

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 27/08/99

Assinatura: _____

Sobre a Equisingularidade e Trivialidade Topológica de Germes em $\mathcal{O}(3, 3)$

Victor Hugo Jorge Pérez¹

Orientador: *Prof. Dr. Farid Tari*

Co-Orientador: *Prof. Dr. Marcelo José Saia*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Ciências – Área: Matemática.

São Carlos
Agosto/1999

¹Este trabalho contou com suporte financeiro do CNPq

Em memória ao Prf. Walter Torres M. e os Profs. da UNSA

A minha mãe e irmãos

... à inocência de uma criança e à coragem de uma mulher

Agradecimentos

Ao amigo, orientador Farid Tari, pela orientação, acompanhamento e paciência, amizade sempre sincera que se dedicou a este trabalho e a mim.

Ao amigo, co-orientador e Marcelo José Saia, que em realidade foi mais que um co-orientador, e a quem eu diria meu segundo orientador.

À minha família e principalmente a minha esposa Magda e meu filho Marco Antonio.

À Professora Dra. Maria Aparecida S. Ruas que contribuiu com sua amizade e sugestões valiosas para a leitura de varios artigos.

Aos Professores Drs. Terence Gaffney e David Mond, por esclarecer várias questões e por suas sugestões valiosas à minha pesquisa.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Às amigas da secretaria da Pós- Graduação Beth, Laura e Marília, por fazerem sempre o possivel para ajudar a todos os alunos.

Ao Departamento de Matemática do ICMC-USP São Carlos .

À todas as pessoas que contribuíram de maneira direta ou indireta com a realização deste trabalho, sem voces nada disso teria tido qualquer significado.

À este querido e maravilhoso país Brasil.

Finalmente, à Deus, por estar sempre presente em minha vida.

Resumo

T. Gaffney mostrou que se alguns invariantes associados a uma família de germes de aplicações $f_t : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ são constantes ao longo do parâmetro t , então esta família é Whitney equisingular. O número de invariantes envolvidos neste resultado depende das dimensões (n, p) e este número é grande conforme n e p forem grandes. Então surge uma pergunta natural: *Fixado um par (n, p) , qual é o número mínimo de invariantes no Teorema de Gaffney para garantir a Whitney equisingularidade ou trivialidade topológica da família?*

Esta pergunta foi respondida nos casos $p = 1$ e $n \neq 3$; $n = p = 2$ e $n = 2, p = 3$.

Neste trabalho consideramos o caso $n = p = 3$. Estabelecemos relações entre as multiplicidades polares dos tipos estáveis e os invariantes zero estáveis permitindo, assim, reduzir o número de invariantes para equisingularidade de 18 a 6 no caso de corank 1. Apresentamos também fórmulas para o cálculo das multiplicidades polares para germes quase-homogêneos.

Abstract

T. Gaffney showed that if some invariants associated to germs in a family $f_t : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathcal{O}, 0$ are constant along the parameter t , then the family is Whitney equisingular and therefore topologically trivial. The number of invariants involved depends on the dimensions (n, p) , and this number is large when n and p are large. It is then natural to ask:

Fixing a pair (n, p) , what is the minimum number of invariants in Gaffney's Theorem that are necessary to ensure Whitney equisingularity of the family?

This question has been answered for the cases $p = 1, n \neq 3$; $n = p = 2$ and $n = 2, p = 3$.

In this thesis, we deal with the cases $n = p = 3$. We first establish relationships between the polar multiplicities of the stable types and the zero-stable invariants, thus reducing the number of invariants from 18 to 6 for corank 1 germs. We also give formulae for polar multiplicities of quasi-homogeneous germs.

Sumário

Introdução	1
1 Germes de aplicações	4
1.1 Germes de aplicações diferenciáveis	4
1.2 Os grupos de Mather $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{K}$	4
1.3 Os espaços tangentes	6
1.4 O espaço de jatos	7
1.5 Desdobramentos Versais	8
2 Equisingularidade de espaços analíticos complexos	12
2.1 Introdução	12
2.2 Espaços analíticos complexos e as condições de Whitney	13
2.3 Critérios de equisingularidade	15
2.4 Critérios de equisingularidade e invariantes	15
3 Variedades polares e multiplicidades polares	22
3.1 Introdução	22
3.2 Variedades polares de hipersuperfícies	24
3.3 Multiplicidades	28
3.4 Multiplicidades polares	29
3.5 Equisingularidade de Whitney e multiplicidades polares	30

4	Equisingularidade para germes de aplicações	34
4.1	Desdobramentos excelentes	34
4.2	Resumo da demonstração do Teorema 4.1.1	37
4.3	Equisingularidade de germes de aplicações de $\mathcal{O}(2, 3)$ e $\mathcal{O}(2, 2)$. .	39
4.3.1	O caso de germes finitamente determinados em $\mathcal{O}(2, 3)$. .	39
4.3.2	O caso de germes finitamente determinados em $\mathcal{O}(2, 2)$. .	40
5	Equisingularidade de germes em $\mathcal{O}(3, 3)$	43
5.1	Os tipos estáveis em $\mathcal{O}(3, 3)$	43
5.2	Relações de invariantes nos tipos estáveis da meta	45
5.2.1	No conjunto $\Delta(f)$	45
5.2.2	No conjunto $f(D_1^2(f \Sigma(f)))$	50
5.2.3	No conjunto $f(\Sigma^{1,1}(f))$	53
5.3	Relações entre os invariantes nos tipos estáveis da fonte	55
5.4	Teoremas principais de equisingularidade	56
6	Aplicações a germes unimodulares	57
7	Fórmulas de multiplicidades polares para germes quase-homogêneos de $\mathcal{O}(3, 3)$	64
7.1	Introdução	64
7.2	Fórmulas para multiplicidades polares de $\Delta(f)$	65
7.3	Fórmulas para multiplicidades polares de $f(\Sigma^{1,1}(f))$	67
7.4	Fórmulas para multiplicidades polares de $f(D_1^2(f \Sigma(f)))$	68
7.5	Equisingularidade para germes quase-homogêneos	69
7.6	Invariantes para germes simples de $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$	70
7.7	Conclusão	74

7.7.1	Considerações gerais	74
7.7.2	Sugestões de trabalhos futuros	74
A	Resultados e definições algébricas	76
	Apêndice	76
	Referências bibliográficas	81

Introdução

A teoria de equisingularidade como é conhecida atualmente se iniciou com os trabalhos de Zariski ([42], [43], [44], [45]) na década de 60'. Zariski observou o seguinte problema:

Encontrar critérios algébricos para decidir quando um espaço algébrico ou espaço analítico complexo X sobre \mathbb{C} , é equisingular ao longo de um subespaço $Y \subset X$ em um ponto $x \in Y$.

Desde então a Teoria de equisingularidades sobre este ponto de vista foi e está sendo estudada por muitos matemáticos. No caso de espaços analíticos complexos Teissier obteve resultados interessantes e pioneiros em [35], [36], [37], e [38]. Sua principal contribuição foi relacionar esta questão com invariantes numéricos, que constituem uma ferramenta primordial para o estudo deste problema:

Os resultados de Teissier são usados por Gaffney em [12]. Ele estuda o problema de equisingularidade de germes de aplicações considerando famílias ou deformações. Mais especificamente ele estuda o seguinte problema.

Dada uma família a 1-parâmetro de germes de aplicações de $\mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$, encontrar invariantes analíticos cuja constância na família implique que a família é Whitney equisingular ou topologicamente trivial.

Gaffney resolve este problema em [12] para uma importante classe de germes de aplicações finitamente determinados de tipo estável discreto. Os invariantes necessários para que este problema seja resolvido são os invariantes zero estáveis e as multiplicidades polares definidas por Teissier.

Os resultados de Gaffney mostram que o número de invariantes envolvidos na

determinação desta questão depende das dimensões (n, p) e este número pode ser muito grande conforme n e p forem grandes. Então surge uma pergunta natural:

Fixado um par de dimensões (n, p) , qual é o número mínimo de invariantes no Teorema de Gaffney para garantir a Whitney equisingularidade ou trivialidade topológica de uma família?

Esta pergunta foi respondida nos seguintes casos:

No caso $p = 1$ e $n \neq 3$, o número de Milnor é uma lista completa dos invariantes analíticos e topológicos (ver [21]).

No caso $n = p = 2$ (ver [9]), os invariantes analíticos que garantem a equivalência entre a Whitney equisingularidade de uma família são o número de cúspides, o número de dobras transversais e a segunda multiplicidade polar do discriminante do germe.

No caso $n = 2, p = 3$, Gaffney mostrou em [12] que o número de pontos triplos (T) , o número de guarda chuvas de Whitney (C) , a segunda multiplicidade polar da imagem de f denotado por $m_1(f(\mathbb{C}^2))$ e a multiplicidade da curva dos pontos duplos $(m_0(D^2(f)))$ formam uma lista completa de invariantes. Ruas mostrou em [34] que, em alguns casos particulares, os números T, C e o número de Milnor da curva de pontos duplos $(\mu(D^2(f)))$ formam uma lista completa de invariantes analíticos.

O objetivo principal deste trabalho é estudar o número mínimo de invariantes para resolver o problema da Whitney equisingularidade ou trivialidade topológica no caso de germes de aplicações $f \in \mathcal{O}(3, 3)$.

Segundo o resultado de Gaffney para que a família f_t de f seja Whitney equisingular precisamos de 18 invariantes. É claro que este número é muito grande. A nossa estratégia principal para reduzir este número é encontrar relações entre os invariantes. Assim, conseguimos reduzir o número de invariantes necessários à 6.

Estudamos também as multiplicidades polares associados a germes quase-homogêneo $f \in \mathcal{O}(3, 3)$. (Em geral estas multiplicidades são difíceis de calcular

em espaços que não são I.C.I.S. como é o caso nosso dos tipos estáveis da meta.)

Este trabalho está organizado como segue:

No capítulo 1 são introduzidas as noções básicas sobre germes de aplicações e suas propriedades que serão usadas nos capítulos 4, 5 e 6.

No capítulo 2, descrevemos os critérios de equisingularidade e relacionamos estes com os invariantes numéricos, especificamente no caso de hipersuperfícies. Este capítulo serve mais como uma motivação para o estudo de equisingularidade.

Com o intuito de fixar os resultados e notações, no capítulo 3 introduzimos as variedades polares e multiplicidades polares e as relacionamos com a Whitney equisingularidade.

No capítulo 4 mostramos como se obter a Whitney equisingularidade para germes de aplicações, dando ênfase especial para a relação entre os resultados do capítulo 3 e as técnicas de Gaffney em [12].

O capítulo 5 é o principal do trabalho. Neste capítulo estudamos o problema de equisingularidade de famílias de germes de aplicações $\mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^3, 0$ dando todas as técnicas necessárias de como atacar o problema, primeiramente encontramos relações entre os invariantes e posteriormente mostramos o resultado principal.

No capítulo 6 aplicamos os resultados do capítulo 5 para alguns germes unimodulares e [6].

O capítulo 7 trata de encontrar fórmulas das multiplicidades polares no caso de germes quase-homogêneos de $\mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^3, 0$. Estas fórmulas nos levam a entender um pouco melhor o comportamento das multiplicidades polares conseguindo assim calcular alguns invariantes do capítulo 5. Encerramos este capítulo mostrando sugestões e problemas para futuras pesquisas.

No apêndice descrevemos algumas ferramentas e resultados interessantes que são usados na tese.

Capítulo 1

Germes de aplicações

1.1 Germes de aplicações diferenciáveis

Todas as aplicações serão consideradas C^∞ ou analíticas no caso real e holomorfas no caso complexo. Denotamos por K os corpos \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Sejam duas aplicações $f : U \rightarrow K^p$ e $g : V \rightarrow K^p$ definidas em vizinhanças U e V de um ponto $q \in K^n$. Definimos a seguinte relação de equivalência:

$$f \sim g \iff \exists \text{ vizinhança } W \text{ de } q, W \subset U \cap V \text{ tal que } f|_W = g|_W.$$

Às classes de equivalência chamamos *germes* de aplicações no ponto q . Sem perda de generalidade tomamos $q = 0 \in K^n$. O germe de f em 0 é denotado por

$$f : K^n, 0 \rightarrow K^p,$$

o conjunto dos germes $K^n, 0 \rightarrow K^p$ é denotado por $\mathcal{O}(n, p)$. Quando $p = 1$ (germes de funções) o conjunto é denotado simplesmente por \mathcal{O}_n .

\mathcal{O}_n é um anel local comutativo com unidade e $\mathcal{O}(n, p)$ é um \mathcal{O}_n -módulo.

1.2 Os grupos de Mather $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{K}$

\mathcal{R} é o grupo dos germes de difeomorfismos $K^n, 0 \rightarrow K^n, 0$, \mathcal{L} é o grupo dos germes de difeomorfismos $K^p, 0 \rightarrow K^p, 0$, e \mathcal{A} é o produto direto $\mathcal{R} \times \mathcal{L}$. Definimos ações

destes grupos sobre $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$, onde m_n é o ideal maximal de \mathcal{O}_n como

$$\begin{aligned} h.f &= f \circ h^{-1}, \quad h \in \mathcal{R} \\ k.f &= k \circ f, \quad k \in \mathcal{L} \\ (h, k).f &= k \circ f \circ h^{-1}, \quad (h, k) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

onde $f \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$. O grupo \mathcal{R} (resp. \mathcal{L}) é chamado também o grupo de mudanças de coordenadas na fonte (resp. na meta).

O grupo \mathcal{C} é o grupo de difeomorfismos $K^n \times K^p, 0 \rightarrow K^n \times K^p, 0$ que são escritos na forma $H(x, y) = (x, \bar{H}(x, y))$ com $\bar{H}(x, 0) = 0$ para $x \in K^n$ próximo da origem. A ação de \mathcal{C} sobre $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ é definida como

$$H.f(x) = H(x, f(x)), \quad H \in \mathcal{C}, \quad f \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p).$$

\mathcal{C} pode ser visto como o grupo de difeomorfismos $K^p, 0 \rightarrow K^p, 0$ parametrizados por $x \in K^n$. Denote $h_x(y) = \bar{H}(x, y)$, então a fórmula antecedente pode ser escrita na forma

$$H.f(x) = h_x(f(x)).$$

O grupo \mathcal{K} é o grupo dos germes de difeomorfismos $K^n \times K^p, 0 \rightarrow K^n \times K^p, 0$ que são escritos na forma

$$H(x, y) = (h(x), \bar{H}(x, y))$$

onde $h \in \mathcal{R}$, $\bar{H}(x, 0) = 0$ para $x \in K^n$ próximo da origem. A ação de \mathcal{K} sobre $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ é definida como

$$H.f(x) = H(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))), \quad H \in \mathcal{K}, \quad f \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p).$$

Isto é,

$$H.f(x) = h_x(f(h^{-1}(x))).$$

O grupo \mathcal{K} é chamado *grupo de contato*. O grupo \mathcal{C} é um subgrupo normal de \mathcal{K} e os grupos \mathcal{R} , \mathcal{L} , \mathcal{A} podem ser identificados como subgrupos de \mathcal{K} .

Observação 1.2.1. *Os grupos de Mather não são grupos de Lie, pois as suas dimensões são infinitas.*

1.3 Os espaços tangentes

Definimos o “espaço tangente” a $\mathcal{O}(n, p)$ em f , que denotamos por θ_f , o \mathcal{O}_n -módulo de campos de vetores ao longo de f . Então $\xi \in \theta_f$ se $\xi : K^n, 0 \rightarrow T(K^p)$ e $\pi_p \circ \xi = f$ onde $\pi_p : T(K^p) \rightarrow K^p$ é a projeção do fibrado tangente TK^p de K^p a K^p .

Definimos $\theta_n = \theta_{1_{K^n}}$ e $\theta_p = \theta_{1_{K^p}}$, onde 1_{K^n} e 1_{K^p} denotam as aplicações identidade de K^n e K^p respectivamente.

Seja \mathcal{G} um subgrupo de \mathcal{K} . Definimos a álgebra de Lie, $L\mathcal{G}$, de \mathcal{G} como segue. Seja $\phi :]-\epsilon, \epsilon[\times K^{n+p}, 0 \rightarrow K^{n+p}, 0$ uma curva em \mathcal{G} tal que ϕ_0 é a identidade em \mathcal{G} . Derivando-a temos um campo de vetores

$$z \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, z)|_{t=0}.$$

O conjunto de todos estes campos é denotado por $L\mathcal{G}$ e é chamado a álgebra de Lie do grupo \mathcal{G} .

Observemos que $LR = m_n \cdot \theta_n$ e $LL = m_p \cdot \theta_p$.

Definimos o \mathcal{O}_n -homomorfismo

$$\begin{aligned} tf : \theta_n &\rightarrow \theta_f \\ \phi &\mapsto df \circ \phi \end{aligned}$$

e o \mathcal{O}_p -homomorfismo (via $f^* : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathcal{O}_n, \alpha \mapsto \alpha \circ f$ por $\alpha \in \mathcal{O}_p$)

$$\begin{aligned} wf : \theta_p &\rightarrow \theta_f \\ \psi &\mapsto \psi \circ f. \end{aligned}$$

Então os espaços tangentes às órbitas dos grupos de Mather são dados por

$$LR \cdot f = tf(m_n \cdot \theta_n), \quad LL \cdot f = wf(m_p \cdot \theta_p), \quad LC \cdot f = f^*(m_p) \cdot \theta_f,$$

$$LA \cdot f = LR \cdot f + LL \cdot f, \quad LK \cdot f = LR \cdot f + LC \cdot f.$$

Definimos a \mathcal{G} -codimensão de f como o segue.

$$\mathcal{G} - \text{codim}(f) = \dim_K(m_n \cdot \mathcal{O}(n, p) / L\mathcal{G} \cdot f)$$

Definimos a \mathcal{G}_e -codimensão de f como

$$\mathcal{G}_e - \text{codim}(f) = \dim_K(\mathcal{O}(n, p)/L_e\mathcal{G} \cdot f)$$

onde

$$L_e\mathcal{R} \cdot f = tf(\theta_n), \quad L_e\mathcal{L} \cdot f = wf(\theta_p), \quad L_e\mathcal{C} \cdot f = f^*(\mathcal{O}_p) \cdot \theta_f,$$

$$L_e\mathcal{A} \cdot f = L_e\mathcal{R} \cdot f + L_e\mathcal{L} \cdot f, \quad L_e\mathcal{K} \cdot f = L_e\mathcal{R} \cdot f + L_e\mathcal{C} \cdot f.$$

1.4 O espaço de jatos

Denotemos m_n^{k+1} como o espaço dos germes de funções cujos polinômios de Taylor de ordem k na origem são identicamente nulos. O espaço de k -jatos é definido como

$$J^k(n, p) = m_n \cdot \mathcal{O}(n, p) / m_n^{k+1} \cdot \mathcal{O}(n, p).$$

Este espaço consiste dos germes de polinômios de grau $\leq k$ sem o termo constante e portanto é um espaço vetorial de dimensão finita. A cada $f \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ associamos o k -jato $j^k f$ que é seu polinômio de Taylor de grau $\leq k$ na origem.

Seja \mathcal{G} um subgrupo de um dos grupos de Mather e defina \mathcal{G}_k como o subgrupo de \mathcal{G} que consiste dos elementos de \mathcal{G} cujo k -jato é a identidade. Estes são subgrupos normais de \mathcal{G} e definem os grupos de jatos $J^k\mathcal{G} = \mathcal{G}/\mathcal{G}_k$. *Estes grupos são grupos de Lie.*

A ação de \mathcal{G} sobre $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ induz uma ação de $J^k\mathcal{G}$ sobre $J^k(n, p)$ que é uma ação do grupo de Lie. Uma das principais idéias na teoria de singularidades é de substituir a ação de \mathcal{G} sobre $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ pela ação de $J^k\mathcal{G}$ sobre $J^k(n, p)$.

Definição 1.4.1. *Um germe $f \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ é dito k - \mathcal{G} -determinado se qualquer $g \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ tal que $j^k g = j^k f$ é \mathcal{G} -equivalente a f .*

f é dito finitamente \mathcal{G} determinado se é $k - \mathcal{G}$ determinado para algum k .

A determinação finita significa que o germe é equivalente a um de seus polinômios de Taylor e o problema da classificação pode ser reduzido ao espaço dos k -jatos, que é um espaço vetorial de dimensão finita.

A investigação da determinação finita começou com os trabalhos de John Mather em 1960 com uma série de artigos principais da teoria de singularidades. Mather deu uma estimativa grosseira do grau de determinação finita de um germe de aplicação. Terence Gaffney e Andrew du Plessis melhoraram bastante as aproximações do grau de determinação de germes. O artigo de C.T.C. Wall [41] contém um survey dos resultados conhecidos sobre a determinação finita antes de 1980. Mas foi somente em [4] que a questão do grau da determinação finita foi completamente resolvida usando as ações de grupos unipotentes.

1.5 Desdobramentos Versais

Seja f um germe finitamente determinado. Podemos considerar as deformações de f e estudar os tipos de singularidades que aparecem em tais deformações. Em particular, podemos perguntar se os tipos de singularidades que aparecem são em número finito e se existe uma família que contém todos estes tipos. Na verdade queremos que qualquer outra deformação de f seja obtida a partir desta família. Tais famílias chamam-se deformações versais.

A partir de agora tomamos $K = \mathbb{C}$, mas os resultados valem para $K = \mathbb{R}$.

Definição 1.5.1. *Um desdobramento a s -parâmetros de um germe $f_0 \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ é um germe*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0 &\rightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, 0 \\ (x, u) &\mapsto (f(x, u), u) \end{aligned}$$

tal que $f(x, 0) = f_0(x)$. O germe $f(x, u)$ é chamado uma deformação de f_0 .

Consideramos o caso $\mathcal{G} = \mathcal{A}$ (os resultados são análogos para qualquer grupo de Mather). Dois desdobramentos $F, G : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, 0$ de f_0 são *isomorfos* se existir dois germes de difeomorfismos

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0 &\rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0 \\ \psi : \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, 0 &\rightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, 0 \end{aligned}$$

que são desdobramentos a s -parâmetros dos germes da identidades em \mathbb{C}^n e \mathbb{C}^p respectivamente,

$$G = \psi \circ F \circ \phi^{-1}.$$

Como $\phi_0 = 1_{\mathbb{C}^n}$ e $\psi_0 = 1_{\mathbb{C}^p}$ então ϕ_u e ψ_u são germes de difeomorfismos para u pequeno. Então $g_u = \psi_u \circ f_u \circ \phi_u^{-1}$ é \mathcal{A}_e -equivalente a f_u via difeomorfismos que são suavemente parametrizados por u . Observamos que os germes g_u, f_u, ϕ_u, ψ_u não podem ser considerados como germes em 0 com meta 0, para $u \neq 0$. Por isso chamamos a equivalência de \mathcal{A}_e -equivalência. Para manter a origem fixa temos que impor $\phi(0, u) = 0$ e $\psi(0, u) = 0$.

