Sobre G-aplicações entre esferas de cohomologia e uma representação do Grafo de Reeb como subcomplexo de uma variedade

Nelson Antonio Silva

Nelson Antonio Silva

Sobre G-aplicações entre esferas de cohomologia e uma representação do Grafo de Reeb como subcomplexo de uma variedade

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Denise de Mattos
Coorientador: Prof. Dr. Wacław Bolesław Marzantowicz

USP – São Carlos
Junho de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586s

Silva, Nelson Antonio
Sobre G-aplicações entre esferas de cohomologia e uma representação do Grafo de Reeb como subcomplexo de uma variedade / Nelson Antonio Silva; orientadora Denise de Mattos; co-orientador Waclaw Boleslaw Marzantowicz. -- São Carlos, 2016.
125 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Esfera de cohomologia. 2. Length. 3. Bourgin-Yang. 4. Borsuk-Ulam. 5. Grafo de Reeb. I. de Mattos, Denise, orient. II. Boleslaw Marzantowicz, Waclaw, co-orient. III. Título.

Nelson Antonio Silva

On G-maps between cohomology spheres and a representation of the Reeb Graph as a subcomplex of a manifold

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Denise de Mattos
Co-advisor: Prof. Dr. Wacław Bolesław Marzantowicz

USP – São Carlos
June 2016

Este trabalho é dedicado à minha família.

Agradecimentos

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

À Deus, pela vida.

Agradeço aos que mais amo, a minha família. Meus pais Luiz e Wilma e meus irmãos Didio e Carin, pelo amor sem limites e por sempre estarem ao meu lado em todas as decisões da minha vida.

Agradeço, com muito carinho, a minha orientadora, a professora Denise de Mattos, pela amizade, pelos conselhos, por acreditar em mim e ter me aceito como seu aluno de doutorado. Obrigado pela oportunidade que me deu. Também, com mesma admiração, agradeço ao professor Edivaldo Lopes dos Santos, que assim como a Denise, esteve comigo sempre, me aconselhando. Nossas discussões foram sem dúvidas valiosas para realização deste trabalho.

Agradeço ao professor Marzantowicz, primeiro, por ter me proposto os problemas deste doutorado, segundo, pela oportunidade de tê-lo como coorientador e hospitalidade com que me recebeu em Poznań. Também, ao pesquisador Marek Kaluba, pela colaboração, conhecimentos ensinados e pela amizade. Com certeza, foi um ano incrível e de muita aprendizagem.

Agradeço a todos os meus amigos. Aos da vida acadêmica, pelos estudos, churrascos e confraternizações, pelas conversas e os momentos engraçados, que tornaram toda esta etapa mais leve e feliz. Agradeço aos amigos mais antigos (estes sabem quem são) por sempre, e sei que será para sempre, estarem lá por mim. E aos da Polônia, que me fizeram sentir em casa e tornaram minha estadia por lá muito mais tranquila e eternizaram o ano 2013 na minha memória.

Agradeço a todos os meus professores durante todas as etapas escolares da minha vida. Em especial, a minha orientadora de graduação Ires Dias. E também agradeço a todos os funcionários do ICMC.

À Fapesp pelo apoio financeiro. Pela Bolsa de Doutorado no país (2011/23610-3) e pela bolsa de estágio BEPE na Polônia (2012/15659-5).

“It ain’t about how hard you hit,
it is about how hard you can get hit and
keep moving forward.”
(Rocky Balboa)

RESUMO

NELSON, A. S.. **Sobre G-aplicações entre esferas de cohomologia e uma representação do Grafo de Reeb como subcomplexo de uma variedade**. 2016. 125 f. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Bartsch (BARTSCH, 1993) introduziu uma teoria de índice cohomológico, conhecida como o *length*, para G-espaços, no qual G é um grupo de Lie compacto. Apresentamos o cálculo do *length* de G-espaços os quais são esferas de cohomologia e $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, $k \geq 1$. Como consequências, obtemos um teorema de Borsuk-Ulam neste contexto e damos condições suficientes para a existência de aplicações G-equivariantes entre uma esfera de cohomologia e uma esfera de representação quando $G = (\mathbb{Z}_p)^k$. Também, uma versão Bourgin-Yang do teorema de Borsuk-Ulam é apresentada. Como segunda parte desta tese, uma nova definição do grafo de Reeb $R(f)$ de uma função suave $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ com pontos críticos isolados, como um subcomplexo de M é dada. Para isto, um complexo 1-dimensional $\Gamma(f)$ mergulhado em M e equivalente por homotopia a $\mathbb{R}(f)$ é construído. Como consequência, mostramos que para toda função f sobre uma variedade com grupo fundamental finito, o grafo de Reeb de f é uma árvore. Se $\pi_1(M)$ é um grupo abeliano, ou mais geralmente, um grupo "amenable" [1], então $R(f)$ conterá no máximo um laço. Finalmente, é provado que o número de laços do grafo de Reeb de toda função sobre uma superfície M_g é estimado superiormente por g, o genus de M_g. Os resultados desta segunda parte estão publicados em (KALUBA; MARZANTOWICZ; SILVA, 2015).

Palavras-chave: Esfera de cohomologia, Length, Borsuk-Ulam, Bourgin-Yang, Grafo de Reeb.

[1] Veja Apêndice, Definição A.6.4.

ABSTRACT

NELSON, A. S.. **Sobre *G*-aplicações entre esferas de cohomologia e uma representação do Grafo de Reeb como subcomplexo de uma variedade**. 2016. 125 f. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Bartsch (BARTSCH, 1993) introduced a numerical cohomological index theory, known as the *length*, for G-spaces, where G is a compact Lie group. We present the *length* of G-spaces which are cohomology spheres and $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ or $(S^1)^k$, $k \geq 1$. As consequences, we obtain a Borsuk-Ulam theorem in this context and we give a sufficient condition for the existence of G-maps between a cohomological sphere and a representation sphere when $G = (\mathbb{Z}_p)^k$. Also, a Bourgin-Yang version of the Borsuk-Ulam theorem is presented. As a second part of this thesis, a new definition of the Reeb graph $R(f)$ of a smooth function $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ with isolated critical points as a subcomplex of M is given. For that, a 1-dimensional complex $\Gamma(f)$ embedded into M and homotopy equivalent to $\mathbb{R}(f)$ is constructed. As consequence it is shown that for every function f on a manifold with finite fundamental group, the Reeb graph of f is a tree. If $\pi_1(M)$ is an abelian group, or more generally, an amenable group [2], then $R(f)$ contais at most one loop. Finally, it is proved that the number of loops of the Reeb graph of every function on a surface M_g is estimated from above by g, the genus of M_g. The results of this second part is published in (KALUBA; MARZANTOWICZ; SILVA, 2015).

Key-words: Cohomology sphere, Length, Borsuk-Ulam, Bourgin-Yang, Reeb Graph.

[2] See Appendix, Definition A.6.4.

SUMÁRIO

Introdução

Esta tese está dividida em duas partes. A primeira parte trata de problemas na Teoria Equivariante, a saber, existência de aplicações equivariantes entre esferas de cohomologia sob ação de grupos conhecidos como p-toros. Mais especificamente, buscamos condições necessárias e suficientes para uma generalização do teorema de Borsuk-Ulam e provamos uma versão do teorema de Bourgin-Yang neste contexto de esferas de cohomologia. A segunda parte estuda o grafo de Reeb (REEB, 1946; KRONROD, 1950), que recentemente vem sendo explorado para solucionar problemas aplicados à análise gráfica em ciências da computação e na criação de novos invariantes na teoria de Singularidades. Os resultados presentes aqui apresentam uma forma mais geométrica de definir o grafo de Reeb, como um objeto mergulhado na variedade de sua origem e, como aplicações, obtemos um estudo sobre o número máximo de geradores que o grupo fundamental do grafo deve possuir.

PRIMEIRA PARTE: Capítulos 1,2,3 e Apêndice.

Os capítulos 2 e 3 da tese, de modo geral, versam sobre existência de aplicações G-equivariantes entre esferas de cohomologia, no qual G é um dos três grupos de Lie compacto $(\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$, conhecidos como p-toros.

Uma n-esfera de cohomologia com coeficientes sobre um anel R é um espaço topológico Hausdorff, compacto e conexo por caminhos X, que satisfaz $H^*(X;R) \cong H^*(S^n;R)$, no qual H^* indica o anel de cohomologia de Čech.

Um dos aspectos mais importantes destes objetos é que como G-espaços, com G sendo um dos p-toros, as esferas de cohomologia, ou $(\bmod p)$-esferas de cohomologia, se comportam de maneira semelhante às esferas de representações destes grupos. Por exemplo, se V é uma representação ortogonal ou unitária de G, então $S(V)^G$, no qual $S(V)$ é a esfera de representação de V, é ainda uma esfera de representação. Em 1938, P. Smith (SMITH, 1938) provou:

Teorema (Teorema de Smith)**.** Sejam $G = (\mathbb{Z}_p)^k$ (ou $(S^1)^k$), com $k \geq 1$ e X um G-espaço que é uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão n com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$ (ou $\mathbb{Q}$). Então X^G, o espaço dos pontos fixados pela ação de G, será também uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão r, com $r \in [-1, n] \cap \mathbb{Z}$.

Além disso, supondo V tal que $V^G = \{0\}$, obtemos uma decomposição $V = \bigoplus_{H\in\mathcal{H}} V^H$, no qual $\mathcal{H} = \{H \subset G; H$ é subgrupo e $H \cong \mathbb{Z}_p^{k-1}\}$. Desta maneira, $S(V)$ é o produto *join*[3] das esferas $S(V)^H$, isto é, $S(V) = \bigstar_{H\in\mathcal{H}} S(V)^H$. Se n é a dimensão da esfera $S(V)$ e $n(H)$ é a dimensão das esferas $S(V)^H$, então teremos $n+1 = \sum_{H\in\mathcal{H}} n(H)+1$. De modo semelhante, Borel (BOREL; BREDON, 1960) determinou o seguinte resultado para esferas de cohomologia.

Teorema (Fórmula de Borel)**.** Sejam $G = (\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$ e X um G-espaço que é uma n-esfera de cohomologia. Suponhamos que X^G seja uma r-esfera de cohomologia. Temos

$$n - r = \sum_{\substack{H\in\mathcal{H}\\ n(H)>r}} n(H) - r,$$

no qual $n(H)$ é a dimensão da esfera de cohomologia X^H. No caso em que $G = (S^1)^k$, consideramos H_0, componentes conexas do elemento neutro em H, ao invés de H.

Devido a estas semelhanças é natural estudar e estender resultados antes verificados para esferas em representação para a categorias das esferas de cohomologia.

Em (BARTSCH, 1993, Capítulo 4), Thomas Bartsch discute em detalhes as propriedades e resultados de uma teoria de índice cohomológico a valores numéricos, chamado de $(\mathcal{A}, h^*, I)$-length (Capítulo 1, Definição 1.6.1), ou como na maioria da vezes iremos nos referir, o *length*. Inicialmente esta teoria foi introduzida em (CLAPP; PUPPE, 1986; BARTSCH; CLAPP, 1990) e, posteriormente, refinada por Bartsch em (BARTSCH, 1993). Motivados pelas versões equivariantes do *cup-length* e da categoria de Lusternik-Schnirelmann (Capítulo 1, Definição 1.6.8), esta teoria de índices contém todas as boas propriedade de uma teoria de índices cohomológico, conhecidas como monotonicidade, subaditividade e continuidade (Capítulo 1, Teorema 1.6.3), como definida por Fadell e Husseini (FADELL; HUSSEINI, 1988) e muitas outras a serem aplicadas no estudo da teoria de pontos críticos de funções com simetrias ((BARTSCH, 1993, Capítulo 4.4)).

De modo geral, o *length* é uma medida para determinar o tamanho de conjuntos invariantes, assim como o *cup-length*, o *length* é um limitante inferior para versões mais gerais da categoria de Lusternik-Schnirelmann (Capítulo 1, Proposição 1.6.10). Como toda teoria de índices, o *length* é uma ferramenta poderosa no estudo de aplicações equivariantes. Em (BARTSCH; CLAPP, 1990), Bartsch e Clapp calculam o valor do *length* para esferas de representação dos p-toros.

Teorema ((BARTSCH; CLAPP, 1990), Proposição 2.4)**.** Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ e $(S^1)^k$, com $k \geq 1$ e V uma representação (ortogonal ou unitária) de dimensão finita para G tal que $V^G = \{0\}$. Consideraremos $\mathcal{A} = \{G/H; H \subsetneq G$ subgrupo fechado$\}$, $h^* = H^*_G(-;K)$ e $I = P^*(G)$ (a parte polinomial de $H^*(BG)$) e abreviamos $(\mathcal{A}, h^*, I)$-length por ℓ.

[3] Veja Definição A.1.4.

1) Caso $p = 2$, temos $\ell(SV) = \dim_{\mathbb{R}} V$.

2) Caso $p > 2$, temos $\ell(SV) = \dfrac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} V$.

3) Caso $p = 0$, temos $\ell(SV) = \dfrac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} V$.

Nesta direção, no Capítulo 2, Seção 2.2, provamos uma versão mais geral deste teorema, incluindo possivelmente pontos fixo pela ação. O resultado é enunciado como segue.

Teorema 2.2.2. Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$, X um G-espaço que é uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão n e X^G uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão r. Então

1. Se $G = (S^1)^k$,
$$\ell(X, X^G) = \frac{n-r}{2},$$
2. Se $G = \mathbb{Z}_2^k$,
$$\ell(X, X^G) = n - r.$$
3. Se $G = \mathbb{Z}_p^k$,
$$\ell(X, X^G) = \frac{n-r}{2},$$
quando $e = e(X, X^G)$ for polinomial, no qual $e(X, X^G)$ é a classe de Euler de (X, X^G) e é um elemento do anel $H^*(B(\mathbb{Z}_p)^k)$. Em geral, $\frac{n-r}{2} \leq \ell(X, X^G) \leq n - r$.

Como consequência da propriedade de monotonicidade da teoria de índices, resultados do tipo Borsuk-Ulam podem ser obtidos.

O teorema clássico de Borsuk-Ulam, provado em 1933 por Karol Borsuk no seu artigo *"Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre"*(BORSUK, 1933), é enunciado a seguir.

Teorema. Seja $f\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua, então existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Aspectos da importância deste teorema estão no fato que seu enunciado pode ser reescrito de diferentes formas equivalentes e existem diferentes maneiras de prová-las (MATOUSEK, 2008). De fato, a tradução em português do título do artigo de Karol Borsuk é "Três teoremas sobre a esfera euclidiana de dimensão n", referência às três maneiras equivalentes do teorema enunciado acima. Uma delas afirma que para qualquer cobertura da esfera S^n por fechados $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$, existe pelo menos um conjunto F_i contendo um par de pontos antípodas. Porém, este resultado já havia sido provado por Lusternik e Schnirelmann em (LUSTERNIK; SCHNIRELMANN, 1930), como observa Matoušek (MATOUSEK, 2008).

Formas equivalentes do teorema clássico de Borsuk-Ulam são obtidas rapidamente considerando $g\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $g(x) = f(x) - f(-x)$. Note então a construção de uma aplicação ímpar, isto é, $g(-x) = -g(x)$, e o problema agora passa-se a verificar a existência de $x \in S^n$ tal que $g(x) = 0$.

Teorema (Versões equivalentes)**.** Seja $g\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua ímpar, então existe $x \in S^n$ tal que $g(x) = 0$. Equivalentemente, não existe aplicação $S^n \longrightarrow S^{n-1}$ que seja contínua e ímpar.

Com estas interpretações do teorema de Borsuk-Ulam, abriu-se margem para inúmeras generalizações, uma vez que aplicações ímpares são na realidade aplicações $\mathbb{Z}_2$-equivariantes com respeito à ação antipodal. Então, estabelecer resultados para diferentes ações e grupos, bem como para espaços que não as esferas canônicas e os espaços euclidianos, foram caminhos naturais. H. Steinlein lista mais de 400 generalizações do teorema de Borsuk-Ulam até 1985 em seu artigo (STEINLEIN, 1985).

No contexto desta tese obtemos o seguinte resultado.

Corolário 2.2.4. Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$ e X, Y duas $(\bmod\ p)$-esferas de cohomologia de dimensões n e m, respectivamente. Suponhamos que $X^G = Y^G = \emptyset$. Se existir uma aplicação G-equivariante $f\colon X \longrightarrow Y$ então $\dim X^H \leq \dim Y^H$ para todo subtoro $H < G$ de rank $k-1$. Em particular, $n \leq m$. Logo, se $n > m$, não existirá aplicação G-equivariante de X em Y.

Em verdade, uma versão mais abrangente do teorema acima é encontrada em (CLAPP; PUPPE, 1986), no qual é apenas exigido que X seja um espaço satisfazendo $H^i(X) = 0$, quando $0 < i < n$ e $H^i(Y) = 0$ para $i \geq n$. O interessante da versão acima é que particularizando o contradomínio para esferas em representação, obtemos uma espécie de recíproca para este resultado. Provamos em 2.3.1 o próximo teorema.

Teorema 2.3.1. Sejam $G = (\mathbb{Z}_p)^k$, com $k \geq 1$, e X um espaço G-ANR que é uma $(\bmod\ p)$-esfera de cohomologia de dimensão n e $X^G = \emptyset$. Existe uma aplicação G-equivariante entre X e uma esfera de representação unitária SV de G com $V^G = \{0\}$ se, e somente se, $\dim X^H \leq \dim SV^H$, para todo H subtoro de rank $k-1$ tal que $X^H \neq \emptyset$.

Como observado, os resultados entre Borsuk-Ulam e Lusternik-Schnirelmann estão relacionados, e atualmente no presente texto esta relação é celebrada com o resultado acima, uma vez que a demonstração de tal resultado depende do cálculo da generalização da categoria de Lusternik-Schnirelmann.

Nos anos 1954 e 1955, C.T. Yang(YANG, 1954; YANG, 1955) e, independentemente, em 1955, D. G. Bourgin(BOURGIN, 1955) provaram o seguinte teorema.

Teorema (Teorema clássico de Bourgin-Yang)**.** Sejam S^{n-1}, $\mathbb{R}^m$ com ação antipodal de $\mathbb{Z}_2$. Se $f\colon S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação $\mathbb{Z}_2$-equivariante então

$$\dim Z_f \geq n - m - 1,$$

no qual $Z_f = f^{-1}(0)$ e "*dim*" significa dimensão por cobertura.

Como consequência, se $n > m$, então $\dim Z_f \neq \emptyset$. Logo, não existirá aplicação $\mathbb{Z}_2$-equivariante $S^n \longrightarrow S^m$ com respeito à ação antipodal, isto é, implica-se o teorema de Borsuk-Ulam.

Seguindo esta linha de Bourgin e Yang, em determinar a dimensão de conjuntos de zeros, inúmeros artigos foram publicados, principalmente no contexto dos fibrados, substituindo esferas canônicas por fibrados em esferas (de cohomologia) e espaços euclidianos por fibrados vetoriais, isto é, considerando $\pi\colon E \longrightarrow B$, $\pi'\colon E' \longrightarrow B$ fibrados vetoriais com mesma base e $f\colon S(E) \longrightarrow E'$, aplicação equivariante satisfazendo $\pi' \circ f = \pi$. Como referências temos em 1988, o trabalho de A. Dold (DOLD, 1988) para ações de $\mathbb{Z}_2$, inspirados nos trabalhos de Jaworowski (JAWOROWSKI, 1981a; JAWOROWSKI, 1981b), Fadell e Husseini (FADELL; HUSSEINI, 1987a; FADELL; HUSSEINI, 1988); em 1989, Nakaoka (NAKAOKA, 1989) tratando os casos $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_p$ e S^1; em 1990, Izydorek e Rybicki (IZYDOREK; RYBICKI, 1992) tratando também o caso $\mathbb{Z}_p$ e considerando o problema de multivalores; mais recentemente em 2007, De Mattos e Dos Santos (MATTOS; SANTOS, 2007) consideraram fibrados com fibras com mesmo tipo de homotopia que produto de esferas $(\bmod p)$; em 2011 M. Singh (SINGH, 2011) considerando fibrados cujas fibras tem mesma $(\bmod 2)$-cohomologia que espaços projetivos reais ou complexos.

Mais recentemente, De Mattos, Dos Santos e Marzantowicz trabalharam em versões Bourgin-Yang do teorema de Borsuk-Ulam sobre esferas de representação dos grupos $(\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$, $(S^1)^k$ (MARZANTOWICZ; MATTOS; SANTOS, 2013a) em 2012 e $\mathbb{Z}_{p^k}$ (MARZANTOWICZ; MATTOS; SANTOS, 2013b), em 2014. As técnicas encontradas nestes dois últimos artigos estão fortemente presentes no estudo desta tese com relação a uma versão do teorema de Bourgin-Yang para esferas de cohomologia, Capítulo 3, Seção 3.3. De fato, provamos o seguinte teorema.

Teorema 3.3.1. Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$ com $k \geq 1$, X um G-espaço $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão n tal que $X^G = \emptyset$ e Y um G-espaço tal que $Y - Y^G$ é uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia em dimensão m.

Dada $f\colon X \longrightarrow Y$ uma aplicação G-equivariante, considerando $Z_f = f^{-1}(Y^G)$, então

i) se $p = 2$,
$$\dim Z_f \geq \frac{n-m}{s} - 1;$$

ii) se $p \neq 2$,
$$\dim Z_f \geq \frac{n-m}{2s} - 1,$$

no qual s o número de subtoros H de rank $k-1$ tais que ${Z_f}^H \neq \emptyset$. Em particular, se $m > n$, não existe aplicação G-equivariante $X \longrightarrow Y - Y^G$.

Uma versão deste teorema, com estimativa ótima, é obtida no caso particular em que o domínio X é uma variedade topológica fechada orientável n-acíclica, isto é, $H^i(X) = 0$, quando $1 < i < n$ (veja o Teorema 3.3.4)

O Capítulo 1 é dedicado aos pré-requisitos da teoria equivariante e das ferramentas necessárias para os Capítulos 2 e 3. O Apêndice também compõe a primeira parte desta tese e nele se encontram demonstrações e outras definições pertinentes aos conteúdos dos Capítulos 1,2 e 3.

SEGUNDA PARTE: Capítulo 4.

Esta parte da tese é um trabalho conjunto com o professor Wacław Marzantowicz e o pesquisador Marek Kaluba da Universidade Adam Mickiewicz, Poznań, Polônia. Os resultados aqui presentes foram publicados na revista Topological Methods in Nonlinear Analysis, Volume 45, n. 1 em Março de 2015 com o título em inglês "On Representation of the Reeb Graph as a Sub-Complex of Manifold", veja (KALUBA; MARZANTOWICZ; SILVA, 2015).

O grafo de Reeb $R(f)$ de uma função $f\colon M \to \mathbb{R}$ foi definido há mais de 60 anos atrás em (REEB, 1946) e (KRONROD, 1950), mas apenas recentemente vem atraindo mais atenção. Tem papel fundamental na análise de formas (*shape analysis*) em Topologia Computacional ((BIASOTTI *et al.*, 2008; COLE-MCLAUGHLIN *et al.*, 2003)). Dentre suas mais variadas aplicações incluem-se reconhecimento e indexação de objetos 3D e eliminação de ruídos por imagens escaneadas (reconstrução de variedades). É um invariante de fácil acesso para um par (M, f) e que nos fornece uma simplificação para o espaço M muito desejada do ponto de vista computacional ((DEY; WANG, 2013)). Por outro lado, todo grafo que não possui ciclos ou laços orientados pode ser representado como o grafo de Reeb de uma função de classe C^1 $f\colon M \to \mathbb{R}$ definida em uma superfície M, veja (MASUMOTO; SAEKI, 2011; SHARKO, 2006). Isto nos dá uma relação inversa de grafos para pares (M, f) e é feito usando-se argumentos de cirurgia para superfícies. Trabalhos recentes apresentam invariantes para a classificação topológica de funções do tipo Morse-Bott sobre superfícies orientáveis fechadas baseados no grafo de Reeb, veja (MARTÍNEZ-ALFARO; MEZA-SARMIENTO; OLIVEIRA, 2015).

O objetivo do Capítulo 4 será o de construir o grafo de Reeb como um subespaço de M e com uma estrutura simplicial. Para tanto, construiremos um complexo simplicial 1-dimensional $\Gamma(f) \subset M$ o qual será equivalente por homotopia com $R(f)$. O subcomplexo é construído através de caminhos conectando pontos críticos de f. A relação de homotopia apropriada nos fornecerá uma correspondência biunívoca entre as classes de equivalência destes caminhos e os simplexos de $R(f)$.

Denotemos por $\pi\colon (M, f) \to R(f)$ a projeção canônica da variedade para seu grafo de Reeb, e seja $\iota\colon \Gamma(f) \hookrightarrow M$ a inclusão. Provaremos que a composição

$$\pi \circ \iota\colon \Gamma(f) \to M \to R(f) \simeq \Gamma(f)$$

induz um isomorfismo entre grupos fundamentais e isto nos permitirá obter algumas relações entre os grupos fundamentais de M e $R(f)$. Em particular, mostraremos que se M for simplesmente conexo, ou em geral, se $\pi_1(M)$ for finito, então $R(f)$ será uma árvore, isto é, um grafo finito e contrátil. Com o mesmo argumento, se $\pi_1(M)$ for abeliano, ou mais geralmente, se $\pi_1(M)$ não contém $\mathbb{F}_2$, o grupo livre com dois geradores, então $R(f)$ conterá no máximo um laço. Esta classe de grupos contém os grupos "*ameanable*" [4], portanto grupos nilpotentes, solúveis e muitos outros (veja (NOWAK; YU, 2012)).

Finalmente, por um argumento diretamente geométrico, mostraremos que o grafo de Reeb de uma função de classe C^1 $f\colon M \to \mathbb{R}$ definida em uma superfície conexa e fechada M_g terá número de laços menor ou igual que g, o genus de M. Este é um resultado complementar a (COLE-MCLAUGHLIN *et al.*, 2003), no qual diz que para uma função de Morse $f\colon M \to \mathbb{R}$ o número de laços de $R(f)$ é igual a g.

[4] Veja Apêndice, Definição A.6.4.

Capítulo 1

Preliminares

A linguagem básica e as ferramentas utilizadas para a leitura da primeira parte desta tese estão presentes neste capítulo. Alguns detalhes e demais conceitos clássicos que aparecem no texto, e que julgamos importante serem resgatados, estão no Apêndice A.

Numa visão global, o trabalho versa sobre aplicações do estudo de simetrias de objetos conhecidos como esferas de cohomologia. O conceito que traduz estas ideias de simetrias, ou seja, ações de grupo num espaço topológico, bem como outros derivados deste, tais quais: ações livres, órbitas, espaços quocientes, subgrupos de isotropias, aplicações equivariantes, entre outros, são dados na Seção 1.1. A Seção 1.2 trata brevemente da teoria de representações de um grupo topológico, expondo somente o mínimo necessário para os resultados apresentados posteriormente. As esferas de cohomologia são definidas na Seção 1.5. Também, nesta seção, são enunciados os dois principais resultados sobre a estrutura dos pontos fixados de uma esfera de cohomologia por ação de grupos da forma $(\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ e $(S^1)^k$, com $k \geq 1$, a saber, o Teorema de Smith e a Fórmula de Borel.

No estudo de ações livres por um grupo topológico G surge naturalmente a noção de G-fibrados principais, dada na Seção 1.3. Constata-se que grupos contendo subgrupos da forma $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ ou $S^1 \times S^1$, não podem atuar livremente em um esfera de cohomologia X. Em vista disto, uma das estratégias para trabalharmos com X é fazer a modificação $EG \times X$, conhecida como construção de Borel, no qual EG, contrátil e G-livre, é o espaço total classificante construído por J. Milnor (MILNOR, 1956). Estas construções e o estudo da teoria de cohomologia de Borel estão contidos na Seção 1.4. Por fim, na Seção 1.6, a teoria de índice cohomológica a valores numéricos, conhecida como *length*, é definida.

1.1 Conceitos básicos

As referências básicas desta seção são (BREDON, 1960) e (DIECK, 1987).

Nesta seção introduziremos os conceitos e notações básicas que serão usadas em todas as outras seções e capítulos da primeira parte desta tese.

Dado um grupo $(G,\cdot)$ dizemos que este é **grupo topológico** se o conjunto G possuir uma topologia compatível com sua estrutura de grupo[1] no sentido de que as operações:

$$\text{multiplicação: } G\times G\to G,\ (a,b)\mapsto a\cdot b \qquad \text{e} \qquad \text{inversão: } G\to G,\ a\mapsto a^{-1},$$

são contínuas. Se G também for um espaço compacto, geralmente escrevemos apenas que G é um **grupo compacto**.

As simetrias (contínuas) de um espaço topológico X com relação ao grupo G podem ser descritas através de uma **ação (à esquerda) de** G **em** X, que é uma aplicação contínua $G\times X \longrightarrow X$, $(g,x)\mapsto gx$, satisfazendo:

i) $g(hx) = (gh)x$, para todo $g,h\in G$ e $x\in X$;

ii) $1_G x = x$, para todo $x\in X$, no qual 1_G representa o elemento neutro de G.

Neste caso, dizemos que X é um G**-espaço à esquerda** e, muitas vezes, que X é invariante por G. Quando $Z\subset X$ é também um G-espaço (à esquerda), dizemos que Z é um G-subespaço de X ou que é um subespaço de X invariante por G. De modo análogo definimos uma ação à direita. Na maioria das vezes, diremos apenas que o espaço X é um G-espaço, ficando subentendido que este é um G-espaço à esquerda.

No estudo de ações de grupos num espaço muitos outros conceitos surgem naturalmente. Dado um ponto $x\in X$, a G**-órbita** de x é o G-espaço $G(x) = \{gx :\ g\in G\}$. O conjunto de todas as G-órbitas de X forma o chamado **espaço de órbitas** denotado por X/G. A aplicação $X\longrightarrow X/G$ que associa $x\in X$ com $G(x)\in X/G$ é a **projeção canônica** e é contínua com relação à topologia quociente. O **subgrupo de isotropia** de x é o subgrupo $G_x = \{g\in G;\ gx = x\}$.

Dizemos que um G-espaço X é **livre** quando $G_x = \{1_G\}$, para todo $x\in X$.

Dado um subgrupo fechado H de G, o espaço G/H das classes laterais gH, $g\in G$, é chamado G**-espaço homogêneo**. Este é um G-espaço via multiplicação à esquerda: $g(g'H)\mapsto (gg')H$, para quaisquer $g\in G$ e $g'H\in G/H$. O subgrupo $NH = \{g\in G;\ gHg^{-1} = H\}$ de G é chamado **normalizador de** H **em** G. O espaço homogêneo $WH = NH/H$ é conhecido como **grupo de Weyl de** H **em** G. A **classe de conjugação** de H em G é $(H) = \{gHg^{-1};\ g\in G\}$. A notação X^H indica o conjunto dos pontos em X fixados por H, isto é, $X^H = \{x\in X;\ hx = x,\ \forall h\in H\}$.

Um G**-par** (X,A) é um par de G-espaços X, A com $A\subset X$, geralmente subespaço fechado. Uma aplicação $f\colon X\longrightarrow Y$ entre G-espaços é G**-equivariante** se $f(gx) = gf(x)$, para todo

[1] No caso, estamos indicando como multiplicativa.

$g \in G$ e $x \in X$. Quando $f(gx) = f(x)$, para todo $g \in G$ e $x \in X$, então dizemos que f é **G-invariante**. De modo natural, estendemos estas definições para aplicações entre G-pares. Um **G-homeomorfismo** refere-se a um homeomorfismo G-equivariante.

Observação 1.1.1. Em geral, X^H não é um G-espaço, porém WH deixa X^H invariante quando consideramos multiplicação pela esquerda. No caso em que G for abeliano temos X^H um G-espaço.

A necessidade de se tomar G um grupo topológico compacto está na proposição a seguir.

Proposição 1.1.2 ((BREDON, 1960) Capítulo I, Proposição 4.1)**.** Sejam G um grupo compacto e X um G-espaço Hausdorff. Então G/G_x é G-homeomorfo a $G(x)$, para todo $x \in X$.

Note que temos G-homeomorfismos $G/G_x \longrightarrow G/(gG_xg^{-1})$, induzidos de $G \longrightarrow G$, $g' \mapsto g'g^{-1}$. Então a classe de conjugação de uma órbita G_x determina um único tipo de órbita $[G/G_x]$, com relação a G-homeomorfismos. Dizemos que X tem **tipo de órbitas** finito quando o conjunto $\{[G/G_X]; x \in X\}$ for finito.

Definição 1.1.3. Um **grupo de Lie** é um grupo topológico G que possui uma estrutura de variedade diferenciável suave tal que as operações multiplicação e inversão do grupo são diferenciáveis, com respeito à estrutura diferenciável de G. Quando G for compacto diremos que G é um grupo de Lie compacto.

Exemplo 1.1.4. O grupo das matrizes inversíveis $GL(n, \mathbb{R})$, o subgrupo $SL(n, \mathbb{R})$ da matrizes com determinante igual 1, o grupo das matrizes ortogonais $O(n)$ e seu subgrupo $SO(n)$ das matrizes ortogonais com determinante igual a 1, são exemplos clássicos de grupos de Lie. Assim como todos estes exemplos com entradas em $\mathbb{C}$.

Os principais exemplos de grupos de Lie compacto para este trabalho são:

Exemplo 1.1.5.

1. A esfera S^1 possui estrutura multiplicativa de grupo dada pela multiplicação de números complexos. O produto de k cópias de S^1, denotado por $(S^1)^k$, é chamado de k-toro ou **0-toro k-dimensional**.

2. O grupo aditivo $\mathbb{Z}_m$ dos inteiros módulo m pode ser visto como um subgrupo multiplicativo de S^1 das m-ésimas raízes da unidade. Para $m = p$ um número primo, chamamos $(\mathbb{Z}_p)^k$ de **p-toro k-dimensional**. Aos subgrupos $(\mathbb{Z}_p)^r < (\mathbb{Z}_p)^k$, chamaremos de **subtoros de rank** r.

Proposição 1.1.6 ((ARMACOST, 1981))**.** Todo subgrupo próprio fechado de S^1 é da forma $\mathbb{Z}_m$, para algum inteiro m.

Observação 1.1.7. Observe que os subgrupos H de $(S^1)^k$ são da forma $H_1 \times \cdots \times H_k$, nos quais H_i é subgrupo de S^1, portanto H_i é da forma $\{0\}$, S^1 ou $\mathbb{Z}_m$, para cada $1 \leq i \leq k$. Denotando por H_0 a componente conexa do elemento neutro em H, devemos ter que H_0 é da forma $(S^1)^s$, com $s < k$. Já os subgrupos de $(\mathbb{Z}_p)^k$ são da forma $(\mathbb{Z}_p)^s$ com $s \leq k$. Nestes casos diremos que o subgrupo H tem **rank** s. Convencionaremos que o termo **subtoro de rank** r se referirá ao subgrupos conexos da forma $(S^1)^r$.

1.2 Representação de grupos

Definição 1.2.1. Uma **representação complexa** de um grupo topológico G de dimensão finita é uma ação $G \times V \longrightarrow V$, no qual V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão finita e para cada $g \in G$, a aplicação translação $L_g \colon V \longrightarrow V$, $L_g(v) = gv$, é uma transformação linear. No caso em que todas estas translações são transformações unitárias, isto é, isomorfismos de espaços com produto interno, dizemos que V é uma **representação unitária**. Analogamente, definimos representações reais e ortogonais.

Note que, no caso de representação unitária V de G, a esfera unitária

$$S(V) = \{v \in V; |v| = 1\} \subset V$$

será G-invariante e poderemos também induzir uma ação de G em SV. A este G-espaço daremos o nome de **esfera de representação**.

Uma representação complexa de G pode ser interpretada de maneira equivalente como um homomorfismo $G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$, quando identificados V e $\mathbb{C}^n$, para alguma dimensão n. Assim, as representações unitárias são homomorfismos da forma $G \longrightarrow U(n)$.

A partir de representações conhecidas podemos formar outras. Por exemplo, se V, W são representações de um grupo topológico G, então $V \oplus W$ e $V \otimes W$ também serão.

Um **morfismo** entre duas representações V, W de G é uma transformação linear G-equivariante $V \longrightarrow W$. Quando este morfismo é isomorfismo dizemos que V e W são **equivalentes**. No caso em que G é grupo compacto, (HSIANG, 1975, Corolário I.1.1) afirma que toda representação complexa (real) de G é equivalente a uma representação unitária (real). Podemos dizer mais, como descrito em (HSIANG, 1975, Corolário I.1.2), toda representação V de G pode ser decomposta como uma soma direta de subrepresentações irredutíveis $V \cong V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$. Entende-se que V é **representação irredutível** de G quando não possuir subespaços G-invariantes (**subrepresentações**) não-triviais, isto é, diferente de $\{0\}$ e V.

Proposição 1.2.2 ((BRÖCKER; DIECK, 1985), Proposição 1.13)**.** Se G for um grupo de Lie compacto e abeliano, então toda representação complexa irredutível será de dimensão 1.

Proposição 1.2.3 ((BRÖCKER; DIECK, 1985), Proposição 4.14)**.** Sejam G,H dois grupos de Lie compacto e V,W respectivas representações irredutíveis. Então $V\otimes W$ será uma representação irredutível de $G\times H$. Além disso, qualquer representação irredutível de $G\times H$ será dada por um produto tensorial como acima.

Exemplo 1.2.4. Qualquer representação irredutível V de S^1 é da forma $V_i = \mathbb{C}$, no qual S^1 atua sobre V_i através da aplicação $S^1\times V_i \longrightarrow V_i$, $(z,v)\mapsto z^i v$, para qualquer $i\in\mathbb{Z}$. Da Proposição 1.2.3, uma representação irredutível para $(S^1)^k$ é da forma

$$\mathbb{C}\cong V_{i_1}\otimes\ldots\otimes V_{i_k},\ \text{ via a ação }\ (S^1)^k\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\ \ ((z_1,\ldots,z_k),u)\mapsto z_1^{i_1}\ldots z_k^{i_k}u.$$

Considerando $\mathbb{Z}_m\subset S^1$ como grupo das m-ésimas raízes da unidade $\{e^{\frac{2\pi i}{m}},\ldots,e^{\frac{2\pi i(m-1)}{m}}\}$, uma representação irredutível de $\mathbb{Z}_m$ é da forma

$$\mathbb{Z}_m\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\ \ (z,u)\mapsto z^j u,\ \ \text{no qual}\ \ 0\le j\le m-1.$$

Analogamente, uma representação irredutível para $(\mathbb{Z}_m)^k$ é da forma

$$(\mathbb{Z}_m)^k\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\ \ ((z_1,\ldots,z_k),u)\mapsto z_1^{j_1}\ldots z_k^{j_k}u,\ \ \text{com}\ \ 0\le j_1,\ldots,j_k\le m-1.$$

Fixado um grupo de Lie compacto e abeliano G, introduzimos o conceito de **caractere** de uma representação complexa V, que é um funcional linear $\chi_V: G\longrightarrow\mathbb{C}$, definido por $\chi_V(g) = \text{Traço}(L_g)$, no qual identificamos a aplicação translação L_g com uma matriz em $\text{Aut}(V)$.

