I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

INSTITUTO BIBLIOTECA TICAS - S. Carlos -

GRUPOS DE LIE EM ESPAÇOS DE BANACH

Luiz Fernandes Galante

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

CAMPUS DE SÃO CARLOS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS
BIBLIOTECA
S. Carlos

GRUPOS DE LIE EM ESPAÇOS DE BANACH

Luiz Fernandes Galante

ORIENTADOR:
Prof. Dr. Domingos Pisanelli

Dissertação Apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do Título de "Mestre em Matemática".

SÃO CARLOS
1977

Class. - T
Cutt. - G 146g
e. 2
Tombo -

À meus pais, esposa
e filhos.

LIE GROUPS IN BANACH SPACES

S U M M A R Y

LUIZ FERNANDES GALANTE Adviser Prof. Dr. Domingos Pisanelli

In this work we present the study Lie groups defined in open subsets of one Banach Spaces.

The theory is developed by the method of differential equations which is based on the formulation of Frobenius theorem due to Pisanelli |5|.

The fundamental connexions between Lie groups and Lie algebras, Lie subgroups and Lie subalgebras, are presented.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Domingos Pisanelli, pela orientação segura e pelo incentivo constante dedicados à minha iniciação em pesquisa.

À direção do IPEA de Presidente Prudente, pelo apoio concedido.

Ao Professor Ivo Machado da Costa, pelo companheirismo e pelas valiosas discussões.

Aos colegas do Departamento de Matemática do IPEA de Presidente Prudente, pelas colaborações prestadas.

A todos aqueles que de alguma forma contribuiram para a feitura deste trabalho.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES HOLOMORFAS DE VÁRIAS VARIÁVEIS.

§ 1 - Funções holomorfas de várias variáveis complexas a valores num espaço de Banach 1

§ 2 - Fórmulas de Cauchy e desigualdade de Cauchy 3

§ 3 - Série de Taylor 5

CAPÍTULO II - FUNÇÕES ANALÍTICAS EM ESPAÇOS DE BANACH.

§ 1 - Funções G-analíticas 6

§ 2 - Desigualdades fundamentais 22

§ 3 - Definições equivalentes de função analítica em espaços de Banach 27

§ 4 - O teorema da função inversa 32

CAPÍTULO III- O TEOREMA DE FROBENIUS.

§ 1 - Diferenciais com acréscimos variáveis 37

§ 2 - Desigualdade fundamental para G-diferenciais sucessivas 43

§ 3 - Teorema de Frobenius 49

§ 4 - Dependência das condições iniciais 56

CAPÍTULO IV - GRUPOS E ÁLGEBRAS DE LIE.

§ 1 - Preliminares sobre grupos topológicos e grupos topológicos locais 62

§ 2 - Grupos de Lie e grupos de Lie locais em um espaço de Bonach 75

§ 3 - Álgebras e subalgebras de Lie-Ideais 79

§ 4 - Transformações infinitesimais 81

§ 5 - Transformações infinitesimais e equação de Lie de um grupo de Lie local 87

§ 6 - Construção de um grupo de Lie local a partir de uma transformação infinitesimal 91

§ 7 - Subgrupos a um parâmetro de um grupo de Lie local 95

§ 8 - Função exponencial - grupos de Lie locais canônicos 99

§ 9 - A álgebra de Lie de um grupo de Lie local 109

§ 10- Construção de um grupo de Lie canônico a partir de uma álgebra de Lie 118

CAPÍTULO V - SUBGRUPOS DE UM GRUPO DE LIE

§ 1 - Variedades Analíticas 125

§ 2 - Subgrupos e subálgebras de Lie 131

§ 3 - A subálgebra de Lie associado a um subgrupo de Lie 134

§ 4 - Caracterização dos subgrupos de Lie conexos 135

§ 5 - Caracterização dos subgrupos de Lie normais conexos 148

BIBLIOGRAFIA 157

INTRODUÇÃO

O objetivo do presente trabalho é estudar os grupos de Lie definidos em subconjuntos abertos de um espaço de Banach. Tais grupos de Lie pertencem à categoria mais geral dos grupos de Lie locais, por esta razão a abordagem é feita quase sempre em termos de grupos locais.

