módulos, então a sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} M \oplus N \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0$$

cinde, onde i é a injeção canônica e π é a projeção canônica.

Hom e Tensor

Dados dois R-módulos M e N, o conjunto

$$\mathrm{Hom}_R(M,N) := \{\phi : M \to N \mid \phi \text{ é um } R\text{-homomorfismo}\}$$

também é um R-módulo (com a soma e o produto por R-escalares induzidos pelas operações em N). Se $f : M_1 \to M_2$, é um R-homomorfismo, definimos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(M,f) : \mathrm{Hom}_R(M,M_1) &\to \mathrm{Hom}_R(M,M_2) \\ \phi &\mapsto f \circ \phi \\ \mathrm{Hom}_R(f,N) : \mathrm{Hom}_R(M_2,N) &\to \mathrm{Hom}_R(M_1,N) \\ \phi &\mapsto \phi \circ f. \end{aligned}$$

Observe que eles são R-homomorfismos. Os R-homomorfismos $\mathrm{Hom}_R(M,f)$ e $\mathrm{Hom}_R(f,N)$ também se denotam por f_* e f^* respectivamente.

Proposição A.1.25. Seja M um R-módulo. Então, a aplicação $\varphi : \mathrm{Hom}_R(R,M) \to M$, definida por $\varphi(f) = f(1)$, é um R-isomorfismo.

Proposição A.1.26. Seja M um R-módulo. Então, $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ é um functor covariante, isto é:

(1) Para qualquer par de R-homomorfismos $g : N \to P$ e $f : L \to N$, tem-se $\mathrm{Hom}_R(M, g \circ f) = \mathrm{Hom}_R(M,g) \circ \mathrm{Hom}_R(M,f)$;

(2) Para qualquer R-módulo N, $\mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Id}_N) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_R(M,N)}$.

Proposição A.1.27. Seja N um R-módulo. Então, $\mathrm{Hom}_R(-,N)$ é um functor contravariante, isto é:

(1) Para qualquer par de R-homomorfismos $g : L \to P$ e $f : M \to L$, tem-se $\mathrm{Hom}_R(g \circ f, N) = \mathrm{Hom}_R(f,N) \circ \mathrm{Hom}_R(g,N)$;

(2) Para qualquer R-módulo M, $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Id}_N, M) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_R(N,M)}$.

Proposição A.1.28. Seja N um R-módulo. Então:

(1) $\mathrm{Hom}_R(N,-)$ é exato a direita, isto é, para qualquer sequência exata

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0,$$

a sequência

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

é exata

(2) $\text{Hom}_R(-,N)$ é exato a esquerda, isto é, para qualquer sequência exata

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'',$$

a sequência

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R\left(M'',N\right) \xrightarrow{\text{Hom}_R(g,N)} \text{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\text{Hom}_R(f,N)} \text{Hom}_R\left(M',N\right)$$

é exata.

Proposição A.1.29. Seja N um R-módulo. Seja

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de R-módulos que cinde. Então, as sequências

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R\left(N,M'\right) \xrightarrow{\text{Hom}_R(N,f)} \text{Hom}_R(N,M) \xrightarrow{\text{Hom}_R(N,g)} \text{Hom}_R\left(N,M''\right) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R\left(M'',N\right) \xrightarrow{\text{Hom}_R(g,N)} \text{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\text{Hom}_R(f,N)} \text{Hom}_R\left(M',N\right) \longrightarrow 0$$

são exatas.

Proposição A.1.30. Sejam M um R-módulo e $\{N_i\}_{i\in I}$ uma família de R-módulos.

(1) A aplicação

$$\varphi : \text{Hom}_R\left(M, \prod_{i\in I} N_i\right) \to \prod_{i\in I} \text{Hom}_R\left(M,N_i\right)$$

definida por $\varphi : f \mapsto (p_i \circ f)$, onde os p_i são as projeções do produto direto $\prod_{i\in I} N_i$, é um R-isomorfismo.

(2) A aplicação

$$\psi : \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} N_i, M\right) \to \prod_{i\in I} \text{Hom}_R\left(N_i,M\right)$$

com $\psi : f \mapsto (f \circ \alpha_i)$, onde os α_i são as injeções na suma direta $\bigoplus_{i\in I} N_i$, é um R-isomorfismo.

Seja R um anel e sejam M,N e T R-módulos. Um *mapa bilinear* é uma função

$$\phi : M \times N \to T$$

que é R-linear em cada entrada separadamente, ou seja,

(1) $\phi\left(x_1m_1 + x_2m_2, n\right) = x_1\phi\left(m_1,n\right) + x_2\phi\left(m_2,n\right)$, e

(2) $\phi\left(m, x_1n_1 + x_2n_2\right) = x_1\phi\left(m,n_1\right) + x_2\phi\left(m,n_2\right)$

para todo $m, m_i \in M, n, n_i \in N$ e $x_i \in R$.

A partir de dois R-módulos M e N, vamos agora construir um novo R-módulo $M \otimes_R N$, chamado produto tensorial de M e N sobre R, juntamente com uma aplicação bilinear

$$\otimes : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N.$$

Considere o R-módulo livre com base $\{e_{m,n} \mid (m,n) \in M \times N\}$

$$\bigoplus_{(m,n) \in M \times N} R \cdot e_{m,n}$$

e seja D o submódulo gerado pelos elementos da forma

(1) $e_{xm,n} - x \cdot e_{m,n}$;

(2) $e_{m,xn} - x \cdot e_{m,n}$;

(3) $e_{m_1+m_2,n} - e_{m_1,n} - e_{m_2,n}$;

(4) $e_{m,n_1+n_2} - e_{m,n_1} - e_{m,n_2}$.

com $m, m_i \in M, n, n_i \in N$ e $x \in R$. Definimos o *produto tensorial* de M e N por

$$M \otimes_R N := \frac{\bigoplus_{(m,n) \in M \times N} R \cdot e_{m,n}}{D}.$$

Se denotamos por $m \otimes n$ a imagem de $e_{m,n}$ em $M \otimes_R N$, observe que os $m \otimes n$ geram $M \otimes_R N$ e satisfazem as relações

(1) $(xm) \otimes n = x(m \otimes n) = m \otimes (xn)$;

(2) $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$;

(3) $m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$ para todo $m, m_i \in M, n, n_i \in N$ e $x \in R$,

Isto fornece um mapa bilinear

$$\begin{aligned} \otimes : M \times N &\longrightarrow M \otimes_R N \\ (m,n) &\longmapsto m \otimes n. \end{aligned}$$

Proposição A.1.31. Sejam $f : M \to M'$ e $g : N \to N'$ dois R-homomorfismos. Existe um único homomorfismo $f \otimes g : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ tal que que $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$.

Proposição A.1.32. Sejam $f : M \to M'$, $g : N \to N'$, $f' : M' \to M''$ e $g' : N' \to N''$ quatro R-homomorfismos. Então, $(f' \otimes f) \circ (g' \circ g'') = (f' \circ g') \otimes (f \circ g)$.