Dado um germe $h : \mathbb{C}^t, 0 \rightarrow \mathbb{C}^s, 0$ definimos o *pull-back* de F por h , denotado por h^*F , o desdobramento a t -parâmetros

$$h^*F(x, v) = (f(x, h(v)), v).$$

F e G são ditos *equivalentes* se existir um difeomorfismo $h : \mathbb{C}^s, 0 \rightarrow \mathbb{C}^s, 0$ tal que G é isomorfo a h^*F . Esta é uma relação de equivalência. Se G é um desdobramento a t -parâmetros de f_0 (t não necessariamente igual a s), dizemos que G é induzido por F se existir um germe $h : \mathbb{C}^t, 0 \rightarrow \mathbb{C}^s, 0$ tal que G é isomorfo a h^*F .

Definição 1.5.2. 1. F é *versal* se todos os desdobramentos de f_0 são induzidos por F .

2. F é *trivial* se é isomorfo ao desdobramento constante $(x, u) \mapsto (f_0(x), u)$, i.e., se existem desdobramentos da identidade ϕ e ψ tal que $\psi \circ F \circ \phi^{-1} = (id, f_0)$.

Se ϕ e ψ são homeomorfismos em lugar de difeomorfismos, dizemos que F é *topologicamente trivial*.

3. f_0 é *estável* se todos os desdobramentos de f_0 são triviais.

Dado $F(x, u) = (f(x, u), u)$ um desdobramento de f_0 , as *velocidades iniciais* $\dot{F}_i \in \mathcal{O}(n, p)$ de F são definidas como

$$\dot{F}_i(x) = \frac{\partial f}{\partial u_i}(x, 0), \text{ para } i = 1, \dots, s.$$

Podemos enunciar agora o teorema fundamental da existência de desdobramentos versais.

Teorema 1.5.1. [28]: *Um desdobramento F é versal se, e somente se,*

$$L\mathcal{A}_e.f_0 + \mathbb{C}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_s\} = \mathcal{O}(n, p).$$

Suponha que $c = \mathcal{A}_e\text{-codim}(f_0) < \infty$ e $g_1, \dots, g_c \in m_n\mathcal{O}(n, p)$ formam uma \mathbb{C} -base do complementar de $L\mathcal{A}_e.f_0$ em $\mathcal{O}(n, p)$. Defina o desdobramento

$$F(x, u) = (f_0(x) + \sum_{i=1}^c u_i g_i(x), u)$$

com $g_i = \dot{F}_i$. Então

Corolário 1.5.1. *$F(x, u) = (f_0(x) + \sum_{i=1}^c u_i g_i(x), u)$ é um desdobramento versal de f_0 .*

Corolário 1.5.2. *f_0 possui um desdobramento versal se, e somente se, $\mathcal{A}_e\text{-codim}(f_0) < \infty$.*

Temos também:

Corolário 1.5.3. *f_0 é estável se, e somente se, $\mathcal{A}_e\text{-codim}(f_0) = 0$.*

Se $c = \mathcal{A}_e\text{-codim}(f_0)$, então o número mínimo de parâmetros para um desdobramento versal é c . Um desdobramento versal a c -parâmetros de f_0 é chamado *miniversal*.

Teorema 1.5.2. [28]: *Todos os desdobramentos miniversais de f_0 são equivalentes.*

Os resultados no caso dos \mathcal{A} -desdobramentos são análogos, só que usamos a \mathcal{A} -codim(f_0) e supomos que $g_1, \dots, g_s \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ geram o complementar de $L\mathcal{A}.f_0$ em $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$. Observamos que existe o seguinte resultado de Wilson.

Teorema 1.5.3. [41]: \mathcal{A} -codim(f_0) = \mathcal{A}_e -codim(f_0) + n .

Usaremos as seguintes notações e definições. Seja $f \in \mathcal{O}(n, p)$, denotaremos o conjunto singular de f por $S(f)$. Este conjunto consiste de todos os pontos onde o posto da derivada de f é menor que $\min(n, p)$. Denotaremos o conjunto de pontos críticos de f por $\Sigma(f)$. Este conjunto consiste dos pontos onde o posto da derivada f é menor que p . O discriminante de f , denotado por $\Delta(f)$ é o conjunto $f(\Sigma(f))$. O ideal gerado pelos $p \times p$ menores da derivada de $f \in \mathcal{O}(n, p)$ é denotado por $J(f)$. Os menores de tamanho k denotaremos por $J_k(f)$. Se $f \in \mathcal{O}(s + n, p)$ denotaremos por $J_x(f)$ o ideal gerado pelas derivadas com respeito a $x \in \mathbb{C}^n$. Denotaremos também o determinante da matriz Jacobiana $f \in \mathcal{O}(n, n)$ por $J[f]$.

Os germes estáveis dão uma boa caracterização dos germes finitamente determinados e da \mathcal{A} -equivalência.

Teorema 1.5.4. [11]: *Seja $f \in m_n \mathcal{O}(n, p)$. Então f é finitamente determinado se, e somente se, para cada representante \bar{f} de f , existem vizinhanças da origem $U \subset \mathbb{C}^n$ e $V \subset \mathbb{C}^p$ tal que $\bar{f}^{-1}(0) \cap U \cap \Sigma(\bar{f}) = 0$ e para cada $y \in V$, $y \neq 0$, o germe $\bar{f}_y : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$ é estável, onde $S = \bar{f}^{-1}(y) \cap U \cap \Sigma(\bar{f})$ e $\Sigma(\bar{f})$ é o conjunto de pontos críticos.*

Capítulo 2

Equisingularidade de espaços analíticos complexos

2.1 Introdução

A idéia intuitiva de equisingularidade de um espaço analítico complexo $(X, 0)$ em $(\mathbb{C}^{m+1}, 0)$ em um subespaço $(Y, 0)$, é que todos os pontos de $(Y, 0)$ têm o mesmo tipo de singularidade ao longo de Y . Então uma questão natural a fazer é a seguinte:

Quando $(X, 0)$ é equisingular ao longo de um subespaço analítico?

Em busca da resposta a esta questão foram desenvolvidas muitas teorias e critérios algébricos. Looijenga ([21]) deu um dos primeiros resultados que relacionam invariantes com tipo topológico e trivialidade topológica. Na década 70', Teissier em [35] e [36] introduziu critérios numéricos e algébricos para decidir quando $(X, 0)$ é equisingular ao longo de $(Y, 0)$ no sentido das condições de Whitney equisingularidade.

Neste capítulo daremos um breve resumo da teoria de equisingularidade e descreveremos alguns conceitos referentes a esta teoria.

No caso local, espaços analíticos complexos são usados frequentemente co-

mo ferramenta no estudo de variedades algébricas. Neste caso existe um estudo paralelo de variedades algébricas com espaços analíticos complexos. Pois toda variedade algébrica complexa é um espaço analítico complexo. Por isso muitas propriedades de geometria algébrica são também usadas para o estudo de espaços analíticos. Uma excelente referência é o livro Gunning [17]. Para estabelecer os principais resultados começaremos com a definição de espaços analíticos complexos.

2.2 Espaços analíticos complexos e as condições de Whitney

Definição 2.2.1. *Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ um conjunto aberto. Um subconjunto $X \subset U$ é um espaço analítico complexo (ou variedade analítica complexa) de U se para todo $x \in U$, existe uma vizinhança aberta $U' \subset U$ de x e um número finito de funções analíticas definidas em U' tal que*

$$X \cap U' = \{y \in U' : f_1(y) = \cdots = f_k(y) = 0\}.$$

O objetivo é estudar a natureza de tais espaços analíticos em alguma vizinhança de algum ponto fixo de \mathbb{C}^n , o qual sem perda de generalidade consideramos a origem. Para isto precisamos definir o conceito de germe de um espaço analítico complexo. Consideremos o conjunto de pares (X_α, U_α) , onde U_α é uma vizinhança aberta da origem em \mathbb{C}^n e X_α um espaço analítico complexo de U_α . Dois tais pares (X_1, U_1) e (X_2, U_2) são equivalentes se existe uma vizinhança $W \subset U_2 \cap U_1$ da origem tal que $X_1 \cap W = X_2 \cap W$. Uma classe de equivalência destes pares é chamado *germe* de um espaço analítico complexo na origem em \mathbb{C}^n .

As notações fundamentais são as seguintes:

$\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ = anel de series de potência convergentes, i.e, germes de funções analíticas em $0 \in \mathbb{C}^n$.

Para todo espaço analítico $X \subset U$ e $x \in X$,

$\mathcal{O}_{X,x}$ = anel local de germes de funções sobre X em x o qual são restrições de funções analíticas sobre U .

$$\cong \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}/I \text{ onde } I \text{ é o ideal associado a } X.$$

Definição 2.2.2. Estratificação: *Uma estratificação de um espaço analítico $X \subset \mathbb{C}^{n+1}$ é uma partição finita \mathcal{X} de X em subespaços fechados não singulares ou subvariedades diferenciáveis em \mathbb{C}^{n+1} . Cada elemento da partição é chamado estrato.*

Observação 2.2.1. *Todas as estratificações tomadas no transcurso do trabalho serão localmente finitas, i.e., em qualquer ponto de $x \in X$ existe uma vizinhança em \mathbb{C}^{n+1} que encontra somente em um número finito de estratos.*

Definição 2.2.3. As condições (a) e (b) de Whitney: *Seja $(X, 0)$ um germe analítico complexo reduzido de $(\mathbb{C}^{d+1}, 0)$. Seja $\mathcal{X} = \{Y_\alpha\}$ uma estratificação de X :*

(i) *Se $\overline{Y_\alpha}$ subespaço fechado de X com $\dim(\overline{Y_\alpha} - Y_\alpha) < \dim(Y_\alpha)$ e $\overline{Y_\alpha} \cap Y_\beta \neq \emptyset$, então $Y_\beta \subset \overline{Y_\alpha}$.*

(ii) *Se $Y_\beta \subset \overline{Y_\alpha}$, as seguintes condições de Whitney se verificam:*

(a) *Para cada sequência de pontos $y_i \in Y_\alpha$ convergindo para um ponto $y \in Y_\beta$ tal que as direções dos espaços tangentes $T_{y_i}(Y_\alpha)$ convergem (no espaço Grassmanniano de $\dim Y_\alpha$ -planos em $(\mathbb{C}^{d+1}, 0)$) para um plano T , temos $T_y(Y_\beta) \subset T$.*

(b) *Dada uma sequência de pontos $y_i \in Y_\alpha$ convergindo para y e uma sequência de pontos $u_i \in Y_\beta$, também convergindo para y , talque $T_{y_i}(Y_\alpha)$ convergem para um plano T e as direções das secantes $\overline{u_i y_i}$ em \mathbb{C}^{d+1} convergem (em \mathcal{P}^{d+1}) para L , temos $L \subset T$.*

(iii) *O conjunto X^0 de pontos regulares de X é um estrato e todos os estratos estão contidos no fecho de X^0 .*

2.3 Critérios de equisingularidade

Definição 2.3.1. (W) Whitney equisingularidade: Y é um estrato de alguma estratificação de X . Dizemos que X é Whitney equisingular ao longo de Y se o par de estratos (X^0, Y) satisfaz as condições (a) e (b) de Whitney.

Este critério é um dos mais utilizados no estudo de equisingularidade e é o que oferece mais relações entre invariantes numéricos.

Definição 2.3.2. Trivialidade topológica: Um espaço analítico complexo $(X, 0)$ em $(\mathbb{C}^{d+1}, 0)$ é topologicamente trivial ao longo de um subespaço analítico não singular $(Y, 0)$ de $(X, 0)$ em zero se existe uma retração $r : (\mathbb{C}^{d+1}, 0) \rightarrow (Y, 0)$ e um germe em zero de homeomorfismo de pares $(\mathbb{C}^{d+1}, X) \approx (r^{-1}(0) \times Y, (r^{-1}(0) \cap X) \times Y)$ compatível com r , i.e., o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{d+1} & \approx & r^{-1}(0) \times Y \\ r \searrow & & \swarrow p_2 \\ & & Y \end{array}$$

Definição 2.3.3. Tipo topológico: Dois germes de espaços analíticos complexos $(X_1, 0)$ e $(X_2, 0)$ têm o mesmo tipo topológico se existem representantes $(X_i, 0) \subset (U_i, 0)$ onde U_i é aberto em \mathbb{C}^{d+1} , $i = 1, 2$, e um homeomorfismo $\phi : (U_1, 0) \rightarrow (U_2, 0)$ tal que $\phi(X_1) = X_2$.

2.4 Critérios de equisingularidade e invariantes

O número de Milnor é um dos invariantes mais importantes no estudo local da topologia de germes de funções analíticas e da equisingularidade para famílias de tais germes. Antes de relacionar estes conceitos faremos a definição deste invariante. Este número foi definido por Milnor ([29]) da seguinte maneira.

Seja U uma vizinhança aberta da origem em \mathbb{C}^{d+1} e seja $f : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma função analítica que define uma hipersuperfície com singularidade isolada $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{d+1}, 0)$.

A fibração de Milnor ([29]) de f na origem é um objeto de muita importância no estudo local da topologia da hipersuperfície $X_0 = f^{-1}(0)$. Milnor define esta fibração da seguinte maneira.

Para todo $\epsilon > 0$ seja B_ϵ uma bola aberta de raio ϵ centrada na origem em \mathbb{C}^{d+1} . Para todo $\eta > 0$, seja \mathbb{D} o disco fechado centrado na origem em \mathbb{C} , e $\partial\mathbb{D}$ denota o bordo de \mathbb{D} , o qual é o círculo de raio η . Então, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para todo ϵ , $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, existe $\eta_\epsilon > 0$ tal que, para todo η , $0 < \eta \leq \eta_\epsilon$, a restrição de $f : B_\epsilon \cap f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\eta) \rightarrow \partial\mathbb{D}_\eta$ é localmente uma fibração trivial. Esta fibração é chamada fibração de Milnor de f e denotada por F_η ver Figura 2.1.

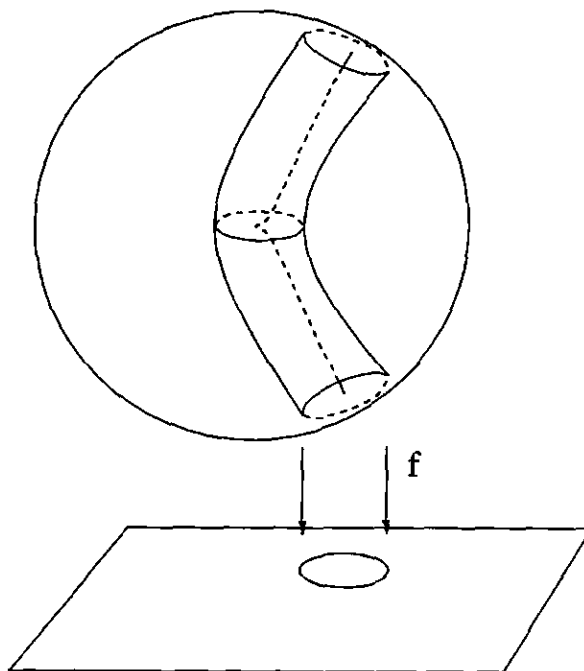


Figura 2.1: Fibração de Milnor

Milnor também mostrou que a fibra de Milnor F_η tem tipo de homotopia de um CW -complexo com dimensão finita d . Isto implica que todos os grupos de

homologia são finitamente gerados e são nulos em dimensões maiores que d , e que $H_d(F_\eta, \mathbb{Z})$ é um grupo abeliano livre. Além disso, F_η é $(d - 1)$ -conectada, portanto F_η tem tipo de homotopia de um bouquet de d -esferas (coladas em um ponto). O número de esferas neste bouquet é o número de Milnor denotado por $\mu(f)$. Em particular $H_d(F_\eta, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\mu(f)}$.

Este número pode ser calculado algebricamente como a dimensão local da álgebra $\frac{\mathcal{O}_{d+1}}{J(f)}$ sobre \mathbb{C} onde $J(f) = (\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_d})$. Observamos então que este número tem duas interpretações, uma topológica e outra algébrica.

Milnor também mostrou que este número é um invariante topológico.

Uma generalização destes resultados é obtido por Lê Dũng - Tráng em [20] para germes $f : U \subset (\mathbb{C}^{d+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ tal que $f^{-1}(0)$ define um espaço analítico de interseção completa com singularidade isolada (I.C.I.S.) (para a definição de interseção completa ver no Apêndice A) de dimensão d .

Seja B uma esfera de raio suficientemente pequeno centrada na origem $0 \in \mathbb{C}^{d+k}$ e seja ∂B seu bordo. Então ∂B intersepta X transversalmente. Isto significa que existe uma vizinhança aberta V em $0 \in \mathbb{C}^k$ e uma hipersuperfície $\Delta(f) \subset V$ tal que para qualquer ponto $y \in V - \Delta(f)$ as fibras $X_y = f^{-1}(y)$ serão transversais a ∂B , e as interseções $X_y \cap B$ são variedades analíticas não singulares homotopicamente equivalente à união de $\mu(X, 0)$ esferas de dimensão real d .

Este número de esferas também pode ser calculado algebricamente com a fórmula:

$$\mu(X, 0) = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{d+k}}{(f_1, \dots, f_{k-j}, J(f_1, \dots, f_{k-j+1}))} + (-1)^{k+1} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{d+k}}{J(f_1)}.$$

onde $f = (f_1, \dots, f_k)$ e (f_1, \dots, f_j) define uma I.C.I.S. para cada j .

A demonstração desta fórmula foi dada por Lê [20] e Looijenga [22] mais foi obtida originalmente por Greuel em [14]. As demonstrações de Lê e Looijenga são topológicas e a de Greuel é algébrica.

Um dos resultados mais importantes dados por Lê Dũng Tráng e Ramanujam

relacionando o número de Milnor e o critério de tipo topológico para funções que definem uma hipersuperfície com singularidade isolada é o seguinte:

Teorema 2.4.1. Lê-Ramanujam [21]: *Seja X uma família de hipersuperfícies definidas por $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C} \times 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $f_t(z) = F(t, z)$ define a hipersuperfície reduzida X_t com singularidade isolada na origem. Denotemos $\mathbb{C} \times 0$ por T .*

Suponhamos que $\mu(X_t)$ independe de t . Então se $n \neq 2$, para todo t , o ambiente local, do tipo topológico de X_t independe de t na origem.

O Teorema 2.4.1 significa: A invariança do número de Milnor implica a invariança do tipo topológico.

Com as mesmas condições do Teorema 2.4.1, a trivialidade topológica da família X_t é válida (ver [39]).

Thom [40] e Mather [23] demonstraram, usando métodos de geometria diferencial, que Whitney equisingularidade implica trivialidade topológica. A recíproca de tal afirmação é falsa, considerando o contra exemplo de Briançon e Speder [1]:

Seja $f(x, y, z, t) = z^5 + ty^6z + y^7x + x^{15}$ uma família de hipersuperfícies com singularidade isolada em $(0, 0, 0)$. O número de Milnor é constante e a hipersuperfície $f(x, y, z, t) = 0$ estratificada por $(f^{-1}(0) - \Sigma(f), \Sigma f)$, é topologicamente trivial mas não verifica as condições (a) e (b) de Whitney.

Este exemplo demonstra que a invariança do número de Milnor para uma família de hipersuperfícies não implica necessariamente as condições de Whitney. Tal afirmação é válida para curvas planas [3].

Em [35] Teissier define uma sequência, denotada, por μ^* de novos invariantes numéricos de um germe de hipersuperfície chamadas de números de Milnor de seções planas. A constância de tais invariantes implica a Whitney equisingularidade.

Seções planas e representação de μ^*

Seja $(X, 0)$ um germe de um espaço analítico complexo de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, para todo $1 \leq i \leq n + 1$, existe uma vizinhança V de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ e um aberto denso de

Zariski $U_0^{(i)}$ do espaço Grassmanniano $G_i = G_i(\mathbb{C}^{n+1})$ (G_i conjunto de i -planos de \mathbb{C}^{n+1} cruzando a origem) tais que para todo i -plano $H \in U_0^{(i)}$ temos que $V \cap S(X \cap H) = V \cap H \cap S(X)$, onde $S(X)$ denota a parte singular de X .

Com esta propriedade demonstra-se que se $i_0 = \text{codim}(S(X))$ sobre \mathbb{C}^{n+1} , em zero, para todo $0 \leq i \leq i_0$, então existe um aberto denso de Zariski $U_1^{(i)}$ de G_i tal que para todo $H \in U_1^{(i)}$, $X \cap H$ tem singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ (i.é. $V \cap S(X \cap H) = \{0\}$).

Para demonstrar isto basta escolher um aberto de Zariski formado pelos i -planos de \mathbb{C}^{n+1} cruzando pela origem tal que $i \leq i_0$ e que intersepta a $S(X)$ em uma vizinhança de 0. Como este aberto é denso em G_i , então aplicando a primeira propriedade obtemos o resultado.

Se X é uma hipersuperfície e pelo fato de que $X \cap H$ tem singularidade isolada na origem para o i -plano H onde $i \leq i_0$, é possível definir o número de Milnor (chamado também número de Milnor de uma seção i -plana genérica) de $(X, 0)$ e é denotado por $\mu^{(i)}(X)$ para $i \leq i_0$ e $\mu^{(i)}(X) = \infty$ para $i_0 \leq i \leq n+1$. Portanto é obtida uma sequência decrescente em i de números de Milnor de seções planas denotada por:

$$\mu^*(X) = (\mu^{(n+1)}(X), \dots, \mu^{(i)}(X), \dots, \mu^{(1)}(X), \mu^{(0)}(X)).$$

Observação 2.4.1. 1. $\mu^{(n+1)}(X) < \infty$ se, e somente se, $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ é uma hipersuperfície com singularidade isolada. Neste caso $\mu^{(n+1)}(X)$ é o número de Milnor usual.

2. $\mu^{(1)}(X) = m_0(X) - 1$, onde $m_0(X)$ é a multiplicidade da hipersuperfície $(X, 0)$.

3. $\mu^{(0)}(X) = 1$ por convenção.

Com estes invariantes Teissier [35] e Briançon-Speder [2] demonstram que a invariância de μ^* em uma família de hipersuperfícies com singularidade isolada é equivalente à Whitney equisingularidade da família.

Teorema 2.4.2. Teissier, Briançon-Speder: *Seja $F(t, z) = 0$ equação para uma hipersuperfície $X \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+1}$ tal que as fibras $X_t = (\{t\} \times \mathbb{C}^{n+1}) \cap X$ são hipersuperfícies de singularidade isolada em 0. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A sequência μ^* é independente de $t \in \mathbb{C}$ em alguma vizinhança de 0.*
2. *O par $(X^0, \mathbb{C} \times \{0\})$ satisfaz as condições (a) e (b) de Whitney em 0.*

Uma questão feita por Teissier em [35] é a seguinte:

Suponha que dois germes de hipersuperfícies analíticas complexas com singularidade isolada $(X_1, 0)$ e $(X_2, 0)$ tem o mesmo tipo topológico. Sera que $\mu^(X_1) = \mu^*(X_2)$?*

A resposta é não, como mostra o seguinte contra exemplo Briançon-Speder em [2]: Seja $X_t = y^3 + tyx^3 + x^4z + z^9$ com singularidade isolada em $(0, 0, 0)$. X_t tem o mesmo tipo topológico para todo t e $\mu^3(X_t) = 56$, mas $\mu^2(X_t) = 8$ e $\mu^1(X_t) = 7$ para $t \neq 0$. Em outras palavras este exemplo mostra que o tipo topológico de germes de hipersuperfícies não determina o tipo topológico de seções planas genéricas e μ^* não é um invariante de tipo topológico de hipersuperfícies.