Os caracteres de representações são importantes invariantes que determinam unicamente, a menos de isomorfismos, estas representações (veja (BRÖCKER; DIECK, 1985, Teorema 4.12)).

Inúmeras propriedades dos caracteres estão listadas em (BRÖCKER; DIECK, 1985, Proposition 4.10). Note que representações irredutíveis de G são da forma $G\longrightarrow U(1)$ e que, portanto, aplicações translações L_g terão como traço valores em $U(1)\cong S^1\subset\mathbb{C}$. Assim, um caractere de uma representação irredutível V de um grupo de Lie compacto abeliano é biunivocamente associado a um homomorfismo $\chi_V: G\longrightarrow U(1)$.

Exemplo 1.2.5 ((BRÖCKER; DIECK, 1985), Proposições 8.1, 8.4)**.** Uma representação irredutível de $G = (S^1)^k$ corresponde a um caractere da forma

$$(S^1)^k\longrightarrow S^1,\ \ (z_1,\ldots,z_k)\mapsto z_1^{m_1}\ldots z_k^{m_k},\ \ com\ \ m_1,\ldots,m_k\in\mathbb{Z}.$$

No caso em que $G = (\mathbb{Z}_p)^k$, uma representação irredutível terá caractere da forma

$$(\mathbb{Z}_p)^k\longrightarrow S^1,\ \ (z_1,\ldots,z_k)\mapsto z_1^{\ell_1}\ldots z_k^{\ell_k},\ \ com\ \ \ell_1,\ldots,\ell_k\in\{0,\ldots,p-1\}.$$

Observe que o núcleo de $S^1\longrightarrow S^1$, $z\mapsto z^m$ é da forma $\{e^{2\pi ik/m};\, k=0,\ldots,m\} = \mathbb{Z}_m\subset S^1$. Conclui-se que subgrupos de rank $k-1$ de $(S^1)^k$ deverão corresponder a caracteres da forma $(S^1)^k\longrightarrow S^1$, definidos por $(z_1,\ldots,z_k)\mapsto z_j^{m_j}$, para alguma posição j e inteiro $m_j\in\mathbb{Z}$. De maneira semelhante para $(\mathbb{Z}_p)^k$.

1.3 G-fibrados principais e espaços classificantes

Esta seção tem como referências (DIECK, 1987), (DIECK, 2008) e (HUSEMOLLER, 1966).

Definição 1.3.1 ((DIECK, 2008), Seção 14.1)**.** Sejam G um grupo topológico, E um G-espaço (à direita) e $p\colon E \longrightarrow B$ uma aplicação contínua. Dizemos que $p\colon E \longrightarrow B$ é um **G-fibrado principal à direita** quando:

i) Para todos $x \in E$ e $g \in G$ temos $p(xg) = p(x)$;

ii) Para cada $b \in B$, existe um vizinhança aberta V de b em B e um G-homeomorfismo $\varphi\colon p^{-1}(V) \longrightarrow V \times G$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(V) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & V \times G \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

é comutativo, no qual π_1 denota projeção na primeira coordenada. A ação de G em $V \times G$ é dada por $(v, g')g = (v, g'g) \in V \times G$, para todos $v \in V$ e $g, g' \in G$.

Chamamos E de espaço total, B de espaço base, p de projeção e φ de trivialização de p em V com fibra típica G. Analogamente, definimos um G-fibrado principal à esquerda. Dizemos que um G-fibrado principal é **numerável** se a condição ii) é válida para uma cobertura numerável[2] de B.

Como comentado em (HUSEMOLLER, 1966, página 50), um espaço Hausdorff X é paracompacto[3] se, e somente se, qualquer cobertura aberta de X é numerável. Portanto, quando o espaço base B for paracompacto, um G-fibrado principal sobre B será numerável. Segue do Teorema A.1.6 (Apêndice) que todo G-fibrado principal numerável é uma fibração[4].

Observação 1.3.2. O fato de que cada trivialização é um G-homeomorfismo, implica que a G-ação em E seja livre. O espaço B é homeomorfo a E/G através da aplicação $E/G \longrightarrow B$ dada por $xG \mapsto p(x)$, para $x \in E$.

Observação 1.3.3. Em (DIECK, 2008, páginas 333 - 334) descreve-se que dados G um grupo topológico, $p\colon E \longrightarrow B$ um G-fibrado principal à direita e F um G-espaço à esquerda, a projeção na primeira coordenada $E \times F \longrightarrow E$ induz $q\colon E \times_G F \longrightarrow B$, no qual $E \times_G F := (E \times F)/G$. A aplicação q é localmente trivial, isto é, para cada $b \in B$, existem vizinhança aberta $V_b \subset B$ e homeomorfismo $\varphi\colon q^{-1}(V_b) \longrightarrow V_b \times F$ tal que $\pi_1 \circ \varphi = q$. Note também que $q^{-1}(b) \cong F$ (homeomorfismo), para todo $b \in B$.

[2] Veja Definição A.1.7 (Apêndice).
[3] Um espaço paracompacto é um espaço no qual toda cobertura aberta admite um refinamento localmente finito.
[4] Veja Definição A.1.5 (Apêndice).

Nas mesmas condições da observação anterior, temos a seguinte

Definição 1.3.4. Dizemos que $q\colon E\times_G F \longrightarrow B$, como construído na Observação 1.3.3, é o **fibrado associado de** p **com fibra típica** F.

Na linguagem clássica da teoria de fibrados , o objeto $q\colon E\times_G F \longrightarrow B$ é um fibrado localmente trivial com fibra típica F e estrutura de grupo G.

Exemplo 1.3.5 ((HUSEMOLLER, 1966), Capítulo 4, Proposição 4.1)**.** Sejam G um grupo topológico, $p\colon E \longrightarrow B$ um G-fibrado principal e $f\colon B' \longrightarrow B$ uma aplicação contínua. Defina

$$f^*(E) = \{(b',e) \in B'\times E;\, f(b') = p(e)\} \subset B'\times E.$$

Então $\pi_1\colon f^*(E) \longrightarrow B'$ será um G-fibrado principal chamado **G-fibrado principal induzido de p por f**, no qual π_1 é a projeção na primeira coordenada.

Teorema 1.3.6 ((BREDON, 1960), Capítulo II, Teorema 5.8)**.** Sejam G um grupo de Lie compacto e E um G-espaço livre e paracompacto. Então, E/G é paracompacto e a projeção canônica $E \longrightarrow E/G$ é um G-fibrado principal.

Definição 1.3.7. Seja G um grupo topológico. Dados dois G-fibrados principais $p\colon E \longrightarrow B$, $p'\colon E' \longrightarrow B$, um **$B$-morfismo** entre p e p' é uma aplicação G-equivariante $f\colon E \longrightarrow E'$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Quando f for um G-homeomorfismo dizemos que p e p' são **B-isomorfos**. Quando B por paracompacto, o conjunto das classes de B-isomorfismos de G-fibrados principais será denotado por $\mathfrak{B}(B,G)$. A classe de um G-fibrado principal p será denotada por $[p]$.

Teorema 1.3.8 ((HUSEMOLLER, 1966) Capítulo 4, Teorema 9.9)**.** Sejam G um grupo topológico e $p\colon E \longrightarrow B$ um G-fibrado principal sobre B paracompacto. Se $f,g\colon B' \longrightarrow B$ são duas aplicações homotópicas, então $f^*(E)$ e $g^*(E)$ são B'-isomorfos, no qual B' é paracompacto.

Dados B,B' espaços paracompactos, denotamos por $[B,B']$ o conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas de B em B'. Fixado um G-fibrado principal $p\colon E \longrightarrow B'$ então pelo Teorema 1.3.8 faz sentido definir a aplicação

$$\phi_p(B)\colon [B,B'] \longrightarrow \mathfrak{B}(B,G),\ [f] \mapsto [f^*(E)].$$

Definição 1.3.9. Seja B' um espaço paracompacto. Dizemos que um G-fibrado principal $p'\colon E' \longrightarrow B'$ é **universal** quando $\phi_{p'}(B)$ for uma bijeção, para todo espaço paracompacto B. Neste caso E' é chamado de espaço total universal e B' de **espaço classificante**. Dado um G-fibrado principal $p\colon E \longrightarrow B$, existe uma aplicação $q\colon B \longrightarrow B'$ tal que $q^*(E)$ e p são B-isomorfos. Esta aplicação é chamada de **aplicação classificante**.

O próximo resultado garante a existência de um G-fibrado universal para qualquer grupo de Lie compacto G. A construção de EG foi feita por Milnor (MILNOR, 1956).

Teorema 1.3.10 ((DIECK, 2008) Capítulo 14, Seção 14.4)**.** Seja G um grupo de Lie compacto. Então:

i) $EG = G \star G \star \cdots$ é um G-espaço livre, contrátil e paracompacto, no qual $\star$ é a operação *join*[5].

ii) $BG = EG/G$ é paracompacto.

iii) $p_G \colon : EG \longrightarrow BG$ é um G-fibrado principal universal.

Observação 1.3.11. Dados dois grupos de Lie compactos G_1, G_2 temos $E(G_1 \times G_2) \cong EG_1 \times EG_2$ e $B(G_1 \times G_2) \cong BG_1 \times BG_2$.

Observação 1.3.12. Sejam G um grupo de Lie compacto e $H \subset G$ um subgrupo fechado. O espaço EG construído acima é também H-livre. Logo, pelo Teorema 1.3.6, EG/H é paracompacto e $EG \longrightarrow EG/H$ é um H-fibrado principal. Como EG é contrátil, segue de

> (DIECK, 2008, Teorema 14.4.12): Um G-fibrado principal numerável é universal se, e somente se, o espaço total for contrátil.

que $EG \longrightarrow EG/H$ é um H-fibrado principal universal e serve como modelo para

$$p_H \colon EH \longrightarrow BH.$$

Exemplo 1.3.13 ((BARTSCH, 1993) Capítulo 4, Seção 2)**.**

- Se $G = \mathbb{Z}_2$, podemos identificar $\mathbb{Z}_2$ com a 0-esfera unitária S^0. Então, temos $E\mathbb{Z}_2 = S^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$, a esfera unitária real de dimensão infinita, e $B\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^\infty$.

- Se $G = S^1$, temos $ES^1 = S^\infty \subset \mathbb{C}^\infty$ e $BS^1 = S^\infty/S^1 = \mathbb{C}P^\infty$.

  Em ambos os exemplos a ação é dada pela multiplicação por escalar. No segundo caso esta é a de números complexos.

- Se $G = \mathbb{Z}_p$, pela observação anterior podemos tomar $ES^1 = S^\infty$ como modelo para $E\mathbb{Z}_p$. Teremos $B\mathbb{Z}_p = S^\infty/\mathbb{Z}_p$, o espaço de Lens infinito.

Proposição 1.3.14 ((MATTOS, 2005, Observação 1.1.4))**.** Sejam G um grupo de Lie compacto e X, Y G-espaços livres e paracompactos Hausdorff. Considere $f \colon X \longrightarrow Y$ uma aplicação G-equivariante e $\overline{f} \colon X/G \longrightarrow Y/G$ a induzida de f. Se $q_Y \colon Y/G \longrightarrow BG$ é uma aplicação classificante para $Y \longrightarrow Y/G$, então $q_Y \circ \overline{f} \colon X/G \longrightarrow BG$ é uma aplicação classificante para $X \longrightarrow X/G$.

[5] Veja Definição A.1.4

1.4 Teoria de cohomologia equivariante de Borel

Esta seção é baseada na Seção 1 do Capítulo III em (DIECK, 1987).

Aqui G será sempre um grupo de Lie compacto. Considere $p_G\colon EG \longrightarrow BG$ o G-fibrado principal universal associado a G (veja iii) no Teorema 1.3.10).

Definição 1.4.1. Dado um G-espaço X, definimos o **espaço de Borel**

$$X_G := EG \times_G X = (EG \times X)/G,$$

no qual a ação de G em $EG \times X$ é a ação diagonal $(u,x)g \mapsto (ug,xg)$, para todos $u \in EG$, $x \in X$ e $g \in G$.

Dado um G-par (X,A) tal que X é paracompacto e A é subespaço fechado, podemos associar o par de espaços (X_G,A_G), conhecido como **par de Borel**. Dada uma aplicação G-equivariante $f\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$, a aplicação $\mathrm{Id}_{EG} \times f\colon (EG \times X, EG \times A) \longrightarrow (Y,B)$ induz uma bem definida aplicação $f_G = \mathrm{Id}_{EG} \times_G f\colon (X_G,A_G) \longrightarrow (Y_G,B_G)$, conhecida como **aplicação de Borel**.

Observação 1.4.2. É fácil ver que $(\mathrm{Id})_G = \mathrm{Id}_{X_G}$ e $(f \circ g)_G = f_G \circ g_G$, para quaisquer aplicações G-equivariantes f,g e aplicação identidade Id. Assim, temos um funtor covariante

$$\cdot_G\colon G\text{-Top}^2 \longrightarrow \text{Top}^2$$

que associa um G-par (X,A) ao par (X_G,A_G) e uma aplicação G-equivariante $f\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ a uma aplicação contínua $f_G\colon (X_G,A_G) \longrightarrow (Y_G,B_G)$, nos quais $\mathbf{Top}^2$, G-$\mathbf{Top}^2$ são as categorias dos pares de espaços topológicos e G-pares, respectivamente. Este funtor é conhecido como **funtor construção de Borel**.

Seja R um anel comutativo com unidade 1_R. Para um G-par (X,A) defina

$$H_G^*(X,A;R) := \check{H}^*(X_G,A_G;R),$$

no qual $\check{H}^*(-;R)$ é a cohomologia de Čech (veja (DOWKER, 1950; EILENBERG; STEENROD, 1952; SPANIER, 1966)). Dada uma aplicação G-equivariante $f\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$, induzimos $f^* := (f_G)^* = \check{H}^*(f_G;R) : H_G^*(Y,B;R) \to H_G^*(X,A;R)$.

Denotaremos $\check{H}(-;R)$ simplesmente por $H(-;R)$ (omitiremos o símbolo "$\vee$ ") e, quando não gerar confusão, omitiremos também o anel de coeficientes R. Antes de enunciarmos o próximo teorema, definiremos a extensão da noção de homotopia para o contexto equivariante.

Definição 1.4.3. Sejam G um grupo topológico e $f,g\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ duas aplicações entre G-pares. Uma **G-homotopia** entre f e g é uma aplicação G-equivariante

$$H\colon (X \times I, A \times I) \longrightarrow (Y,B)$$

tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$, para todo $x \in X$, nos quais $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ e a ação de G em I é trivial. Neste caso dizemos que f e g são G-**homotópicas**.

Teorema 1.4.4 ((DIECK, 1987, Capítulo III, Seção 1))**.** Para todo inteiro q, $H_G^q(-;R)$ é um funtor contravariante, o qual associa G-pares e G-aplicações a R-módulos e R-homomorfismos, respectivamente. Além disso satisfaz:

1) **Invariância homotópica.** Se $f,g\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ são aplicações G-homotópicas, então $(f_G)^* = (g_G)^*\colon H_G^*(Y,B) \longrightarrow H_G^*(X,A)$.

2) **Exatidão.** Para todo G-par (X,A) existe um R-homomorfismo natural

$$\delta\colon H_G^n(A) \longrightarrow H_G^{n+1}(X,A)$$

e uma sequência exata longa

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H_G^n(X,A) \xrightarrow{j^*} H_G^n(X) \xrightarrow{i^*} H_G^n(A) \xrightarrow{\delta} H_G^{n+1}(X,A) \xrightarrow{j^*} \cdots,$$

na qual i, j são inclusões.

3) **Excisão.** Sejam (X,A) um G-par e $U \subset A$ um G-subespaço tal que $\overline{U} \subset \mathrm{int}(A)$. Então, $(X-U, A-U) \hookrightarrow (X,A)$ induz um R-isomorfismo $H_G^*(X,A) \longrightarrow H_G^*(X-U,A-U)$.

4) **Continuidade.** Seja (X,A) um G-par tal que X é um subespaço fechado de um espaço paracompacto Y. Então,

$$H_G^*(X,A) \cong \varinjlim H_G^*(U,V),$$

no qual o limite direto é tomado sobre os G-pares de vizinhanças fechadas de (X,A).

5) **Produto cup.** Dados dois G-pares (X,A), (X,B) tais que $\{A,B\}$ é um par excisivo em $A \cup B$ (veja (SPANIER, 1966, Capítulo 4, página 188)), o produto cup $\cup$ em $H^*(-;R)$ é induzido em $H_G^*(-;R)$, isto é, existe a aplicação

$$H_G^m(X,A) \otimes H_G^n(X,B) \longrightarrow H_G^{m+n}(X,A\cup B),$$

satisfazendo as propriedades usuais do produto cup.

Dizemos que H_G^* é uma teoria de cohomologia G-equivariante e cada H_G^q é chamado q-**funtor cohomologia** G-**equivariante de Borel**.

Observação 1.4.5. Se $A \cup B = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$, então (A,B) será um par excisivo em $A \cup B$ (veja (SPANIER, 1966, Capítulo 4, Teorema 4.6.3)). Assim como em cohomologia de Čech obtemos a sequência exata de uma tripla e a sequência exata de Mayer-Vietoris de um par excisivo.

Diferentemente de uma teoria de cohomologia clássica, como por exemplo a singular ou a de Čech, a teoria de cohomologia G-equivariante de Borel não satisfaz o axioma da dimensão.

Teorema 1.4.6 ((BARTSCH, 1993), Capítulo 4, página 56)**.** Sejam G um grupo de Lie compacto e H um subgrupo fechado de G, então

$$H^*_G(G/H) \cong H^*(BH),$$

no qual $BH = EG/H$ é o espaço classificante associado a H. Em particular, quando $H = G$, temos $H^*_G(\{\text{pt}\}) \cong H^*(BG)$.

Veremos adiante que o anel $H^*(BG)$ possui papel muito importante por conta de sua rica estrutura, então faz-se necessário, se possível, conhecê-lo bem. Os exemplos mais importantes para o contexto deste trabalho são os seguintes.

Proposição 1.4.7 ((DIECK, 1987, Capítulo III, Proposição 2.2, Teorema 2.5, Exercício 2.7.4))**.** Seja $k \geq 1$.

1. Para $p = 2$, $G = (\mathbb{Z}_2)^k$ então $H^*(BG;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t_1,\ldots,t_k]$, nos quais cada $t_i \in H^1(BG;\mathbb{Z}_2)$.

2. Para $p > 2$, $G = (\mathbb{Z}_p)^k$, então $H^*(BG;\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[t_1,\ldots,t_k] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda(s_1,\ldots,s_k)$, nos quais $t_i \in H^2(BG;\mathbb{Z}_p)$, $s_i \in H^1(BG;\mathbb{Z}_p)$ e $s_i^2 = 0$.

3. Para $p = 0$, $G = (S^1)^k$, então $H^*(BG;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[t_1,\ldots,t_k]$, nos quais cada $t_i \in H^2(BG;\mathbb{Q})$.

Observação 1.4.8. Observe que no caso $G = (\mathbb{Z}_p)^k$, o anel $H^*(BG)$ possui elementos nilpotentes. Quando dissermos que estamos tomando a parte polinomial de $H^*(BG)$, estaremos nos referindo a $\mathbb{Z}_p[t_1,\ldots,t_k]$ e denotaremos simplesmente por $P^*(G)$.

Para o caso em que $p = 0$ temos a importante observação: seja H um subgrupo de rank $r < k$ de $(S^1)^k$. Então $H_0 \cong (S^1)^r$ e $L = H/H_0$ é um subgrupo finito, no qual H_0 é a componente conexa do elemento neutro $0 \in H$. Podemos identificar H com $H_0 \times L$ e pela fórmula de Künneth temos

$$H^*(BH;\mathbb{Q}) \cong H^*(BH_0;\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(BL;\mathbb{Q}).$$

Segue de (BOREL; BREDON, 1960, Capítulo III, Corolário 2.3) que $H^*(BL;\mathbb{Q}) \cong (H^*(EL;\mathbb{Q}))^L$ [6]. Como EL é contrátil temos $H^*(EL;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$. Logo, $(H^*(EL;\mathbb{Q}))^L \cong \mathbb{Q}^L \cong \mathbb{Q}$. Portanto,

$$H^*(BH;\mathbb{Q}) \cong H^*(BH_0;\mathbb{Q}).$$

Teorema 1.4.9 ((DIECK, 1987, Capítulo III, página 180 (1.11)))**.** Seja X um espaço paracompacto. Se X for um G-espaço livre, então $H^*_G(X) \cong H^*(X/G)$.

[6] O grupo L atua no espaço $H^*(EL;\mathbb{Q})$ e $(H^*(EL;\mathbb{Q}))^L$ denota o conjunto dos pontos fixados por essa ação.

Estrutura de $H^*(BG)$-módulo

Seja X um G-espaço paracompacto. A ação diagonal de G em $EG \times X$ é livre. Então, a projeção na primeira coordenada $\pi_1 \colon EG \times X \longrightarrow EG$ induz o fibrado

$$\overline{\pi_1} \colon X_G \longrightarrow BG,$$

(veja Observação 1.3.3). Observe que o espaço total universal EG construído por Milnor, pode ser escrito como uma reunião enumerável de espaços compactos $EG = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{G \star \cdots \star G}_{n}$, isto é, EG é σ-compacto. Além disso, EG é regular, logo o produto cartesiano $EG \times X$ é paracompacto (veja (MICHAEL, 1953, Proposição 4)). Então, a projeção canônica $EG \times X \longrightarrow X_G$ será um G-fibrado principal. De fato, a afirmação segue do Teorema 1.3.6.

Note que $\overline{\pi_1} \colon X_G \longrightarrow BG$ é aplicação classificante de $EG \times X \longrightarrow X_G$. De fato, basta tomarmos $X = EG \times X$, $Y = EG$, $f = \pi_1$ e $q_Y = Id_{BG}$ na Proposição 1.3.14.

Proposição 1.4.10. A aplicação $\overline{\pi_1} \colon X_G \longrightarrow BG$ induz uma estrutura de $H^*(BG)$-módulo graduado sobre $H^*_G(X, A)$.

Prova. Dados $a \in H^m(BG)$ e $\gamma \in H^n_G(X, A)$ basta definir $a\gamma = \overline{\pi_1}^*(a) \cup \gamma \in H^{m+n}_G(X, A)$. □

Observação 1.4.11. Sejam X um G-espaço paracompacto e $p_X \colon X \longrightarrow \{\mathrm{pt}\}$ uma aplicação constante. Então, $Id_{EG} \times p_X \colon EG \times X \longrightarrow EG \times \{\mathrm{pt}\}$ induz $p_{X_G} \colon X_G \longrightarrow (EG \times \{\mathrm{pt}\})/G$.

Considere a projeção na primeira coordenada $p_1 \colon EG \times \{\mathrm{pt}\} \longrightarrow EG$. Assim, $p_1 \circ (Id_{EG} \times p_X)$ induz $p_{1_G} \circ p_{X_G} \colon X_G \longrightarrow BG$. Observe que p_{1_G} é um homeomorfismo e que $\pi_1 = p_1 \circ (Id_{EG} \times p_X)$. Assim, $\pi_{1_G}^* = (p_X)^*_G \circ p_{1_G}^*$.

Desta maneira, podemos induzir uma estrutura de $H^*(BG)$-módulo via $p_X \colon X \longrightarrow \{\mathrm{pt}\}$. Por simplicidade iremos denotar $(p_X)^*_G$ somente por p^*_X.

Observação 1.4.12. Seja $f \colon X \longrightarrow Y$ uma aplicação G-equivariante entre G-espaços paracompactos. Temos o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_X"'] & Y \arrow[d, "p_Y"] \\ & \{\mathrm{pt}\}, \end{tikzcd}$$

que induz

$$\begin{tikzcd} H^*(BG) \arrow[d, "p_Y^*"'] \arrow[dr, "p_X^*"] & \\ H^*_G(Y) \arrow[r, "f_G^*"] & H^*_G(X) \end{tikzcd}$$

Assim, ${p_X}^* = {f_G}^* \circ {p_Y}^*$ e portanto ${f_G}^*$ é um $H^*(BG)$-morfismo. De fato, dados $a \in H^*(BG)$ e $y \in H_G^*(Y)$, então

$${f_G}^*(ay) = {f_G}^*(p_Y^*(a) \cup y) = ({f_G}^* \circ p_Y^*(a)) \cup {f_G}^*(y) = p_X^*(a) \cup {f_G}^*(y) = a{f_G}^*(y).$$

Em geral, dada um aplicação de G-pares $f\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$, então

$${f_G}^*\colon H_G^*(Y,B) \longrightarrow H_G^*(X,A)$$

é um $H^*(BG)$-morfismo. De fato, neste caso devemos considerar produtos cup da forma

$$\cup\colon H_G^*(X) \otimes H_G^*(X,A) \longrightarrow H_G^*(X,A) \;\text{ e }\; \cup\colon H_G^*(Y) \otimes H_G^*(Y,B) \longrightarrow H_G^*(Y.B).$$

1.5 Esferas de cohomologia: teorema de Smith e a fórmula de Borel

Nesta seção definiremos as esferas de cohomologia e apresentaremos dois resultados essenciais quando consideramos ações dos grupos da forma $(\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ e $(S^1)^k$, com $k \geq 1$. Tais resultados são o teorema de Smith e a fórmula de Borel. Maiores detalhes podem sem encontrados no Apêndice A e nas referências (ALLDAY; PUPPE, 1993; DIECK, 1987; HSIANG, 1975). A classe de Euler relativa a uma esfera de cohomologia também será definida.

Definição 1.5.1. Seja (X,A) um par de espaços topológicos no qual X é conexo por caminhos, compacto Hausdorff e A é fechado. Seja $n \geq 0$ um inteiro. O par (X,A) é chamado de **disco em K-cohomologia de dimensão** n se

$$H^q(X,A;K) \cong \begin{cases} K, & \text{se } q = n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Um espaço X é chamado **esfera em K-cohomologia** de dimensão n se

$$H^*(X;K) \cong H^*(S^n;K).$$

Observação 1.5.2. X é uma esfera em K-cohomologia de dimensão n se, e somente se, (CX,X) for um disco em K-cohomologia de dimensão $(n+1)$, no qual CX indica o cone de X, isto é, o conjunto das classes de equivalência da seguinte relação em $X \times [0,1]$: $(x,t) \sim (y,s)$ se, e somente se, $x = y$ e $t = s \in (0,1]$ ou x,y são quaisquer e $t = s = 0$. De fato, basta considerar a sequência exata em cohomologia do par (CX,X).

Notações e convenções:

Trabalharemos com os grupos $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$. Diremos que estamos no caso $p = 2$ quando $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, no caso $p > 2$ quando $G = (\mathbb{Z}_p)^k$ e no caso $p = 0$, quando $G = (S^1)^k$.

Denotaremos por $\mathbb{F}_p$ o corpo finito de p elementos. Quando X for um G-espaço tal que $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, tomaremos $K = \mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_p$ ou $\mathbb{Q}$, respectivamente.

Diremos que um espaço compacto Hausdorff X é uma $(\bmod 2)$-esfera de cohomologia de dimensão n quando $H^*(X;\mathbb{F}_2) \cong H^*(S^n;\mathbb{F}_2)$. Analogamente, diremos que X é uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão n quando $H^*(X;\mathbb{F}_p) \cong H^*(S^n;\mathbb{F}_p)$. No caso em que $H^*(X;\mathbb{Q}) \cong H^*(S^n;\mathbb{Q})$, diremos que X é $(\bmod 0)$-esfera de cohomologia de dimensão n. Em geral, diremos que X é $(\bmod p)$-esfera de cohomologia e distinguiremos os casos escrevendo $p = 2$, $p > 2$ ou $p = 0$.

O teorema a seguir é devido a P. A. Smith (SMITH, 1938), porém estamos seguindo as notas de (DIECK, 1987, Capítulo III, Teoremas 4.22 e 4.23).

Teorema 1.5.3 (Teorema de Smith)**.** Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$ e X um G-espaço compacto, o qual é uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão n. Então,

1. (CX^G, X^G) será um disco em K-cohomologia de dimensão $(r+1)$, com $r+1 \in [0, n+1] \cap \mathbb{Z}$. Se $p \neq 2$ então $n - r$ será par.

2. X^G será uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão r, com $r \in [-1, n] \cap \mathbb{Z}$. Se $p \neq 2$ então $n - r$ será par. Temos $r = -1$ quando $X^G = \emptyset$.

Prova. Veja o Apêndice, Seção A.4. □

Observação 1.5.4. Se $G = (\mathbb{Z}_2)^k$ (ou $(\mathbb{Z}_p)^k$), com $k \geq 1$, então todos os seus subgrupos serão da mesma forma, isto é, $H < G$ então $H \cong (\mathbb{Z}_2)^s$ (ou $(\mathbb{Z}_p)^s$), com $s < k$. Logo, X^H será uma esfera de cohomologia para todo subgrupo $H < G$. Analogamente, para $G = \mathbb{Z}_{(p^k)}$. No caso $(S^1)^k$, consideramos H_0 a componente conexa do elemento neutro em H, assim $H_0 \cong (S^1)^s$ e X^{H_0} será uma esfera de cohomologia. Usualmente, denotaremos a dimensão da esfera de cohomologia X^H por $n(H)$.

O resultado abaixo resume algumas propriedades no estudo do fibrado $X \hookrightarrow X_G \longrightarrow BG$, no qual a fibra típica X é um G-espaço, o qual é uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia. Detalhes dos fatos listados estão no Apêndice, nas Seções A.4 e A.5.

Teorema 1.5.5. Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$ e X um G-espaço, o qual é uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão n. Então temos os seguintes fatos:

1) $H^*_G(CX,X)$ é um $H^*(BG)$-módulo livre gerado por um único elemento $t(X) \in H^{n+1}_G(CX,X)$, conhecido como **classe de Thom**.

2) A inclusão $\iota\colon (CX^G, X^G) \hookrightarrow (CX,X)$ induz um $H^*(BG)$-monomorfismo

$$\iota^*\colon H^*_G(CX,X) \longrightarrow H^*_G(CX^G,X^G)$$

tal que

$$\iota^*(t(X)) = e(X,X^G)t(X^G),$$

nos quais $e(X,X^G) \in H^{n-r}(BG)$ é a **classe de Euler** de (X,X^G) e $t(X^G) \in H^{r+1}_G(CX^G,X^G)$ é a classe de Thom de (CX^G,X^G).

3) Temos o $H^*(BG)$-isomorfismo

$$\frac{H^*(BG)}{(e(X,X^G))} \cong H^*_G(X,X^G),$$

dado por $a + (e(X,X^G)) \mapsto p^*_X(a) \cup j^*(t(X^G))$, no qual $j^*\colon H^*_G(CX,X^G) \longrightarrow H^*_G(X,X^G)$ é induzida da inclusão $j\colon (X,X^G) \longrightarrow (CX,X^G)$.

Observação 1.5.6. Podemos definir, de maneira análoga, uma classe de Euler $e(X^H,X^G) \in H^{n(H)-r}(BG)$. Além disso,

$$H^*_G(X^H,X^G) \cong H^*(BH) \otimes H^*_L(X^H,X^G) \cong H^*(BH) \otimes \frac{H^*(BL)}{e(X^H,X^G)} \cong \frac{H^*(BG)}{e(X^H,X^G)}.$$

Como descrito em (DIECK, 1987, Capítulo III), o matemático A. Borel (BOREL; BREDON, 1960) foi o pioneiro em explorar a estrutura de $H^*(BG)$-módulos dos grupos $H^*_G(X,A)$. A seguir, apresentamos a importante fórmula de Borel, essencial para os resultados do Capítulo 2. Uma demonstração deste resultado é dada no Apêndice, Seção A.5.

Teorema 1.5.7 (Fórmula de Borel)**.** Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$ e X um G-espaço, o qual é uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão n. Suponhamos que X^G seja uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão r. Consideremos a seguinte coleção: $\mathcal{H} = \{H; H < G \text{ e rank H} = k-1\}$ [7]. Temos

$$n - r = \sum_{\substack{H \in \mathcal{H} \\ n(H) > r}} n(H) - r, \tag{1.1}$$

no qual $n(H)$ é a dimensão da esfera de cohomologia X^H. No caso em que $G = (S^1)^k$, consideramos H_0 ao invés de H.

Observe que se $k > 1$ e G atua livremente em X, então $X^H = \emptyset$, para qualquer subgrupo $H < G$ e assim, $r = n(H) = -1$. Portanto, segue da fórmula (1.1) que $n = -1$. Desta forma, qualquer grupo que contenha subgrupos da forma $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ ou $S^1 \times S^1$, não pode atuar livremente sobre uma esfera de cohomologia.

[7] Relembre em Observação 1.1.7

1.6 O índice cohomológico *length*

A ferramenta central deste trabalho no estudo de aplicações equivariantes entre esferas de cohomologia é a teoria de índice cohomológica *length* que foi introduzida por T. Bartsch (BARTSCH, 1993).

Seja G um grupo de Lie compacto. A definição de *length* depende de três objetos:

1. Um conjunto não-vazio $\mathcal{A}$ de G-espaços, por exemplo, o conjunto de todas as órbitas de um G-espaço X.
2. Uma teoria de cohomologia G-equivariante h^*[8], com coeficientes em um anel comutativo R com unidade, que seja multiplicativa (isto é, possui produto cup) e contínua (isto é, satisfaz o axioma da continuidade). Por exemplo, a teoria de cohomologia equivariante de Borel (veja Seção 1.4).
3. Um ideal I no anel de coeficientes $h^*(\star;R)$, no qual $\star$ denota um ponto qualquer.

Observe que para um dado G-par (X,A), a aplicação constante $p_X\colon X \longrightarrow \star$ induz um homomorfismo de anéis $p_X^*\colon h^*(\star;R) \longrightarrow h^*(X;R)$ e teremos uma estrutura de $h^*(\star;R)$-módulo para $h^*(X,A;R)$, dada por $a\cdot\gamma = p_X^*(a)\cup\gamma$ para todo $a \in h^*(\star;R)$ e $\gamma \in h^*(X,A;R)$.

Definição 1.6.1 (length)**.** Sejam G um grupo de Lie compacto, $\mathcal{A}$ um conjunto de G-espaços, $h^*(-;R)$ uma teoria de cohomologia equivariante e $I \subset h^*(\star;R)$ um ideal. O $(\mathcal{A},h^*,I)$-length de um G-par (X,A), é o menor inteiro $k \geq 0$ tal que existem $A_i \in \mathcal{A}$, com $i = 1,\dots,k$, satisfazendo:

$$\begin{aligned}&\forall\,\gamma \in h^*(X,A;R) \text{ e } \forall\,\omega_i \in I \cap \ker\left(h^*(\star;R) \longrightarrow h^*(A_i;R)\right),\\ &\omega_1\cdots\omega_k\cdot\gamma = 0 \in h^*(X,A;R).\end{aligned}$$

Neste caso, usaremos a notação $(\mathcal{A},h^*,I)$-length$(X,A) = k$, ou simplesmente $\ell(X,A) = k$. Caso não exista tal valor k usaremos o símbolo infinito ∞, isto é, $\ell(X,A) = \infty$. No caso em que $A = \emptyset$, denotaremos $(\mathcal{A},h^*,I)$-length$(X,\emptyset)$ por $(\mathcal{A},h^*,I)$-length(X), ou também $\ell(X,\emptyset)$ por $\ell(X)$.

A proposição a seguir discute o comportamento do *length* com relação a certas escolhas do conjunto $\mathcal{A}$. Nota-se que quanto mais elementos em $\mathcal{A}$ menor o valor do *length*, o que em termos práticos não é interessante (veja Proposição 1.6.10).

Proposição 1.6.2 ((BARTSCH, 1993), Capítulo 5, Observação 5.5)**.** Considere duas coleções de G-espaços $\mathcal{A}',\mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, então

$$\ell_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A},h^*,I)\text{-length} \leq \ell_{\mathcal{A}'} = (\mathcal{A}',h^*,I)\text{-length}.$$

[8] Ou seja, uma teoria de cohomologia definida na categoria de G-pares (X,A) que satisfaz os axiomas de Eilenberg-Steenrod, exceto possivelmente o axioma da dimensão.

Se, além disso, para cada $A \in \mathcal{A}$ existir $A' \in \mathcal{A}'$ e uma aplicação G-equivariante $A \longrightarrow A'$, então $\ell_{\mathcal{A}} = \ell_{\mathcal{A}'}$.

Listamos a seguir algumas propriedades do *length*, somente as que serão utilizadas posteriormente no texto.

Teorema 1.6.3 ((BARTSCH, 1993),Capítulo 4, Teorema 4.7)**.** Considere fixada uma tripla $(\mathcal{A}, h^*, I)$.

(1) **Monotonicidade:** Se $f\colon X \longrightarrow Y$ é uma aplicação G-equivariante então $\ell(X) \leq \ell(Y)$.

(2) **Subaditividade:** Seja $X = \operatorname{int}(X') \cup \operatorname{int}(X'')$, nos quais X', X'' são subespaços G-invariantes. Então, $\ell(X) \leq \ell(X') + \ell(X'')$.

(3) **Continuidade:** Se $h^*(-, R)$ é contínua e I é Noetheriano como R-módulo, então qualquer subconjunto fechado X' G-invariante de um G-espaço paracompacto X, tem uma vizinhança aberta G-invariante U tal que $\ell(U) = \ell(X')$.

Observação 1.6.4. As propriedades listadas no Teorema 1.6.3 são aquelas que uma boa teoria de índices deve possuir. Diferentemente das teorias definidas nos trabalhos de Fadell e Husseini (FADELL; HUSSEINI, 1987b; FADELL; HUSSEINI, 1988), entre outros, esta teoria é mais flexível sendo definida para qualquer grupo de Lie compacto e qualquer teoria de cohomologia equivariante.

Observação 1.6.5. Como consequência do Teorema 1.6.3(1), $\ell(X) \leq \ell(\star)$, para todo G-espaço X, basta considerar $X \longrightarrow \star$. Quando $X^G \neq \emptyset$, então temos também uma aplicação G-equivariante $\star \longrightarrow X$ e, portanto, $\ell(X) = \ell(\star)$. Dado um G-espaço compacto X tal que $X^G \neq \emptyset$ e supondo $\{\star\} \notin \mathcal{A}$, segue da Proposição A.2.11, que $(\mathcal{A}, h^*, I)$-length$(X) = \infty$. Por outro lado, (BARTSCH, 1993, Corolário 4.9 (b)) diz que:

> Se X é G-espaço compacto tal que existe aplicação G-equivariante $G(x) \longrightarrow A_x \in \mathcal{A}$ para cada órbita de X, então $(\mathcal{A}, h^*, I)$-length$(X) < \infty$.

Em (BARTSCH, 1993, Capítulo 5, Seção 2), Bartsch apresenta o cálculo do *length* das esferas de representação $S(V)$ dos grupos $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ e $(S^1)^k$, com $k \geq 1$, quando tais representações V são de dimensão finita e livre de pontos fixos por G, isto é, $V^G = \{0\}$.

Teorema 1.6.6 ((BARTSCH; CLAPP, 1990), Proposição 2.4)**.** Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ e $(S^1)^k$, com $k \geq 1$ e V uma representação (ortogonal ou unitária) de dimensão finita para G tal que $V^G = \{0\}$. Consideremos $\mathcal{A} = \{G/H;\, H \subsetneq G \text{ subgrupo fechado}\}$, $h^* = H^*_G(-; K)$ e $I = P^*(G)$, a parte polinomial de $H^*(BG)$.