O estudo é feito segundo o método das equações diferenciais, o qual está estruturado basicamente na formulação do teorema de Frobenius dada por D. Pisanelli em |5|.

Tal método tem a vantagem de possibilitar generalizações da teoria nos contextos dos espaços localmente convexas e das escalas de Banach.

O presente trabalho está baseado em um curso ministrado pelo professor Dr. Domingos Pisanelli, em 1975, no IMEUSP, e também no excelente artigo de B. Maissen |8|.

Nos capítulos I, II e III, desenvolvemos o necessário sobre analiticidade e equações diferenciais em espaços de Banach para a compreensão do que se segue.

O primeiro capítulo contém, em estilo expositório, o mínimo sobre funções holomorfas de várias variáveis a valores num espaço de Banach.

No capítulo II desenvolvemos a teoria das funções analíticas em espaços de Banach, seguindo o exposto em Hille (|4|), Pisanelli (|5|) e Alexander (|3|).

No capítulo III demonstramos o teorema de Frobenius em espaços de Banach. A demonstração aqui apresentada, de

vida a D. Pisanelli (|5|), é surpreendente pelo fato de exibir explicitamente a solução por uma série de polinômios homogêneos, os quais dependem somente do segundo membro da equação e das condições iniciais.

No capítulo IV iniciamos propriamente o estudo dos grupos de Lie via transformações infinitesimais e teorema de Frobenius. A função exponencial e o relacionamento entre grupos e álgebra de Lie são estudadas neste capítulo.

No capítulo V estudamos o relacionamento entre subgrupos e subalgebras de Lie. Uma caracterização dos subgrupos de Lie normais conexos em termos de ideais é apresentada no final deste capítulo.

CAPITULO I

PROPRIEDADES BÁSICAS DAS FUNÇÕES HOLOMORFAS DE VÁRIAS VARIÁVEIS.

§ 1 - Funções holomorfas de várias variáveis complexas a valores num espaço de Banach.

DEFINIÇÃO 1.1

Dados um ponto $a = (a_1, \ldots, a_n) \in C^n$ e numeros reais r_j $(1 \leq j \leq n)$, chamaremos o conjunto:

$$P = \{(z_1, \ldots, z_n) \in C^n \,/\, |z_j - a_j| < r_j \ (1 \leq j \leq n)\}$$

de polidisco aberto de centro em a e raio r_j $(1 \leq j \leq n)$ (|1|, pág. 193).

DEFINIÇÃO 2.1

Dizemos que uma função f definida em um aberto Ω do C^n a valores num espaço de Banach X é holomorfa em Ω se, correspondendo a cada $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$, existir um polidisco aberto P com centro em a e raio r_j $(1 \leq j \leq n)$, e uma série de potencias,

$$\sum_{m_1,\ldots,m_n \geq 0} b_{m_1\ldots m_n} (\alpha_1 - a_1)^{m_1} \ldots (\alpha_n - a_n)^{m_n}$$

absolutamente convergente em P, convergindo para f(z) em P. (|1|, pág.197).

<u>Teorema 1.1</u> (Hartogs)

Uma função f definida num aberto Ω do C^n a valores num espaço de Banach X é holomorfa em Ω se, e somente se, for holomorfa separadamente em cada variável.