Resumimos na figura 2.2 as relações entre invariantes e Whitney equisingularidade, trivialidade topológica e tipo topológico dos germes. As condições de equisingularidade são controladas por invariantes que dependem somente dos membros da família, independente de como os membros estão na família. Em cada caso, a constância do(s) invariante(s) é necessária.

Na busca da resolução destes problemas para espaços que não são hipersuperfícies com singularidade isolada, Teissier introduziu novos invariantes em [36], chamadas multiplicidades polares, generalizando assim os resultado acima sobre as condições de Whitney equisingularidade.

Estes invariantes são ferramentas essenciais de nosso trabalho, portanto faremos uma breve descrição no próximo capítulo.

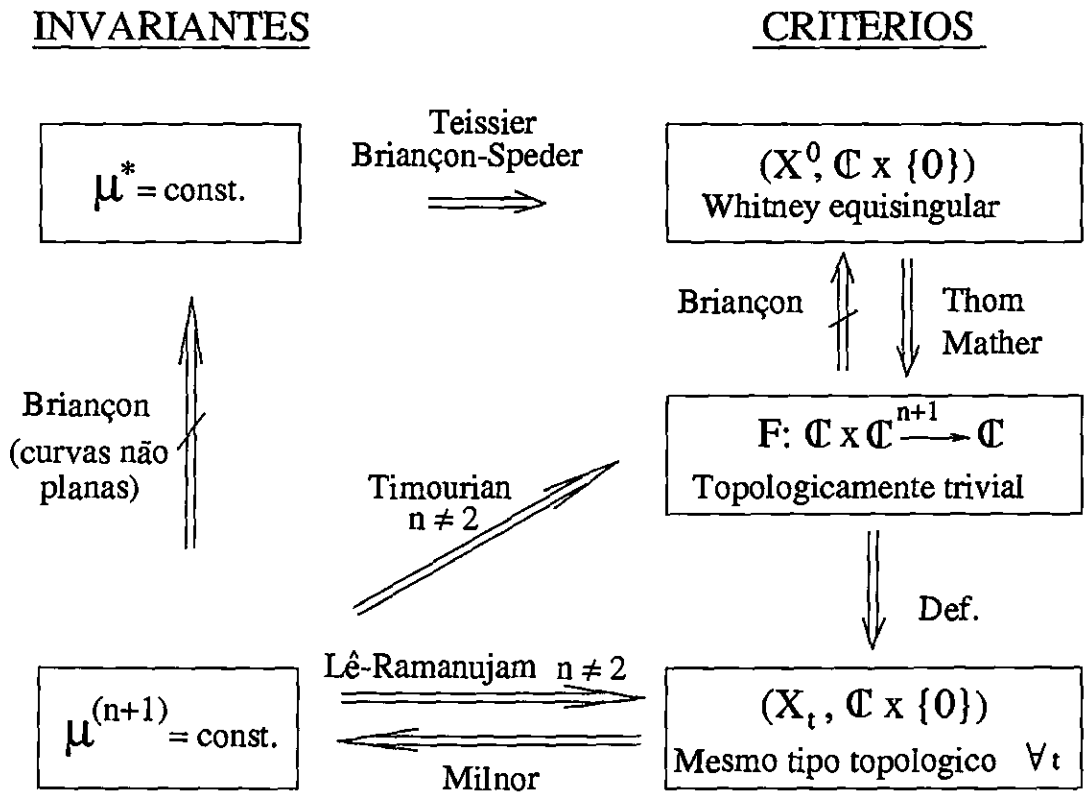


Figura 2.2: Diagrama de invariantes e critérios

Capítulo 3

Variedades polares e multiplicidades polares

3.1 Introdução

Teissier introduziu em [36] um novo conceito para o estudo de equisingularidade de um espaço analítico. Ele define subespaços analíticos (chamados variedades polares) de um espaço analítico complexo, onde os invariantes definidos em cada um dos subespaços dão uma caracterização numérica para as condições (a) e (b) de Whitney.

O significado intuitivo de variedade polar é o seguinte: Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um representante de um germe analítico complexo reduzido equidimensional. Consideremos para cada inteiro k , $0 \leq k \leq d - 1$ onde $d = \dim(X)$, uma projeção linear $p : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$. A variedade polar de X é o fecho do conjunto de pontos críticos de $p|_{X^0}$, onde X^0 é a parte não singular de X . Denotaremos este conjunto por $P_k(X, p)$. Teissier mostrou que tais espaços são analíticos reduzidos e equidimensionais com codimensão k ou são vazios.

Para dar uma definição formal de variedades polares precisamos das seguintes notações.

Seja $f : (X, 0) \rightarrow (S, 0)$ um morfismo de espaços analíticos reduzidos comple-

xos, com fibras suaves em cada $x \in X - F$ onde F é a parte singular (ou conjunto magro) de X que é munido de um S -mergulho, i.e., o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} (X, 0) & \xrightarrow{i} & (S, 0) \times (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \\ f \downarrow & & \swarrow p_1 \\ (S, 0) & & \end{array}$$

Seja $p : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{d-k+1}, 0)$ uma projeção linear tal que $\ker(p) = D_{d-k+1} \in W_k$ onde W_k é um subespaço aberto denso de espaços lineares de codimensão $d - k + 1$, i.e. $W_k \subset G_k$ ($G_k = G_k(\mathbb{C}^{n+1})$) e $d = \dim(X) - \dim(S)$.

Para todo $x \in X - F$, as fibras $X(f(x)) = (\{f(x)\} \times \mathbb{C}^{n+1}) \cap X$ são não singulares em x e estão contidas em $\{f(x)\} \times \mathbb{C}^{n+1}$. Denotaremos por $\Pi_x : X(f(x)) \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ a restrição da projeção p a $X(f(x))$. Então $P_k < f; p >^0$ é o conjunto de pontos de $x \in X - F$ tal que x é um ponto crítico de Π_x .

Teissier ([36] Corolario 1.3.2 pg. 420) demonstrou que o fecho do conjunto $P_k < f; p >^0$ em X é um subespaço analítico de X de k -codimensão pura, (i.e., é equidimensional) em X ou é vazio. Além disso

$$P_k < f; p >^0 = \{x \in \Sigma(\Pi_x) : \dim(T_x X(f(x))) \cap D_{d-k+1} \geq k\}$$

$$= \{x \in \Sigma(\Pi_x) : T_x X(f(x)) \supset D_{d-k+1} \text{ ou contem um plano paralelo a } D_{d-k+1}\}$$

O fecho do conjunto $P_k < f; p >^0$ em X é chamado variedade polar e é denotado por $P_k < f; p >$.

A seguir daremos a definição formal de variedades polares relativas e absolutas.

Definição 3.1.1. *Seja $f : (X, 0) \rightarrow (S, 0)$ um morfismo como acima munido de um S -mergulho $(X, 0) \hookrightarrow (S, 0) \times (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ e seja um subespaço linear $D_{d-k+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ de codimensão $d - k + 1$ contido em W_k . Chamamos variedade polar local relativa de codimensão k associada a f e a D_{d-k+1} ao subespaço analítico*

$$P_k < f; p > = \overline{\{x \in X - F : \dim(T_x X(f(x))) \cap D_{d-k+1} \geq k\}}$$

de X . Se $S = \{\text{ponto}\}$ então

$$P_k < f; p > = \overline{\{x \in X - F : \dim(T_x(X - F) \cap D_{d-k+1}) \geq k\}}$$

Esta variedade é chamada variedade polar absoluta de X .

As notações de variedades polares relativa e absoluta são $P_k < f; D_{d-k+1} >$ e $P_k(X; D_{d-k+1})$ respectivamente.

A seguir daremos alguns exemplos de variedades polares.

3.2 Variedades polares de hipersuperfícies

Consideremos a seguinte definição algébrica de variedades polares que também foi dada por Teissier em [36].

Definição 3.2.1. Definição algébrica de variedades polares: *Seja um S -mergulho de um germe $(X, 0) \hookrightarrow (S, 0) \times (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ definido pelo ideal $I = (f_1, \dots, f_m)$ de $\mathcal{O}_{S,0}\{z_1, \dots, z_{n+1}\}$. Seja $D_{d-k+1} \in W_k$ e escolhamos coordenadas de maneira que D_{d-k+1} seja definido por $z_1 = \dots = z_{d-k+1} = 0$. Coloquemos $d = \dim(X) - \dim(S)$ e $c = n + 1 - d$. Denotamos J o ideal de $\mathcal{O}_{X,0}$ gerado pelos determinantes jacobianos $\frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_c})}{\partial(z_{j_1}, \dots, z_{j_c})}$ com $\{i_1, \dots, i_c\} \subset \{1, \dots, m\}$ e $\{j_1, \dots, j_c\} \subset \{1, \dots, n+1\}$ e seja $J < D_{d-k+1} > \subset J$ o ideal de $\mathcal{O}_{X,0}$ gerado pelos determinantes Jacobianos com $\{j_1, \dots, j_c\} \subset \{d - k + 2, \dots, n + 1\}$.*

Então a variedade polar $P_k(f; D_{d-k+1})$ em X é definida pelo ideal

$$\Pi < D_{d-k+1} > = (J : \sqrt{J < D_{d-k+1} >}) = \{h \in \mathcal{O}_{X,0} : h.J \subset \sqrt{J < D_{d-k+1} >}\}$$

onde \sqrt{I} denota o radical do ideal I .

A seguir aplicaremos esta definição para encontrar variedades polares para hipersuperfícies com singularidades isoladas.

Exemplo 3.2.1. *Seja $f : (\mathbb{C}^{d+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de morfismo analítico. Consideramos cada mergulho de (\mathbb{C}^{d+1}) em $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d+1})$ das fibras de f ou conjuntos*

de nível definidos por $X(f(v)) = V(f(z_0, \dots, z_d) - f(v))$, para cada $v \in \{f(v)\} \times \mathbb{C}^{d+1}$.

Suponha que 0 é um ponto crítico isolado de f . Seja $p: \mathbb{C}^{d+1} \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ uma projeção linear tal que $\ker(p) = D_{d-k+1}$. Denotemos $\Pi_v: X(f(v)) \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ a restrição de p à $X(f(v))$. Então a k -ésima variedade polar é

$$P_k \langle f, p \rangle = \{v \in \mathbb{C}^{d+1} : v \in \Sigma(\Pi_v)\}$$

Suponha que D_{d-k+1} é definido por $z_0 = \dots = z_{d-k} = 0$. Então

$$P_k \langle f, p \rangle = V\left(\frac{\partial f}{\partial z_{d-k+1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_d}\right)$$

é a variedade polar relativa associada a f .

Exemplo 3.2.2. Consideramos o exemplo acima e encontremos as variedades polares absolutas da hipersuperfície $X = f^{-1}(0)$ associada a D_{d-k+1} .

Pela definição algébrica de variedades polares, esta variedade é definida pelo seguinte ideal de $\mathcal{O}_{X,0}$

$$\langle \Pi_k; D_{d-k+1} \rangle = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_d} \right) \mathcal{O}_X : \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial z_{d-k+1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_d} \right) \mathcal{O}_X} \right).$$

como X tem singularidade isolada em 0 e

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial z_{d-k+1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_d} \right) \mathcal{O}_X} = \left(\frac{\partial f}{\partial z_{d-k+1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_d} \right) \mathcal{O}_X$$

Esta última igualdade é pelos fatos de que $P_k \langle f, p \rangle$ uma variedade de interseção completa e pelo Teorema de Looijenga em [22]. Então

$$P_k \langle f, p \rangle \cap f^{-1}(0) = P_k \langle X, D_{d-k+1} \rangle$$

é a variedade polar absoluta de codimensão k .

Exemplo 3.2.3. *Seja $f = y^2 - x^3 - tx^2$ uma deformação da guarda chuva de Whitney, onde $z = (t, x, y)$ são as coordenadas em $(\mathbb{C}^3, 0)$. Então*

$$\begin{aligned}\Sigma(f) &= V(x, y) \\ P_0 \langle f, p \rangle &= \mathbb{C}^3 \\ P_1 \langle f, p \rangle &= V\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = V(y) \\ P_2 \langle f, p \rangle &= V\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cap P_1 \langle f, p \rangle = V(y, -3x - 2t),\end{aligned}$$

ver Figura 3.1.

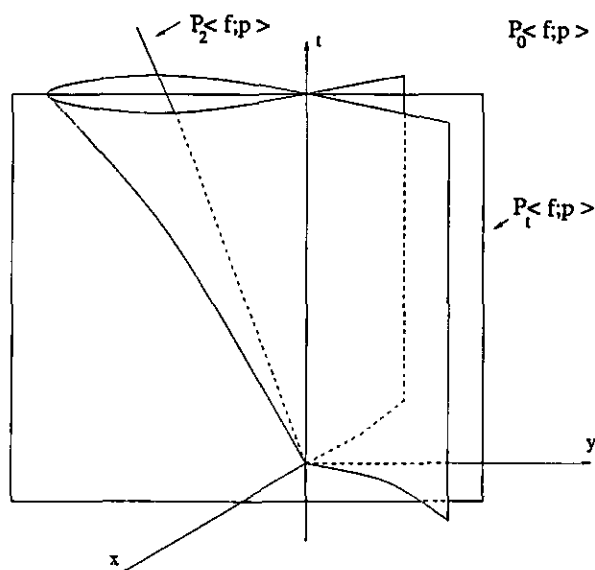


Figura 3.1: Variedades polares relativas da guarda chuva de Whitney

Exemplo 3.2.4. *Variedades polares no caso de famílias de hipersuperfícies com singularidade isolada.*

Seja $F(t, z_1, \dots, z_{d+1}) = 0$ uma equação da hipersuperfície $X \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d+1}$ tal que todas as fibras $X(t) = \{t\} \times \mathbb{C}^{d+1} \cap X$ sejam hipersuperfícies com singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^{d+1}$. Sejam $D_{d-k+1} \subset \mathbb{C}^{d+1}$, subespaços vetoriais de codimensão $d-k+1$, escolhamos coordenadas adequadas tal que D_{d-k+1} seja definido por $z_1 = \dots = z_{d-k+1} = 0$, e denotamos por $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ a projeção induzida por $p_1 : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d+1} \rightarrow \mathbb{C}$ e δ a seção que fixa 0 dentro de cada fibra. Pela hipótese e pelo Teorema

de Nullstellensatz temos que $(\frac{\partial F}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_{d+1}}) \supset (z_1, \dots, z_{d+1})^N$ para algum inteiro positivo N , e $(\frac{\partial F}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_{d+1}})$ define um subespaço de codimensão $d + 1$ em \mathbb{C}^{d+2} . Então pela Definição 3.1.1, $P_k < f; D_{d-k+1} >$, para $0 \leq k \leq d - 1$, é o subespaço de X definido em \mathbb{C}^{d+1} pelo ideal gerado por $(F, \frac{\partial F}{\partial z_{d-k+1}}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_{d+1}})$. Para $k = d$, a variedade polar relativa é uma curva Γ definida por $(F, \frac{\partial F}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_{d+1}})$ que não é contida em $\mathbb{C} \times \{0\}$.

Exemplo 3.2.5. Seja X uma hipersuperfície em \mathbb{C}^3 definida por $y^2 - x^3 - t^2 x^2 = 0$. Seja $p: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ a projeção ao (x, t) -plano e $D_2 = \{x = y = 0\}$. Pelo exemplo anterior as variedades polares são:

$$P_0 < f, D_2 > = X$$

$$P_1 < f, p > = (y^2 - x^3 - t^2 x^2, \frac{\partial X}{\partial y}) = x + t^2$$

ver Figura 3.2.

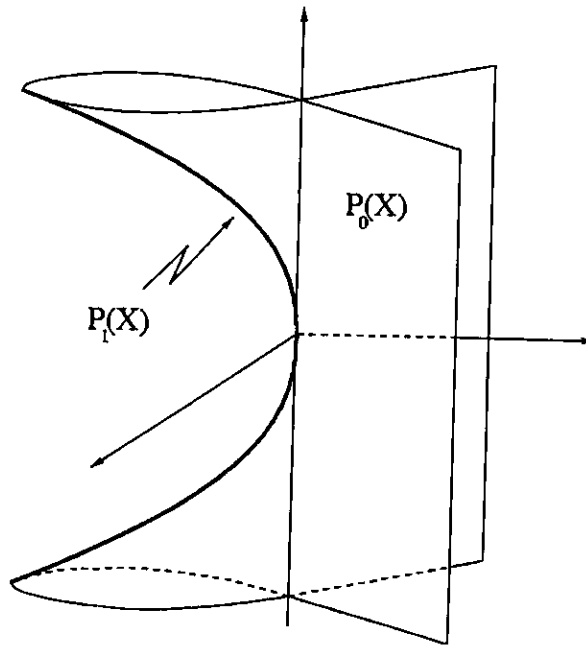


Figura 3.2: Variedades polares absolutas

3.3 Multiplicidades

Um dos invariantes numéricos analíticos mais importantes em geometria algébrica e geometria analítica, mais especificamente na teoria de equisingularidade é a multiplicidade de um espaço $X \subset \mathbb{C}^{n+1}$, de dimensão d , em um ponto x . Tal número é definido como o número mínimo de pontos de interseção de um espaço linear L de dimensão $n + 1 - d$, com o espaço X , perto de $x \in X$. Este número é denotado por $m_x(X)$ e é dado por:

$$m_x(X) = \min \left\{ \begin{array}{l} L \text{ espaço linear} \\ \text{t.q. } \{x\} \text{ é componente de } X \cap L \end{array} \right\} i(x; X \cap L)$$

onde $i(x; X \cap L)$ é o número de pontos de interseção de L com X em x . A multiplicidade em alguns casos é definida algebricamente, através da função de Hilbert-Samuel (ver [32]).

Seja $\mathcal{O}_{X,x}$ um anel noetheriano local onde X é uma variedade de dimensão d . Seja M um $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo e I um ideal de colongitude finita sobre M . Definamos a função de Hilbert-Samuel de M , com respeito ao ideal I sobre M por:

$$H_{I,M}(n) = \log \frac{M}{I^n M}, n \gg 0.$$

$H_{I,M}(n)$ coincide com um polinômio de grau d e tem a seguinte forma

$$H_{I,M}(n) = e_x(I; M) \frac{n^d}{d!} + \text{termos de menor grau}$$

onde $e_x(I; M)$ é um inteiro positivo, chamado multiplicidade do ideal I em M .

Se $\mathcal{O}_{X,x} = M$ denotamos $e_x(I; M)$ por $e_x(I)$.

A relação deste número com $m_x(X)$ é dada pela fórmula de Samuel ([32]).

Se $\Phi : X^d \subset \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^d$ uma aplicação regular e $x \in X$, $y = \Phi(x)$ tal que $\{x\}$ é uma componente de $\Phi^{-1}(y)$, y é um ponto regular em \mathbb{C}^d , então

$$m_x(X) = e_x(\mathcal{M}\mathcal{O}_{X,x})$$

onde \mathcal{M} é o ideal máximo de $\mathcal{O}_{X,x}$.

3.4 Multiplicidades polares

As multiplicidades definidas sobre as variedades polares são chamadas multiplicidades polares, que são denotados por:

$m_0(P_k(f; D_{d-k+1}))$ ou por $m_k(X; f)$ no caso da multiplicidade polar relativa em $0 \in X$. $m_k(X)$ no caso da multiplicidade polar absoluta .

Estas multiplicidades são os números mais importantes definidos por Teissier em [36] para o estudo de Whitney equisingularidade. Ele demonstrou no Teorema 3.1 em [36] que estes números são invariantes analíticos, independentes de D_{d-k+1} e são semi contínuos-superiormente para projeções genéricas.

Observe que sempre consideraremos as multiplicidades definidas na origem, pois as multiplicidades são invariante por translações.

Exemplo 3.4.1. *Seja $f = y^2 - x^3 - tx^2$ que define uma hipersuperfície X . Então as variedades polares relativas são dados no Exemplo 3.2.3 e são:*

$$\begin{aligned} P_0 < f, p > &= \mathbb{C}^3 \\ P_1 < f, p > &= V(y) \\ P_2 < f, p > &= V(y, -3x - 2t) \end{aligned}$$

Suas multiplicidades polares relativas são:

$$m_0(X, f) = 1, m_1(X, f) = 1 \text{ e } m_2(X, f) = 1$$

Exemplo 3.4.2. *Seja X uma hipersuperfície em \mathbb{C}^3 definido por $y^2 - x^3 - t^2x^2 = 0$. As variedades polares absolutas são :*

$$\begin{aligned} P_0 < f, p > &= X \\ P_1 < f, p > &= x + t^2 \end{aligned}$$

e sua multiplicidades polares absolutas são:

$$m_0(X) = 2, m_1(X) = 1 \text{ para } t = 0 \text{ e } m_1(X) = 0 \text{ para } t \neq 0.$$

Observação 3.4.1. *Neste exemplo as multiplicidades polares não é constante ao longo do parâmetro t , então usando o Teorema 3.5.1 (mais adiante) X não equisingular ao longo t .*

Teissier usa estes invariantes para dar condições necessárias e suficientes para Whitney equisingularidade de espaços analíticos reduzidos. Estes resultados são ferramentas essenciais em [12]. Como nos também fazemos uso dos resultados de Teissier os enunciaremos na seção seguinte.

3.5 Equisingularidade de Whitney e multiplicidades polares

Teorema 3.5.1. [36]: *Seja X um espaço reduzido analítico complexo equidimensional de dimensão d e Y um subespaço analítico de X também t -equidimensional, tal que 0 é um ponto não singular de Y . As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) *A aplicação de Y em \mathbb{N}^d definida por*

$$y \rightarrow M_{X,y}^* = (m_y(X), m_y(P_1(X; y)), \dots, m_y(P_{d-1}(X; y)))$$

é constante em uma vizinhança de 0 .

b) *O par (X^0, Y) satisfaz as condições (a) e (b) de Whitney em 0 .*

O mesmo teorema é obtido com as multiplicidades polares relativas.