Teorema A.1.33. Seja R um anel. Temos os seguintes isomorfismos canônicos:

(1) (associatividade)

$$(M \otimes_R N) \otimes_R P \xrightarrow{\approx} M \otimes_R (N \otimes_R P)$$
$$(m \otimes n) \otimes p \longmapsto m \otimes (n \otimes p).$$

(2) (elemento neutro)

$$R \otimes_R M \xrightarrow{\approx} M$$
$$x \otimes m \longmapsto xm.$$

(3) (comutatividade)

$$M \otimes_R N \xrightarrow{\approx} N \otimes_R M$$
$$m \otimes n \longmapsto n \otimes m.$$

(4) (distributividade com relação à soma direta)

$$M \otimes_R \left(\bigoplus_{i \in I} N_i \right) \xrightarrow{\approx} \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_R N_i)$$
$$m \otimes (n_i)_{i \in I} \longmapsto (m \otimes n_i)_{i \in I}.$$

(5) (quociente) Para qualquer ideal $I \subset R$,

$$M \otimes_R (R/I) \xrightarrow{\approx} M/IM$$
$$m \otimes \bar{x} \longmapsto \overline{xm}.$$

(6) (adjunção ou "Hom sweet Hom")

$$\mathrm{Hom}_R (M \otimes_R N, P) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Hom}_R (M, \mathrm{Hom}_R(N, P))$$
$$f \longmapsto (n \mapsto f(m \otimes n)).$$

Proposição A.1.34. Seja N um R-módulo. Então $- \otimes_R N$ é exato a direita, isto é para qualquer sequência exata

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0,$$

a sequência

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_N} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

é exata.

Proposição A.1.35. Seja N um R-módulo. Seja

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de R-módulos que cinde. Então, a sequência

$$0 \longrightarrow M' \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes_R \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_N} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

é exata

Proposição A.1.36. (Mudança de base) Seja R um anel e seja S uma R-álgebra.

(1) (Produto tensorial comuta com mudança de base) Dados dois R-módulos M e N, temos um isomorfismo de S-módulos

$$(M \otimes_R S) \otimes_S (N \otimes_R S) \approx (M \otimes_R N) \otimes_R S$$
$$(m \otimes s) \otimes \left(n \otimes s'\right) \longmapsto (m \otimes n) \otimes ss'.$$

(2) (Transitividade) Se M é um R-módulo e P é um S-módulo, temos um isomorfismo de S-módulos

$$(M \otimes_R S) \otimes_S P \xrightarrow{\approx} M \otimes_R P$$
$$(m \otimes s) \otimes p \longmapsto m \otimes sp.$$

Aqui $M \otimes_R S$ é visto como S-módulo via multiplicação na segunda coordenada. Em particular, se T é uma S-álgebra, temos um isomorfismo de T-módulos

$$(M \otimes_R S) \otimes_S T \xrightarrow{\approx} M \otimes_R T$$
$$(m \otimes s) \otimes t \longmapsto m \otimes (st).$$

Proposição A.1.37. Seja S uma R-álgebra e seja N um R-módulo com presentação finita. Para todo R-modulo M, existe um isomorfismo natural

$$\theta : \mathrm{Hom}_R(N, M) \to \mathrm{Hom}_S(N \otimes_R S, M)$$

dado por $\theta : f \mapsto \tilde{f}$, onde $\tilde{f}(n \otimes 1) = f(n)$ para todo $n \in N$.

Módulos Planos

Um R-módulo N é *plano* se para toda sequência exata

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

a sequência exata

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_N} M'' \otimes_R N$$

é exata.

Proposição A.1.38. Para um R-módulo N as seguintes são equivalentes:

(1) N é um R-módulo plano;

(2) Para toda sequência exata $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, a sequência $0 \to M' \otimes_R N \to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N \to 0$ é exata;

(3) Se $f : M' \to M$ é um R-homomorfismo injetivo, então $f \otimes \mathrm{Id}_N : M' \otimes_R N \to M \otimes_R N$ é um R-homomorfismo injetivo;

(4) Se $f : M' \to M$ é um homomorfismo injetivo de R-módulos finitamente gerados, então $f \otimes \mathrm{Id}_N : M' \otimes_R N \to M \otimes_R N$ é um R-homomorfismo injetivo.

Corolário A.1.39. Um R-módulo N é plano se, e somente se, para toda sequência exata $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de R-módulos finitamente gerados, a sequência $0 \to M' \otimes_R N \to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N \to 0$ é exata.

Proposição A.1.40. Todo R-módulo livre é plano.

Proposição A.1.41. Seja $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de R-módulos. Então $\oplus_{i\in I} M_i$ é plano se, e somente se M_i é plano para todo $i \in I$.

Uma R-álgebra S é *plana* se S é um R-módulo plano.

Proposição A.1.42 (Devissagé)**.** Seja S um R-álgebra plana e seja M um R-módulo de presentação finita. Seja N um R-módulo qualquer. Então a aplicação canônica

$$\mathrm{Hom}_R(M,N) \otimes_R S \to \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R S, N \otimes_R S)$$

dada por $\phi \otimes s \mapsto \phi \otimes \mu_s$, onde $\mu_s : S \to S$ é a multiplicação por s, é um isomorfismo.

Proposição A.1.43. Seja B uma R-álgebra plana e N um R-módulo de presentação finita. Para todo R-modulo M, existe um isomorfismo

$$\psi : B \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N,M) \to \mathrm{Hom}_R(N, M \otimes_R B)$$

dado por $b \otimes g \mapsto g_b$, onde $g_b(n) = g(n) \otimes b$ para todo $n \in N$.

Localização

Seja R um anel. Um *conjunto multiplicativo* S de R é um subconjunto de R tal que S é fechado por produto e $1 \in S$. Defina uma relação $\equiv$ sobre $R \times S$ como segue:

$$(a,s) \equiv (b,t) \iff (at - bs)u = 0 \text{ para algum } u \in S.$$

A relação $\equiv$ é de equivalência. A classe de um elemento $(a,s) \in R \times S$, em relação a $\equiv$, é denotada por $\frac{a}{s}$. Denotamos por $S^{-1}R$ ao conjunto de todas as classes de equivalência. Podemos dotar a $S^{-1}R$ de estrutura de anel como segue

$$(a/s) + (b/t) = (at + bs)/st$$
$$(a/s)(b/t) = ab/st.$$

O anel $S^{-1}R$ é chamado o *anel de fracões* de R em relação a S.

A aplicação $\rho : R \to S^{-1}R$ definida por $f(x) = x/1$ é um homomorfismo de anéis, chamada o *aplicação de localização*.

Agora, seja M um R-módulo. Defina sobre $M \times S$ uma relação $\equiv'$ como segue:

$$(m,s) \equiv' (m',s') \Longleftrightarrow t(sm' - s'm) = 0 \text{ para algum } t \in S.$$

Como antes, esta relação é de equivalência. Por m/s denotamos a classe de equivalência de um elemento $(m,s) \in M \times S$, e denotamos por $S^{-1}M$ o conjunto das classes de equivalência. Observe que $S^{-1}M$ tem estrutura natural de $S^{-1}R$-módulo com as obvias definições de suma e produto por escalar.

Se $f : M \to N$ é um R-homomorfismo, observe que a aplicação

$$S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}N,\ \frac{m}{s} \mapsto \frac{f(m)}{s}$$

é um $S^{-1}R$-homomorfismo.