§ 2 - Fórmulas de Cauchy e Desigualdade de Cauchy

TEOREMA 2.1

Seja f uma função holomorfa definida em um aberto Ω do C^n a valores num espaço de Banach X. Se P é um polidisco fechado, com centro em $w = (w_1,\ldots,w_n) \in C^n$ e raio r_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ contido em Ω, tem-se:

$$\text{a)}\quad f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n} \frac{f(t)\, dt_1 \ldots dt_n}{(t_1 - z_1)\ldots(t_n - z_n)}$$

para todo $z = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathring{P}$, onde Γ_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ é a circunferência de centro em w e raio r_j.

b) Para quaisquer inteiros $m_1,\ldots,m_n > 0$ e $z \in \mathring{P}$, existe $\dfrac{\partial^{m_1+\ldots+m_n}}{\partial z_1^{m_1}\ldots\partial z_n^{m_n}} f(z)$, é holomorfa, independente da ordem de diferenciação, e vale a igualdade:

$$\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_n}}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}} f(z) =$$

$$= \frac{m_1! \ldots m_n!}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n} \frac{f(t)\, dt_1 \ldots dt_n}{(t_1 - z_1)^{m_1+1} \ldots (t_n - z_n)^{m_n+1}}$$

onde Γ_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ tem o mesmo significado anterior ($|1|$, pág. 221).

TEOREMA 3.1

Com as notações do teorema anterior, tem-se

$$\left| \frac{1}{m_1! \ldots m_n!} \frac{\partial^{m_1 + \ldots + m_n}}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}} f(z) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{r_1^{m_1} \ldots r_n^{m_n}} ,$$

para todo $z \in P$, onde $M = \sup_{t \in \Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n} |f(t)|$

§ 3 - Série de Taylor

TEOREMA 4.1

Com as notações do teorema 2.1 tem-se:

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) =$$

$$\sum_{m\geq 0} \sum_{m_1+\ldots+m_n=m} \frac{1}{m_1!\ldots m_n!} \left\{ \frac{\partial^m f(z)}{\partial z_1^{m_1}\ldots\partial z_n^{m_n}} \right\}_{z=w} (z_1-w_1)^{m_1}\ldots(z_n-w_n)^{m_n}$$

para todo $z \in \mathring{P}$. (|1|, pág. 221).

TEOREMA 5.1

Seja $(f_n)_{n \geq 0}$ uma sequência de funções holomorfas de um aberto do C^n em um espaço de Banach X. Se $(f_n)_{n \geq 0}$ converge para uma função $f: \Omega \to X$ e a convergência é uniforme em todo subconjunto compacto de Ω, então f é holomorfa em Ω. (|1|, pág. 229).

CAPITULO II

FUNÇÕES ANALÍTICAS EM ESPAÇOS DE BANACH.

§ 1 - Funções G-analíticas

Sejam X e Y espaços de Banach complexos e U um subconjunto aberto e não vazio de X.

DEFINIÇÃO 1.2

Dizemos que uma aplicação $f: U \to Y$ é G-analítica em U se, para cada $x \in U$ e $h \in X$ existir o limite

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha}$$

Tal limite, quando existir, será chamado G-diferencial da função f no ponto x com acréscimo h e será indicado com uma das seguintes notações:

$\delta f(x;h)$, $\delta^h f(x)$ ou ainda por $f'(x).h$

TEOREMA 1.2

Uma função $f: U \to Y$ é G-analítica em U se, e somente se, para cada $x \in U$ e $h \in X$, a aplicação:

(*) $\alpha \in D(x;h) \to f(x + \alpha h) \in Y$ é holomorfa no aberto

$$D(x;h) = \{\alpha \in \mathbb{C} \,/\, x + \alpha h \in U\}$$

Demonstração

De fato, se f é G-analítica em U, então dados $x \in U$, $h \in X$, e $\alpha_o \in D(x;h)$, temos:

$$\{\frac{d}{d\alpha} f(x + \alpha h)\}_{\alpha=\alpha_o} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x + \alpha_o h + \alpha h) - f(x + \alpha_o h)}{\alpha} =$$

$$= \delta f(x + \alpha_o h; h),$$

portanto a aplicação (*) é holomorfa em $D(x;h)$. (|1|,pág.226)

Recíprocamente, se (*) é holomorfa em $D(x; h)$, temos que existe $\{\frac{d}{d\alpha} f(x + \alpha h)\}_{\alpha=0} = \delta f(x; h)$, portanto f é G-analítica em U.

