UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Operadores de transferência e espaços de Besov

Mateus Ribeiro de Souza Marra

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:____________________

Mateus Ribeiro de Souza Marra

Operadores de transferência e espaços de Besov

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÂO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Daniel Smania Brandão

USP – São Carlos
Abril, 2022

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

RMarra, M.o

Ribeiro de Souza Marra, Mateus
Operadores de transferência e espaços de Besov / Mateus Ribeiro de Souza Marra; orientador Daniel Smania Brandão. -- São Carlos, 2022.
47 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Operadores de transferência. 2. Espaços de Besov. 3. Operador de Perron-Fröbenius. 4. Sistemas dinâmicos. 5. Teoria ergódica. I. Smania Brandão, Daniel , orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Mateus Ribeiro de Souza Marra

Transfer operators and Besov spaces

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC- USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Daniel Smania Brandão

USP – São Carlos
April, 2022

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à Deus, por sempre iluminar meus pensamentos, me ajudando a não perder a concentração para a ansiedade.

Agradeço à minha família, meus pais Gildácio e Neusa, meus irmãos Pedro, Davi e Miguel pelo fundamental apoio e incentivo em todas horas difíceis.

Agradeço ao meu orientador Daniel, por ter compartilhado seu conhecimento ao longo desses anos, sendo sustentáculo para a minha instrução na área dos sistemas dinâmicos.

Agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro.

RESUMO

MARRA, M. **Operadores de transferência e espaços de Besov**. 2022. 47p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

O operador de transferência é uma ferramenta muito útil para estudar um sistema dinâmico, além de ter uma relação muito interessante com suas medidas invariantes.

Sejam $I=[0,1]$ e $f\colon I \to I$ um sistema dinâmico e ψ pertencente a um espaço de funções Banach B, definimos o operador de Perron-Fröbenius $L_f\colon B \to B$ da seguinte forma:

$$(L_f\,\psi)(x)=\sum_{f(y)=x}\frac{\psi(y)}{|Df(y)|}.$$

Estudamos a ação do operador de Perron-Fröbenius quando f é um mapa de expansão por partes ou uma contração. No caso particular de uma contração, consideramos a ação do operador nos espaços de Besov $B_{1,1}^{-s}$, com $0<s<1$. Nosso foco é primeiramente estudar o comportamento do operador para um caso particular de contração, abrindo um horizonte no estudo dos espaços de Besov $B_{1,1}^{-s}$. Esses espaços não consistem apenas em funções, a "função" delta de Dirac δ_0, por exemplo, pertence a $B_{1,1}^{-s}$.

Por exemplo, considere P^n partições de $[0,1]$ em 2^n intervalos de mesmo comprimento. Para cada $Q \in P^n$, $Q=[a,b]$, associamos um átomo

$$a_Q = |Q|^{-s-1}\left(\chi_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right]}-\chi_{\left[\frac{a+b}{2},b\right]}\right),$$

onde χ_A é igual a 1 para $x \in A$, e 0 caso contrário. O espaço $B_{1,1}^{-s}$ consiste nas distribuições ψ que podem ser representadas como

$$\psi = \sum_{n\in N}\ \sum_{Q\in P^n} c_Q a_Q, \text{ tal que} \sum_{n\in N}\ \sum_{Q\in P^n}|c_Q|<\infty,$$

onde $c_Q \in \mathbb{C}$, para todos $Q \in P^n$ e $n \in \mathbb{N}$. Vamos estudar também o operador dual do operador de Perron-Fröbenius de um sistema expansor, e compreender sua dinâmica nos espaços de Besov $B_{1,1}^{-s}$.

Palavras-chave: Operadores de transferência, espaços de Besov, Operador de Perron-Fröbenius, Sistemas dinâmicos, Teoria ergódica.

ABSTRACT

MARRA, M. **Transfer operators and Besov spaces**. 2022. 47p. Dissertação (Mestre em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

The transfer operator is a very useful tool for studying a dynamic system, in addition to having a very interesting relationship with its invariant measures.

Let $I=[0,1]$ and $f: I \to I$ be a dynamical system and ψ belonging to a space of Banach functions B, we define the Perron-Fröbenius Operator $L_f: B \to B$ as follows:

$$(L_f \psi)(x)=\sum_{f(y)=x}\frac{\psi(y)}{|Df(y)|}.$$

We study the action of the Ruelle-Perron-Fröbenius operator when f is a piecewise expansion map or a contraction. In the particular case of a contraction, we consider the action of the operator on the spaces of Besov $B_{1,1}^{-s}$, with $0<s<1$. Our focus is firstly study the behavior of the operator for a particular case of contraction, opening a horizon in the study of Besov spaces $B_{1,1}^{-s}$. These spaces do not consist only of functions, the Dirac delta "function" δ_0, for example, belongs to $B_{1,1}^{-s}$.

For example, consider P^n partitions of [0,1] into 2^n intervals of equal length. For each $Q \in P^n$, $Q=[a,b]$, we associate an atom

$$a_Q = |Q|^{-s-1}\left(\chi_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right]}-\chi_{\left[\frac{a+b}{2},b\right]}\right),$$

where χ_A is equal to 1 for $x \in A$, and 0 otherwise. The space $B_{1,1}^{-s}$ consists of the ψ distributions that can be represented as

$$\psi = \sum_{n\in N}\ \sum_{Q\in P^n} c_Q a_Q, \text{ such that} \sum_{n\in N}\ \sum_{Q\in P^n}|c_Q|<\infty,$$

where $c_Q \in \mathbb{C}$, for all $Q \in P^n$ and $n \in \mathbb{N}$. We will also study the dual operator of the Perron-Fröbenius operator of an expanding system, and understand its dynamics in the Besov spaces $B_{1,1}^{-s}$.

Keywords: Transfer operators, Besov spaces, Perron-Fröbenius operator, Dynamical systems, Ergodic theory.

Sumário

Capítulo 1

Introdução: Espaços de Besov

Oleg Vladimirovich Besov (Moscou, 1933) é um matemático russo. Desde 1960, Besov trabalha no Instituto Steklov de Matemática da Russian Academy of Sciences.

Autor de mais de 80 artigos, um de seus trabalhos mais notáveis foi a monografia *Integral Representations of Functions and Embedding Theorems*, que foi publicada em 1975 [9] em conjunto com os matemáticos V.P. Il'in e S.M. Nikol'skii. Tal trabalho rendeu aos seus autores o USSR State Prize em 1977. Em 1990, Oleg Besov foi eleito membro da Russian Academy of Sciences e mais tarde, em 2002, membro da European Academy of Sciences.

Besov desenvolveu um estudo na teoria dos espaços de funções diferenciáveis. Hoje, os chamados espaços de Besov são aplicados à análise, matemática computacional e mecânica dos fluidos.

Esses espaços têm quatro parâmetros: um parâmetro de suavidade $s \in (0, 1]$, os parâmetros $1 \leq p, q < \infty$ (correspondentes às normas $|| \cdot ||_p$ e $|| \cdot ||_q$ de espaços de Lebesgue L^p e L^q) por fim, o parâmetro n que é simplesmente a dimensão do espaço euclidiano em questão. Os espaços de Besov são normalmente denotados por $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ e coincidem com os espaços de Sobolev $W^s_p(\mathbb{R}^n)$ e $B^s_{2,2}(\mathbb{R}^n) = W^s_2(\mathbb{R}^n)$. Estudando os espaços $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, utilizamos o método da decomposição atômica para descrever os espaços de Besov para alguns parâmetros s, p, q e $n = 1$ [4].

Nesta dissertação, os espaços de Besov serão o ambiente de trabalho, onde iremos compreender a dinâmica do operador de transferência de um sistema dinâmico $f : I \to I$, sendo $I = [0, 1]$.

1.1 Espaços de medida e boas grades

Seja $(I, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, com $\mu(I) = 1$. Às vezes usaremos a notação $|\cdot| = \mu(\cdot)$ quando estiver claro qual medida está sendo usada.

Definimos a norma de uma família de partições como $||\mathscr{P}^k|| = \sup\{|Q| : Q \in \mathscr{P}^k\}$. Considere $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, chamamos $\mathscr{P} = (\mathscr{P}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de uma boa grade (seguindo a notação de Arbieto-Smania [1]) se possui as seguintes propriedades:

i) $\mathscr{P}^0 = \{I\}$.

ii) $I = \cup_{Q\in\mathscr{P}^k} Q$ (a menos de um conjunto de medida zero).

iii) Os elementos da família $\{Q\}_{Q\in\mathscr{P}^k}$ são dois a dois disjuntos (a menos de um conjunto de medida zero).

iv) Dado $Q \in \mathscr{P}^k$ e $k > 0$, temos que existe $P \in \mathscr{P}^{k-1}$ com $Q \subseteq P$.

v) Dado $Q \subseteq P$ que satisfaz $Q \in \mathscr{P}^{k+1}$ e $P \in \mathscr{P}^k$ para algum $k \geq 0$ temos

$$\lambda_1 \leq \frac{|Q|}{|P|} \leq \lambda_2.$$

vi) A família $\cup_k \mathscr{P}^k$ gera a $\sigma-$álgebra $\mathscr{A}$.

As constantes λ_1 e λ_2 descrevem a geometria da boa grade $\mathscr{P} = (\mathscr{P}^k)_{k\in\mathbb{N}} = \cup_k \mathscr{P}^k$. Lembre também que dado $A \subset I$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases}$$

é a função característica de do conjunto A.

1.2 Bases de Haar

Precisaremos de uma norma para trabalhar com decomposições atômicas de certos espaços de funções. Os resultados desta seção podem ser encontrados em Smania [12]. A seguir, veremos exemplos de duas normas, a primeira chamada norma de Haar. Antes de tudo, prescisaremos de algumas definições.

Definição 1.2.1. *Dado um espaço de Banach E, dizemos que uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é incondicionalmente convergente em E, se para toda aplicação bijetora $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ é convergente em E.*

Definição 1.2.2. *Dada uma sequência ordenada $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de um espaço de Banach E, chamamos de sequência de funcionais coordenada de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $e_m^*(e_n) = 1$ se $m = n$, ou $e_m^*(e_n) = 0$ se $m \neq n$.*

Definição 1.2.3. *Uma sequência ordenada $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de um espaço de Banach E é chamada uma base incondicional de E, se para todo $x \in E$ a série $x = \sum_n \langle e_n^*, x\rangle e_n$ converge incondicionalmente.*

Definição 1.2.4. *Dado um espaço de medida $(I, \mu, \mathscr{A})$ e $\beta \in [1, +\infty)$, definimos o espaço de Lebesgue $L^\beta(\mu)$ como o espaço das funções $f : I \to \mathbb{R}$ tais que*

$$||f||_\beta = \left(\int |f|^\beta d\mu\right)^{\frac{1}{\beta}} < \infty.$$

Queremos uma base incondicional de L^β, de maneira que a ordem das parcelas da decomposição não afete sua convergência. Para construir tal base: seja $\mathscr{P} = (\mathscr{P}^k)_k$ uma boa grade. Dado $Q \in \mathscr{P}^k$, considere $\Omega_Q = \{P_1^Q, ..., P_{n_Q}^Q\}$, a família de elementos de $\mathscr{P}^{k+1}$ tais que $P_i^Q \subset Q$ para todo i (ordenado de alguma maneira arbitrária). Chamamos os elementos de Ω_Q de filhos de Q. Claro que todo $Q \in \mathscr{P}$ possui no mínimo dois filhos, então $n_Q \geq 2$.

Defina indutivamente $\mathscr{H}_{Q,0} = \{(A,B)\}$, onde $A = \{P_1^Q, ..., P_{[n_Q/2]}^Q\}$ e $B = \{P_{[n_Q/2]+1}^Q, ..., P_{n_Q}^Q\}$ ($[x]$ = parte inteira de $x \geq 0$). Suponha que $\mathscr{H}_{Q,j}$ esteja definido. Tome um par ordenado $(S_1, S_2) \in \mathscr{H}_{Q,j}$, suponha que possuem as formas $S_1 = \{R_1^1, ..., R_{n_1}^1\}$ e $S_2 = \{R_1^2, ..., R_{n_2}^2\}$. Faça $\lambda_1 \leq \lambda_2$ tais que $n_i \leq 1/\lambda_1$, $i = 1, 2$.

Para cada $i = 1, 2$ tal que $n_i \geq 2$, escreva $T_i^1 = \{R_1^i, ..., R_{[n_i/2]}^i\}$ e $T_i^2 = \{R_{[n_i/2]+1}^i, ..., R_{n_i}^i\}$ e adicione (T_i^1, T_i^2) a $\mathscr{H}_{Q,j}$, com isso temos $\mathscr{H}_{Q,j+1}$ definido. Seja a família $\mathscr{H}_Q := \cup_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{H}_{Q,j} = \{(S_1, S_2)\}$ com $S_1, S_2 \subset \Omega_Q$ e $S_1 \cap S_2$ possui medida nula.

Observemos que, como $\mathscr{P}$ é uma boa grade, $\mathscr{H}_{Q,j} = \emptyset$ para j grande. Claro que

$$\sup_{Q\in\mathscr{P}} \#\mathscr{H}_Q < \infty.$$

Escreva $\mathscr{H} := \cup_{Q\in\mathscr{P}} \mathscr{H}_Q$, dado $S = (S_1, S_2) \in \mathscr{H}$, definimos uma função $\phi_S : I \to \mathbb{R}$ por:

$$\phi_S := \frac{1}{r_{(S_1,S_2)}} \left(\frac{\sum_{P\in S_1} \chi_P}{\sum_{P\in S_1} |P|} - \frac{\sum_{R\in S_2} \chi_R}{\sum_{R\in S_2} |R|} \right),$$

onde $r_{(S_1,S_2)}$ é definido por

$$r_{(S_1,S_2)} := \left(\frac{1}{\sum_{P\in S_1} |P|} + \frac{1}{\sum_{R\in S_2} |R|} \right)^{1/2}. \tag{1.1}$$

Pela definição de ϕ_S podemos notar que

$$\int_Q \phi_S dm = 0, \tag{1.2}$$

De fato,

$$\int_Q \frac{\sum_{P\in S_1} \chi_P}{\sum_{P\in S_1} |P|} dm = 1 = \int_Q \frac{\sum_{R\in S_2} \chi_R}{\sum_{R\in S_2} |R|} dm.$$

Uma vez que $1 \leq \#S_i \leq 1/\lambda_1$, com $i = 1, 2$, então

$$\lambda_1 |Q| \leq \sum_{P\in S_i} |P| \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} |Q|,$$

portanto

$$\left(\frac{2\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2} \frac{1}{|Q|^{1/2}} \leq r_{(S_1,S_2)} \leq \left(\frac{2}{\lambda_1}\right)^{1/2} \frac{1}{|Q|^{1/2}},$$

disso segue que

$$\begin{aligned}
\frac{C_1}{|Q|^{1/2}} &\leq \frac{1}{r_{(S_1,S_2)}} \min\{\frac{1}{\Sigma_{P\in S_1}|P|}, \frac{1}{\Sigma_{R\in S_2}|R|}\} \\
&\leq |\phi_S(x)| \leq \frac{1}{r_{(S_1,S_2)}} \max\{\frac{1}{\Sigma_{P\in S_1}|P|}, \frac{1}{\Sigma_{R\in S_2}|R|}\} \leq \frac{C_2}{|Q|^{1/2}},
\end{aligned}$$

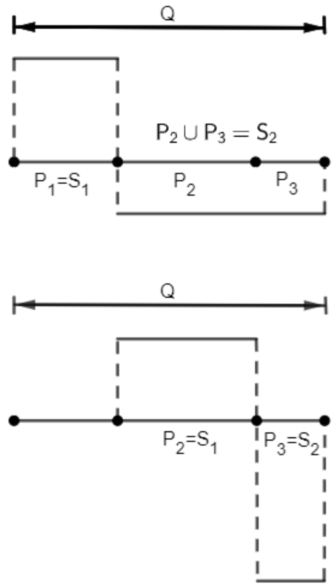

Figura 1.1: Construção da base de Haar, quando Q possui três filhos.

para todo $x \in \cup_{P \in S_1 \cup S_2} P$, e onde

$$C_1 = \frac{\lambda_1^{3/2}}{\sqrt{2}\lambda_2}, \quad \text{e} \ \ C_2 = \frac{\lambda_2^{1/2}}{\sqrt{2}\lambda_1^{3/2}} + 1.$$

Por último, definimos

$$\hat{\mathscr{H}} = \{I\} \cup \mathscr{H},$$

e

$$\phi_I = \frac{\chi_I}{|I|^{1/2}}.$$

Agora temos uma base incondicional $\{\phi_S\}_S$ em L^β e podemos definir a representação de Haar, que será uma importante ferramenta ao trabalhar com espaços de Besov:

Representação de Haar. Para todo $f \in L^\beta$, $\beta > 1$, a série

$$f = \sum_{S \in \hat{\mathscr{H}}} d_S^f \phi_S, \tag{1.3}$$

converge incondicionalmente em L^β, onde $d_S^f = \int f \phi_S dm$. Chamamos essa decomposição de representação de Haar de f e definimos a seguinte norma a qual denominamos norma de Haar:

$$N_{haar}(f) = |I|^{1/p-s-1/2}|d_I^f| + \left(\sum_k \sum_{Q \in \mathscr{P}^k} |Q|^{1-sp-\frac{p}{2}} \sum_{S \in \mathscr{H}_Q} |d_S^f|^p)^{q/p} \right)^{1/q}. \tag{1.4}$$

A representação de Haar nos inspira a representação canônica, onde a base são os átomos canônicos de Souza [2] que definiremos a seguir.