Proposição A.1.44. Seja M um R-módulo finitamente gerado. Então, $S^{-1}M = 0$ se, e somente se existe $s \in S$ tal que $sM = 0$.

Proposição A.1.45. Se

$$M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} P$$

é uma sequência exata de R-módulos. Então,

$$S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\phi} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}\psi} S^{-1}P$$

é uma sequência exata de $S^{-1}R$-módulos.

Segue da proposição anterior que se N é um submódulo de M, então a aplicação $S^{-1}N \to S^{-1}M$ é injetiva, e portanto podemos pensar $S^{-1}N$ como sendo um submódulo de $S^{-1}M$.

Corolário A.1.46. Se N é um submódulo de M, então $S^{-1}(M/N) \cong S^{-1}M/S^{-1}N$.

Proposição A.1.47. Se R é um anel e $S \subset R$ um conjunto multiplicativo de R, então $S^{-1}R$ é um R-módulo plano.

Proposição A.1.48. Existe um isomorfismo

$$\begin{aligned} \left(S^{-1}R\right) \otimes_R M &\approx S^{-1}M \\ \frac{x}{s} \otimes m &\longmapsto \frac{xm}{s}. \end{aligned}$$

Proposição A.1.49. Se M e N dois R-módulos, então $S^{-1}(M \otimes_R N) \cong S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N$.

Proposição A.1.50. Seja $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de R-módulos. Então,

$$S^{-1}\Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) \cong \bigoplus_{i\in I} S^{-1}M_i.$$

Proposição A.1.51. Seja M um R-módulo. São equivalentes:

(1) $M = 0$;

(2) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$;

(3) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ para todo $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)$.

Proposição A.1.52. Seja $\phi : M \to N$ um R-homomorfismo. São equivalentes:

(1) ϕ é injetivo;

(2) $\phi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ é injetivo para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$;

(3) $\phi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ é injetivo para todo $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)$.

Teorema A.1.53. Os ideais primos de $S^{-1}R$ estão em correspondência bijetiva ($\mathfrak{p} \longleftrightarrow S^{-1}\mathfrak{p}$) com os ideais primos de R que não intersectam com S.

Sejam R um anel e S o conjunto dos não divisores de zero. Observe que S é um conjunto multiplicativo. O anel $S^{-1}R$ é chamado o *anel total de fracões de R*. Observe que a aplicação de localização $R \to S^{-1}R$ é injetiva. Seja M um R-módulo. Dizemos que M é *livre de torção* se a aplicação natural $M \to S^{-1}M$ é injetiva. Dizemos que M é um *módulo de torção* se $S^{-1}M = 0$.

Definimos o *suporte* de um R-módulo M como sendo o conjunto

$$\mathrm{supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

Proposição A.1.54. Seja M um R-módulo. Então, $\mathrm{supp}(M) \subset V(\mathrm{ann}(M))$ com igualdade se M é finitamente gerado.

A.2 Anéis e Módulos Noetherianos e Artinianos

Anéis e Módulos Noetherianos

Proposição A.2.1. Para um R-módulo M as seguintes condições são equivalentes:

(1) Todo submódulo de M é finitamente gerado;

(2) Toda cadeia ascendente de submódulos de M estabiliza, isto é se

$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \cdots$$

é uma cadeia de submódulos de M, então existe $i_0 \geq 1$ tal que $N_i = N_{i_0}$ para todo $i \geq i_0$;

(3) Todo subconjunto de submódulos de M tem um elemento maximal com relação à inclusão.

Definição A.2.2. Um R-módulo M que satisfaz uma (e portanto todas) das condições da Proposição A.2.1, é dito *Noetheriano*. O anel R é um *anel Noetheriano* se ele é Noetheriano como R-módulo.

Proposição A.2.3. Seja R anel e S um subconjunto multiplicativo de R. Se M é um R-módulo Noetheriano, então $S^{-1}M$ é um $S^{-1}R$-módulo Noetheriano.

Proposição A.2.4. Se R é um anel Noetheriano, então o conjunto $\mathrm{Min}(R)$ dos primos minimais de R é finito.

Proposição A.2.5. Seja R um anel.

(1) Seja
$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$
uma sequência exata de R-módulos. Então M é Noetheriano se, e só se, M' e M'' são Noetherianos. Em particular, quocientes e submódulos de módulos Noetherianos são Noetherianos.

(2) Se R e Noetheriano e M é um R-módulo finitamente gerado, então M é Noetheriano.

.

Corolário A.2.6. Uma suma direta finita de R-módulos Noetherianos é Noetheriano.

Seja M um R-módulo. Um elemento $x \in R$ é um *divisor de zero de M* se existe $m \in M - \{0\}$ tal que $x.m = 0$. O conjunto dos divisores de zero de M é denotado por $\mathrm{ZD}(M)$.

Um ideal primo $\mathfrak{p}$ de R é *associado* se existe $m \in M$ tal que $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(m)$. O conjunto dos primos associados de M é denotado por $\mathrm{Ass}(M)$.

Teorema A.2.7. Seja R um anel Noetheriano e M um R-módulo. Então:

(1) $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$ se, e somente se $M \neq 0$;

(2) $\mathrm{ZD}_R(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p}$.

Teorema A.2.8. Seja R um anel Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado.

(1) M admite uma cadeia de submódulos
$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \cdots \subsetneq \cdots M_n = M$$
tal que $M_{i+1}/M_i \cong R/\mathfrak{p}_i$ com $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(R)$.

(2) O conjunto $\mathrm{Ass}(M)$ é finito.

Teorema A.2.9. (Suporte e Primos Associados) Seja R um anel Noetheriano, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ e seja M um R-módulo finitamente gerado. Então:

$$\operatorname{Ass}_{R_p}(M_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_R(M), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\},$$

$$\operatorname{supp}(M) = \bigcup_{\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(M)} V(\mathfrak{q}).$$

Em particular, $\operatorname{Ass}(M) \subseteq \operatorname{supp}(M)$ e estes dois conjuntos possuem os mesmos primos minimais.

Proposição A.2.10. Se R é Noetheriano e M,N são dois R-módulos finitamente gerados, então $\operatorname{Hom}_R(M,N)$ é um R-módulo finitamente gerado.

Anéis e Módulos Artinianos

Proposição A.2.11. Para um R-módulo M as seguintes condições são equivalentes:

(1) Toda cadeia descendente de submódulos se estabiliza;

(2) Todo conjunto de submódulos de M tem elemento minimal em relação a inclusão.

Definição A.2.12. Um R-módulo M é *Artiniano* se satisfaz uma das condições da Proposição A.2.11. Um anel R é *artiniano* se ele é Artiniano como R-módulo.

Proposição A.2.13. Sejam R anel e S um subconjunto multiplicativo de R. Se M é um R-módulo Artiniano, então $S^{-1}M$ é um $S^{-1}R$-módulo Artiniano.

Seja M um R-módulo. Então, M é dito *simple* se $M \neq 0$ e seus únicos submódulos são M e 0.

Lema A.2.14. Um R-módulo M é simple se, e somente se $M \cong R/\mathfrak{m}$ para algum $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm}(R)$.