TEOREMA 2.2

Uma aplicação $f: U \to Y$ é G-analítica em U se, e somente se, dados $x \in U$ e $h_1, \ldots, h_n \in X$, a aplicação:

$$(*) \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in D(x; h_1, \ldots, h_n) \to f(x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i) \in Y$$

é holomorfa no aberto.

$$D(x;\ h_1;\ldots,\ h_n) = \{(\alpha,\ \ldots,\alpha_n) \in \mathbb{C}^n / x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i \in U\}$$

Demonstração

Sejam $x \in U$, $h_1, \ldots, h_n \in X$, e suponhamos que f seja G-analítica em U. Se $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in D(x;\ h_1, \ldots, h_n)$, então $y = x + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i h_i \in U$, portanto existe

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{f(y + \alpha h_i) - f(y)}{\alpha} = \delta f(y;\ h_i) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha_i} f(x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i)_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Isto siginifica que a aplicação (*) é parcialmente holomorfa em $D(x, h_1, \ldots, h_n)$, logo é holomorfa conforme teorema 1.1.

A recíproca é imediata.

TEOREMA 3.2

Se $f: U \to Y$ é G-analítica em U então para cada x fixo em U a aplicação $h \in X \to \delta f(x;\ h) \in Y$ é linear.

Demonstração

Sejam $x \in U$ e $h_1, h_2 \in X$. Pelo teorema 2.2 a aplicação:

$(\alpha_1,\alpha_2) \in D(x;\ h_1,\ h_2) \to f(x+\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2) \in Y$ é holomorfa, logo pelo teorema 4.1 temos:

$$f(x + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) =$$

$$= \sum_{m>0} \sum_{m_1+m_2=m} \frac{1}{m_1!\,m_2!} \left\{\frac{\partial^m f(x+\alpha_1 h_1+ \alpha_2 h_2)}{\partial\alpha_1^{m_1}\ \partial\alpha_2^{m_2}}\right\}_{(0,0)} (\alpha_1)^{m_1} \cdot (\alpha_2)^{m_2}$$

$$= f(x) + \delta f(x;h_1)\ \alpha_1 + \delta f(x;h_2)\ \alpha_2 + 0\ (|(\alpha_1,\alpha_2)|)$$ onde

o $(|(\alpha_1,\alpha_2)|)$ é um infinitésimo de ordem superior à de $|(\alpha_1,\alpha_2)| = \max\{|h_1|,|h_2|\}$.

Em particular, para $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ temos

$$f(x + \alpha(h_1+h_2)) - f(x) =$$

$$= \alpha.\{\delta f(x;h_1) + \delta f(x;h_2)\} + 0(|\alpha|)$$, portanto

$$\delta f(x,h_1+h_2) = \delta f(x,h_1) + \delta f(x,h_2)$$

Seja $\lambda \in C$. Se $\lambda = 0$ vale trivialmente a igualdade $\delta f(x;\lambda h_1) = \lambda\,\delta f(x;h_1)$; se $\lambda \neq 0$ temos:

$$\delta f(x;\ h_1) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(x + \alpha(\lambda h_1)) - f(x)}{\alpha} =$$

$$= \lambda \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x + \alpha(\lambda h_1)) - f(x)}{\alpha\lambda} =$$

$$= \lambda \cdot \delta f(x; h_1)$$

TEOREMA 4.2

Se $f: U \to Y$ é G-analítica em U, então para cada h fixo em X a aplicação $x \in U \to \delta f(x, h) \in Y$ é G-analítica em U.