Representação atômica canônica. Primeiro notemos que

$$k_I^f a_I = d_I^f \phi_I,$$

onde $k_I^f = |I|^{\frac{1}{p}-s-\frac{1}{2}} d_I^f$ e $a_I = |I|^{s-\frac{1}{p}} \chi_I$. A função a_I é denominada átomo canônico de Souza em I. Em geral, dado $S \in \mathscr{H}$, então para algum $Q \in \mathscr{P}^k$, com $k \geq 0$, temos $S \in \mathscr{H}_Q$, com $S = (S_1, S_2)$, para cada $P \in S_1 \cup S_2$ a função

$$a_{S,P} = \frac{|Q|^{1/2}}{C_2} |P|^{s-1/p} \phi_S \chi_P$$

é denominada átomo de Souza em P (veja Smania [12]). Sendo

$$c_{S,P}^f = C_2 |Q|^{-1/2} |P|^{1/p-s} d_S^f.$$

É fácil ver que

$$|c_{S,P}^f| \leq C_2 \max\{\lambda_2^{1/p-s}, \lambda_1^{1/p-s}\} |Q|^{1/p-s-1/2} |d_S^f|.$$

Dado um filho P de $Q \in \mathscr{P}^k$, com $k \geq 0$, façamos

$$\tilde{a}_P^f = \frac{1}{\tilde{k}_P^f} \sum_{S=(S_1,S_2) \in \mathscr{H}_Q} \sum_{P \in S_1 \cup S_2} c_{S,P}^f a_{S,P},$$

onde

$$\tilde{k}_P^f = \sum_{S=(S_1,S_2) \in \mathscr{H}_Q} \sum_{P \in S_1 \cup S_2} |c_{S,P}^f|.$$

O número de termos nesta soma é finito, dependendo apenas da geometria de $\mathscr{P}$. Temos então que

$$\sum_{S \in \mathscr{H}_Q} d_S^f \phi_S = \sum_{Q \supset P \in \mathscr{P}^{k+1}} \tilde{k}_P^f \tilde{a}_P^f.$$

Tome $x_P \in P$, e façamos

$$k_P^f = \frac{\tilde{a}_P^f(x_P)}{|P|^{s-1/p}} \tilde{k}_P^f = \frac{1}{|P|^{s-1/p}} \tilde{k}_P^f$$

$$= \frac{1}{|P|^{s-1/p}} \sum_{S \in \mathscr{H}_Q} d_S^f \phi_S(x_P) = \frac{1}{|P|^{s-1/p}} \int f \sum_{S \in \mathscr{H}_Q} \phi_S(x_P) \phi_S \, dm.$$

Logo para todo P temos que

$$f \mapsto k_P^f,$$

se estende para um funcional linear em $L^1(m)$. Além disso, $|k_P^f| \leq \tilde{k}_P^f$ e f pode ser representado pela série uniformemente convergente em L^β

$$f = k_I^f a_I + \sum_k \sum_{Q \in \mathscr{P}^k} \sum_{\substack{P \subset Q \\ P \in \mathscr{P}^{k+1}}} k_P^f a_P = \sum_i \sum_{Q \in \mathscr{P}^i} k_Q^f a_Q. \tag{1.5}$$

Chamamos o lado direito de (1.5) de representação atômica canônica de f, e ainda definimos a seguinte norma para a tal representação:

$$N_{st}(f) = |k_I^f| + \left(\sum_{k \geq 1} (\sum_{Q \in \mathscr{P}^k} |k_Q^f|^p)^{q/p} \right)^{1/q}. \tag{1.6}$$

1.3 Definição do espaço $B^s_{p,q}$

Seja $\cup_k \mathscr{P}^k$ uma boa grade. Considere $1 \leq p, q \leq \infty$. Para todo $Q \in \cup_k \mathscr{P}^k$ definimos um $(s,p)-$átomo como

$$a_Q = \mu(Q)^{s-\frac{1}{p}} \chi_Q, \tag{1.7}$$

sempre que $x \in Q$ e $a_Q(x) = 0$ se $x \notin Q$ (veja: Arbieto-Smania [1]). A função a_Q é chamada de átomo canônico de Souza suportado em Q. O parâmetro s representa a suavidade do espaço de Besov.

O espaço de Besov $B^s_{p,q}(I, \mu, \cup_k \mathscr{P}^k)$, com $p \in [1, +\infty)$ e $q \in [1, +\infty]$, é o espaço de todas as funções f no *espaço de Lebesgue* L^p que possuem uma decomposição

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{Q \in \mathscr{P}^k} c_Q a_Q, \tag{1.8}$$

onde $c_Q \in \mathbb{C}$ para todo $Q \in \cup_k \mathscr{P}^k$ e a_Q são $(s,p)-$átomos de tal forma que o $(s,p,q)-$custo,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{Q \in \mathscr{P}^k} |c_Q|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}, \tag{1.9}$$

é finito. No caso em que $q = +\infty$, definimos o $(s,p,q)-$custo como

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{Q \in \mathscr{P}^k} |c_Q|^p \right)^{1/p}.$$

Chamamos o lado direito de (1.8) como uma $B^s_{p,q}-$representação de f.

Definimos uma norma neste espaço da seguinte maneira:

$$|f|_{B^s_{p,q}} = \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{Q \in \mathscr{P}^k} |c_Q|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q},$$

tomando o ínfimo sobre todas as possíveis $B^s_{p,q}-$representações de f.

Pelo Corolário 6.5 de Smania [12] temos que $(B^s_{p,q}, |\cdot|_{B^s_{p,q}})$ é um espaço de Banach complexo e que sua bola unitária é compacta em L^p.

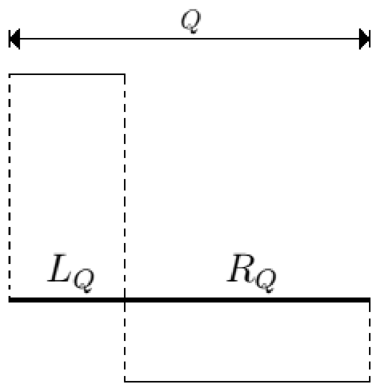

Figura 1.2: Átomo com suporte em Q.

1.4 O espaço $B^{-s}_{1,1}([0,1],\mu,\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}^n)$

Um caso particular dos espaços de Besov será de extrema importância para nós. Dada $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}^n$ uma família de partições do intervalo $[0,1]$, e uma medida μ, vamos considerar o espaço de Besov $B^{-s}_{1,1}([0,1],\mu,\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}^n)$ que será o mais conveniente para o nosso trabalho.

Dado $Q\in\mathscr{P}^n$ para algum $n\in\mathbb{N}$, e com uma pequena distinção da equação (1.7), defina o átomo $a_Q:[0,1]\to\mathbb{R}$ com suporte em Q,

$$a_Q=\mu(Q)^{-s-1}\left(\frac{\mu(Q)\chi_{L_Q}}{\mu(L_Q)}-\frac{\mu(Q)\chi_{R_Q}}{\mu(R_Q)}\right), \tag{1.10}$$

onde $L_Q,R_Q\in\mathscr{P}^{n+1}$ são intervalos com interiores disjuntos, L_Q está à esquerda de R_Q e $L_Q\cup R_Q=Q$.

O parâmetro $0<s<1$ é a suavidade do espaço de Besov. Finalmente, o espaço de Besov $B^{-s}_{1,1}([0,1],\mu,\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}^n)$ será constituído das representações

$$\psi=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^n}c_Qa_Q,\ \text{com } c_Q\in\mathbb{C}\text{ tais que }\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^n}|c_Q|<\infty.$$

Vamos adotar uma norma $|\cdot|_{B^{-s}_{1,1}}$ nesse espaço, definida por

$$|\psi|_{B^{-s}_{1,1}}:=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^n}|c_Q|.$$

Da mesma forma, defina $b_Q:[0,1]\to\mathbb{R}$ átomo com suporte em Q, tal que

$$b_Q=\mu(Q)^{s}\left(\frac{\mu(Q)\chi_{L_Q}}{\mu(L_Q)}-\frac{\mu(Q)\chi_{R_Q}}{\mu(R_Q)}\right), \tag{1.11}$$

e defina o espaço de Besov,

$$B^{s}_{\infty,\infty}([0,1],\mu,\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}^n)=\{\theta:[0,1]\to\mathbb{C};\ \theta=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^n}d_Qb_Q,\ d_Q\in\mathbb{C}\text{ com }\sup_{\substack{Q\in\mathscr{P}^n\\ n\in\mathbb{N}}}|d_Q|<\infty\}.$$

A norma neste espaço, $|\cdot|_{B^s_{\infty,\infty}}$, é definida por

$$|\theta|_{B^s_{\infty,\infty}} = \sup_{\substack{Q\in\mathscr{P}^n\\ n\in\mathbb{N}}} |d_Q| < \infty.$$

Além disso, também trabalharemos com o espaço

$$B^s_{\infty,\infty,0}([0,1],\mu,\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}^n) := \{\theta \in B^s_{\infty,\infty}; |d_Q| \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty,\ Q \in \mathscr{P}^n\}.$$

Para simplificar a notação, vamos eventualmente denotar tais espaços por $B^{-s}_{1,1}(\mu), B^s_{\infty,\infty}(\mu)$ e $B^s_{\infty,\infty,0}(\mu)$. Podemos ainda escrever $B^{-s}_{1,1}$, $B^s_{\infty,\infty}$ e $B^s_{\infty,\infty,0}$ quando a medida em questão já estiver bem estabelecida.

Definição 1.4.1. *Seja X um espaço vetorial de dimensão infinita, dizemos que uma sequência $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ é base de Schauder de X, se para todo $x \in X$ existe uma única sequência de escalares $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$.*

Definição 1.4.2. *Seja X um espaço topológico, dizemos que X é separável se possui um subconjunto enumerável denso $D \subseteq X$.*

Lema 1.4.1. *$B^s_{\infty,\infty,0}$ é um subespaço fechado e separável de $B^s_{\infty,\infty}$.*

Demonstração. Seja $\{\psi_n\} \subseteq B^s_{\infty,\infty,0}$, com representação

$$\psi_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^k} d_Q^{(n)} b_Q,$$

uma sequência convergindo para $\psi \in B^s_{\infty,\infty}$. Tome $\varepsilon > 0$, e $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{Q\in\cup_k\mathscr{P}^k} |d_Q^{(n)} - d_Q| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $n > N_0$. Para cada n escolha $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|d_Q^{(n)}| \leq \varepsilon/2$ para todo $Q \in \cup_{k>N_1}\mathscr{P}^k$. Segue que,

$$|d_Q| \leq |d_Q - d_Q^{(n)}| + |d_Q^{(n)}| < \varepsilon,$$

portanto $d_Q \to 0$ quando $N_1 \to \infty$. Por fim $\psi \in B^s_{\infty,\infty,0}$, ou seja, $B^s_{\infty,\infty,0}$ é um subespaço fechado de $B^s_{\infty,\infty}$.

Para ver que $B^s_{\infty,\infty,0}$ é separável basta ver que $\{b_Q\}$ é uma base de Schauder. Com efeito, dado $\psi \in B^s_{\infty,\infty,0}$, com representação

$$\psi = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\cup_k\mathscr{P}^k} d_Q b_Q,$$

então

$$|\psi - \sum_{k\leq k_0} c_Q b_Q|_{B^s_{\infty,\infty}} \to 0,$$

quando $k_0 \to \infty$, se e somente se

$$\sup_{Q \in \cup_k \mathscr{P}^k} |c_Q - d_Q| = 0,$$

ou seja, $c_Q = d_Q$ para todo $Q \in \cup_k \mathscr{P}^k$, o que completa nossa demonstração.

□

Lema 1.4.2. *Temos as seguintes relações entre os duais dos espaços de Besov considerados:*

$$(B^s_{\infty,\infty,0})^* = B^{-s}_{1,1} \text{ e } (B^{-s}_{1,1})^* = B^s_{\infty,\infty}.$$

Demonstração de que $(B^{-s}_{1,1})^* = B^s_{\infty,\infty}$. Seja ρ um funcional linear contínuo em $B^{-s}_{1,1}$, então dado $\psi \in B^{-s}_{1,1}$ temos

$$\rho(\psi) = \lim_{k\to\infty} \rho\left(\sum_{n=0}^{k} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q a_Q\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q \rho(a_Q) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q \rho(a_Q).$$

Então temos a representação de tal funcional linear. A convergência da soma no extremo direito é assegurada. De fato, deve convergir absolutamente pois ρ é um operador limitado.

Além disso, temos que

$$|\rho(\psi)| \leq ||\rho|| |\psi|_{B^{-s}_{1,1}},$$

para todo $\psi \in B^{-s}_{1,1}$, onde $||\rho||$ é a menor das constantes que satisfazem a desigualdade. Note que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} \rho(a_Q) b_Q \in B^s_{\infty,\infty},$$

desde que

$$|\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} \rho(a_Q) b_Q|_{B^s_{\infty,\infty}} \leq ||\rho||.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\rho(\psi)| &\leq \sup_{\substack{Q\in\mathscr{P}^n \\ n\in\mathbb{N}}} |\rho(a_Q)| \cdot |\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q a_Q|_{B^{-s}_{1,1}} \\ &\leq |\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} \rho(a_Q) b_Q|_{B^s_{\infty,\infty}} |\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q a_Q|_{B^{-s}_{1,1}}, \end{aligned}$$

logo

$$||\rho|| \leq |\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} \rho(a_Q) b_Q|_{B^s_{\infty,\infty}},$$

pois $||\rho||$ é a menor das constantes que satisfazem esta desigualdade. Portanto

$$||\rho|| = |\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^n}\rho(a_Q)b_Q|_{B^s_{\infty,\infty}},$$

então existe um isomorfismo isométrico linear entre $(B^{-s}_{1,1})^*$ e $B^s_{\infty,\infty}$.

$\square$

Demonstração de que $(B^s_{\infty,\infty,0})^* = B^{-s}_{1,1}$. Considere $\psi \in B^s_{\infty,\infty,0}$ e $\nu \in B^{-s}_{1,1}$, com representações

$$\psi = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^k} d_Q b_Q \quad \text{e} \quad \nu = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^k} c_Q a_Q.$$

Seja

$$\begin{aligned}\rho : B^{-s}_{1,1} &\to B^{-s}_{1,1}\\ \nu &\mapsto \rho_\nu,\end{aligned}$$

um mergulho tal que $\rho_\nu(\psi) = \nu(\psi)$. Desde que $\psi \in B^s_{\infty,\infty,0} \subset B^s_{\infty,\infty}$, e já temos bem definida a ação de um elemento $\nu \in B^{-s}_{1,1}$, então é claro que ρ é limitado e linear. Já sabemos que as normas $|\cdot|_{B^{-s}_{1,1}}$ e $|\cdot|_{(B^s_{\infty,\infty})^*}$ são iguais para todo elemento de $B^{-s}_{1,1}$, consequentemente temos que $|\cdot|_{B^{-s}_{1,1}}$ e $|\cdot|_{(B^s_{\infty,\infty,0})^*}$ são iguais também. Portanto $B^{-s}_{1,1} \subseteq (B^s_{\infty,\infty,0})^*$.

Por outro lado, seja

$$\begin{aligned}\tau : B^s_{\infty,\infty,0} &\to \mathbb{C}\\ \psi &\mapsto \tau(\psi),\end{aligned}$$

um funcional linear, nós temos que

$$|\tau(\psi)| = |\tau\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^k} d_Q b_Q\right)| = |\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^k} d_Q\tau(b_Q)| \le \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^k}|d_Q||\tau(b_Q)|,$$

e desde que τ é um funcional limitado, nós temos que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^k}|\tau(b_Q)| < \infty,$$

e como $\psi \in B^s_{\infty,\infty,0}$, então

$$|\tau(\psi)| \le \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^k}|d_Q||\tau(b_Q)| \le \left(\sup_{Q\in\cup_k\mathscr{P}^k}|d_Q|\right)\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^k}|\tau(b_Q)| < \infty.$$

Portanto $\{d_Q\tau(b_Q)\}_{Q\in\cup_k\mathscr{P}^k} \in B^{-s}_{1,1}$, e $(B^s_{\infty,\infty,0})^* \subseteq B^{-s}_{1,1}$.