Uma *série de composição* de M de tamanha n é uma sequência de submódulos

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M$$

tais que os quocientes consecutivos M_{i+1}/M_i são todos simples. O *comprimento* de M sobre R, denotado por $\operatorname{length}_R(M)$ é o mínimo entre todos os tamanhas das séries de composição de M ou ∞ se M não admite serie de composição.

Teorema A.2.15. Seja M um R-módulo. Então,

1. (Teorema de Jordan-Hölder) Se $\operatorname{length}_R(M) < \infty$, então todas as séries de composição de M, tem o mesmo tamanho.

2. (Aditividade em sequências exatas) Seja

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

uma sequência exata de R-módulos. Então, $\text{length}_R(M) < \infty$ se, e somente, se $\text{length}_R(M') < \infty$ e $\text{length}_R(M'') < \infty$. Neste caso

$$\text{length}_R(M) = \text{length}_R(M') + \text{length}_R(M'').$$

Lema A.2.16. Seja M um R-módulo. Se $I \subset R$ é um ideal de R tal que $IM = 0$, então $\text{length}_R(M) = \text{length}_{R/I}(M)$.

Seja um anel R. Definimos a *altura* de um ideal primo $\mathfrak{p}$ de R por

$$\text{ht}(\mathfrak{p}) = \sup\{n : \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}, \mathfrak{p}_i \in \text{Spec}(R)\}.$$

Mais geralmente, definimos a *altura* de um ideal de R por

$$\text{ht}(I) = \inf\{\text{ht}(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in V(I)\}.$$

Definimos a *dimensão de Krull* de R por

$$\dim(R) := \{\text{ht}(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)\}$$

Observe que $\dim(R) \geq \text{ht}(\mathfrak{p}) + \dim(R/\mathfrak{p})$ para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$.

Se $\varphi : R \to S$ é um homomorfismo sobrejetivo de anéis não nulos, então $\dim(S) \leq \dim(R)$. Em particular, se I é um ideal de R, então $\dim(R/I) \leq \dim(R)$.

Se $M \neq 0$ é um R-módulo, definimos a *dimensão de Krull* de M por

$$\dim(M) := \dim(R/\text{ann}(M)).$$

Proposição A.2.17. Seja M um R-módulo. Então,

$$\dim(M) := \sup\{n : \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n,\ \text{Spec}(R) \ni \mathfrak{p}_i \supset \text{ann}(M)\}.$$

Se M é finitamente gerado, então

$$\dim(M) := \sup\{n : \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{p}_i \in \text{supp}(M)\}.$$

Teorema A.2.18. Seja R um anel. As seguintes condições são equivalentes:

(1) R é Artiniano;

(2) R tem comprimento finito sobre si mesmo;

(3) R é Noetheriano e todo ideal primo de R é maximal;

(4) R é Noetheriano e $\dim(R) = 0$.

Teorema A.2.19. Seja R um anel Noetheriano e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. As seguintes condições são equivalentes:

(1) M tem comprimento finito;

(2) O anel $R/\mathrm{ann}(M)$ é Artiniano;

(3) $\dim(M) = 0$.

A.3 Anéis e Módulos Graduados

Um anel R é dito *graduado*, se $(R,+)$ admite uma decomposição como soma direta de grupos abelianos

$$R = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} R_d$$

tal que

$$R_d R_e \subseteq R_{d+e}$$

para todo $d,e \in \mathbb{Z}$ Os elementos de A_d são chamados *elementos homogêneos de grau d*. Assim todo elemento $a \in R$ pode ser escrito de maneira única como soma

$$a = \sum_{d\in\mathbb{Z}} a_d$$

de elementos homogêneos $a_d \in R_d$. Chamamos a_d a *componente homogênea de grau d* do elemento a.

Seja $R = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} R_d$ um anel graduado. Um R-módulo M é dito *graduado* se $(M,+)$ admite uma decomposição como soma direta

$$M = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} M_d$$

tal que

$$R_d M_e \subseteq M_{d+e}$$

para todo $d,e \in \mathbb{Z}$. Os elementos de M_d são chamados *elementos homogêneos de grau d*.

Sejam R um anel e I um ideal de R. O *anel graduado associado* de I é definido como

$$\mathrm{gr}_I(R) := \bigoplus_{n\geq 0} (I^n/I^{n+1}).$$

Este é um anel graduado, no qual o produto é definido de maneira que satisfaze-se o seguinte: para cada $x_n \in I^n$ denote por $\bar{x}_n$ a imagem de x_n em I^n/I^{n+1}; defina $\bar{x}_m\bar{x}_n$ por $\overline{x_m x_n}$, isto é, a imagem de $x_m x_n$ em I^{m+n}/I^{m+n+1}.

Usando a teoria de anéis graduados pode-se mostrar o seguinte.

Teorema A.3.1. Sejam R um anel Noetheriano, $I \subset R$ um ideal de R e M um R-módulo finitamente gerado. Seja N um submódulo de M. Então, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq r$ tem-se

$$I^n M \cap N = I^{n-r}(I^r M \cap N).$$

Em particular, para todo n grande o suficiente,

$$I^n N \subset (I^n M) \cap N \subset I^{n-r} N.$$

Como consequência do Teorema de Artin-Rees, temos o Teorema de interseção.

Teorema A.3.2 (Teorema de interseção)**.** Sejam R um anel Noetheriano, I um ideal de R e M um R-módulo finitamente gerado. Ponha $N = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^n M$. Então, $IN = N$.

Corolário A.3.3. Sejam R um anel Noetheriano e I um ideal de R tal que $I \subset J(R)$. Se M é um R-módulo finitamente gerado, então $\bigcap_{n \geq 0} I^n M = 0$.

A.4 Fecho Integral, Anéis Normais e Reduções

Definição A.4.1. Seja $R \subset S$ uma extensão de anéis, isto é R é subanel de S.

(1) Um elemento $x \in S$ é dito *integral sobre* R se existem $r_1, \ldots, r_n \in R$ tais que

$$x^n + r_1 x^{n-1} + \cdots + r_{n-1} x + r_n = 0.$$

(2) O *fecho integral* de R em S é o conjunto de todos os elementos de S que são integrais sobre R.

(3) Se o fecho integral de R em S coincide com R, dizemos que R é *integralmente fechado* em S.

Um domínio R é *integralmente fechado* se ele é integralmente fechado em seu corpo de frações.

Se $R \subset S$ é uma extensão de anéis, o fecho integral de R em S é um subanel de S.

Definição A.4.2. Um anel R é *normal* se ele é reduzido e $R_{\mathfrak{p}}$ é um domínio integralmente fechado para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$.

Proposição A.4.3. Seja R um anel Noetheriano reduzido. Então, R é normal se, se somente se, R é integralmente fechado em seu anel total de frações.

Demonstração. Ver (SWANSON I.; HUNEKE, 2015, Página 28) □

Seja I um ideal de um anel R. Um elemento $r \in R$ é dito *integral sobre* I se existe um inteiro n e elementos $a_i \in I^i$ com $i = 1, \ldots, n$ tais que

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

O conjunto de todos os elementos de R que são integrais sobre é chamado o *fecho integral* de I, e se denota por $\overline{I}$.

Proposição A.4.4. Seja I um ideal de R e $r \in R$. As seguintes, são equivalentes.