Teorema 3.5.2. [36]: *Seja $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um morfismo com uma seção δ , onde as fibras são d -equidimensionais e reduzidas exceto talvez em $\delta(t)$, $t \in \mathbb{C}$. Seja $Y = \delta(\mathbb{C}) \subset X$ e suponha que temos um t -mergulho*

$$\begin{array}{ccc} (X, 0) & \xrightarrow{i} & (\mathbb{C}, 0) \times (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \\ f \searrow & & \swarrow p_1 \\ & & (\mathbb{C}, 0) \end{array}$$

tal que $Y = \mathbb{C} \times \{0\}$. As seguintes condições são equivalentes.

a) O hiperplano $K = 0 \times \mathbb{C}^{n+1}$ é transversal para todo limite de planos tangentes a X^0 em 0 e a aplicação de Y em \mathbb{N}^{d+1} definida por

$$y \rightarrow (m_0(X; f), m_1(X; f), \dots, m_d(X; f))$$

é constante sobre Y em uma vizinhança de 0.

b) O par de estratos (X^0, Y) satisfaz as condições (a) e (b) de Whitney em 0.

Os Teoremas 3.5.1 e 3.5.2 são motivadores para o estudo de equisingularidade, tendo assim fatos interessantes e curiosos sobre hipersuperfícies com singularidade isolada. Neste caso existem algumas relações entre multiplicidades polares e o número de Milnor de seções planas.

Teorema 3.5.3. [37]: *A multiplicidade da variedade polar relativa em 0 do Exemplo 3.2.1 é igual ao número de Milnor μ^k da interseção da hipersuperfície $X = f^{-1}(0)$ com um plano genérico de dimensão k de \mathbb{C}^{d+1} passando por 0.*

Apresentamos aqui uma demonstração detalhada deste Teorema. Para isso precisamos dos seguintes resultados algébricos.

Seja \mathcal{O} um anel local noetheriano, de corpo residual infinito (i.e., $K = \mathcal{O}/\mathcal{M}$ é um corpo infinito), seja M um \mathcal{O} -módulo e I_1, I_2 dois ideais \mathcal{M} -primários de colongitudes finitas em \mathcal{O} . Então a aplicação de Hilbert $H_M(-, -)$ de \mathbb{N}^2 em \mathbb{N} é definida por

$$H_M(n_1, n_2) = \log \frac{M}{I_1^{n_1} I_2^{n_2} M}$$

Esta aplicação é um polinômio de coeficientes racionais e existem inteiros n_1^0, n_2^0 suficientemente grandes tais que $n_1 \geq n_1^0, n_2 \geq n_2^0$, onde $H_M(n_1, n_2)$ representa um polinômio de grau $d = \dim(M)$.

O termo de maior grau de este polinômio é um polinômio homogêneo de grau d (ver [35]) denotado por

$$\overline{H}_M(n_1, n_2) = \frac{1}{d!} \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} e(I_1^{[d-i]}, I_2^{[i]}) n_1^{d-i} n_2^i,$$

onde $e(I_1^{[d-i]}, I_2^{[i]})$ é a multiplicidade do ideal gerado por $(d-i)$ elementos genéricos de I_1 e i elementos genéricos de I_2 .

Se $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{d+1} = \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_d\}$ e $I_1 = \mathcal{M} = (z_0, \dots, z_d)$ então os coeficientes de $\binom{d+1}{i} n_1^{d+1-i} n_2^i$ são as multiplicidades da restrição de I_2 a um i -plano genérico de $(\mathbb{C}^{d+1}, 0)$.

Demonstração do Teorema 3.5.3: Pelos resultados acima, em particular se $I_2 = J(f) = (\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_d})$ onde $f \in \mathcal{O}_{d+1}$ é a equação para o germe da hipersuperfície com singularidade isolada em 0 de $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{d+1}, 0)$ temos que a aplicação de Hilbert

$$H_{X,0} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

definida por

$$H_{X,0}(n_1, n_2) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{d+1}}{\mathcal{M}^{n_1} J(f)^{n_2}}$$

e

$$\overline{H}_{X,0}(n_1, n_2) = \frac{1}{(d+1)!} \sum_{i=0}^{d+1} \binom{d+1}{i} \tilde{\mu}^{(i)} n_1^{d+1-i} n_2^i$$

onde $\tilde{\mu}^{(i)}$ é a multiplicidade da restrição do ideal jacobiano $J(f)$ a um i -plano genérico de $(\mathbb{C}^{d+1}, 0)$. Mas esta ultima afirmação não é o que queremos, em realidade precisamos da multiplicidade do ideal jacobiano de f restrito a um i -plano.

Teissier mostrou [35] que a multiplicidade do ideal jacobiano de f restrito a um i -plano H é igual à multiplicidade da restrição de $J(f)$ a H (isto pelo fato de que o fecho integral dos dois ideais são iguais $\overline{J(f)\mathcal{O}_{H,0}} = \overline{J(f)}\mathcal{O}_{H,0}$). Então

$$\begin{aligned} \mu^i(X) &= \mu(X \cap H) = e(j(f)|H) = e(j(f)|H) = \\ &= e\left(\frac{\partial f}{\partial z_{d-i+1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_d}\right) = m_0(P_k < f; D_{d-k+1} >). \end{aligned}$$

Observação 3.5.1. Os coeficientes inteiros de $\overline{H}_{X,0}$ dão uma representação algébrica da seqüência dos números de Milnor de seções planas (i.e., representam a seqüência $\mu^*(X)$).

No seguinte Teorema daremos uma demonstração diferente da demonstração dada por Teissier em [36].

Teorema 3.5.4. *A multiplicidade da variedade polar absoluta do Exemplo 3.2.2 $P_k(X; D_{d-k+1})$ em 0 é igual à soma $\mu^{i+1}(X)$ e $\mu^i(X)$, para $0 \leq i \leq d - 1$.*

Demonstração: Para demonstrar este teorema usamos o corolário na seção 2.8.3 de Teissier (ver [38]) que afirma o seguinte.

Seja X uma hipersuperfície munida do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (X, 0) & \xrightarrow{i} & (\mathbb{C}^{d+1}, 0) \\ \Pi = p|X \searrow & & \swarrow p \\ & & (\mathbb{C}^k, 0) \end{array}$$

onde p é uma projeção, tal que a fibra $(X_0, 0)$ de $\Pi = p|X$ tem singularidade isolada. Então a multiplicidade do discriminante $\Delta(\Pi)$ de Π em zero é

$$m_0(\Delta(\Pi)) = \mu(X_0, 0) + \mu(X_L, 0),$$

onde $X_L = p^{-1}(L) \cap X$, L é uma curva de dimensão 1 em \mathbb{C}^k .

Escolhemos planos genéricos $D_{d-k+1} = \{z_0 = \dots = z_k = 0\}$. Com a propriedade acima obtemos

$$m_0(\Delta(\Pi)) = \mu^{d+1-k}(X) + \mu^{d+2-k}(X).$$

Em lugar de k pomos $d - i + 1$ e obtemos

$$m_0(\Delta(\Pi)) = \mu^i(X) + \mu^{i+1}(X).$$

Como $\Delta(\Pi) = \Pi(\Sigma(\Pi))$ e pelo Corolário 4.4.6 em [18] que afirma. “A multiplicidade da imagem da variedade polar pela projeção com que ela esta definida é igual á multiplicidade da variedade polar”, portanto obtemos que $m_0(\Delta(\Pi))$ é igual à i -ésima multiplicidade polar absoluta de X .

Observação 3.5.2. *Com estes últimos três teoremas é obtido de maneira particular o Teorema 2.4 de Teissier, Briançon-Speder para hipersuperfícies; isto pelo fato de que os números de Milnor de seções planas são semi-continuos-superiormente.*

Capítulo 4

Equisingularidade para germes de aplicações

4.1 Desdobramentos excelentes

Neste capítulo consideraremos o seguinte problema:

Dado uma família a 1-parâmetro de aplicações de germes, encontrar invariantes analíticos cuja constância na família implica que a família é topologicamente trivial ou Whitney equisingular ao longo do espaço do parâmetro.

Gaffney ([12]) resolve este problema para uma importante classe de germes de aplicações \mathcal{A} -finitamente determinados de tipo estável discreto.

As principais ferramentas para resolver o problema acima são a teoria de variedades polares e multiplicidades polares desenvolvidas no capítulo anterior e o Lema de isotopia de Thom. Especificamente, o teorema demonstrado por Gaffney é o seguinte:

Teorema 4.1.1. [12]: *Suponha que $F : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, (0, 0) \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, (0, 0)$ é um desdobramento excelente (definição ver mais adiante) de um germe $f_0 \in \mathcal{O}(n, p)$ finitamente determinado. Suponha também que os invariantes polares de todos os tipos estáveis definidos em $\Delta(f_0)$, $\Sigma(f_0)$ e $f_0^{-1}(\Delta(f_0)) - \Sigma(f_0)$ são constantes*

na origem para f_t . Então, o desdobramento é topologicamente trivial.

A seguir apresentamos algumas definições e resultados de [12] que usaremos para tratar nosso problema de equisingularidade de germes em $\mathcal{O}(3, 3)$.

Definição 4.1.1. (Tipo estável): *Seja F um desdobramento versal de $f \in \mathcal{O}(n, p)$. Dizemos que um tipo estável \mathcal{Q} aparece no desdobramento versal F se para qualquer representante $F = (id, f_s(x))$, existe um ponto $(s, y) \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p$ tal que o germe $f_s : \mathbb{C}^n, S \rightarrow \mathbb{C}^p, y$ é um germe estável de tipo \mathcal{Q} , $S = f^{-1}(y) \cap \Sigma(f_s)$.*

Se f é estável, denotemos os pontos de tipo \mathcal{Q} por $\mathcal{Q}(f)$ e seja $\mathcal{Q}_S(f) = f^{-1}(\mathcal{Q}(f)) - \mathcal{Q}_\Sigma(f)$, onde $\mathcal{Q}_\Sigma(f)$ denota $f^{-1}(\mathcal{Q}(f)) \cap \Sigma(f)$.

Se f é finitamente determinado, denotemos $\overline{\mathcal{Q}(f)} = (\{0\} \times \mathbb{C}^p) \cap \overline{\mathcal{Q}(F)}$ onde F é um desdobramento versal de f e $\overline{\mathcal{Q}_S(f)} = (\{0\} \times \mathbb{C}^n) \cap \overline{\mathcal{Q}_S(F)}$, $\overline{\mathcal{Q}_\Sigma(f)} = (\{0\} \times \mathbb{C}^n) \cap \overline{\mathcal{Q}_\Sigma(F)}$.

Dizemos que \mathcal{Q} é um tipo estável zero-dimensional para (n, p) se $\mathcal{Q}(f)$ tem dimensão 0 para $f \in \mathcal{O}(n, p)$ um representante de tipo estável \mathcal{Q} .

Notamos claramente que $\mathcal{Q}(F)$ é um conjunto analiticamente fechado, pois $\overline{\mathcal{Q}(F)} = \cap F(j^{(p+1)}F^{-1}(\overline{\mathcal{A}z_i}))$ onde z_i é um $p + 1$ jato de tipo estável \mathcal{Q} e $\mathcal{A}z_i$ é \mathcal{A} -órbita de z_i .

Definição 4.1.2. *Um germe $f \in \mathcal{O}(n, p)$ finitamente determinado tem tipo estável discreto se existe um desdobramento versal F de f no qual só aparecem um número finito de tipos estáveis.*

Qualquer germe finitamente determinado $f \in \mathcal{O}(n, p)$ tem um tipo estável discreto se (n, p) esta nas boas dimensões, ver em [24].

Definição 4.1.3. (Desdobramento bom): *Seja $F = (u, \bar{f}(u, x))$ um desdobramento a 1-parâmetro de um germe $f_0 = \bar{f}(0, -)$ finitamente determinado, tal que $\bar{f}(u, -)$ preserva o origem para todo u . Dizemos que F é um desdobramento bom de f_0 se existem vizinhanças U e W da origem em $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$ respectivamente tal que $F^{-1}(W) = U$, F aplica $U \cap \Sigma(F) - T$ para $W - T$ e se*

$(t_0, y_0) \in W - T$ onde $S = F^{-1}(t_0, y_0) \cap \Sigma(F)$ e $T = \mathbb{C} \times \{0\}$, então o germe $f_{t_0} : \mathbb{C}^n, S \rightarrow \mathbb{C}^p, y_0$ é estável.

Para demonstrar o Teorema 4.1.1 Gaffney impõe as definições anteriores como condições necessárias.

No que segue definimos os invariantes zero-estáveis cuja constância no desdobramento evita a existência de um arco de pontos $C(t)$ na fonte (ou na meta) cujo fecho inclui a origem onde a aplicação f_{t_0} em $C(t)$ não é equivalente a f_t em qualquer ponto próximo, isto é, evita do que o desdobramento deixe de ser bom. Estes invariantes não são nada mais que as multiplicidades dos tipos estáveis zero-dimensionais na fonte ou na meta.

Definição 4.1.4. (Zero-invariantes): *Suponha que $\mathcal{Q}(F) = \{p_1, \dots, p_r\}$ é o conjunto de pontos de um tipo de singularidade zero-dimensional, onde F é um desdobramento versal de $f \in \mathcal{O}(n, p)$. O invariante 0-estável de tipo \mathcal{Q} de f , denotado por $m(f; \mathcal{Q})$ é a multiplicidade do ideal $m_s \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{Q}(F)}, (0,0)}$ em $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{Q}(F)}, (0,0)}$.*

Estas multiplicidades também podem ser calculadas como o grau da projeção de $\overline{\mathcal{Q}(F)}$ sobre \mathbb{C}^s , isto é, usando a projeção sobre o primeiro fator de $\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p$ a \mathbb{C}^s (ver Munford [32] pagina 121).

Exemplos destas multiplicidades são obtidos independentemente por Gaffney [9] e Rieger [33]. Eles dão fórmulas para as multiplicidades dos tipos zero-estáveis de germes de $\mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$. Estas fórmulas contam o número de cúspides e dobras transversais.

As multiplicidades dos tipos zero-estáveis de germes de $\mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^3, 0$ foram obtidos por Mond em [30] e [31] que são o número de cross caps (ou guardas chuvas de Whitney) e número de pontos triplos.

As fórmulas de Gaffney e Rieger são generalizadas por Marar-Montaldi- Ruas em [25] para germes $\mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$, quase-homogêneos de corank 1.

Para chegar ao Teorema 4.1.1 de Gaffney é considerado um tipo especial de desdobramentos, que são os desdobramentos excelentes.

Definição 4.1.5. (Desdobramento excelente): *Um desdobramento bom é excelente se todos os invariantes 0-estáveis são constantes no desdobramento e o desdobramento é um desdobramento de um germe finitamente determinado de tipo discreto. No caso equidimensional ($n = p$) é assumido também que o grau de f_0 ($\delta(f_0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{f_0^*(m_n)\mathcal{O}_n}$) é constante no desdobramento.*

4.2 Resumo da demonstração do Teorema 4.1.1

Na aplicação do Teorema 3.5.1 de Teissier ao nosso caso, X é um tipo estável de f_t associado ao desdobramento F a um 1-parâmetro, f é a projeção ao espaço de parâmetro T denotada por p e o subespaço Y é o eixo T .

O objetivo é usar os resultados de Teissier para encontrar invariantes que dependem somente de f_t e não de F , assim afirmamos que (X, Y) é Whitney equisingular.

Além disso na tentativa de aplicar o Teorema 3.5.1, Gaffney encontrou uma dificuldade com a variedade polar relativa de maior codimensão, desde que as correspondentes variedades polares absolutas das fibras são zero dimensionais, esta variedade não está bem definida. Mas Gaffney define outro invariante o qual depende só das fibras e controlará a multiplicidade da variedade polar relativa de maior codimensão ($m_d(X; p)$). A definição daremos a seguir.

Seja F um desdobramento versal $F : \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, (0, 0) \rightarrow \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p, (0, 0)$ de f_0 . Fixamos uma singularidade de tipo estável \mathcal{Q} na meta (ou fonte) tal que $\dim(\overline{\mathcal{Q}(f_0)}) > 0$, e escolhemos $D_1 \in G_{p-1}(\mathbb{C}^p)$ (ou $G_{n-1}(\mathbb{C}^n)$ se estamos trabalhando na fonte). Seja $P_d(\overline{\mathcal{Q}(F)}; \pi_s)$ a variedade polar de $\overline{\mathcal{Q}(F)}$, onde π_s é a projeção sobre \mathbb{C}^s e $d = \dim(\overline{\mathcal{Q}(F)}) - s$.

Definição 4.2.1. *A d -ésima multiplicidade estável de f_0 de tipo \mathcal{Q} , denotada por $m_d(f_0; \mathcal{Q})$ é a multiplicidade de $m_s \mathcal{O}_{P_d(\overline{\mathcal{Q}(F)}; \pi_s)}$ em $\mathcal{O}_{P_d(\overline{\mathcal{Q}(F)}; \pi_s)}$.*

De igual maneira a d -ésima multiplicidade da fonte de f_0 de tipo \mathcal{Q} é a multiplicidade do ideal $m_s \mathcal{O}_{P_d(\overline{\mathcal{Q}(F)}_S; \pi_s)}$ e a d -ésima multiplicidade crítica (ou

multiplicidade do tipo estável na fonte) de tipo \mathcal{Q} é a multiplicidade do ideal $m_s \mathcal{O}_{P_d(\overline{\mathcal{Q}(F)}_\Sigma; \pi_s)}$ em seus respectivos anéis. Estas são denotadas por $m_d(f_0; \mathcal{Q}_S)$ e $m_d(f_0; \mathcal{Q}_\Sigma)$ respectivamente.

Na demonstração do Teorema 4.1.1 é necessário obter estratificações na fonte e na meta e mostrar que elas satisfazem as hipóteses do Teorema 3.5.1 (a) para cada par de estratos; em seguida aplicar o segundo Lema de isotopia de Thom [5] para obter a trivialidade topológica.

Mais especificamente é necessário ter as seguintes considerações:

Seja $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ um germe e sejam $A \subset \mathbb{C}^n$, $A' \subset \mathbb{C}^p$ subconjuntos tais que $f(A) \subset A'$.

Uma estratificação de $f : A \rightarrow A'$ é um par $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ onde \mathcal{A} e \mathcal{A}' são estratificações de A e A' respectivamente tal que f leva estrato em estrato.

A estratificação $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ é regular se cada par de estratos de \mathcal{A} e \mathcal{A}' satisfaz as condições (a) e (b) de Whitney; e se qualquer estrato $Y \in \mathcal{A}$ satisfaz a condição A_f de Thom sobre qualquer estrato $X \in \mathcal{A}$. (A condição de Thom diz o seguinte: Se $y_i \in Y$ converge a $x \in X$ e $\ker(f_{y_i}|Y)$ converge a T , então $T \supset \ker(f_x|X)$).

Segundo estas definições Gaffney demonstrou que se F é um desdobramento a 1-parâmetro de um germe finitamente determinado de $f \in \mathcal{O}(n, p)$ de tipo discreto e fixando um bom representante de $F : U \rightarrow W$, então existe uma estratificação natural de U e de W . Os estratos em W são: T e as singularidades de tipo estável $\mathcal{Q}(F)$. Os estratos em U são: Os tipos estáveis $\mathcal{Q}_\Sigma(F)$, $\mathcal{Q}_S(F)$ e T .

Gaffney demonstrou (Proposição 6.5 em [12]) que as estratificações de $U - F^{-1}(T)$ e $W - T$ são regular, mostra-se também que cada par de estratos da fonte e da meta com estrato T satisfaz a hipótese do Teorema 3.5.1 (a) e portanto é Whitney equisingular, Além disso mostra-se também que satisfaz a condição A_f de Thom, portanto é somente aplicar o segundo lema de isotopia de Thom para demonstrar o Teorema 4.1.1.

Em resumo obtemos a seguinte definição. Seja $f \in \mathcal{O}(n, p)$ um germe de

aplicação e $F \in \mathcal{O}(1+n, 1+p)$ um desdobramento a 1-parâmetro de f . Sejam os subconjuntos $A \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ e $A' \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$ com estatificação \mathcal{A} e \mathcal{A}' respectivamente. Dizemos F é Whitney equisingular ao longo de $T = \mathbb{C} \times \{0\}$, se cada par de estratos (X, T) e (Y, T) , onde $X \in \mathcal{A}$ e $Y \in \mathcal{A}'$, satisfaz as condições (a) e (b) de Whitney.

Observação 4.2.1. *Quando as condições da Proposição 6.5 e do Teorema 5.10 em [12] são satisfeitas, as multiplicidades polares absolutas e relativas coincidem. Então para excelentes desdobramentos de germes finitamente determinados isto também é válido. Portanto basta mostrar que as multiplicidades polares absolutas dos tipos estáveis são constantes ao longo de T para obter a trivialidade topológica.*

Esta observação é de muita importância para nosso trabalho pois com ela bastará encontrar relações de invariantes com as multiplicidades polares absolutas.

Depois da demonstração do Teorema 4.1.1 surge naturalmente a seguinte questão:

Qual é o número mínimo de invariantes no Teorema de Gaffney definidos nos tipos estáveis de f_0 cuja constância na família f_t implique trivialidade topológica ou a Whitney equisingularidade?

Na busca na resposta a esta questão Gaffney ([12]) encontrou relações entre invariantes dos tipos estáveis de germes em $\mathcal{O}(2, 3)$ e $\mathcal{O}(2, 2)$, conseguindo reduzir o número de invariantes para validar o Teorema 4.1.1. Daremos um breve resumo destes resultados na seguinte seção.

4.3 Equisingularidade de germes de aplicações de $\mathcal{O}(2, 3)$ e $\mathcal{O}(2, 2)$

4.3.1 O caso de germes finitamente determinados em $\mathcal{O}(2, 3)$

Para esta classe de germes temos os seguintes tipos estáveis:

Na fonte: Temos o conjunto de ponto duplos denotado por $D(f)$ e conjunto de pontos críticos $\Sigma(f) = \mathbb{C}^2$.

Na meta: Temos a imagem do conjunto de pontos críticos que é $f(\mathbb{C}^2)$, a imagem dos pontos duplos $f(D(f))$ e os tipo estáveis zero-dimensionais que são as guarda chuvas de Whitney e os pontos triplos.

Como $D(f)$ e $f(D(f))$ são de dimensão 1 e a dimensão de $f(\mathbb{C}^2)$ é 2, então nestes conjuntos estão definidos 7 invariantes polares e as multiplicidades dos tipos estáveis zero-dimensionais ou invariantes zero-estáveis são em número de 2 que são $C(f)$ (número de guardas chuva de Whitney) e $T(f)$ (número de pontos triplos). Portanto para aplicar o Teorema 4.1.1 precisamos de 9 invariantes. Mas com as seguintes relações, Gaffney consegue reduzir este número de invariantes para 3.

Proposição 4.3.1. [12]: *Seja $f \in \mathcal{O}(2,3)$ um germe finitamente determinado. Então*

$$\begin{aligned} m_2(f(\mathbb{C}^2)) + m_0(f(\mathbb{C}^2)) - m_1(f(\mathbb{C}^2)) &= 1, \\ e_D(f) &= 6T(f) + 2m_1(f(D(f))) + C(f), \\ \mu(D(f)) + 2m_0(f(D(f))) - 1 &= e_D(f) \end{aligned}$$

onde $e_D(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(H, J[H, p \circ f])}$, H define a curva de pontos duplos e $p: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ é uma projeção genérica linear.