$\square$

1.5 O espaço $B_{1,1}^{-s}$ é um espaço de Banach

Vamos agora estudar uma série de propriedades importantes do espaço $B_{1,1}^{-s}$. Em particular veremos que ele é um espaço de Banach. Primeiramente, veremos que $|\cdot|_{B_{1,1}^{-s}}$ é, de fato, uma norma.

Proposição 1.5.1. *$|\cdot|_{B_{1,1}^{-s}}$ é uma norma, ou seja, para todo $\psi, \rho \in B_{1,1}^{-s}$ com representações da forma*

$$\psi = \sum_n \sum_{Q \in \mathscr{P}^n} c_Q a_Q \quad e \quad \rho = \sum_n \sum_{Q \in \mathscr{P}^n} d_Q a_Q$$

e para todo $r \in \mathbb{C}$, temos que:

i. $|\psi|_{B_{1,1}^{-s}} \geq 0$, *além disso* $|\psi|_{B_{1,1}^{-s}} = 0 \iff \psi = 0$,

ii. $|r\psi|_{B_{1,1}^{-s}} = |r||\psi|_{B_{1,1}^{-s}}$,

iii. $|\psi + \rho|_{B_{1,1}^{-s}} \leq |\psi|_{B_{1,1}^{-s}} + |\rho|_{B_{1,1}^{-s}}$.

Demonstração. i. É claro que $|\psi|_B = \sum_n \sum_{Q \in \mathscr{P}^n} |c_Q| \geq 0$. Agora, se

$$|\psi|_{B_{1,1}^{-s}} = \sum_n \sum_{Q \in \mathscr{P}^n} |c_Q| = 0.$$

Portanto $c_Q = 0$ para todo $Q \in \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{P}^n$, logo $\psi = 0$.

□

Demonstração. ii. É claro que

$$|r\psi|_{B_{1,1}^{-s}} = \sum_n \sum_{Q \in \mathscr{P}^n} |rc_Q| = |r| \sum_n \sum_{Q \in \mathscr{P}^n} |c_Q| = |r||\psi|_{B_{1,1}^{-s}}.$$

□

Demonstração. iii. De fato,

$$\begin{aligned} |\psi + \rho|_{B_{1,1}^{-s}} &= \sum_n \sum_{Q \in \mathscr{P}^n} |c_Q + d_Q| \\ &\leq \sum_n \sum_{Q \in \mathscr{P}^n} |c_Q| + |d_Q| \\ &\leq \sum_n \sum_{Q \in \mathscr{P}^n} |c_Q| + \sum_n \sum_{Q \in \mathscr{P}^n} |c_Q| = |\psi|_{B_{1,1}^{-s}} + |\rho|_{B_{1,1}^{-s}}. \end{aligned}$$

Então, $|\cdot|_{B_{1,1}^{-s}}$ é uma norma. □

Proposição 1.5.2. *Dada uma sequência $\{\psi^k\}$ de representações em $B_{1,1}^{-s}$, $0 < s < 1$, com*

$$\psi^k = \sum_n \sum_{Q \in \mathscr{P}^n} c_Q^k a_Q,$$

e supondo que

i) Existe $M > 0$ tal que, para todo k :

$$\sum_n \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} |c_Q^k| \leq M.$$

ii) Para todo $Q \in \mathscr{P}$, c_Q^k converge para algum $c_Q \in \mathbb{C}$.

Então ψ^k converge em $(B_{1,1}^{-1}, |\cdot|_{B_{1,1}^{-1}})$ para algum $\psi \in B_{1,1}^{-s}$, e ψ possui a representação:

$$\psi = \sum_n \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q \psi_Q,$$

que satisfaz

$$\sum_n \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} |c_Q| \leq M.$$

Demonstração. Façamos

$$\psi^k - \psi = \sum_{n\leq N} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} (c_Q^k \psi_Q - c_Q \psi_Q) + \sum_{n>N} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} g_Q^k b_Q^k, \tag{1.12}$$

onde

$$b_Q^k = \frac{|c_Q^k|}{|c_Q^k| + |c_Q|}\operatorname{sgn}(c_Q^k)\psi_Q + \frac{|c_Q|}{|c_Q^k| + |c_Q|}\operatorname{sgn}(-c_Q)\psi_Q,$$

é um átomo, e

$$g_Q^k = |c_Q^k| + |c_Q|.$$

Lembre que dado um número complexo x, a função sinal *sgn* é

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0, \\ \frac{x}{|x|}, & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Observe que a série no lado direito de (1.12) converge em $B_{1,1}^{-1}$. De fato,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} |g_Q^k| < 2M.$$

Então dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher N grande o suficiente tal que

$$\begin{aligned}
|\sum_{n>N} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} g_Q^k b_Q^k|_{B_{1,1}^{-1}} &= |\sum_{n>N} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} g_Q^k b_Q^k \cdot |Q|^{1-s}|_{B_{1,1}^{-s}} \\
&= \sum_{n>N} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} |g_Q^k||Q|^{1-s} \leq \left(\sup_{n>N} \frac{1}{2^{N(1-s)}}\right) \sum_{n>N} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} |g_Q^k| \leq \frac{1}{2^{N(1-s)}} 2M < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, para k grande o suficiente, temos que

$$|\sum_{n\leq N}\sum_{Q\in\mathscr{P}^n}(c^k_Q a_Q - c_Q a_Q)|_{B^{-1}_{1,1}} < \varepsilon/2.$$

Por fim $|\psi^k - \psi|_{B^{-1}_{1,1}} < \varepsilon$, ou seja, ψ^k converge para ψ em $(B^{-1}_{1,1}, |\cdot|_{B^{-1}_{1,1}})$.

□

Corolário 1.5.1. *Considerando $0 < s < 1$, podemos afirmar que*

1) Dado $\psi^k \in B^{-s}_{1,1}$ tal que $|\psi^k|_{B^{-s}_{1,1}} \leq M$, para algum $M > 0$ e para todo $k \in \mathbb{N}$. Então existe um subsequência que converge em $(B^{-1}_{1,1}, |\cdot|_{B^{-1}_{1,1}})$, para algum $\psi \in B^{-s}_{1,1}$ com $|\psi|_{B^{-s}_{1,1}} \leq M$.

2) $B^{-s}_{1,1}$ é um espaço de Banach.

Demonstração. 1) Dada uma sequência $\psi^k \in B^{-s}_{1,1}$, temos as representações

$$\psi^k = \sum_n \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c^k_Q a_Q,$$

portanto, escolhendo $M > 0$ que limite superiormente $|\psi^k|_{B^{-s}_{1,1}}$, para todo k, pela definição de ínfimo, podemos pegar constantes $1 \geq \varepsilon_k > 0$ tendendo a zero quando $k \to \infty$, de maneira que

$$\sum_n \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} |c^k_Q| < M + \varepsilon_k.$$

Em particular, $|c^k_Q| \leq M + 1$. Uma vez que $\cup_n \mathscr{P}^n$ é enumerável, temos que c^k_Q converge para algum $c_Q \in \mathbb{C}$, para todo $Q \in \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}^n$, pelo argumento da diagonalização de Cantor.

Pela Proposição 1.5.2, temos então que ψ^k converge na norma $|\cdot|_{B^{-1}_{1,1}}$ para algum $\psi \in B^{-s}_{1,1}$ que possui uma representação

$$\psi = \sum_n \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q a_Q,$$

tal que

$$\sum_n \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} |c_Q| \leq M.$$

□

Demonstração. 2) Suponha (ψ^k) uma sequência de Cauchy em $B^{-s}_{1,1}$. Para todo $\varepsilon > 0$ podemos tomar $m, k \in \mathbb{N}$ grandes o suficiente, tais que

$$|\psi^k - \psi^m|_{B^{-s}_{1,1}} \leq \varepsilon.$$

Temos que $\psi^k - \psi^m \in B^{-s}_{1,1}$ converge em $B^{-1}_{1,1}$ para algum $\psi^k - \psi \in B^{-s}_{1,1}$ quando $m \to \infty$, e além disso

$$|\psi^k - \psi|_{B^{-s}_{1,1}} \leq \varepsilon.$$

Portanto (ψ^k) converge para ψ em $B^{-s}_{1,1}$. □

Capítulo 2

Um exemplo de espaço $B_{1,1}^{-s}$

Analogamente à Seção 1.2, vamos considerar uma base de Haar, tomando os filhos de $[0,1]$ nas partições $\mathscr{P}^n$ como sendo 2^n intervalos de mesmo tamanho com interior disjunto dois a dois. Dado $Q = [a,b] \in \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}^n$, um átomo dessa base com suporte em Q terá a forma

$$a_Q = |Q|^{-s-1}(\chi_{L_Q} - \chi_{R_Q}), \tag{2.1}$$

onde $L_Q = [a, \frac{a+b}{2}]$, $R_Q = [\frac{a+b}{2}, b]$. Note uma pequena diferença entre as expressões (2.1) e (1.10). Uma vez que L_Q e R_Q têm a mesma medida para todo $Q \in \mathscr{P}^n$, com n fixado, então podemos visualizar os átomos com mais facilidade neste caso. Posteriormente trabalharemos com partições mais arbitrárias, e teremos que controlar o valor dos átomos em seu suporte com os fatores $|Q|/|L_Q|$ e $|Q|/|R_Q|$ como em (1.10). Além disso, definimos os átomos do espaço $B^s_{\infty,\infty}([0,1], m, \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}^n)$, como

$$b_Q = |Q|^s(\chi_{L_Q} - \chi_{R_Q}),$$

para todo $Q \in \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}^n$.

No capítulo 5 veremos que a ação do operador de transferência (veja (3.1)) da contração

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\mapsto [0,1] \\ x &\to x/2, \end{aligned}$$

no espaço $B^{-s}_{1,1}([0,1], m, \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}^n)$ tem um comportamento bem simples. Mas por ora, investiguemos um pouco mais as propriedades deste espaço.

Definição 2.0.1. *Dizemos que a função $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função $\alpha-$Hölder contínua, se existe $C > 0$ tal que para todo $x, y \in [0,1]$,*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x-y|^\alpha.$$

Para $0 < \alpha \leq 1$, definimos o espaço das funções $\alpha-$Hölder contínuas

$$\Lambda^\alpha = \{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R};\ \varphi \text{ é } \alpha - \text{Hölder contínua}\}.$$

Para $\varphi \in \Lambda^\alpha$, defina

$$H^\alpha(\varphi) = \sup_{\substack{x,y\in[0,1] \\ x\neq y}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

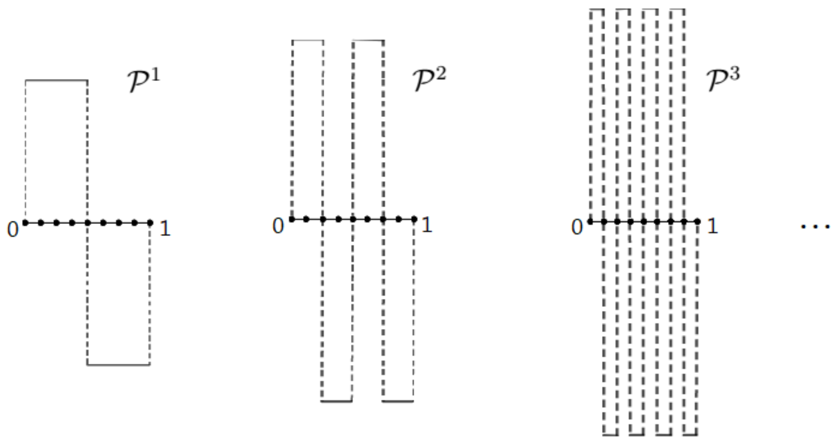

Figura 2.1: Construção da base de Haar, para 2^n filhos de mesmo tamanho.

A norma $\alpha-$Hölder em Λ^α é definida por

$$|\varphi|_{\Lambda^\alpha} = |\varphi|_{\Lambda^0} + H^\alpha(\varphi) \tag{2.2}$$

onde $|\varphi|_{\Lambda^0} = \sup_{x\in[0,1]} |\varphi(x)|$.

2.1 O dual de $B^{-s}_{1,1}(m)$ é igual a $B^s_{\infty,\infty}(m)$

Neste caso particular podemos obter que $(B^{-s}_{1,1}(m))^* = B^s_{\infty,\infty}(m)$ de uma maneira diferente a que fizemos no Lema 1.4.2. Antes disso, vejamos alguns resultados interessantes a respeito desses espaços.

Proposição 2.1.1. *Seja $\theta \in B^s_{\infty,\infty}$ que possui representação*

$$\theta = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{S\in\mathscr{P}^n} d_S b_S,$$

então

$$|\sum_{n} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q \int \theta a_Q dm| \leq |\theta|_{B^s_{\infty,\infty}} |\psi|_{B^{-s}_{1,1}}.$$

Demonstração. Desde que a_Q e b_S são ortogonais caso $Q \neq S$ temos que

$$\begin{aligned}
|\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q \int \theta a_Q dm| &= |\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q \int \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} d_S b_S a_Q dm| \\
&= |\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q d_Q \int_Q b_Q a_Q dm| \\
&= |\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q d_Q \int_Q |Q|^s (\chi_{L_Q} - \chi_{R_Q}) |Q|^{-s-1} (\chi_{L_Q} - \chi_{R_Q}) dm|
\end{aligned}$$

$$= |\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q d_Q \int_Q |Q|^{-1} dm|$$
$$= |\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q d_Q| \leq \left(\sup_{\substack{Q\in\mathscr{P}^n\\ n\in\mathbb{N}}} |d_Q|\right)\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^n} |c_Q| = |\theta|_{B^s_{\infty,\infty}}|\psi|_{B^{-s}_{1,1}}.$$

□

O resultado a seguir é uma adaptação de um teorema que pode ser encontrado em Souza [2], ele nos indica que a igualdade na Proposição 2.1.1 é alcançada quando $|\theta|_{B^s_{\infty,\infty}} = 1$.

Proposição 2.1.2. *Para todo $\psi \in B^{-s}_{1,1}$ temos*

$$|\psi|_{B^{-s}_{1,1}} = \sup_{|\theta|_{B^s_{\infty,\infty}}\leq 1} |\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q \int \theta a_Q dm|, \tag{2.3}$$

e para todo $\theta \in B^s_{\infty,\infty}$ temos que

$$|\theta|_{B^s_{\infty,\infty}} = \sup_{|\psi|_{B^{-s}_{1,1}}\leq 1} |\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q \int \theta a_Q dm|. \tag{2.4}$$

Demonstração. Pela Proposição 2.1.1 temos que

$$|\psi|_{B^{-s}_{1,1}} \geq \sup_{|\theta|_{B^s_{\infty,\infty}}\leq 1} |\sum_n\sum_Q c_Q \int \theta a_Q dm|.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\sup_{|\theta|_{B^s_{\infty,\infty}}\leq 1} |\sum_n\sum_Q c_Q \int \theta a_Q dm| = \sup_{|\theta|_{B^s_{\infty,\infty}}\leq 1} |\sum_n\sum_Q c_Q d_Q| &\geq |\sum_n\sum_Q c_Q \frac{\overline{c_Q}}{|c_Q|}| \\ &\geq \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^n} |c_Q| \\ &\geq |\psi|_{B^{-s}_{1,1}}.\end{aligned}$$

De maneira análoga

$$|\theta|_{B^s_{\infty,\infty}} \geq |\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^n} \int \theta a_Q dm|.$$

o que demonstra a igualdade (2.3). Por outro lado, temos que $|a_Q|_{B^{-s}_{1,1}} = 1$ para todo Q, logo

$$\begin{aligned}\sup_{|\psi|_{B^{-s}_{1,1}}\leq 1} |\int \theta a_Q dm| \geq \sup_{|a_Q|_{B^{-s}_{1,1}}=1} |\int \theta a_Q dm| = |\sup_{\substack{Q\in\mathscr{P}^n\\ n\in\mathbb{N}}} \int \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{S\in\mathscr{P}^n} d_S b_S a_Q dm| \\ = \sup_{\substack{Q\in\mathscr{P}^n\\ n\in\mathbb{N}}} |d_Q \int_Q b_Q a_Q| \\ = \sup_{\substack{Q\in\mathscr{P}^n\\ n\in\mathbb{N}}} |d_Q| = |\theta|_{B^s_{\infty,\infty}},\end{aligned}$$

e (2.4) também está provada.

$\square$

Definição 2.1.1. *Dado $\theta \in B^s_{\infty,\infty}$, defina $\rho_\theta \in (B^{-s}_{1,1})^*$ como*

$$\rho_\theta(\psi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q \int \theta a_Q dm,$$

para todo $\psi \in B^{-s}_{1,1}$.