Demonstração

De fato, dados $x \in U$ e $k \in X$, a aplicação

$$(\alpha, \beta) \in D(x; h; k) \to f(x + \alpha h + \beta k) \in Y$$

é holomorfa em $D(x; h; k)$, portanto existe a derivada mista

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\alpha} f(x + \alpha h + \beta k)\right\}_{\substack{\alpha = 0 \\ \beta = 0}}$$

e temos:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\alpha} f(x + \alpha h + \beta k)\right\}_{\substack{\alpha = 0 \\ \beta = 0}} =$$

$$= \sigma^k (\delta f(x; h))$$

DEFINIÇÃO 2.2

Sejam, $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach complexos e Ω um subconjunto aberto e não vazio de $E = E_1 \times \ldots \times E_n$.

Dizemos que uma aplicação $f: \Omega \to F$ é parcialmente G-analítica em Ω se, dados $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ e $(h_1, h_2, \ldots, h_n) \in E$, existirem os limites:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x+\alpha h^i) - f(x)}{\alpha} \qquad i = 1, \ldots, n \qquad ,$$

onde

$$h^i = (0, \ldots, h_i, \ldots, 0).$$

Tais limites, quando existirem serão indicados por

$$\overset{h_i}{\underset{x_i}{\delta}} f(x) \qquad \text{ou ainda por}$$

$$\underset{x_i}{\delta} f(x; h_i), \qquad = 1, 2, \ldots, n$$

Com as notações acima temos o seguinte:

TEOREMA 5.2

$f: \Omega \to F$ é G-analítica em Ω se, e somente se é parcialmente G-analítica em Ω.

Demonstração

É inteiramente óbvio que se f é G-analítica então é parcialmente G-analítica. Suponhamos f parcialmente G-analítica em Ω. Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ e $h = (h_1, \ldots, h_n) \in E$.

Afirmamos que a aplicação:

$$(*) \quad (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in A(x;h) \to f(x_1+\alpha_1 h_1,\ldots,x_n+\alpha_n h_n) \in F$$

é holomorfa no aberto.

$$A(x;h) = \{ (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{C}^n / \ (x_1+\alpha_1 h_1,\ldots,x_n+\alpha_n h_n) \in \Omega\}$$

De fato, se $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in A(x;h)$ então

$y = (x_1+\varepsilon_1 h_1,\ldots,x_n+\varepsilon_n h_n) \in \Omega$, portanto existe

$\delta_{x_i} f(y;h_i) \quad (1 \leq i \leq n)$ e temos:

$$\delta_{x_i} f(y;h_i) = \{\frac{d}{d\alpha} f(y+\alpha h_i)\}_{\alpha = 0} =$$

$$= \{\frac{\partial}{\partial \alpha_i} f(x_1+\alpha_1 h_1,\ldots,x_n+\alpha_n h_n)\}_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)}$$

Isto significa que a aplicação (*) é parcialmente holomorfa portanto holomorfa pelo teorema 1.1.

Segue que a aplicação

$\alpha \in D \to f(x_1+\alpha h_1,\ldots,x_n+\alpha h_n) \in F$ é holomorfa no aberto $D = \{\alpha \in \mathbb{C} \,/\, (\alpha,\ldots,\alpha) \in A(x,h)\}$ e tem-se

$$\left\{\frac{d}{d\alpha} f(x_1+\alpha h_1,\ldots,x_n+\alpha h_n)\right\}_{\alpha=0} = \left\{\frac{d}{d\alpha} f(x+\alpha h)\right\}_{\alpha=0} =$$

$$= \delta f(x;h).$$

<u>Observação 1.2</u>

Podemos escrever $h = h^1+\ldots+h^n$, então pela linearidade tem-se

$$\delta f(x;h) = \sum_{i=1}^{n} \delta f(x;h^i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} f(x;h_i)$$

<u>Corolário 1.2</u>

Se $P: X^n \to Y$ é n-linear então P é G-analítico ($n \geq 1$)

<u>Corolário 2.2</u>

Se $f: U \to Y$ é G-analítica então a aplicação:

$(x,h) \in U \times X \to \delta f(x;h) \in Y$ é G-analítica.