Como consequência temos,

Teorema 4.3.1. [12]: *Suponha que $f \in \mathcal{O}(2,3)$ é um germe finitamente determinado e $F = (t, f_t)$ é um desdobramento a 1-parâmetro. Então F é Whitney equisingular ao longo de T se, e somente se, $e_D(f_t)$ e $m_1(f_t(\mathbb{C}^2))$ são constantes.*

4.3.2 O caso de germes finitamente determinados em $\mathcal{O}(2, 2)$

Para esta classe de germes temos os seguintes tipos estáveis:

Na fonte: Temos o conjunto de pontos críticos menos a origem $\Sigma(f) - \{0\}$.

Na meta: Temos a imagem do conjunto de pontos críticos (discriminante de f) menos a origem $\Delta(f) - \{0\}$, e os tipos estáveis zero-dimensionais que são cúspides e dobras transversais.

Como $\Sigma(f) - \{0\}$ e $\Delta(f) - \{0\}$ são de dimensão 1, então sobre estes conjuntos estão definidos 4 invariantes polares e as multiplicidades dos tipos estáveis zero-dimensionais (invariantes zero-estáveis) que são 2, denotados por $c(f)$ (número de cúspides) e $d(f)$ (número de dobras transversais). Portanto para aplicar o Teorema 4.1.1 precisamos de 7 invariantes incluindo o grau da aplicação f denotado por $\delta(f)$. Mas com as seguintes relações Gaffney consegue minimizar este número de invariantes.

Proposição 4.3.2. [12]: *Sejam $f \in \mathcal{O}(2, 2)$ um germe finitamente determinado e $p : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ uma projeção linear genérica. Então*

$$\mu(p \circ f) + \delta(f) - 1 = m_0(f(\Sigma(f))),$$

$$\mu(\Sigma(f)) + m_0(\Delta(f)) - 1 = c(f) + m_1(\Delta(f)) = e(J[f], J[p \circ f], J[f])$$

$$\mu(\Delta(f)) + m_0(\Delta(f)) - 1 = 3c(f) + 2d(f) + m_1(\Delta(f))$$

Com esta proposição demonstra-se o seguinte,

Teorema 4.3.2. [12]: *Suponha que $f \in \mathcal{O}(2, 2)$ é um germe finitamente determinado e $F = (t, f_t)$ é um desdobramento a 1-parâmetro. Então F é Whitney equisingular ao longo de T se, e somente se, $\mu_t(f_t)$ é constante se, e somente se, $d(f_t)$ e $e(J[f], J[p \circ f], J[f])$ são constantes.*

Como corolário do teorema mostra-se que se o germe é de corank 1, o mesmo teorema é válido, mas o número de invariantes a ser constante é o número de cúspides e o número de dobras transversais. Isto significa que para um desdobramento a 1-parâmetro ser Whitney equisingular é necessário que as multiplicidades dos tipos estáveis zero-dimensionais sejam constantes na família.

Daqui surge uma pergunta natural.

A constância dos zero-invariantes na família f_t de um desdobramento a 1-parâmetro $F \in \mathcal{O}(1+n, 1+p)$ é suficiente para que ela seja topologicamente trivial ou Whitney equisingular?

Esta pergunta foi respondida no caso $n = p = 2$ para germes de corank 1.

Capítulo 5

Equisingularidade de germes em $\mathcal{O}(3, 3)$

5.1 Os tipos estáveis em $\mathcal{O}(3, 3)$

Neste capítulo minimizamos o número de invariantes definidos nos tipos estáveis de f_0 cuja constância na família f_t implique a trivialidade topológica ou Whitney equisingularidade.

A estratégia é aplicar o Teorema 4.1.1 e as técnicas de Gaffney em [12], ou seja, estratificamos a fonte e a meta do germe (ou encontramos os tipos estáveis) e encontramos relações entre os invariantes sobre os estratos (ou tipos estáveis).

Seja $f \in \mathcal{O}(3, 3)$ um germe \mathcal{A} -finitamente determinado. Como $(3, 3)$ pertence às boas dimensões, então f é de tipo discreto, i. e., existe um número finito de tipos estáveis, portanto um número finito de estratos que são:

Na fonte: Temos o conjunto de pontos críticos $\Sigma(f)$, a curva cuspidal denotada por $\Sigma^{1,1}(f)$ e o conjunto de pontos duplos de f na fonte é denotado por $D_1^2(f|\Sigma(f))$. O conjunto $D_1^2(f|\Sigma(f))$ é definido como segue: Seja $f|\Sigma(f)$ a restrição de f a $\Sigma(f)$, então o conjunto de pontos duplos de $f|\Sigma(f)$ é denotado por $D^2(f|\Sigma(f))$, este conjunto é contido em \mathbb{C}^6 . Se f é de corank 1, podemos escrever f da forma $(x, y, g(x, y, z))$, e considerar $D^2(f|\Sigma(f))$ como o subconjun-

to $\{(x, y, z, z_1) \in \mathbb{C}^4 : g(x, y, z) = g(x, y, z_1)\}$, logo $D_1^2(f|\Sigma(f))$ é a projeção de $D^2(f|\Sigma(f))$ em \mathbb{C}^3 .

Na meta: Temos a imagem do conjunto de pontos críticos (discriminante de f) denotado por $\Delta(f)$, a imagem da curva cuspidal $f(\Sigma^{1,1}(f))$, a imagem da curva de pontos duplos $f(D_1^2(f|\Sigma(f)))$ e os tipos estáveis zero-dimensionais são pontos swallowtail A_3 (rabo de andorinha), cruzamento normal do plano com a cuspidal edge A_1A_2 e o conjunto de pontos triplos denotado por A_1^3 , ver Figura 5.1

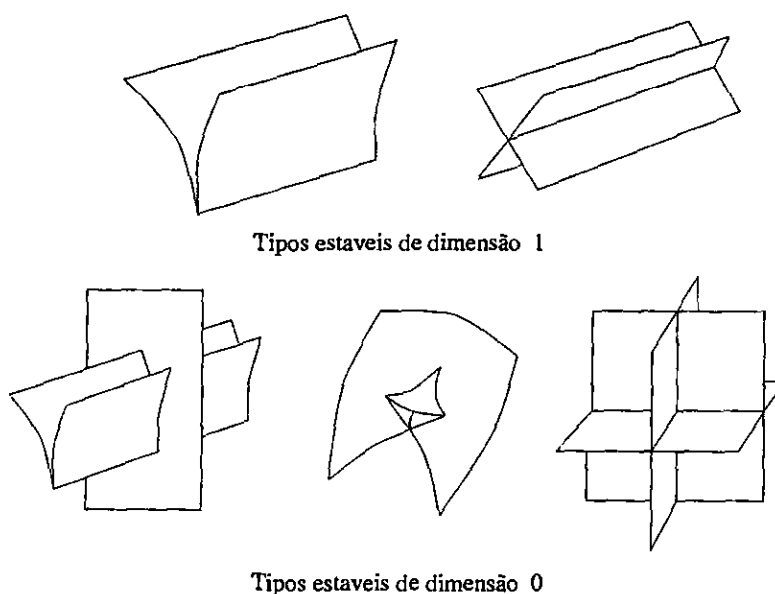


Figura 5.1: Tipos estáveis na meta

Como $\Sigma(f)$ e $\Delta(f)$ são de dimensão 2 e a dimensão de $D^2(f|\Sigma(f))$, $\Sigma^{1,1}(f)$, $f(\Sigma^{1,1}(f))$ e $f(D_1^2(f|\Sigma(f)))$ é 1, sobre estes conjuntos estão definidos 14 invariantes polares. As multiplicidades dos tipos estáveis zero-dimensionais são 3: O número de swallowtails ($\#A_3$), o número de cruzamento normal do plano com cuspidal edge ($\#A_1A_2$) e o número de pontos triplos ($\#A_1^3$).

Portanto para aplicar o Teorema 4.1.1 precisamos de 18 invariantes incluindo o grau da aplicação f , denotado por $\delta(f)$. Com as seguintes relações que iremos mostrar na próxima seção, conseguimos reduzir este número para 6 invariantes.

Alguns resultados que serão usados nas próximas seções estão enunciados no Apêndice.

5.2 Relações de invariantes nos tipos estáveis da meta

5.2.1 No conjunto $\Delta(f)$

Teorema 5.2.1. *Seja $f \in \mathcal{O}(3,3)$ um germe finitamente determinado e $p : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ uma projeção linear genérica. Então*

$$\mu(p \circ f) + \delta(f) - 1 = m_0(\Delta(f)).$$

Demonstração: Escolhamos uma projeção $p : \mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ de tal maneira que o grau de $p|_{\Delta(f)}$ seja igual à multiplicidade de $\Delta(f)$ em zero. Sejam X_1 e X espaços em \mathbb{C}^3 definidos por

$$X_1 = (p \circ f)^{-1}(0),$$

$$X = f^{-1}(0).$$

Como estes espaços são I.C.I.S., então aplicamos o Teorema de Lê-Greuel em [20] (ou ver também o apêndice) temos:

$$\mu(p \circ f) + \mu(f_1, f_2, f_3) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(p \circ f, J[f])}$$

e pelo Teorema de Looijenga [22] (ver apêndice) temos que

$$\mu(f_1, f_2, f_3) = \delta(f) - 1.$$

Como $f : \Sigma(f) \subset \mathbb{C}^3 \rightarrow \Delta(f) \subset \mathbb{C}^3$ é bimeomorfa e finita e o diagrama abaixo é comutativo, temos que o grau de $(p \circ f)|_{\Sigma(f)}$ é igual ao grau de $p|_{\Delta(f)}$.

Portanto $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(p \circ f, J[f])} = m_0(\Delta(f))$, também pelo fato de que o anel local $\mathcal{O}_{\Sigma(f)}$ é Cohen Macaulay.

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma(f) \subset \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{f} & \Delta(f) \subset \mathbb{C}^3 \\
p \circ f \searrow & & \swarrow p \\
& & (\mathbb{C}^2, 0)
\end{array}$$

Corolário 5.2.1. *Se $f \in \mathcal{O}(3,3)$ é de corank 1, então $\delta(f) - 1 = m_0(\Delta(f))$.*

O resultado do Teorema 5.2.1 anterior pode ser generalizado para um germe $f \in \mathcal{O}(n,n)$ definindo um espaço analítico que é I.C.I.S..

Teorema 5.2.2. *Seja $f \in \mathcal{O}(n,n)$ um germe finitamente determinado e $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ uma projeção linear genérica. Então*

$$\mu(p \circ f) + \delta(f) - 1 = m_0(\Delta(f)).$$

Demonstração: Escolhamos uma projeção $p : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}, 0$ de tal maneira que o grau de $p|\Delta(f)$ seja igual à multiplicidade de $\Delta(f)$ em zero. Sejam X_1 e X espaços em \mathbb{C}^n definidas por

$$X_1 = (p \circ f)^{-1}(0),$$

$$X = f^{-1}(0).$$

Como estes espaços são I.C.I.S., então aplicamos o Teorema de Lê-Greuel em [20] temos:

$$\mu(p \circ f) + \mu(f_1, \dots, f_n) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(p \circ f, \mathcal{J}[f])}$$

e pelo Teorema de Looijenga [22] (ver apêndice) temos que

$$\mu(f_1, \dots, f_n) = \delta(f) - 1.$$

Como $f : \Sigma(f) \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \Delta(f) \subset \mathbb{C}^n$ é bimeomorfa e finita, o anel local $\mathcal{O}_{\Sigma(f)}$ é Cohen Macaulay e o diagrama abaixo é comutativo, temos que o grau de $((p \circ f)|\Sigma f)$ é igual ao grau de $p|\Delta(f)$. Portanto $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{(p \circ f, \mathcal{J}[f])} = m_0(\Delta(f))$.

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma(f) \subset \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f} & \Delta(f) \subset \mathbb{C}^n \\
p \circ f \searrow & & \swarrow p \\
& & (\mathbb{C}^{n-1}, 0)
\end{array}$$

Teorema 5.2.3. *Suponha que $f \in \mathcal{O}(3, 3)$ é um germe finitamente determinado.*

Então

$$m_2(\Delta(f)) - m_1(\Delta(f)) + m_0(\Delta(f)) = \mu(\Sigma(f)) + 1.$$

Demonstração: Escolhemos uma projeção $p_2 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que o grau de $p_2|_{\Delta(f)}$ é igual à multiplicidade de $\Delta(f)$ em $0 \in \mathbb{C}^3$, e a multiplicidade da variedade polar $P_1(\Delta(f)) = \overline{\sum (p_2|_{\Delta(f)^0})}$ é $m_1(\Delta(f))$. Seja $p_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ uma projeção linear genérica tal que o grau de $p_1 \circ p_2|_{P_1(\Delta(f))}$ é $m_1(\Delta(f))$. Usamos $p_1 \circ p_2$ para definir a multiplicidade polar $m_2(\Delta(f))$ e suponhamos também que $p_1 \circ p_2$ é genérica. Sejam

$$X_1 = V(p_1 \circ p_2 \circ f, J[f]),$$

$$X = V(p_2 \circ f, J[f]).$$

Como estas variedades são I.C.I.S., aplicamos o Teorema de Lê-Greuel em [20] e obtemos.

$$\mu(X_1) + \mu(X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(p_1 \circ p_2 \circ f, J[f], J[p_2 \circ f, J[f]])}.$$

Consequentemente aplicando de novo o Teorema de Lê-Greuel temos que:

$$\begin{aligned} & \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(J[f], J[p_1 \circ p_2 \circ f, J[f]])} - \mu(J[f]) + \mu(X) = \\ & \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(p_1 \circ p_2 \circ f, J[f], J[p_2 \circ f, J[f]])}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Looijenga temos $\mu(X) = \text{grau}(p_2 \circ f, J[f]) - 1$. Então

$$\begin{aligned} & \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(J[f], J[p_1 \circ p_2 \circ f, J[f]])} - \mu(J[f]) + \text{grau}(p_2 \circ f, J[f]) - 1 = \\ & \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(p_1 \circ p_2 \circ f, J[f], J[p_2 \circ f, J[f]])}. \end{aligned} \quad (*)$$

Esta equação é a chave para mostrar a relação entre as multiplicidades polares. Para calcular a multiplicidade $m_0(\Delta(f))$ usamos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(f) \subset \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{f} & \Delta(f) \subset \mathbb{C}^3 \\ p_2 \circ f \searrow & & \swarrow p_2 \\ & & (\mathbb{C}^2, 0) \end{array}$$

Pelo fato que $f : \Sigma(f) \rightarrow \Delta(f)$ é finita e bimeomorfa sobre $\Sigma(f)$ temos que $\text{grau}(p_2|\Delta(f)) = \text{grau}(p_2 \circ f|\Sigma(f))$, portanto $\text{grau}(p_2 \circ f, J[f]) = m_0(\Delta(f))$. Da mesma maneira, para calcular $m_1(\Delta(f))$, usamos o fato que f restrito a $V' = V(J[f], J[p_2 \circ f, J[f]])$ é bimeromorfa e finita. Então obtemos que o $\text{grau}((p_1 \circ p_2 \circ f)|V') = \text{grau}((p_1 \circ p_2)|\Delta(f))$ e

$$m_1(\Delta(f)) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(p_1 \circ p_2 \circ f, J[f], J[p_2 \circ f, J[f]])}.$$

Esta ultima igualdade segue do fato que o anel $\mathcal{O}_{V'}$ é Cohen Macaulay.

Para calcular $m_2(\Delta(f))$, escolhemos um desdobramento versal F de f e consideramos $F : \Sigma(f) \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^s \rightarrow \Delta(f) \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^s$. Sabemos que $\Sigma(F)$ é uma hipersuperfície em $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^s$. Como $p_1 \circ p_2 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ é uma projeção linear genérica para $(\Delta(F), \pi_s)$ temos que $\Sigma((\pi_s, p_1 \circ p_2) \circ F)|\Sigma(F) = V(J[F], J[p_1 \circ p_2 \circ F, J[F]])$.

Então extrairemos o invariante $m_2(\Delta(f))$ que é controlado pelo grau da projeção $\pi_s|V(J[F], J[p_1 \circ p_2 \circ F, J[F]])$ que é a colongitude $(e_J(f))$ do ideal máximo m_s no anel local da fonte em $(0, 0, 0)$. Isto é,

$$e_J(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(J[f], J[p_1 \circ p_2 \circ f, J[f]])}.$$

As possíveis componentes de $V(J[F], J[p_1 \circ p_2 \circ F, J[F]])$ estão no fecho do seguinte conjunto

$$F^{-1}(P_2(\Delta(F), \pi_s) \cup A_3 \cup A_1 A_2 \cup A_1^3).$$

Para contar a contribuição de π_s restrito a estas componentes, usamos as formas normais estáveis onde aparece uma singularidade de tipo estável. Então escolhemos um parâmetro s genérico e vizinhanças $U_2 \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^s$ e $U_1 \subset \mathbb{C}^s$ tal que para

todo ponto em U_1 temos $e_J(f)$ pre-imagens em $V \cap U_2$ contando multiplicidade. Então

$$\begin{aligned} e_J(f) &= \sum_{x \in S} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{s+3,x}}{(m_s, J[F], J[p_1 \circ p_2 \circ F, J[F]])} \\ &= \sum_{x \in S} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{3,x}}{(J[f_s], J[p_1 \circ p_2 \circ f_s, J[f_s]])}. \end{aligned}$$

onde $S = \pi_s^{-1}(0) \cap V$. Como o parâmetro s é genérico, podemos supor f_s estável. Primeiro escolhemos o germe onde aparece uma singularidade de tipo A_3 que tem forma normal $f_s = (x, y, z^4 + xz + yz^2)$ e contamos sua contribuição na variedade V . Temos

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(4z^3 + x + 2yz, J[y, 4z^3 + x + 2yz])} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(4z^3 + x + 2yz, 1, 12z + 2y)} = 0$$

Portanto a contribuição dos pontos A_3 para o cálculo de $e_J(f)$ é nula, isto significa que estes pontos não aparecem em V .

Tomamos a forma normal $f_s = \{(x, y, z^3 + yz); (x^2, y, z)\}$ onde aparece um tipo de singularidade A_1A_2 . Usando a projeção genérica $p_1 \circ p_2 = ax + by + cz$, a contribuição desta singularidade é a soma das singularidade em cada germe no multigerme. Portanto basta calcular $e_J(f_s)$ para cada uma delas, i.e.,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(3z^2 + y, J[ax + by, 3z^2 + y])} = 0$$

e

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(2x, J[ax + by, 2x])} = 0.$$

Portanto a contribuição dos pontos A_1A_2 é nula em $e_J(f)$. Da mesma maneira mostramos que a contribuição da singularidade de tipo A_1^3 também é nula. Para isto basta trabalhar com a forma normal do multigerme estável

$$f_s = \{(x, y, z^2); (x, y^2, z); (x^2, y, z)\}$$

que tem singularidade de tipo A_1^3 (ou ponto triplo). Em resumo, as componentes de $V(J[F], J[p_1 \circ p_2 \circ F, J[F]])$ estão no fecho de $F^{-1}(P_2(\Delta(F), \pi_s))$. Portanto

$$\begin{aligned} e_J(f) &= \sum_{x \in S} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{3,x}}{(J[f_s], J[p_1 \circ p_2 \circ f_s, J[f_s]])} \\ &= m_2(\Delta(f)) \end{aligned}$$

pois F restrito a $V(J[F], J[p_1 \circ p_2 \circ F, J[F]])$ é bimeomorfa e finita. Substituindo todas as igualdades na equação (*) obtemos o resultado do teorema.

Corolário 5.2.2. *Seja $f \in \mathcal{O}(3, 3)$ um germe finitamente determinado de corank 1. Então*

$$m_2(\Delta(f)) - m_1(\Delta(f)) + m_0(\Delta(f)) = \#A_1A_2 - \frac{1}{2}(\mu(D_1^2(f|\Sigma(f)))) + 2\#A_3^3 + \mu_\Delta(f) + 1 - \frac{1}{2}(\#A_3 - 1).$$

Demonstração: A demonstração segue do Teorema 5.2.3 e do Teorema de Huston A.0.4 apresentado no Apêndice.

5.2.2 No conjunto $f(D_1^2(f|\Sigma(f)))$

Para demonstrar o seguinte teorema primeiro faremos algumas considerações.

Seja $f \in \mathcal{O}(3, 3)$ um germe finitamente determinado de corank 1, então a curva de pontos duplos $D_1^2(f|\Sigma(f))$ é um espaço analítico que é I.C.I.S. (ver [16]). Este resultado é uma condição necessária para poder aplicar o Teorema de Lê-Greuel e encontrar assim relações entre invariantes em $D_1^2(f|\Sigma(f))$.

Teorema 5.2.4. *Seja $f \in \mathcal{O}(3, 3)$ um germe finitamente determinado de corank 1. Então*

$$2m_0(X) - 2m_1(X) + \mu(D_1^2(f|\Sigma(f))) = (2\#A_1A_2 + 3\#A_3) + 1,$$

onde $X = f(D_1^2(f|\Sigma(f)))$.

Demonstração: O estrato na meta $f(D_1^2(f|\Sigma(f)))$ tem dimensão 1 então existem dois invariantes polares $m_0(f(D_1^2(f|\Sigma(f))))$ e $m_1(f(D_1^2(f|\Sigma(f))))$. Como $f|D_1^2(f|\Sigma(f)) - \{0\}$ é um cobrimento de duas folhas de $f(D_1^2(f)) - \{0\}$ pela Proposição A.0.3 do Apêndice podemos escolher projeções e por ser f bimeomorfa restrito a $D_1^2(f) - \{0\}$ isto segue-se

$$e(f^*(m_3)\mathcal{O}_{D_1^2(f)}) = 2m_0(f(D_1^2(f|\Sigma(f)))).$$

Para calcular os demais invariantes prosseguimos como segue.

Como $D_1^2(f|\Sigma(f))$ é um conjunto analítico que é I.C.I.S., então os seguintes conjuntos são I.C.I.S.

$$X_1 = D_1^2(f|\Sigma(f)),$$

$$X_2 = D_1^2(f|\Sigma(f)) \cap (p \circ f)^{-1}(0)$$

onde $p : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$, é uma projeção linear genérica. Usamos estes dois conjuntos para aplicar o Teorema de Lê-Greuel e obter

$$\mu(X_1) + \mu(X_2) = e(I_1^2(f|\Sigma(f)), J[I_1^2(f|\Sigma(f)), p \circ f]) \quad (**)$$

onde $I_1^2(f|\Sigma(f))$ é o ideal que define a curva de pontos duplos $D_1^2(f|\Sigma(f))$. Como X_2 é I.C.I.S. de dimensão zero, podemos aplicar o Teorema de Looigenga ([22]) para obter

$$\mu(X_2) = e(I_1^2(f|\Sigma(f)), p \circ f) - 1.$$

Pela observação anterior e pelo fato de f restrito à curva do conjunto de pontos duplos ser bimeomorfa, obtemos

$$\mu(X_2) = 2m_0(f(D_1^2(f|\Sigma(f)))) - 1.$$

Para entender o significado geométrico do lado direito da igualdade (**) escolhemos um desdobramento versal $F = (s, \bar{f}(s, x))$ de f e consideramos a variedade $V(I_1^2(F|\Sigma(F)), J[I_1^2(F|\Sigma(F)), p \circ \bar{f}])$. As componentes desta variedade devem ter dimensão ao menos s . Suas componentes são $F^{-1}(P_1(D_1^2(F|\Sigma(F))))$, o conjunto de pontos A_1A_2 , o conjunto de pontos A_3 e o conjunto de pontos triplos A_1^3 .