Definição 2.1.2. *A norma usual do espaço dual $(B^s_{\infty,\infty})^*$ é definida por*

$$|\psi|_{(B^s_{\infty,\infty})^*} = \sup_{|\theta|_{B^s_{\infty,\infty}}\leq 1} |\psi(\theta)|,$$

para todo $\psi \in (B^s_{\infty,\infty})^*$.

Segue da Proposição 2.1.2 que as normas $|\cdot|_{B^{-s}_{1,1}}$ e $|\cdot|_{(B^s_{\infty,\infty})^*}$ coincidem para todo $\psi \in B^{-s}_{1,1}$, e pela Proposição 2.1.1 temos que o operador ρ_θ está bem definido.

Teorema 2.1.1. *Temos que $\rho \in (B^{-s}_{1,1})^*$ se e somente se existe $\theta \in B^s_{\infty,\infty}$ tal que $\rho = \rho_\theta$. Além disso, a aplicação $\Phi : B^s_{\infty,\infty} \to (B^{-s}_{1,1})^*$ definida por $\Phi(\theta) = \rho_\theta$ é um isomorfismo isométrico.*

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Existe um único θ tal que $\rho = \rho_\theta$, logo $\rho(\psi) = \psi(\theta)$, e desde que $\psi \in B^{-s}_{1,1}$, segue que ρ é limitado.

($\Longrightarrow$) Dado $\psi \in B^{-s}_{1,1}$, com representação

$$\psi = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q a_Q$$

tome $b_S \in B^s_{\infty,\infty}$ um átomo, já vimos que

$$\rho_{b_S}(a_Q) = \int b_S a_S dm = 1,$$

se $S = Q$ e é igual a 0, caso contrário. Assim, dado $\rho \in (B^{-s}_{1,1})^*$ existe único $d_S \in \mathbb{C}$, tal que

$$\rho(a_S) = \rho_{d_S b_S}(a_S) = d_S,$$

Para todo $S \in \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}^n$. Logo existe um único $\theta \in B^s_{\infty,\infty}$ com representação

$$\theta = \sum_{n} \sum_{S\in\mathscr{P}^n} d_S b_S,$$

tal que $\rho_\theta(a_S) = \rho(a_S)$, para todo átomo a_S, e portanto $\rho_\theta = \rho$. É claro que $\theta \in B^s_{\infty,\infty}$, pois

$$\sup_{\substack{S\in\mathscr{P}^n\\ n\in\mathbb{N}}} |d_S| = \sup_{\substack{S\in\mathscr{P}^n\\ n\in\mathbb{N}}} |\rho(a_S)| < \infty,$$

desde que ρ é limitada e $|a_S|_{B^{-s}_{1,1}} = 1$ para todo Q.

Por esses resultados fica fácil ver que Φ é isomorfismo, e é isometria desde que

$$|\theta|_{B^s_{\infty,\infty}} = \sup_{|\psi|_{B_{1,1}^{-s}}\leq 1} |\psi(\theta)| = \sup_{|\psi|_{B_{1,1}^{-s}}\leq 1} |\rho_\theta(\psi)| = |\rho_\theta|_{(B_{1,1}^{-s})^*}$$

□

2.2 O espaço $B_{1,1}^{-s}$ e a função delta de Dirac

Nem todo elemento de $B_{1,1}^{-s}$ é uma função. Definimos a distribuição delta de Dirac $\delta_0 \in B_{1,1}^{-s} \subset (B^s_{\infty,\infty})^*$, como

$$\delta_0(\theta) = \theta(0).$$

Esta distribuição é construída como limite de uma sequência de funções simples com integral igual a 1 e suporte contendo o ponto 0. Considere Q^n o elemento da partição $\mathscr{P}^n$ contendo 0, por indução façamos

$$\begin{aligned}
&\delta_0^0 = \chi_I \\
&\delta_0^1 = a_{Q^0} + \delta_0^0 = 2\chi_{Q^1} \\
&\delta_0^2 = 2^{-s}a_{Q^1} + \delta_0^1 = 2^2\chi_{Q^2} \\
&\delta_0^3 = 2^{-2s}a_{Q^2} + \delta_0^2 = 2^3\chi_{Q^3} \\
&\quad\vdots \\
&\delta_0^n = 2^{-(n-1)s}a_{Q^{n-1}} + \delta_0^{n-1} = 2^n\chi_{Q^n},
\end{aligned}$$

note que todo δ_0^n pertence $B_{1,1}^{-s}$ e ainda

$$\int \delta_0^n dm = 1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Vendo δ_0^n como um elemento de $(B^s_{\infty,\infty})^*$, façamos

$$\delta_0^n(\theta) = \int \theta 2^{-ns}\chi_{Q^n} dm,$$

e quando $n \to \infty$ temos que

$$\delta_0^n \to \delta_0 = \chi_I + \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-ns}a_{Q^n}.$$

Logo $\delta_0 \in B_{1,1}^{-s}$ uma vez que $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-ns}$ converge. Além disso, como δ_0 é nula em todo intervalo que não contém 0, caso fosse uma função, então sua integral se anularia, mas isso contradiz a definição de δ_0.

Capítulo 3

O operador de Perron-Frobenius

O operador de transferência é uma ferramenta muito útil para estudar o comportamento de um sistema dinâmico, pois possui uma relação muito interessante com suas medidas invariantes. Ele foi introduzido primeiramente pelo matemático e fisíco francês David Ruelle, por isso às vezes esse operador recebe o nome de operador de Ruelle ou operador de Ruelle-Perron-Frobenius. O operador de Perron-Fröbenius é contínuo em L^1, linear e positivo. Assim temos uma analogia com uma matriz positiva em dimensão infinita, ou seja, onde todas as entradas são estritamente maiores que zero.

Teorema 3.0.1 (Teorema de Perron-Fröbenius, 1907)**.** *Seja A uma matriz positiva. Então existe um único $\lambda > 0$, $\lambda \in \sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I$ não é invertível$\}$ e existe $x \in \mathbb{R}^n$ com $x > 0$ tal que $Ax = \lambda x$. Além disso, λ é um auto valor simples e para todo $\alpha \in \sigma(A)$, com $\alpha \neq \lambda$, temos que $|\alpha| < \lambda$.*

Tal resultado foi generalizado por Ruelle em 1968 para operadores de transferência. Por vezes, para resumir, chamaremos apenas de operador de Perron-Fröbenius.

3.1 Transformações expansoras por pedaço

Dado uma aplicação $f : I \to I$, onde $I = [0, 1]$, dizemos que f é expansora se existe $\lambda > 1$ tal que $|f'(x)| \geq \lambda$ para todo $x \in I$.

Quando trabalhamos com aplicações expansoras por pedaços, o operador de Perron-Frobenius é uma importante ferramenta para obter medidas absolutamente contínuas com relação à medida de Lebesgue. Para toda partição $\mathscr{P} = \{0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = 1\}$ de I, seja $f : I \to I$ uma aplicação expansora por pedaços, isto é, f é monótona contínua no interior de cada intervalo da partição, definimos $g_\eta = 1/|D(f|\eta)|$ para todo $\eta \in \mathscr{P}$.

Suponha que $(f|\eta_i)$ e g_{η_i} admitem extensões para $\overline{\eta}_i = [a_{i-1}, a_i]$, para cada $i = 1, ..., l$. Façamos então f contínua à direita ou à esquerda em a_i para todo $i = 1, ..., l$. Defina $\mathscr{P}^1 = \mathscr{P}$ e para $n \geq 1$, defina $\mathscr{P}^n$ como a partição de I tal que $\mathscr{P}^n(x) = \mathscr{P}^n(y) \iff \mathscr{P}^1(f^j(x)) = \mathscr{P}^1(f^j(y))$ para todo $0 \leq j < n$. Se $\eta \in \mathscr{P}^n$, definimos $g_\eta^{(n)} = 1/|D(f|\eta)|$.

O foco desta seção será o operador de Perron-Frobenius de uma aplicação expansora por pedaço f, definido da seguinte maneira

$$\mathscr{L}\varphi = \sum_{\eta \in \mathscr{P}^1} \left[(g_\eta \varphi) \circ (f|\eta)^{-1}\right] \chi_{f(\eta)} = \sum_{\eta \in \mathscr{P}^1} \left[\frac{\varphi}{|Df|} \circ (f|\eta)^{-1}\right] \chi_{f(\eta)}. \tag{3.1}$$

Observe que f é estritamente monótona na sua restrição a cada η. A expressão em (3.1) é inspirada pela igualdade a seguir, através de uma mudança de variáveis

$$\int (\mathscr{L}\varphi)\psi dm = \int \varphi(\psi \circ f)dm. \tag{3.2}$$

Vemos que se φ_0 é uma função $L^1(m)$ não-negativa satisfazendo $\mathscr{L}\varphi_0 = \varphi_0$ então $\mu_0 = \varphi_0 m / \int \varphi_0 m$ é uma probabilidade $f-$invariante e, ainda, $\mu_0 \ll m$. Reciprocamente, se μ_0 é uma medida finita $f-$invariante absolutamente contínua com respeito a m, então $\varphi_0 = d\mu_0/dm$ satisfaz $\mathscr{L}\varphi_0 = \varphi_0$. Portanto, os pontos fixos de $\mathscr{L}$ estão diretamente ligados às medidas $f-$invariantes absolutamente contínuas.

3.2 Definição do operador de Perron-Fröbenius

Considere

$$f : \cup_{i=1}^{n} I_i \to I,$$

tal que $I_i \subset I$, para todo i, $f : I_i \to f(I_i) \subset I$ é um difeomorfismo C^r, $|f'(x)| \neq 0$ para todo $x \in I_i$.

Seja $\phi : \cup_i I_i \to I$ uma função. Definimos o operador de Perron-Fröbenius $\mathscr{L}_{\phi,f}$ agindo em uma função $\psi : I \to \mathbb{C}$, como sendo

$$(\mathscr{L}_{\phi,f}\psi)(x) = \sum_{f(y)=x} e^{\phi(y)}\psi(y).$$

3.3 O dual do operador de Perron-Fröbenius

Suponha que B seja um espaço normado de funções que é preservado pela ação de $\mathscr{L}_{\phi,f}$, isto é

$$\mathscr{L}_{\phi,f} : B \to B,$$

é um operador linear, contínuo e limitado. Então o operador dual

$$\mathscr{L}^*_{\phi,f} : B^* \to B^*$$

é definido por

$$\mathscr{L}^*_{\phi,f}(g)(\psi) := g(\mathscr{L}_{\phi,f}\psi),$$

para todo funcional linear $\psi : B \to \mathbb{C}$, e função $\psi \in B$.

Definição 3.3.1. *Se $f : \cup_{i=1}^{n} I_i \to I$, contínua no interior de cada intervalo I_i, é tal que $f(I_i) = I$, então f é chamada de transformação markoviana.*

Exemplo 3.3.1. *Se f é uma transformação expansora markoviana, é fácil ver que $\mathscr{L}_{\phi,f}$ preserva o espaço dos funções contínuas $C(I) = \{\psi : I \to \mathbb{C}; \psi$ é contínua$\}$.*[3] *Assim o operador dual*

$$\mathscr{L}_{\phi,f} : C(I)^* \to C(I)^*,$$

está bem definido.

Exemplo 3.3.2. *Se $\phi = -\ln |Df(x)|$, onde f é expansora, então $\mathscr{L}_{\phi,f}$ preserva $L^1(m)$, onde m é a medida de Lebesgue. Neste caso*

$$|\mathscr{L}_{\phi,f}\psi|_{L^1} \leq |\psi|_{L^1}.$$

Assim $\mathscr{L}^*_{\phi,f}$ é um operador limitado em $(L^1(m))^* = L^\infty(m)$. De fato, $\mathscr{L}^*_{\phi,f} : L^\infty \to L^\infty$ é simplesmente o operador de composição $\mathscr{L}^*_{\phi,f}\psi = \psi \circ f$, para todo $\psi \in L^\infty(m)$.

Capítulo 4

A desigualdade de Lasota-Yorke

Andrzej Lasota (Varsóvia, 1932 - Katowice, 2006) e James A. Yorke (Nova Jersey, 1941) demonstraram em 1973, que aplicações expansoras C^2 por pedaços, com variação limitada e definidas em um intervalo limitado, admitem uma probabilidade invariante absolutamente contínua (veja: Lasota-Yorke [6]).

Com efeito, segundo Mackey [7] temos que existe uma probabilidade $f-$invariante absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue. Mais ainda, o operador de Perron-Fröbenius $\mathscr{L} : L^1 \to L^1$ é tal que $\mathscr{L} : E \to E$ é limitado e existem constantes $\lambda \in (0, 1)$, $C > 0$ e $j \in \mathbb{N}$ que satisfazem

$$||\mathscr{L}_f^j \psi||_E \leq \lambda^j ||\psi||_E + C|\psi|_1, \quad \forall \psi \in E. \tag{4.1}$$

Definição 4.0.1. *Seja f uma aplicação expansora por pedaços, C^2, e suponha que exista um espaço de funções $(E, ||\cdot||_E)$, tal que:*

1. $(E, ||\cdot||_E)$ *é Banach,*
2. $(E, ||\cdot||_E)$ *é densamente mergulhado em* $(L^1, |\cdot|_1)$,
3. *A bola unitária de* $(E, ||\cdot||_E)$ *é compacta em* $(L^1, |\cdot|_1)$.

Dizemos que o operador de Perron-Fröbenius satisfaz a desigualdade de Lasota-Yorke (4.1).

Definição 4.0.2. *A variação de uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}$ é definida por*

$$\text{var } \varphi = \sup \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_{i-1}) - \varphi(x_i)|,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1,\ n \geq 1$ sobre I. Dizemos que φ possui variação limitada quando $\text{var } \varphi < \infty$.

Lasota e Yorke deram origem a essa desigualdade estudando espaços de funções com variação limitada. Viana [13] expõe esta versão da desigualdade:

Teorema 4.0.1. *Existem $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que*

$$\text{var}(\mathscr{L}^n \varphi) \leq C\lambda^n \text{var}(\varphi) + C \int |\varphi| dm,$$

para todo $n \geq 1$ e toda φ de variação limitada.

A próxima proposição também pode ser encontrada em Viana [13].

Proposição 4.0.1 (Quasi-compacidade [13])**.** *O espectro de $\mathscr{L}$ agindo no espaço BV das funções com variação limitada pode ser escrito da seguinte maneira*

$$\operatorname{spec}(\mathscr{L}) = \{1\} \cup \Sigma_0,$$

onde 1 é um autovalor simples e Σ_0 está contido em um disco de raio estritamente menor do que 1. Além disso, a decomposição espectral é dada por

$$BV = \mathbb{R}\varphi_0 \oplus X_0,$$

com $X_0 = \{\varphi; \int \varphi dm = 0\}$.

A desigualdade de Lasota-Yorke é um recurso importante para o estudo desse operador, de onde podemos obter algumas propriedades como a quasi-compacidade do operador.

4.1 Transformações expansoras markovianas lineares e o espaço $B^s_{1,1}$

O seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em Smania [12], indica uma importante equivalência entre as normas N_{st} (relembre a equação (1.6)) e $|\cdot|_{B^s_{p,q}}$.

Proposição 4.1.1. *(Representação canônica) Dado $P \in \mathscr{P}$, existe um funcional linear em $(L^1)^*$*

$$f \in L^1 \mapsto k^f_P$$

tal que se $f \in B^s_{p,q}$ então

$$\sum_k \sum_{P \in \mathscr{P}^k} k^f_P a_P$$

é uma $B^s_{p,q}-$representação de f, e existe $C_{GC} > 0$ que satisfaz

$$\left(\sum_k \left(\sum_{P \in \mathscr{P}^k} |k^f_P|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} \leq C_{GC} |f|_{B^s_{p,q}}.$$

Agora vejamos um simples exemplo. Considere $\ell \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, defina $f_\ell : [0,1] \to [0,1]$ como

$$f_\ell(x) = \ell x \mod 1.$$

Defina por $\mathscr{D}^k_\ell$ a partição de $[0,1]$ em ℓ^k intervalos de mesmo tamanho. Logo $\mathscr{D}_\ell = (\mathscr{D}^k_\ell)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma boa grade. Note que f_ℓ é uma aplicação expansora e a medida de Lebesgue m em $[0,1]$ é uma probabilidade $f_\ell-$invariante. Vamos provar a desigualdade de Lasota-Yorke para f_ℓ no espaço de Besov $B^s_{1,1}([0,1], m, \mathscr{D}_\ell)$, onde $s \in (0,1)$.