(1) Caso $p = 2$, temos $\ell(SV) = \dim_{\mathbb{R}} V$.

(2) Caso $p > 2$, temos $\ell(SV) = \dfrac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} V$.

(3) Caso $p = 0$, temos $\ell(SV) = \dfrac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} V$.

Observação 1.6.7. No Capítulo 2, Seção 2.2, calcularemos o *length* de esferas de cohomologia, generalizando o resultado acima.

Definição 1.6.8. Sejam G um grupo de Lie compacto, X, Y G-espaços e $\mathcal{A}$ uma coleção de G-espaços. A $\mathcal{A}$-categoria de um aplicação G-equivariante $f\colon X \longrightarrow Y$ é o menor inteiro $k \geq 0$ tal que existe uma cobertura numerável $\{X_1, \ldots, X_k\}$ de X com a seguinte propriedade:

> Para todo $i = 1, \ldots, k$ existem $A_i \in \mathcal{A}$ e G-aplicações $\alpha_i\colon X_i \longrightarrow A_i$ e $\beta_i\colon A_i \longrightarrow Y$, tais que a restrição $f|_{X_i}\colon X_i \longrightarrow Y$ é G-homotópica a $\beta_i \circ \alpha_i$.

Usaremos a notação $\mathcal{A}$-cat$(f) = k$. Se não existir tal inteiro escreveremos $\mathcal{A}$-cat$(f) = \infty$. A $\mathcal{A}$-categoria de um G-espaço X é o caso particular em que $f = \mathrm{Id}_X$ e será denotado por $\mathcal{A}$-cat(X). O caso especial $\mathcal{A}$-cat$(X \longrightarrow \star)$ é conhecido como $\mathcal{A}$-genus(X).

Observação 1.6.9. Esta definição, originalmente apresentada em (CLAPP; PUPPE, 1986), é uma generalização do conceito de categoria de Lusternik-Schnirelmann (LUSTERNIK; SCHNIRELMANN, 1930), bastando tomar $G = \{e\}, \mathcal{A} = \{\star\}$, exceto que aqui as coberturas são numeráveis e não somente abertas ou fechadas, como classicamente consideradas. Em (CLAPP; PUPPE, 1991, Definição 2.1) uma versão relativa considerando aplicações entre G-pares é apresentada, porém a Definição 1.6.8 acima é suficiente para os nossos propósitos no Capítulo 2, Seção 2.3.1.

Geralmente, o cálculo de valores para categoria, tanto na versão clássica como em suas generalizações, é feito calculando-se valores intermediários de limitantes superiores e inferiores. Como comentado em (BARTSCH, 1993, Seção 4.1), os métodos para computar estimativas superiores são em sua maioria geométricos, construindo-se diretamente coberturas para o espaço estudado. Por outro lado, para limitantes inferiores, técnicas da Topologia Algébrica são empregadas. No caso clássico, o *cup-length*[9] é o limitante mais acessível para a categoria de Lusternik-Schnirelmann (JAMES, 1978). Dessa forma, nada mais natural que definir um limitante inferior para $\mathcal{A}$-cat. Criou-se então o *length*, primeiramente definido em (BARTSCH; CLAPP, 1990; CLAPP; PUPPE, 1991) e, posteriormente, estendido adicionando-se a participação de um ideal I, resultando na definição do $(\mathcal{A}, h^*, I)$-length (Definição 1.6.1).

O *length* é um limitante inferior para $\mathcal{A}$-cat e também $\mathcal{A}$-genus.

[9] O cup-length de um espaço topológico X é o menor número inteiro $r \geq 1$ tal que o produto cup de quaisquer classes de cohomologia $x_1 \cup \ldots \cup x_k \in \tilde{H}^*(X)$ é zero, no qual $\tilde{H}^*(X) = \ker(H^*(X) \longrightarrow H^*(\star))$.

Proposição 1.6.10 ((BARTSCH, 1993), Proposições 2.10 e Corolário 4.9(a))**.** Sejam G um grupo de Lie compacto, X um G-espaço e uma tripla $(\mathcal{A}, h^*, I)$ fixada. Então,

$$(\mathcal{A}, h^*, I)\text{-length}(X) \leq \mathcal{A}\text{-genus}(X) \leq \mathcal{A}\text{-cat}(X).$$

Um importante caracterização do $\mathcal{A}$-genus é dada a seguir. Esta será a principal técnica para encontrarmos condições suficientes para a existência de aplicações equivariantes entre uma esfera de cohomologia e uma esfera de representação no caso $G = (\mathbb{Z}_p)^k$, $k \geq 1$, como pode ser visto no Capítulo 2, Seção 2.3.

Proposição 1.6.11 ((BARTSCH, 1993), Capítulo 2, Proposição 2.9)**.** O $\mathcal{A}$-genus de um espaço X é o menor inteiro $k \geq 0$ tal que existe uma aplicação G-equivariante $X \longrightarrow A_1 \star \cdots \star A_k$, nos quais $A_i \in \mathcal{A}$, com $i = 1, \ldots, k$.

Para determinarmos o valor de $\mathcal{A}$-cat(X), no Capítulo 2, Seção 2.3.1, no caso em que X é uma (mod p)-esfera de cohomologia tal que $G = (\mathbb{Z}_p)^k$, $k \geq 1$, e

$$\mathcal{A} = \{G/H;\ H \subsetneq G \text{ subgrupo fechado}\},$$

o resultado a seguir é essencial.

Teorema 1.6.12 ((BARTSCH, 1993), Capítulo 2, páginas 16 e 17)**.** Seja X um espaço paracompacto G-ANR[10]. Seja $\mathcal{A}_X = \{G/G_x;\ x \in X\}$ o conjunto das órbitas de X. Então,

$$\mathcal{A}_X\text{-cat}(X) \leq (\dim(X/G) + 1) \cdot \max_{H \subset G} c(H),$$

no qual $c(H)$ é o número de componentes conexas de $\dfrac{X^H}{NH}$, para H subgrupo fechado de G.

Observação 1.6.13. Como $\mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$-cat$(X) \leq \mathcal{A}_X$-cat(X), para qualquer G-espaço paracompacto X.

[10] Veja Definição A.1.1, Apêndice.

Capítulo 2

O *length* de (mod p)-esferas de cohomologia e aplicações

O grupo G denotará um dos grupos p-toros $(\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$.

Neste capítulo apresentaremos os resultados provenientes do estudo sobre o *length* de um G-espaço X quando este for uma (mod p)-esfera de cohomologia de dimensão n. Na Seção 1, exibimos um limitante inferior para o *length* de um G-espaço compacto. Este limitante é expressado com relação aos subtoros de rank $k-1$ de G e terá sutil importância, em alguns resultados, quando tratarmos o caso $p > 2$, isto é, $G = (\mathbb{Z}_p)^k$. Na Seção 2, veremos que aplicando a Fórmula de Borel (Teorema 1.5.7), podemos calcular o *length* para um par de (mod p)-esferas de cohomologia (X, X^G), generalizando os cálculos anteriormente obtidos por T. Bartsch e M. Clapp em (BARTSCH; CLAPP, 1990), para esferas de representação (veja Teorema 1.6.6). No final desta seção, como consequência imediata da monotonicidade do *length*, uma versão do teorema de Borsuk-Ulam é obtida (veja o Corolário 2.2.4). A Seção 4 é destinada a mostrar a existência de uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^k$-equivariante entre uma (mod p)-esfera de cohomologia X e uma esfera de representação SV, sob certas hipótese em X e V, se e somente se, $\dim X^H \leq \dim SV^H$, para todo subtoro H de rank $k-1$ tal que $X^H \neq \emptyset$ (veja o Teorema 2.3.1). Para isso calcularemos o $\mathcal{A}$-genus(X), para o caso $p > 2$, na Subseção 2.3.1.

2.1 Um limitante inferior para o *length*.

O cálculo do *length* de um G-espaço X depende da escolha de uma tripla $(\mathcal{A}, h^*, I)$ (veja a Definição 1.6.1). Quando $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$, faremos as seguintes escolhas: a teoria de cohomologia h^* adotada será H^*_G, isto é, a teoria de cohomologia equivariante de Borel definida na Seção 1.4; o conjunto $\mathcal{A} = \{G/H;\ H \subsetneq G \text{ subgrupo fechado}\}$ e I será um ideal da parte polinomial $P^*(G)$ do anel $H^*(BG)$ (veja a Proposição 1.4.7).

Observe que estamos omitindo o anel de coeficientes K quando escrevemos o anel de cohomologia $H^*_G(-)$. Vale relembrar que quando $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, o anel K será $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_p$ e $\mathbb{Q}$, respectivamente.

Como visto na Observação 1.4.11, dado um G-espaço paracompacto X, a aplicação constante $X \longrightarrow \star$ induz uma estrutura de $H^*(BG)$-módulo sobre $H^*_G(X)$ através do $H^*(BG)$-homomorfismo $p^*_X\colon H^*(BG) \longrightarrow H^*_G(X)$. Essencialmente, o cálculo do *length* de X se resume a encontrar um "menor" elemento $z \in \ker[p^*_X\colon H^*(BG) \longrightarrow H^*_G(X)]$ que pode ser descrito como produto dos geradores de certos ideais $I \cap \ker[(H^*(BG) \longrightarrow H^*(BH))]$, para espaços homogêneos $G/H \in \mathcal{A}$. O termo "menor" indica o número de fatores neste produto.

Assim, em vista da definição de *length*, nos compete o estudo dos núcleos de $H^*(BG)$-homomorfismos $H^*(BG) \longrightarrow H^*(BH)$, induzidos pelas aplicações $G/H \longrightarrow G/G$. Para tanto, iremos utilizar um resultado de caráter mais geral e que pode ser encontrado em (FADELL; HUSSEINI, 1988, Proposição 3.1).

Observação 2.1.1. Na Proposição 2.1.3 a seguir, a expressão "sob certas condições de finitude", se refere às hipóteses necessárias para que possamos aplicar a fórmula de Künneth.

Lema 2.1.2 (Fórmula de Künneth, (HATCHER, 2002, Teorema 3.15 e comentário pg. 357))**.** Sejam X, Y dois espaços paracompactos no qual $H^k(Y;R)$ é livre e finitamente gerado sobre R, em todo nível k. Consideremos as projeções canônicas $\pi_1\colon X \times Y \longrightarrow X$ e $\pi_2\colon X \times Y \longrightarrow Y$. Então,

$$H^*(X) \otimes H^*(Y) \longrightarrow H^*(X \times Y)$$

é R-isomorfismo, dada por $x \otimes y \mapsto \pi_1^*(x) \cup \pi_2^*(y)$.

No caso particular em que $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$, o anel $H^*(BG;K)$ é um K-espaço vetorial tal que em cada nível k, $H^k(BG)$ é livre e finitamente gerado sobre K.

Proposição 2.1.3 ((FADELL; HUSSEINI, 1988, Proposição 3.1))**.** Dados dois grupos de Lie compactos G_1, G_2, uma G_1-aplicação $p_{X_1}\colon X_1 \longrightarrow B_1$ e uma G_2-aplicação $p_{X_2}\colon X_2 \longrightarrow B_2$, vamos assumir que os espaços envolvidos sejam paracompactos. Então, $G = G_1 \times G_2$ atua em $X = X_1 \times X_2$ e em $B = B_1 \times B_2$ através da ação diagonal, isto é, coordenada a coordenada. Sob certas condições de finitude temos

$$\ker p^*_X = \ker(p^*_{X_1}) \otimes_K H^*_{G_2}(B_2;K) + H^*_{G_1}(B_1;K) \otimes_K \ker(p^*_{X_2}),$$

com $p_X = p_{X_1} \times p_{X_2}$, no qual K é um corpo.

Especializando a proposição anterior para o nosso contexto, obteremos importantes informações para trabalharmos com o *length* posteriormente. O primeiro corolário, nos fornece uma maneira elementar de se verificar que o ideal $I \cap \ker[H^*(BG) \longrightarrow H^*(BH)]$ é principal, quando H é subtoro de rank $k-1$.

Corolário 2.1.4. Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, para $k \geq 1$. Então, dado um subtoro H de G temos

$$\ker[H^*(BG) \longrightarrow H^*(BH)] \cong H^*(BH) \otimes_K \ker(p_L^*),$$

no qual L é isomorfo a G/H e $p_L\colon L \longrightarrow \star$ é uma aplicação L-equivariante.

Prova. Como H é subtoro de G, digamos de rank $r \leq k-1$, temos $G \cong H \times L$, no qual $L \cong G/H$.

Pela Observação 2.1.1, podemos aplicar a Proposição 2.1.3 com $G_1 = H$, $G_2 = L$, $X_1 = B_1 = B_2 = \star$ e $X_2 = L$. Temos a aplicação H-equivariante $p\colon \star \longrightarrow \star$ e a aplicação L-equivariante $p_L\colon L \longrightarrow \star$. Identificando a aplicação $H \times L$-equivariante $p \times p_L\colon \star \times L \longrightarrow \star \times \star$ com a aplicação G-equivariante $p_{G/H}\colon G/H \longrightarrow \star$, obtemos

$$\ker p_{G/H}^* = \ker(p^*) \otimes H^*(BL) + H^*(BH) \otimes \ker(p_L^*).$$

Como $p^* = \mathrm{Id}_{H^*(BH)}$, temos $\ker p^* = 0$. Portanto, $\ker p_{G/H}^* = H^*(BH) \otimes \ker p_L^*$. $\square$

Uma vez que os anéis $H^*(BG)$ são polinomiais ou contém uma parte polinomial (caso $p > 2$), cabe uma interpretação do Corolário 2.1.4 nestes termos.

Observação 2.1.5 (Interpretação sobre polinômios)**.**

1. **Caso** $p = 0$**.** Temos $H^*(BG;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_k]$, com cada t_i representando um gerador em $H^2(BG;\mathbb{Q})$. Dado um subtoro H de rank $k-1$, podemos escrever $G \cong H \times L$, no qual $L \cong G/H \cong S^1$. Para estes subtoros, teremos $\mathbb{Q}$-isomorfismos $H^*(BH;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[s_1, \ldots, s_{k-1}]$ e $H^*(BL;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[s]$. Pela fórmula de Künneth, obtemos

   $$H^*(BG;\mathbb{Q}) \cong H^*(BH;\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(BL;\mathbb{Q})$$

   e este corresponde a um isomorfismo $\varphi\colon \mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_k] \longrightarrow \mathbb{Q}[s_1, \ldots, s_{k-1}, s]$. A aplicação L-equivariante $L \longrightarrow \star$ induz $p_L^*\colon H^*(BL;\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(\star;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$, que tem núcleo $(s) \in \mathbb{Q}[s] \cong H^*(BL;\mathbb{Q})$. Assim, segue do Corolário 2.1.4 que o núcleo da aplicação $H^*(BG;\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(BH;\mathbb{Q})$, induzida da aplicação G-equivariante $G/H \longrightarrow \star$, corresponde ao ideal gerado por (s) em $\mathbb{Q}[s_1, \ldots, s_{k-1}, s]$, que por sua vez corresponde ao ideal gerado por $(\varphi^{-1}(s))$ em $\mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_k] \cong H^*(BG;\mathbb{Q})$. Note que $\varphi^{-1}(s)$ é levado a um elemento em $H^2(BG;\mathbb{Q})$ e o denotaremos por s_H. Mais ainda, dado um elemento $z \in \ker[H^*(BG) \longrightarrow H^*(BH)]$, este será múltiplo de s_H.

2. **Caso** $p = 2$**.** A discussão é inteiramente análoga à anterior, exceto que o gerador do núcleo corresponde a um elemento em $H^1(BG;\mathbb{F}_2)$.

3. **Caso $p > 2$.** Temos $H^*(BG;\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[t_1,\ldots,t_k] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda(s_1,\ldots,s_k)$, com cada t_i correspondendo a um elemento em $H^2(BG;\mathbb{F}_p)$ e cada s_i correspondendo a um elemento em $H^1(BG;\mathbb{F}_p)$ tal que $s_i^2 = 0$. Relembre que $P^*(G) = \mathbb{Z}_p[t_1,\ldots,t_k]$. Dado o subtoro H de rank $k-1$ de G, temos $G \cong H \times L$ com $L = G/H \cong \mathbb{Z}_p$. Também temos os $\mathbb{Z}_p$-isomorfismos

$$H^*(BH;\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[x_1,\ldots,x_{k-1}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda(y_1,\ldots,y_{k-1}) \text{ e } H^*(BL;\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[u] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda(v).$$

O núcleo de $H^*(BL;\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^*(\star;\mathbb{Z}_p)$ corresponde ao ideal gerado por (u,v). Segue do Corolário 2.1.4, que o núcleo de $H^*(BG;\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^*(BH;\mathbb{Z}_p)$ corresponde ao ideal gerado por $(\varphi^{-1}(u),\varphi^{-1}(v))$, no qual pela fórmula de Künneth, temos o isomorfismo

$$\mathbb{Z}_p[t_1,\ldots,t_k] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda(s_1,\ldots,s_k) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_p[x_1,\ldots,x_{k-1}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda(y_1,\ldots,y_{k-1}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\mathbb{Z}_p[u] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda(v)).$$

E, por sua vez, $P^*(G) \cap \ker(H^*(BG;\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^*(BH;\mathbb{Z}_p))$ corresponde ao ideal $(\varphi^{-1}(u))$, o qual é associado a um elemento $s_H \in P^*(G) \cap H^2(BG;\mathbb{Z}_p)$.

Podemos argumentar de maneira análoga para os subtoros de rank $r \leq k$ e concluir que os núcleos estudados são gerados por $k-r$ elementos. Mais ainda, em (ALLDAY; PUPPE, 1993, Capítulo 3, Seção 1, Definição 3.1.4) e (HSIANG, 1975, Capítulo IV, Seção 2, Proposição 3) descreve-se:

dado um subtoro $K < G$, o ideal primo $PK = P^*(G) \cap \ker[H^*(BG) \longrightarrow H^*(BK)]$ é gerado por polinômios homogêneos lineares. Além disso, se J é um ideal primo em $P^*(G)$, então o ideal gerado por $J \cap (t_1,\ldots,t_k)$ é PK, para algum subtoro $K < G$.

Observe que todo subtoro K em G está contido em algum subtoro de rank $k-1$, digamos K'. Desta forma, $PK \supseteq PK' = (s_{K'})$. Assim, se $J = (a)$ é um ideal gerado por um fator linear irredutível, devemos ter $(a) = (s_{K'})$, para algum K' subtoro de rank $k-1$. Em outras palavras, os subtoros de rank $k-1$ estão em correspondência biunívoca com os fatores lineares irredutíveis em $P^*(G)$.

Corolário 2.1.6. Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, para $k \geq 1$ e X um G-espaço compacto. Então, dado um subtoro H de G temos

$$\ker(p^*_{X^H}) = H^*(BH) \otimes \ker(q^*_{X^H}),$$

nos quais $p_{X^H}\colon X^H \longrightarrow \star$ é uma aplicação G-equivariante e $q_{X^H}\colon X^H \longrightarrow \star$ é uma aplicação $L \cong G/H$-equivariante.

Prova. Na Proposição 2.1.3, consideremos

$$G_1 = H,\ G_2 = L = G/H,\ X_2 = X^H,\ X_1 = B_1 = B_2 = \star.$$

Como $X_1 = B_1 = \star$, temos as condições de finitudes satisfeitas para aplicar a proposição. A aplicação $G \cong H \times L$-equivariante $p_{X^H}\colon X^H \longrightarrow \star$ é identificada com $\star \times X^H \longrightarrow \star \times \star$, o produto entre a aplicação H-equivariante $\mathrm{Id}_H\colon \star \longrightarrow \star$ e a aplicação $L = G/H$-equivariante $q_{X^H}\colon X^H \longrightarrow \star$. Como $\ker \mathrm{Id}^*_H = 0$, teremos $\ker p^*_{X^H} = H^*(BH) \otimes \ker(q^*_{X^H})$. □

Para facilitar a escrita do enunciado do teorema a seguir iremos adotar as seguintes notações:

Considere $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$.

• Dado um G-espaço compacto X, denotaremos $(\mathcal{A}, H^*_G, I)$-length(X) simplesmente por $\ell(X)$, no qual $\mathcal{A}$ é o conjunto das órbitas do G-espaço X.

• Dado um subgrupo H de G, considere $\mathcal{A}_H$ o conjunto das órbitas do G/H-espaço X^H, então denotaremos $(\mathcal{A}_H, H^*_{G/H}, I_H)$-length$(X^H)$ simplesmente por $\ell_H(X^H)$.

***Teorema 2.1.7** (Limitante inferior do *length* para p-toros)**.** Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$, e X um G-espaço compacto tal que $X^G = \emptyset$. Temos

$$\sum_H \ell_H(X^H) \leq \ell(X),$$

nos quais H percorre todos os subtoros de rank $k-1$ de G tais que $X^H \neq \emptyset$.

Prova. Vamos supor $p > 2$. Em vista da Proposição 1.6.2, tomaremos

$$\mathcal{A} = \{G/H;\ \text{rank}\ H = k-1\}\ \text{e}\ \mathcal{A}_H = \{G/H\}.$$

Para o cálculo do *length* consideraremos o ideal I correspondente ao ideal

$$(t_1, \ldots, t_k) \subset \mathbb{Z}_p[t_1, \ldots, t_k] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda(s_1, \ldots, s_k)] \cong H^*(BG; \mathbb{Z}_p).$$

Vamos supor que $\{H_1, \ldots, H_s\}$ sejam todos os subtoros de rank $k-1$ em G tais que $X^H \neq \emptyset$. Fixe H um subtoro de rank $k-1$. Então, $G/H \longrightarrow X^H \hookrightarrow X \longrightarrow \star$ induz o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
H^*(BG;\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "i_H^*"] \arrow[d, "p_X^*"] \arrow[dr, "p_{X^H}^*"] & H^*(BH;\mathbb{Z}_p) \\
H^*_G(X;\mathbb{Z}_p) \arrow[r] & H^*_G(X^H;\mathbb{Z}_p) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Portanto, $\ker p_X^* \subseteq \ker p_{X^H}^* \subseteq \ker i_H^*$.

Pela Observação 2.1.5, sabemos que $I \cap \ker i_H^* = (s_H)$. Do Corolário 2.1.6 temos

$$\ker p_{X^H}^* = H^*(BH; \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \ker q_{X^H}^*.$$

Vamos analisar $\ker q_{X^H}^*$.

Temos $q_{X^H} : X^H \longrightarrow \star$ é G/H-aplicação que induz

$$q_{X^H}^* : H^*(B(G/H); \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[t] \otimes \Lambda(s) \longrightarrow H^*_{G/H}(X^H)$$

e associamos t ao elemento $s_t \in H^2(B(G/H);\mathbb{Z}_p)$. Como X^H é G/H-espaço compacto, segue da Observação 1.6.5 que $\ell_H(X^H) = r < \infty$. Portanto, da definição de *length* e tomando $I_H = (s_t)$, temos $s_t^r 1_{X^H} = 0 \in H^*_{G/H}(X^H)$.

Note que escrevendo $L = G/H$ então $\ker[H^*(B(G/H);\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^*(\star;\mathbb{Z}_p)] = \ker p_L^*$ fica como no Corolário 2.1.4, e que portanto o elemento s_t corresponde a s_H em $H^*(BG;\mathbb{Z}_p)$.

O elemento $e_H = s_H^r$ pertence ao ideal $I \cap \ker p^*_{X^H}$, pois corresponde a s_t^r. Além disso, um elemento em $I \cap \ker p^*_{X^H}$ corresponde a um elemento em $H^*(BH) \otimes (s_t^r)$, então é múltiplo de e_H em $H^*(BG;\mathbb{Z}_p)$. Logo $I \cap \ker p^*_{X^H} = (e_H)$.

Assim, $\ker p_X^* \subseteq (e_H)$.

Como H é um subtoro de rank $k-1$ arbitrário, temos $\ker p_X^* \subseteq (e_{H_i})$, para $i = 1, \ldots, s$. Dado um elemento $z \in I \cap \ker p_X^*$, este corresponde a um elemento polinomial múltiplo dos polinômios $t_i^{\ell_{H_i}(X^{H_i})}$. Como $t_i | t_j$ se, e somente, se $i = j$, o polinômio será múltiplo de $t_1^{\ell_{H_1}(X^{H_1})} \ldots t_s^{\ell_{H_s}(X^{H_s})}$. Isto é, z é múltiplo de $e_{H_1} \ldots e_{H_s}$ em $H^*(BG;\mathbb{Z}_p)$.

Assim, dados $\omega_i \in I \cap \ker[H^*(BG) \longrightarrow H^*(BH_i)]$, o elemento $\omega = \omega_1^{k_1} \ldots \omega_s^{k_s}$ tal que $\omega 1_X = 0 \in H^*(BG;\mathbb{Z}_p)$ pertence a $I \cap \ker p_X^*$ e, portanto, é múltiplo de $e_{H_1} \ldots e_{H_s}$. Logo, $k_i \geq \ell_{H_i}(X^{H_i})$, para todo $i = 1, \ldots, s$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{s} \ell_{H_i}(X^{H_i}) \leq \ell(X).$$

Para $p = 2$, tomamos $I = H^*(BG;\mathbb{Z}_2)$ e $I_H = H^*(B(G/H);\mathbb{Z}_2)$ e, no caso $p = 0$, consideramos $I = H^*(BG;\mathbb{Q})$ e $I_H = H^*(BH;\mathbb{Q})$. Para ambos os casos, o raciocínio é o mesmo que em $p > 2$ □

No caso $p > 2$, a proposição anterior nos fornece um critério para saber quando o núcleo $\ker p_X^*$ contém um elemento polinomial em $H^*(BG;\mathbb{Z}_p)$.

***Corolário 2.1.8.** Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$, e X um G-espaço compacto tal que $X^G = \emptyset$. São equivalentes:

i) $\ell(X) = \sum_H \ell(X^H)$.

ii) $e_{H_1} \ldots e_{H_s} \in \ker p_X^*$.

Relembrando que $P^*(G)$ denota a parte polinomial do anel $H^*(BG)$ e, que para $p = 0$, devemos considerar as componentes conexas dos elementos neutros dos subtoros envolvidos.

Prova. Se $\ell(X) = \sum_H \ell(X^H)$, seja $z \in \ker p_X^*$ um elemento polinomial satisfazendo a definição de *length* para X. Este elemento é dividido por $e = e_{H_1} \ldots e_{H_s}$. Como e tem $\sum_H \ell(X^H)$ fatores em sua decomposição, segue que $z = ue$, com u uma unidade em $H^*(BG)$. Portanto, $e \in \ker p_X^*$.

Por outro lado, se $e_{H_1}\dots e_{H_s}\in\ker p_X^*$, então $\ell(X)\le\sum_H \ell(X^H)$ e a igualdade segue do Teorema 2.1.7.

□

Observação 2.1.9. Seria interessante encontrar exemplos, caso existam, nos quais a desigualdade do teorema anterior seja estrita. Quando a igualdade é válida, temos $P^*(G)\cap\ker p_X^*$ um ideal principal gerado por $e=e_{H_1}\dots e_{H_s}$. Será que temos a recíproca, isto é, quando $P^*(G)\cap\ker p_X^*$ for ideal principal, podemos afirmar igualdade na relação acima? Segue da fórmula de Borel (Teorema 1.5.7), que nos casos $p=0,2$, para esferas de cohomologia isto é verdade.

2.2 O *length* de uma (mod p)-esfera de cohomologia.

Em (BARTSCH; CLAPP, 1990), T. Bartsch e M. Clapp calcularam o *length* de SV, quando V é uma representação de dimensão finita para os casos $G=(\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ e $(S^1)^k$ tais que $V^G=\{0\}$. Os valores estão enunciados no Teorema 1.6.6.

Nesta seção, apresentamos uma generalização para o caso de (mod p)-esferas de cohomologia, considerando também pontos fixados pela ação do grupo.

Fixemos uma tripla $(\mathcal{A},h^*,I)$, como na seção anterior, isto é,

- $\mathcal{A}=\{G/H;\ H\subsetneq G$ subgrupo fechado$\}$.
- h^* será a cohomologia equivariante de Borel $H_G^*(-)$.
- O ideal I será o ideal gerado pela parte polinomial dos núcleos de $H^*(BG)\longrightarrow H^*(BH)$, com $H<G$ subtoro de rank $k-1$ de G.

Segue da Proposição 1.6.2, que podemos substituir $\mathcal{A}$ por $\{G/H;\ H$ subtoro de rank $k-1\}$. Iremos indicar $(\mathcal{A},H_G^*,I)$-length(X,X^G) simplesmente por $\ell(X,X^G)$.

***Lema 2.2.1.** Sejam $G=(\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k\ge 1$, X um G-espaço que é uma (mod p)-esfera em cohomologia de dimensão n.

a) Se $p=0,2$, então $A=\{a\in H^*(BG);\ a\gamma=0$ para todo $\gamma\in H_G^*(X,X^G)\}=(e(X,X^G))$.

b) Se $p>2$, então $A\cap I=\{a\in H^*(BG);\ a\gamma=0$ para todo $\gamma\in H_G^*(X,X^G)\}$ é não trivial sempre. Mas quando $e=e(X,X^G)$ corresponde a um elemento polinomial, teremos $A\cap I=(e)$.

Prova. Sabemos que $H^*(BG)$ fornece uma estrutura de módulo para $H_G^*(X,X^G)$ através da aplicação $p_X^*\colon H^*(BG)\longrightarrow H_G^*(X)$ e do produto cup $\cup\colon H_G^*(X)\otimes H_G^*(X,X^G)\longrightarrow H_G^*(X,X^G)$.

De Proposição A.5.1, temos o isomorfismo de $H^*(BG)$-módulos

$$\psi\colon H^*(BG)/(e)\longrightarrow H_G^*(X,X^G),$$

dado por $\psi(a+(e)) = p_X^*(a) \cup j^*(t(X^G))$, nos quais $j\colon (X,X^G) \hookrightarrow (CX,X^G)$ e $t(X^G)$ é a classe de Thom de (CX,X^G).

a) Temos $\psi^{-1}(p_X^*(e)\cup\gamma) = e\psi^{-1}(\gamma) = 0$. Então, $p_X^*(e)\cup\gamma = 0 \in H_G^*(X,X^G)$, para todo $\gamma \in H_G^*(X,X^G)$. Portanto $(e) \subseteq A$.

   Por outro lado, dado $\omega \in A$, teremos
$$\psi(\omega+(e)) = p_X^*(\omega)\cup j^*(t(X^G)) = 0.$$
   Portanto, $\omega+(e) = (e)$, isto é, $\omega \in (e)$. Então, $A \subseteq (e)$.

b) Pelo item a), teremos também $A = (e)$. Caso $e(X,X^G)$ tenha parte nilpotente não-nula, isto é, $e = z+n$, então $z^2 = (z-n)(z+n) = (z-n)e$ é um elemento não-nulo em $A\cap I$, assim $A\cap I \neq \{0\}$. Caso contrário, $e \in I$ e, portanto, $A\cap I = (e)$.

□

Para calcularmos o *length* $\ell(X,X^G)$, deveremos encontrar o menor inteiro s tal que qualquer produto $\omega = \omega_1\ldots\omega_s \in H^*(BG)$, nos quais $\omega_i \in I\cap\ker[H^*(BG) \longrightarrow H^*(BH_i)]$ e $G/H_i \in \mathcal{A}$, satisfazem $p_X^*(\omega_1)\cup\ldots\cup p_X^*(\omega_s)\cup 1_{(X,X^G)} = 0 \in H_G^*(X,X^G)$.

Então, do Lema 2.2.1 concluímos que, dado um elemento que satisfaça a definição de length, este é múltiplo da classe de Euler. No caso em que a classe de Euler for polinomial, o que sempre acontecerá quando $p = 0,2$, esta será o menor elemento polinomial satisfazendo a definição de *length*.

Na demonstração da fórmula de Borel (veja Apêndice, Seção A.5), obtêm-se uma decomposição da classe de Euler nos casos $p = 0,2$ e uma decomposição da parte polinomial desta classe, quando $p > 2$. Aplicando este fato, provaremos o seguinte teorema.

***Teorema 2.2.2** (*Length* de esfera de cohomologia). Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$, X um G-espaço que é uma (mod p)-esfera de cohomologia de dimensão n e X^G uma (mod p)-esfera de cohomologia de dimensão r. Então:

1. Se $G = (S^1)^k$,
$$\ell(X,X^G) = \frac{n-r}{2}.$$
2. Se $G = \mathbb{Z}_2^k$,
$$\ell(X,X^G) = n-r.$$
3. Se $G = \mathbb{Z}_p^k$,
$$\ell(X,X^G) = \frac{n-r}{2},$$
   quando $e = e(X,X^G)$ for polinomial. Em geral, temos
$$\frac{n-r}{2} \leq \ell(X,X^G) \leq n-r.$$

Prova.

1. Para qualquer subtoro H de rank $k-1$, teremos $(s_H) = I \cap \ker[H^*(BG;\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(BH;\mathbb{Q})]$, no qual $s_H \in H^2(BG;\mathbb{Q})$ (veja Observação 2.1.5).

   Dados $H_1,\dots,H_s \in \mathcal{A}$ e $\omega_i \in (s_{H_i}) = I \cap \ker[H^*(BG) \longrightarrow H^*_G(BH_i)]$, $i = 1,\dots,s$, o produto $\omega = \omega_1 \cdots \omega_s$ será um elemento em $H^{2s}(BG)$. Se $\omega\gamma = 0$, para todo $\gamma \in H^*_G(X,X^G)$, segue do Lema 2.2.1 que $\omega \in (e)$ e, então, $2s \geq n-r$, pois $e \in H^{n-r}(BG;\mathbb{Q})$. Assim, quando $s < \dfrac{n-r}{2}$, temos $\omega\gamma \neq 0$, para algum γ. Portanto, $\ell(X) \geq \dfrac{n-r}{2}$.

   Por outro lado, pela fórmula de Borel (Teorema 1.5.7), temos $e = (s_{H_1})^{k_1} \cdots (s_{H_s})^{k_s}$, nos quais H_i são subtoros de rank $k-1$ tais que $n(H_i) > r$ e $k_i = \dfrac{n(H_i)-r}{2}$. Escolhemos k_i vezes $G/H_i \in \mathcal{A}$, $i = 1,\dots,s$. Para todos

   $$\omega^i_1,\dots,\omega^i_{k_i} \in (s_{H_i}) \in I \cap \ker[H^*(BG) \longrightarrow H^*(G/H_i)],$$

   com $i = 1,\dots,s$, deveremos ter $\omega = \prod_{i=1}^s \omega^i_1 \dots \omega^i_{k_i} \in (e)$. Então, segue do Lema 2.2.1 que $\omega \cdot \gamma = 0 \in H^*_G(X,X^G)$, para todo $\gamma \in H^*_G(X,X^G)$. Note que $k_1 + \cdots + k_s = \dfrac{n-r}{2}$, assim $\ell(X,X^G) \leq \dfrac{n-r}{2}$.

2. Neste caso, $s_H \in H^1(BG;\mathbb{Z}_2)$, para todo subtoro H de rank $k-1$ tal que $n(H) > r$.

   Dados $H_1,\dots H_s \in \mathcal{A}$ e $\omega_i \in (s_{H_i}) = I \cap \ker[H^*(BG) \longrightarrow H^*_G(BH_i)]$, $i = 1,\dots,s$, o produto $\omega = \omega_1 \cdots \omega_s$ será um elemento em $H^s(BG)$. Se $\omega\gamma = 0$, para todo $\gamma \in H^*_G(X,X^G)$, então do Lema 2.2.1, $\omega \in (e)$ e assim $s \geq n-r$, pois $e \in H^{n-r}(BG;\mathbb{Q})$. Portanto, $\ell(X,X^G) \geq n-r$.

   Por outro lado, pela fórmula de Borel, teremos

   $$\omega = \prod_{i=1}^{s} \omega^i_1 \dots \omega^i_{k_i} \in (e),$$

   com $k_i = n(H_i) - r$. Portanto, $\ell(X,X^G) = k_1 + \cdots + k_s = n-r$.

3. Quando $p > 2$ e $X^G \neq \emptyset$, a classe de Euler $e = e(X,X^G)$ se escreve como $z+n$, com z parte polinomial não nula e n uma parte nilpotente podendo ser nula.

   Caso e seja polinomial, isto é, $e = z$, fazemos como nos casos $p = 0,2$ e concluímos que $\ell(X,X^G) = \frac{n-r}{2}$.

   Caso contrário, quando $e = z+n$, temos $z^2 = e(z-n)$ e, portanto, como temos $\frac{n-r}{2}$ elementos na decomposição de z, teremos o dobro em z^2, logo $\ell(X,X^G) \leq n-r$.

□

Observação 2.2.3. Seria possível encontrar um exemplo de uma $\mathbb{Z}_p$-esfera de cohomologia com classe de Euler não-polinomial? No caso absoluto, com X um espaço G-ANR iremos encontrar $\ell(X) = \frac{n+1}{2}$, para $p > 2$ (veja Seção 4, Corolário 2.3.15).

Em (BŁASZCZYK; MARZANTOWICZ; SINGH, 2015, Proposição 3.6), os autores mostram que é possível estimar por baixo o *length* de um G-espaço compacto X (ou paracompacto com dimensão por cobertura finita) que satisfaz $H^i(X) = 0$, quando $0 < i < n$. A saber, $\ell(X) \geq n+1$, se $p = 2$ e, $\ell(X) \geq \dfrac{n+1}{2}$, quando $p \neq 2$. Nada podemos dizer com relação a um limitante superior de $\ell(X)$, exceto quando X é G-ANR e, então, pelo Teorema 1.6.12, temos $\ell(X) \leq (\dim(X/G)+1)\cdot \max_{H\subset G} c(H)$. Claro que esta estimativa só é útil quando conhecemos o valor de $\max_{H\subset G} c(H)$. No caso, particular em que X é uma $(\mathrm{mod}\ p)$-esfera de cohomologia, com $p \geq 2$, temos $c(H) = 1$, para todo $H < G$ (veja Proposição 2.3.3).

No caso particular em que $X^G = \emptyset$, como consequência imediata da monotonicidade do *length*, temos a seguinte versão do teorema de Borsuk-Ulam.

***Corolário 2.2.4** (Teorema de Borsuk-Ulam)**.** Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$ e X, Y duas $(\mathrm{mod}\ p)$-esferas de cohomologia de dimensões n e m, respectivamente. Suponhamos que $X^G = Y^G = \emptyset$. Se existir uma aplicação G-equivariante $f\colon X \longrightarrow Y$, então

$$\dim X^H \leq \dim Y^H, \ \text{ para todo subtoro } \ H < G \ \text{ de rank } \ k-1.$$

Em particular, $n \leq m$. Logo, se $n > m$, não existirá aplicação G-equivariante de X em Y.

Prova. Note que a aplicação $f^H := f|_{X^H}\colon X^H \longrightarrow Y^H$ é G/H-equivariante, para $H < G$. Quando H for um subtoro de rank $k-1$, então G/H será um p-toro 1-dimensional. Da monotonicidade do *length*, teremos $\ell_H(X^H) \leq \ell_H(Y^H)$, no qual ℓ_H denota $(\mathcal{A}_H, H^*_{G/H}, I_H)$-length como no Teorema 2.1.7.