(1) r é integral sobre I;

(2) Existe um R-módulo finitamente gerado M tal que $rM \subset IM$ e tal que quando $aM = 0$ para algum $a \in R$, então $r \in \sqrt{(0 : a)}$.

Além disso, se I é um R-módulo finitamente gerado e contém um não divisor de zero, então r é integral sobre I se, e somente se, existe um R-módulo finitamente gerado M com $\operatorname{ann}(M) = 0$ tal que $IM = (I + (r))M$.

Demonstração. Ver (SWANSON I.; HUNEKE, 2015, Corolário 1.1.8). □

Sejam $J \subset I$ ideais de um anel R. Dizemos que J é uma *redução* de I se existe $n \geq 0$ tal que $I^{n+1} = JI^n$.

Proposição A.4.5. Sejam $K \subset I$ ideais de R. Suponha que I é finitamente gerado. Então, K é uma redução de I se, e somente se, $I \subset \overline{K}$.

Demonstração. Ver (SWANSON I.; HUNEKE, 2015, Proposição 1.2.5). □

Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano. Definimos a *propagação analítica* de I como sendo a dimensão de Krull de $\mathscr{F}_I := \operatorname{gr}_I(R)/\mathfrak{m}\operatorname{gr}_I(R)$.

Proposição A.4.6. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano com corpo residual infinito, I um ideal e $\ell = \ell(I)$ a propagação analítica de I. Então, toda redução de I contém uma redução gerada por ℓ elementos. Em particular, existem $x_1, \ldots, x_\ell$ tais que $(x_1, \ldots, x_\ell)$ é uma redução de I.

Demonstração. Ver (SWANSON I.; HUNEKE, 2015, Proposição 8.3.7). □

Proposição A.4.7. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e I um ideal. Então, $\dim(R) \geq \ell(I) \geq \operatorname{ht}(I)$.

Demonstração. Ver (SWANSON I.; HUNEKE, 2015, Corolário 8.3.9). □

A.5 O Teorema da Dimensão de Krull; Algumas Consequências

Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local Noetheriano. Um conjunto $\{a_1,\ldots,a_n\}\subset\mathfrak{m}$ é dito um *sistema de parâmetros* se $\sqrt{(a_1,\ldots,a_n)}=\mathfrak{m}$. Denotamos por δ_R ao tamanho mínimo de um sistema de parâmetros de R.

Teorema A.5.1. (Teorema da dimensão de Krull) Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local Noetheriano. Então, $\dim(R)$ é finito. Além disso, $\dim(R)=\delta_R$.

Corolário A.5.2. Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local Noetheriano. Então, $\mu(\mathfrak{m})\geq d$.

Um anel local Noetheriano $(R,\mathfrak{m},k)$ é *regular* se $\mathfrak{m}$ é gerado por $\dim(R)$ elementos. Nesse caso, observe, pelo corolário acima, que d é o número mínimo de geradores de $\mathfrak{m}$.

Outra consequência do Teorema da dimensão de Krull, é Teorema do ideal principal Krull.

Teorema A.5.3. (Teorema do ideal principal de Krull) Seja R um anel Noetheriano e I um ideal próprio de R gerado por n elementos. Se $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R)$ é um primo minimal de I, então $\operatorname{ht}(\mathfrak{p})\leq n$.

Corolário A.5.4. Seja R um anel Noetheriano e $0\neq a\in R$. Se $\mathfrak{p}$ é um primo minimal de a, então $\operatorname{ht}(\mathfrak{p})\leq 1$. No caso que $a\in R$ não é um divisor de zero de R, então $\operatorname{ht}(\mathfrak{p})=1$.

Os seguintes dois resultados são também consequências do Teorema da dimensão de Krull.

Proposição A.5.5. Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e $x_1,\ldots,x_r\in\mathfrak{m}$. Então,

$$\dim(M/(x_1,\ldots,x_r)M)\geq\dim(M)-r.$$

Teorema A.5.6 (Dimensão das fibras)**.** Seja $(R,\mathfrak{m})\to(S,\mathfrak{n})$ um homomorfismo local de anéis locais Noetherianos. Então:

(1) $\dim(S)\leq\dim(R)+\dim(S/\mathfrak{m}S)$ com igualdade se S é plano como R-módulo;

(2) Mais geralmente, se M é um R-módulo finitamente gerado e N é S-módulo finitamente gerado, então $\dim_S(M\otimes_R N)\leq\dim_R(M)+\dim_S(N/\mathfrak{m}N)$, com igualdade se N é plano como R-módulo.

A.6 Anéis Completos

Seja R um anel. Dado um ideal I de R, os conjuntos $x+I^n$, com $x\in R$ e $n\in\mathbb{N}$, formam uma base de abertos para uma topologia de R, a chamada *topologia I-ádica*. Da mesma forma, dado um R-módulo M os conjuntos da forma $x + I^n M$, com $x \in M$ e $n \in \mathbb{N}$, definem a *topologia I-ádica*.

O Teorema de Artin-Rees, indica que a topologia I-ádica de um submódulo $N \subset M$ de M coincide com a topologia induzida pela topologia I-ádica.

Considere uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em R. Dizemos que ela *converge* para um elemento $x \in R$ na topologia I-ádica se

$$\forall d \in \mathbb{N}, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq n_0 \Rightarrow x_n - x \in I^d.$$

Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *sequência de Cauchy* na topologia I-ádica se

$$\forall d \in \mathbb{N}, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\text{tal que } m, n \geq n_0 \Rightarrow x_m - x_n \in I^d.$$

Definição A.6.1. Sejam R um anel e I um ideal de R. Dizemos que R é *completo* em relação à topologia I-ádica se toda sequência de Cauchy em R converge na topologia I-ádica.

Definição A.6.2. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local. Dizemos que ele é *completo*, se é completo com relação à topologia $\mathfrak{m}$-ádica.

Sejam R um anel, I um ideal de R e M um R-módulo. Definimos o *completamento* I-ádico de R como o anel

$$\widehat{R} = \{(x_n + I^n)_n \in \prod_n R/I^n : x_m - x_n \in I^n, \forall m > n\}.$$

Definimos o *completamento* I-ádico de M como o $\widehat{R}$-módulo

$$\widehat{M} = \{(x_n + I^n M)_n \in \prod_n M/I^n M : x_m - x_n \in I^n M, \forall m > n\}.$$

Observe que temos uma aplicação natural $R \to \widehat{R}$, que leva um elemento $x \in R$ na tupla constante $(x + I^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

No caso que R seja local com ideal maximal $\mathfrak{m}$, o completamento de R é definido como sendo o completamento em relação a topologia $\mathfrak{m}$-ádica.

Teorema A.6.3. Seja R um anel Noetheriano e seja $I \subseteq R$ um ideal. Se

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de R-módulos finitamente gerados, então a sequência

$$0 \longrightarrow \widehat{M} \longrightarrow \widehat{N} \longrightarrow \widehat{P} \longrightarrow 0$$

dos completamentos I-ádicos também é exata. Em particular, se $M \subseteq N$ são módulos finitamente gerados, $\widehat{M}$ pode ser visto como $\widehat{R}$-submódulo de $\widehat{N}$ e $\widehat{(N/M)} = \widehat{N}/\widehat{M}$.