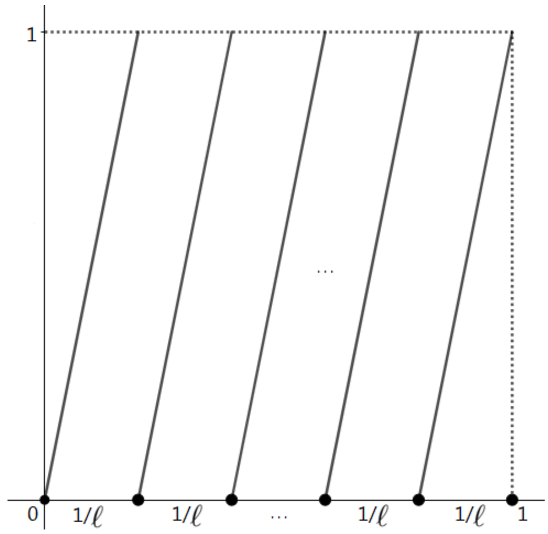

Figura 4.1: Gráfico da função $f_\ell(x) = \ell x \mod 1$.

Proposição 4.1.2. *(Desigualdade de Lasota-Yorke) Dado $\varphi \in B^s_{1,1}([0,1], m, \mathscr{D}_\ell)$, existem $j > 0$, $C > 0$ e $\lambda \in (1, 0)$ que satisfazem*

$$|\mathscr{L}^j_\ell(\varphi)|_{B^s_{1,1}} \leq C|\varphi|_1 + \lambda|\varphi|_{B^s_{1,1}}.$$

Demonstração. Considere o operador de $Perron - Frobenius$ de f_{ℓ^j}

$$(\mathscr{L}_{\ell^j}\varphi)(x) = \sum_{i=0}^{\ell^j - 1} \frac{1}{\ell^j}\varphi(\frac{x}{\ell^j} + \frac{i}{\ell^j}).$$

Temos que $\mathscr{D}^1_{\ell^j}$ é uma partição markoviana para f_{ℓ^j}. Mais ainda, se $P \in \mathscr{D}^k_\ell$ e $k \geq j$, então $Q = f_{\ell^j}(P) \in \mathscr{D}^{k-j}_\ell$ e

$$\mathscr{L}_{\ell^j}(a_P) = \mathscr{L}_{\ell^j}(|P|^{s-1}\chi_P) = \frac{1}{\ell^j}|P|^{s-1}\chi_Q = \frac{1}{\ell^{sj}}|\ell^j|^{s-1}|P|^{s-1}\chi_P = \frac{1}{\ell^{sj}}a_P.$$

E dado $P \in \mathscr{D}^k_\ell$ e $k < j$ então P é uma união de ℓ^{j-k} elementos de $\mathscr{D}^j_\ell$, com isso

$$\mathscr{L}_{\ell^j}(a_P) = \mathscr{L}_{\ell^j}(|P|^{s-1}\sum_{\substack{P \in \mathscr{D}^j_\ell \\ Q \subset P}} \chi_Q) = \frac{\ell^{j-k}}{\ell^j}|P|^{s-1} = \ell^{-ks}a_P.$$

Dado $B^s_{1,1}([0,1], m, \mathscr{D}_\ell)$, pela Proposição 4.1.1, temos para todo $P \in \mathscr{D}_\ell$ que existem C_{GC} e funcionais lineares $\varphi \mapsto k^\varphi_P$ em $(L^1)^*$, que ϕ possui uma $B^s_{1,1}-$representação

$$\varphi = \sum_k \sum_{P \in \mathscr{D}^k_\ell} k^\varphi_P a_P,$$

de modo que

$$\sum_k \sum_{P \in \mathscr{D}^k_\ell} |k^\varphi_P| \leq C_{GC}|\varphi|_{B^s_{1,1}}.$$

Em particular, temos que

$$\mathscr{L}_{\ell^j}(\varphi) = (\sum_{k<j} \frac{1}{\ell^{ks}} \sum_{P \in \mathscr{D}_\ell^k} k_P^\varphi) a_{[0,1]} + \frac{1}{\ell^{sj}} \sum_{k \geq 1} \sum_{P \in \mathscr{D}_\ell^k} k_P^\varphi a_{f_\ell P},$$

e ainda

$$\begin{aligned} |\mathscr{L}_\ell^j(\varphi)|_{B^s_{1,1}} = |\mathscr{L}_{\ell^j}(\varphi)|_{B^s_{1,1}} &\leq \sum_{k<j} \frac{1}{\ell^{ks}} \sum_{P \in \mathscr{D}_\ell^k} |k_P^\varphi| + \frac{1}{\ell^{sj}} \sum_{k \geq j} \sum_{P \in \mathscr{D}_\ell^k} |k_P^\varphi| \\ &\leq \left(\sum_{k<j} \frac{1}{\ell^{ks}} \sum_{P \in \mathscr{D}_\ell^k} |k_P|_{(L^1)^*} \right) |\varphi|_1 + \frac{C_{GC}}{\ell^{sj}} |\varphi|_{B^s_{1,1}}. \end{aligned}$$

Escolha j grande o suficiente para que

$$\lambda = \frac{C_{GC}}{\ell^{js}} < 1,$$

como queríamos demonstrar.

□

Este resultado foi provado para transformações muito mais gerais em Arbieto-Smania [1].

Capítulo 5

A contração $f(x) = x/2$ e o espaço $B^{-s}_{1,1}$

Nesta seção, vamos estudar a ação do operador de Perron-Fröbenius para o caso particular da contração $f(x) = x/2$, e vamos obter a desigualdade de Lasota-Yorke.

5.1 Operador de Koopman

Bernard Koopman (Paris, 1900 - Randolph, 1981) nasceu na França, mas aos 15 anos de idade emigrou para os Estados Unidos, onde obteve a nacionalidade americana. Foi aluno de doutorado de um dos principais pesquisadores da teoria ergódica, David Birkhoff (Overisel Township, 1884 - Cambridge, 1944) na Universidade de Harvard.

Um de seus trabalhos mais notáveis foi em meados de 1931, 1932, desenvolvido com o matemático e físico John Von Neumann (Budapeste, 1903 - Washington, 1957), hoje conhecido como mecânica clássica de Koopman-Von Neumann, uma reformulação dos espaços de Hilbert na mecânica clássica. Mas um fato curioso é que na segunda guerra mundial Koopman ingressou no Grupo de Pesquisa Operacional de Guerra Anti-Submarino (ASWORG, na sigla em inglês) da Marinha dos Estados Unidos [8]. Seu trabalho sobre pesquisa operacional permaneceu classificado como confidencial por vários anos. Somente em 1958 foi permitido a publicação dos resultados de Koopman em seu livro *Search and Screening* [5]. O trabalho que Koopman desenvolveu com sua equipe foi fundamental para o desenvolvimento da teoria da pesquisa operacional.

Nós estamos interessados no operador de Koopman agindo em $B^s_{\infty,\infty}$, definido de maneira a ser o adjunto à esquerda do operador de Perron-Fröbenius da contração

$$\begin{aligned} f : I &\to I \\ x &\mapsto \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Com efeito, o operador de Koopman é exatamente o operador dual $\mathscr{L}^*_{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^*_{\frac{1}{2}} : B^s_{\infty,\infty} &\to B^s_{\infty,\infty} \\ \theta &\mapsto \theta \circ f. \end{aligned}$$

Note que se $\theta \in B^s_{\infty,\infty}$ então $\theta \circ f \in B^s_{\infty,\infty}$. De fato, se $\theta \in B^s_{\infty,\infty}$ possui representação

$$\theta = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{S\in\mathscr{P}^n} d_S b_S,$$

com

$$\sup_{\substack{S\in\mathscr{P}^n\\ n\in\mathbb{N}}} |d_S| < \infty,$$

então

$$\begin{aligned}\theta\circ f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{S\in\mathscr{P}^n} d_S b_S \circ f(x) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{S\in\mathscr{P}^n} d_S |S|^s (\chi_{L_S}(\frac{1}{2}x) - \chi_{R_S}(\frac{1}{2}x))\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{2S\in\mathscr{P}^n} d_S |S|^s (\chi_{2L_S}(x) - \chi_{2R_S}(x))\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{2S\in\mathscr{P}^n} d_S 2^{-s} |2S|^s (\chi_{2L_S}(x) - \chi_{2R_S}(x)).\end{aligned}$$

Claro que $f^{-1}(S) = 2S = \{2x;\ x\in S\}$ pertence a $\mathscr{P}^n$ sempre que $f(2S)\in\mathscr{P}^{n+1}$ e ainda

$$\sup_{\substack{S\in\mathscr{P}^n\\ n\in\mathbb{N}}} |d_S 2^{-s}| < \sup_{\substack{S\in\mathscr{P}^n\\ n\in\mathbb{N}}} |d_S| < \infty.$$

Segue que $\theta\circ f\in B^s_{\infty,\infty}$ e logo o operador $\mathscr{L}^*_{\frac{1}{2}}$ está bem-definido. Por consequência, dada uma distribuição $\psi\in B^{-s}_{1,1}$, teremos

$$(\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}\psi)(\theta) = \psi(\theta\circ f),$$

para todo $\theta\in B^s_{\infty,\infty}$, portanto $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}\psi\in B^{-s}_{1,1}$.

Proposição 5.1.1. *Considere a contração acima. Dado $\psi\in B^{-s}_{1,1}$, temos que*

$$|\mathscr{L}^j_{\frac{1}{2}}\psi|_{B^{-s}_{1,1}} \le 2^{-sj}|\psi|_{B^{-s}_{1,1}} + |c_I|(1+\frac{1}{1-2^{-s}}),$$

para todo $j>0$.

Demonstração. Pelo Teorema de Fubini-Tonelli é fácil ver que

$$\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}\psi = \sum_n \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q \mathscr{L}_{\frac{1}{2}} a_Q,$$

uma vez que $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}$ está bem-definido e sua ação satisfaz

$$(\mathscr{L}_{\frac{1}{2}} a_Q)(\theta) = a_Q(\theta\circ f) = \int(\theta\circ f) a_Q dm = \int \theta \mathscr{L}_{\frac{1}{2}} a_Q dm,$$

assim, pela equação (3.1) façamos

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_{\frac{1}{2}} a_Q)(x) &= \sum_{f(y)=x} \frac{1}{|Df(y)|} a_Q(y)\\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} a_Q(2x) = 2a_Q(2x) = 2\cdot 2^{-s-1} a_{\frac{1}{2}Q}(x) = 2^{-s} a_{\frac{1}{2}Q}(x)\end{aligned}$$

se $x \in \frac{1}{2}Q$ e 0, caso contrário, para todo $Q \in \cup_{k\in\mathbb{N}}\mathscr{P}^k$, com $k \neq 0$. Indutivamente para $j > 0$, temos que

$$(\mathscr{L}^j_{\frac{1}{2}} a_Q)(\theta) = a_Q(\theta \circ f^j) = \int (\theta \circ f^j) a_Q dm = \int \theta \mathscr{L}^j_{\frac{1}{2}} a_Q dm.$$

e com isso

$$(\mathscr{L}^j_{\frac{1}{2}} a_Q)(x) = \sum_{f^j(y)=x} \frac{1}{|D(f^j)(y)|} a_Q(y) = \frac{1}{\frac{1}{2^j}} a_Q(2^j x) = 2^j a_Q(2^j x) = 2^j \cdot 2^{j(-s-1)} a_{\frac{1}{2^j}Q}(x) = 2^{-sj} a_{\frac{1}{2^j}Q}(x)$$

Mas note que o comportamento de $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}$ no átomo χ_I da partição $\mathscr{P}^0$, é um pouco diferente. Notemos que

$$(\mathscr{L}_{\frac{1}{2}} \chi_I)(x) = 2\chi_I(2x) = 2\chi_{[0,\frac{1}{2}]}(x) = \chi_I(x) + a_I(x),$$

e por indução

$$\begin{aligned}
(\mathscr{L}^j_{\frac{1}{2}} \chi_I)(x) &= (\mathscr{L}^{j-1}_{\frac{1}{2}} \chi_I)(x) + (\mathscr{L}^{j-1}_{\frac{1}{2}} a_I)(x) \\
&= (\mathscr{L}^{j-1}_{\frac{1}{2}} \chi_I)(x) + 2^{-s(j-1)} a_{\frac{1}{2^{j-1}}I}(x) \\
&\ \ \vdots \\
&= \chi_I(x) + \sum_{k=1}^{j} 2^{-s(k-1)} a_{\frac{1}{2^{k-1}}I}(x).
\end{aligned}$$

Desses resultados temos que

$$\mathscr{L}^j_{\frac{1}{2}} \psi = c_I \chi_I + \sum_{k=1}^{j} 2^{-s(k-1)} c_I a_{\frac{1}{2^{k-1}}Q_1} + \sum_{n\geq 1} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} 2^{-sj} c_Q a_{\frac{1}{2^j}Q},$$

e segue que

$$\begin{aligned}
|\mathscr{L}^j_{\frac{1}{2}} \psi|_{B^{-s}_{1,1}} &= |c_I| + \sum_{k=1}^{j} 2^{-s(k-1)} |c_I| + \sum_{n\geq 1} \sum_{Q\in\mathscr{P}^n} 2^{-sj} |c_Q| \\
&\leq 2^{-sj} |\psi|_{B^{-s}_{1,1}} + |c_I|(1 + \frac{1}{1-2^{-s}}).
\end{aligned}$$

□

Deste resultado segue facilmente que $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}$ é quase-compacto. Além disso, podemos concluir:

Teorema 5.1.1 (Marra-Smania, 2021). *Dado $\psi \in B^{-s}_{1,1}$. Seja $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}$ o operador de Perron-Fröbenius da contração*

$$\begin{aligned}
f : I &\to I \\
x &\mapsto \frac{1}{2}x,
\end{aligned}$$

então $\mathscr{L}^j_{\frac{1}{2}} \psi$ converge para $c_I \delta_0$ em $(B^{-s}_{1,1}, ||\cdot||_{B^{-s}_{1,1}})$ quando $j \to \infty$, onde c_I é o coeficiente da função característica χ_I na representação atômica de ψ.

Capítulo 6

O operador dual $\mathscr{L}^*_{\phi,f}$ e a automedida

No capítulo 3 estudamos operadores com raio espectral igual a 1. O raio espectral do operador de Perron-Fröbenius depende exclusivamente de um potencial, $\phi : I \to \mathbb{R}$. A demonstração do seguinte resultado está no Teorema 2.2 de Parry-Pollicott [10]:

Teorema 6.0.1 (Parry-Pollicott [10])**.** *Seja $\phi : I \to \mathbb{R}$ uma função Hölder contínua não-positiva e $f : \cup_{i=1}^{n} I_i \to I$ uma transformação expansora tal que $f(I_i) = I$ para todo $i = 1, ..., n$. Seja $\lambda > 0$ o raio espectral do operador de Perron-Fröbenius*

$$\mathscr{L}_{\phi,f} : C(I) \to C(I).$$

Então existe uma única função $\varphi \in C(I)$ tal que

$$\mathscr{L}_{\phi,f}(\varphi) = \lambda\varphi,$$

além disso φ é Hölder contínua. Ainda mais, existe uma única probabilidade $\mu \in C(I)^*$ tal que

$$\mathscr{L}^*_{\phi,f}(\mu) = \lambda\mu,$$

isto é

$$\int \mathscr{L}_{\phi,f}\psi d\mu = \lambda \int \psi d\mu,$$

para todo $\psi \in C(I)$.

Corolário 6.0.1. *O operador $\mathscr{L}_{\phi,f}$ se estende para um operador limitado $\mathscr{L}_{\phi,f} : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$. Temos que*

$$|\mathscr{L}_{\phi,f}\psi|_{L^1(\mu)} \leq \lambda|\psi|_{L^1(\mu)}.$$

Corolário 6.0.2. *O operador dual $\mathscr{L}^*_{\phi,f}$ está definido em $L^\infty(\mu) = (L^1(\mu))^*$. E $|\mathscr{L}^*_{\phi,f}\psi|_{L^\infty(\mu)} \leq \lambda|\psi|_{L^\infty(\mu)}$.*

Nosso objetivo é trabalhar com operador de Perron-Fröbenius no espaço de Besov. Na maioria dos resultados estaremos considerando a transformação markoviana f definida como no teorema acima para $i = 2$, mas vamos perceber que não há perda de generalidade no caso de $i > 2$.

De agora em diante vamos considerar $f : I \to I$ uma aplicação expansora markoviana por pedaços e ϕ um potencial Hölder contínuo não-positivo. Vamos definir o operador de Perron-Fröbenius no espaço $B^s_{\infty,\infty}([0,1],\mu,\cup_k \mathscr{P}^k)$, onde μ é a automedida e $\mathscr{P}^k$ são partições markovianas do intervalo $[0,1]$ escolhidas de maneira apropriada.