Como p é uma projeção genérica, a dimensão de V é s . Como a multiplicidade de V é a soma das multiplicidades destas componentes, então basta calcular as contribuições do grau de π_s restrito a cada componente, onde π_s é a projeção da primeira componente de $\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^3$ sobre \mathbb{C}^s .

Escolhemos vizinhanças U_1 de 0 em \mathbb{C}^s e U_2 de 0 em $\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^3$ tal que cada ponto em U_1 , π_s tem $e(I_1^2(f|\Sigma(f)), J[I_1^2(f|\Sigma(f)), p \circ f])$ pre-imagens em $V \cap U_2$

contando multiplicidade. Se $s \in \mathbb{C}^s$ é um parâmetro genérico próximo de 0, nos temos

$$\begin{aligned} e(H) &= \sum_{x \in S} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{s+3,x}}{(\mathcal{M}_s, I_1^2(F|\Sigma(F)), J[I_1^2(F|\Sigma(F)), p \circ f])} \\ &= \sum_{x \in S} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{3,x}}{(I_1^2(f_s|\Sigma(f_s)), J[I_1^2(f_s|\Sigma(f_s)), p \circ f_s])} \quad (***) \end{aligned}$$

onde $H = (I_1^2(f|\Sigma(f)), J[I_1^2(f|\Sigma(f)), p \circ f])$ e $S = \pi_s^{-1}(0) \cap V$.

Usando esta fórmula e as formas normais estáveis onde tem uma singularidade de tipo estável em V obtemos as contribuições de cada componente. Para contar as singularidade de tipo A_3 , pegamos $f_s = (x, y, z^4 + xz + yz^2)$.

Como $\Sigma(f)$ é uma hipersuperfície regular, f pode ser considerada como uma aplicação de $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$, isto é, podemos parametrizar $\Delta(f)$ da forma $\phi(y, z) = (-4z^3 - 2yz, y, -3z^3 - yz^2)$. A curva de pontos duplos desta aplicação é denotada por $D^2(\phi) \subset \mathbb{C}^3$ e é determinada pelo ideal

$$I_1^2(f_s|\Sigma(f_s)) = (-4(z_1^2 + z_1z + z^2) - 2y, -(z_1^2 + z^2)(z_1 + z) - y(z_1 + z)).$$

Esta curva é bimeomorfa à curva $D_1^2(f|\Sigma(f))$, pelo fato que $\Sigma(f)$ é regular. Então para calcular a contribuição das singularidades de tipo A_3 no conjunto $V(I_1^2(f|\Sigma(f)), J[I_1^2(f|\Sigma(f)), p \circ f])$ basta usar o ideal $I_1^2(f_s|\Sigma(f_s))$. Portanto usando a fórmula (***) temos

$$e(H) = \sum_{x \in S} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{3,x}}{(I_1^2(f_s|\Sigma(f_s)), J[I_1^2(f_s|\Sigma(f_s)), ax+by+cf_3])} = 3,$$

onde $p(x, y, z) = ax + by + cz$ é uma projeção genérica, ($b \neq 0$). Isto significa que os pontos de tipo A_3 aparecem em V a sua contribuição é igual a 3.

Da mesma maneira, para contar a contribuição dos pontos $A_1 A_2$ basta escolher a forma normal estável $f_s = \{(x^2, y, z); (x, y, z^3 + yz)\}$. De fato, a curva genérica de pontos duplos na fonte deste multigerme é definida pelo ideal $I_1^2(f_s|\Sigma(f_s)) = (x, 3z^2 + y)$. Então usando a fórmula (***) , temos

$$\begin{aligned} e(H) &= \sum_{x \in S_1} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{3,x}}{(x, 3z^2+y, J[x, 3z^2+y, ax+by+cf_3])} \\ &\quad + \sum_{x \in S_2} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{3,x}}{(x, 3z^2+y, J[x, 3z^2+y, ax+by+cf_3])} = 2, \end{aligned}$$

onde $S_1 = \pi_s^{-1}(0) \cap V_1$ e $S_2 = \pi_s^{-1}(0) \cap V_2$ para cada componente do multigerme

e ($b \neq 0$). Isto significa que a contribuição dos pontos A_1A_2 é 2.

Portanto como F restrito a cada componente é bimeomorfa e finita e pela Proposição A.0.3 do Apêndice, obtemos

$$\text{grau}(\pi_s|V) = 2m_1(f(D_1^2(f))) + 3\#A_3 + 2\#A_1A_2.$$

O teorema segue juntando todas as igualdades acima.

5.2.3 No conjunto $f(\Sigma^{1,1}(f))$

Da mesma maneira que no teorema anterior precisamos que o conjunto $\Sigma^{1,1}(f)$ seja I.C.I.S., para isso consideramos que f de corank 1.

Teorema 5.2.5. *Seja $f \in \mathcal{O}(3, 3)$ um germe finitamente determinado de corank 1. Então*

$$m_0(f(\Sigma^{1,1}(f))) - m_1(f(\Sigma^{1,1}(f))) = 1 - \mu(\Sigma^{1,1}(f)) + \#A_3$$

Demonstração: Como f é finitamente determinado então $\Sigma^{1,1}(F)$ tem uma estrutura reduzida onde F é o desdobramento versal de f .

Como $\Sigma^{1,1}(f)$ é um espaço analítico que é I.C.I.S., escolhemos $p : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ uma projeção linear genérica tal que os espaços

$$X_1 = \Sigma^{1,1}(f),$$

$$X = \Sigma^{1,1}(f) \cap (p \circ f)^{-1}(0)$$

são I.C.I.S.. Aplicando o Teorema de Lê-Greuel, obtemos

$$\mu(\Sigma^{1,1}(f)) + \mu(\Sigma^{1,1}(f) \cap (p \circ f)^{-1}(0)) = e(I^{1,1}(f), J[I^{1,1}(f), p \circ f]),$$

onde $I^{1,1}(f)$ é o ideal que define $\Sigma^{1,1}(f)$.

Como X é I.C.I.S. de dimensão zero; aplicamos o Teorema de Looijenga ([22]). Pela proposição A.0.3 do Apêndice e como $f|_{\Sigma^{1,1}(f)}$ é bimeromorfa obtemos

$$\mu(I^{1,1}(f), p \circ f) = m_0(f(\Sigma^{1,1}(f))) - 1.$$

Para entender o significado geométrico de

$$e(I^{1,1}(f), J[I^{1,1}(f), p \circ f])$$

escolhemos um desdobramento versal $F = (s, \bar{f}(x, s))$ de f e consideramos a variedade $V(I^{1,1}(F), J[I^{1,1}(F), p \circ \bar{f}])$. As componentes desta variedade tem dimensão ao menos s , e são: $F^{-1}(P_1(f(\Sigma^{1,1}(F))))$ e as pre-imagens da singularidade swallowtail A_3 . Pela genericidade de p e F , estas componentes tem dimensão exatamente s . Como F restrita a cada componente é bimeomorfa e finita, e pela Proposição A.0.3 temos

$$\text{grau}(\pi_s|V) = m_1(f(\Sigma^{1,1}(f))) + \#A_3.$$

As contribuições foram obtidas da mesma maneira que no teorema anterior. Basta considerar a projeção $\pi_s : \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ e obtemos o resultado.

Corolário 5.2.3. *Seja $f \in \mathcal{O}(3, 3)$ um germe finitamente determinado de corank 1. Então*

$$m_1(f(\Delta(f))) = m_0(f(\Sigma^{1,1}(f))).$$

Demonstração: Como f é de corank 1 então $f = (x, y, g(x, y, z))$, e o ideal que define $\Sigma^{1,1}(f)$ é $I^{1,1}(f) = (g_z, g_{zz})$. Além disso como na demonstração do Teorema 5.2.3 e o Teorema 5.2.5 temos que

$$m_1(\Delta(f)) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(p_1 \circ p_2 \circ f, J[f], J[p_2 \circ f, J[f]])}$$

e

$$m_0(f(\Sigma^{1,1}(f))) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(I^{1,1}(f), p \circ f)}.$$

Como p_1, p_2 e p são projeções genéricas,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(p_1 \circ p_2 \circ f, J[f], J[p_2 \circ f, J[f]])} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(I^{1,1}(f), p \circ f)}.$$

5.3 Relações entre os invariantes nos tipos estáveis da fonte

Nesta seção achamos relações entre os invariantes dos tipos estáveis na fonte. Os estratos neste caso são o conjunto de pontos críticos, a curva de pontos duplos e a curva cuspidal. Para encontrar as relações é menos dificultoso que no caso da meta pois o conjunto de pontos críticos é uma hipersuperfície com singularidade isolada, e para um germe de corank 1 a curva de pontos duplos e a curva cuspidal são I.C.I.S. também .

Sabemos do Teorema 3.5.4 que a multiplicidade polar de uma variedade polar absoluta ou relativa de uma hipersuperfície X com singularidade isolada é relacionada com os números de Milnor das seções planas μ^k , i.e.,

$$m_k(X) = \mu^{k+1}(X) + \mu^k(X)$$

para $0 \leq k \leq (d-1)$, onde $d = \dim(X)$. Este resultado também é valido para espaços que são I.C.I.S. [20]. As multiplicidades polares absolutas estão definidas até dimensão de X menos 1. A multiplicidade $m_d(X)$ não pode ser definida diretamente como os outros m_k , $0 \leq k \leq (d-1)$, pois as singularidades de $(p_1|X)$ são pontos isolados, então o germe na origem de seu fecho sempre é vazio. Entretanto Gaffney [13] define esta multiplicidade para espaços que são I.C.I.S como segue.

Definição 5.3.1. *A d -ésima multiplicidade polar de $(X^d, 0)$, (X^d é I.C.I.S. de dimensão d), denotada por $m_d(X^d)$, é definida por*

$$m_d(X^d) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X / J(p_1, f)$$

onde $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n-d}, 0)$, $f^{-1}(0) = X^d$ e $p_1 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é uma projeção linear genérica.

Observação 5.3.1. *Como $V(p_1, f)$ é uma interseção completa com singularidade isolada, então por Lê-Greuel ([20]), obtemos*

$$m_d(X^d) = \mu(X^d) + \mu(X^d \cap p_1^{-1}(0)).$$

No caso que o germe $f \in \mathcal{O}(3,3)$ é finitamente determinado, $\Sigma(f)$ é uma hipersuperfície de singularidade isolada. Se f é de corank 1 as curvas de pontos duplos $D_1^2(f|\Sigma(f))$ e a cuspidal $\Sigma^{1,1}(f)$ são I.C.I.S.. Portanto podemos aplicar a Definição 5.3.1 e todas as propriedades acima para obter a seguinte

Proposição 5.3.1. *Seja $f \in \mathcal{O}(3,3)$ um germe finitamente determinado. Então*

$$(i) \quad m_2(\Sigma(f)) - m_1(\Sigma(f)) + m_0(\Sigma(f)) - 1 = \mu(\Sigma(f))$$

(ii) *Se f é de corank 1, então*

$$m_1(D_1^2(f|\Sigma(f))) - m_0(D_1^2(f|\Sigma(f))) + 1 = \mu(D_1^2(f|\Sigma(f))),$$

$$\mu(\Sigma^{1,1}(f)) + m_0(\Sigma^{1,1}(f)) - 1 = m_1(\Sigma^{1,1}(f))$$

5.4 Teoremas principais de equisingularidade

Podemos agora juntar todas as fórmulas na seção 5.2 e 5.3 e usar o Teorema 4.1.1 de Gaffney para obter os seguintes resultados.

Teorema 5.4.1. *Suponha que $f \in \mathcal{O}(3,3)$ é um germe finitamente determinado de corank 1 e $F = (t, f_t)$ um bom desdobramento a 1-parâmetro. Então F é Whitney equisingular ao longo de T se, e somente se, $m_1(\Delta(f_t))$, $\mu(\Sigma(f_t))$, $m_1(\Sigma(f_t))$, $m_1(D_1^2(f_t|\Sigma(f_t)))$, $m_0(f_t(D_1^2(f_t|\Sigma(f_t))))$ e $m_1(\Sigma^{1,1}(f_t))$ são constantes para t perto da origem.*

Observação 5.4.1. *Observamos que o Teorema 5.4.1 reduz o número de invariantes necessários no Teorema 4.1.1 de 18 à 6.*

Teorema 5.4.2. *Se $f \in \mathcal{O}(3,3)$ é um germe finitamente determinado e F um excelente desdobramento de f . Então F é Whitney equisingular ao longo de T se, e somente se, $m_1(\Delta(f_t))$, $\mu(\Sigma(f_t))$, $m_1(\Sigma(f_t))$ e as multiplicidades polares dos tipos estáveis 1-dimensionais na fonte e na meta são constantes para t perto da origem.*

Capítulo 6

Aplicações a germes unimodulares

Em um trabalho não publicado, du Plessis e Tari [6] classificaram germes de $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ de modalidade 1 que são dentro da \mathcal{K} -órbita A_3 . Os modelos são os seguintes:

$$\begin{aligned}(x, y, z^4 + (xy + ay^3 + y^4)z + xz^2) & \quad a \neq 0, 1/2 \\(x, y, z^4 + (xy + ay^3)z + xz^2) & \quad a \neq 0, 1/2 \\(x, y, z^4 + (x^2 + xy^2 + ay^4)z + xz^2) & \quad a \neq 0, 1/4\end{aligned}$$

Aplicaremos neste capítulo o resultado principal (Teorema 5.4.1) para o estudo da equisingularidade dos germes acima ao longo do módulo.

Para isso calculamos os 6 invariantes no Teorema 5.4.1 e estudamos as suas constâncias ao longo do parâmetro a .

Proposição 6.0.1. *Sejam $f(x, y, z) = (x, y, z^4 + (xy + ay^3 + y^4)z + xz^2)$ e $g(x, y, z) = (x, y, z^4 + (xy + ay^3)z + xz^2)$ germes unimodulares e sejam $F(t, x, y, z) = (t, x, y, z^4 + (xy + (a + t)y^3 + y^4)z + xz^2)$ e $G(t, x, y, z) = (t, x, y, z^4 + (xy + (a + t)y^3)z + xz^2)$ seus desdobramentos. Então F e G são Whitney equisingulares para t suficientemente pequenos se $a \neq 0, 1/2$.*

Demonstração: Seja $f_t(x, y, z) = (x, y, z^4 + (xy + (a + t)y^3 + y^4)z + xz^2)$ a deformação de f . Segundo o Teorema 5.4.1 temos que calcular 6 invariantes primeiramente calculamos a multiplicidade polar do discriminante $m_1(\Delta(f_t))$:

$$m_1(\Delta(f_t)) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(p_1 \circ p_2 \circ f_t, J[f_t], J[p_2 \circ f_t, J[f_t]])}$$

onde p_1 e p_2 são projeções genéricas. Escolhemos $p_2(x, y, z) = (x, y)$ e $p_1(x, y) = y$ que são genéricas. Então

$$\begin{aligned} m_1(\Delta(f_t)) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(y, 4z^3 + xy + (a+t)y^3 + y^4 + 2xz, J[x, y, 4z^3 + xy + (a+t)y^3 + y^4 + 2xz])} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(y, 4z^3 + xy + (a+t)y^3 + y^4 + 2xz, 12z^2 + 2x)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(4z^3 + 2xz, 12z^2 + 2x)} \\ &= 3 \\ &= m_1(\Delta(f_0)) \end{aligned}$$

Temos $\Sigma(f_t) = 4z^3 + xy + (a + t)y^3 + y^4 + 2xz$; então o número de Milnor de $\Sigma(f_t)$ é dado por

$$\begin{aligned} \mu(\Sigma(f_t)) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(y+2z, x+3(a+t)y^2+4y^3, 12z^2+2x)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(3y^2+2x, x+3(a+t)y^2+4y^3)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(3y^2+2x, (-3/2+3(a+t))y^2+4y^3)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_1}{((-3/2+3(a+t))y^2+4y^3)} \\ &= 2, \text{ se } (a+t) \neq 1/2 \\ &= \mu(\Sigma(f_0)), \text{ se } (a+t) = 1/2. \end{aligned}$$

Então para $a \neq 1/2$ e para t pequeno $\mu(\Sigma(f_t)) = \mu(\Sigma(f_0))$.

Agora calculemos a multiplicidade $m_1(\Sigma(f_t))$. Como $\Sigma(f_t)$ é uma hipersuperfície com singularidade isolada,

$$m_1(\Sigma(f_t)) = \mu^2(\Sigma(f_t)) + \mu^1(\Sigma(f_t)).$$

Escolhemos hiperplanos (genéricos) $H_1 = \{x = y = 0\}$ e $H_2 = \{y = 0\}$. Então,

$$\begin{aligned}
m_1(\Sigma(f_t)) &= \mu^2(4z^3 + 2xz) + \mu^1(4z^3) \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(12z^2 + 2x, 2z)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_1}{(12z^2)} \\
&= 3 \\
&= m_1(\Sigma(f_0)).
\end{aligned}$$

Para calcular a multiplicidade $m_1(D_1^2(f_t|\Sigma(f_t)))$ precisamos encontrar o ideal que define a curva $D_1^2(f_t|\Sigma(f_t))$ e usar a seguinte relação

$$m_1(D_1^2(f_t|\Sigma(f_t))) = \mu(D_1^2(f_t|\Sigma(f_t))) + m_0(D_1^2(f_t|\Sigma(f_t))) - 1.$$

O ideal que define a curva de pontos duplos na fonte é $I_1^2(f_t|\Sigma(f_t)) = (xy + (a+t)y^3 + y^4, 2z^2 + x)$. Como a segunda componente deste ideal é regular, podemos considerar a curva de pontos duplos mergulhada em \mathbb{C}^2 , i.e, as seguintes igualdades são válidas.

$$\begin{aligned}
\mu(D_1^2(f_t|\Sigma(f_t))) &= \mu((xy + (a+t)y^3 + y^4, 2z^2 + x)) \\
&= \mu(-z^2y + (a+t)y^3 + y^4) \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(-z^2 + 3(a+t)y^2 + 4y^3, -2zy)} \\
&= 4, \text{ se } (a+t) \neq 0 \\
&= \mu(D_1^2(f_0|\Sigma(f_0))), \text{ se } (a+t) = 0.
\end{aligned}$$

Agora calculamos $m_0(f_t(D_1^2(f_t|\Sigma(f_t))))$. Como

$$2m_0(f_t(D_1^2(f_t|\Sigma(f_t)))) = e(I_1^2(f_t|\Sigma(f_t)), p \circ f_t)$$

onde $p : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ é uma projeção genérica linear e como $(I_1^2(f_t|\Sigma(f_t)), p \circ f_t)$ é um ideal reduzido e $\mathcal{O}_{D_1^2(f_t|\Sigma(f_t))}$ é Cohen Macaulay, então $e(I_1^2(f_t|\Sigma(f_t)), p \circ f_t) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}}{(I_1^2(f_t|\Sigma(f_t)), p \circ f_t)}$.

Escolhendo $p(x, y, z) = x$ genérica então

$$e(I_1^2(f_t|\Sigma(f_t)), p \circ f_t) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(xy + (a+t)y^3 + y^4, 2z^2 + x, x)} = 6$$

se $(a+t) \neq 0$.

Portanto

$$m_0(f_t(D_1^2(f_t(\Sigma(f_t)))))) = 3 = m_0(f_0(D_1^2(f_0(\Sigma(f_0))))), \text{ se } (a+t) \neq 0.$$

Logo

$$m_1(D_1^2(f_t(\Sigma(f_t)))) = 6 = m_1(D_1^2(f_0(\Sigma(f_0))))), \text{ se } (a+t) \neq 0.$$

Finalmente calculamos as multiplicidades de $f_t(\Sigma^{1,1}(f_t))$. O ideal que define o estrato $\Sigma^{1,1}(f_t)$ é $I^{1,1}(f_t) = (4z^3 + xy + (a+t)y^3 + y^4 + 2xz, 12z^2 + 2x)$, portanto

$$\begin{aligned} m_0(f_t(\Sigma^{1,1}(f_t))) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(I^{1,1}(f_t), p \circ f_t)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(4z^3 + 2zx, 12z^2 + 2x)} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Calculamos também $\mu(\Sigma^{1,1}(f_t))$ como segue:

$$\begin{aligned} \mu(\Sigma^{1,1}(f_t)) &= \mu(4z^3 - 6z^2y + (a+t)y^3 + y^4 - 12z^3) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(-6z^2 + 3(a+t)y^2 + 4y^3, 12z^2 - 12zy - 36z^2)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(-6z^2 + 3(a+t)y^2 + 4y^3, z)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(-6z^2 + 3(a+t)y^2 + 4y^3, -12y - 24z)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_1}{(3(a+t)y^2 + 4y^3)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_1}{((-6 + 12(a+t))z^2 - 36z^3)} \\ &= 4 \text{ se } (a+t) \neq 0, 1/2 \\ &= \mu(\Sigma^{1,1}(f_t)), \text{ se } (a+t) \neq 0, 1/2. \end{aligned}$$

Como $\#A_3 = 3$ para $(a+t) \neq 0$ então usando a relação do Terema 5.2.5

$$m_1(f_t(\Sigma^{1,1}(f_t))) = m_1(f_0(\Sigma^{1,1}(f_0))) = 3, \text{ se } (a+t) \neq 0, 1/2.$$

Concluimos, usando o Teorema 5.4.1, que a família é Whitney equisingular para t suficientemente pequeno se $a \neq 0, 1/2$.

Da mesma maneira, concluimos que a família G também é Whitney equisingular se $a \neq 0, 1/2$.

Proposição 6.0.2. *Seja $f(x, y, z) = (x, y, z^4 + (x^2 + xy^2 + ay^4)z + xz^2)$ um germe unimodular e seja $F(t, x, y, z) = (t, x, y, z^4 + (xy + ty^3 + (a+t)y^4)z + xz^2)$ seu*

desdobramento. Então F é Whitney equisingular para t suficientemente pequeno se $a \neq 0, 1/4$.