Observe que no caso $p > 2$, a classe de Euler para a esfera de cohomologia X^H, denotada por e_H, é um elemento em $H^{n(H)+1}(B(G/H);\mathbb{Z}_p)$. Como $G/H \cong \mathbb{Z}_p$ e $n(H)+1$ é par, segue que $e_H = (s_H)^{\frac{n(H)+1}{2}}$ é polinomial e daí $\ell_H(X^H) = \frac{n(H)+1}{2}$. Analogamente para Y^H.

Assim, a primeira parte do resultado segue do Teorema 2.2.2.

Agora, se temos $n > m$, deveremos ter $\dim X^H > \dim Y^H$, para algum subtoro H de rank $k-1$, pois $n+1 = \sum_H(\dim X^H + 1) > \sum_H(\dim Y^H + 1) = m+1$, pela fórmula de Borel (Teorema 1.5.7). Portanto, não existirá uma aplicação G-equivariante de X em Y. □

Observação 2.2.5. Existem inúmeras versões e generalizações do teorema de Borsuk-Ulam. O objetivo do Corolário 2.2.4 foi de ilustrar uma importante aplicação do cálculo do length. Em (CLAPP; PUPPE, 1991, Teorema 6.4), Clapp e Puppe garantem um resultado, para p-toros, de caráter mais geral sobre a não existência de aplicações entre G-espaços, isto é, uma versão para espaços com restrições em suas cohomologias mais gerais do que esferas de cohomologia, porém exigem que no contradomínio Y seja G-CW complexo[1]. Vemos então, que no caso particular das esferas de cohomologia, esta hipótese pode ser retirada.

[1] Veja Apêndice, Definição A.1.3.

Uma versão análoga à do Corolário 2.2.4, no contexto de esferas de representação, pode ser encontrada em (BARTSCH, 1993, Observação 5.6).

2.3 Uma recíproca para o teorema de Borsuk-Ulam

Provaremos uma espécie de recíproca do Teorema 2.2.4, encontrando condições suficientes para a existência de aplicações G-equivariantes, sob certas hipóteses, entre uma $(\bmod\ p)$-esfera de cohomologia X e uma esfera de representação $S(V)$. À saber:

***Teorema 2.3.1.** Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$ ou $(\mathbb{Z}_p)^k$, com $k \geq 1$, e X um espaço G-ANR, o qual é uma $(\bmod\ p)$-esfera de cohomologia de dimensão n e $X^G = \emptyset$. Existe uma aplicação G-equivariante entre X e uma esfera de representação unitária SV de G com $V^G = \{0\}$ se, e somente se, $\dim X^H \leq \dim SV^H$, para todo H subtoro de rank $k-1$ tal que $X^H \neq \emptyset$.

Para tanto, necessitaremos conhecer o valor de $\mathcal{A}$-genus de X.

2.3.1 $\mathcal{A}$-categoria de uma $(\bmod\ p)$-esfera de cohomologia

Nesta subseção iremos calcular o valor de $\mathcal{A}$-cat(X) quando X for uma esfera de cohomologia no caso $p \geq 2$. Para determinarmos um limitante superior, adicionaremos a hipótese de que X é um espaço G-ANR[2]. Para determinarmos o limitante inferior, calcularemos o valor de $\mathcal{A}$-genus(X) e, para isso, necessitaremos saber sobre o *length* do *join* de esferas de cohomologia.

Consideremos o seguinte resultado sobre dimensão (por cobertura).

Teorema 2.3.2 ((DEO; TRIPATHI, 1982, Proposição 3.7))**.** Sejam G um grupo de Lie compacto e X um $G-$espaço Hausdorff e paracompacto. Então, $\dim X/G \leq \dim X$.

Iremos, através do Teorema 1.6.12, estabelecer o limitante superior da $\mathcal{A}$-categoria para uma
$(\bmod\ p)$-esfera de cohomologia X, no caso em que $p \geq 2$.

Proposição 2.3.3. Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$ ou $(\mathbb{Z}_p)^k$, com $k \geq 1$, e X uma $(\bmod\ p)$-esfera de cohomologia de dimensão n e G-ANR. Então

$$\mathcal{A}\text{-cat}(X) \leq n+1.$$

Prova. Segue do Teorema 1.6.12 que $\mathcal{A}$-cat$(X) \leq (\dim(X/G)+1)\cdot \max_H c(H)$, no qual $c(H)$ é o número de componentes conexas de X^H/NH, para H subgrupo fechado de G. Estamos supondo X compacto, então $\dim X < \infty$, logo $\dim X = \dim \text{cohom}\,(X) = n$. Neste caso, pelo Teorema 2.3.2, $\dim X/G \leq \dim X = n$.

2 Veja Apêndice, definição A.1.1.

Suponhamos $G = (\mathbb{Z}_p)^k$. Verifiquemos que $c(H) = 1$, para todo subgrupo $H < G$. De fato:

dado um subgrupo fechado H de G, este será da mesma forma que G, isto é, $H \cong (\mathbb{Z}_p)^s$. Com isso, X^H será uma $n(H)$-esfera de cohomologia e será conexo (pois não teremos o caso $n(H) = 0$, isto é, X^H não tem mesma cohomologia que S^0, uma vez que $\mathbb{Z}_p$ não atua livremente neste espaço). Temos $NH = G$, para todo subgrupo H, pois G é abeliano. O espaço X^H/G é imagem da projeção canônica $X^H \longrightarrow X^H/G$ e, portanto, será conexo. Assim, $c(H) = 1$, para todo H. Então, $\mathcal{A}$-cat$(X) \leq n+1$.

Se $p = 2$ e H é um subtoro de $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, então X^H/G será sempre conexo. De fato, suponhamos que X^H seja uma esfera de cohomologia de dimensão 0, para as outras dimensões nada precisa ser feito. Se $H^*(X^H;\mathbb{Z}_2) \cong H^*(S^0;\mathbb{Z}_2)$, então X^H é composto de duas componentes conexas por caminhos X_0^H e X_1^H, as quais tem mesma $\mathbb{Z}_2$-cohomologia que um ponto, isto é, $H^*(X_0^H;\mathbb{Z}_2) \cong H^*(X_1^H;\mathbb{Z}_2) \cong H^*(\star;\mathbb{Z}_2)$. Se X_i^H é G/H-invariante, segue do Teorema de Smith A.4.5 que $(X_i^H)^{G/H}$ tem a mesma $\mathbb{Z}_2$-cohomologia que um ponto, para $i = 0, 1$. Isto implica que $(X^H)^{G/H} = X^G \neq \emptyset$, o que contradiz a hipótese do enunciado. Assim, existe pelo menos um ponto $x \in X_0^H$ tal que sua órbita $G/H(x)$, com respeito à ação de G/H sobre X^H, contém um ponto de X_1^H. Assim, $X_0^H/G \cap X_1^H/G \neq \emptyset$, o que implica $X^H/G = X_0^H/G = X_1^H/G$, uma vez que $X^H/G = X_0^H/G \cup X_1^H/G$. Portanto, X^H/G é conexo.

$\square$

Observação 2.3.4. O resultado também é válido quando $G = \mathbb{Z}_{(p^k)}$, quando $p \geq 2$.

Agora, queremos determinar um limitante inferior para $\mathcal{A}$-cat(X). Para isto, adotaremos a estratégia como em (BARTSCH, 1993, Observação 5.6), no qual usa-se um argumento somando-se duas esferas de representação. No caso de esferas de cohomologia, utilizaremos a operação *join* Primeiro verificaremos que o *join* entre duas esferas de cohomologia é ainda uma esfera de cohomologia.

Nos seguintes lemas K denotará os corpos $\mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Z}_p$, quando $p = 2$ ou $p > 2$, respectivamente.

Lema 2.3.5. Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$ ou $(\mathbb{Z}_p)^k$ e X uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão n. Então, X é uma $(\bmod p)$-esfera em homologia de dimensão n.

Prova. Como os coeficientes são $\mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Z}_p$, estamos lidando com espaços vetoriais de dimensão finita em cada nível de homologia ou cohomologia. Temos, por (LIMA, 2009, Capítulo IV, Teorema 7), que $H^r(X;K) \cong \mathrm{Hom}(H_r(X;K),K) = (H_r(X;K))^*$, o espaço vetorial dual. Então, $\mathrm{Hom}(H^r(X;K);K) \cong H_r(X;K)$, pois $(H^r(X;K))^* \cong (H_r(X;K))^{**} \cong H_r(X;K)$, isto é, um espaço vetorial de dimensão finita é isomorfo ao seu bidual. Assim, $H_r(X;K) \cong K$, somente quando $r = 0$ ou n. Então, X é uma esfera em homologia de dimensão n. $\square$

Lema 2.3.6. Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$ ou $(\mathbb{Z}_p)^k$ e X, Y (mod p)-esferas de cohomologia de dimensões n, m,respectivamente. Então, $X \star Y$ é uma (mod p)-esfera de cohomologia de dimensão $n+m+1$.

Prova. Do Lema 2.3.5, X, Y são também (mod p)-esferas em homologia. Em (MILNOR, 1956, Lema 2.1) temos a seguinte fórmula para o *join* de duas esferas em homologia:

$$\tilde{H}_{r+1}(X \star Y, K) \cong \sum_{i+j=r} \tilde{H}_i(X,K) \otimes \tilde{H}_j(Y,K) \bigoplus \sum_{i+j=r-1} \mathrm{Tor}(\tilde{H}_i(X,K), \tilde{H}_j(Y,K)),$$

no qual $\tilde{H}_*$ é a homologia reduzida e Tor indica o funtor Tor_1. Portanto, teremos

$$\tilde{H}_{n+m+1}(X \star Y, K) \cong K \text{ e } 0 \text{ para os demais níveis.}$$

Segue do Teorema dos Coeficientes Universais ou da demonstração do Lema 2.3.5, que $X \star Y$ é uma $(n+m+1)$-esfera em K-cohomologia.

□

Observação 2.3.7. Note que se X é (mod p)-esfera de cohomologia de dimensão n tal que $X^G = \emptyset$, então $X \star X$ é (mod p)-esfera de cohomologia de dimensão $2n+1$ com $(X \star X)^G = \emptyset$ e, portanto, $\ell(X \star X) \geq \frac{(2n+1)+1}{2} = n+1$.

Mais geralmente, se X é um G-espaço compacto (ou paracompacto com dimensão por cobertura finita) e satisfaz $H^i(X;K) = 0$, quando $0 < i < n$, e K é um domínio de ideais principais, então $H^i(X \star X;K) = 0$, sempre que $0 < i < 2n$. Desta forma, $\ell(X \star X) \geq n+1$, quando $K = \mathbb{Z}_p$ (veja (BŁASZCZYK; MARZANTOWICZ; SINGH, 2015, Proposição 3.6)).

O próximo resultado calcula um limitante inferior para $\mathcal{A}$-cat(X), quando X é uma (mod p)-esfera de cohomologia. Embora já tenhamos estimado o valor de $(\mathcal{A}, H^*_G, I)$-length$(X) = \ell(X)$ no Teorema 2.2.2 e este seja uma cota inferior para $\mathcal{A}$-cat(X), o teorema a seguir é uma melhor estimativa desta cota, para o caso $p > 2$.

***Teorema 2.3.8.** Se $G = (\mathbb{Z}_2)^k$ ou $(\mathbb{Z}_p)^k$, com $k \geq 1$, e se X for uma (mod p)-esfera de cohomologia de dimensão n tal que $X^G = \emptyset$, então

$$\mathcal{A}\text{-cat}(X) \geq \mathcal{A}\text{-genus}(X) \geq n+1.$$

Prova. Para o caso $p = 2$, já temos $\ell(X) = n+1$ e, portanto, o resultado segue. Vamos analisar agora o caso em que $p > 2$.

Suponhamos que $\mathcal{A}$-genus$(X) = k$, então existe uma aplicação G-equivariante

$$X \longrightarrow G/H_1 \star \cdots \star G/H_k,$$

segundo a Definição 1.6.11. Logo, temos uma aplicação G-equivariante

$$\varphi\colon X\star X \longrightarrow (G/H_1\star G/H_1)\star\cdots\star(G/H_k\star G/H_k).$$

Considere V_i a representação irredutível dada pelo caractere $G/H_i \hookrightarrow S^1$, isto é, o homomorfismo $G\longrightarrow G/H_i\cong\mathbb{Z}_p\hookrightarrow S^1$. Defina

$$G/H_i\star G/H_i \longrightarrow S(V_i),\ \text{ por }\ [s,x,1-s,y]\mapsto \rho(sx+(1-s)y),$$

no qual $\rho\colon V_i-0\longrightarrow SV_i$ é a projeção radial e $S(V_i)$ é a esfera de representação associada a V_i (veja (BARTSCH, 1993, Observação 5.6)). Seja $W=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$. Note que W é um espaço vetorial de dimensão real $2k$, então SW tem dimensão $2k-1$. A aplicação φ induz uma aplicação G-equivariante entre $X\star X$ e $S(W)$. Como $X\star X$ é uma esfera de cohomologia de dimensão $2\dim X+1$, vemos que $\dim X+1\leq \ell(X\star X)\leq \ell(S(W))=k$. Portanto,

$$\dim X+1\leq \mathcal{A}\text{-genus}(X)\leq \mathcal{A}\text{-cat}(X).$$

□

***Corolário 2.3.9.** Sejam $G=(\mathbb{Z}_2)^k$ ou $(\mathbb{Z}_p)^k$ e suponhamos que X seja uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão n, a qual é um G-ANR. Então, $\mathcal{A}$-cat$(X)=\mathcal{A}$-genus$(X)=n+1$.

Prova. Segue da Proposição 2.3.3 e do Teorema 2.3.8. □

Observação 2.3.10. Em (CLAPP; PUPPE, 1991, Proposição 6.3), Clapp e Puppe encontram o valor do limitante inferior para $\mathcal{A}$-genus(X), com X espaço paracompacto satisfazendo $H^q(X;\mathbb{Z}_p)=0$, quando $0<q<n$, por outro método. Na demonstração anterior seguimos os passos encontrados em (BARTSCH, 1993, Observação 5.6) e isto nos permite (veja prova do Teorema 2.3.1 abaixo) modelar uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^k$-equivariante de uma esfera de cohomologia em uma esfera de representação, obtendo assim uma certa recíproca para o Teorema de Borsuk-Ulam (Teorema2.2.4), sob algumas condições.

Da Observação 2.3.7, seguindo os mesmos passos do Teorema 2.3.8, podemos concluir que $\mathcal{A}$-cat$(X)\geq\mathcal{A}$-genus$(X)\geq n+1$, quando X é um G-espaço compacto (ou paracompacto com dimensão por cobertura finita) tal que $H^i(X;K)=0$, se $0<i<n$ e $K=\mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Z}_p$.

2.3.2 Prova do Teorema 2.3.1

Para demonstrarmos o Teorema 2.3.1, precisaremos de mais alguns resultados, como segue.

***Lema 2.3.11.** Seja $G=(\mathbb{Z}_p)^k$ com $k\geq 1$. Considere uma família $\{H_1,\ldots,H_r\}$ de subtoros de G com rank $k-1$. Dado um subtoro qualquer $H\subset G$ de rank $k-1$, temos

$$(G/H_1 \star \cdots \star G/H_r)^H \cong G/H \star \cdots \star G/H \text{ (s vezes)},$$

no qual $0 \le s \le r$ é o número de vezes que H aparece em $\{H_1, \ldots, H_r\}$.

Prova. Denotemos $G/H_1 \star \cdots \star G/H_n$ por M.

O grupo G atua em M da seguinte maneira:

$$g[t_1, g_1H_1, \ldots, t_n, g_rH_r] = [t_1, (gg_1)H_1, \ldots, t_r, (gg_r)H_r],$$

para quaisquer $g \in G$ e $[t_1, g_1H_1, \ldots, t_r, g_rH_r] \in M$.

Assim, temos

$$M^H = \{[t_1, g_1H_1, \ldots, t_n, g_rH_r] \in M;\ [t_1, (hg_1)H_1, \ldots, t_r, (hg_r)H_r] = [t_1, g_1H_1, \ldots, t_n, g_rH_r], \forall\, h \in H\}.$$

Suponhamos que $[t_1, (hg_1)H_1, \ldots, t_n, (hg_r)H_r] = [t_1, g_1H_1, \ldots, t_n, g_rH_r]$.

Se $t_i \neq 0$, então $hg_iH_i = g_iH_i$, para todo $h \in H$. Portanto, $g_i^{-1}hg_i \in H_i$, para todo $h \in H$. Como G é comutativo, então $h \in H_i$, para todo $h \in H$. Assim, $H \subseteq H_i$. Logo, como são subtoros de rank $k-1$ devemos ter $H = H_i$. Nos casos em que $H \neq H_j$, devemos ter $t_j = 0$ sempre. Assim, $M^H = \{[t_1, g_1H, \ldots, t_r, g_rH];\ t_i = 0 \text{ quando } H_i \neq H\}$. Defina

$$\varphi\colon M^H \longrightarrow G/H \star \cdots \star G/H \text{ por } [t_1, g_1H_1, \ldots, t_r, g_rH_r] \mapsto [t_{i_1}, g_{i_1}H, \ldots, t_{i_s}, g_{i_s}H],$$

nos quais $i_j \in \{i;\ t_i \text{ pode ser não nulo}\}$. Devemos imaginar φ como a projeção nas partes que contêm os espaços homogêneos G/H. A inclusão $(G/H \star \cdots \star G/H) \hookrightarrow M^H$ definida por

$$[t_{i_1}, g_{i_1}H, \ldots, t_{i_s}, g_{i_s}H] \mapsto [\ldots, 0, H_i, \ldots, t_{i_1}, g_{i_1}H, \ldots, t_{i_s}H_{i_s}, \ldots, 0, H_j, \ldots]$$

constitui na inversa natural da aplicação anterior. Portanto, temos um G/H-homeomorfismo. □

Observação 2.3.12. Seja $s_i \ge 0$ o número de subgrupos isomorfos a H_i que aparece na coleção acima $\{H_1, \ldots, H_r\}$. Então, $s_1 + \cdots + s_r = r$.

***Lema 2.3.13.** Sejam $G = (\mathbb{Z}_p)^k$, com $k \ge 1$ e X uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão n, tal que X é G-ANR e $X^G = \emptyset$. Então, para qualquer subtoro H de rank $k-1$ tal que $X^H \neq \emptyset$, existe G/H-aplicação $X^H \longrightarrow G/H \star \cdots \star G/H$ (s vezes). Além disso, $s = n(H)+1$, no qual $n(H)$ é a dimensão da esfera de cohomologia X^H.

Prova. Segue do Corolário 2.3.9 que $\mathcal{A}$-genus$(X) = n+1$ e, portanto, da caracterização do genus (veja Proposição 1.6.11) existe uma aplicação G-equivariante $f\colon X \longrightarrow G/H_1 \star \cdots \star G/H_{n+1}$, com $G/H_i \in \mathcal{A} = \{G/H;\ H \subsetneq G \text{ subtoro de rank } k-1\}$. Pelo Lema 2.3.11, dado H_i, teremos $f^{H_i}\colon X^{H_i} \longrightarrow (G/H_1 \star \cdots \star G/H_{n+1})^{H_i} \cong (G/H_i \star \cdots \star G/H_i)$ (s_i vezes).

Note que, pelo Teorema 2.3.8, $n(H_i)+1 \leq \mathcal{A}_{H_i}\text{-genus}(X^{H_i}) \leq s_i$. Por outro lado, segue da Observação 2.3.12 que $\sum_{i=1}^{r} s_i = s_1 + \ldots + s_r = n+1$, no qual r é o número de subgrupos H_i distintos que aparecem no *join* acima. Pela fórmula de Borel (Teorema 1.5.7), sabemos que $n+1 = \sum_{i=1}^{r} n(H_i)+1$. Portanto,

$$n+1 = \sum_{i=1}^{r} n(H_i)+1 = \sum_{i=1}^{r} s_i = n+1.$$

Se tivéssemos $s_i > n(H_i)+1$, para algum i, então $\sum_{i=1}^{n+1} n(H_i)+1 < \sum_{i=1}^{n+1} s_i$, o que é uma contradição. Portanto, $s_i = n(H_i)+1$, para todo i. □

***Lema 2.3.14** (Existência)**.** Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$ ou $(\mathbb{Z}_p)^k$, com $k \geq 1$ e X uma $(\bmod\ p)$-esfera de cohomologia de dimensão n tal que X é G-ANR e $X^G = \emptyset$. Então, existe aplicação G-equivariante entre X e uma esfera de representação (complexa) de mesma dimensão.

Prova. Para o caso $p=2$, segue do Corolário 2.3.9 que $\mathcal{A}$-genus$(X) = n+1$, então pela Proposição 1.6.11, existe uma G-aplicação $X \longrightarrow S^0 \star \cdots \star S^0 \cong SV$, no qual $\dim SV = n$.

Agora, para $p > 2$, pelos Lemas 2.3.11 e 2.3.13, existe uma aplicação G-equivariante

$$f\colon X \longrightarrow G/K_1 \star \cdots \star G/K_{n+1},$$

com $K_i \in \mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_r\}$ (família dos subtoros de rank $k-1$ tais que $X^{H_i} \neq \emptyset$).

Pelo Lema 2.3.13, o número de vezes, s_i, que cada G/H_i aparece em $G/K_1 \star \ldots \star G/K_{n+1}$ é par, pois $n(H_i)+1$ é par. Então, reordenando e agrupando dois a dois os fatores no produto *join* acima, obtemos uma aplicação G-equivariante que ainda denotaremos por f,

$$f\colon X \longrightarrow \underbrace{(G/H_1 \star G/H_1) \star \cdots \star (G/H_1 \star G/H_1)}_{s_1} \star \cdots \star \underbrace{(G/H_r \star G/H_r) \star \cdots \star (G/H_r \star G/H_r)}_{s_r}.$$

Como na demonstração do Teorema 2.3.8, segue que existe uma aplicação G-equivariante entre $G/H_i \star G/H_i$ e SV_i, onde V_i denota a representação irredutível de G associada ao caractere $G/H_i \hookrightarrow S^1$. Portanto, existe aplicação G-equivariante

$$(G/H_i \star G/H_i) \star \cdots \star (G/H_i \star G/H_i) \longrightarrow \underbrace{SV_i \star \cdots \star SV_i}_{s_i/2} \cong SW_i.$$

Como $s_i = n(H_i)+1$, então $\dim_{\mathbb{C}} SW_i = 2(s_i/2) - 1 = s_i - 1 = n(H_i)$.

Portanto, podemos definir uma aplicação G-equivariante

$$X \xrightarrow{f} (G/H_1 \star G/H_1) \star \cdots \star (G/H_1 \star G/H_1) \star \cdots \star (G/H_r \star G/H_r) \star \cdots \star (G/H_r \star G/H_r) \longrightarrow SW_1 \star \cdots \star SW_r,$$

no qual $SW_1 \star \cdots \star SW_r \cong SW$, tal que $\dim_{\mathbb{C}} SW = n$, pois é o *join* de

$$\sum_{i+1}^{r} \frac{(n(K_i)+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_i (n(K_i)+1)\right) = \frac{(n+1)}{2} \text{ esferas } S^1.$$

□

Prova do Teorema 2.3.1. Do Corolário 2.2.4 temos a condição necessária para a existência da aplicação. Agora suponhamos que $\dim X^H \leq \dim_{\mathbb{C}} SV^H$, para todo H. Do Lema 2.3.14 existe aplicação G-equivariante $X \longrightarrow SW$, no qual $\dim_{\mathbb{C}} SW = \dim X$ tal que $\dim X^H = \dim_{\mathbb{C}} SW^H$, para todo subtoro H de rank $k-1$, com $X^H \neq \emptyset$. Agora, por (MARZANTOWICZ; MATTOS; SANTOS, 2013b, Teorema 2.4), existe aplicação G-equivariante entre SW e SV, logo existe aplicação G-equivariante entre X e SV. □

Como consequência interessante obtemos que a classe de Euler de uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia X tal que $X^G = \emptyset$, será polinomial quando X for um $(\mathbb{Z}_p)^k$-ANR.

***Corolário 2.3.15.** Seja $G = (\mathbb{Z}_p)^k$, com $k \geq 1$, e X uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão n tal que $X^G = \emptyset$ e X é um G-ANR. Então,

a) $(\mathcal{A}, H_G^*, I)$-length$(X) = \ell(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

b) a classe de Euler e de X é polinomial.

Prova. Para o item *a*), como existe $f\colon X \longrightarrow SW$ tal que $\dim_{\mathbb{C}} SW = \dim X$ e $\ell(SW) = \dfrac{n+1}{2}$, segue que

$$\frac{n+1}{2} \leq \ell(X) \leq \ell(SW) \leq \frac{n+1}{2}.$$

O item *b*) segue do Corolário 2.1.8, pois $\ell(X) = \sum_H \ell_H(X^H)$, no qual H percorre os subtoros de rank $k-1$ tais que $X^H \neq \emptyset$. □

Capítulo 3

Uma versão Bourgin-Yang do teorema de Borsuk-Ulam

Em 1954/55, Yang(YANG, 1954; YANG, 1955) e independentemente, em 1955, D. G. Bourgin(BOURGIN, 1955) provaram que a dimensão por cobertura do conjunto Z_f dos zeros de uma $\mathbb{Z}_2$-aplicação $f\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, isto é, a dimensão do conjunto $Z_f := \{x \in S^n;\ f(x) = 0\}$ satisfaz

$$\dim Z_f \geq n - m - 1.$$

A versão deste teorema apresentada aqui substitui a esfera S^n por uma esfera de cohomologia X de dimensão n e o espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ por um espaço topológico satisfazendo a condição de que $Y - Y^G$ seja uma esfera de cohomologia de dimensão m. Logo, estamos interessados em estudar a dimensão por cobertura do conjunto $Z_f = f^{-1}(Y^G)$.

Primeiramente, na Seção 3.1, apresentaremos uma consequência imediata do *length* das esferas de cohomologia que nos permite estimar por baixo o *length* do espaço Z_f. Na Seção 3.2, a construção de um modelo simplicial (à la Cech) de um G-espaço topológico, encontrado em (SEGAL, 1968b, Seção 5) é exibida. Assim, obteremos um limitante superior para o índice *length* envolvendo a dimensão por cobertura do espaço estudado e o número de órbitas maximais da ação do grupo G. E isto nos permite concluir, na Seção 3.3, o teorema principal deste capítulo, uma versão Bourgin-Yang (veja Teorema 3.3.1) neste contexto. A Seção 3.4 é dedicada a apresentar alguns detalhes da construção de Segal (SEGAL, 1968b).

No caso particular, em que X é uma variedade topológica fechada orientável, é possível obter uma versão com estimativa ótima do teorema de Bourgin-Yang, como mostrado no Teorema 3.3.4.

3.1 LEMA A: uma estimativa inferior do *length* de Z_f.

Diferentemente dos resultados obtidos no capítulo anterior, nesta seção exploraremos as três propriedades básicas que uma teoria de índices deve possuir (FADELL; HUSSEINI, 1988): monotonicidade, subaditividade e continuidade. A validação destas propriedades para o índice *length* é dada na Proposição 1.6.3.

***Lema 3.1.1** (LEMA A)**.** Seja $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$. Suponhamos que $f: X \longrightarrow Y$ seja uma aplicação G-equivariante, nos quais X é uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão n tal que $X^G = \emptyset$, e $Y - Y^G$ é uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão m. Considere $Z_f = f^{-1}(Y^G)$. Então,

(i) se $p = 0$ ou $p > 2$,
$$\ell(Z_f) \geq \frac{n-m}{2}, \text{ ou}$$

(ii) se $p = 2$,
$$\ell(Z_f) \geq n - m.$$

A notação $\ell(Z_f)$ é uma abreviação para $(\mathcal{A}, H_G^*, I) - \text{length}(Z_f)$, com as escolhas canônicas como no Teorema 2.2.2.

Prova. Pela continuidade do *length*, existe uma vizinhança de Z_f, denotada por $\mathcal{V}$, aberta em X e G-invariante tal que $\ell(\mathcal{V}) = \ell(Z_f)$. Então, podemos escrever $X = (X - Z_f) \cup \mathcal{V}$. Segue da subaditividade do *length* que

$$\ell(X) = \ell((X - Z_f) \cup \mathcal{V}) \leq \ell(X - Z_f) + \ell(\mathcal{V}).$$

A restrição da aplicação f com relação a $X - Z_f$ é uma aplicação G-equivariante

$$f|_{X - Z_f}: X - Z_f \longrightarrow Y - Y^G$$

e, portanto, pela monotonicidade do *length*, $\ell(X - Z_f) \leq \ell(Y - Y^G)$. Desta maneira, rearranjando as fórmulas anteriores, obtemos a desigualdade

$$\ell(Z_f) \geq \ell(X) - \ell(Y - Y^G).$$

Então, aplicando o Teorema 2.2.2, obtemos (i) para o caso $p = 0$ e (ii).

Agora para o caso $p > 2$ em (i), como constatado no Corolário 2.3.15, uma condição suficiente para que $\ell(Y - Y^G) \leq \dfrac{m+1}{2}$, é exigirmos que $Y - Y^G$ seja um espaço G-ANR. Para contornarmos esta situação, utilizaremos a propriedade do limitante inferior dada no Teorema 2.1.7. Para cada H subtoro de G de rank $k-1$, encontramos uma vizinhança de Z_f^H, denotada por $\mathcal{V}(H)$, aberta em X^H e G/H-invariante tal que

$$\ell_H(\mathcal{V}(H)) = \ell_H(Z_f^H) \geq \ell_H(X^H) - \ell_H((Y - Y^G)^H).$$

A notação ℓ_H é uma abreviação para $(\mathcal{A}_H, H^*_{G/H}, I_H)-$length, com as escolhas canônicas como no Teorema 2.1.7. Então

$$\ell(Z_f) \geq \sum_H \ell_H(Z_f^H) = \sum_H \ell_H(\mathcal{V}(H)) \geq \sum_H \ell_H(X^H) - \sum \ell_H((Y - Y^G)^H).$$

Segue da fórmula de Borel (Teorema 1.5.7) que

$$\sum_H \ell_H(X^H) - \sum_H \ell_H((Y - Y^G)^H) = \frac{(\dim X - \dim(Y - Y^G))}{2}.$$

□

Do Lema 3.1.1 podemos obter algumas informações sobre o homomorfismo

$$p^*_{Z_f} \colon H^*(BG) \longrightarrow H^*_G(Z_f),$$

nos casos em que $p = 0$ ou 2.

***Corolário 3.1.2.** Seja $G = (\mathbb{Z}_2)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$. Suponhamos que $f \colon X \longrightarrow Y$ seja uma aplicação G-equivariante, nos quais X é uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão n tal que $X^G = \emptyset$, e $Y - Y^G$ é uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão m. Considere $Z_f = f^{-1}(Y^G)$. Então,

$$\bigoplus_{i=0}^{m-n-1} H^i(BG) \longrightarrow H^*_G(Z_f)$$

será um monomorfismo.

Prova. Por hipótese $Z_f^G = \emptyset$, assim $p^*_{Z_f}$ possui núcleo não trivial (veja a Proposição A.2.11). Os elementos do núcleo de $p^*_{Z_f} \colon H^*(BG) \longrightarrow H^*_G(Z_f)$ são polinomiais, pois estamos considerando apenas o caso $p = 0, 2$. Como vimos na Seção 2.1, um elemento que realiza o valor de $\ell(Z_f)$, é polinomial e fatorado por geradores dos núcleos de homomorfismos da forma

$$H^*(BG) \longrightarrow H^*(BH),$$

com H subtoro de rank $k-1$ de G tal que $Z_f^H \neq \emptyset$. Tais geradores estão em $H^1(BG)$, quando $p = 2$, ou em $H^2(BG)$, quando $p = 0$. Assim, em ambos os casos, se $\alpha \in \ker p^*_Z$ com grau menor ou igual a $m - n - 1$, segue que $p^*_Z(\alpha) \neq 0$. □

Observação 3.1.3. O caso $p > 2$ não pode ser tratado diretamente pelo Corolário 3.1.2 devido ao fato de que possivelmente elementos nilpotentes participem do núcleo da aplicação $p^*_{Z_f}$ (dada no Corolário 3.1.2).

Imediatamente do Corolário 3.1.2, supondo $G = \mathbb{Z}_2$ ou S^1 e ações livres, podemos concluir que $\dim \text{cohom}(Z_f/G) \geq n - m - 1$ e, portanto, pelo Teorema 2.3.2,

$$\dim Z_f \geq n - m - 1.$$

Observação 3.1.4. Esta conclusão é apenas um caso particular de resultados encontrados na literatura.

Bourgin-Yang clássico (DOLD, 1988; IZYDOREK; RYBICKI, 1992; JAWOROWSKI, 2004; NAKAOKA, 1989) Considerando X, Y e $f\colon X \longrightarrow Y$ como nos resultados anteriores e $G = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_p$ ou S^1, então $\dim Z \geq m-n-1$.

As referências dadas anteriormente no resultado acima são para versões parametrizadas do teorema de Bourgin-Yang, isto é, no contexto de fibrados. Quando particularizadas para espaços bases com um único ponto, podemos enunciá-las como no Corolário 3.1.2. Especificamente, em (DOLD, 1988) é tratado o caso $G = \mathbb{Z}_2$, em (IZYDOREK; RYBICKI, 1992; JAWOROWSKI, 2004) o caso $G = \mathbb{Z}_p$ e em (NAKAOKA, 1989) o caso $G = S^1$, bem como os casos $G = \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_p$.

Observação 3.1.5. Na demonstração do Lema 3.1.1, utilizando apenas as três propriedades básicas do *length*, obtemos $\ell(Z_f) = \ell(f^{-1}(Y^G)) \geq \ell(X) - \ell(Y - Y^G)$. Até então, se não temos nenhuma informação a mais sobre $\ell(X)$ e $\ell(Y - Y^G)$, o resultado é o mesmo da versão abstrata do Teorema de Bourgin-Yang (BŁASZCZYK; MARZANTOWICZ; SINGH, 2015, Teorema 3.1), bastando trocar Y^G por um subespaço invariante fechado A e $Y - Y^G$ por $f(X) - A$.

3.2 LEMA B: um limitante superior para o *length*.

O objetivo desta seção é estabelecer uma conexão entre o *length* de um G-espaço compacto X e sua dimensão por cobertura $\dim X$. Para tanto, iremos apresentar uma construção feita por G. Segal (SEGAL, 1968b, Seção 5) e algumas de suas propriedades. Os detalhes de tal construção estão contidos na última seção deste capítulo.

Construção de Segal:

Sejam G um grupo de Lie compacto e X um G-espaço compacto quaisquer.

Seja $U = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura finita por fechados de X tal que cada $\mathcal{U}_\alpha$, $\alpha \in A$ seja G-invariante. Podemos associar um G-espaço compacto W_U, como segue.

Considere N_U o nervo da cobertura U, isto é, o complexo simplicial finito cujos vértices são dados pelos índices $\alpha \in A$ e os simplexos são subconjuntos finitos $\sigma \subset A$ tais que

$$U_\sigma = \bigcap_{\alpha \in \sigma} \mathcal{U}_\alpha \neq \emptyset.$$

Dizemos que a dimensão de um simplexo $\sigma \subset A$ é p e a denotamos por $\dim \sigma = p$, quando σ contém $p+1$ elementos.

Relembre que: *Dado um complexo simplicial finito $\mathcal{K}$ cujos vértices são dados pelo conjunto $V = \{v_1, \ldots, v_r\}$, associamos a este conjunto a base canônica $\{e_1, \ldots, e_r\}$ do espaço Euclidiano*

$\mathbb{R}^r$. Cada simplexo $\{v_{i_0},\ldots,v_{i_t}\}$ de $\mathcal{K}$ é associado ao conjunto

$$\langle e_{i_0},\ldots,e_{i_t}\rangle = \{k_0e_{i_0}+\ldots+k_te_{i_t};\ \sum_{i=0}^{t} k_i = 1 \text{ e } k_0,\ldots,k_t \geq 0\},$$

a envoltória convexa de $e_{i_0},\ldots,e_{i_t}$. A união de todas estas envoltórias convexas é um espaço topológico compacto chamado a realização geométrica de $\mathcal{K}$.

Definimos então

$$W_U = \bigcup_{\sigma\in N_U} (U_\sigma \times |\sigma|) \subset X \times |N_U|,$$

nos quais $|\sigma|$, $|N_U|$ denotam as realizações geométricas de σ e N_U, respectivamente. Note que W_U é compacto.

Teorema 3.2.1. (SEGAL, 1968b, pg.145 (i) e (ii)) Sejam G um grupo de Lie compacto e X um G-espaço compacto. Dada uma cobertura $U = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ finita por fechados G-invariantes de X temos:

i) A projeção na primeira coordenada $\omega\colon W_U \longrightarrow X$, $\omega(x,v) = x$, induz um isomorfismo

$$\omega^*\colon H^*_G(X) \longrightarrow H^*_G(W_U).$$

Definindo

$$W^p_U = \bigcup_{\dim(\sigma)\leq p} (U_\sigma \times |\sigma|),$$

obtemos uma filtração de G-subespaços

$$W^0_U \subset W^1_U \subset \cdots \subset W_U.$$

ii) Seja $\mathcal{V}$ um refinamento de U. Então, existirá uma G-aplicação $W_{\mathcal{V}} \longrightarrow W_U$, definida a menos de G-homotopia, que respeita as filtrações e projeções anteriores.

Um elemento de $H^*_G(X)$ está em $H^*_{G,s}(X)$ se, para alguma cobertura finita U como anteriormente, o elemento estiver contido em $\ker[H^*_G(X) \longrightarrow H^*_G(W^{s-1}_U)]$. Então, teremos uma filtração para o anel de cohomologia $H^*_G(X)$:

$$H^*_G(X) = H^*_{G,0}(X) \supset H^*_{G,1}(X) \supset \cdots \supset H^*_{G,s}(X) \supset \cdots \tag{3.1}$$

iii) A filtração (3.1) em $H^*_G(X)$ satisfaz:

$$H^*_{G,s}(X)\cdot H^*_{G,s'}(X) \subset H^*_{G,s+s'}(X),$$

no qual "$\cdot$" representa a multiplicação entre os anéis.

Observação 3.2.2. Com respeito à filtração de W_U, note que W^p_U é a imagem inversa do p-esqueleto de $|N_U|$ pela projeção na segunda coordenada $\pi_2\colon W_U \longrightarrow |N_U|$. Notemos também que se $\dim X = n < \infty$, então

$$W^{n+1}_U = \bigcup_{\dim(\sigma)\leq n+1} (U_\sigma \times |\sigma|) = W^n_U,$$

pois se $\dim \sigma = n+1$, $U_\sigma = \bigcap_{\alpha\in\sigma} \mathcal{U}_\alpha = \emptyset$. Assim, $W_U = W_U^m$, para todo $m \geq \dim X$.

E com relação à filtração de $H_G^*(X)$, temos que $H_{G,s}^*(X)$ é um ideal em $H_G^*(X)$ pois

$$H_{G,s}^*(X)\cdot H_{G,0}^*(X) \subset H_{G,s}^*(X) \quad \text{e} \quad H_{G,0}^*(X)\cdot H_{G,s}^*(X) \subset H_{G,s}^*(X).$$

Também observe que $\dim X = n < \infty$, então $H_{G,\dim X+1}^*(X) = 0$.