Na Seção 7.2 veremos que $\mathscr{L}^*_{\phi,f}$ está bem definido como um operador linear limitado em $B^{-s}_{1,1}$, em consequência de ser uma contração. De fato,

$$\mathscr{L}^*_{\phi,f} : B^{-s}_{1,1} \to B^{-s}_{1,1},$$

é a única extensão contínua do operador de Koopman definido em $L^\infty(\mu)$,

$$\psi \mapsto \lambda\psi \circ f,$$

e além disso

$$|a_Q \circ f|_{B^{-s}_{1,1}} \leq |a_Q|_{B^{-s}_{1,1}} = 1,$$

para todo $Q \in \cup_{k \geq k_0} \mathscr{P}^k$, para algum $k \geq k_0$ grande o suficiente. Por conseguinte, $\mathscr{L}_{\phi,f}$ está bem definido como um operador linear limitado em $B^s_{\infty,\infty}$.

Lema 6.0.1. *Seja m a medida de Lebesgue. Existe $\tilde{\beta} > 0$ tal que*

$$m(Q) \leq \mu(Q)^{\tilde{\beta}},$$

para todo $Q \in \cup_k \mathscr{P}^k$.

Demonstração. Desde que o potencial é uma função Hölder contínua, então existe $x_1 \in [0,1]$ com $0 < e^{\phi(x_1)} < 1$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\mu(Q) \geq e^{\phi(x_1)k},$$

para todo $Q \in \mathscr{P}^k$. Além disso, desde que $e^{\phi(x)}$ é também limitada superiormente, então existe $x_2 \in [0,1]$ com $0 < e^{\phi(x_2)} < 1$ e existe $\gamma > 0$ tal que

$$m(Q) \leq e^{\phi(x_2)k\gamma},$$

para todo $Q \in \mathscr{P}^k$. De fato, $e^{\phi(x_1)\gamma} \approx 1$ se γ é muito pequeno. De maneira análoga, existe $\tilde{\beta} > 0$ tal que

$$e^{\phi(x_1)\tilde{\beta}} \geq e^{\phi(x_1)},$$

e consequentemente,

$$m(Q) \leq e^{\phi(x_2)k\gamma} \leq e^{\phi(x_1)k\tilde{\beta}} \leq \mu(Q)^{\tilde{\beta}}.$$

□

Lema 6.0.2. *Existe $\alpha > 0$ tal que*

$$\left|\frac{\mu(f_1^{-1}(R_Q))}{\mu(R_Q)} - \frac{\mu(f_1^{-1}(L_Q))}{\mu(L_Q)}\right| \leq \mu(Q)^\alpha$$

Demonstração. Tomando o potencial ϕ, o Teorema do Valor Intermediário para Integrais afirma que existem $x \in \mu(R_Q)$ e $y \in \mu(L_Q)$ tais que

$$e^{\phi(x)} = \frac{\mu(f_1^{-1}(R_Q))}{\mu(R_Q)} \text{ e } e^{\phi(y)} = \frac{\mu(f_1^{-1}(L_Q))}{\mu(L_Q)},$$

potanto,

$$|\frac{\mu(f_1^{-1}(R_Q))}{\mu(R_Q)} - \frac{\mu(f_1^{-1}(L_Q))}{\mu(L_Q)}| = |e^{\phi(x)} - e^{\phi(y)}|.$$

Mas f é expansora, ou seja, $e^{-\phi(x)} > 1$, para todo $x \in [0,1]$. Assim, ϕ é não-positiva em $[0,1]$, e ainda a função exponencial é localmente Lipchitz na imagem de ϕ e com constante de Lipchitz igual a 1. A imagem de ϕ é um intervalo compacto contido em $(-\infty, 0]$, já que ϕ é Hölder, logo

$$|e^{\phi(x)} - e^{\phi(y)}| \leq |\phi(x) - \phi(y)|,$$

além disso, sendo β o expoente da função ϕ, pelo Lema 6.0.1 temos que

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq m(Q)^{\beta} \leq \mu(Q)^{\tilde{\beta}\beta}, \tag{6.1}$$

façamos então $\alpha = \tilde{\beta}\beta$.

□

De Parry-Pollicott 6.0.1 sabemos que a autofunção φ também é Hölder. Seja β' o expoente de φ, de agora em diante, vamos escolher o parâmetro de suavidade $s > 0$ estritamente menor que $\min\{\tilde{\beta}\beta', \tilde{\beta}\beta\}$.

6.1 Sobre o dual $\mathscr{L}^*_{\phi,f}$ para transformações expansoras markovianas

Estudaremos agora a ação do operador dual $\mathscr{L}^*_{\phi,f}$ quando f é uma transformação expansora markoviana. Considere

$$\mathscr{L}^*_{\phi,f} : B^{-s}_{1,1} \to B^{-s}_{1,1},$$

definida em cada átomo a_Q, para todo $Q \in \cup_k \mathscr{P}^k$, satisfazendo que

$$(\mathscr{L}^*_{\phi,f} a_Q)(\psi) = \lambda \int (a_Q \circ f)\psi d\mu,$$

onde $\lambda > 0$ é o raio espectral do operador. Esta aplicação está bem definida para todo $\psi \in B^s_{\infty,\infty}$.

Façamos então um elemento $\nu \in B^{-s}_{1,1} \subset (B^s_{\infty,\infty})^*$ com representação

$$\nu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^k} c_Q a_Q,$$

agindo nos elementos de $B^s_{\infty,\infty}$ da seguinte forma

$$\nu(\psi) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{Q\in\mathscr{P}^k} c_Q a_Q(\psi).$$

Observação 6.1.1. *O espaço $B^{-s}_{1,1}$ contém as medidas com sinal, uma vez que, para toda função $\psi \in B^s_{\infty,\infty}$, a ação de uma medida com sinal $\nu \in B^{-s}_{1,1}$ é definida por*

$$\nu(\psi) = \int \psi d\nu.$$

Capítulo 7

A ação de $\mathscr{L}_{\phi,f}$

Nosso objetivo de agora em diante será generalizar o Teorema 5.1.1. Vamos trabalhar primeiramente para conseguir um resultado semelhante para operadores de transferência de sistemas expansores, de maneira a entender o comportamento dos seus pontos fixos.

Proposição 7.0.1. *Seja $\psi \in B^s_{\infty,\infty}$. Então*

$$\int \mathscr{L}_{\phi,f}\psi d\mu = \lambda \int \psi d\mu \iff \int a_Q \mathscr{L}_{\phi,f}\psi d\mu = \lambda \int (a_Q \circ f)\psi d\mu, \tag{7.1}$$

para todo átomo $a_Q \in B^{-s}_{1,1}$.

Demonstração. ($\Longleftarrow$) É trivial, basta tomar o átomo $\chi_I \in B^{-s}_{1,1}$.

($\Longrightarrow$) Note que $\mathscr{L}_{\phi,f}((\nu \circ f)\psi) = \nu \mathscr{L}_{\phi,f}\psi$, para todo $\nu \in B^{-s}_{1,1}$ e $\psi \in B^s_{\infty,\infty}$ De fato,

$$\mathscr{L}_{\phi,f}((\nu \circ f)\psi)(x) = \sum_{f(y)=x} e^{\phi(y)}(\nu \circ f)(y)\psi(y) = \nu(x) \sum_{f(y)=x} e^{\phi(y)}\psi(y) = (\nu \mathscr{L}_{\phi,f}\psi)(x).$$

Segue que

$$\int \mathscr{L}_{\phi,f}\psi d\mu = \lambda \int \psi d\mu \Rightarrow \lambda \int (a_Q \circ f)\psi d\mu = \int \mathscr{L}_{\phi,f}((a_Q \circ f)\psi) d\mu = \int a_Q \mathscr{L}_{\phi,f}\psi d\mu.$$

□

Essa proposição nos diz que μ é automedida do operador dual $\mathscr{L}^*$ se e somente se

$$(\mathscr{L}^*_{\phi,f} a_Q)(\psi) = a_Q(\mathscr{L}_{\phi,f}\psi) = \lambda \int (a_Q \circ f)\psi d\mu,$$

para todo $Q \in \cup_k \mathscr{P}^k$. Esses átomos $a_Q \in (B^s_{\infty,\infty})^*$ são medidas com sinal desde que

$$a_Q(\psi) = \int a_Q \psi d\mu.$$

Observação 7.0.1. *Sabemos que dado um sistema dinâmico, f preserva uma medida μ se e somente se*

$$\int g \circ f d\mu = \int g d\mu,$$

para toda $g \in L^1(\mu)$. No nosso caso $f : I \to I$ um sistema dinâmico, então f preserva uma medida μ se e somente se

$$\int a_Q \circ f d\mu = \int a_Q d\mu, \tag{7.2}$$

para todo $a_Q \in B^{-s}_{1,1}(I, \mu, \cup_k \mathscr{P}^k)$, ou seja, se e somente se

$$(\mathscr{L}^*_{\phi,f} a_Q)(\chi_I) = a_Q(\chi_I),$$

que por sua vez, acontece se e somente se χ_I é autofunção de $\mathscr{L}_{\phi,f}$.

Observação 7.0.2. *Note que $\chi_I = \mu$ em $B^{-s}_{1,1}$. De fato,*

$$\chi_I(\psi) = \int \psi d\mu = \mu(\psi),$$

para todo $\psi \in B^s_{\infty,\infty}$.

Em breve generalizaremos o operador $\mathscr{L}_{\phi,f}$ para uma variedade grande de aplicações expansoras f, mas por hora vamos supor $f = f|_{I_1} + f|_{I_2}$, e cada uma das partes $f_1 = f|_{I_1}$ e $f_2 = f|_{I_2}$ é uma função expansora afim. Neste caso a automedida é $f-$invariante e é a própria medida de Lebesgue. De fato,

$$\begin{aligned} \mu(f^{-1}(A)) = \mu(f_1^{-1}(A) \cup f_2^{-1}(A)) &= \mu(f_1^{-1}(A)) + \mu(f_2^{-1}(A)) \\ &= \mu(I_1)\mu(A) + (1 - \mu(I_1))\mu(A) = \mu(A), \end{aligned}$$

para todo A mensurável.

7.1 A ação do operador de Koopman nos átomos a_Q

Defina $\mathscr{P}^0$ como a partição cujo único átomo associado é a função caracteríсa χ_I. Lembramos que $\mathscr{P}^1$ é a partição cujo único átomo associado é o átomo com suportado em I, a_I. Façamos

$$a_I = \frac{\chi_{I_1}}{\mu(I_1)} - \frac{\chi_{I_2}}{\mu(I_2)} = \frac{\chi_{I_1}}{\mu(I_1)} - \frac{\chi_{I_2}}{1 - \mu(I_1)}. \tag{7.3}$$

Por fim, escolheremos as partições $\mathscr{P}^k$, com $k > 1$, de maneira que se $Q \in \mathscr{P}^k$, então $f_1^{-1}(Q) \in \mathscr{P}^{k+1}$, e $f_2^{-1}(Q) \in \mathscr{P}^{k+1}$.

Escreva os elementos $\nu \in B^{-s}_{1,1} \subset (B^s_{\infty,\infty})^*$ (relembre o Lema 1.4.2) com a representação

$$\nu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{Q \in \mathscr{P}^k} c_Q a_Q,$$

além disso, recordando (2.1), já que μ é $f-$invariante então $\mu(L_Q) = \mu(I_1)\mu(Q)$ e $\mu(R_Q) = (1-\mu(I_1))\mu(Q)$. Os átomos neste caso são da forma

$$a_Q = \mu(Q)^{-s-1}\left(\frac{\chi_{L_Q}}{\mu(I_1)} - \frac{\chi_{R_Q}}{1-\mu(I_1)}\right), \tag{7.4}$$

a fim de que

$$\int a_Q d\mu = 0,$$

para todo $Q \in \cup_{k\geq 1}\mathscr{P}^k$. Os coeficientes $c_Q \in \mathbb{C}$ são tais que

$$|\nu|_{B^{-s}_{1,1}} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{Q\in\mathscr{P}^n} |c_Q| < \infty.$$

Observação 7.1.1. *De maneira análoga como em (2.1.2), temos que as normas* $|\cdot|_{B^{-s}_{1,1}}$ *e* $|\cdot|_{(B^s_{\infty,\infty})^*}$ *coincidem para todo elemento de* $B^{-s}_{1,1}$.

Proposição 7.1.1. *Dado* $a_Q \in \cup_{k\geq 1}\mathscr{P}^k$, *temos que*

$$(\mathscr{L}^*_{\phi,f})^n a_Q \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

Note que

$$a_Q \circ f = \mu(Q)^{-s-1}\left(\frac{\chi_{L_Q}\circ f}{\mu(I_1)} - \frac{\chi_{R_Q}\circ f}{1-\mu(I_1)}\right),$$

além disso $\chi_{L_Q}\circ f = \chi_{L_Q}\circ f_1 + \chi_{L_Q}\circ f_2 = \chi_{f_1^{-1}(L_Q)} + \chi_{f_2^{-1}(L_Q)}$ e de maneira análoga $\chi_{R_Q}\circ f = \chi_{f_1^{-1}(R_Q)} + \chi_{f_2^{-1}(R_Q)}$, para todo $Q \in \cup_{k\geq 1}\mathscr{P}^k$. Com isso, segue que

$$\begin{aligned} a_Q \circ f &= \mu(Q)^{-s-1}\left(\frac{\chi_{f_1^{-1}(L_Q)} + \chi_{f_2^{-1}(L_Q)}}{\mu(I_1)} - \frac{\chi_{f_1^{-1}(R_Q)} + \chi_{f_2^{-1}(R_Q)}}{1-\mu(I_1)}\right) \\ &= \mu(Q)^{-s-1}\left(\frac{\chi_{f_1^{-1}(L_Q)}}{\mu(I_1)} - \frac{\chi_{f_1^{-1}(R_Q)}}{1-\mu(I_1)} + \frac{\chi_{f_2^{-1}(L_Q)}}{\mu(I_1)} - \frac{\chi_{f_2^{-1}(R_Q)}}{1-\mu(I_1)}\right), \end{aligned}$$

de maneira que os átomos a_Q são levados em outros dois átomos pela ação de $\mathscr{L}_{\phi,f}$.

Além do mais, desde que μ é $f-$invariante, podemos escrever $\mu(f_1^{-1}(L_Q)\cup f_1^{-1}(R_Q)) = \mu(I_1)\mu(Q)$ e $\mu(f_2^{-1}(L_Q)\cup f_2^{-1}(R_Q)) = (1-\mu(I_1))\mu(Q)$, logo

$$\begin{aligned} a_Q \circ f = \mu(Q)^{-s-1}&\frac{[\mu(I_1)\mu(Q)]^{-s-1}}{[\mu(I_1)\mu(Q)]^{-s-1}}\left(\frac{\chi_{f_1^{-1}(L_Q)}}{\mu(I_1)} - \frac{\chi_{f_1^{-1}(R_Q)}}{1-\mu(I_1)}\right) + \\ &+ \mu(Q)^{-s-1}\frac{[(1-\mu(I_1))\mu(Q)]^{-s-1}}{[(1-\mu(I_1))\mu(Q)]^{-s-1}}\left(\frac{\chi_{f_2^{-1}(L_Q)}}{\mu(I_1)} - \frac{\chi_{f_2^{-1}(R_Q)}}{1-\mu(I_1)}\right) \\ &= \frac{\mu(f_1^{-1}(Q))^{-s-1}}{\mu(I_1)^{-s-1}}\left(\frac{\chi_{f_1^{-1}(L_Q)}}{\mu(I_1)} - \frac{\chi_{f_1^{-1}(R_Q)}}{1-\mu(I_1)}\right) + \frac{\mu(f_2^{-1}(Q))^{-s-1}}{(1-\mu(I_1))^{-s-1}}\left(\frac{\chi_{f_2^{-1}(L_Q)}}{\mu(I_1)} - \frac{\chi_{f_2^{-1}(R_Q)}}{1-\mu(I_1)}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{a_{f_1^{-1}(Q)}}{\mu(I_1)^{-s-1}} + \frac{a_{f_2^{-1}(Q)}}{(1-\mu(I_1))^{-s-1}},$$

portanto,

$$\begin{aligned} a_Q \mathscr{L}_{\phi,f}(\psi) &= \lambda \int \left(\frac{a_{f_1^{-1}(Q)}}{\mu(I_1)^{-s-1}} + \frac{a_{f_2^{-1}(Q)}}{(1-\mu(I_1))^{-s-1}} \right) \psi d\mu \\ &= \frac{\lambda}{\mu(I_1)^{-s-1}} (a_{f_1^{-1}(Q)}(\psi)) + \frac{\lambda}{(1-\mu(I_1))^{-s-1}} (a_{f_2^{-1}(Q)}(\psi)), \end{aligned}$$

e por fim,

$$|\mathscr{L}^*_{\phi,f} a_Q|_{B^{-s}_{1,1}} = \frac{\lambda}{\mu(I_1)^{-s-1}} + \frac{\lambda}{(1-\mu(I_1))^{-s-1}} = \lambda(\mu(I_1)^{s+1} + (1-\mu(I_1))^{s+1}),$$

além disso

$$|\mathscr{L}^*_{\phi,f} a_{f_1^{-1}(Q)}|_{B^{-s}_{1,1}} = \lambda(\mu(I_1)^{s+1} + (1-\mu(I_1))^{s+1}), \quad \text{e} \quad |a_{f_2^{-1}(Q)} \mathscr{L}_{\phi,f}| = \lambda(\mu(I_1)^{s+1} + (1-\mu(I_1))^{s+1}),$$

portanto

$$|a_Q \mathscr{L}^2_{\phi,f}|_{B^{-s}_{1,1}} = \lambda^2(\mu(I_1)^{s+1} + (1-\mu(I_1))^{s+1})^2,$$

indutivamente podemos ver que

$$|a_Q \mathscr{L}^n_{\phi,f}|_{B^{-s}_{1,1}} = \lambda^n(\mu(I_1)^{s+1} + (1-\mu(I_1))^{s+1})^n. \tag{7.5}$$