Demonstração: Seja $f_t(x, y, z) = (x, y, z^4 + (x^2 + xy^2 + (a+t)y^4)z + xz^2)$ a deformação de f . Temos que calcular 6 invariantes do Teorema 5.4.1. Primeiramente calculamos a multiplicidade polar $m_1(\Delta(f_t))$:

$$\begin{aligned} m_1(\Delta(f_t)) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(y, 4z^3 + x^2 + xy^2 + (a+t)y^4 + 2xz, J[x, y, 4z^3 + x^2 + xy^2 + (a+t)y^4 + 2xz])} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(y, 4z^3 + x^2 + xy^2 + (a+t)y^4 + 2xz, 12z^2 + 2x)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(4z^3 + 2xz, 12z^2 + 2x)} \\ &= 3 \\ &= m_1(\Delta(f_0)) \end{aligned}$$

O número de Milnor de $\Sigma(f_t) = 4z^3 + x^2 + xy^2 + (a+t)y^4 + 2xz = 0$:

$$\begin{aligned} \mu(\Sigma(f_t)) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(2x + y^2 + 2z, 2xy + 4(a+t)y^3, 12z^2 + 2x)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(-12z^2 + y^2 + 2z, -12z^3y + 4(a+t)y^3)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(-12z^2 + y^2 + 2z, y)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(-12z^2 + y^2 + 2z, -12z^2 + 4(a+t)y^2)} \\ &= 1 + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(-12z^2 + y^2 + 2z, (4(a+t) - 1)y^2 - 2z)} \\ &= 3, \text{ se } (a+t) \neq 0 \\ &= \mu(\Sigma(f_0)), (a+t) \neq 0 \end{aligned}$$

A multiplicidade $m_1(\Sigma(f_t))$: Como $\Sigma(f_t)$ é uma hipersuperfície com singularidade isolada, então

$$m_1(\Sigma(f_t)) = \mu^2(\Sigma(f_t)) + \mu^1(\Sigma(f_t))$$

escolhemos hiperplanos genéricos $H_1 = \{x = z = 0\}$ e $H_2 = \{y = 0\}$, daí,

$$\begin{aligned} m_1(\Sigma(f_t)) &= \mu^2(4z^3 + 2xz) + \mu^1(4x^2) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(12z^2 + 2x, 2z)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_1}{(8x)} \\ &= 2 \\ &= m_1(\Sigma(f_0)). \end{aligned}$$

Para calcularmos $m_1(D_1^2(f_t(\Sigma(f_t))))$: Precisamos encontrar o ideal que define a curva $D_1^2(f_t(\Sigma(f_t)))$ e usar a seguinte relação

$$m_1(D_1^2(f_t(\Sigma(f_t)))) = \mu(D_1^2(f_t(\Sigma(f_t)))) + m_0(D_1^2(f_t(\Sigma(f_t)))) - 1.$$

O ideal que define a curva de pontos duplos na fonte é $I_1^2(f_t|\Sigma(f_t)) = (x^2 + xy^2 + ty^4, 2z^2 + x)$, portanto, como a segunda componente deste ideal é regular, podemos considerar esta curva mergulhada em \mathbb{C}^2 , i.e, as seguintes igualdades são válidas:

$$\begin{aligned} \mu(D_1^2(f_t(\Sigma(f_t)))) &= \mu(x^2 + xy^2 + (a+t)y^4, 2z^2 + x) \\ &= \mu(4z^4 - 2z^2y^2 + (a+t)y^4) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(16z^3 - 4zy^2, -4z^2y + 4(a+t)y^3)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(z, -4z^2y + 4(a+t)y^3)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(16z^2 - 4y^2, -4z^2y + 4(a+t)y^3)} \\ &= 3 + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(16z^2 - 4y^2, -4z^2y + 4(a+t)y^3)} \\ &= 3 + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{((4z-2y)(4z+2y), -4z^2y + 4(a+t)y^3)} \\ &= 9, \text{ se } (a+t) \neq 0, 1/4 \\ &= \mu(D_1^2(f_0(\Sigma(f_0)))) , \text{ se } (a+t) \neq 0, 1/4. \end{aligned}$$

A multiplicidade $m_0(D_1^2(f_t(\Sigma(f_t))))$: Para calcular isto basta usar a definição da multiplicidade, isto é,

$$m_0(D_1^2(f_t(\Sigma(f_t)))) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(x^2 + xy^2 + (a+t)y^4, 2z^2 + x, y)} = 4.$$

Logo

$$m_1(D_1^2(f_t(\Sigma(f_t)))) = 12 = m_1(D_1^2(f_0(\Sigma(f_0)))) , \text{ se } (a+t) \neq 0, 1/4.$$

A multiplicidade $m_0(f_t(D_1^2(f_t(\Sigma(f_t))))$: Temos

$$2m_0(f_t(D_1^2(f_t(\Sigma(f_t)))) = e(I_1^2(f_t|\Sigma(f_t)), p \circ f_t)$$

onde $p : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ é uma projeção genérica linear. Como $(I_1^2(f_t|\Sigma(f_t)), p \circ f_t)$ é um ideal reduzido e $\mathcal{O}_{D_1^2(f_t(\Sigma(f_t)))}$ é Cohen Macaulay, então

$$e(I_1^2(f_t|\Sigma(f_t)), p \circ f_t) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}}{(I_1^2(f_t|\Sigma(f_t)), p \circ f_t)}.$$

Escolhendo $p(x, y, z) = y$ genérica,

$$e(I_1^2(f_t|\Sigma(f_t)), p \circ f_t) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(x^2 + xy^2 + (a+t)y^4, 2z^2 + x, y)} = 4.$$

Portanto,

$$m_0(f_t(D_1^2(f_t(\Sigma(f_t)))))) = 2 = m_0(f_0(D_1^2(f_0(\Sigma(f_0))))).$$

A multiplicidade de $f_t(\Sigma^{1,1}(f_t))$: O ideal que define o estrato $\Sigma^{1,1}(f_t)$ é $I^{1,1}(f_t) = (4z^3 + x^2 + xy^2 + (a+t)y^4 + 2xz, 12z^2 + 2x)$. Então

$$\begin{aligned} m_0(f_t(\Sigma^{1,1}(f_t))) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(I^{1,1}(f_t), p \circ f_t)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(4z^3 + x^2 + xy^2 + (a+t)y^4 + 2xz, 12z^2 + 2x, y)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(4z^3 + x^2 + 2xz, 12z^2 + 2x)} \\ &= 3 \\ &= m_0(f_0(\Sigma^{1,1}(f_0))). \end{aligned}$$

Calculamos da mesma maneira que na proposição anterior $\mu(\Sigma^{1,1}(f_t))$. Temos $\mu(\Sigma^{1,1}(f_t)) = 6$ para $(a+t) \neq 0$ e $\#A_3 = 3$ para $(a+t) \neq 0$. Então usando a relação do Teorema 5.2.5, temos $m_1(f_t(\Sigma^{1,1}(f_t))) = m_1(f_0(\Sigma^{1,1}(f_0))) = 3$ para $(a+t) \neq 0, 1/4$.

Concluimos, usando o Teorema 5.4.1, que a família F é Whitney equisingular para um t suficientemente pequeno e $a \neq 0, 1/4$.

Capítulo 7

Fórmulas de multiplicidades polares para germes quase-homogêneos de $\mathcal{O}(3, 3)$

7.1 Introdução

Embora as variedades polares e suas multiplicidades sejam uma ferramenta importante na teoria de singularidade ([12], [35] e [36]) ainda não ganharam um grande espaço nesta teoria. Isto pode ser devido ao fato que estas variedades e suas multiplicidades são defíceis para calculalos na prática.

Neste capítulo, mostramos que no caso de germes $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ de corank 1, quase-homogêneos e finitamente determinados, podemos obter fórmulas para as multiplicidades polares definidas sobre os tipos estáveis. Para isto precisamos de algumas definições.

Uma aplicação analítica $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, $f = (f_1, \dots, f_p)$, é dita *quase-homogênea*, se existem inteiros positivos w_1, w_2, \dots, w_n (os pesos) e inteiros positivos d_1, d_2, \dots, d_p , (os graus), tal que $f_i(\lambda^{w_1}x_1, \lambda^{w_2}x_2, \dots, \lambda^{w_n}x_n) = \lambda^{d_i}f_i(x)$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, p$.

Equivalentemente, para todo monômio $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ que aparece na expansão

de Taylor da i -ésima componente f_i de f , temos $\sum_{j=1}^n w_j \alpha_j = d_i$.

Uma aplicação f que define um espaço analítico que é I.C.I.S. é dita *semi quase-homogêneo* se

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_p) = (f_1^0 + f_1^1 + \dots, f_2^0 + f_2^1 + \dots, \dots, f_p^0 + f_p^1 + \dots)$$

onde f_i^0 são polinômios quase-homogêneos de menor grau em cada f_i e a aplicação $f^0 = (f_1^0, f_2^0, \dots, f_p^0)$ define um espaço analítico quase-homogêneo que também é I.C.I.S. com os mesmos pesos de f . O germe f^0 é chamado parte inicial de f .

Nas seguintes seções o simbolo $a \wedge b$ representa o número mínimo inteiro de a e b , ou seja, $a \wedge b = \begin{cases} \min(a, b) & \text{se } a, b \in \mathbb{Z} \\ a & \text{se } b \notin \mathbb{Z} \\ b & \text{se } a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

Observamos (ver as demonstrações) que nos teoremas abaixo um dos termos a ou b é inteiro, portanto $a \wedge b$ é inteiro.

7.2 Fórmulas para multiplicidades polares de $\Delta(f)$

Teorema 7.2.1. *Suponha que $f = (x, y, g(x, y, z)) \in \mathcal{O}(3, 3)$ é um germe finitamente determinado de corank 1, quase-homogêneo com pesos w_1, w_2, w_3 e seja d o grau de g . Então*

$$(1). m_1(\Delta(f)) = \frac{(d-w_3)(d-2w_3)}{w_1 \cdot w_3} \wedge \frac{(d-w_3)(d-2w_3)}{w_2 \cdot w_3},$$

$$(2). m_0(\Delta(f)) = \frac{(d-w_3)}{w_3},$$

$$(3). m_2(\Delta(f)) = \frac{(d-w_3)(d-2w_3)}{w_1 \cdot w_3} \wedge \frac{(d-w_3)(d-2w_3)}{w_2 \cdot w_3} + \frac{(d-w_3)(d-2w_3)(d-w_1-w_2-w_3)}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3}.$$

Demonstração: (1). Usando a relação do Teorema 5.2.3 temos

$$m_1(\Delta(f)) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(p_1 \circ f, J[f], J[p_2 \circ f, J[f]])} = \mu(p_1 \circ f, J[f], J[p_2 \circ f, J[f]]) + 1$$

onde $p_1 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ e $p_2 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ são projeções lineares genéricas.

Obviamente, sabemos que o ideal $(p_1 \circ f, J[f], J[p_2 \circ f, J[f]])$ não sempre é quase-homogêneo, mais pelo Teorema 5.1 em [15] temos que o número de Milnor de um espaço analítico semi quase-homogêneo que é I.C.I.S. é igual ao número de Milnor da parte inicial do espaço.

Então precisamos verificar que o ideal $(p_1 \circ f, J[f], J[p_2 \circ f, J[f]])$ é semi-quase-homogêneo.

Escrevemos $p_2(x, y, z) = (ax + by + cz, a_1x + a_2y + a_3z)$ genérica, onde a, b, c, a_1, a_2, a_3 constantes. Então,

$$J[p_2 \circ f, J[f]] = (aa_2 - ba_1)g_{zz} + (ca_1 - aa_3)g_{zy}g_z + (aa_3 - a_1c)g_yg_{zz} + \\ (ca_2 - ba_3)g_xg_{zz} + (ba_3 - a_2c)g_zg_{zx}.$$

Como p_2 é genérica, $(aa_2 - ba_1) \neq 0$ e pela definição w_1, w_2 e w_3 são uma combinação linear em \mathbb{C} do grau d . Então a parte inicial do ideal é

$$(x, J[f], (aa_2 - ba_1)g_{zz}) \text{ se } w_1 \leq w_2$$

ou

$$(x, J[f], (aa_2 - ba_1)g_{zz}) \text{ se } w_2 \leq w_1.$$

Estes ideais definem espaços que são I.C.I.S. e os graus respectivos de suas componentes são $w_1, (d - w_3), (d - 2w_3)$ e $w_2, (d - w_3), (d - 2w_3)$. O resultado segue agora do Teorema de Gert-Martin e Hamm ([15]).

(2). Esta fórmula foi obtido por Gert-Martin e Hamm em [15] quando as componentes de f tem o mesmo grau. Mas tal fórmula vale também no caso da hipótese do Teorema, isto segue usando a relação do Teorema 5.2.1.

(3). Usando os itens (1), (2) e o Teorema 5.2.3 para germes quase-homogêneos e encontrando o número de Milnor para a hipersuperfície $\Sigma(f)$, obtemos a fórmula para a multiplicidade polar $m_2(\Delta(f))$.

7.3 Fórmulas para multiplicidades polares de $f(\Sigma^{1,1}(f))$

Teorema 7.3.1. *Suponha que $f = (x, y, g(x, y, z)) \in \mathcal{O}(3, 3)$ é um germe finitamente determinado de corank 1, quase-homogêneo com pesos w_1, w_2, w_3 e seja d o grau de g . Então*

$$(1). \quad m_0(f(\Sigma^{1,1}(f))) = \frac{(d-w_3)(d-2w_3)}{w_1.w_3} \wedge \frac{(d-w_3)(d-2w_3)}{w_2.w_3},$$

$$(2). \quad m_1(f(\Sigma^{1,1}(f))) = \sum_{j=1}^2 \prod_{i=1}^3 \left(\frac{d_j}{w_i} - 1\right) \prod_{k=1, k \neq j}^2 \left(\frac{d_k}{d_j - d_k}\right) + \frac{(d-w_3)(d-2w_3)}{w_1.w_3} \wedge \frac{(d-w_3)(d-2w_3)}{w_2.w_3} - \left(\frac{w_1.w_2.w_3 + \prod_{j=1}^3 (d-jw_3)}{w_1.w_2.w_3}\right)$$

Demonstração: (1). Na demonstração do Teorema 5.2.5 obtivemos a seguinte igualdade

$$m_0(f(\Sigma^{1,1}(f))) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(I^{1,1}(f), p \circ f)}$$

onde $I^{1,1}(f)$ é o ideal que define a curva cuspidal $\Sigma^{1,1}(f)$ e p é uma projeção genérica linear. Como

$$I^{1,1}(f) = \left(\frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right),$$

obtemos

$$m_0(f(\Sigma^{1,1}(f))) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\left(\frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}, ax + by + cg\right)}.$$

Então temos os seguintes casos:

Se $w_1 < w_2$, a parte inicial do ideal $(\frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}, ax + by + cg)$, que é semi quase-homogêneo é $(\frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}, ax)$, para $a \neq 0$. Portanto

$$m_0(f(\Sigma^{1,1}(f))) = \frac{(d-w_3)(d-2w_3)}{w_2.w_3}.$$

Se $w_2 < w_1$, parte inicial do ideal $(\frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}, ax + by + cg)$ que é semi quase-homogêneo é $(\frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}, by)$, para $b \neq 0$. Portanto,

$$m_0(f(\Sigma^{1,1}(f))) = \frac{(d - w_3)(d - 2w_3)}{w_1 \cdot w_3}.$$

Juntando estas duas igualdades obtemos o resultado.

(2). Para encontrar a multiplicidade polar de $m_1(f(\Sigma^{1,1}(f)))$ usaremos a relação do Teorema 5.2.5, isto é,

$$\mu(\Sigma^{1,1}(f)) + m_0(f(\Sigma^{1,1}(f))) - 1 = m_1(f(\Sigma^{1,1}(f))) + \#A_3,$$

pois segundo esta relação basta encontrar o número de Milnor da curva cuspidal $\Sigma^{1,1}(f)$ e o número de swallowtail de f . Mas segundo os resultados de Gert-Martin e Hamm ([15]) e Marar-Montaldi-Ruas ([25]) estes números são dados por:

$$\mu(\Sigma^{1,1}(f)) = \sum_{j=1}^2 \prod_{i=1}^3 \left(\frac{d_j}{w_i} - 1 \right) \prod_{k=1, k \neq j}^2 \left(\frac{d_k}{d_j - d_k} \right),$$

onde $d_1 = d - w_3$ e $d_2 = d - 2w_3$,

$$\#A_3 = \frac{w_3^2}{w_1 \cdot w_2} \prod_{j=1}^3 \left(\frac{d}{w_3} - j \right).$$

e

$$\#A_1^3 = \frac{w_3^2}{6 \cdot w_1 \cdot w_2} \prod_{j=1}^5 \left(\frac{d}{w_3} - j \right).$$

Portanto, substituindo estes números e o item anterior na relação acima obtemos o resultado.

7.4 Fórmulas para multiplicidades polares de $f(D_1^2(f|\Sigma(f)))$

Nesta seção obtemos uma fórmula que relaciona as multiplicidades polares m_0 e m_1 de $f(D_1^2(f|\Sigma(f)))$ em termos dos pesos e graus de f .

Em virtude de termos que usar duas projeções diferentes, uma para definir $D_1^2(f|\Sigma(f))$ e outra para definir as variedades polares, não foi possível encontrar fórmulas independentes para cada multiplicidade, mais obtemos a diferença das multiplicidades polares m_0 e m_1 . Antes de dar esta fórmula daremos um corolário do Teorema 5.2.4.

Corolário 7.4.1. *Seja $f \in \mathcal{O}(3, 3)$ um germe de corank 1. Então*

$$2m_1(X) - 2m_0(X) = -3\#A_3 + 6\#A_1^3 + \mu(D^2(f|\Sigma(f))) - 1,$$

onde $X = f(D_1^2(f|\Sigma(f)))$

Demonstração: Para provar este corolário basta usar a Proposição A.0.4 do apêndice.

Com esta relação, as fórmulas dadas por Marar-Montaldi-Ruas ([25]) e a fórmula $\mu(D^2(f|\Sigma(f))) = 1 + \frac{(d-w_3)(d-2w_3)(d-3w_3)}{w_3w_1w_2}(3d - (8w_3 + w_1 + w_2))$ de Houston ([19]) obtemos a seguinte relação:

$$2m_1(X) - 2m_0(X) = \frac{\prod_{i=1}^3 (d - iw_3)}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3^3} (w_3(w_1 + w_2 - 9w_3) - d(d - 6w_3)).$$

Observação 7.4.1. *Se $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ é um germe de um espaço analítico de dimensão d que é I.C.I.S., então existem fórmulas para as multiplicidades polares calculadas como a \mathbb{C} -codimensão de uma álgebra associada a X , ver [13] Lema 3.1. Portanto quando os tipos estáveis são I.C.I.S. (que é o caso dos tipos na fonte para germes de corank 1) as fórmulas das multiplicidades polares são dadas em [13].*

7.5 Equisingularidade para germes quase-homogêneos

Podemos usar as relações dos teoremas anteriores e o Teorema 5.4.1 para obtermos o seguinte teorema sobre a Whitney equisingularidade para germes quase-

homogêneos.

Teorema 7.5.1. *Suponhamos que $f \in \mathcal{O}(3,3)$ é um germe finitamente determinado quase-homogêneo de corank 1 e seja $F = (t, f_t)$ um desdobramento bom a 1-parâmetro. Então F é Whitney equisingular ao longo de T se, e somente se, $m_1(\Delta(f_t)) = \frac{(d-2w_3)(d-w_3)}{\max\{w_1, w_2\} \cdot w_3}$, $\mu(\Sigma(f_t)) = \frac{(d-w_1-w_3)(d-w_2-w_3)(d-2w_3)}{w_1 w_2 w_3}$, $m_1(\Sigma(f_t))$, $m_0(\Sigma^{1,1}(f_t)) = \frac{(d-w_3)(d-2w_3)}{w_1 w_2} \wedge \frac{(d-w_3)(d-2w_3)}{w_1 w_3} \wedge \frac{(d-w_3)(d-2w_3)}{w_2 w_3}$, $m_0(f_t(D_1^2(f_t)|\Sigma(f_t)))$ e $m_1(D_1^2(f_t)|\Sigma(f_t))$, são constantes perto da origem.*

7.6 Invariantes para germes simples de $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$

Nesta seção calculamos as variedades polares absolutas dos discriminantes de germes simples de aplicações $f \in \mathcal{O}(3,3)$ e suas respectivas multiplicidades polares.

Exemplo 7.6.1. *Seja $f(x, y, z) = (x, y, z^4 + xz + yz^2)$. Uma parametrização do discriminante de f é dada por $\phi(y, z) = (-4z^3 - 2zy, y, -3z^4 + z^2y)$. Como f restrito ao conjunto de pontos críticos é uma aplicação bimeromorfa, então para calcular a variedade polar $P_1(\Delta(f))$ de $\Delta(f)$ basta encontrar o conjunto de pontos críticos de $p \circ \phi$ denotado por $\Sigma(p \circ \phi)$ onde p é uma projeção linear genérica de $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$, definida por $p(x, y, z) = (ax + by + cz, a_1x + b_1y + c_1z)$, para algumas constantes (a, b, c, a_1, b_1, c_1) em \mathbb{C} .*

Então $\Sigma(p \circ \phi) = 12(a_1c - ac_1)z^4 + 2(ac_1 - a_1c)z^2y + 12(b_1a - a_1b)z^2 + 2(ba_1 - b_1a)y + 12(b_1c - bc_1)z^3 + 2(bc_1 - b_1c)zy$.

Como p é genérica, as constantes $(ba_1 - b_1a)$ e $(b_1a - a_1b)$ são não nulas. Localmente o conjunto de pontos críticos de $p \circ \phi$ é uma curva regular em $\Sigma(f)$. A imagem desta curva em $\Delta(f)$ é dada por $\tilde{\phi}(z) = (-2z^3, 6z^2, -3z^4)$, que é uma interseção completa em \mathbb{C}^3 definida pelo ideal $I = (y^2 - z, x^2 - yz)$, esta curva define a variedade polar absoluta $P_1(\Delta(f)) = V(y^2 - z, x^2 - yz)$ em $\Delta(f)$.

A variedade polar $P_0(\Delta(f))$ é $\Delta(f)$ pela definição e a variedade polar $P_2(\Delta(f))$ é vazia (ver na Figura 7.1).

Podemos calcular agora as multiplicidades destas variedades:

$$\begin{aligned}
m_0(P_0(\Delta(f))) &= m_0(\Delta(f)) = 3 \\
m_0(P_1(\Delta(f))) &= m_1(\Delta(f)) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(y^2 - z, x^2 - yz, y)} = 2 \\
m_0(P_2(\Delta(f))) &= m_2(\Delta(f)) = 0
\end{aligned}$$

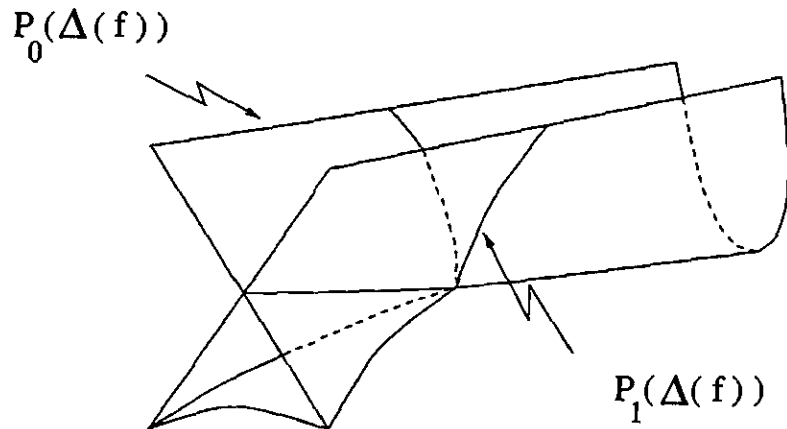


Figura 7.1: Variedades polares absolutas da swallowtail

Usando as fórmulas obtidas neste capítulo e as relações do capítulo 5 calculamos as multiplicidades polares dos discriminantes dos germes simples em [26].