Agora, apresentamos as relações desta construção com o *length*.

Proposição 3.2.3. (SEGAL, 1968b, Proposição 5.1(i)) Sejam G um grupo de Lie compacto e X um G-espaço compacto. Então,

$$H_{G,1}^*(X) = \bigcap_{x\in X} \ker[H_G^*(X) \longrightarrow H_G^*(G/G_x)].$$

Corolário 3.2.4. Sejam G um grupo de Lie compacto e X um G-espaço compacto. Considere $\{H_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ a coleção de todos os subgrupos de isotropia maximais em G, isto é, se $x \in X^{H_\gamma}$, teremos $G_x = H_\gamma$, para $\gamma\in\Gamma$. Então,

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \ker[H_G^*(X) \longrightarrow H_G^*(G/H_\gamma)] = \bigcap_{x\in X} \ker[H_G^*(X) \longrightarrow H_G^*(G/G_x)].$$

Prova. Claro que

$$\bigcap_{x\in X} \ker[H_G^*(X) \longrightarrow H_G^*(G/G_x)] \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \ker[H_G^*(X) \longrightarrow H_G^*(G/H_\gamma)].$$

Por outro lado, dado $x\in X$, se G_x não é subgrupo de isotropia maximal, então existe um $\gamma\in\Gamma$ tal que $G_x < H_\gamma$. Logo, $G/G_x \longrightarrow G/H_\gamma$ e, portanto,

$$\ker[H_G^*(X) \longrightarrow H_G^*(G/H_\gamma)] \subset \ker[H_G^*(X) \longrightarrow H_G^*(G/G_x)].$$

Então,

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \ker[H_G^*(X) \longrightarrow H_G^*(G/H_\gamma)] = \bigcap_{x\in X} \ker[H_G^*(X) \longrightarrow H_G^*(G/G_x)].$$

□

Especializando para o caso de grupos p-toros, observamos dois fatos importantes sobre os subgrupos de isotropias maximais das ações dos grupos $(\mathbb{Z}_2)^k$ ou $(\mathbb{Z}_p)^k$ em $(\bmod\ p)$-esferas de cohomologia.

Observação 3.2.5. Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$ ou $(\mathbb{Z}_p)^k$ e X uma $(\bmod\ p)$-esfera de cohomologia de dimensão n tal que $X^G = \emptyset$. Os subgrupos de isotropia maximais desta ação são subtoros de rank $k-1$. De fato, suponhamos que K seja um subgrupo de isotropia maximal, isto é, $K = G_z$, para algum $z \in X$ e, para todo $y \in X^K$, temos $G_y = G_z = K$. Considerando o grupo $WK = G/K$ e o WK-espaço X^K, analisemos o subgrupo de isotropia

$$(WK)_x = \{gK \in G/K; gK \cdot y = gy = y\} < WK,$$

no qual $x \in X^K$. Seja H um subgrupo de G tal que $K \subset H$ e $H/K = (WK)_x$, por exemplo,

$$H = \langle g_1, \ldots, g_l, k_1, \ldots, k_r \rangle, \text{ no qual } (WK)_x = \{g_1K, \ldots, g_lK\} \text{ e } K = \{k_1, \ldots, k_r\}.$$

Temos, para todo $h \in H$ e para todo $y \in (WK)_x$,

$$hy = hK \cdot y = y,$$

logo $h \in G_y = K$, o que implica $H \subseteq K$. Portanto, $K = H$ e $(WK)_x = K/K$, isto é, WK atua livremente em X^K. Por hipótese, X é uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia, então X^K será uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão t, com $t > -1$. Neste caso, se K não tem rank $k-1$, então WK conterá

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \text{ ou } \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$$

como subgrupo, e este atuará livremente em X^K, o que é uma contradição. Então, K necessariamente tem rank $k-1$.

Todos os subgrupos de isotropia do G-espaço X estão contidos em algum subgrupo de rank $k-1$. Com efeito,

suponhamos que o subgrupo de isotropia $K = G_z$ não seja maximal, assim existe $y \in X^K$ tal que $G_y \supsetneq K$. Caso G_y não seja maximal, prosseguindo indutivamente, obtemos uma cadeia ascendente de subgrupos de isotropia $K \subsetneq G_y \subsetneq \cdots \subset L$. Esta cadeia só será interrompida quando encontrarmos L, um subgrupo de isotropia tal que para todo $x \in X^L$, $G_x = L$, isto é, L é maximal e, portanto, tem rank $k-1$.

***Lema 3.2.6** (LEMA B). Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$ ou $(\mathbb{Z}_p)^k$ com $k \geq 1$ e X uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão n tal que $X^G = \emptyset$. Dado um G-subespaço Z de X, seja s o número de subgrupos de isotropia maximais H tais que $Z^H \neq \emptyset$. Então, temos

$$\ell(Z) \leq s \cdot (\dim Z + 1).$$

A notação $\ell(Z)$ é uma abreviação para $(\mathcal{A}, H_G^*, I) - \text{length}(Z)$, com as escolhas canônicas como no Teorema 2.2.2.

Prova. Pela Observação 3.2.5, dado $x \in Z$, existe um subtoro H de rank $k-1$ contendo o subgrupo de isotropia G_x. Consideremos $\{H_1, \ldots, H_t\}$ o conjunto de tais subtoros, isto é, subtoros de rank $k-1$ que contenham subgrupos de isotropia de Z. Estes necessariamente são os subgrupos de isotropia maximais com relação ao G-espaço Z. Temos

$$\bigcap_{i=1}^{s} \ker[H^*(BG) \longrightarrow H^*(BH_i)] = \bigcap_{x \in Z} \ker[H^*(BG) \longrightarrow H^*(BG_x)].$$

Sejam $\omega_i \in \ker[H_G^*(BG) \longrightarrow H_G^*(BH_i)]$, para $i = 1, \ldots, s$. Então,

$$\omega = \omega_1 \ldots \omega_s \in \bigcap_{x \in Z} \ker[H^*(BG) \longrightarrow H^*(BG_x).$$

Para qualquer $x \in Z$, a composição $G/G_x \hookrightarrow Z \xrightarrow{p_Z} \{\star\}$ induz o diagrama a seguir

$$\begin{tikzcd} & H^*(BG) \arrow[dl, "p_Z^*"'] \arrow[dr] & \\ H_G^*(Z) \arrow[rr, "f_x"] & & H^*(BG_x). \end{tikzcd}$$

Então, $f_x \circ p_Z^*(\omega) = 0$, para todo $x \in Z$. Assim,

$$p_Z^*(\omega) \in \bigcap_{x \in Z} \ker[H_G^*(Z) \longrightarrow H^*(BG_x)],$$

para todo $x \in Z$. Portanto, pela Proposição 3.2.3 temos

$$p_Z^*(\omega) \in H_{G,1}^*(Z).$$

Pela Observação 3.2.2,

$$p_Z^*(\omega)^{\dim Z+1} \in H_{G,\dim Z+1}^*(Z) = 0$$

e, portanto, $\omega^{\dim Z+1} 1_Z = 0$ em $H_G^*(Z)$. Considerando cada ω_i como um gerador do núcleo

$$\ker[H_G^*(BG) \longrightarrow H_G^*(BH_i)]$$

e contando o número de fatores em $\omega^{\dim Z+1}$, obtemos a estimativa desejada. □

Observação 3.2.7. O lema anterior poderia ter sido escrito de maneira mais geral considerando G um grupo de Lie compacto qualquer e X um G-espaço compacto com um número finito de tipos de órbitas maximais. Neste caso, teremos $\ell(Z) \leq s(\dim Z + 1)$, para qualquer G-subespaço fechado Z de X, no qual s é o número de órbitas maximais distintas de Z.

3.3 Teorema Principal

A combinação dos resultado dos Lemas A e B (Lemas 3.1.1 e 3.2.6, respectivamente), nos fornece o seguinte teorema.

***Teorema 3.3.1** (Bourgin-Yang)**.** Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$, X uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão n e Y um G-espaço, nos quais $X^G = \emptyset$ e $Y - Y^G$ é uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia em dimensão m. Dada $f\colon X \longrightarrow Y$ uma aplicação G-equivariante, considerando $Z_f = f^{-1}(Y^G)$, então

i) se $p = 2$,
$$\dim Z_f \geq \frac{n-m}{s} - 1;$$

ii) se $p \neq 2$,
$$\dim Z_f \geq \frac{n-m}{2s} - 1,$$

no qual s é o número de subtoros H de rank $k-1$ tais que ${Z_f}^H \neq \emptyset$. Em particular, se $n > m$, não existe aplicação G-equivariante $X \longrightarrow Y - Y^G$.

Prova. Se $p = 2$, pelo Lema 3.1.1(ii), temos
$$n - m \leq \ell(Z_f).$$

Por outro lado, pelo Lema 3.2.6,
$$\ell(Z_f) \leq s(\dim Z_f + 1).$$

Portanto,
$$n - m \leq s(\dim Z_f + 1)$$
e concluímos o caso *i*) do Teorema.

O caso $p > 2$ segue de maneira análoga. De fato, pelo Lema 3.1.1(i), temos
$$\frac{n-m}{2} \leq \ell(Z_f).$$

Novamente, aplicando o Lema 3.2.6, obtemos
$$\frac{n-m}{2} \leq s(\dim Z_f + 1)$$
e segue a desigualdade em *ii*).

Agora, se $p = 0$, note que todo subgrupo de isotropia da ação de $(S^1)^k$ em X é da forma
$$S^1 \times \cdots \times S^1 \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \mathbb{Z}_{m_s}.$$

Tome q inteiro primo tal que $\mathrm{mdc}(q, m_j) = 1$, para todo subgrupo $\mathbb{Z}_{m_j}$ que faça parte de algum subgrupo de isotropia de X. Então, o subgrupo $(\mathbb{Z}_q)^k$ atua em X livre de pontos fixos, isto é, $X^{(\mathbb{Z}_q)^k} = \emptyset$. Assim, o resultado segue como acima para $p = q$.

Se $n > m$, então $n - m > 0$ e, portanto, $\dim Z_f \neq \emptyset$, o que implica a não existência de uma aplicação G-equivariante entre X e $Y - Y^G$. □

Observação 3.3.2. Nota-se que quanto menor o número de órbitas melhor a estimativa. No caso em que $k = 1$, teremos ação livre e, portanto, $s = 1$. No caso $(\mathbb{Z}_p)^k$, dado subtoro maximal H, $X^H \neq \emptyset$ tem dimensão no mínimo $n(H) = 1$. O valor máximo de s é obtido quando todos os subtoros considerados são tais que $n(H) = 1$. Segue da fórmula de Borel que

$$\sum n(H) + 1 = 2.s = n + 1,$$

portanto, $s \leq \frac{n+1}{2}$. Analogamente para $(S^1)^k$. No caso $(\mathbb{Z}_2)^k$, teremos $s \leq n + 1$.

Uma versão que oferece uma estimativa ótima para o Teorema de Bourgin-Yang neste contexto de esferas de cohomologia é obtido quando assumimos que X, o domínio da aplicação G-equivariante, seja também uma variedade topológica fechada orientável. Na verdade, o resultado será enunciado de maneira mais geral, tendo como hipótese que X seja uma variedade topológica fechada orientável $n-1$-acíclica, isto é, $H^i(X) = 0$ quando $1 < i < n-1$.

Primeiramente, iremos enunciar um resultado auxiliar.

Teorema 3.3.3 ((CLAPP; PUPPE, 1986, Teorema 6.4), (ASSADI, 1988))**.** Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, X e Y dois G-espaços tais que $X^G = Y^G = \emptyset$. Suponhamos que $\tilde{H}_j(X) = \tilde{H}^j(X) = 0$ para $j < m$, e que Y seja um espaço compacto ou paracompacto com dimensão por cobertura finita, satisfazendo $H_j(Y) = H^j(Y) = 0$, para $j \geq m$. Além disso, no caso $p = 0$, assumimos como hipótese adicional que Y tenha apenas um número finito de órbitas.

Então não existirá uma aplicação G-equivariante da forma $X \longrightarrow Y$.

***Teorema 3.3.4** (Bourgin-Yang para variedade topológica)**.** Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$, X um G-espaço tal que é variedade topológica fechada orientável satisfazendo $\tilde{H}^i(X) = 0$ para $i < n-1$, Y um G-espaço e $A \subset Y$ um G-subespaço tais que $Y - A$ é compacto (ou paracompacto com dimensão por cobertura finita) e $H^i(Y - A) = 0$ para $i \geq m$. Adicionalmente $(Y - A)^G = \emptyset$. No caso $p = 0$, suponhamos que Y tenha um número finito de órbitas.

Se $f \colon X \longrightarrow Y$ é uma G-aplicação, temos

$$\dim f^{-1}(A) \geq n - m - 1.$$

Prova. Denotemos $f^{-1}(A)$ por Z. Por hipótese, restringindo a aplicação f ao espaço $X - Z$, temos a aplicação G-equivariante $f \colon X - Z \longrightarrow Y - A$.

Suponhamos, por absurdo, que $\dim Z < n - m - 1$. Logo $H^i(Z) = 0$, para $i \geq n - m - 1$.

Pela Dualidade de Alexander-Poincaré-Lefschetz, $0 = H^i(Z) = H_{n-1-i}(X, X - Z)$. Da hipótese sobre a homologia de X e pela sequência exata longa do par $(X, X - Z)$, obtemos:

$$0 = H^i(Z) = H_{n-1-i}(X, X - Z) = \tilde{H}_{n-2-i}(X - Z),$$

para $n - 2 - i \leq m - 1$.

Logo, temos:

$$0 = \tilde{H}_q(X - Z) = \tilde{H}^q(X - Z) \text{ for } q < m;$$

$$0 = H^q(Y - A) = H_q(Y - A) \text{ for } q \geq m.$$

Segue do Teorema 3.3.3, que não existe G-aplicação entre $X - Z$ e $Y - A$, o que é uma contradição. □

Observação 3.3.5. O resultado acima é uma generalização do Teorema 2.1 encontrado em (MARZANTOWICZ; MATTOS; SANTOS, 2013b)

3.4 Detalhes da construção de Segal

Esta seção visa descrever os passos da demonstração do importante isomorfismo

$$\omega^* : H^*_G(X) \longrightarrow H^*_G(W_U)$$

apresentado no Teorema 3.2.1(i). Relembrando, G é um grupo de Lie compacto, X é um G-espaço compacto, $U = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura finita por fechados invariantes de X, W_U é G-espaço compacto da construção de Segal e $\omega\colon W_U \longrightarrow X$ é a projeção na primeira coordenada.

Para $k \geq 0$, defina

$$X_k = \{x \in X;\ x \text{ pertence a pelo menos } k+1 \text{ elementos da cobertura } U\} = \bigcup_{\dim\sigma \geq k} U_\sigma.$$

$$W_k = \omega^{-1}(X_k) = \{(x, v) \in W_U;\, x \in X_k\} = \bigcup_{\dim\sigma \geq k} U_\sigma \times |\sigma|.$$

Observe que X_k é união finita de uma interseção finita de fechados, portanto é fechado. Logo compacto, pois está contido em X. Além disso, W_k é imagem inversa de um fechado, logo é fechado em W_U, portanto compacto.

Também teremos as cadeias

$$X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_k \supset \ldots \quad \text{e} \quad W_U = W_0 \supset W_1 \supset W_2 \supset \ldots \supset W_k \supset \ldots$$

Para provarmos o isomorfismo ω^* seguiremos os seguintes passos:

1) Provar que $H^*_G(X_k - X_{k+1}) \cong H^*_G(W_k - W_{k+1})$.

2) Provar que $H^*_G(X_k, X_{k+1}) \cong H^*_G(W_k, W_{k+1})$.

3) Provar que $H^*_G(X, X_k) \cong H^*_G(W_U, W_k)$.

Observação 3.4.1. Com exceção do passo 2, os outros estão contidos no trabalho de G. Segal (SEGAL, 1968b), no qual o autor utiliza a K-teoria de cohomologia equivariante. Em (SEGAL, 1968b, Proposição 2.9) temos a propriedade da excisão:

Seja A um G-espaço fechado de um G-espaço localmente compacto Y, então

$$K_G^*(Y-A) \cong K_G^*(Y,A),$$

no qual $K_G^*(-)$ denota o anel de cohomologia da K-teoria equivariante.

Assim, os passos 1) e 2) são equivalentes em K-teoria equivariante. Na cohomologia de Borel, não temos esta propriedade. Em virtude disto, apresentamos um modo alternativo de concluirmos o passo 2) para o nosso contexto.

Passo 1.

Dados os pares $X_k \supset X_{k+1}$ e $W_k \supset W_{k+1}$ temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\bigsqcup_{\dim\sigma\geq k} (U_\sigma - U'_\sigma)\times|\sigma| & \longrightarrow & W_k - W_{k+1} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\omega} \\ \displaystyle\bigsqcup_{\dim\sigma\geq k} (U_\sigma - U'_\sigma) & \longrightarrow & X_k - X_{k+1}, \end{array}$$

nos quais $U'_\sigma = U_\sigma \cap X_{k+1}$, $\bigsqcup$ simboliza união disjunta e ω é, por abuso de notação, a restrição de ω a $W_k - W_{k+1}$. As aplicações horizontais são homeomorfismos (SEGAL, 1968b, p. 146). A aplicação vertical à esquerda é uma equivalência por homotopia, pois os espaços $|\sigma|$ são contráteis. Assim,

$$\omega^* : H_G^*(X_k - X_{k+1}) \longrightarrow H_G^*(W_k - W_{k+1})$$

induz um isomorfismo.

Passo 2.

Consideremos os pares $X_k \supset X_{k+1}$ e $W_k \supset W_{k+1}$. Seja $V = (V_\beta)_{\beta\in B}$ a família de todas as G-vizinhanças fechadas de X_{k+1} em X_k.

Lema 3.4.2. $H_G^*(V_\beta - X_{k+1}) \cong H_G^*(\omega^{-1}(V_\beta) - W_{k+1})$, para cada vizinhança $V_\beta \in V$.

Prova. Seja V_β uma G-vizinhança fechada de X_{k+1} em X_k. Então, $X_{k+1} \subset V_\beta \subset X_k$. Também, $W_{k+1} \subset \omega^{-1}(V_\beta) \subset W_k$. Note que:

$$\omega^{-1}(V_\beta)\bigcap \bigsqcup_{\dim\sigma\geq k}((U_\sigma - U'_\sigma)\times|\sigma|) = \bigsqcup_{\dim\sigma\geq k}(V_\beta \cap (U_\sigma - U'_\sigma)\times|\sigma|).$$

Como $\displaystyle\bigsqcup_{\dim\sigma\geq k}((U_\sigma - U'_\sigma)\times|\sigma|) \longrightarrow (W_k - W_{k+1})$ é G-homeomorfismo, então

$$\omega^{-1}(V_\beta)\bigcap\bigsqcup_{\dim\sigma\geq k}((U_\sigma - U'_\sigma)\times|\sigma|) \longrightarrow \omega^{-1}(V_\beta)\cap(W_k - W_{k+1}) = (\omega^{-1}(V_\beta) - W_{k+1})$$

também o é, ou seja,

$$\bigsqcup_{\dim\sigma\geq k}(V_\beta\bigcap(U_\sigma - U'_\sigma)\times|\sigma|) \xrightarrow{\cong} \omega^{-1}(V_\beta) - W_{k+1}.$$

Analogamente, como $\displaystyle\bigsqcup_{\dim\sigma\geq k}(U_\sigma - U'_\sigma) \longrightarrow X_k - X_{k+1}$ é G-homeomorfismo, então

$$V_\beta\bigcap\bigsqcup_{\dim\sigma\geq k}(U_\sigma - U'_\sigma) \longrightarrow V_\beta\bigcap(X_k - X_{k+1}) = V_\beta - X_{k+1},\ \text{isto é,}$$

$$\bigsqcup_{\dim\sigma\geq k}(V_\beta\bigcap(U_\sigma - U'_\sigma)) \longrightarrow V_\beta - X_{k+1}$$

é G-homeomorfismo. Consideremos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\bigsqcup_{\dim\sigma\geq k}(V_\beta\bigcap(U_\sigma - U'_\sigma)\times|\sigma|) \arrow[r] \arrow[d] & \omega^{-1}(V_\beta) - W_{k+1} \arrow[d, "\omega"] \\
\displaystyle\bigsqcup_{\dim\sigma\geq k}(V_\beta\bigcap(U_\sigma - U'_\sigma)) \arrow[r] & V_\beta - X_{k+1}.
\end{tikzcd}$$

Como anteriormente, as aplicações horizontais são G-homeomorfismos e a vertical à esquerda é uma equivalência por homotopia. Segue que

$$\omega^*:\ H^*_G(V_\beta - X_{k+1}) \cong H^*_G(\omega^{-1}(V_\beta) - W_{k+1}).$$

□

Lema 3.4.3. Para todo $V_\beta \in V$, temos

$$H^*_G(X_k, V_\beta) \cong H^*(X_k - X_{k+1}, V_\beta - X_{k+1}) \ \ \text{e} \ \ H^*_G(W_k, \omega^{-1}(V_\beta)) \cong H^*_G(W_k - W_{k+1}, \omega^{-1}(V_\beta) - W_{k+1}).$$

Prova. Segue diretamente do axioma da excisão para a cohomologia de Borel, pois

$$X_{k+1} = \overline{X_{k+1}} \subset \text{int}\,(V_\beta) \subset V_\beta,$$

desde que V_β é uma vizinhança. Analogamente,

$$W_{k+1} = \overline{W_{k+1}} \subset \text{int}\,(\omega^{-1}(V_\beta)).$$

□

Lema 3.4.4. Para todo $V_\beta \in V$, temos $H_G^*(X_k, V_\beta) \cong H_G^*(W_k, \omega^{-1}(V_\beta))$.

Prova. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_G^*(X_k - X_{k+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_G^*(V_\beta - X_{k+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_G^*(X_k - X_{k+1}, V_\beta - X_{k+1}) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
H_G^*(W_k - W_{k+1}) \arrow[r] & H_G^*(\omega^{-1}(V_\beta) - W_{k+1}) \arrow[r] & H_G^*(W_k - W_{k+1}, \omega^{-1}(V_\beta) - W_{k+1}) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H_G^{*+1}(X_k - X_{k+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_G^{*+1}(V_\beta - X_{k+1}) \arrow[d, "\cong"'] \\
{} \arrow[r] & H_G^{*+1}(W_k - W_{k+1}) \arrow[r] & H_G^{*+1}(\omega^{-1}(V_\beta) - W_{k+1})
\end{tikzcd}$$

As linhas horizontais são dadas pelas sequências exatas longas dos pares

$$(X_k - X_{k+1}, V_\beta - X_{k+1}) \text{ e } (W_k - W_{k+1}, \omega^{-1}(V_\beta) - W_{k+1}).$$

A aplicação $\omega\colon W_k \longrightarrow X_k$, restrição de $\omega\colon W_U \longrightarrow X$, induz as aplicações verticais. Os isomorfismos vêm dos diagramas das discussões anteriores. Segue do Lema dos Cinco que

$$H_G^*(X_k - X_{k+1}, V_\beta - X_{k+1}) \cong H_G^*(W_k - W_{k+1}, \omega^{-1}(V_\beta) - W_{k+1}).$$

Pelos lemas anteriores

$$H_G^*(X_k, V_\beta) \cong H_G^*(W_k, \omega^{-1}(V_\beta)).$$

□

Podemos definir a seguinte relação de quase-ordem (reflexiva e transitiva) em $V = (V_\beta)_{\beta\in B}$:

$$V_\beta \leq V_\gamma, \text{ quando } V_\gamma \subset V_\beta.$$

Com isto obtemos um sistema dirigido $(V, \leq)$.

Observação 3.4.5. Dado o sistema dirigido $(V, \leq)$, a família de imagens inversas $W = (\omega^{-1}(V_\beta))$, juntamente com a relação de quase-ordem $\leq$ é também um sistema dirigido. Além disso, se considerarmos W_1 a coleção de todas as G-vizinhanças fechadas de W_{k+1} em W_k, então o sistema dirigido W será cofinal a W_1, isto é, dado uma vizinhança U' de W_{k+1} em W_k, existe vizinhança $\omega^{-1}(V') \in W$ tal que $W_k \subset \omega^{-1}(V') \subset U'$. De fato, observe que $\omega\colon W_k \longrightarrow X_k$ é sobrejetora e aberta (pois é restrição da projeção na primeira coordenada). Também temos que $\omega\colon W_k - W_{k+1} \longrightarrow X_k - X_{k+1}$ é sobrejetora.

Agora, suponhamos que $W_{k+1} \subset U' \subset W_k$, com U' vizinhança fechada de W_k em W_{k+1}. Então, $W_k - U'$ é aberto e $\omega(W_k - U')$ é aberto em X_k. Temos $\omega(W_k - U') \subset X_k - X_{k+1}$, pois $W_k - U' \subset W_k - W_{k+1}$. Assim, $V' = X_k - (\omega(W_k - U')) \supset X_{k+1}$ e é um fechado.

Note que se $x \in \omega^{-1}(V')$, então $\omega(x) \in X_k - \omega(W_k - U')$, isto é, $\omega(x) \notin \omega(W_k - U')$. Logo, $x \notin W_k - U'$ e, portanto, $x \in U'$. Assim, $\omega^{-1}(V') \subset U'$ e contém W_{k+1}.

Segue da Observação 3.4.5 que

$$\varinjlim H_G^*(W_k, \omega^{-1}(V_\beta)) \cong H_G^*(W_k, W_{k+1}),$$

no qual o limite direto é tomado em relação a $W = (\omega^{-1}(V_\beta))$.

Proposição 3.4.6. $H_G^*(W_k, W_{k+1}) \cong H_G^*(X_k, X_{k+1})$.

Prova. Basta considerarmos o diagrama a seguir.

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim H_G^*(X_k, V_\beta) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"] & H_G^*(X_k, X_{k+1}) \arrow[d] \\
\varinjlim H_G^*(W_k, \omega^{-1}(V_\beta)) \arrow[r, "\cong"] & H_G^*(W_k, W_{k+1}).
\end{tikzcd}$$

□

Com isto concluímos o passo 2.

Passo 3

Este passo também pode ser encontrado em (COSTINESCU, 2012, página 21).

Proposição 3.4.7. Para qualquer k temos $H_G^*(X, X_k) \cong H_G^*(W_U, W_k)$.

Prova. Considere as triplas (X_{k-2}, X_{k-1}, X_k) e (W_{k-2}, W_{k-1}, W_k). Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
H_G^*(X_{k-1}, X_k) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_G^*(X_{k-2}, X_{k-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_G^*(X_{k-2}, X_k) \arrow[r] \arrow[d] & H_G^*(X_{k-1}, X_k) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_G^*(X_{k-2}, X_{k-1}) \arrow[d, "\cong"'] \\
H_G^*(W_{k-1}, W_k) \arrow[r] & H_G^*(W_{k-2}, W_{k-1}) \arrow[r] & H_G^*(W_{k-2}, W_k) \arrow[r] & H_G^*(W_{k-1}, W_k) \arrow[r] & H_G^*(W_{k-2}, W_{k-1})
\end{tikzcd}$$

Segue do Lema dos Cinco que

$$H_G^*(X_{k-2}, X_k) \cong H_G^*(W_{k-2}, W_k).$$

No próximo passo, considerando as triplas (X_{k-3}, X_{k-1}, X_k) e (W_{k-3}, W_{k-1}, W_k), obteremos

$$H_G^*(X_{k-3}, X_k) \cong H_G^*(W_{k-3}, W_k), \text{ para todo } k.$$

Como $X_0 = X$ e $W_0 = W_U$, segue que no passo k, obtemos $H_G^*(X_0, X_k) \cong H_G^*(W_0, W_k)$, como queríamos demonstrar. □

Finalmente estamos aptos a provar o isomorfismo ω^*.

Como a dimensão por cobertura de X é finita, existe um k tal que $X_k = \emptyset$. Com isto, para este mesmo k, $W_k = \emptyset$. Assim,

$$\omega^*\colon H^*_G(X,\emptyset) \cong H^*_G(W_U,\emptyset).$$

O modelo W_U construído depende da escolha da cobertura U. Agora apresentamos alguns conceitos relacionando duas escolhas de coberturas para o G-espaço X.

Definição 3.4.8. Sejam X e Y dois G-espaços compactos, $U = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $V = \{V_\beta\}_{\beta\in B}$ coberturas por fechados invariantes de X e Y, respectivamente. Um morfismo entre os pares (X,U) e (Y,V) é um par de aplicações $(f,\theta)\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ tais que $f\colon X \longrightarrow Y$ é uma G-aplicação e $\theta\colon A \longrightarrow B$ satisfaz $f(U_\alpha) \subset V_{\theta(\alpha)}$.

Observação 3.4.9. Se temos $\sigma \in N_U$ tal que

$$\sigma = \{\alpha_0,\ldots,\alpha_p\} \text{ e } \bigcap_{i=0}^{p} U_{\alpha_i} \neq \emptyset, \text{ então, } \bigcap V_{\theta(\alpha_i)} \neq \emptyset.$$

Logo, θ é um morfismo entre os complexos simpliciais N_U e N_V. Além disso, podemos estendê-lo para uma aplicação $|\theta|\colon |N_U| \longrightarrow |N_V|$ e, consequentemente, obter uma aplicação

$$f\times|\theta|\colon W_U(X) \longrightarrow W_V(Y), \text{ nos quais } W_U(X) = \bigcup_{\sigma\in N_U} (U_\sigma \times |\sigma|) \text{ e } W_V(Y) = \bigcup_{\gamma\in N_V} (V_\gamma \times |\gamma|).$$

Proposição 3.4.10 ((COSTINESCU, 2012), Lemma 1)**.** Dados dois morfismos (f,θ_1), (f,θ_2), estes induzem G-aplicações homotópicas entre $W_U(X)$ e $W_V(Y)$.

Fixemos uma cobertura U de X. Então, provaremos o Teorema 3.2.1(ii):

Seja $\mathcal{V}$ um refinamento de U. Então, existirá uma G-aplicação $W_{\mathcal{V}} \longrightarrow W_U$, definida a menos de G-homotopia, a qual respeita as filtrações e projeções anteriores.

Prova. Dado $V_\beta \in \mathcal{V}$, existe pelo menos um $U_\alpha \in U$ tal que $V_\beta \subset U_\alpha$. Para cada índice β, escolhendo $\alpha = \theta(\beta)$, obtemos um morfismo θ entre $\mathcal{V}$ e U e, como consequência, um aplicação $i\times|\theta|\colon W_{\mathcal{V}} \longrightarrow W_U$, no qual i é a inclusão. Por construção, esta G-aplicação respeita filtrações e projeções sobre X e, pela Proposição 3.4.10, outras escolhas para θ geram aplicações homotópicas . □

Temos a filtração de W_U dada por

$$W_U^0 \subset W_U^1 \subset \cdots \subset W_U, \text{ nos quais } W_U^p = \bigcup_{\dim(\sigma)\leq p} (U_\sigma \times |\sigma|).$$

Lema 3.4.11. (SEGAL, 1968a, Lema 5.4),(SEGAL, 1968b, p. 145 (iii)) A aplicação diagonal $W_U \longrightarrow W_U \times W_U$ é G-homotópica a uma aplicação que preserva filtração, quando a filtração de $W_U \times W_U$ é definida por $(W_U \times W_U)^n = \bigcup_{p+q=n} W_U^p \times W_U^q$.

Também temos a filtração de $H_G^*(X)$:

$H_G^*(X) = H_{G,0}^*(X) \supset H_{G,1}^*(X) \supset \cdots \supset H_{G,s}^*(X) \supset \cdots$, no qual $H_{G,s}^*(X) = \ker[H_G^*(X) \longrightarrow H_G^*(W_U^{s-1})]$.

A demonstração do Teorema 3.2.1(iii) que diz: $H_{G,s}^*(X) \cdot H_{G,s'}^*(X) \subset H_{G,s+s'}^*(X)$, pode ser encontrada em (SEGAL, 1968a, Proposição 5.3).

Capítulo 4

Grafo de Reeb como subcomplexo de uma variedade

O grafo de Reeb $R(f)$ é um invariante fundamental de uma função suave $f\colon M \to \mathbb{R}$ cujos pontos críticos são isolados. Ele é definido como o espaço quociente $M/_\sim$ de uma variedade M suave fechada (compacta e sem bordo) por uma relação dependendo de f. Iremos construir um complexo 1-dimensional $\Gamma(f)$ mergulhado em M, o qual será equivalente por homotopia a $R(f)$. Como consequência, mostraremos que para toda função f definida em um variedade com grupo fundamental finito, seu grafo de Reeb $R(f)$ será uma árvore (grafo sem laços). Se $\pi_1(M)$ for um grupo abeliano, ou mais geralmente, um grupo discreto *ameanable*[1], então $R(f)$ conterá no máximo um laço. Finalmente, provaremos que o número de laços do grafo de Reeb de qualquer função definida em uma superfície M_g é limitado superiormente por g, o genus de M_g.

Este capítulo é organizado da seguinte forma. Na Seção 4.1, apresentamos as notações e hipóteses gerais válidas para todas as demais seções, bem como a definição de grafo de Reeb. Recordaremos algumas definições e resultados clássicos sobre variedades e trajetória gradiente. As Seções 4.2 e 4.3 são devotadas em estabelecer correspondência básica entre certos conjuntos de componentes conexas, conjuntos de classes de homotopias de caminhos e arestas e vértices do grafo de Reeb. Reunimos estes resultados na Seção 4.4, onde definimos e estudamos $\Gamma(f)$. Finalmente, na Seção 4.5, aplicaremos estes resultados para estimar o número de laços do grafo de Reeb $R(f)$ para uma superfície M_g.

[1] Veja Definição A.6.4.

4.1 Conceitos básicos

Sejam M uma variedade diferenciável sem bordo e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Dizemos que $p \in M$ é um **ponto crítico** de f quando $f'(p)\colon T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$, a derivada de f no ponto p, for uma transformação linear nula, no qual T_pM denota o espaço tangente à variedade M no ponto p. Caso contrário, isto é, quando $f'(p)$ for não nula (e, portanto, sobrejetora), o ponto p é dito **regular**. Um **valor regular** é um número real $c \in \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(c)$ possui somente pontos regulares. Caso contrário, quando possuir ao menos um ponto crítico, será chamado de **valor crítico**.

Convenção. O termo **suave** será destinado a objetos de classe C^1, por exemplo, função suave e variedade suave referem-se à funções de classe C^1 e variedades de classe C^1, respectivamente.

Proposição 4.1.1 ((LIMA, 2008, Capítulo VII, Proposição 1))**.** Seja $c \in \mathbb{R}$ um valor regular de uma função suave $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$, no qual M é uma variedade suave de dimensão n. Então $f^{-1}(c)$ ou é o conjunto vazio ou é uma subvariedade de M de dimensão $n-1$.

Vemos pela Proposição 4.1.1 que temos boas propriedades com respeito à valores regulares quando tratamos de variedades e funções suaves. Além disso, em (LIMA, 2008, Capítulo VII, Proposição 2), tem-se:

"O conjunto X dos pontos regulares de uma função suave $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ é aberto e $f|_X\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função aberta."

Logo, se $c \in \mathbb{R}$ é valor regular de $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $f^{-1}((-\epsilon + c, \epsilon + c))$ não contém pontos críticos.

Dizemos que uma variedade suave M é **fechada** quando M for uma variedade compacta e sem bordo. Neste caso, observamos que dado um valor regular $c \in \mathbb{R}$ de f, o número de componentes conexas de $f^{-1}(c)$ é finito. De fato, por ser subvariedade, $f^{-1}(c)$ é localmente conexo, logo, as componentes conexas formam uma cobertura aberta de $f^{-1}(c)$. Como $f^{-1}(c)$ é um subespaço fechado em M segue que é compacto e, portanto, que a cobertura é finita. Observe que neste caso, componentes conexas e componentes conexas por caminhos coincidem.

As componentes conexas de $f^{-1}(c)$ são ditas **componentes conexas do nível** c. No caso em que c for um valor crítico, as componentes conexas de $f^{-1}(c)$ que contiver pontos crítcos serão chamadas de **componentes conexas críticas do nível** c.

Um ponto crítico $p \in M$, com relação a f, será **isolado** quando existir uma vizinhança aberta $U \subset M$ de p tal que $U - \{p\}$ não contém pontos críticos. Então quando M for fechada e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ for uma função suave que admite somente pontos críticos isolados, o conjunto $\mathrm{Cr}(f)$ dos pontos críticos será finito. O resultado a seguir traz um estudo sobre as componentes conexas críticas de um dado valor.

Proposição 4.1.2. Sejam M uma variedade suave fechada e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com pontos críticos isolados. Então, as componentes conexas críticas são também componentes conexas por caminhos.

Prova. Seja $d \in \mathbb{R}$ um valor crítico de f. Uma vez que espaços conexos por caminhos são necessariamente conexos, precisamos verificar somente que dada uma componente conexa C em $f^{-1}(d)$, esta seja conexa por caminhos.

Vamos supor que C possui somente um único ponto crítico p. Se $C = \{p\}$ não temos o que provar. Então suponhamos que $C \neq \{p\}$.

O espaço $C - \{p\}$ é localmente conexo por caminhos. De fato,

> dado $y \in C - \{p\}$, tome uma vizinhança aberta U_y em M tal que $V_y = U_y \cap f^{-1}(d) \subset C - \{p\}$ contém somente pontos regulares de f. Logo $f|_{U_y}\colon U_y \longrightarrow \mathbb{R}$ é função suave com valor regular d e, portanto, $f|_{U_y}^{-1}(d) = V_y$ é uma subvariedade de U_y, logo, localmente conexa por caminhos.

Então, dado $y \in C - \{p\}$, a componente conexa C_y de y em $C - \{p\}$ é, portanto, conexa por caminhos. Além disso, temos $p \in \overline{C_y}$. Com efeito,

> se $p \notin \overline{C_y}$, então C_y é fechado em C, pois $\overline{C_y} = C_y$ em C. Por outro lado, como C_y é aberto em $C - \{p\}$, segue que é aberto em C. Então, C_y é aberto e fechado em C e não contém p, logo $C_y = \emptyset$. Contradição!

Considere uma família de abertos em M encaixados, indexados em $m \in \mathbb{N}$,

$$\ldots \subset D_m \subset D_{m-1} \subset \ldots \subset D_1,$$

difeomorfos a discos em $\mathbb{R}^n$, cujo centros correspondem a p, no qual n é a dimensão de M.

Tome $y \in \partial D_1$, o bordo de $\overline{D_1}$. Note que $C_y \cap \partial D_m \neq \emptyset$, para todo $m \in \mathbb{N}$, pois caso contrário $C_y \cap D_m$ e $C_y - \overline{D_m}$ seriam dois abertos disjuntos que cobririam C_y, contradizendo o fato deste ser conexo por caminhos.