Teorema A.6.4 (Artin-Rees)**.** Seja R um anel Noetheriano, I um ideal de R e M um R-módulo finitamente gerado. Denote por $\widehat{R}$ e $\widehat{M}$ os completamentos I-ádicos de R e M. Então:

(1) O mapa natural
$$M \otimes_R \widehat{R} \xrightarrow{\cong} \widehat{M}$$
é um isomorfismo;

(2) $\widehat{R}$ é plano sobre R;

(3) $\widehat{J} = J\widehat{R}$ para todo ideal J de R.

Corolário A.6.5. Sejam R um anel Noetheriano, I um ideal de R e M um R-módulo finitamente gerado. Se $\widehat{R}$ é o completamento I-ádico de de A, então $\widehat{R}$ é $\widehat{I}$-ádicamente completo.

Proposição A.6.6. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano. Então, o completamento $\widehat{R}$ é um anel local Noetheriano com ideal maximal $\widehat{\mathfrak{m}}$.

Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano completo. Se I é um ideal próprio de R, então $(R/I, \mathfrak{m}/I)$ é completo.

Teorema A.6.7. O fecho integral de um domínio local Noetheriano completo R é um R-módulo finitamente gerado.

Demonstração. Ver (SWANSON I.; HUNEKE, 2015, Teorema 4.3.4). □

APÊNDICE

B

ALGUNS RESULTADOS SOBRE O POSTO DE UM MÓDULO

A referência principal para este apêndice é (BRUNS W.; HERZOG, 1998, Capítulo 1, Seção 4).

Neste apêndice, R é um anel, S é o conjunto dos não divisores de R e Q é o anel total de frações, isto é $Q = S^{-1}R$.

Definição B.0.1. Dizemos que um R-módulo M tem *posto* r se o Q-módulo $M \otimes_R Q$ é livre de posto r. Em tal caso, escrevemos $\operatorname{rank}(M) = r$. Um R-homomorfismo $\varphi : M \to N$ tem *posto* r e escrevemos $\operatorname{rank}(\varphi) = r$, se $\operatorname{im}(\varphi)$ tem posto r.

Observação B.0.2. Para um R-módulo M, são equivalentes:

(1) M tem posto r;

(2) $M \otimes_R Q$ é um Q-módulo livre de posto r;

(3) $S^{-1}M$ é Q-livre de posto r;

(4) $S^{-1}M \cong S^{-1}R^n$.

Note que no caso de módulos livres finitamente gerados, a definição de posto no sentido acima coincide com a definição de posto no sentido usual.

Observação B.0.3. Se M é um R-módulo de torção, então M tem posto zero. De fato, em tal caso tem-se que $S^{-1}M = 0$.

Proposição B.0.4. Seja M um R-módulo. Então, M tem posto r se, e somente se, M tem um submódulo livre N de posto r tal que M/N é um R-módulo de torção.

Demonstração. Suponha que M tem posto r. Então, $S^{-1}M$ é um Q-módulo livre de posto r, e portanto existem $x_1,\dots,x_r \in M$ tais que $\{\frac{x_1}{1},\cdots,\frac{x_r}{1}\}$ é uma Q-base para $S^{-1}M$. Seja $N = \langle x_1,\dots,x_r\rangle$. O fato de ser $\{\frac{x_1}{1},\cdots,\frac{x_r}{1}\}$ uma Q-base para $S^{-1}M$, implica que $x_1,\dots,x_r$ são R-linearmente independentes, donde N é livre de posto r. Por construção, observe que $S^{-1}N = S^{-1}M$, donde $S^{-1}(M/N) \cong S^{-1}M/S^{-1}N = 0$, o qual mostra que M/N é um módulo de torção.

Reciprocamente, suponha que M tem um submódulo livre N de posto r tal que M/N é um módulo de torção. Existe uma R-base $\{y_1,\dots,y_r\}$ para N. Então, $S^{-1}N = \langle\frac{y_1}{1},\cdots,\frac{y_r}{1}\rangle$ e $\frac{y_1}{1},\cdots,\frac{y_r}{1}$ são Q-linearmente independentes, donde $S^{-1}N$ é Q-módulo livre de posto r. Agora, já que M/N é um módulo de torção, temos que $S^{-1}M/S^{-1}N \cong S^{-1}(M/N) = 0$, e portanto $S^{-1}M = S^{-1}N$. Deste modo, $S^{-1}M$ resulta ser um Q-módulo livre de posto r. ☐

Lema B.0.5. Suponha que R é um anel Noetheriano.

(1) Se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$, então $R_\mathfrak{p} \cong Q_\mathfrak{p}$ como $R_\mathfrak{p}$-módulos. Em particular, se adicionalmente M é um R-módulo, então $M_\mathfrak{p} \cong (M \otimes_R Q)_\mathfrak{p}$.

(2) Para cada $\mathfrak{n} \in \mathrm{Specm}(Q)$, existe $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ tal que $S^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{n}$.

(3) No contexto de (2), $Q_\mathfrak{n} \cong R_\mathfrak{p}$ como anéis.

Demonstração. (1) Para o isomorfismo $R_\mathfrak{p} \cong Q_\mathfrak{p}$, considere a aplicação

$$R_\mathfrak{p} \to Q_\mathfrak{p}, \quad \frac{x}{t} \mapsto \frac{x/1}{t}.$$

O isomorfismo $M_\mathfrak{p} \cong (M \otimes_R Q)_\mathfrak{p}$ segue da seguinte cadeia de isomorfismos

$$M_\mathfrak{p} \cong M_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} R_\mathfrak{p} \cong M_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} Q_\mathfrak{p} \cong (M \otimes_R Q)_\mathfrak{p}.$$

(2) Pelo Teorema A.1.53, temos uma bijeção

$$D_S := \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{q} \cap S = \emptyset\} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Spec}\,(Q)\,, \quad \mathfrak{q} \mapsto S^{-1}\mathfrak{q}.$$

Já que S é o conjunto dos não divisores de zero de R, note que $D_S = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{q} \subset \mathrm{ZD}(R)\}$. Dado $\mathfrak{n} \in \mathrm{Specm}(Q)$, pela bijeção acima, existe $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$ tal que $\mathfrak{q} \subset \mathrm{ZD}(R)$ e $S^{-1}\mathfrak{q} = \mathfrak{n}$. Como $\mathrm{ZD}(R) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)} \mathfrak{p}$ (Teorema A.2.7) e $\mathrm{Ass}(R)$ é finito (Teorema A.2.8(2)), pelo Lema dos Primos Avoidance, $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ para algum $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$. Deste modo, $\mathfrak{n} = S^{-1}\mathfrak{q} \subset S^{-1}\mathfrak{p}$ e a maximalidade de $\mathfrak{n}$ implica em $S^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{n}$.

(3) Considere a aplicação

$$R_\mathfrak{p} \to Q_\mathfrak{n}, \quad \frac{x}{t} \mapsto \frac{x/1}{t/1}.$$

☐

Lema B.0.6. Suponha que R é um anel semilocal e seja M um R-módulo finitamente gerado. Se as localizações $M_{\mathfrak{m}}$ são $R_{\mathfrak{m}}$-módulos livres com o mesmo posto r para todos os ideais maximais $\mathfrak{m}$ de R, então M é livre.