Uma vez que $\mu(I_1)^{s+1} < \mu(I_1)$ e $(1-\mu(I_1))^{s+1} < 1-\mu(I_1)$, então $\mu(I_1)^{s+1} + (1-\mu(I_1))^{s+1} < 1$, desta maneira

$$|a_Q \mathscr{L}^n_{\phi,f}|_{B^{-s}_{1,1}} \cdot \lambda^{-n} \to 0,$$

e desde que o lado direito em (7.5) não depende do átomo, então

$$\sup_{\substack{Q \in \mathscr{P}^k \\ k \geq 1}} |a_Q \mathscr{L}^n_{\phi,f}|_{B^{-s}_{1,1}} \cdot \lambda^{-n} \to 0, \tag{7.6}$$

quando $n \to \infty$, para todo $Q \in \cup_{k \leq 1} \mathscr{P}^k$. Agora suponha que $\nu \in B^{-s}_{1,1}$ possui a representação

$$\nu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{Q \in \mathscr{P}^n} c_Q a_Q.$$

Aplicando $(\mathscr{L}^*)^n$ ficamos com

$$(\mathscr{L}^*_{\phi,f})^n \nu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{Q \in \mathscr{P}^k} c_Q (\mathscr{L}^*_{\phi,f})^n a_Q,$$

portanto

$$\lambda^{-n}(\mathscr{L}^*_{\phi,f})^n\nu = \lambda^{-n}c_I(\mathscr{L}^*_{\phi,f})^*\chi_I + \lambda^{-n}\sum_{n\geq 1}\sum_{Q\in\mathscr{P}^n} c_Q(\mathscr{L}^*_{\phi,f})^n a_Q,$$

mas note que

$$\lambda^{-n}\sum_{k\geq 1}\sum_{Q\in\mathscr{P}^k} c_Q(\mathscr{L}^*_{\phi,f})^n a_Q \to 0,$$

quando $n\to\infty$, uma vez que

$$\lambda^{-n}|\sum_{k\geq 1}\sum_{Q\in\mathscr{P}^k} c_Q(\mathscr{L}^*_{\phi,f})^n a_Q|_{B^{-s}_{1,1}} \leq \left(\sup_{\substack{k\geq 1\\ Q\in\mathscr{P}^k}} |(\mathscr{L}^*_{\phi,f})^n a_Q|_{B^{-s}_{1,1}}\lambda^{-n}\right)\sum_{k\geq 1}\sum_{Q\in\mathscr{P}^k}|c_Q| \to 0,$$

quando n tende a infinito, já que temos (7.6) e $\sum_k\sum_Q|c_Q|$ é limitado por uma constante positiva finita $M<\infty$. Ou seja,

$$\textbf{??}\lambda^{-n}(\mathscr{L}^*_{\phi,f})^n\nu - \lambda^{-n}c_I(\mathscr{L}^*_{\phi,f})^n\chi_I|_{B^{-s}_{1,1}} \to 0. \tag{7.7}$$

Já que,

$$\chi_I(\mathscr{L}^*_{\phi,f})^n\psi = \lambda^n\int\psi d\mu = \chi_I(\psi),$$

para todo $\psi\in B^s_{\infty,\infty}$, então por (7.7) temos

$$\lambda^{-n}((\mathscr{L}^*_{\phi,f})^n\nu)\psi \to c_I\int\psi d\mu = c_I\chi_I(\psi).$$

Para quaisquer $\nu\in B^{-s}_{1,1}$ e $\psi\in B^s_{\infty,\infty}$. Por outro lado, perceba que

$$\nu(\chi_I) = \sum_k\sum_Q c_Q a_Q(\chi_I) = \sum_k\sum_Q c_Q\int a_Q d\mu = c_I\int\chi_I d\mu = c_I.$$

Temos então o seguinte resultado:

Teorema 7.1.1 (Marra-Smania, 2021)**.** *Seja $f: I_1\cup I_2\to I$ uma aplicação expansora marvoviana afim por partes. Considerando a ação do dual do operador de Perron-Fröbenius*

$$\mathscr{L}_{\phi,f}: B^{-s}_{1,1}\to B^{-s}_{1,1},$$

e seja μ probabilidade $f-$invariante, temos que

$$\lambda^{-n}(\mathscr{L}^*)^n_{\phi,f}\nu \to \nu(\chi_I)\mu,$$

no espaço $(B^{-s}_{1,1}, |\cdot|_{B^{-s}_{1,1}})$, para todo $\nu\in B^{-s}_{1,1}$.

Exemplo 7.1.1. *Lembremos que na Seção 2.2, aproximamos a delta de Dirac por uma sequência de funções constantes em um intervalo e que possuem integral igual a 1. Mostramos que*

$$|\delta_0|_{B^{-s}_{1,1}} \leq C_3 < \infty,$$

no espaço $B^{-s}_{1,1}(I, m, \cup_k \mathscr{P}^k)$, *para algum* $C_3 > 0$. *Portanto para todo* $Q \in \cup_k \mathscr{P}^k$ *temos que*

$$|\frac{\chi_Q}{m(Q)}|_{B^{-s}_{1,1}} \leq C_3.$$

A seguir apresentamos um lema sobre a limitação da norma de funções constantes em um intervalo que possuem integral igual a 1.

Lema 7.1.1. *Seja* $f : I_1 \cup I_2 \to I$ *uma aplicação expansora marvoviana afim por partes. Existe* $C_4 > 0$ *tal que*

$$|\frac{\chi_Q}{\mu(Q)}|_{B^{-s}_{1,1}} \leq C_4,$$

para todo $Q \in \cup_k \mathscr{P}^k$.

Demonstração. Sem perda de generalidade vamos considerar Q^n o elemento da partição $\mathscr{P}^{n+1}$ contendo 0. Façamos

$$\begin{aligned}
\nu_0 &= \chi_I \\
\frac{\chi_{Q^1}}{|I_1|} = \nu_1 &= \frac{(1-|I_1|)a_{Q^0} + \chi_I}{(1-|I_1|)\frac{1}{|I_1|} + 1}\frac{1}{|I_1|} = (1-|I_1|)a_{Q^0} + \chi_I \\
\frac{\chi_{Q^2}}{|I_1|^2} = \nu_2 &= \frac{a_{Q^1}(1-|I_1|)|I_1|^s + \nu_0^1}{(1-|I_1|)|I_1|^{-1}\cdot\frac{1}{|I_1|} + \frac{1}{|I_1|}}\frac{1}{|I_1|^2} = a_{Q^1}(1-|I_1|)|I_1|^s + \nu_1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Indutivamente,

$$\frac{\chi_{Q^n}}{|I_1|^n} = \nu_n = a_{Q^{n-1}}(1-|I_1|)|I_1|^{s(n-1)} + \nu_0^{n-1}.$$

Então é fácil ver que,

$$\nu_n = \chi_I + \sum_{k=1}^{n}(1-|I_1|)|I_1|^{s(k-1)}a_{Q^{k-1}},$$

consequentemente temos que

$$|\nu_0^n|_{B^{-s}_{1,1}} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(1-|I_1|)|I_1|^{s(k-1)} \leq 1 + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{\lambda^s})^{k-1} = C_3 < \infty,$$

uma vez que $|I_1| \leq 1/\lambda < 1$. Escolha $C_4 > C_3$.

Sendo $x \in [0,1]$, podemos generalizar o resultado tomando todos os intervalos Q^n que contém x: a medida de cada Q^n será um produto de n termos, cada termo será $1-|I_1|$ ou $|I_1|$. A quantidade de termos $|I_1|$ que aparece em $\mu(Q^n)$ depende do quão à esquerda esse intervalo está e a quantidade de termos $1-|I_1|$ depende do quão à direita esse intervalo está. Desde que $1-|I_1|, |I_1| < \lambda$, então a constante que limitará a norma de ν_0^n ainda é igual a C_3.

□

7.2 A ação de $\mathscr{L}^*_{\phi,f}$ quando μ é $f-$invariante

No caso em que f não é necessariamente afim por partes, definiremos os átomos do espaço $B^{-s}_{1,1}(I,\mu,\cup_k\mathscr{P}^k)$ como

$$a_Q = |Q|^{-s-1}\left(\frac{|Q|\chi_{L_Q}}{|L_Q|} - \frac{|Q|\chi_{R_Q}}{|R_Q|}\right) = |Q|^{-s}\left(\frac{\chi_{L_Q}}{|L_Q|} - \frac{\chi_{R_Q}}{|R_Q|}\right),$$

para todo $Q\in\cup_k\mathscr{P}^k$, de maneira análoga ao que foi feito em (7.4). Primeiramente, tomando $Q\in\cup_{k\geq k_0}\mathscr{P}^k$, para algum k_0 grande, então $|Q|$ é muito pequeno. Desde que o gráfico de f é aproximadamente afim por partes em cada intervalo pequeno o suficiente, então do Lema 7.1.1, existe $C_4>0$ tal que

$$|\frac{\chi_Q}{|Q|}|_{B^{-s}_{1,1}} < C_4, \tag{7.8}$$

para todo $Q\in\cup_{k\geq k_0}\mathscr{P}^k$. Como temos finitos elementos em $\cup_{k<k_0}\mathscr{P}^k$, então existe $C_5>0$ tal que

$$|\frac{\chi_Q}{|Q|}|_{B^{-s}_{1,1}} < C_5, \tag{7.9}$$

para todo $Q\in\cup_k\mathscr{P}^k$.

Seja $\mathscr{L}^*_{\phi,f}: B^{-s}_{1,1}(\mu)\to B^{-s}_{1,1}(\mu)$ o operador dual de $\mathscr{L}_{\phi,f}$. Temos o seguinte resultado:

Proposição 7.2.1. *Existe $k_0\in\mathbb{N}$, tal que para todo $Q\in\cup_{k\geq k_0}\mathscr{P}^k$, temos que*

$$|\mathscr{L}^*_{\phi,f}a_Q|_{B^{-s}_{1,1}} < \lambda C_6 |a_Q|_{B^{-s}_{1,1}} = \lambda C_6,$$

para algum $0<C_6<1$.

Demonstração. Perceba que $a_Q\circ f = a_Q\circ f_1 + a_Q\circ f_2$, e que $a_Q\circ f_i$, $i=1$ ou 2, não é necessariamente um múltiplo de um átomo. De fato, considere $Q\in\cup_{k\geq k_0}\mathscr{P}^k$,

$$a_Q\circ f_1 = |Q|^{-s}\left(\frac{\chi_{L_Q}\circ f_1}{|L_Q|} - \frac{\chi_{R_Q}\circ f_1}{|R_Q|}\right),$$

assim,

$$a_Q\circ f_1 = \frac{|f_1^{-1}(Q)|^{-s}}{|f_1^{-1}(Q)|^{-s}}|Q|^{-s}\left(\frac{|f_1^{-1}(L_Q)|\chi_{f_1^{-1}(L_Q)}}{|L_Q||f_1^{-1}(L_Q)|} - \frac{|f_1^{-1}(Q)|\chi_{f_1^{-1}(R_Q)}}{|R_Q||f_1^{-1}(R_Q)|}\right), \tag{7.10}$$

e portanto não é múltiplo de átomo se $|f_1^{-1}(L_Q)|/|L_Q| \neq |f_1^{-1}(R_Q)|/|R_Q|$. Temos ainda uma expressão semelhante para $a_Q\circ f_2$,

$$a_Q\circ f_2 = \frac{|f_2^{-1}(Q)|^{-s}}{|f_2^{-1}(Q)|^{-s}}|Q|^{-s}\left(\frac{|f_2^{-1}(L_Q)|\chi_{f_2^{-1}(L_Q)}}{|L_Q||f_2^{-1}(L_Q)|} - \frac{|f_2^{-1}(Q)|\chi_{f_2^{-1}(R_Q)}}{|R_Q||f_2^{-1}(R_Q)|}\right). \tag{7.11}$$

Perceba que

$$a_Q \circ f_1 + \frac{|f_1^{-1}(Q)|^{-s}}{|f_1^{-1}(Q)|^{-s}}|Q|^{-s}\left((\frac{|f_1^{-1}(R_Q)|}{|R_Q|} - \frac{|f_1^{-1}(L_Q)|}{|L_Q|})\frac{\chi_{f_1^{-1}(L_Q)}}{|f_1^{-1}(L_Q)|}\right) = \frac{|f_1^{-1}(R_Q)||Q|^{-s}}{|R_Q||f_1^{-1}(Q)|^{-s}}a_{f_1^{-1}(Q)},$$

além disso,

$$a_Q \circ f_2 + \frac{|f_2^{-1}(Q)|^{-s}}{|f_2^{-1}(Q)|^{-s}}|Q|^{-s}\left((\frac{|f_1^{-1}(L_Q)|}{|L_Q|} - \frac{|f_1^{-1}(R_Q)|}{|R_Q|})\frac{\chi_{f_2^{-1}(L_Q)}}{|f_2^{-1}(L_Q)|}\right) = \frac{|f_2^{-1}(R_Q)||Q|^{-s}}{|R_Q||f_2^{-1}(Q)|^{-s}}a_{f_2^{-1}(Q)},$$

Dessa forma

$$a_Q \circ f = \frac{|f_1^{-1}(R_Q)||Q|^{-s}}{|R_Q||f_1^{-1}(Q)|^{-s}}a_{f_1^{-1}(Q)} + \frac{|f_2^{-1}(R_Q)||Q|^{-s}}{|R_Q||f_2^{-1}(Q)|^{-s}}a_{f_2^{-1}(Q)} - \xi_{k_0},$$

onde

$$\xi_{k_0} = |Q|^{-s}\left(\frac{|f_1^{-1}(R_Q)|}{|R_Q|} - \frac{|f_1^{-1}(L_Q)|}{|L_Q|}\right)\left(\frac{\chi_{f_1^{-1}(L_Q)}}{|f_1^{-1}(L_Q)|} - \frac{\chi_{f_2^{-1}(L_Q)}}{|f_2^{-1}(L_Q)|}\right).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\lambda^{-1}(\mathscr{L}^*_{\phi,f}a_Q)(\psi) &= \int (a_Q \circ f)\psi d\mu \\ &= \frac{|f_1^{-1}(R_Q)||Q|^{-s}}{|R_Q||f_1^{-1}(Q)|^{-s}}\int a_{f_1^{-1}(Q)}\psi d\mu + \\ &+ \frac{|f_2^{-1}(R_Q)||Q|^{-s}}{|R_Q||f_2^{-1}(Q)|^{-s}}\int a_{f_2^{-1}(Q)}\psi d\mu - \int \xi_{k_0}\psi d\mu,\end{aligned}$$

e pela desigualdade triangular segue que

$$\lambda^{-1}|(\mathscr{L}^*_{\phi,f}a_Q)|_{B^{-s}_{1,1}} \leq \frac{|f_1^{-1}(R_Q)||Q|^{-s}}{|R_Q||f_1^{-1}(Q)|^{-s}} + \frac{|f_2^{-1}(R_Q)||Q|^{-s}}{|R_Q||f_2^{-1}(Q)|^{-s}} + |\xi_{k_0}|_{B^{-s}_{1,1}}.$$

Claro que

$$\frac{|f_1^{-1}(Q)|}{|Q|},\ \frac{|f_2^{-1}(Q)|}{|Q|} < \frac{1}{\lambda} < 1,$$

e por outro lado, já que μ é $f-$invariante temos

$$1 - \frac{|f_1^{-1}(R_Q)|}{|R_Q|} = \frac{|f_2^{-1}(R_Q)|}{|R_Q|},$$

façamos então

$$C_Q = \frac{|f_1^{-1}(R_Q)||Q|^{-s}}{|R_Q||f_1^{-1}(Q)|^{-s}} + \frac{|f_2^{-1}(R_Q)||Q|^{-s}}{|R_Q||f_2^{-1}(Q)|^{-s}} \leq \frac{1}{\lambda^s}, \tag{7.12}$$

em seguida tome

$$C_7 = \sup_{Q\in\cup_k\mathscr{P}^k} C_Q.$$

Mas como (7.12) é satisfeita para todo $Q \in \cup_k\mathscr{P}^k$, segue que

$$C_7 \leq \frac{1}{\lambda^s} < 1,$$

uma vez que $s > 0$. Sendo assim, escolha C_6 tal que $1 > C_6 > 1/\lambda^s$.