Escolhidos $y_m \in C_y \cap \partial D_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$, com $y = y_1$, existem caminhos $\gamma_m\colon [0,1] \longrightarrow C_y$ unindo y_m a y_{m+1}. Podemos então definir o seguinte caminho $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow C_y \cup \{p\}$:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma_2(t) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1/4, \\ \vdots & \quad \vdots \\ \gamma_n(t) & \text{se } 1 - 1/2^n \leq t \leq 1 - 1/2^{n+1}, \\ \vdots & \quad \vdots \\ p & \text{se } t = 1. \end{cases}$$

Então, para todo ponto $y \in C$ próximo de p, existe um caminho ligando p a y. Assim, C é localmente conexo por caminhos e, por sua vez, será conexo por caminhos.

Note que todo argumento pode ser dado localmente ao redor de p e que, portanto é suficiente considerar somente o caso em que C contém somente um único ponto crítico. □

Observação 4.1.3. Note também que todos os caminhos γ_n usados na construção de γ podem ser tomados como mergulhos homeomorfos a intervalos de comprimento $1/2^n$. Consequentemente, o caminho limite $\gamma\colon I \to C$ satisfaz $\gamma(0) = y$, $\gamma(1) = p$ e é homeomorfo a I, isto é, um arco.

Observação 4.1.4. Como comentado em (SHARKO, 2006), uma componente conexa C de um valor crítico é uma variedade com singularidades de codimensão 1, no qual o conjunto de singularidades consiste dos pontos críticos que estão em C.

Grafo de Reeb

Sejam M uma variedade suave fechada e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com pontos críticos isolados. Então, denotaremos por M_c o conjunto $f^{-1}(c)$. Observe que $M = \bigcup_{c\in\mathbb{R}} M_c$. Mais ainda, M é a união disjunta de todas as componentes conexas (ou conexas por caminhos) de todos os conjunto de níveis de M_c, $c \in \mathbb{R}$. Estas componentes estabelecem uma relação de equivalência que definiremos a seguir.

Definição 4.1.5 (Grafo de Reeb)**.** Sejam M uma variedade suave fechada e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com pontos críticos isolados. Dados $x, y \in M$, dizemos que x se relaciona com y e denotamos por $x \sim y$ se, e somente se, $f(x) = f(y) = c$ e x, y pertencem à mesma componente conexa em M_c, para algum $c \in \mathbb{R}$. O espaço quociente $M/_\sim$ é chamado **grafo de Reeb** da função f e é denotado por $R(f)$.

Em virtude da Proposição 4.1.2, podemos dizer que dois pontos $x, y \in M$ estão relacionados se, e somente se, existe um caminho $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$ tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ e $f(\gamma(t)) = f(x) = f(y)$, para todo $t \in [0,1]$.

O espaço quociente $R(f)$ acima recebe o nome de grafo de Reeb por ter sido introduzido por G. Reeb em (REEB, 1946). Mas também pode ser encontrado na literatura com o nome de grafo de Kronrod-Reeb, como consta em (SHARKO, 2006), devido ao trabalho de A. S. Kronrod em (KRONROD, 1950). O termo grafo será melhor explicado após o seguinte lema.

Lema 4.1.6 ((KRONROD, 1950; REEB, 1946; SHARKO, 2006))**.** Sejam M uma variedade suave fechada e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com pontos críticos isolados. O espaço quociente $R(f)$ é homeomorfo a um complexo simplicial de dimensão 1. Mais ainda, os vértices de $R(f)$ correspondem às classes dos pontos críticos de f, ou seja, as componentes conexas de valores críticos que contenham pontos críticos.

Observação 4.1.7. Um grafo é um complexo simplicial abstrato de dimensão 1[2]. Ao dizermos que $R(f)$ é um grafo, estamos identificando-o com sua realização geométrica como um complexo CW de dimensão 1.

Notações. Uma componente conexa qualquer de M_c será denotada por C_{M_c}. Quando esta possuir pelo menos um ponto crítico de f, escreveremos $C^*_{M_c}$ e a chamaremos de uma **componente conexa crítica** de M_c.

Então, as componentes conexas críticas correspondem aos vértices do grafo de Reeb $R(f)$.

Trajetórias gradiente

Para prosseguirmos com as próximas construções das seções seguintes precisamos resgatar alguns fatos sobre campos de vetores e fluxo gradiente.

Seja M uma variedade suave. Denotaremos por TM o fibrado tangente de M, isto é, $TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$. Um **campo de vetores** suave sobre M é uma aplicação suave $X\colon M \longrightarrow TM$ tal que $\pi_1 \circ X(p) = p$, no qual $\pi_1\colon TM \longrightarrow M$ é projeção na primeira coordenada. Denotaremos o conjunto de todos os campos vetoriais suaves sobre M por $\Gamma(M)$.

Um **fluxo** sobre M é uma função contínua $\varphi\colon \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ satisfazendo:

$$\varphi(0,x) = x \quad \text{e} \quad \varphi(t_1 + t_2, x) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, x)),$$

para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e $x \in M$. Em outras palavras, interpretando $(\mathbb{R}, +)$ como grupo topológico aditivo, a função φ é uma ação de $\mathbb{R}$ sobre M.

Por φ_p entenderemos a trajetória $\varphi_p\colon \mathbb{R} \longrightarrow M$ tal que $\varphi_p(t) = \varphi(t,p)$. Em termos de ação, a imagem de φ_p é a órbita de p. Por φ^t, temos $\varphi^t\colon M \longrightarrow M$, um homeomorfismo, tal que $\varphi^t(x) = \varphi(t,x)$, para $t \in \mathbb{R}$. Em termos de ação, este último é, na verdade, a translação por t.

Teorema 4.1.8 ((BURNS; GIDEA, 2005, Teorema 2.3.3))**.** Sejam M uma variedade suave e X um campo de vetores suave em M. Para cada ponto $p \in M$, existe uma curva suave $\varphi_p\colon (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ tal que $\varphi_p(0) = p$ satisfazendo

$$\varphi_p'(t) = X(\varphi_p(t)) \quad \text{e} \quad \varphi_p(0) = p.$$

Esta curva é dita **curva integral** (ou solução), com condição inicial p, para o campo de vetores X. Se $\mu\colon (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ é outra curva integral com condição inicial p para o campo de vetores X, então $\varphi_p = \mu$ num intervalo $(-c, c) \subset (-\delta, \delta) \cap (-\epsilon, \epsilon)$.

A solução $\varphi_p(t)$ depende continuamente da condição inicial p. Existe um intervalo maximal I_p no qual a solução φ_p está definida. A aplicação $\varphi\colon \{(t,p); p \in M \text{ e } t \in I_p\} \longrightarrow M$ é

[2] Veja Seção 4.4.

um fluxo local, isto é, $\varphi(0,p) = p$ e $\varphi(t_1+t_2,p) = \varphi(t_1,\varphi(t_2,p))$, sempre que $t_1,t_2,t_1+t_2 \in I_p$. Se M for compacta, então o fluxo pode ser definido globalmente sobre $\mathbb{R}\times M$.

Definição 4.1.9 ((BURNS; GIDEA, 2005, Definição 8.2.1))**.** Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana[3] sem bordo e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. O campo de vetores gradiente ∇f (ou grad_f) é unicamente definido pela condição:

para cada $p \in M$, o vetor $\nabla f(p)$ é o único que satisfaz

$$g(\nabla f(p), X(p))_p = f'(p)(X(p)),$$

para todo campo de vetores X em M.

Substituindo X por $-\nabla f$ no Teorema 4.1.8, obtemos algumas definições. Uma curva integral, com condição inicial p, para o campo gradiente negativo $-\nabla(f)$ é chamada de **trajetória gradiente** passando por p. Um fluxo local (ou global) com respeito a este campo será chamado de **fluxo gradiente**.

O próximo teorema resume algumas das propriedades envolvendo $-\nabla f$, no qual $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave.

Teorema 4.1.10 ((KATOK; HASSELBLATT, 1995, Capítulo 1, Seção 6),(BURNS; GIDEA, 2005, Teorema 8.3.1))**.** Sejam (M,g) uma variedade suave fechada e Riemanniana e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Seja $-\nabla f(x)\colon M \to TM$ o campo de vetores gradiente negativo definido por f e pela estrutura Riemanniana. Então, as seguintes condições são satisfeitas:

1. A função f é estritamente decrescente ao longo de uma trajetória gradiente, exceto ao longo de trajetórias gradientes passando por pontos críticos de f, no qual neste caso f será constante.

2. O campo $-\nabla f$ é ortogonal aos conjuntos de níveis $f^{-1}(c)$, com $c \in \mathbb{R}$.

   Denotaremos por $\omega_{-\nabla f}(p)$ o conjunto $\{q \in M;\, \exists t_n \longrightarrow \infty \text{ tal que } \varphi_p(t_n) = q\}$ e o chamaremos de conjunto ω-limite, no qual φ é um fluxo gradiente. De modo semelhante, denotaremos por $\alpha_{-\nabla f}(p)$ o conjunto $\{q \in M;\, \exists t_n \longrightarrow -\infty \text{ tal que } \varphi_p(t_n) = q\}$ e o chamaremos de conjunto α-limite.

3. Para todo $p \in M$, o conjunto $\omega_{-\nabla f}(p)$ ou contém um único ponto ou infinitos pontos. O mesmo vale para $\alpha_{-\nabla f}(x)$.

4. O conjunto ω-limite e o conjunto α-limite consistem de pontos críticos de f.

[3] Uma métrica Riemanniana numa variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno no espaço tangente T_pM. Uma variedade M juntamente com uma métrica Riemanniana g é uma variedade Riemanniana (M,g). Mais detalhes em (LIMA, 2008, Capítulo IX).

5. Se a função f tem somente pontos críticos isolados então toda trajetória gradiente converge para um ponto crítico de f quando $t \to \pm\infty$. Ou seja, $\lim_{t\to\pm\infty} \varphi_p(t)$ são pontos críticos de f, para todo $p \in M$.

4.2 Componentes arestas

Sejam M uma variedade suave fechada e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com pontos críticos isolados.

Nesta seção iremos estabelecer uma correspondência biunívoca entre certas componentes da variedade M e as arestas do grafo de Reeb $R(f)$. Além disso, apresentamos uma construção que antecede ao grafo de Reeb, e que se mostra como uma etapa muito útil para obtermos a construção do grafo de Reeb como classes de certos caminhos ligando pontos críticos.

Denotaremos por $M^{(c,c')}$ a imagem inversa $f^{-1}(c,c')$, no qual $c < c' \in \mathbb{R}$. Note que como (c,c') é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, o conjunto $M^{(c,c')}$ é uma variedade suave sem bordo de mesma dimensão que M. Estamos interessados em estudar os diferentes tipos de componentes conexas de $M^{(c,c')}$ com relação aos pontos críticos de f.

Definição 4.2.1. Sejam M uma variedade suave fechada e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com pontos críticos isolados. Dados valores $c, c' \in R$ tais que $c < c'$, existem três possibilidades para uma componente conexa C de $M^{(c,c')}$:

1. C é do **tipo I** quando contém pelo menos um ponto crítico;

2. C é do tipo **tipo II** quando não contém nenhum ponto crítico;

   No caso em que c, c' são valores críticos, teremos:

3. C é uma **componente-aresta** quando for uma componente do tipo II tal que $\overline{C} \cap C^*_{M_c} \neq \emptyset$ e $\overline{C} \cap C^*_{M_{c'}} \neq \emptyset$, ou seja, o fecho de C contém pontos críticos de M_c e de $M_{c'}$.

Em outras palavras, componente-aresta é uma componente conexa de $M^{(c,c')}$ a qual intersecta todas os conjuntos de nível de $M^{(c,c')}$ e seu bordo intersecta alguma componente conexa crítica de M_c e $M_{c'}$.

Uma componente-aresta é difeomorfa ao produto de uma componente conexa de um valor regular e um intervalo aberto, como podemos ver na proposição a seguir.

Proposição 4.2.2. Sejam M uma variedade suave fechada e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com pontos críticos isolados. Suponhamos que C seja uma componente-aresta de $M^{(c,c')}$. Então existe um difeomorfismo

$$C_{M_a} \times (c,c') \cong C,$$

no qual C_{M_a} é uma componente conexa contida em C de um valor regular qualquer $a \in (c,c')$.

Prova. Seja g uma métrica Riemanniana para M e consideremos $-\nabla f$ o campo de vetores gradiente negativo. Temos $||\nabla f(p)||_g > 0$, para todo $p \in C$, pois C não contém pontos críticos e ∇f se anula somente em pontos críticos de f. Então, o campo de vetores suave $X = \frac{-\nabla f}{||\nabla f||}$ está bem definido em toda a variedade C, em particular, em todo o conjunto $M^{[a,b]} \cap C$, no qual $[a,b] \subset (c,c')$.

Denotemos por $k\colon C \longrightarrow \mathbb{R}$, a restrição de f em C, isto é, $k = f|_C$.

Seja γ_p uma curva integral, com condição inicial p, para o campo X, no qual $p \in k^{-1}(a) = C_{M_a}$. A aplicação suave $f \circ \gamma_p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $\dfrac{d}{dt} f(\gamma_p(t)) = 1$. Isto significa que no tempo $t = 0$, f está no conjunto de nível a, e atingirá o conjunto de nível b, quando $t = b - a$.

Obteremos um difeomorfismo

$$h\colon C_{M_a} \times [a,b] \longrightarrow C \cap M^{[a,b]}, \text{ definido por } h(p,t) = \gamma_p(t-a),$$

pois $\gamma_p(t)$ depende suavemente de p e t e é difeomorfismo em cada coordenada.

Agora, estenderemos o difeomorfismo para toda a componente conexa C. Considere uma família ascendente de intervalos $\{[a_n,b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$, tais que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n,b_n] = (c,c') \quad \text{e} \quad a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n,b_n].$$

Em seguida obtemos $h_n\colon C_{M_a} \times [a_n,b_n] \to k^{-1}([a_n,b_n])$ de maneira similar à que obtemos h. Pela unicidade da curva integral passando através de um ponto, podemos definir um difeomorfismo como limite direto

$$\varinjlim_n h_n\colon C_{M_a} \times \bigcup_n [a_n,b_n] = C_{M_a} \times (c,c') \to \bigcup_n g^{-1}([a_n,b_n]) = C$$

pela fórmula $(p,t) \mapsto h_n(p,t)$, para algum n. □

Observação 4.2.3. A Proposição 4.2.2 é uma extensão do Teorema (MATSUMOTO, 2002, Teorema 2.31), que diz que $M^{[a,b]}$ é homeomorfo a $M_a \times [0,1]$. Deste resultado, para todo $c < a < b < c'$, temos uma bijeção entre as componentes conexas de $M^{[a,b]}$ e as componentes conexas de M_a (ou M_b). Desde que uma componente conexa C do tipo II intersecta exatamente uma componente conexa de $M^{[a,b]}$, então intersecta somente uma componente conexa de M_a.

Em resumo, uma componente conexa C de $M^{(c,c')}$ do tipo (II) intersecta exatamente uma componente conexa de M_d, para cada conjunto de nível $d \in (c,c')$.

Verificaremos agora que o número de componentes conexas da variedade $M^{(c,c')}$ é finito, para qualquer par $c,c' \in \mathbb{R}$. Em particular, o número de componentes-arestas será finito.

Corolário 4.2.4. Sejam M uma variedade suave fechada e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com pontos críticos isolados. Para um par $c,c' \in \mathbb{R}$, a variedade $M^{(c,c')}$ tem um número finito de componentes conexas.

Prova. A variedade $M^{(c,c')}$ se decompõe como união de componentes do tipo I e do tipo II. Como M é compacta e todos os pontos críticos de f são isolados, devemos ter que o número de pontos críticos é finito. Consequentemente, existe apenas um número finito de componentes do tipo I. Assim, é suficiente estimar o número de componentes do tipo II.

Seja um valor regular $d \in (c,c')$. Sabemos que o número de componentes conexas de M_d é finito. Da teoria de Morse, existe mudança na topologia dos conjuntos de nível somente quando se passa através de um ponto crítico. Assim, como temos somente um número finito de valores críticos, teremos uma variação finita no número de componentes conexas dos valores regulares em (c,c'), isto é, um número finito de escolhas de valores regulares d cujos conjuntos de níveis não são homeomorfos. Logo, da Observação 4.2.3, deveremos ter somente um número finito de componentes do tipo II. □

Denotaremos por $\pi\colon M \longrightarrow R(f)$ a projeção canônica com relação ao grafo de Reeb da função suave $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$. Note que existe uma única aplicação $\tilde{f}\colon R(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ que faz o seguinte diagrama comutar.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \\ R(f) \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Iremos denotar o interior de um conjunto J por $\mathrm{int}J$.

Proposição 4.2.5. Sejam M uma variedade suave fechada e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com pontos críticos isolados. Existe uma bijeção entre as componentes-arestas em M e as arestas do grafo de Reeb $R(f)$.

Prova. Seja C uma componente-aresta de $M^{(c,c')}$. Então c, c' são valores críticos, $\overline{C} \cap C^*_{M_{c'}} \neq \emptyset$ e $\overline{C} \cap C^*_{M_c} \neq \emptyset$. Segue do Lema 4.1.6 que $\pi(C^*_{M_{c'}}) = p$ e $\pi(C^*_{M_C}) = q$ correspondem a vértices em $R(f)$.

Como C é conexo e não contém pontos críticos, $\pi(C)$ corresponde a um trecho de aresta de $R(f)$. Mas note que $\tilde{f} \circ \pi(C) = (c,c')$ e que $\tilde{f} \circ \pi(C^*_{M_{c'}}) = c'$, $\tilde{f} \circ \pi(C^*_{M_c}) = c$. Logo $\pi(C)$ corresponde ao interior do 1-simplexo cujos vértices são p, q.

Reciprocamente, seja J uma aresta em $R(f)$ tal que $\tilde{f}(J) = [c,c']$ e seja $x \in \mathrm{int}J$. Suponhamos que $\tilde{f}(x) = d$, então $\pi^{-1}(x) = C_{M_d}$ é uma componente conexa regular de $M_d = f^{-1}(d)$.

Seja C a componente conexa em $M^{(c,c')}$ contendo C_{M_d}. Então, $\pi(C) \subset \mathrm{int}J$. De fato, caso contrário $\pi(C)$ deverá conter pelo menos um ponto crítico, uma vez que, para não estar inteiramente contido em $\mathrm{int}J$ deverá conter pelo menos um dos vértices de J. Mas isto não ocorre pois $f(C) \subset (c,c')$ e os vértices de J correspondem aos valores c e c'.

Suponhamos que $f(C) = (a,b) \subset (c,c')$. Então $C_{M_d} \times [a,b]$ é homeomorfo a $\overline{C}$. Tome $y \in \mathrm{int}J$ tal que $\tilde{f}(y) = t$ e $t > b$ (ou $t < a$). Então $\pi^{-1}(y)$ não intersecta C. Porém $C_{M_d} \times (a,t)$ é homeomorfo a um espaço conexo $C' \subset M^{(c,c,')}$ tal que $C \subset C'$. Mas como C é componente conexa, $C = C'$, o que é uma contradição. Logo, não existe tal y e portanto $f(C) = (c,c')$.

Como $\pi(C) \subset J$, e $\tilde{f} \circ \pi(C) = (c,c')$, a componente C é uma componente-aresta. □

Observação 4.2.6. Segue do Corolário 4.2.4 e da Proposição 4.2.5 que o número de arestas do grafo de Reeb é finito.

Apresentaremos agora uma outra maneira de entendermos as componentes-arestas. Para tanto, consideraremos uma outra relação de equivalência sobre M com respeito a f, que antecede a relação do grafo de Reeb. Com efeito:

dizemos que $x, y \in M$ são **criticamente relacionados** e denotamos por $x \sim_c y$, quando

$x, y \in C^*_{M_d}$, para algum valor crítico d de f; ou

$x \sim_c x$, quando estão em componentes conexas regulares.

Denotaremos por $R_c(f)$ o espaço quociente $M/_{\sim_c}$ e por $\pi_c\colon M \longrightarrow R_c(f)$ a projeção canônica. De modo análogo à relação do grafo de Reeb, existe uma única aplicação $f_c\colon R(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_c \circ \pi_c = f$.

Então, $R_c(f)$ é obtido apenas contraindo-se as componentes conexas críticas de M, ao passo que o grafo de Reeb $R(f)$ é construído contraindo-se todas as componentes conexas dos conjuntos de níveis.

Lema 4.2.7. Considere a aplicação $f_c\colon R_c(f) \longrightarrow \mathbb{R}$. O grafo de Reeb de f_c coincide com o grafo de Reeb de f. □

Consideremos C uma componente-aresta de $M^{(c,c')}$ contendo a componente C_{M_a}, para algum valor regular $a \in (c,c')$.

Denotaremos por $S(C_{M_a}) = C_{M_a} \times [-1,1]/_{\sim}$ a suspensão da componente C_{M_a}. Os pontos $[*,1], [*,-1]$ representam os vértices da suspensão.

Proposição 4.2.8. Os espaços $\pi_c(\overline{C})$ e $S(C_{M_a})$ são homeomorfos.

Prova. Usando as mesmas notações da demonstração da Proposição 4.2.2, definimos uma aplicação

$$\varphi\colon C \to S(C_{M_a}) \ \text{ por } \ p \mapsto [h^{-1}(p)],$$

na qual $h\colon C_{M_a} \times (-1,1) \longrightarrow C$ é o difeomorfismo obtido através do fluxo gradiente. Podemos estender continuamente φ a uma aplicação $\overline{\varphi}\colon \pi_c(\overline{C}) \to S(C_{M_a})$ dada por

$$\overline{\varphi}(p) = \begin{cases} \varphi(p), & \text{se } p \in C, \\ [x,1], & \text{se } p \in M_{c'}, \\ [x,-1], & \text{se } p \in M_c. \end{cases}$$

Desde que $\overline{\varphi}$ é contínua, bijetiva e seu domínio e imagem são compactos e Hausdorff, $\overline{\varphi}$ é um homeomorfismo. Isto prova a proposição. □

Observação 4.2.9. Desde que C_{M_a} é conexo por caminhos, $S(C_{M_a})$ é simplesmente conexo. Dado um ponto $y \in C_{M_a}$ o qual não está em nenhum dos conjuntos α-limite ou ω-limite de um ponto crítico, um intervalo mergulhado $\{y\} \times [c,c']$ (isto é trecho de uma trajetória gradiente passando por $\overline{C}$) é levado por $\overline{\varphi}$ a $\{y\} \times [-1,1]$ em $S(C_{M_a})$.

4.3 Caminhos

O objetivo desta seção é estabelecer uma correspondência entre os vértices e arestas de $R(f)$ e classes de homotopia de caminhos em M, nos quais M é uma variedade suave fechada e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com pontos críticos isolados.

Para isto, consideraremos caminhos especiais que ligam duas componentes conexas críticas, que chamaremos de caminhos-arestas, e variações destes, caminhos-arestas decrescentes e caminhos-arestas estendidos. O resultado principal é verificar que em cada classe de homotopia destes caminhos, sempre existe um caminho estritamente decrescente com respeito à função f que une dois pontos críticos.

Definição 4.3.1. Sejam M uma variedade suave fechada e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com pontos críticos isolados. Seja C uma componente-aresta de $M^{(c,c')}$, para algum par de valores críticos c, c'.

1) Um **caminho-aresta** de C é um caminho $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \overline{C}$ tal que:

   a) $\gamma(0) \in C^*_{M_{c'}}$ e $\gamma(1) \in C^*_{M_c}$,

   b) $\gamma((0,1)) \subset C$.

   Um caminho-aresta é dito **decrescente** (com respeito à f) se

   $$f(\gamma(t)) < f(\gamma(t')) \text{ para } t > t'.$$

2) Um **caminho-vértice** é um caminho $\varepsilon\colon I \to M$ contido em uma componente conexa crítica de algum valor crítico.

Para lidar com estes caminhos, introduziremos o conceito de homotopia relativa às componentes conexas críticas.

Definição 4.3.2. Sejam c, c' dois valores críticos de f e sejam $\gamma_0, \gamma_1 : I \longrightarrow M$ dois caminhos tais que

$$\gamma_0(0), \gamma_1(0) \in C^*_{M_{c'}}, \quad \text{e } \gamma_0(1), \gamma_1(1) \in C^*_{M_c}.$$

Dizemos que uma aplicação $H : I \times I \to M$ é uma homotopia **relativa às componentes críticas (r.c.c.)** entre γ_0 e γ_1 quando:

1. H é uma homotopia entre γ_0 e γ_1.
2. $H(0, s) \in C^*_{M_{c'}}$ e $H(1, s) \in C^*_{M_c}$, para todo $s \in I$.

Dizemos que γ é **contrátil r.c.c.** se existe uma homotopia r.c.c. de γ a um caminho-vértice.

Consideraremos as seguintes notações: C é uma componente-aresta de $M^{(c,c')}$, para algum par de valores críticos c, c'.

Denotaremos por h o homeomorfismo dado na Proposição 4.2.8 entre $\pi_c(\overline{C})$ e $S(D)$, no qual $d \in (c, c')$ é valor regular e $D = C_{M_d}$.

Lema 4.3.3. Sejam γ_0, γ_1 dois caminhos-arestas em C. Então, $\pi_c \circ \gamma_0, \pi_c \circ \gamma_1 : I \longrightarrow S(D)$ são homotópicos como caminhos.

Prova. Desde que γ_i é um caminho-aresta, então $\pi_c \circ \gamma_i$ é um caminho tal que $\pi_c \circ \gamma_i(0) = [*, -1]$ e $\pi_c \circ \gamma_i(1) = [*, 1]$, com $i = 0, 1$.

Como $S(D)$ é simplesmente conexo, estes dois caminhos são homotópicos relativos aos extremos. □

O próximo lema trata do problema em levantar uma homotopia de $S(D) \cong \pi_c(\overline{C})$ para $\overline{C}$.

Lema 4.3.4. Sejam γ_0, γ_1 dois caminhos-arestas em C e $H : I \times I \longrightarrow S(D)$ uma homotopia entre $\pi_c \circ \gamma_0, \pi_c \circ \gamma_1$ tal que $H(t, s) \in D \times (-1, 1)$ quando $t \in (0, 1)$. Então, γ_0 e γ_1 são homotópicos r.c.c.

Prova. O problema de levantar uma homotopia de $\pi_c(\overline{C}) \cong S(D)$ para $\overline{C}$ consiste em encontrar um caminho apropriado em $\overline{C} \setminus C$.

Em cada passo s, seja $x_s \in C^*_{M_{c'}}$ o ponto limite $x_s = \lim_{t \to 0} H(t, s)$ em $\overline{C}$. Pela continuidade de H, $\phi_{c'}(s) = x_s$ é um caminho em $C^*_{M_{c'}}$. De modo análogo, define-se um caminho $y_s = \lim_{t \to 1} H(t, s)$ em $C^*_{M_c}$.

Então podemos definir $\tilde{H}\colon I\times I \longrightarrow \overline{C}$ por

$$\tilde{H}(t,s) = \begin{cases} x_s, & \text{se } t = 0, \\ H(t,s), & \text{se } t \in (0,1), \\ y_s, & \text{se } t = 1. \end{cases}$$

Esta é uma homotopia r.c.c. em $\overline{C}$ de γ_0 para γ_1. □

Proposição 4.3.5. Sejam $\gamma,\delta\colon [0,1] \longrightarrow M$ dois caminhos-arestas correspondentes a uma componente-aresta C de $M^{(c,c')}$. Então, γ e δ são homotópicos *r.c.c.*

Prova. Para um valor regular $d \in (c,c')$, temos o difeomorfismo

$$h\colon C \longrightarrow D\times(-1,1)$$

(veja Proposição 4.2.2). O caminho-aresta tem a propriedade que $\gamma^{-1}(0,1) \subset C$, então podemos identificar $\gamma|_{(0,1)}$ com $h\circ\gamma|_{(0,1)}\colon (0,1) \longrightarrow D\times(-1,1)$. Considere uma homotopia

$$K\colon (0,1)\times I \longrightarrow D\times(-1,1)$$

que contrai $\gamma|_{(0,1)}$ a um ponto $p \in D$.

Podemos estender esta homotopia para $K'\colon [0,1]\times I \longrightarrow \overline{D\times(-1,1)} \subset D\times[-1,1]$, fazendo $K'(0,s) = \lim_{t\to 0} K(t,s)$, $K'(1,s) = \lim_{t\to 1} K(t,s)$ e $K'(t,s) = K(t,s)$, quando $t \in (0,1)$ e $s \in I$.

Sejam π_i a projeção na i-ésima coordenada sobre $D\times[-1,1]$. Temos dois caminhos sobre D, $\pi_1\circ K(0,-)$, $\pi_1\circ K(1,-)\colon I \longrightarrow D$. De modo semelhante, $\pi_2\circ K(0,-)$, $\pi_2\circ K(1,-)\colon I \longrightarrow [-1,1]$ descrevem caminhos sobre $[-1,1]$.

Consideremos, para cada $s \in S$, os caminhos

$$h^s(t) = (\pi_1\circ K(0,s), t(\pi_2\circ K(0,s)) - (1-t))$$

$$l^s(t) = (\pi_1\circ K(1,s), t + (1-t)(\pi_2\circ K(1,s))),$$

com $t \in (0,1)$.

Com $h^{-1}\colon D\times(-1,1) \longrightarrow C$, obtemos caminhos $h^{-1}\circ h^s$, $h^{-1}\circ l^s\colon (0,1) \longrightarrow C$, que podemos estender à caminhos sobre $\overline{C}$, nos quais $h^{-1}\circ h^s(0) \in C_{M^*_{c'}}$ e $h^{-1}\circ l^s(1) \in C^*_{M_c}$, para todo $s \in I$.

Defina $H\colon I\times I \longrightarrow \overline{C}$ por,

$$\begin{aligned} &(t,s) \mapsto h^{-1}\circ h^s(3t), && \text{se } t \in \left[0,\tfrac{1}{3}\right], \\ &(t,s) \mapsto K((3t-1),s), && \text{se } t \in \left[\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right], \\ &(t,s) \mapsto h^{-1}\circ l^s(3t-2), && \text{se } t \in \left[\tfrac{2}{3},1\right]. \end{aligned}$$

Logo temos uma homotopia r.c.c. entre γ e um caminho $\sigma(t) = H(t,1)$. Note que $K(t,1)$ é um caminho com mesma imagem que o caminho que descreve o segmento $[p,t]$ e estes são homotópicos r.c.c. , logo σ é homotópico r.c.c. ao caminho dado por $[p,t]$. De forma análoga, o caminho δ é homotópico r.c.c. a $[p,t]$, logo γ e δ são homotópicos r.c.c. □

Observação 4.3.6. Seja γ um caminho-aresta de C. Então γ é homotópico r.c.c. a um caminho-aresta decrescente em $S(D)$, basta considerar um caminho imagem de um segmento em $S(D)$.

Corolário 4.3.7. Em toda classe de homotopia r.c.c. de caminhos-arestas existe um caminho-aresta decrescente ligando dois pontos críticos.

Em outras palavras, todo caminho-aresta decrescente em C é homotópico r.c.c. a um caminho-aresta decrescente γ de C tal que $\gamma(-1) = x_{c'} \in C^*_{M_{c'}}$ e $\gamma(1) = x_c \in C^*_{M_c}$ são pontos críticos.

Prova. Sejam $x, x' \in D$ tais que

$$x_{c'} = \lim_{t\to -1}(x', t),$$
$$x_c = \lim_{t\to 1}(x, t).$$

Considere um caminho ω em D sem auto-interseção unindo x e x'. Então,

$$\lambda(t) = [\omega(t), 2t-1]$$

define um caminho em $S(D)$ tal que $h^{-1}\circ\lambda\colon [0,1] \longrightarrow C$ se estende a um caminho-aresta decrescente conectando $x_{c'}$ a x_c. □

Tendo em vista maior generalidade na escolha de caminhos em uma componente-aresta, apresentamos uma extensão do caminho-aresta.

Definição 4.3.8. Seja C uma componente-aresta de $M^{(c,c')}$. Um **caminho-aresta estendido** de C é um caminho $\gamma\colon I \to M$ tal que:

1. $\gamma(0) \in C^*_{M_{c'}}$ e $\gamma(1) \in C^*_{M_c}$.
2. Existe $t_0 < t_1 \in I$ tal que
    a) se $f(\gamma(t)) = c'$, então $t \le t_0$, e
    b) se $f(\gamma(t)) = c$, então $t \ge t_1$, e
    c) $\gamma(t) \cap C^*_{M_d} = \emptyset$, para $d \ne c, c'$.

Lema 4.3.9. Todo caminho-aresta estendido γ é homotópico r.c.c. a um caminho-aresta da forma

$$\sigma' * \alpha * \sigma,$$

($*$ denota concatenação de caminhos), no qual σ', σ são caminhos-vértices contidos em $C^*_{M_{c'}}$, $C^*_{M_c}$, respectivamente, e α é caminho-aresta estritamente decrescente.

Prova. Seja t' o maior t_0 tal que a condição da definição é válida. Então tome $\widetilde{\sigma}'$ como $\gamma|_{[0,t']}$ (caminho reparametrizado). Semelhantemente, tomamos t'' como o menor t_1 e definimos $\widetilde{\sigma} = \gamma|_{[t'',1]}$. Finalmente, tomamos $\widetilde{\alpha} = \gamma|_{[t',t'']}$.

Observe que $\widetilde{\alpha}$ está contido em $\overline{C}$. Mais ainda, pela condição (2) da Definição 4.3.8, a única componente essencial que $\widetilde{\sigma}'$ intersecta é $M_{c'}$. A imagem de $\pi_c(\widetilde{\sigma}')$ é um laço contido em um wedge finito de cones, consequentemente é contrátil ao ponto comum deste wedge. Portanto $\widetilde{\sigma}'$ e $\widetilde{\sigma}$ são homotópicos r.c.c. a σ' e σ, caminhos-vértices contidos em $M_{c'}$ e M_c, respectivamente.

Desde que todos os caminhos-arestas são homotópicos r.c.c. a caminhos-arestas decrescentes, o lema está provado. □

Corolário 4.3.10. Todo caminho-aresta estendido de C é homotópico r.c.c. a um caminho-aresta decrescente.

Prova. Pelo Lema 4.3.9, um caminho-aresta estendido γ pode ser escrito como $\sigma' * \alpha * \sigma$, nos quais σ', σ são caminhos-vértices e α é um caminho-aresta. Desde que caminhos-vértices são homotópicos r.c.c. a caminhos constantes, e todo caminho-aresta é homotópico r.c.c. a um caminho-aresta decrescente, o lema segue. □

Teorema 4.3.11. O conjunto das classes de homotopia r.c.c. dos caminhos-arestas estendidos estão em bijeção com as arestas de $R(f)$.

Prova. Dado um caminho-aresta estendido γ podemos fazer uma homotopia r.c.c. a um caminho-aresta apropriado usando o Corolário 4.3.10. Desde que, pelo Corolário 4.3.5 todos os caminhos-arestas de C são homotópicos r.c.c. , existe apenas uma classe de homotopia r.c.c. destes caminhos em C. Pelo Corolário 4.3.7 podemos escolher um representante decrescente o qual conecta dois pontos críticos. Desde que C é componente-aresta (por definição de caminho-aresta), esta corresponde unicamente a uma aresta de $R(f)$ (pela Proposição 4.2.5). □

4.4 Grafos

Um **grafo** $G = (V, E)$ consiste em uma coleção V não vazia de pontos, chamada conjunto de vértices e um subconjunto $E \subset V \times V$, chamado conjunto de arestas. Cada ponto de V é chamado **vértice** e cada par de pontos em E é chamado de **aresta**.

Equivalentemente, um grafo é um complexo simplicial abstrato de dimensão 1 (SPANIER, 1966, Capítulo 3, Seção 7). Por este motivo, o objeto obtido no Lema 4.1.6 é chamado de Grafo de Reeb.

Dada uma aresta $(a, b) \in E$, dizemos que a, b são adjacentes a arestas e que são os vértices ou extremos desta. Uma aresta da forma (a, a) é um **loop**. Se a ordem do par (a, b) importar, dizemos que a é a origem da aresta ou vértice inicial e que b é o fim da aresta ou vértice terminal. Neste caso, dizemos que (a,b) é uma aresta direcionada de a para b. Se a ordem não importa, teremos $(a,b) = (b,a)$. Um grafo onde todas as arestas são direcionadas é um **grafo direcionado**.

Podemos estender o conceito de grafo, admitindo que dois vértices possam ser unidos por mais de uma aresta, isto é, podemos ter $e_i = (a,b) \in E$, $i \in \Lambda$, representando diferentes arestas.

Um grafo é dito **finito** quando possuir um número finito de vértices e arestas.

Podemos representar grafos desenhando pontos para os vértices e linhas unindo estes vértices (retas, arcos ...). A forma em que os pontos estão dispostos e linhas estão desenhados não interfere no conceito de grafo, desde que as linhas liguem os vértices corretamente. Para dizermos que dois grafos são equivalentes usamos o conceito de isomorfismo.

Dois grafos, $G = (V,E)$, $G' = (V',E')$ são **isomorfos** quando existe uma bijeção $\varphi\colon V \longrightarrow V'$ tal que $(a,b) \in E \mapsto (\varphi(a),\varphi(b)) \in E'$, isto é, φ leva arestas de G em arestas de G'. Se ambos os grafos são direcionados, a ordem dos vértices nas arestas deve ser mantida. Em outras palavras, φ é uma aplicação simplicial bijetora. Mais informações sobre teoria de grafos podem ser encontradas em (ORE, 1962).

Sejam M uma variedade suave fechada e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com pontos críticos isolados.

Sejam $V(f)$ o conjunto de todas as classes de homotopia r.c.c. de caminhos-vértices e $E(f)$ o conjunto de todas as classes de homotopia r.c.c. de caminhos-arestas estendidos.

Notação. Se γ é um caminho (vértice ou aresta), denotaremos sua classe de homotopia r.c.c. por $[\gamma]$.

Definição 4.4.1. Diremos que duas classes de caminhos-vértices $[\varepsilon_1]$ e $[\varepsilon_2]$ são adjacentes a uma aresta, quando existir um caminho-aresta estendido $\gamma\colon I \to M$ tal que $[\gamma(0)] = [\varepsilon_1]$ e $[\gamma(1)] = [\varepsilon_2]$, nos quais $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ são considerados como caminhos constantes.

Note que podem existir muitas arestas diferentes unindo dois vértices. Na verdade, como veremos no resultado a seguir, o número de arestas unindo dois caminhos-vértices dados é igual ao número de componentes-arestas que contém estes caminhos em seus bordos.

Proposição 4.4.2. Sejam M uma variedade suave fechada e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com pontos críticos isolados. O par $(V(f),E(f))$ define um grafo finito e direcionado que denotaremos por $\mathcal{G}(f)$.

Prova. Seja γ um caminho-aresta estendido. Considere $\xi_1 \equiv \gamma(0)$, $\xi_2 \equiv \gamma(1)$ dois caminhos constantes. Então, ξ_1 e ξ_2 são caminhos-vértices.

Note que se $\gamma' \in [\gamma]$, então $\xi_1' \equiv \gamma'(0)$ e $\xi_2' \equiv \gamma'(1)$ são homotópico r.c.c. à ξ_1 e ξ_2, respectivamente. Então, podemos associar a classe $[\gamma]$ ao par $([\gamma(0)], [\gamma(1)]) \in V(f) \times V(f)$. Isto nos mostra que $\mathcal{G}(f)$ é um grafo.