Demonstração. Procederemos por indução sobre r.

Se $r = 0$, a hipótese indica que $M_{\mathfrak{m}} = 0$ para todo $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)$. Portanto $M = 0$, e em particular M é livre.

Suponha $r > 0$. Pelo lema de Nakayama, $M_{\mathfrak{m}} \not\subset \mathfrak{m}M_{\mathfrak{m}}$ para todo $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)$. Aplicando o Lema 2.6.2 (com $N = M$ e $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$ denotando os ideais maximais de R), temos que existe $x \in M$ tal que $\frac{x}{1} \notin \mathfrak{m}M_{\mathfrak{m}}$ para todo $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)$.

Dado $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)$, como $\frac{x}{1} \notin \mathfrak{m}M_{\mathfrak{m}}$, então $\frac{x}{1}$ é parte de uma base do $R_{\mathfrak{m}}$-módulo livre $M_{\mathfrak{m}}$; o qual tem posto r. Assim, pelo $R_{\mathfrak{m}}$-isomorfismo $(M/\langle x\rangle)_{\mathfrak{m}} \cong M_{\mathfrak{m}}/\langle x\rangle_{\mathfrak{m}}$, o $R_{\mathfrak{m}}$-módulo $(M/\langle x\rangle)_{\mathfrak{m}}$ é livre de posto $r-1$. Logo, por indução, o R-módulo $M/\langle x\rangle$ é livre de posto $r-1$.

Por outro lado $\langle x\rangle$ é um R-módulo livre. Com efeito, é suficiente ver que

$$\varphi : R \to \langle x\rangle, \quad r \mapsto rx$$

é injetiva. De fato, dado $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)$, a aplicação $\varphi_{\mathfrak{m}} : R_{\mathfrak{m}} \to \langle x\rangle_{\mathfrak{m}}$ é dada pela correspondência $r/s \mapsto (r/s)(x/1)$. Pelo visto acima, $\langle x\rangle_{\mathfrak{m}}$ é um $R_{\mathfrak{m}}$-módulo livre, donde $\varphi_{\mathfrak{m}}$ é injetiva. Portanto, φ é injetiva.

Já que $\langle x\rangle$ é livre e $M/\langle x\rangle$ é livre, observe que $M \cong \langle x\rangle \oplus M/\langle x\rangle$, donde segue que M é livre. □

Proposição B.0.7. Suponha que R é um anel Noetheriano e seja M um R-módulo finitamente gerado. Então, M tem posto r se, e somente se, para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$, o $R_{\mathfrak{p}}$-módulo $M_{\mathfrak{p}}$ é livre de posto r.

Demonstração. Suponha que M tem posto r. Então, o Q-módulo $M \otimes_R Q$ é livre de posto r. Dado $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$, pelo Lema B.0.5(1),

$$M_{\mathfrak{p}} \cong (M \otimes_R Q)_{\mathfrak{p}} \cong (Q^r)_{\mathfrak{p}} \cong Q_{\mathfrak{p}}^r \cong R_{\mathfrak{p}}^r.$$

Deste modo, $M_{\mathfrak{p}}$ é um $R_{\mathfrak{p}}$-módulo livre de posto r.

Reciprocamente, suponha que para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$, o $R_{\mathfrak{p}}$-módulo $M_{\mathfrak{p}}$ é livre de posto r.

Afirmação. Dado $\mathfrak{n} \in \mathrm{Specm}(Q)$, o $Q_{\mathfrak{n}}$-módulo $(M \otimes_R Q)_{\mathfrak{n}}$ é livre de posto r.

Com efeito pelos itens (2) e (3) do Lema B.0.5, existem $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ e um isomorfismo de anéis $Q_{\mathfrak{n}} \cong R_{\mathfrak{p}}$. Este isomorfismo induz em todo $Q_{\mathfrak{n}}$-módulo uma estrutura de $R_{\mathfrak{p}}$-módulo (e portanto de R-módulo) e vice-versa. Temos os seguintes isomorfismos de $Q_{\mathfrak{n}}$-módulos

$$(M \otimes_R Q)_{\mathfrak{n}} \cong Q_{\mathfrak{n}} \otimes_Q (M \otimes_R Q) \cong M \otimes_R Q_{\mathfrak{n}} \cong M \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}}.$$

Já que $M_{\mathfrak{p}}$ é livre de posto r como $R_{\mathfrak{p}}$-módulo e os anéis $R_{\mathfrak{p}}$ e $Q_{\mathfrak{n}}$ são isomorfos, segue que $M_{\mathfrak{p}}$ é livre de posto r como $Q_{\mathfrak{n}}$-módulo. Portanto, pela cadeia de isomorfismos acima, $(M \otimes_R Q)_{\mathfrak{n}}$ é livre de posto r como $Q_{\mathfrak{n}}$-módulo.

Já que $\mathrm{Ass}(R)$ é finito (Teorema A.2.8(2)), o item (2) do Lema B.0.5 nos indica que Q é semi-local. Logo, o resultado segue do Lema B.0.6. $\square$

Lema B.0.8. Seja

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} N \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de R-módulos finitamente gerados.

(1) Se L e N são livres, então M é livre.

(2) Suponha que R é local Noetheriano com ideal maximal $\mathfrak{m}$.

(2.1) Se M e N são livres, então L é livre.

(2.2) Se M e L são livres e $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(R)$, então N é livre.

Tanto em (1) como em (2), cumpre-se que $\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(L) + \mathrm{rank}(N)$.

Demonstração. Caso N livre. Seja $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_s\}$ uma base livre de N.

Como ψ é sobrejetiva, para cada $1 \leq i \leq s$, existe $u_i \in M$ tal que $\psi(u_i) = e_i$.

Afirmação. $M = \ker(\psi) \oplus' \langle u_1, \ldots, u_s \rangle \cong L \oplus \langle u_1, \ldots, u_s \rangle$.

De fato, se $z \in M$, então $\psi(z) = a_1 e_1 + \cdots + a_s e_s$ para alguns $a_1, \ldots, a_s \in R$. Daí, $\psi(z) = a_1 \psi(u_1) + \cdots + a_s \psi(u_s)$, donde $z - (a_1 u_1 + \cdots + a_s u_s) \in \ker(\psi)$, o que mostra que $M = \ker(\psi) + \langle u_1, \ldots, u_s \rangle$. Resta mostrar que $\ker(\psi) \cap \langle u_1, \ldots, u_s \rangle = 0$. Se $z \in \ker(\psi) \cap \langle u_1, \ldots, u_s \rangle$, então existem $a_1, \ldots, a_s \in R$ tais que $z = a_1 u_1 + \cdots + a_s u_s$ com $\psi(z) = 0$, logo $0 = a_1 \psi(u_1) + \cdots + a_s \psi(u_s) = a_1 e_1 + \cdots + a_s u_s$, donde $a_1 = a_2 = \cdots = a_s = 0$, obtendo assim que $z = 0$. Por último, o isomorfismo dado na afirmação segue do fato de $L \cong \mathrm{im}(\varphi) = \ker(\psi)$ (que cumpre-se desde que a sequência acima é exata).