Proposição 7.6.1. *As multiplicidades polares de $\Delta(f)$, para f germe simples em [26], são as seguintes:*

<i>Forma Normal</i>	$\delta(f)$	$m_0(\Delta(f))$	$m_1(\Delta(f))$	$m_2(\Delta(f))$
(x, y, z^2)	2	1	0	0
$(x, y, z^3 + (x^2 + y^{k+1})z)$	3	2	2	$k + 1$
$(x, y, z^3 + (x^2y + y^{k-1})z)$	3	2	$k - 1$	$2k - 2$
$(x, y, z^3 + (x^3 + y^4)z)$	3	2	3	8
$(x, y, z^3 + (x^3 + xy^3)z)$	3	2	3	9
$(x, y, z^3 + (x^3 + y^5)z)$	3	2	3	10
$(x, y, z^4 + xz + y^kz^2)$	4	3	2	0
$(x, y, z^4 + (y^2 + x^k)z + xz^2)$	4	3	4	3
$(x, y, z^5 + xz + yz^2)$	5	4	3	0
$(x, y, z^5 + xz + y^2z^2 + yz^3)$	5	4	3	0
$(x, y, z^5 + xz + yz^3)$	5	4	3	0

Demonstração: Para os germes que não são quase-homogêneos, os invariantes são calculados da seguinte maneira. Seja $f(x, y, z) = (x, y, z^4 + (y^2 + x^k)z + xz^2)$. O conjunto de pontos críticos de f é dado por $4z^3 + (y^2 + x^k)z + 2xz$, então a multiplicidade polar $m_1(\Delta(f))$ do discriminante de f é igual a $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(p_1 \circ f, J[f], J[p_2 \circ f, J[f]])}$ onde $p_2 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ e $p_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ são projeções genéricas.

Tomando $p_1 = x$ e $p_2 = (x, y)$, $m_1(\Delta(f)) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(p_1 \circ f, 4z^3 + (y^2 + x^k)z + 2xz, 12z^2 + 2x)} = 4$.

Como $\delta(f) - 1 = m_0(\Delta(f))$ (ver no capítulo 5), $m_0(\Delta(f)) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(x, y, z^4 + (y^2 + x^k)z + xz^2)} - 1 = 3$. Agora usando $\mu(\Sigma(f)) = 1$ e a relação de Teorema 5.2.3 calculamos $m_2(\Delta(f)) = 3$.

Da mesma maneira para calcular as multiplicidades polares da curva cuspidal edge $f(\Sigma^{1,1}(f))$ dos germes na tabela acima, usamos as fórmulas obtidas neste capítulo e as relações do capítulo 5.

Proposição 7.6.2. *As multiplicidades polares de $f(\Sigma^{1,1}(f))$, para f germe simples acima, são os seguintes:*

<i>Forma Normal</i>	$\mu(\Sigma^{1,1}(f))$	$m_0(f(\Sigma^{1,1}(f)))$	$m_1(f(\Sigma^{1,1}(f)))$
(x, y, z^2)	—	—	—
$(x, y, z^3 + (x^2 + y^{k+1})z)$	k	2	$k + 1$
$(x, y, z^3 + (x^2y + y^{k-1})z)$	k	$k - 1$	$2k - 2$
$(x, y, z^3 + (x^3 + y^4)z)$	6	3	8
$(x, y, z^3 + (x^3 + xy^3)z)$	7	3	9
$(x, y, z^3 + (x^3 + y^5)z)$	8	3	10
$(x, y, z^4 + xz + y^kz^2)$	$k - 1$	2	0
$(x, y, z^4 + (y^2 + x^k)z + xz^2)$	2	4	3
$(x, y, z^5 + xz + yz^2)$	0	3	0
$(x, y, z^5 + xz + y^2z^2 + yz^3)$	1	3	0
$(x, y, z^5 + xz + yz^3)$	1	3	0

Demonstração: Para os germes que não são quase-homogêneos as multiplicidades $m_0(f(\Sigma^{1,1}(f)))$ e $m_1(f(\Sigma^{1,1}(f)))$ são calculadas da seguinte maneira. Seja $f(x, y, z) = (x, y, z^5 + xz + y^2z^2 + yz^3)$. Como $\Sigma^{1,1}(f)$ é definido por o ideal $(5z^4 + x + 2y^2z + 3yz^2, 20z^3 + 2y^2 + 3yz)$, então $\mu(\Sigma^{1,1}(f)) = 1$ (isto pode ser calculado usando a fórmula de número de Milnor para espaços analíticos que são I.C.I.S. dada no capítulo 2). Agora pela demonstração do Teorema 5.2.5

$$m_0(f(\Sigma^{1,1}(f))) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(5z^4 + x + 2y^2z + 3yz^2, 20z^3 + 2y^2 + 3yz, y)} = 3.$$

Portanto usando a relação do Teorema 5.2.5 calculamos $m_2(f(\Sigma^{1,1}(f))) = 0$.

7.7 Conclusão

7.7.1 Considerações gerais

Os invariantes são ferramentas úteis pois eles têm uma interpretação algébrica (que permite calculá-los) e uma interpretação geométrica (que permite visualizá-los). Dentre as diversas abordagens existentes o uso e o cálculo de invariantes é uma opção cada vez mais considerada para o estudo da topologia de espaços analíticos complexos.

Por tratar-se de uma área recente, a sedimentação dos conceitos sobre equisingularidade requer ainda pesquisa teórica para aplicações futuras.

Com a diminuição do número de invariantes a ser calculado, o trabalho desta tese contribui para uma pesquisa futura sobre a classificação de germes de aplicações de $\mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^3, 0$ facilitando a comparação entre estes germes e também para um melhor entendimento da relação entre a topologia de deformações de germes e equisingularidade de espaços analíticos.

7.7.2 Sugestões de trabalhos futuros

As sub-áreas estudadas neste trabalho, Whitney equisingularidade e trivialidade topológica de espaços analíticos complexos e germes de aplicações, compõe-se de um terreno fértil para o desenvolvimento de novos resultados.

Para se estudar problemas semelhantes em outras dimensões, a aplicação das técnicas discutidas neste trabalho é fundamental, embora estas não sejam as únicas. Por exemplo, pode-se estudar os “números de Lê” [27] e procurar o relacionamento entre estes números e qualquer critério de equisingularidade.

Pretendemos investigar os seguintes problemas:

- (1) *Condições geométricas para \mathcal{A} -determinação finita de germes de $\mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^3, 0$. (Ver em [9] para $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ e [30] para $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$)*

- (2) *Condições para \mathcal{A} -determinação finita de germes quase-homogêneos de $\mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^3, 0$. (Ver em [10] para $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$)*
- (3) *Multiplicidades polares e equisingularidade de germes de aplicações de $\mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$.*
- (4) *Multiplicidades polares e equisingularidade de germes de aplicações de $\mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^4, 0$.*
- (5) *Fórmulas para as multiplicidades polares associadas aos germes quase-homogêneos $f : \mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$, $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^3, 0$ e $f : \mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^4, 0$ em termos dos pesos e graus de f .*
- (6) *Estudar os números de Lê ([27]) e relacionar com alguns dos critérios de equisingularidade.*

Apêndice A

Resultados e definições algébricas

Daremos algumas definições e resultados sobre germes de aplicações holomorfas e germes finitamente determinados.

Definição A.0.1. *Uma aplicação contínua de espaços analíticos X e Y $f : X \rightarrow Y$ é chamada holomorfa se para todo $x \in X$ e $h \in \mathcal{O}_{Y, f(x)}$ temos que $h \circ f \in \mathcal{O}_{X, x}$.*

Isto significa que para qualquer aberto $V \ni x$ contido em Y e qualquer função regular $h \in \mathcal{O}_{Y, f(x)}$ $h \circ f : f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{C}$ é regular. A aplicação $f : X \rightarrow Y$ é biholomorfa se f é um homeomorfismo e injetiva. A aplicação de espaços analíticos $f : X \rightarrow Y$ é dita bimeromorfa se existem aplicações biholomorfas $h : Y \rightarrow X$ tal que $h \circ f$ é a identidade em X e $g : X \rightarrow Y$ tal que $f \circ g$ é a identidade em Y . Se X e Y são espaços analíticos irredutíveis então f é dita bimeomorfa se existem Zarisk-fechados $A \subset X$ e $B \subset Y$ tal que $f : (X - A) \rightarrow (Y - B)$ é biholomorfa.

Teorema A.0.1. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação bimeromorfa e finita entre espaços analíticos, e $I \subset \mathcal{O}_{X, x}$ um ideal primário para o ideal máximo, então $I\mathcal{O}_X$ decompõe-se sobre $\mathcal{O}_{X, f^{-1}(y)} = \prod_{x \in f^{-1}(y)} \mathcal{O}_{X, x}$ em ideais primários I'_x e satisfaz a igualdade*

$$e(I) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} e(I'_x).$$

Esta propriedade é importante, pois ela significa que as multiplicidade de uma variedade Y é igual à multiplicidade da variedade X se elas são bimeromorfas.

Definição A.0.2. (Espço Reduzido): *Seja $X \subset \mathbb{C}^n$ espaço analítico. Dizemos que X é um espaço analítico reduzido se o anel local \mathcal{O}_X é reduzido, i.e. se \mathcal{O}_X não tem elementos nilpotentes diferentes do elemento nulo 0.*

Observe que \mathcal{O}_X é um anel reduzido se, e somente se, o ideal que define X é um ideal radical.

Aneis de Cohen Macauley: Uma sequência de elementos a_1, \dots, a_d de um anel A é dita regular se o ideal I gerado por (a_1, \dots, a_d) é um ideal próprio de A e a imagem de a_i em $A/(a_1, \dots, a_{i-1})$ não é um divisor de zero para $i = 1, \dots, d$.

A profundidade $depth(A)$ do anel local A é a longitude máxima de uma sequência regular em seu ideal máximo m de A .

Qualquer sequência regular máxima no ideal máximo tem $depth(A)$ elementos. Em geral $depth(A) \leq dim(A)$.

Quando $depth(A) = dim(A)$, A é chamado Cohen Macaulay.

Uma das principais caracterizações de aneis de Cohen Macaulay em termos de multiplicidade é a seguinte:

Proposição A.0.1. ([8]): *Suponha que \mathcal{O}_X é um anel local Noetheriano de corpo residual infinito, que é Cohen Macauley e I é um ideal em \mathcal{O}_X de colongitude finita. Então*

$$e(I) \geq \log \frac{\mathcal{O}_X}{I},$$

com a igualdade se, e somente se, I pode ser gerado por uma sequência regular.

Definição A.0.3. (Interseção completa): *Um espaço analítico $X \subset \mathbb{C}^n$ de dimensão d é dito de interseção completa se o ideal associado a X é gerado por $n-d$ elementos. Isto significa que os geradores deste ideal formam uma sequência regular.*

Definição A.0.4. $f \in \mathcal{O}(n, p)$ é um germe genérico, se J é um germe analítico próprio, $\Sigma(f)$ é um germe de uma variedade analítica normal, e existe um Z -aberto U não vazio tal que $f : \Sigma(f) \cap U$ é uma imersão 1-1 e $j^1(f)|_U$ é transversal a Σ^1 .

Obsevamos que todo germe $f \in \mathcal{O}(n, n)$ finitamente determinado com $n > 2$ é genérico ([11]).

Proposição A.0.2. ([11]): Se $f \in \mathcal{O}(n, n)$ é um germe genérico, então $J[f] = I(\Sigma(f))$, $\det(Tf)$ é irredutível, $f : \Sigma(f) \rightarrow f(\Sigma(f))$ é bimeomorfa.

O lema abaixo relaciona o grau de uma projeção com a multiplicidade algébrica $e_x(\cdot)$.

Lema A.0.1. Seja $X^d \subset \mathbb{C}^n$ uma variedade analítica e seja a projeção $\Pi : X^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ com $\Pi(x) = 0$ e $\ker(\Pi) \cap C_x(X) = \{0\}$ com Π definida pelas funções (t_1, \dots, t_r) . Então $m_x(X^d) = \text{grau}(\Pi|X^d) = e_x((t_1, \dots, t_r))$, onde $x \in X$

Demonstração: Ver o livro de Mumford [32] pg. 121.

Observemos que cada variedade polar satisfaz as hipóteses do lema anterior (Teissier [37]).

Proposição A.0.3. Suponha que \mathcal{O}_X é um anel local Noetheriano sobre um corpo infinito e I é um ideal em \mathcal{O}_X de colongitude finita. Então existem elementos a_1, \dots, a_n em I onde $n = \dim \mathcal{O}_X$ tal que $e((a_1, \dots, a_n)) = e(I)$

Demonstração: Ver [46] pg. 294.

As Proposições A.0.1, A.0.3, o Lema A.0.1 e o Teorema A.0.1 são usados para trazer os cálculos da meta para cálculos da fonte e os cálculos de desdobramentos versais a cálculos de germes. A proposição A.0.3 e Lema A.0.1 afirmam a existência de projeções onde o grau da projeção é igual à multiplicidade.

A seguir damos uma das ferramentas principais para encontrar relações de invariantes para espaços analíticos que são I.C.I.S..

Teorema A.0.2. (Lê-Greuel): *Seja X_1 um espaço I.C.I.S. em $0 \in \mathbb{C}^n$; seja X também uma I.C.I.S. definida em X_1 por $f_k = 0$, e sejam f_1, \dots, f_{k-1} geradores do ideal que define X_1 em $0 \in \mathbb{C}^n$. Então*

$$\mu(X_1, 0) + \mu(X, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{(f_1, \dots, f_{k-1}, J(f_1, \dots, f_k))}.$$

Demonstração: Ver [20].

Corolário A.0.1.

$$\mu(X, 0) = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{(f_1, \dots, f_{k-j}, J(f_1, \dots, f_{k-j+1}))} + (-1)^{k+1} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J(f_1)}.$$

Onde f_1, \dots, f_j definem uma I.C.I.S. para cada j .

Teorema A.0.3. *Seja $f : (\mathbb{C}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ um germe que define uma I.C.I.S.. Então $\mu(X_0, 0) = \text{grau}(f) - 1$, onde o grau de f é definido por a \mathbb{C} -codimensão de $\frac{\mathcal{O}_k}{(f_1, \dots, f_k)\mathcal{O}_k}$, denotado também por $\delta(f)$.*

Demonstração: Ver Teorema 5.12 em [22].

Teorema A.0.4. (Houston, [19]): *Se $f \in \mathcal{O}(3, 3)$ é um germe finitamente determinado de corank 1, então*

$$\mu_{\Delta}(f) = \mu(\Sigma(f)) + \frac{1}{2}(\mu(D_1^2(f|\Sigma(f))) + \#A_3 - 1) - \#A_1A_2 - 2\#A_1^3$$

Proposição A.0.4. (Houston, [19]): *Se $f \in \mathcal{O}(3, 3)$ germe finitamente determinado de corank 1. Então*

$$\mu(D_1^2(f|\Sigma(f))) = \mu(D^2(f)) + 2\#A_1A_2 + 6\#A_1^3$$

Observação A.0.1. ([7]) *Seja $f \in \mathcal{O}(3, 3)$ é um germe finitamente determinado quase-homogêneo de corank 1. Então*

$$\mathcal{A}_e - \text{codim}(f) = \mu_{\Delta}(f).$$

Com este resultado obtemos que se $f \in \mathcal{O}(3, 3)$ é germe finitamente determinado quase-homogêneo, então $\#A_3$, $\#A_1A_2$ e $\#A_1^3$ são finitos.

Em geral uma questão aberta é a seguinte:

Se $\#A_3$, $\#A_1A_2$ e $\#A_1^3$ são finitos, então o germe $f \in \mathcal{O}(3,3)$ é finitamente determinado ?

Referências Bibliográficas

- [1] J. Briançon and J. P. Speder: *La trivalité topologique n'implique pas les conditions de Whitney*, C.R. Acad. Sc., Paris, **280** (1975) 365-367.
- [2] J. Briançon and J. P. Speder: *Les conditions de Whitney impliquent μ^* constant*, Ann. Int. Fourier **26** (1976) 153-163.
- [3] R.O. Buchweitz and G.-M. Greuel: *The Milnor number and deformations of complex curve singularities*, Invent. Math. **58** (1980) 241-281.
- [4] J.W. Bruce, A.A. du Plessis, C.T.C. Wall: *Determinacy and unipotency*, Invent. Math. **88** (1987) 521-554.
- [5] A. A. du Plessis: *On the genericity of topologically finitely-determined map-germs*. Topology, **21** (1982) 131-156.
- [6] A. A. du Plessis and F. Tari: *A-Classification of map germs*. Unpublished.
- [7] J. Damon and D. Mond: *A-codimensão and vanishing topology of discriminants*. Invent. Math., **106** (1991) 217-242.
- [8] W. Fulton: *Intersection theory*, Springer Verlag (1984) Berlin.
- [9] T. Gaffney and D.M.Q. Mond: *Cusps and double folds germs of analytic maps $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$* , J. London Math. Soc. (2) **43** (1991) 185-192.
- [10] T. Gaffney and D.M.Q. Mond: *Weighted homogeneous maps from the plane to plane*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **109** (1991) 451-470.

- [11] T. Gaffney: *Properties of finitely determined germs*. PhD. Thesis, Brandeis University (1975).
- [12] T. Gaffney: *Polar multiplicities and equisingularity of map germs*. *Topology* vol.32 No.1 (1993) 185-223.
- [13] T. Gaffney: *Multiplicities and equisingularity of I.C.I.S. germs*, *Invent. Math.* **123** (1996) 209-220.
- [14] G.M. Greuel: *Der Gauss-Manin zusammenhang isolierter singularitäten von vollständigen Durch-Schnitten*. Dissertation Gottingen (1973).
- [15] G.M. Greuel and H.A. Hamm: *Invarianten quasihomogener vollständiger durchschnitte*, *Invent. Math.* **49** (1978) 67-86.
- [16] V. Goryunov: *Semi-simplicial resolutions and homology of images and driscriminants of mappings*. *Proc. London Math. Soc.* **3**, **70** (1995) 363-385.
- [17] R.C. Gunning: *Lectures on complex analitic varieties: the local parametrization theorem*, Princeton University of Tokyo Press, 1970.
- [18] J.P.G. Henry, M. Merle and C. Sabbah: *Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe*, *Annales E. N. S.* **17**, **2** (1984) 227-268.
- [19] K. Houston: *Generalised image and discriminant Milnor numbers for corank 1 mappings*. Preprint, 1998.
- [20] Lê Dũng Tráng: *Calculation of Milnor number of isolated singularity of complete intersection*. *Funktsional' ny: Analizi Ego Prilozheniya*. vol.8, no. 2 (1974) 45-49.
- [21] Lê Dũng Tráng and C. P. Ramanujam: *The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type*, *Amer. J. Math.* **98** (1976) 67-78.

- [22] E.J.N. Looijenga: *Isolated singular points on complete intersections*, London Mathematical Soc. Lecture Note Series **77**, Cambridge University Press, 1984.
- [23] J. Mather: *Stratifications and mappings*, in: *Dynamical Systems*, Academic Press. 1970; also: *Topological Stability*, Harvard U.P. 1970.
- [24] J. Mather: *Stability of C^∞ mappings: IV classification of stable germs by \mathbb{R} algebras*, Publ. math. IMES, **37** (1970) 223-255.
- [25] W.L. Marar, J.A. Montaldi and M.A.S. Ruas: *Multiplicities of zero schemes in quasi homogeneous corank 1 singularities*. Preprint 1998.
- [26] W.L. Marar and F. Tari: *On the geometry of simple germs of corank 1 maps from $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$* . Proc. Camb. Phil. Soc. **119** (1996) 469-481.
- [27] D.B. Massey: *Lê cycles and hypersurface singularities*, Lecture Notes in Mathematics, **1615**, Springer-Verlag 1995.
- [28] J. Martinet, *Singularities of smooth functions and maps*. LMS Lecture Notes **58**, Cambridge University Press, 1982.
- [29] J. Milnor: *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals of Math. Studies, no.77, P.U.P., 1968.
- [30] D. Mond: *Some remarks on the geometry and classification of germs of maps from surfaces to 3-space*. Topology **26** (1987) 361-383.
- [31] D. Mond and R. Pellikann: *Fitting ideals and Multiple points of analytic mappings in algebraic geometry and complex analysis, Patzcuaro 1987*, E. Ramirez de Arellano (Ed.) Springer Lectures Math. **1414** (1989) 107-161.
- [32] D. Mumford: *Algebraic geometry I, Complex projective varieties*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1976.
- [33] J.H. Rieger: *Families of maps from the plane to the plane*. Journal of the London Math. Soc. (2). **36** (1987) 351-369.

- [34] M.A.S. Ruas: *On the equisingularity of families of corank 1*, Contemporary Mathematics vol. **161** (1994) 113-121.
- [35] B. Teissier: *Cycles évanescents sections planes et conditions de Whitney*, Singularités à Cargèse, 1972 Asterisques 47-84 (1973).
- [36] B. Teissier: *Variétés polaires 2: Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney*. Actes de la conférence de géométrie algébrique à la Rábida, Springer Lecture Notes 961 (1981) 314-491.
- [37] B. Teissier: *Varietades polares I: Invariants polares des singularites de hypersurfaces*, Inventiones Math., **40**, 3 (1977) 267-292.
- [38] B. Teissier: *Introduction to equisingularity problems*, Proc. A.M.S. Symp. in Pure Math., No. **29**, Arcata (1975) 593-631.
- [39] J.G. Timourian: *The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological triviality*, Amer. J. of Math. **99** (1977) 436-466.
- [40] R. Thom: *Exemples et morphismes stratifiés*, Bulletin A.M.S. **75**, 2 (1969).
- [41] C.T.C. Wall: *Finite determinacy of smooth map-germs*, Bull. London Math. Soc. **13** (1981) 481-539.
- [42] O. Zariski: *Studies in equisingularity I*, Amer. J. Math. **87** (1965) 507-536.
- [43] O. Zariski: *Studies in equisingularity II*, Amer. J. Math. **87** (1965) 972-1006.
- [44] O. Zariski: *Studies in equisingularity III*, Amer. J. Math. **90** (1968) 961-1023.
- [45] O. Zariski: *Open questions in theory of singularities*, Bull. AMS **77** (1971) 481-491.
- [46] O. Zariski and P. Samuel: *Comutativa algebra*. Van Nostrand, New York (1958).