Pelo Teorema 4.3.11, existe uma bijeção entre as classes de homotopia r.c.c. e as componentes-arestas. Como o número de componentes-arestas é finito (veja Corolário 4.2.4), segue que o número de arestas de $\mathcal{G}(f)$ é finito. Além disso, por hipótese o número de pontos críticos de f é finito, logo o número de caminhos-vértices também será.

Do Corolário 4.3.10, em cada classe de homotopia r.c.c. de um caminho-aresta estendido, existe um caminho-aresta decrescente como representantes. A orientação de uma aresta é dada seguindo a direção destes representantes. Desta forma, $\mathcal{G}(f)$ se torna um grafo direcionado. □

Então, vemos que uma aresta de $\mathcal{G}(f)$ corresponde a uma componente-aresta C de M, que por sua vez, pela Proposição 4.2.5, corresponde a um 1-simplexo do grafo de Reeb $R(f)$. Logo, arestas de $\mathcal{G}(f)$ estão em correspondência biunívoca com 1-simplexos de $R(f)$. Formalmente temos o seguinte resultado.

Teorema 4.4.3. O grafo $\mathcal{G}(f)$ é isomorfo ao grafo abstrato induzido de $R(f)$.

Prova. Seja $\pi\colon M \longrightarrow R(f)$ a projeção canônica do grafo de Reeb.

Considere a aplicação $V(f) \to R(f)^0$ definida por

$$[\varepsilon] \mapsto \pi(\varepsilon(0)), \tag{4.1}$$

no qual $R(f)^0$ denota o 0-esqueleto de $R(f)$, isto é, o conjunto de 0-simplexos. Pela definição do grafo de Reeb, esta aplicação é bijetora.

Uma aresta $([\gamma(0)], [\gamma(1)]) \in E(f)$, no qual γ é um caminho-aresta em C, é associada ao par $(\pi(\gamma(0)), \pi(\gamma(1))) \in R(f)^0 \times R(f)^0$, cuja realização geométrica é o 1-simplexo de $R(f)$ dado pela imagem $\pi(\overline{C})$. Logo, da Proposição 4.2.5, a aplicação em (4.1) é de fato, um isomorfismo de grafos. □

4.4.1 Uma realização do grafo $\Gamma(f)$ como subespaço de M

Nesta seção, construiremos um complexo simplicial finito 1-dimensional $\Gamma(f)$ contido na variedade M, o qual é equivalente por homotopia a $R(f)$. A construção será feita considerando representantes nas classes de caminhos r.c.c. Veremos que $\Gamma(f)$ independe, por homotopia, das escolhas de tais representantes.

Antes, iremos verificar que em cada componente conexa crítica, digamos $C^*_{M_c}$, é possível construir uma árvore cujos vértice são todos os pontos críticos em $C^*_{M_c}$.

Proposição 4.4.4. Suponhamos que M seja uma variedade suave fechada e que $f\colon M \to \mathbb{R}$ seja uma função suave com pontos críticos isolados. Sejam c um valor crítico e

$$A = \{x_1, \dots, x_n\} = C^*_{M_c} \cap \mathrm{Cr}(f)$$

o conjunto de todos os pontos críticos em $C^*_{M_c}$.

1. Dois pontos críticos x_1, x_2 no fecho de uma componente conexa em $C^*_{M_c} \setminus A$ podem ser ligados por um caminho $\gamma\colon I \to C^*_{M_c}$ tal que $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x_2$, de forma que γ seja um arco, isto é, um mergulho na imagem.

2. Existe um subespaço fechado $K \subset C^*_{M_c}$ homeomorfo a uma árvore tal que o conjunto dos vértices é A.

Prova. Para provar a afirmação 1 sejam y_1, y_2 dois pontos em uma mesma componente conexa de $C^*_{M_c} \setminus A$ tais que y_i está em uma vizinhança U_i de x_i, $i = 1,2$. Mais ainda, assuma que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Escolhendo estas vizinhanças suficientemente pequenas podemos conectar x_i e y_i por um arco γ_i contido em U_i, $i = 1,2$, como observado em 4.1.3. Desde que y_1 e y_2 estão na mesma componente conexa, podemos encontrar um arco $\widetilde{\gamma} \subset C^*_{M_c} \setminus A$ conectando-os. A concatenação dos caminhos γ_1, $\widetilde{\gamma}$, e γ_2^{-1} forma um arco ligando x_1 e x_2. Iremos denotar este arco por γ^1_2.

Para provarmos a segunda afirmação, devemos construir caminhos ligando os pontos em A de forma especial, requerendo que estes caminhos não se intersectam além dos extremos. Relembre que $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ é o conjunto de todos os pontos críticos em $C^*_{M_c}$.

Fixe x_1 como ponto inicial. Seja $A^1 = \{x^1_1, x^1_2, \dots\} \subset A$ subconjunto de A contendo os pontos que podem ser conectados com x_1 por arcos γ^1_j como na afirmação 1, tais que $\gamma^1_j \cap \gamma^1_{j'} = \{x_1\}$ para $j \neq j'$. Tome

$$K^1 = \bigcup_{x_j \in A^1} \gamma^1_j.$$

Então K^1 é homeomorfo a um complexo de dimensão 1 contrátil em x_1.

Caso $A^1 \cap A \neq \emptyset$, apliquemos novamente a construção anterior para todos x^1_j em A^1 como pontos iniciais. Para cada j, obtemos conjuntos $A^{1j} \subset A \setminus A^1$. Logo conectamos cada x^1_j, através de arcos, com pontos em A^{1j}. Requeremos que este arcos se intersectem somente em x^1_j. Então, para cada j, teremos um complexo K^2_j de dimensão 1 que se contrai para cada x^1_j.

Seja

$$K^2 = K^1 \cup \bigcup_{x^1_j \in A^1} K^{1j},$$

e observe que K^2 é homeomorfo a uma árvore.

Caso $(A^1 \bigcup \cup_j A^{1j}) \cap A \neq \emptyset$, repetimos esta construção. Desta forma, obteremos um conjunto compacto $K \subset C^*_{M_c}$ homeomorfo a um complexo simplicial de dimensão 1 tal que

- $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$,
- todos x_i são vértices,
- K é contrátil para x_1,

o que prova a proposição. □

Seguindo as notações anteriores, para cada valor crítico c e cada componente-aresta C escolhemos um único ponto crítico x^c em $\overline{C} \cap C^*_{M_c}$. Dizemos que um subconjunto $S \subset \mathrm{Cr}(f)$ é um **sistema de representantes críticos**, quando possuir exatamente um ponto crítico de cada componente conexa crítica.

Definição 4.4.5. Seja S um sistema de representantes críticos escolhido. Denotaremos por $\Gamma(f)_S$ o complexo 1-dimensional definido como segue.

1. 0-células são pontos críticos de f;
2. 1-células são arestas de cada árvore mergulhada em M, obtida pela parte 2 da Proposição 4.4.4, para cada componente conexa crítica. Mais ainda,
3. como 1-células adicionais, em cada componente-aresta C escolhemos a imagem de um caminho-aresta decrescente $\gamma_C \in E(f)$ unindo dois pontos críticos em S (usando o Corolário 4.3.7).

Proposição 4.4.6. Existe uma aplicação entre $\Gamma(f)_S$ e a realização simplicial do grafo de Reeb $R(f)$, a qual preserva orientação das arestas e a imagem inversa de cada vértice de $R(f)$ é uma árvore em $\Gamma(f)_S$.

Prova. Dada uma componente-aresta $C \in M^{(c,c')}$, denotemos por x_c e $x_{c'}$ os pontos críticos em $\overline{C}$ escolhidos em S. Uma aresta de $R(f)$ correspondente a C será então identificada com o segmento $(1-t)[x^C_{c'}] + t[x^C_c]$.

Defina $\psi\colon \Gamma(f)_S \to \mathcal{G}(f) \cong R(f)$ por

$$\psi(p) = \begin{cases} t[x^C_c] + (1-t)[x^C_{c'}], & \text{se } p = \gamma_C(t), \text{ para algum } t \in (0,1), \\ [x^C_c], & \text{se } p \in C^*_{M_c}, \\ [x^C_{c'}], & \text{se } p \in C^*_{M_{c'}}. \end{cases}$$

Relembre que $[x^C_c]$ denota a classe de homotopia r.c.c. de um caminho-vértice. Então temos ψ um homeomorfismo (linear) sobre o interior de cada aresta e cada ponto da árvore $C^*_{M_c} \cap \Gamma(f)_S$ é levado ao vértice $[x^C_c]$, para cada valor crítico c e cada componente crítica.

Finalmente, a orientação de $\Gamma(f)_S$ é dada pela direção de caminhos decrescentes e isto é consistente com a orientação de $R(f)$. □

Observação 4.4.7. Podemos olhar para a aplicação ψ como uma composição de aplicações

$$\Gamma(f)_S \xrightarrow{\pi_c} \Gamma(f)/_{\sim_c} = R_c(f|_{\Gamma(f)_S}) \to R(f).$$

Corolário 4.4.8. A aplicação $\psi\colon \Gamma(f)_S \to R(f)$ é uma equivalência por homotopia.

Prova. Note que a pré-imagem $\psi^{-1}(p)$ é um ponto ou uma árvore $C^*_{M_c} \cap \Gamma(f)_S$. O resultado segue facilmente. □

Desta forma, $\Gamma(f)_S$ é equivalente homotópico a $R(f)$, independentemente da escolha de S. A partir de agora, denotaremos $\Gamma(f)_S$ simplesmente por $\Gamma(f)$.

Proposição 4.4.9. Seja $\iota\colon \Gamma(f) \hookrightarrow M$ o mergulho dado pela Definição 4.4.5. A composição de aplicações

$$\pi \circ \iota\colon \Gamma(f) \to M \to R(f)$$

induz um isomorfismo sobre os grupos fundamentais.

Prova. Seja ψ dada pela composição $\Gamma(f)_S \xrightarrow{\pi_c} R_c(f|_{\Gamma(f)_S}) \to R(f)$. Note que o diagrama a seguir é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(f) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi_c"] & M \arrow[d, "\pi"] \\
R_c(f|_{\Gamma(f)_S}) \arrow[r] & R(f)
\end{tikzcd}$$

no qual o lado direito é a projeção de Reeb, e o lado esquerdo é a projeção de Reeb para $f|_\Gamma$. Desde que ψ é equivalente por homotopia, $\pi \circ \iota$ também será. Portanto, temos o isomorfismo entre grupos fundamentais $\pi_1(\Gamma(f)) \cong \pi_1(R(f))$. □

4.5 Aplicações

Nesta seção, iremos explorar as consequências imediatas do mergulho de $\Gamma(f)$ em M, construído na seção anterior.

Da Proposição 4.4.9, vemos que $\pi_1(\Gamma(f)) \cong \pi_1(R(f))$, o qual é um grupo livre $\mathbb{F}_r$ com $r \geq 0$ geradores. Consequentemente, pelo Teorema de Hurewicz, o primeiro grupo de homologia de $R(f)$ é então $H_1(R(f);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^r$ e, pelo Teorema dos Coeficientes Universais para Cohomologia (SPANIER, 1966, Capítulo 5, Seção 5, Teorema 3), $H^1(R(f);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^r$. Por outro lado, pelo Teorema dos Coeficientes Universais para Homologia (SPANIER, 1966, Capítulo 5, Seção 2, Teorema 8) temos $H_1(R(f);G) = G^r$, para qualquer grupo de coeficientes G, e dualmente $H^1(R(f);R) = R^r$, para qualquer anel de coeficientes R. Em resumo, temos a seguinte proposição.

Proposição 4.5.1. Sejam M uma variedade suave fechada e $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com pontos críticos isolados. Seja $\iota\colon \Gamma(f) \hookrightarrow M$ o mergulho da seção anterior. A aplicação $\pi \circ \iota\colon \Gamma(f) \to R(f)$ induz isomorfismos

1. sobre os grupos fundamentais $(\pi \circ \iota)_\# = \pi_\# \circ \iota_\# \colon \mathbb{F}_r \to \mathbb{F}_r$,
2. sobre os primeiros grupos de homologia $(\pi \circ \iota)_* = \pi_* \circ \iota_* \colon \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^r$,
3. e sobre os primeiros grupos de cohomologia $(\pi \circ \iota)^* = \iota^* \circ \pi^* \colon R^r \to R^r$, para qualquer anel de coeficientes R.

Como consequência da Proposição 4.5.1 obtemos a aplicação principal a seguir.

Corolário 4.5.2.

1. Se $\pi_1(M)$ for um grupo finito, por exemplo, se M é simplesmente conexo, então o grafo de Reeb $R(f)$ de qualquer função suave $f \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ será uma árvore.
2. Se $\pi_1(M)$ for um grupo abeliano, ou mais geralmente, um grupo discreto *amenable*[4], o grafo de Reeb $R(f)$ de qualquer função suave $f \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ conterá no máximo um laço.

Prova. O homomorfismo $(\pi \circ \iota)_\#$ sempre se fatora através de $\pi_1(M)$, isto é,

$$\pi_1(\Gamma(f)) \to \pi_1(M) \to \pi_1(R(f)).$$

No primeiro caso, quando $\pi_1(M)$ for finito, como $\iota_\# \colon \pi_1(\Gamma(f)) \to \pi_1(M)$ é injetor devemos ter que $\pi_1(\Gamma(f)) \cong \pi_1(R(f)) \cong \mathbb{F}_r$ se fatora em um grupo finito, assim $r = 0$, logo $R(f)$ não possui laços.

No segundo caso, $\pi_1(\Gamma(f))$ se fatora através de um grupo abeliano, assim $r < 2$. Finalmente, se $\pi_1(M)$ é *amenable* este não contém $\mathbb{F}_r$, para $r \geq 2$, como subgrupo (veja (NOWAK; YU, 2012, Exemplo 3.3.3)). Em ambas as situações existe no máximo um laço em $R(f)$. □

Corolário 4.5.3. Seja $f \colon X \to \mathbb{R}$ uma função suave com pontos críticos isolados.

(1) Se $X = S^n$ ou RP^n para $n \geq 2$, ou $X = \mathbb{C}P^n$, para qualquer n, então $R(f)$ será uma árvore.

(2) Se $X = \mathbb{T}^n = (S^1)^n$ para qualquer n, então $R(f)$ ou será uma árvore ou será equivalente por homotopia a um círculo.

(3) Se $X = M_g$ for uma superfície fechada orientável de genus g, então $R(f)$ conterá no máximo $2g$ laços.

(4) Se $X = M_g$ for uma superfície não-orientável de genus g, então $R(f)$ conterá no máximo g laços.

[4] Veja Apêndice, Definição A.6.4

Prova. Os casos 1 e 2 são aplicações imediatas do Corolário 4.5.2, pois $\pi_1(S^n) = 0$, $\pi_1(RP^n) = \mathbb{Z}_2$, quando $n \geq 2$, $\pi_1(\mathbb{C}P^n) = 0$ e $\pi_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n$, quando $n \geq 1$.

Para o caso 3, note que $\Gamma(f) \hookrightarrow M \to R(f)$ induz isomorfismo em homologia

$$\mathbb{Z}^r \xrightarrow{\iota_*} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{\pi_*} \mathbb{Z}^r,$$

assim temos $r \leq 2g$. O mesmo vale para o caso 4 não-orientável com $2g$ substituído por g. □

No caso particular em que $f\colon M_g \to \mathbb{R}$ é uma função de Morse e M_g é uma superfície de genus g, o número de laços em $R(f)$ é igual a g (veja (COLE-MCLAUGHLIN *et al.*, 2003, Lema A)).

Melhoramos a estimativa da Proposição 4.5.3(3), mostrando que para qualquer função suave f sobre uma superfície fechada orientável M_g o número de laços de $R(f)$ é menor ou igual do que o genus g de M.

Lema 4.5.4. Seja $[p] \in R(f)$ um ponto o qual pertence ao interior de uma aresta. Suponhamos que $R(f) \setminus \{[p]\}$ é ainda conexo por caminhos. Então, $M \setminus \pi^{-1}([p])$ é conexo por caminhos, no qual $\pi\colon M \longrightarrow R(f)$ é a projeção canônica.

Prova. A aplicação $\pi|_\Gamma\colon \Gamma(f) \to R(f)$ é homeomorfismo no interior de cada aresta (veja Proposição 4.4.6). Assim, a equivalência por homotopia $\Gamma(f) \to R(f)$ se restringe a uma equivalência por homotopia

$$\Gamma(f) \setminus \pi^{-1}([p]) \to R(f) \setminus \{[p]\}.$$

Desde que $R(f) \setminus \{[p]\}$ é conexo por caminhos, $\Gamma(f) \setminus \pi^{-1}([p])$ será conexo por caminhos.

Tome $x, y \in M \setminus \pi^{-1}([p])$. Escolha $x' \in \Gamma(f) \subset M$ um ponto diferente na mesma componente conexa de nível de x, e escolha y' de modo semelhante com relação a y. Pela Proposição 4.4.4, os pontos x e x' (y e y') podem ser unidos por caminhos α (β, respectivamente) na componente conexa de nível de x (de y, respectivamente). Tome um caminho γ em $\Gamma(f) \setminus \pi^{-1}([p])$ ligando x' e y'. Então, $\alpha * \gamma * \beta^{-1}$ é um caminho em $M \setminus \pi^{-1}([p])$ unindo x e y. □

Repetindo o argumento várias vezes obtemos o seguinte corolário.

Corolário 4.5.5. Sejam $[p_1], \ldots, [p_r] \in R(f)$ os quais estão no interior de arestas. Se $R(f) \setminus \{[p_1], \ldots, [p_r]\}$ for conexo, então $M \setminus \pi^{-1}(\{[p_1], \ldots, [p_r]\})$ será conexo. □

Teorema 4.5.6. Se M_g for um superfície fechada, orientável de genus g, então o número de laços em $R(f)$ será menor ou igual do que g.

Prova. Seja $L \subset R(f)$ um laço no grafo de Reeb e $J \subset L$ uma aresta. Se removermos de $R(f)$ um ponto $[p]$ do interior da aresta J, então $R(f) \setminus \{[p]\}$ será conexo. Suponhamos agora que $R(f)$

tem r laços. Então $R(f)\setminus\{[p_1],\dots,[p_r]\}$ é ainda conexo, no qual cada p_i pertence a uma aresta em um único laço. Pelo Corolário 4.5.5 $M\setminus\pi^{-1}(\{[p_1],\dots,[p_r]\})$ será conexo.

Quando M_g é uma superfície compacta, uma componente conexa da pré-imagem de um ponto regular será uma variedade conexa de co-dimensão 1, isto é, será homeomorfa a S^1. Assim, após removermos r círculos disjuntos, M é ainda uma superfície conexa. Isto é possível somente se M_g tem genus no mínimo r. □

O Teorema 4.5.6 apresenta um critério para reconhecer se uma função não é de Morse.

Por outro lado, muitas variedades admitem funções suaves com poucos pontos críticos. É bem conhecido que toda superfície orientável fechada M_g, para $g \geq 1$, possui uma função suave $f\colon M_g \to \mathbb{R}$ com somente três pontos críticos (veja (SEIFERT; THRELFALL, 1938, pg. 90-91)). Existem também variedades com dimensões mais altas que admitem funções suaves com apenas 3 pontos críticos. Um exemplo de tal variedade é o espaço projetivo real ou complexo de dimensão (projetiva) 3 (veja (MILNOR, 1963) para maiores informações).

Teorema 4.5.7. Sejam M uma variedade suave fechada e $f\colon M \to \mathbb{R}$ uma função suave com apenas três pontos críticos. Então o grafo de Reeb $R(f)$ é uma árvore com duas arestas.

Definimos o grau de um vértice de um grafo como sendo o número de arestas distintas a que este pertence. Para provar o Teorema 4.5.7, começamos com o seguinte lema.

Lema 4.5.8. Seja $p \in M$ um extremo local de uma função C^1 $f\colon M \to \mathbb{R}$ com um número finito de pontos críticos. Então, $[p] \in R(f)$ é um vértice de grau 1.

Prova. Assumimos que p é um máximo local. A prova para um mínimo local é análoga.

Suponhamos que $p \in M$ corresponde a um vértice de grau maior ou igual a 2 e $f(p) \in (d,c)$. Isto implica que para vizinhanças suficientemente pequenas U de p a seguinte igualdade é satisfeita:

$$U \cap (M^{(d,c)} \setminus \{p\}) = X \sqcup Y,$$

para conjuntos disjuntos e não-vazios X e Y. Seja $h\colon B \to \mathbb{R}^n$ uma carta ao redor de p levando p a 0. Se tomarmos $U = B$, com B suficientemente pequeno (isto é, $B \subset M^{(d,c)}$), a igualdade se torna $B\setminus\{p\} = X \sqcup Y$, para algum (possivelmente diferentes, mas ainda disjuntos e não-vazios) X e Y. Então,

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = h(B\setminus\{p\}) = h(X \sqcup Y) = h(X) \sqcup h(Y),$$

o que é claramente uma contradição, desde que $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ será conexo, para $n \geq 2$. □

Prova do Teorema 4.5.7. Sejam p^+, p^-, q os pontos de máximo, mínimo e o terceiro ponto crítico de $f\colon M \to \mathbb{R}$, respectivamente. Sejam $f(p^+) = c'$, $f(p^-) = c$, e $f(q) = d$, para algum $c \leq d \leq c'$. Pelo Lema 4.5.8 existe uma única componente-aresta C^+ tal que $p^+ \in \overline{C^+}$, analogamente existe única componente-aresta C^- tal que $p^- \in \overline{C^-}$, respectivamente. Evidentemente, $q \in \overline{C^+}$ e $q \in \overline{C^-}$, pois caso contrário q estaria em uma componente isolada da variedade conexa M. Consequentemente, $R(f)$ consiste de três vértices $[p^+], [p^-], [q]$, e duas arestas $J^+ = [C^+]$, e $J^- = [C^-]$, o que conclui a prova do teorema. $\square$

Referências

ALLDAY, C.; PUPPE, V. **Cohomological methods in transformation groups**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1993. v. 32. Citado 5 vezes nas páginas 37, 48, 111, 113 e 115.

ARMACOST, D. L. **The Structure of Locally Compact Abelian Groups**. [S.l.]: Marcel Dekker, 1981. Citado na página 27.

ASSADI, A. H. Varieties in finite transformation groups. **Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)**, v. 19, n. 2, p. 459–463, 1988. Citado na página 72.

ATIYAH, M. F.; MACDONALD, I. G. **Introduction to commutative algebra**. [S.l.]: Addison–Wesley Reading, 1969. v. 2. Citado 3 vezes nas páginas 113, 114 e 118.

BARTSCH, T. **Topological methods for variational problems with symmetries**. [S.l.]: Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 1993. Citado 13 vezes nas páginas 11, 13, 18, 32, 35, 40, 41, 42, 43, 55, 56, 58 e 111.

BARTSCH, T.; CLAPP, M. Bifurcation theory for symmetric potential operators and the equivariant cup–length. **Mathematische Zeitschrift**, Springer, v. 204, n. 1, p. 341–356, 1990. Citado 5 vezes nas páginas 18, 41, 42, 45 e 51.

BIASOTTI, S.; GIORGI, D.; SPAGNUOLO, M.; FALCIDIENO, B. Reeb graphs for shape analysis and applications. **Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 392, n. 1, p. 5–22, 2008. Citado na página 22.

BŁASZCZYK, Z.; MARZANTOWICZ, W.; SINGH, M. General bourgin–yang theorems. **arXiv preprint arXiv:1512.02399**, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 54, 57 e 66.

BOREL, A.; BREDON, G. E. **Seminar on transformation groups**. [S.l.]: Princeton University Press, 1960. Citado 3 vezes nas páginas 18, 35 e 39.

BORSUK, K. Drei sätze über die n–dimensionale euklidische sphäre. **Fundamenta Mathematicae**, v. 1, n. 20, p. 177–190, 1933. Citado na página 19.

BOURGIN, D. On some separation and mapping theorems. **Commentarii Mathematici Helvetici**, Springer, v. 29, n. 1, p. 199–214, 1955. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 63.

BREDON, G. E. Introduction to compact transformation groups. Academic Press, Bolyai Janos Matematikai Tarsulat, 1960. Citado 3 vezes nas páginas 25, 27 e 31.

BRÖCKER, T.; DIECK, T. tom. **Representations of compact Lie groups**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

BURNS, K.; GIDEA, M. **Differential Geometry and Topology: With a view to dynamical systems**. [S.l.]: CRC Press, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 85 e 86.

CLAPP, M.; PUPPE, D. Invariants of the lusternik–schnirelmann type and the topology of critical sets. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 298, n. 2, p. 603–620, 1986. Citado 4 vezes nas páginas 18, 20, 42 e 72.

____. Critical point theory with symmetries. **J. reine angew. Math**, v. 418, n. 1, p. 29, 1991. Citado 3 vezes nas páginas 42, 54 e 58.

COLE-MCLAUGHLIN, K.; EDELSBRUNNER, H.; HARER, J.; NATARAJAN, V.; PASCUCCI, V. Loops in reeb graphs of 2–manifolds. In: ACM. **Proceedings of the nineteenth annual symposium on Computational geometry**. [S.l.], 2003. p. 344–350. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 102.

COSTINESCU, C. N. About the equivariant k–theory. **Roumanian Journal of Math. and Computer Sc**, v. 2, n. 2, p. 18–27, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 78.

DEO, S.; TRIPATHI, H. S. Compact lie group actions on finitistic spaces. **Topology**, Elsevier, v. 21, n. 4, p. 393–399, 1982. Citado na página 55.

DEY, T. K.; WANG, Y. Reeb graphs: approximation and persistence. **Discrete & Computational Geometry**, Springer, v. 49, n. 1, p. 46–73, 2013. Citado na página 22.

DIECK, T. tom. **Transformation groups**. [S.l.]: Walter de Gruyter, 1987. v. 8. Citado 14 vezes nas páginas 25, 30, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 113, 114, 115, 119, 120 e 122.

____. **Algebraic topology**. [S.l.]: European Mathematical Society, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 30, 32, 112 e 113.

DOLD, A. Parametrized borsuk–ulam theorems. **Commentarii Mathematici Helvetici**, Springer, v. 63, n. 1, p. 275–285, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 66.

DOWKER, C. H. Cech cohomology theory and the axioms. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 278–292, 1950. Citado na página 33.

EILENBERG, S.; STEENROD, N. **Foundations of algebraic topology**. [S.l.]: Princeton University Press, 1952. Citado na página 33.

FADELL, E.; HUSSEINI, S. Index theory for g–bundle pairs with applications to borsuk–ulam type theorems for g–sphere bundles. **Nonlinear analysis**, World Scientific, v. 10, 1987. Citado na página 21.

____. Relative cohomological index theories. **Advances in Mathematics**, Elsevier, v. 64, n. 1, p. 1–31, 1987. Citado na página 41.

____. An ideal–valued cohomological index theory with applications to borsuk—ulam and bourgin—yang theorems. **Ergodic theory and dynamical systems**, Cambridge Univ Press, v. 8, n. 8*, p. 73–85, 1988. Citado 5 vezes nas páginas 18, 21, 41, 46 e 64.

HATCHER, A. **Algebraic topology**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. Citado na página 46.

HSIANG, W. Y. **Cohomology theory of topological transformation groups**. [S.l.]: Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975. v. 85. Citado 4 vezes nas páginas 28, 37, 48 e 115.

HUSEMOLLER, D. **Fibre bundles**. [S.l.]: Springer, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.

IZYDOREK, M.; RYBICKI, S. On parametrized borsuk–ulam theorem for free $\mathbb{Z}_p$–action. In: **Algebraic Topology Homotopy and Group Cohomology**. [S.l.]: Springer, 1992. p. 227–234. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 66.

JAMES, I. M. On category, in the sense of lusternik–schnirelmann. **Topology**, Elsevier, v. 17, n. 4, p. 331–348, 1978. Citado na página 42.

JAWOROWSKI, J. A continuous version of the borsuk–ulam theorem. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 82, n. 1, p. 112–114, 1981. Citado na página 21.

____. Fibre preserving maps of sphere bundles into vector space bundles. In: **Fixed point theory**. [S.l.]: Springer, 1981. p. 154–162. Citado na página 21.

____. Bundles with periodic maps and mod p–chern polynomial. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 132, n. 4, p. 1223–1228, 2004. Citado na página 66.

KALUBA, M.; MARZANTOWICZ, W.; SILVA, N. On representation of the reeb graph as a sub–complex of manifold. **Topological Methods in Nonlinear Analysis**, v. 45, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 11, 13 e 22.

KATOK, A.; HASSELBLATT, B. **Introduction to the modern theory of dynamical systems**. [S.l.]: Cambridge university press, 1995. v. 54. Citado na página 86.

KRONROD, A. S. On functions of two variables. **Uspekhi Matematicheskikh Nauk**, Russian Academy of Sciences, Branch of Mathematical Sciences, v. 5, n. 1, p. 24–134, 1950. Citado 3 vezes nas páginas 17, 22 e 84.

LIMA, E. L. **Variedades Diferenciáveis**. [S.l.]: Publicações Matemáticas, IMPA, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 86.

____. **Homologia Básica**. [S.l.]: Projeto Euclides, IMPA, 2009. Citado na página 56.

LUSTERNIK, L.; SCHNIRELMANN, S. **Topological Methods in Variational Problems**. [S.l.]: Issledowatelskiĭ Institut Matematiki i Mechaniki pri O. M. G. U., Moscow, 1930. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 42.

MARTÍNEZ-ALFARO, J.; MEZA-SARMIENTO, I.; OLIVEIRA, R. Topological classification of simple morese bott functions on surfaces. Notas Série Matemática, ICMC–USP, 2015. Citado na página 22.

MARZANTOWICZ, M. I. W. Equivariant maps between cohomology spheres. **Journal of the Juliusz Schauder Center**, v. 5, p. 279–289, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 116 e 117.

MARZANTOWICZ, W.; MATTOS, D. de; SANTOS, E. dos. Bourgin–yang version of the borsuk–ulam theorem for zpk–equivariant maps. **Algebraic & Geometric Topology**, Mathematical Sciences Publishers, v. 12, n. 4, p. 2245–2258, 2013. Citado na página 21.

MARZANTOWICZ, W.; MATTOS, D. de; SANTOS, E. L. d. Bourgin–yang versions of the borsuk–ulam theorem for p–toral groups. **preprint**, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 21, 61 e 73.

MASUMOTO, Y.; SAEKI, O. A smooth function on a manifold with given reeb graph. **Kyushu Journal of Mathematics**, v. 65, n. 1, p. 75–84, 2011. Citado na página 22.

MATOUSEK, J. **Using the Borsuk–Ulam theorem: lectures on topological methods in combinatorics and geometry**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. Citado na página 19.

MATSUMOTO, Y. **An introduction to Morse theory**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2002. v. 208. Citado na página 88.

MATTOS, D. D. **Sobre teoremas do tipo Borsuk–Ulam**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo (USP). Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação de São Carlos, 2005. Citado na página 32.

MATTOS, D. D.; SANTOS, E. dos. A parametrized borsuk–ulam theorem for a product of spheres with free $\mathbb{Z}_p$–action and free s^1–action. **Algebraic & Geometric Topology**, Mathematical Sciences Publishers, v. 7, n. 4, p. 1791–1804, 2007. Citado na página 21.

MICHAEL, E. A note on paracompact spaces. **Proceedings of the American Mathematical Society**, JSTOR, v. 4, n. 5, p. 831–838, 1953. Citado na página 36.

MILNOR, J. Construction of universal bundles ii. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 430–436, 1956. Citado 3 vezes nas páginas 25, 32 e 57.

MILNOR, J. W. **Morse theory**. [S.l.]: Princeton university press, 1963. Citado na página 103.

NAKAOKA, M. Parametrized borsuk–ulam theorems and characteristic polynomials. In: **Topological Fixed Point Theory and Applications**. [S.l.]: Springer, 1989. p. 155–170. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 66.

NOWAK, P. W.; YU, G. **Large scale geometry**. Zurich: European Mathematical Society, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 23, 101, 123, 124 e 125.

ORE, O. **Theory of graphs**. [S.l.]: American Mathematical Society Providence, RI, 1962. v. 38. Citado na página 96.

PIER, J.-P. **Amenable locally compact groups**. [S.l.]: Wiley–Interscience, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 124 e 125.

REEB, G. Sur les points singuliers d'une forme de pfaff completement intégrable ou d'une fonction numérique. **CR Acad. Sci. Paris**, v. 222, n. 847–849, p. 2, 1946. Citado 3 vezes nas páginas 17, 22 e 84.

SEGAL, G. Classifying spaces and spectral sequences. **Publications Mathématiques de l'IHÉS**, v. 34, p. 105–112, 1968. Citado na página 79.

____. Equivariant k–theory. **Publications Mathématiques de l'IHÉS**, v. 34, p. 129–151, 1968. Citado 6 vezes nas páginas 63, 66, 67, 68, 74 e 79.

SEIFERT, H.; THRELFALL, W. Variationsrechnung its grossen. **Theorie von Marston Morse), Leipzig and Berlin, Teubner**, p. 115, 1938. Citado na página 103.

SHARKO, V. About kronrod–reeb graph of a function on a manifold. **Methods of Functional Analysis and Topology**, Citeseer, v. 12, n. 4, p. 389–396, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 84.

SINGH, M. Parametrized borsuk–ulam problem for projective space bundles. **Fundamenta Mathematicae**, p. 135–147, 2011. Citado na página 21.

SMITH, P. A. Transformations of finite period. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 127–164, 1938. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 38.

SPANIER, E. H. **Algebraic topology**. [S.l.]: Springer–Verlag, New York, 1966. Citado 4 vezes nas páginas 33, 34, 95 e 100.

STEINLEIN, H. Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications: a survey. **Topological Methods in Nonlinear Analysis (A. Granas, ed.), Sém Mathematics Sup**, v. 95, p. 166–235, 1985. Citado na página 20.

YANG, C.-T. On theorems of borsuk–ulam, kakutani–yamabe–yujobô and dyson, i. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 262–282, 1954. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 63.

____. On theorems of borsuk–ulam, kakutani–yamabe–yujobô and dyson, ii. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 271–283, 1955. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 63.

APÊNDICE A

Apêndice

A.1 Definições e resultados

Esta seção é dedicada à disposição de definições e resultados em geral que aparecem no corpo da tese.

Definição A.1.1 ((BARTSCH, 1993, Capítulo 2, Definição 2.3))**.** Seja G um grupo de Lie compacto. Um G-espaço metrizável X é chamado $\boldsymbol{G}$-ANR quando satisfaz uma das seguintes condições que equivalentes:

i) Para todo G-espaço metrizável Y e todo mergulho equivariante $i\colon X \longrightarrow Y$, existe uma retração G-equivariante $r\colon U \longrightarrow i(X)$, no qual U é uma vizinhança aberta e invariante de $i(X)$ em Y.

ii) Para todo G-par metrizável (Y,A), isto é, Y é um G-espaço metrizável e A é um G-subespaço fechado, e para toda aplicação G-equivariante $f\colon A \longrightarrow X$, existe uma extensão G-equivariante $\overline{f}\colon U \longrightarrow X$ de f, no qual U é uma vizinhança aberta e invariante de A em Y.

Proposição A.1.2 ((BARTSCH, 1993, Página 16))**.** Sejam G um grupo de Lie compacto e X um espaço G-ANR. Então cada órbita $G(x)$ possui uma vizinhança aberta invariante $U(x)$ que pode ser deformada para $G(x)$ em X.

Definição A.1.3 ((ALLDAY; PUPPE, 1993, Capítulo 1, Definição 1.1.1))**.** Seja G um grupo de Lie compacto.

1. Uma n-dimensional G-célula do tipo G/K é um G-espaço da forma $G/K \times D^n$, no qual G atua por translação à esquerda em G/K e trivialmente na bola n-dimensional D^n. O G-espaço $G/K \times S^{n-1}$ é chamado o G-bordo da G-célula $G/K \times D^n$.

2. Dizemos que um G-espaço X é obtido de um G-espaço Y colando-se uma união disjunta de n-células $G/K_i \times D^n$ via aplicações G-equivariantes $\varphi_i\colon G/K_i \times S^{n-1} \longrightarrow Y$, se
$$X = Y \cup_{\varphi_i} \left(\bigsqcup_i G/K_i \times D^n \right) = Y \sqcup \left(\bigsqcup_i G/K_i \times D^n \right) / \sim,$$
no qual $\varphi_i(gK_i, x) \sim (gK_i, x) \in G/K_i \times S^{n-1}$. O G-espaço Y está canonicamente incluso em X.

3. Um **G-CW complexo** X é um G-espaço obtido como a união da sequência das inclusões $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \ldots \subset X^{n-1} \subset \ldots$, no qual X^0 é uma união disjunta de espaços homogêneos G/K e X^n é obtido de X^{n-1} colando-se um união disjunta de G-células de dimensão n. O G-espaço X possui a topologia fraca com respeito a filtração X^n.

Um G-CW complexo finito (respectivamente, de dimensão finita) é um G-CW complexo obtido a partir de um número finito de células (respectivamente, por G-células de até uma certa dimensão).

Definição A.1.4. (DIECK, 2008, Definição 14.4.3) Seja $\{X_j\}_{j\in J}$ uma família de espaços topológicos. O **join**
$$X = \bigstar_{j\in J} X_j$$
é o espaço das classes de elementos $(t_j x_j | \, j \in J)$, tais que $t_j \in [0,1]$,$x_j \in X_j$ e $\sum_{j\in J} t_j = 1$, no qual somente um número finito de t_j são não-nulos. Dois elementos $(t_j x_j)$ e $(s_j y_j)$ estão na mesma classe quando:

i) $t_j = s_j$, para todo $j \in J$,

ii) $x_j = y_j$, quando $t_j \neq 0$.

A topologia de X é caracterizada pelas aplicações coordenadas $\theta_j\colon X \longrightarrow [0,1]$, $(t_i x_i) \mapsto t_j$ e $p_j\colon \theta_j^{-1}(0,1] \longrightarrow X_j$, $(t_i x_i) \mapsto x_j$, da seguinte forma: Uma aplicação $f\colon Y \longrightarrow X$ é contínua se, e somente se, as aplicações $\theta_j \circ f$ e $p_j \circ f$ são contínuas.

Quando $J = \{1, \ldots, n\}$, escrevemos $X = X_1 \star \cdots \star X_n$. Quando $X_j = Y$, para todo $j \in J$, escrevemos $X = Y \star Y \star Y \star \cdots$.

Se cada X_j for um G-espaço, podemos definir uma G-ação em $X = \bigstar_{j\in J} X_j$ da seguinte forma: dados $(t_j x_j) \in X$ e $g \in G$, $(t_j x_j) \cdot g = (t_j x_j g)$.

Definição A.1.5 ((DIECK, 2008, Capítulo 3, Seção 2))**.** Sejam E, B, X espaços topológicos. Uma aplicação $p\colon E \longrightarrow B$ possui a **propriedade do levantamento de homotopia** para o espaço X se vale a seguinte condição: Para cada homotopia $h\colon X \times I \longrightarrow B$ e cada aplicação $a\colon X \longrightarrow E$ tal que $p \circ a(x) = h(x, 0)$, existe uma homotopia $H\colon X \times I\colon E$ com $p \circ H = h$ e $H(-, 0) = a$. Neste caso, dizemos que H é um levantamento de h com condição inicial a.