Como $\mathscr{B}$ é uma base para N, observe que $u_1, \ldots, u_s$ devem ser linearmente independentes, donde $N \cong \langle u_1, \ldots, u_s \rangle$. Logo, pela afirmação acima, $M \cong L \oplus N$. Portanto:

- Se L é livre, então M é livre (pois N é livre);
- Se M é livre e R é local Noetheriano, então L é projetivo e por conseguinte L é livre.

Caso M e L livres e $(R, \mathfrak{m})$ local Noetheriano com $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(R)$. Pelo Lema 2.3.2(2), $M = \ker(\psi) \oplus' G$, onde G é um R-módulo livre. Observe que a restrição de ψ a G induz um R-isomorfismo $G \cong N$. Portanto, N é livre. Além disso, pelo desenvolvimento do caso acima, $M \cong L \oplus N$.

Em todos os casos, cumpre-se que $M \cong L \oplus N$. Daí, é clara a igualdade $\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank}(L) + \operatorname{rank}(N)$. ☐

Proposição B.0.9. Suponha que R é um anel Noetheriano. Seja

$$0 \to U \to M \to N \to 0$$

uma sequência exata de R-módulos finitamente gerados. Se dois dos módulos U, M, N tem posto, então o R-módulo restante também tem posto e rank $(M) = \operatorname{rank}(U) + \operatorname{rank}(N)$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R)$ e considere a sequência exata

$$0 \to U_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}} \to 0.$$

Pelo Lema B.0.8, se dois dos módulos $U_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}$ são $R_{\mathfrak{p}}$-livres, então o restante também é $R_{\mathfrak{p}}$-livre; e em qualquer caso, $\operatorname{rank}(M_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{rank}(U_{\mathfrak{p}}) + \operatorname{rank}(N_{\mathfrak{p}})$. Deste modo, pela Proposição B.0.7, segue o resultado. ☐

Proposição B.0.10. Seja $\varphi : R \to T$ um homomorfismo plano de anéis. Se M é um R-módulo de posto r, então $M \otimes_R T$ é um T-módulo de posto r.

Demonstração. Pela Proposição B.0.4, existe um submódulo N de M tal que N é livre de posto r e M/N é um R-módulo de torção. Seja $i : N \to M$ a inclusão. Como T é R-plano, então $i \otimes_R \operatorname{Id}_T : N \otimes_R T \to M \otimes_R T$ é injetivo.

Como N é livre de posto r, observe que $N \otimes_R T$ é livre de posto r como T-módulo. Deste modo, a injetividade de $i \otimes_R \operatorname{Id}_T$ implica que $(i \otimes_R \operatorname{Id}_T)(N \otimes_R T)$ é um T-módulo livre de posto r.

Por outro lado, todo elemento $y \in M \otimes_R T$ pode-se escrever da forma $y = m_1 \otimes \varphi(a_1)t_1 + \cdots + m_k \otimes \varphi(a_k)t_k$ com $m_1, \ldots, m_k \in M$, $a_1, \ldots, a_k \in R$ e $t_1, \cdots, t_k \in T$. Como M/N é um R-módulo de torção, para todo $i = 1, \ldots, k$, existe um elemento R-regular $r_i \in R$ tal que $r_i m_i \in N$. Seja $r = r_1 \cdots r_k$. Então, r é um elemento R-regular, e consequentemente, pela Proposição 2.1.11, $\varphi(r)$ é um elemento T-regular; e $\varphi(r)y = rm_1 \otimes \varphi(a_1)t_1 + \cdots + rm_k \otimes \varphi(a_k)t_k \in (i \otimes_R \operatorname{Id}_T)(N \otimes_R T)$. Portanto, $(M \otimes_R T)/(i \otimes_R \operatorname{Id}_T)(N \otimes_R T)$ é um T-módulo de torção.

Da Proposição B.0.4, segue que $M \otimes_R T$ é um T-módulo livre de posto r. ☐

Proposição B.0.11. Seja M um R-módulo finitamente gerado livre de torção. Se M tem posto n, então M é isomorfo a um submódulo de R^n.

Demonstração. Como M é finitamente gerado, podemos escrever $M = \langle m_1, \ldots, m_k \rangle$ onde $m_1, \ldots, m_k \in M$. Como M é livre de torção, a aplicação $\varphi : M \to S^{-1}M$ é um R-homomorfismo injetivo. Como M tem posto n, existe um Q-isomorfismo $\phi : S^{-1}M \to S^{-1}R^n$. Podemos supor que cada $\phi(m_i/1)$ é da forma

$$\phi(m_i/1) = a_i/1$$

com $a_i \in R^n$. Temos, os seguintes isomorfismos de R-módulos

$$\begin{aligned} M &\cong \langle m_1/1, \dots, m_k/1\rangle && \text{pois } \varphi \text{ é injetiva} \\ &\cong \langle a_1/1, \dots, a_k/1\rangle \subset S^{-1}R^n && \text{pois } \phi \text{ é um } R\text{-isomorfismo} \\ &\cong \langle a_1, \dots, a_k\rangle \subset R^n && \text{pois } R^n \to S^{-1}R^n \text{ é injetiva.} \end{aligned}$$

□

Proposição B.0.12. Seja I um ideal de R. Então, I tem posto 1 se, e somente se, I tem um elemento R-regular.

Demonstração. Suponha que I tem posto 1. Pela Proposição B.0.4, existe $x \in I$ tal que (x) é livre. É claro que x deve ser R-regular. Reciprocamente, seja $x \in I$ um elemento R-regular. Temos que $\{x/1\}$ é uma Q-base para $S^{-1}I$ pois:

(1) $\{x/1\}$ gera o Q-módulo $S^{-1}I$. De fato, se $y \in I$ e $s \in S$, observe que $\frac{y}{s} = \frac{y}{sx}\frac{x}{1}$;

(2) $\{x/1\}$ é Q-linearmente independente. Se $y \in R$ e $s \in S$ são tais que $\frac{y}{s}\frac{x}{1} = 0$, então $\frac{yx}{s} = 0$, donde $\frac{y}{s} = \frac{yx}{sx} = \frac{yx}{s}\frac{1}{x} = 0$.

Logo, o Q-módulo $S^{-1}I$ tem posto 1, isto é I tem posto 1 como R-módulo. □

Proposição B.0.13. Suponha que R é um anel local Noetheriano com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e corpo residual k. Suponha que $\mathfrak{m}$ contém um nao divisor de R.Se M é um R-módulo finitamente gerado de comprimento finito, então M tem posto zero.

Demonstração. Por indução sobre $n := \text{length}(M)$.

Se $n = 0$, então $M = 0$ e em particular M tem posto zero.

Suponha $n > 0$. Então, existe uma serie de composição

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M.$$

Isto nos fornece uma sequência exata $0 \to M_{n-1} \to M \to k \to 0$.

Por hipótese, existe um elemento R-regular $x \in \mathfrak{m}$. Claramente $x \cdot k = 0$, donde k é um R-módulo de torção. Deste modo, pela Observação B.0.3, k tem posto zero.

Observe que M_{n-1} tem comprimento $n-1$. Por indução, M_{n-1} tem posto zero.

Segue da aditividade do posto (Proposição B.0.9), que M tem posto zero. □