Em contrapartida, perceba que quanto maior o k_0 mais intervalos a partição $\mathscr{P}^{k_0}$ terá e menor será a norma da partição, de maneira que $|f_i^{-1}(R_Q)|/|R_Q|$ fica cada vez mais próximo de $|f_i^{-1}(L_Q)|/|L_Q|$, $i = 1$ ou 2.

Por (7.9) temos que,

$$\begin{aligned} |\left(\frac{\chi_{f_1^{-1}(L_Q)}}{|f_1^{-1}(L_Q)|} - \frac{\chi_{f_2^{-1}(L_Q)}}{|f_2^{-1}(L_Q)|}\right)|_{B^{-s}_{1,1}} &\leq |\frac{\chi_{f_1^{-1}(L_Q)}}{|f_1^{-1}(L_Q)|}|_{B^{-s}_{1,1}} + |\frac{\chi_{f_2^{-1}(L_Q)}}{|f_2^{-1}(L_Q)|}|_{B^{-s}_{1,1}} \\ &\leq 2C_5, \end{aligned}$$

O Lema 6.0.2 implica então que

$$|\xi_{k_0}|_{B^{-s}_{1,1}} \leq C_8\mu(Q)^{\beta-s}\cdot 2C_5,$$

e logo,

$$|\xi_{k_0}|_{B^{-s}_{1,1}} \to 0,$$

quando $\mu(Q) \to 0$, ou seja, quando $k_0 \to \infty$. Por fim, concluímos a demonstração da Proposição 7.2.1 escolhendo $k_0 \in \mathbb{N}$ grande o suficiente, tal que $|\xi_{k_0}|_{B^{-s}_{1,1}} \leq C_6 - 1/\lambda^s$.

$\square$

Por fim, conseguimos que $\lambda^{-n}((\mathscr{L}^*_{\phi,f})^n a_Q)(\psi) = \int a_Q \circ f^n \psi d\mu \to 0$ para todo $Q \in \cup_{k\geq 1}\mathscr{P}^k$, e já que $\chi_I = \mu$ (veja Observação 7.0.2) é o único átomo que não é levado em outro átomo pelo operador dual $\mathscr{L}^*_{\phi,f}$ temos então:

Teorema 7.2.1 (Marra-Smania, 2021)**.** *Considere $\phi : I \to \mathbb{R}$ uma função Hölder não-positiva e $f : I_1 \cup I_2 \to I$ uma aplicação expansora markoviana. Considere também μ automedida de $\mathscr{L}^*_{\phi,f}$, e suponha que μ é $f-$invariante. Seja $\lambda = |\mathscr{L}^*_{\phi,f}\mu|_{B^{-s}_{1,1}}$. Então para todo $\nu \in B^{-s}_{1,1}(\mu)$ e $\psi \in B^s_{\infty,\infty}(\mu)$ temos que*

$$(\mathscr{L}^*_{\phi,f} a_Q)(\psi) = \lambda \int (a_Q \circ f)\psi d\mu,$$

para todo $Q \in \cup_k\mathscr{P}^k$. Mais ainda,

$$\lambda^{-n}(\mathscr{L}^*)^n_{\phi,f}\nu \to \nu(\chi_I)\mu,$$

no espaço $(B^{-s}_{1,1}(\mu), |\cdot|_{B^{-s}_{1,1}(\mu)})$, quando $n \to \infty$.

7.3 Caso μ não seja $f-$invariante

Sabemos de Parry-Pollicott [10] como construir uma probabilidade $f-$invariante absolutamente contínua com relação a μ. Seja μ_0 essa probabilidade, então temos que $\varphi_0 = d\mu_0/d\mu$ é autofunção do operador de Perron-Fröbenius $\mathscr{L}_{\phi,f}$, isto é $\mathscr{L}_{\phi,f}\varphi_0 = \lambda\varphi_0$.

Considere o espaço $B^{-s}_{1,1}(\mu_0)$, e defina o operador

$$\begin{aligned} \tilde{\mathscr{L}}^*_{\phi,f} : B^{-s}_{1,1}(\mu_0) &\to B^{-s}_{1,1}(\mu_0) \\ \tilde{\nu} &\mapsto \tilde{\mathscr{L}}_{\phi,f}(\tilde{\nu}), \end{aligned}$$

onde $\tilde{\mathscr{L}}^*_{\phi,f}(\tilde{a}_Q) : B^s_{\infty,\infty}(\mu_0) \to \mathbb{C}$, é tal que

$$\tilde{\mathscr{L}}^*_{\phi,f}(\tilde{a}_Q)(\tilde{\psi}) = \lambda \int (\tilde{a}_Q \circ f)\tilde{\psi} d\mu_0.$$

para todo $Q \in \cup_k \mathscr{P}^k$. Desde que a ação de $\tilde{\mathscr{L}}^*_{\phi,f}$ é semelhante ao operador do Teorema 7.2.1, sabemos que

$$\lambda^{-n}(\tilde{\mathscr{L}}^*_{\phi,f})^n \tilde{a}_Q \to \left(\int \tilde{a}_Q d\mu_0\right)\mu_0, \tag{7.13}$$

em $(B^{-s}_{1,1}(\mu_0), |\cdot|_{B^{-s}_{1,1}(\mu_0)})$. Mas (7.13) acontece se e somente se

$$\lambda^{-n}((\tilde{\mathscr{L}}_{\phi,f})^n \tilde{a}_Q)(\tilde{\psi}) \to \left(\int \tilde{a}_Q d\mu_0\right)\left(\int \tilde{\psi} d\mu_0\right),$$

na norma usual dos complexos, para todo $\tilde{\psi} \in B^s_{\infty,\infty}(\mu_0)$ e $Q \in \cup_k \mathscr{P}^k$. Contudo, perceba que

$$\tilde{\mathscr{L}}^*_{\phi,f}(\tilde{a}_Q)(\tilde{\psi}) = \lambda \int (\tilde{a}_Q \circ f)\tilde{\psi} d\mu_0 = \lambda \int (\tilde{a}_Q \circ f)\tilde{\psi}\varphi_0 d\mu = (\mathscr{L}^*_{\phi,f}\tilde{a}_Q)(\tilde{\psi}\varphi_0),$$

com $\tilde{\mathscr{L}}^*_{\phi,f}\tilde{a}_Q \in B^{-s}_{1,1}(\mu)$. Portanto

$$\lambda^{-n}((\mathscr{L}^*_{\phi,f})^n \tilde{a}_Q)(\tilde{\psi}\varphi_0) \to \left(\int \tilde{a}_Q d\mu_0\right)\left(\int \tilde{\psi} d\mu_0\right),$$

para todo $\tilde{\psi} \in B^s_{\infty,\infty}(\mu_0)$. Segue então que

$$\lambda^{-n}(\mathscr{L}^*_{\phi,f})^n \tilde{a}_Q \to \left(\int \tilde{a}_Q d\mu_0\right)\mu. \tag{7.14}$$

Por outro lado, veremos que $B^{-s}_{1,1}(\mu_0) = B^{-s}_{1,1}(\mu)$. Antes disso, o seguinte resultado será importante para nós:

Lema 7.3.1. *A função φ_0 é contínua e estritamente positiva.*

Demonstração. De acordo com o Teorema 6.0.1 de Parry-Pollicott [10], sabemos que φ_0 é Hölder contínua. Agora suponha que $\varphi_0(x) = 0$, assim

$$(\mathscr{L}\varphi_0)(x) = \sum_{f(y)=x} e^{\phi(y)}\varphi_0(y) = \lambda\varphi_0(x) = 0,$$

mas desde que φ_0 é não-negativa, então $\varphi(y) = 0$ para todo $y \in f^{-1}(x)$. Logo temos duas raízes novas para φ_0 além de x. Indutivamente, teremos infinitas raízes para φ_0. Desde que f é não periódica então essas raízes formam um conjunto denso em I, isso implica que $\varphi_0 \equiv 0$, absurdo, pois $\mu_0 = \varphi_0\mu$ é uma probabilidade. Segue que φ_0 é estritamente positiva.

□

Lema 7.3.2. *Temos que* $B^{-s}_{1,1}(\mu_0) = B^{-s}_{1,1}(\mu)$.

Demonstração. Dado $\tilde{a}_Q \in B^{-s}_{1,1}(\mu_0)$, provemos que $\tilde{a}_Q \in B^{-s}_{1,1}(\mu)$. Primeiro note que

$$\frac{\mu(Q)^{-s}}{\mu_0(Q)^{-s}}\tilde{a}_Q = \mu(Q)^{-s}\left(\frac{\chi_{L_Q}}{\mu_0(L_Q)} - \frac{\chi_{R_Q}}{\mu_0(R_Q)}\right)$$

$$\frac{\mu_0(L_Q)}{\mu(L_Q)}\frac{\mu(Q)^{-s}}{\mu_0(Q)^{-s}}\tilde{a}_Q = \mu(Q)^{-s}\frac{\chi_{L_Q}}{\mu(L_Q)} - \mu(Q)^{-s}\frac{\chi_{R_Q}}{\mu_0(R_Q)}\cdot\frac{\mu_0(L_Q)}{\mu(L_Q)},$$

logo

$$\frac{\mu_0(L_Q)}{\mu(L_Q)}\frac{\mu(Q)^{-s}}{\mu_0(Q)^{-s}}\tilde{a}_Q - \mu(Q)^{-s}\frac{\chi_{R_Q}}{\mu(R_Q)} = a_Q - \mu(Q)^{-s}\frac{\chi_{R_Q}}{\mu_0(R_Q)}\cdot\frac{\mu_0(L_Q)}{\mu(L_Q)},$$

com isso

$$\frac{\mu_0(L_Q)}{\mu(L_Q)}\frac{\mu(Q)^{-s}}{\mu_0(Q)^{-s}}\tilde{a}_Q = a_Q + \mu(Q)^{-s}\frac{\chi_{R_Q}}{\mu_0(R_Q)}\left(\frac{\mu_0(R_Q)}{\mu(R_Q)} - \frac{\mu_0(L_Q)}{\mu(L_Q)}\right).$$

Entretanto, pelo Lema 7.3.1, temos que φ_0 é limitada inferiormente por uma constante $1/C_9 > 0$, assim

$$\frac{\mu(Q)}{\mu_0(Q)} = \frac{\int_Q d\mu}{\int_Q \varphi_0 d\mu} \leq \frac{\mu(Q)}{\mu(Q)\inf_{x\in Q}|\varphi_0(x)|} \leq C_9 < \infty,$$

para todo $Q \in \cup_k \mathscr{P}^k$. Além disso, por (7.9) temos que

$$|\frac{\chi_{R_Q}}{\mu_0(R_Q)}|_{B^{-s}_{1,1}} = \frac{\mu(R_Q)}{\mu_0(R_Q)}|\frac{\chi_{R_Q}}{\mu(R_Q)}|_{B^{-s}_{1,1}(\mu)} \leq C_9C_5.$$

Então precisamos apenas demonstrar que

$$|\frac{\mu_0(R_Q)}{\mu(R_Q)} - \frac{\mu_0(L_Q)}{\mu(L_Q)}| \leq C_{10}\mu(Q)^s,$$

para algum $C_{10} > 0$. Ora, seja β' o expoente da autofunção φ_0, então existe $C_{10} > 0$ tal que

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| \leq C_{10}\mu(Q)^{\beta'},$$

para todo $Q \in \cup_k \mathscr{P}^k$ e $x, y \in Q$. Pelo Teorema do Valor Intermediário para Integrais, existem $x_R \in R_Q$ tal que $\varphi_0(x_R) = \mu_0(R_Q)/\mu(R_Q)$ e $x_L \in L_Q$ tal que $\varphi_0(x_L) = \mu_0(L_Q)/\mu(L_Q)$, assim

$$|\frac{\mu_0(R_Q)}{\mu(R_Q)} - \frac{\mu_0(L_Q)}{\mu(L_Q)}| = |\varphi_0(x_R) - \varphi_0(x_L)| \leq C_{10}\mu(Q)^{\beta'}.$$

Mas como no Lema 6.0.1 temos que

$$\mu(Q) \leq \mu(Q)^{\tilde{\beta}},$$

portanto

$$\begin{aligned} |\frac{\mu_0(R_Q)}{\mu(R_Q)} - \frac{\mu_0(L_Q)}{\mu(L_Q)}| &\leq C_{10}\mu(Q)^{\tilde{\beta}\beta'} \\ &\leq C_{10}\mu(Q)^s, \end{aligned}$$

de onde a última desigualdade vem da escolha do $s < \min\{\tilde{\beta}\beta', \tilde{\beta}\beta\}$. Finalmente, existe $M > 0$, com

$$M = C_9^{s+1}(1 + C_{10}C_9C_5),$$

tal que

$$|\tilde{a}_Q|_{B^{-s}_{1,1}(\mu)} \leq M < \infty,$$

logo $\tilde{a}_Q \in B^{-s}_{1,1}(\mu)$ para todo $Q \in \cup_k \mathscr{P}^k$, e ainda mais $B^{-s}_{1,1}(\mu) \supseteq B^{-s}_{1,1}(\mu_0)$. A inclusão $B^{-s}_{1,1}(\mu) \subseteq B^{-s}_{1,1}(\mu_0)$ pode ser demonstrada de maneira análoga, uma vez que $\sup_{x\in Q} |\varphi_0(x)| < \infty$.

□

Finalmente, juntando esse resultado e a equação (7.14) conseguimos o teorema:

Teorema 7.3.1 (Marra-Smania, 2021). *Considere $\phi : I \to \mathbb{R}$ uma função Hölder não-positiva e $f : I_1 \cup I_2 \to I$ uma aplicação expansora markoviana. Considere o operador dual $\mathscr{L}^*_{\phi,f} : B^{-s}_{1,1}(\mu) \to B^{-s}_{1,1}(\mu)$, temos que*

$$\lambda^{-n}(\mathscr{L}^*_{\phi,f})^n\nu \to (\varphi_0\nu)(\chi_I)\mu,$$

na norma $|\cdot|_{B^{-s}_{1,1}}$ para todo $\nu \in B^{-s}_{1,1}(\mu)$, onde φ_0 é a autofunção de $\mathscr{L}_{\phi,f}$.

Portanto temos um comportamento atrator na dinâmica de $\mathscr{L}^*_{\phi,f}$. Mais ainda, uma vez que

$$((\mathscr{L}^*_{\phi,f})^n\nu)(\psi) = (\nu)(\mathscr{L}^n_{\phi,f}\psi),$$

temos o corolário:

Corolário 7.3.1 (Marra-Smania, 2021). *Seja φ_0 a autofunção do operador de Perron-Fröbenius $\mathscr{L}_{\phi,f} : B^s_{\infty,\infty} \to B^s_{\infty,\infty}$, então*

$$\lambda^{-n}\mathscr{L}^n_{\phi,f}\psi \to \left(\int \psi d\mu\right)\varphi_0,$$

na norma $|\cdot|_{B^s_{\infty,\infty}}$ para todo $\psi \in B^s_{\infty,\infty}$.

Referências Bibliográficas

[1] A. Arbieto and D. Smania. Transfer operators and atomic decomposition. *arXiv preprint arXiv:1903.06943*, 2019.

[2] G. S. De Souza. Spaces formed by special atoms. 1981.

[3] M. F. Demers. A gentle introduction to anisotropic banach spaces. *Chaos, Solitons & Fractals*, 116:29–42, 2018.

[4] M. L. Gol'dman and R. Kerman. On optimal embedding of calderón spaces and generalized besov spaces. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova*, 243:161–193, 2003.

[5] B. O. Koopman. Search and screening. *OEG Rep.*, 1946.

[6] A. Lasota and J. A. Yorke. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 481–488, 1973.

[7] M. C. Mackey, M. Tyran-Kamińska, H.-O. Walther, et al. The mathematical legacy of andrzej lasota. *Wiadomości Matematyczne*, 48(2):143, 2012.

[8] P. M. Morse. Bernard osgood koopman, 1900–1981. *Operations Research*, 30(3):417–427, 1982.

[9] M. Nikolskii. Approximation of functions of several variables and embedding theorems. Technical report, ARMY FOREIGN SCIENCE AND TECHNOLOGY CENTER CHARLOTTESVILLE VA, 1971.

[10] W. Parry and M. Pollicott. Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics. *Astérisque*, 187(188):1–268, 1990.

[11] H. R. Richardson. Search theory. Technical report, CENTER FOR NAVAL ANALYSES ALEXANDRIA VA, 1986.

[12] D. Smania. Besov-ish spaces through atomic decomposition. *arXiv preprint arXiv:1903.06937*, 2019.

[13] M. Viana. *Stochastic dynamics of deterministic systems*, volume 21. IMPA Rio de Janeiro, 1997.