Dizemos que p é uma **fibração** se valer a propriedade do levantamento de homotopia para qualquer espaço X.

Teorema A.1.6 ((DIECK, 2008, Teorema 14.3.5))**.** Seja $q\colon X \longrightarrow C$ uma aplicação localmente trivial numerável. Então q é uma fibração.

Definição A.1.7. Uma cobertura por abertos $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de um espaço topológico B é **numerável** quando existe uma partição da unidade localmente finita $\{\pi_\gamma\colon B \longrightarrow [0,1]\}_{\gamma\in\Gamma}$, tal que a cobertura $\{\pi_\gamma^{-1}((0,1])\}$ refina $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Se X é um espaço Hausdorff e paracompacto, então para qualquer cobertura $\mathcal{U}$ por abertos de X, existe uma partição da unidade subordinada à $\mathcal{U}$. Qualquer espaço de Hausdorff, localmente compacto e segundo enumerável e espaços metrizáveis são exemplos de espaços paracompactos Hausdorff, logo possuem cobertura numerável.

A.2 Teoria de Localização

Nesta seção iremos definir alguns conceitos da teoria de localização da Álgebra Comutativa e apresentar o Teorema de Localização encontrado em (ALLDAY; PUPPE, 1993). Esta teoria é essencial para construirmos a classe de Euler de uma esfera de cohomologia e também para obtermos o teorema de Smith e a fórmula de Borel. A referência para teoria de localização é o livro (ATIYAH; MACDONALD, 1969) e para o Teorema de Localização temos (ALLDAY; PUPPE, 1993, Capítulo 3, Seções 1 e 2) e (DIECK, 1987, Capítulo III, Seção 3).

Seja A um anel comutativo com identidade 1.

Definição A.2.1. Um subconjunto $S \subset A$ é dito ser **multiplicativamente fechado** se $1 \in S$ e dados $a, b \in S$, então $ab \in S$. Neste caso dizemos também que S é um conjunto multiplicativo em A.

Exemplo A.2.2. Considere um anel A.

1. Se $P \subset A$ é um ideal primo, então $S = A - P$ será um conjunto multiplicativo em A.
2. Se A é um domínio de integridade, então $S = A - \{0\}$, no qual $0 \in A$ é o elemento neutro da soma, será um conjunto multiplicativo.
3. $S = \{1, a, a^2, a^3, \dots\}$, para algum $a \in A$, é um conjunto multiplicativo em A.

Seja S um conjunto multiplicativo em A. Definimos a seguinte relação em $A \times S$: $(a,s) \sim (b,r)$ se, e somente se, existe $t \in S$ tal que $t(ra - sb) = 0 \in A$. Esta relação é de equivalência e $S^{-1}A = \left\{\frac{a}{s};\, a \in A,\, s \in S\right\}$ denotará o conjunto das classes de equivalência.

Proposição A.2.3. O conjunto $S^{-1}A$ é um anel com relação às operações:

$$\frac{a}{s}+\frac{b}{r}=\frac{ra+sb}{sr} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{s}\cdot\frac{b}{r}=\frac{ab}{sr}.$$

A classe $\frac{1}{1}$ é identidade do anel $S^{-1}A$.

O anel $S^{-1}A$ é chamado **anel de localização** de A com relação à S.

A aplicação $f\colon A \longrightarrow S^{-1}A$ definida por $a \mapsto \frac{a}{1}$ é um homomorfismo natural. Se $s \in S$, então $f(s)$ é uma unidade em $S^{-1}A$, isto é, possui inverso. O núcleo de f é $\{a \in A;\ \exists s \in S,\ sa = 0\}$, o conjunto dos elementos em A que são anulados por algum elemento de S.

Lema A.2.4 (Propriedade Universal, (ATIYAH; MACDONALD, 1969, Capítulo 3, Proposição 3.1))**.** Sejam $\varphi\colon A \longrightarrow B$ um homomorfismo de anéis e S um conjunto multiplicativo em A tal que $\varphi(s) \in B$ é inversível, para todo $s \in S$. Então, podemos induzir $\varphi\colon S^{-1}A \longrightarrow B$ fazendo $\varphi'(\frac{a}{s}) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$. Este homomorfismo é único e satisfaz $\varphi' \circ f = \varphi$, no qual $f\colon A \longrightarrow S^{-1}A$.

Podemos também tratar de localização para módulos. Dado um A-módulo M e um conjunto multiplicativo $S \subset A$, definimos a seguinte relação em $M \times S$: $(m,s) \sim (n,r)$ se, e somente se, existe $t \in S$ tal que $t(rm+sn) = 0 \in M$. Denotamos por $S^{-1}M$ o conjunto das classes de equivalência. Este conjunto será um $S^{-1}A$-módulo com relação às seguintes operações:

$$\frac{m}{s}+\frac{n}{r}=\frac{rm+sn}{sr} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{s}\cdot\frac{m}{r}=\frac{am}{sr}.$$

Dada um homomorfismo $\theta\colon M_1 \longrightarrow M_2$ entre A-módulos, podemos induzir um homomorfismo $\overline{\theta}\colon S^{-1}M_1 \longrightarrow S^{-1}M_2$ de $S^{-1}A$-módulos, chamado de **homomorfismo localização** de θ.

Listamos abaixo alguns fatos importantes sobre localização.

Proposição A.2.5 ((DIECK, 1987, Capítulo III, Proposição 3.1))**.** Considere os A-módulos M,N,P e $S \subset A$ um conjunto multiplicativo.

1. Se $M \longrightarrow N \longrightarrow P$ é uma sequência exata de A-módulos, então $S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N \longrightarrow S^{-1}P$ é uma sequência exata de $S^{-1}A$-módulos.

2. O núcleo da aplicação $M \longrightarrow S^{-1}M$, $m \mapsto \frac{m}{1}$ consiste dos elementos $m \in M$ que são anulados por algum elemento em S.

3. Localização comuta com limites diretos, isto é, $S^{-1}(\lim M_i) \cong \lim S^{-1}M_i$.

4. $S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M$.

Fixe G um grupo de Lie compacto. Sejam M um $H^*(BG)$-módulo $\mathbb{Z}$-graduado e $S \subset H^*(BG)$ um conjunto multiplicativo tal que, para todo $s \in S$ e $b \in H^*(BG)$, temos $sb = bs$ (isto é, S está no centro de $H^*_G(BG)$).

Exemplo A.2.6. Quando $G = (\mathbb{Z}_2)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$, o conjunto $S = H^*(BG) - \{0\}$ é multiplicativo e está no centro de $H^*(BG)$. No caso em que $G = (\mathbb{Z}_p)^k$, tomamos S como a parte polinomial de $H^*(BG) - \{0\}$.

Observação A.2.7. Sobre o graduamento em $S^{-1}M$. Para um elemento $(m, s) \in M \times S$, associamos o grau $|m| - |s|$, no qual $|\cdot|$ é o grau de um elemento. Defina

$$(S^{-1}M)^i = \left\{ \frac{m}{t} \in S^{-1}M; |m| - |t| = i \right\}.$$

O resultado a seguir, o Teorema de Localização, possui várias versões. Em (DIECK, 1987, Capítulo III, Teorema 3.3.8) o teorema é enunciado no contexto de G-CW complexos. Estamos interessados na validade do teorema quando X for um G-espaço compacto. Vamos enunciar uma versão mais geral que pode ser encontrada em (HSIANG, 1975, Capítulo III, Teoremas 1 e 1') e (ALLDAY; PUPPE, 1993, Capítulo 3, Proposição 3.2.6).

Dado $S \subset H^*(BG)$ um conjunto multiplicativo no centro de $H^*(BG)$, defina

$$X^S = \{x \in X; S \cap \ker H^*(BG) \longrightarrow H^*(BG_x) = \emptyset\},$$

no qual G_x é o subgrupo de isotropia de x e a aplicação $H^*(BG) \longrightarrow H^*(BG_x)$ é induzida de $G/G_x \hookrightarrow G/G$.

Teorema A.2.8 (Teorema de Localização, (ALLDAY; PUPPE, 1993, Capítulo 3, Proposição 3.2.6))**.** Sejam G um grupo compacto de Lie e X um G-espaço compacto. Seja $Y \subset X$ fechado e G-invariante, então a inclusão $(X^S, Y^S) \hookrightarrow (X, Y)$ induz um $S^{-1}(H^*(BG))$-isomorfismo

$$S^{-1}H^*_G(X, Y) \longrightarrow S^{-1}H^*_G(X^S, Y^S).$$

Observação A.2.9. O Teorema A.2.8 também é válido quando X é um G-espaço paracompacto com dimensão cohomológica finita e com um número finito de tipos de órbitas. Caso o anel de coeficientes K considerado for um corpo de característica zero (por exemplo, $\mathbb{Q}$), basta considerar que o número de tipos de órbitas conexas, isto é, órbitas do tipo $[(G/G_x)^0]$, seja finito.

Observação A.2.10. Quando $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$, e S a parte polinomial de $\subset H^*(BG) - \{0\}$, deveremos ter $X^S = X^G$, pois $S \cap \ker(H^*(BG) \longrightarrow H^*(BG_x)) \neq 0$, para todo $G_x \subsetneq G$.

Temos o seguinte critério para existência de ponto fixo de uma ação. O enunciado é como em (DIECK, 1987, Capítulo III, Teorema 3.14), e as hipóteses são como em (HSIANG, 1975, Capítulo IV, Seção 1, Corolário 1).

Proposição A.2.11. Seja X um G-espaço compacto (ou paracompacto com dimensão cohomológica finita e com tipo de órbitas finito). Então, são equivalentes:

(i) $X^G \neq \emptyset$;

(ii) $\overline{\pi_1} : EG \times_G X \longrightarrow BG$ tem uma seção;

(iii) $\overline{\pi_1}^* : H^*(BG) \longrightarrow H^*_G(X)$ é injetora.

O resultado anterior é extremamente importante para nosso trabalho, pois ele garante que quando $X^G = \emptyset$ deveremos ter $\ker p_X^* \neq 0$ [1], isto é, o conjunto de anuladores não nulos de 1_X é não-vazio e, portanto, faz sentido estudarmos o *length*[2] do espaço X.

A.3 Orientabilidade

Esta seção é baseada em (MARZANTOWICZ, 1995, Seção 1). Suponhamos que X seja um G-espaço compacto Hausdorff e G um grupo de Lie compacto.

Induzimos uma ação de G em $CX = X \times I / X \times \{0\}$, o cone de X, por $g \cdot [x,t] = [gx,t]$, com $g \in G$ e $[x,t] \in CX$. Note que $(CX)^G = C(X^G)$ e que X está mergulhado equivariantemente em CX. Se $X^G = \emptyset$, convencionamos $C(X^G) = [X,0]$, no qual $[X,0] = \{(x,s) \in X \times I; s = 0\}$ é o vértice do cone.

Dado $b \in EG$, definimos $j_b \colon (CX,X) \longrightarrow (CX_G, X_G)$ por $j_b([x,t]) \longrightarrow b \times_G [x,t]$, isto é, a inclusão de uma fibra típica (CX,X) em (CX_G,X_G). Note que dado $b' \in EG$, então j_b e $j_{b'}$ serão homotópicas, pois EG é conexo por caminhos. Denotaremos $j_b^* \colon H_G^*(CX,X) \longrightarrow H^*(CX,X)$ simplesmente por j^*.

Definição A.3.1. Suponhamos que X seja uma esfera em K-cohomologia de dimensão n. Dizemos que a fibração X_G é K**-orientável** se existe uma classe de cohomologia $U \in H_G^{n+1}(CX,X;K)$, chamada **classe de Thom**, tal que $j^*(U) \in H^{n+1}(CX,X;K) \cong K$ é um gerador. Além disso, dizemos que X é orientável se X_G o for.

Dado um G-par (X,A), denote por $L_g \colon X \longrightarrow X$ a translação à esquerda por $g \in G$ em X. Então, podemos induzir em $H^*(X,A)$ a seguinte aplicação:

$$G \times H^*(X,A) \longrightarrow H^*(X,A), \quad (g,z) \mapsto L_g^*(z).$$

Note que $(gh,z) \mapsto L_{gh}^*(z) = (L_g \circ L_h)^*(z) = L_h^* \circ L_g^*(z)$. Se supormos G abeliano, então temos uma ação em $H^*(X,A)$. Isto nos dá um homomorfismo de grupos $\varphi_G \colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^*(X,A)) \subset \mathrm{Homeo}(H^*(X,A))$, pois cada L_g^* é um K-homomorfismo.

[1] $p_X^* : H^*(BG;\mathbb{Z}_p) \to H_G^*(X;\mathbb{Z}_p)$. Veja Observações 1.4.11 e 1.4.12, no Capítulo 1 e Seção 2.1, no Capítulo 2.

[2] Veja Definição 1.6.1

Proposição A.3.2 ((MARZANTOWICZ, 1995, Proposição 1.3))**.** Seja X uma esfera em K-cohomologia de dimensão n. A fibração X_G é K-orientável se a ação de G sobre $H^n(X;K) \cong K$ for trivial.

Proposição A.3.3. Se $G = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{Q}$ e X uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão n, então a ação de G sobre $H^n(X;K)$ será trivial.

Prova. No caso em que $p = 0, 2$, não existe K-automorfismo de $K = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}_2$ senão o trivial.

A notação $|\cdot|$ a seguir significa ordem de um grupo ou elemento. No caso $p > 2$, temos $|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)| = p - 1$. De fato, se $\mathbb{Z}_p = 0, 1, \ldots, p-1$, um automorfismo $f\colon \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ é da forma $1 \mapsto i$, com $i \in \{1, \ldots, p-1\}$. Dado $z \neq 1 \in \mathbb{Z}_p$, $\varphi_G(z) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)$, então $|\varphi_G(z)|$ divide p, logo $|\varphi_G(z)| = 1$, portanto $\varphi_G(z) = \mathrm{Id}$. □

Corolário A.3.4. Se $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$, X_G será orientável.

Prova. Nestes casos, ainda teremos homomorfismos da forma $\varphi_G\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$. Como anteriormente, $Aut(\mathbb{Z}_2), \mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ são conjuntos triviais. E também $|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)| = p - 1$, o que implica que o homomorfismo $(\mathbb{Z}_p)^k \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)$ é trivial. □

Notação. Quando $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$ e X uma $(\bmod p)$-esfera de cohomologia de dimensão n, denotaremos a classe de Thom $U \in H_G^{n+1}(CX, X)$ por $\boldsymbol{t(X)}$.

A.4 Teorema de Smith

Nesta seção demonstraremos o Teorema de Smith 1.5.3.

Seja $G = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_p$ ou S^1. Temos

$$H^*(BG) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2[t], & t \in H^1(BG;\mathbb{Z}_2), \quad \text{caso } p = 2; \\ \mathbb{Z}_p[t] \otimes \bigwedge[s], & t \in H^2(BG,\mathbb{Z}_p) \qquad \text{e} \\ & s \in H^2(BG,\mathbb{Z}_p) \text{ tal que } s^2 = 0, \quad \text{caso } p \neq 0, 2; \\ \mathbb{Q}[t], & t \in H^2(BG,\mathbb{Q}), \quad \text{caso } p = 0. \end{cases}$$

Seja $S = \{1, t, t^2, \ldots\} \subset H^*(BG)$, no qual t é como em um dos três casos anteriores. Então, S é um conjunto multiplicativo no centro de $H^*(BG)$.

Considere a aplicação $\eta\colon H^*(BG) \longrightarrow K$, dada por $\eta(t) = 1$ (e $\eta(s) = 0$, quando $p > 2$).

Podemos induzir $S^{-1}\eta\colon S^{-1}H^*(BG) \longrightarrow K$ (veja Lema A.2.4). Então K pode ser visto como um $H^*(BG)$-módulo ou $S^{-1}H^*(BG)$-módulo. Em ambos os casos usaremos a notação ${}_\eta K$.

Precisamos do seguinte lema.

Lema A.4.1 ((ATIYAH; MACDONALD, 1969, Capítulo 2, Proposição 2.14 e Exercício 2.15))**.** Sejam $\phi\colon A \longrightarrow B$ uma A-álgebra[3], M um A-módulo e N um B-módulo (e portanto um A-módulo também via ϕ). Então
$$(M \otimes_A B) \otimes_B N \cong M \otimes_A N,$$
como B-módulos.

Seja X uma K-esfera de cohomologia de dimensão n.

Através do teorema da localização e de manipulações algébricas obtemos:

$$\begin{aligned}
&H_G^*(CX,X) \otimes_{H^*(BG)} {}_\eta K \cong \\
&\left(H_G^*(CX,X) \otimes_{H^*(BG)} S^{-1}H_G^*(BG)\right) \otimes_{S^{-1}H^*(BG)} {}_\eta K \cong (\text{ Proposição A.2.5}) \\
&S^{-1}H_G^*(CX,X) \otimes_{S^{-1}H^*(BG)} {}_\eta K \cong (\text{Teorema da Localização A.2.8}) \\
&S^{-1}H_G^*(CX^G,X^G) \otimes_{S^{-1}H^*(BG)} {}_\eta K \cong (\text{Proposição A.2.5}) \\
&\left(H_G^*(CX^G,X^G) \otimes_{H^*(BG)} S^{-1}H^*(BG)\right) \otimes_{S^{-1}H^*(BG)} {}_\eta K \cong (\text{Lema A.4.1}) \\
&H_G^*(CX^G,X^G) \otimes_{H^*(BG)} {}_\eta K \cong (\text{Fórmula de Künneth 2.1.1}) \\
&\left(H^*(CX^G,X^G) \otimes_K H^*(BG)\right) \otimes_{H^*BG} {}_\eta K \cong (\text{Lema A.4.1}) \\
&H^*(CX^G,X^G) \otimes_K {}_\eta K \cong H^*(CX^G,X^G).
\end{aligned}$$

Então, obtemos $H^*(CX^G,X^G)$ isomorfo a $H_G^*(CX,X) \otimes_{H^*(BG)} {}_\eta K$ como $H^*(BG)$-módulos.

Como $H_G^*(CX,X)$ é $H^*(BG)$-módulo livre gerado pela classe de Thom $t(X) \in H_G^{n+1}(CX,X)$ e ${}_\eta K$ é gerado por $1 \in H^0(BG)$, segue que $H_G^*(CX,X) \otimes_{H^*(BG)} {}_\eta K$ é gerado por um único elemento e portanto $H^*(CX^G,X^G)$ também será.

Note que a estrutura de $H^*(BG)$-módulo de $H^*(CX^G,X^G)$ é obtida por η. Assim, $H^*(CX^G,X^G)$ como K-módulo deverá ser livre com um único gerador. Também

$$H_G^*(CX^G,X^G) \cong H^*(BG) \otimes_K H^*(CX^G,X^G)$$

é um $H^*(BG)$-módulo com um único gerador, que denotaremos por $\boldsymbol{t(X^G)} \in H_G^{r+1}(CX^G,X^G)$.

Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_G^*(CX,X) \arrow[r, "\iota^*"] \arrow[d] & H_G^*(CX^G,X^G) \arrow[d] \\
S^{-1}H_G^*(CX,X) \arrow[r, "S^{-1}\iota^*"] & S^{-1}H_G^*(CX^G,X^G),
\end{tikzcd}$$

no qual a aplicação i^* é induzida da inclusão $i\colon (CX^G,X^G) \hookrightarrow (CX,X)$. Os homomorfismos verticais são as projeções canônicas em localização.

Lema A.4.2. ι^* é $H^*(BG)$-monomorfismo.

[3] Dado um homomorfismo de anéis $f\colon A \longrightarrow B$, dizemos que B é uma A-álgebra. Um homomorfismo entre A-álgebras é um homomorfismo de anéis que também é um homomorfismo de A-módulos.

Prova. Note que $S = \{1, t, t^2, \ldots\}$ está contido na parte polinomial de $H^*(BG)$. Assim, a aplicação canônica $H^*(BG) \longrightarrow S^{-1}H^*(BG)$ é um monomorfismo. Logo,

$$H^*_G(CX, X) \longrightarrow S^{-1}H^*_G(CX, X)$$

também será monomorfismo, pois seu núcleo consiste dos elementos $m \in H^*_G(CX, X)$ tal que existe $t^i \in S$ e $t^i m = 0$. Mas m corresponde a algum elemento da forma $\alpha t(X)$ e então $t^i \alpha t(X) = 0$ implicaria que $t^i \alpha = 0$, com $\alpha \in H^*(BG)$, o que é uma contradição. O mesmo para $H^*_G(CX^G, X^G) \longrightarrow S^{-1}H^*_G(CX, X^G)$. Segue do Teorema da Localização A.2.8 que o homomorfismo $S^{-1}\iota^*$ é um isomorfismo. Portanto, ι^* é $H^*(BG)$-monomorfismo. □

Assim, o monomorfismo $\iota^* : H^*_G(CX, X) \longrightarrow H^*_G(CX^G, X^G)$, satisfaz

$$\iota^*(t(X)) = \xi \cdot t(X^G),$$

para algum $\xi \in H^*(BG)$. Com isso $|t(X)| = |\xi| + |t(X^G)|$, ou melhor, $n + 1 = |\xi| + r + 1$, com $|\xi| \geq 0$. Logo $r + 1 \in [0, n+1] \cap \mathbb{Z}$.

Definição A.4.3. Denotaremos o elemente ξ por $e(X, X^G) \in H^{n-r}(BG)$ e o chamaremos a **classe de Euler** de (X, X^G).

Note que $S^{-1}H^*_G(CX, X) \cong S^{-1}H^*_G(CX^G, X^G)$ implica que $(t(X)) = (t(X^G))$ em $S^{-1}H^*(BG)$. Logo existe um elemento unidade $\frac{a}{t^s} \in S^{-1}H^*(BG)$ tal que $\frac{t(X)}{1} = \frac{a}{t^s}\frac{t(X^G)}{1}$. Para o caso $p = 0$, qualquer elemento $a \in H^*(BG)$ deverá ter grau par. Agora, para $p > 2$, como $\frac{a}{t^s}$ é uma unidade, o elemento $a \in H^*(BG)$ não será nilpotente e, consequentemente, terá grau par. Assim, para $p \neq 2$, grau de a e, por sua vez, grau de $\frac{a}{t^s}$, será par. Portanto, $n - r$ é par.

Das discussões anteriores, obtemos a prova do Teorema de Smith.

Teorema A.4.4. Sejam $G = \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_p$ ou S^1 e X um G-espaço, o qual é uma $(\bmod\ p)$-esfera de cohomologia de dimensão n. Então:

1) (CX^G, X^G) será um disco em K-cohomologia de dimensão $r+1$, tal que $r + 1 \in [0, n+1] \cap \mathbb{Z}$. Se $p \neq 2$, então $n - r$ será par.

2) X^G será uma $(\bmod\ p)$-esfera de cohomologia de dimensão r, tal que $r \in [-1, n] \cap \mathbb{Z}$.

   Se $p \neq 2$, então $n - r$ será par. Caso $X^G = \emptyset$ temos $r = -1$.

Prova. A demonstração do item 1) segue da discussão posterior ao Lema A.4.1 que dá origem ao gerador $t(X^G)$, e o item 2) segue da Observação 1.5.2, no Capítulo 1. □

Teorema A.4.5 ((DIECK, 1987, Capítulo III, Teorema 4.22))**.** Sejam $G = \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_p$ ou S^1 e (X, A) um G-par, o qual é um $(\bmod\ p)$-disco de cohomologia de dimensão n. Então, (X^G, A^G) é um $(\bmod\ p)$-disco de cohomologia de dimensão $r \in [0, n] \cap \mathbb{Z}$. Se $p \neq q$, então $n - r$ é par.

Note que podemos generalizar os Teoremas A.4.4 e A.4.5 para os grupos $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$, $(S^1)^k$ e $\mathbb{Z}_{(p^k)}$, com $k \geq 1$. De fato:

Observação A.4.6. Se X é uma $(\bmod\ p)$-esfera de cohomologia e $H < G$, então X^H é um G/H-espaço e $(X^H)^{G/H} = X^G$.

Para os grupos acima, existe uma cadeia finita crescente de subgrupos normais $1 \triangleleft H_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G$ tal que para cada i, $H_{i+1}/H_i \cong \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_p$ ou S^1. O Teorema de Smith é válido para o H_1-espaço X, então X^{H_1} será uma r_1-esfera de cohomologia, com $r_1 \in [-1,n]$. Da mesma forma o (H_2/H_1)-espaço X^{H_1} implica que X^{H_2} será uma r_2-esfera de cohomologia com $r_2 \in [-1,r_1] \subset [-1,n]$. Prosseguindo indutivamente verificaremos que X^G será um r-esfera de cohomologia com $r \in [-1,n]$. Além disso, $n - r_i$ será um inteiro par para todo i, portanto $n - r$ será par. O mesmo é válido para um $(\bmod\ p)$-disco de cohomologia (X,A)

A.5 Fórmula de Borel

Esta seção é baseada em (DIECK, 1987, Capítulo III, Seção 4).

Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $G = (S^1)^k$, com $k \geq 1$, e X uma $(\bmod\ p)$-esfera de cohomologia de dimensão n. Consideremos a sequência exata da tripla (CX, X, X^G), no qual CX denota o cone de X:

$$\ldots \longrightarrow H_G^{q-1}(X,X^G) \xrightarrow{\delta} H_G^q(CX,X) \xrightarrow{i^*} H_G^q(CX,X^G) \xrightarrow{j^*} H_G^q(X,X^G) \longrightarrow \ldots \qquad \text{(A.1)}$$

Comparando as sequências exatas em cohomologia dos pares (CX^G, X^G) e (CX, X^G), notamos que $H_G^*(CX,X^G)$ é $H^*(BG)$-isomorfo a $H_G^*(CX^G,X^G)$.

As inclusões $(CX^G,X^G) \hookrightarrow (CX,X^G) \hookrightarrow (CX,X)$ induzem o diagrama:

$$\begin{tikzcd} H_G^*(CX,X) \arrow[r, "i^*"] \arrow[dr, "\iota^*"'] & H_G^*(CX,X^G) \arrow[d, "\cong"] \\ & H_G^*(CX^G,X^G) \end{tikzcd}$$

Como a aplicação ι^* é monomorfismo (veja Lema A.4.2), segue que i^* é monomorfismo. Portanto, na sequência exata (A.1), j^* será epimorfismo. Então, concluímos que

$$\frac{H_G^*(CX,X^G)}{\ker(j^*)} \cong H_G^*(X,X^G),$$

como $H^*(BG)$-módulos.

Proposição A.5.1. Sejam $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $G = (S^1)^k$, com $k \geq 1$, e X uma $(\bmod\ p)$-esfera de cohomologia de dimensão n. Então

$$\frac{H^*(BG)}{(e(X,X^G))} \cong H_G^*(X,X^G),$$

como $H^*(BG)$-módulos, no qual $e(X, X^G) \in H^{n-r}(BG)$ é a classe de Euler de X e r a dimensão da $(\bmod p)$-esfera de cohomologia X^G.

Prova. Denotemos $e(X, X^G)$ somente por e. Definimos

$$\varphi\colon H^*(BG) \longrightarrow \frac{H^*(CX, X^G)}{\ker j^*}$$

por $\varphi(a) = at(X^G) + \ker j^*$, no qual $at(X^G) = p^*_{CX}(a) \cup t(X^G)$.

Observe que $\ker\varphi = (e)$. De fato:

se $a \in \ker\varphi$, então $\varphi(a) = \ker j^*$, logo $at(X^G) \in \ker j^* = Img(i^*) = (et(X^G))$. Então, $at(X^G) = \xi et(X^G)$ e, portanto, $a = \xi e$, para algum $\xi \in H^*(BG)$. Logo, $\ker\varphi \subseteq (e)$. Por outro lado, $\varphi(e) = et(X^G) + \ker j^*$, mas $Img(i^*) = (et(X^G)) = \ker j^*$. Portanto, $(e) \subseteq \ker\varphi$.

Como φ é um epimorfismo, pois $H^*_G(CX, X^G)$ é um $H^*(BG)$- módulo livre com um único gerador $t(X^G)$, o resultado segue pelo Teorema do Isomorfismo. Temos,

$$\psi\colon \frac{H^*(BG)}{(e)} \longrightarrow \frac{H^*_G(CX, X^G)}{\ker(j^*)} \cong H^*(X, X^G),$$

dado por $a + (e) \mapsto p^*_{CX}(a) \cup j^*(t(X^G)) \in H^*_G(X, X^G)$. □

Notações: Seja $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, $(\mathbb{Z}_p)^k$ ou $(S^1)^k$, com $k \geq 1$.

Denotaremos o conjunto de todos os subgrupos H de G de rank $k-1$ por $\mathcal{H}$, no qual quando $p = 0$, consideraremos subgrupos conexos de $(S^1)^k$.

Nos casos $p = 0, 2$, temos os seguintes conjuntos multiplicativos:

a) $S = H^*(BG) - \{0\}$.

b) $S_H = H^*(BG) - (s_H)$, no qual $(s_H) = \ker H^*(BG) \longrightarrow H^*(BH)$, para todo $H \in \mathcal{H}$.

Nos casos $p > 2$, temos:

a) $S = \mathbb{Z}_p[t_1, \ldots, t_k] - \{0\}$.

b) $S_H = \mathbb{Z}_p[t_1, \ldots, t_k] - (s_H)$, no qual $(s_H) = \mathbb{Z}_p[t_1, \ldots, t_k] \cap \ker H^*(BG) \longrightarrow H^*(BH)$, para todo $H \in \mathcal{H}$.

Observação A.5.2. Segue do Teorema da Localização A.2.8 que

$$S^{-1}H^*_G(X, Y) \cong S^{-1}H^*_G(X^G, Y^G) \quad \text{e} \quad S_H{}^{-1}H^*_G(X, Y) \cong S_H{}^{-1}H^*_G(X^H, Y^H).$$

Dado $H \in \mathcal{H}$, podemos escrever $G = H \times L$, no qual $L \cong G/H$. Assim, pela Fórmula de Künneth (veja Lema 2.1.2, Capítulo 2), $H^*(BG) \cong H^*(BH) \otimes H^*(BL)$. Se X é uma (mod p)-esfera de cohomologia, por um lado, $H^*_G(X^H, X^G) \cong \dfrac{H^*(BG)}{e(X^H, X^G)}$ e, por outro lado, usando a identificação

$$EG \times_G (X^H, X^G) \cong (BH \times (EL \times_L X^H), BH \times (EL \times_L X^G)),$$

obtemos $H^*_G(X^H, X^G) \cong H^*(BH) \otimes \dfrac{H^*(BL)}{(e(H))}$, no qual $e(H) \in H^*(BL)$ é classe de Euler referente a X^H como L-espaço. Assim, $(e(H)) = (e(X^H, X^G))$ como $H^*(BG)$-ideais. É importante observar que $e(H)$ é um polinômio em todos os casos, logo $e(X^H, X^G)$ também será. Além disso, $e(X^H, X^G) = s_H^b$, para algum inteiro b.

Fazendo uso do Teorema de Localização, teremos:

$$S_H{}^{-1} H^*(X, X^G) \cong S_H{}^{-1} \left(\frac{H^*(BG)}{(e(X, X^G))} \right) \cong S_H{}^{-1} \left(\frac{H^*(BG)}{(e(X^H, X^G))} \right) \cong S_H{}^{-1} H^*(X, X^G).$$

Observação A.5.3. Com as mesmas hipóteses da Observação A.5.2, no caso em que $p > 2$, isto é, $G = (\mathbb{Z}_p)^k$, o anel $H^*(BG; \mathbb{Z}_p)$ possui elementos nilpotentes. Note que se a classe de Euler $e = e(X, X^G) \in H^{n-r}(BG; \mathbb{Z}_p)$ for nilpotente, teremos $\iota^*(et(X)) = e^2 t(X^G) = 0$, com $\iota^* : H^*_G(CX, X) \longrightarrow H^*_G(CX^G, X^G)$. Como ι^* é um monomorfismo, temos $e(X, X^G) t(X) = 0$, portanto, $e(X, X^G) = 0$. Logo $S^{-1} i^* \equiv 0$, o que contradiz o Teorema da Localização A.2.8. Então, neste caso, a classe de Euler será da forma

$$e = z + n,$$

no qual z é um elemento não-nulo pertencente à parte polinomial de $H^*(BG; \mathbb{Z}_p)$ e n é uma possível parte nilpotente.

Nos casos $p = 0, 2$, a classe de Euler será sempre um polinômio.

Tomando S como o conjunto dos produtos de fatores lineares em $H^*(BG)$, obtemos ainda $X^G = X^S$. Fazendo $S_H = \{s \in S \,;\, s \notin \ker(H^*(BG) \longrightarrow H^*(BH))\}$, teremos $X^{S_H} = X^H$ e as afirmações da Observação A.5.2 são válidas.

Lema A.5.4 ((DIECK, 1987, Capítulo III, Seção 4, Lemas 4.38 e 4.39))**.** Com a notação das Observações A.5.2 e A.5.3, $e = e(X, X^G) = z + n$, temos $z \in S$. Além disso, $z \in (s_H)$ se, e somente se, $X^H \neq \emptyset$.

Como s_H é um polinômio irredutível (pois é gerador de um ideal principal primo), temos $z = s_H^a u$ para algum polinômio u em $H^*(BG)$. Denotemos $e(X^H, X^G)$ por e_H e $e(X, X^G)$ por e, então como $S_H^{-1}(H^*(BG))/(e_H) \cong S_H^{-1} H^*(BG)/(e)$, existe uma unidade $\dfrac{\alpha}{\beta} \in S^{-1} H^*(BG)$ tal que $\dfrac{e}{1} = \dfrac{\alpha}{\beta} \dfrac{e_H}{1}$. Assim, existe $t \in S_H$ tal que $t\beta e = t\alpha e_H$. Logo, $t\beta z = t z_\alpha e_H$, no qual z_α é a parte polinomial de α. Com isso, e_H divide z e, portanto, $s_H^a = s_H^b = e_H$ e $z = e_H u$.

Como os elementos s_H decompõem z, temos $z = \prod_{\substack{H \in \mathcal{H} \\ n(H) > r}} e_H$, e fica assim provado o Teorema 1.5.7 (Fórmula de Borel).

A.6 Grupos Amenable

Apresentaremos a propriedade de amenabilidade de grupos. A referência básica para esta seção é (NOWAK; YU, 2012, Capítulo 3).

Seja G um grupo. Uma função $|\ |\colon G \longrightarrow [0, +\infty)$ é dita ser uma **função-comprimento**[4] se para todos $g, h \in G$, as condições abaixo são satisfeitas:

(1) $|g| = 0$ se, e somente se, g é o elemento neutro;

(2) $|g| = |g^{-1}|$;

(3) $|gh| \leq |g| + |h|$.

Uma *função-comprimento* é **própria** se para qualquer $R > 0$ o conjunto $\{g \in G : |g| \leq R\}$ for finito.

Proposição A.6.1 ((NOWAK; YU, 2012, Proposição 1.2.2))**.** Se G é um grupo enumerável, [5] então existe uma função-comprimento própria para G.

Um grupo enumerável G é dito ser **finitamente gerado** se possuir um conjunto de geradores finito e simétrico $\Sigma \subseteq G$. Então, cada elemento $g \in G$ pode ser escrito como uma palavra finita $g = \sigma_1 \ldots \sigma_k$, com cada $\sigma_i \in \Sigma$. Podemos então definir uma função-comprimento própria, conhecida como **word length**, da seguinte maneira:

$$|g|_\Sigma = \min\{n;\ g = \sigma_1 \ldots \sigma_n,\ \sigma_i \in \Sigma\}, \text{ para cada } g \in G.$$

Exemplo A.6.2.

a) Se $G = \mathbb{Z}$ e $\Sigma = \{-1, 1\}$, então $|z|_\Sigma$ é o valor absoluto de $z \in \mathbb{Z}$.

b) Se G é um grupo finito e $\Sigma = G$, então $|g|_\Sigma = 1$, para qualquer $g \in G$, $g \neq e$.

[4] Tradução de *length function*

[5] Um grupo é dito ser enumerável se, como conjunto, for enumerável e se possui um conjunto de geradores enumerável.

Seja $(G,|\ |)$ um grupo enumerável juntamente com uma função-comprimento própria. A **métrica word length** é uma função $d\colon G\times G\longrightarrow[0,+\infty)$ definida por,

$$d(g,h)=|g^{-1}h|,$$

para qualquer $g,h\in G$.

Observação A.6.3. Observe que $d(g,h)$ satisfaz todas as propriedades que uma métrica usual satisfaz:

i) $d(g,h)=0$ se, e somente se, $g=h$;

ii) $d(g,h)=d(h,g)$;

iii) $d(g,l)\leq d(g,h)+d(h,l)$.

Além disso, $d(-,-)$ é invariante à esquerda, isto é, $d(\gamma g,\gamma h)=|(\gamma g)^{-1}\gamma h|=|g^{-1}\gamma^{-1}\gamma h|=|g^{-1}h|=d(g,h)$, para quaisquer $\gamma,g,h\in G$.

Vamos agora à definição principal desta seção, a de grupos amenable.

Seja G um grupo finitamente gerado com um métrica *word length*. Sejam $A\subseteq G$ e $R>0$, definimos o **R-bordo** de A como sendo o conjunto $\partial_R A=\{g\in G\setminus A : d(g,A)\leq R\}$.

Definição A.6.4. Um grupo finitamente gerado G é **amenable** se para todo $R>0$ e $\epsilon>0$ existe um conjunto finito $F\subseteq G$ tal que

$$\frac{\#\partial_R F}{\#F}\leq\epsilon.$$

Os conjuntos F que satisfazem a condição acima são chamados de **conjuntos de Følner**.

Segue de (NOWAK; YU, 2012, Exercício 3.5) que amenabilidade de grupos finitamente gerados independem da escolha do conjunto gerador do grupo.

A condição acima é chamada de condição isoperimétrica. Existem várias outras caracterizações de amenabilidade como citado em (NOWAK; YU, 2012, Capítulo 3). A caracterização apresentada aqui é uma versão geométrica devida a Følner.

Exemplos A.6.5.

(a) Grupos finitos são amenables (veja (NOWAK; YU, 2012, Exemplo 3.1.2)).

(b) $\mathbb{Z}$ é amenable. Também, grupos abelianos finitamente gerados são amenables (veja (NOWAK; YU, 2012, Exemplo 3.1.3)).

Proposição A.6.6 ((NOWAK; YU, 2012, Proposição 3.1.4),(PIER, 1984, Proposição 13.3)). Sejam G,H grupos discretos tais que H é um subgrupo fechado de G. Se G é amenable então H é amenable.

Proposição A.6.7 ((PIER, 1984, Corolário 13.10))**.** Um grupo discreto é amenable se, e somente se, cada subgrupo discreto finitamente gerado é amenable.

Portanto, da Proposição acima e do Exemplo A.6.5(b) temos.

Corolário A.6.8. Todo grupo abeliano discreto é amenable.

Como exemplo de grupos que não são amenable temos:

Proposição A.6.9 ((NOWAK; YU, 2012, Exemplo 3.3.3),(PIER, 1984, Proposição 14.1))**.** O grupo discreto livre F_2 em dois geradores não é amenable.

Segue da Proposição A.6.6, que qualquer grupo finitamente gerado que possui subgrupos livres com mais de 1 gerador não é amenable (veja (NOWAK; YU, 2012, Corolário 3.3.4)).