TEOREMA 6.2

Se (f_n) $n \geqslant 0$ é uma sequência de funções G-analíticas e contínuas de U em Y e $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformemente em U, então a função limite é G-analítica e contínua em U.

Demonstração

Designemos por f a função limite. Fixados x em U e h em X, a sequência de funções holomorfas $\left(\sum_{i=0}^{n} f_i(x+\alpha h)\right)_{n \geqslant 0}$ converge uniformemente em $D(x;h)$ para a função $f(x+\alpha h)$ a qual é holomorfa em virtude do teorema 5.1, portanto f é G-analítica.

A continuidade de f decorre do fato da mesma ser o limite uniforme da sequência de funções contínuas $\left(\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\right)_{n \geqslant 0}$

DEFINIÇÃO 3.2

Se $f: U \to Y$ é G-analítica em U, definiremos por recorrência a G-diferencial de ordem n de f num ponto x com acréscimos $h_1,\ldots,h_n \in X$, como segue:

$$\delta^1 f(x;h_1) = \delta f(x;h_1)$$

$$\delta^n f(x;h_1,\ldots,h_n) = \delta^{h_n}\{\delta^{n-1} f(x;h_1;\ldots,h_{n-1})\}$$

Definiremos também

$$\delta^o f(x;h) = f(x) \qquad \text{e}$$

$$\delta^n f(x;h) = \delta^n f(x;h,\ldots,h)$$

TEOREMA 7.2

Se $f: U \to Y$ é G-analítica em U então valem as igualdades abaixo, para quaisquer que sejam $x \in U$, $h_1,\ldots h_n, h \in X$.

a) $$\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_i} f(x+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i)\right\}_{(0,\ldots,0)} = \delta f(x;h_i)$$

$(1 \leq i \leq n)$

b) $$\left\{\frac{\partial^n}{\partial\alpha_1\ldots\partial\alpha_n} f(x+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i)\right\}_{(0,\ldots,0)} =$$

$$= \delta^n f(x;h_1,\ldots,h_n)$$

c) $$\left\{\frac{\partial^n}{\partial\alpha_1\ldots\partial\alpha_n} f(x+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h)\right\}_{(0,\ldots,0)} =$$

$$= \delta^n f(x;h) = \left\{\frac{d^n}{d\alpha^n} f(x+\alpha h)\right\}_{\alpha = 0}$$

Demonstração

Faremos apenas a demonstração de c); as demais são imediatas. De acordo com b) basta mostrar que

$$\delta^n f(x;h) = \{\frac{d^n}{d\alpha^n} f(x+\alpha h)\}_{\alpha=0}$$

A igualdade acima vale para n = 1. Suponhamos n > 1 e que a mesma seja verdadeiro para n - 1. Temos:

$$\delta^n f(x;h) = \delta^h \delta^{n-1} f(x;h) =$$

$$= \{\frac{d}{d\beta} \delta^{n-1} f(x+\beta h;h)\}_{\beta=0} =$$

$$= \{\frac{d}{d\beta} [\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} f(x+\beta h+\alpha h)]_{\alpha=0}\}_{\beta=0} =$$

$$= \{\frac{d}{d\beta} [\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} f(x+(\beta+\alpha)h)]_{\alpha=0}\}_{\beta=0} =$$

$$= \{\frac{d}{d\beta} [\frac{d^{n-1}}{d\sigma^{n-1}} f(x+\sigma h)]_{\sigma=\beta}\}_{\beta=0} =$$

$$= \{\frac{d}{d\beta} [\frac{d^{n-1}}{d\beta^{n-1}} f(x+\beta h)]\}_{\beta=0} =$$

$$= \{\frac{d^n}{d\beta^n} f(x+\beta h)\}_{\beta=0}$$

Corolário 3.2

Se $f: U \to Y$ é G-analítico em U, então, para cada x fixo em U a aplicação $(h_1,\ldots,h_n) \in X^n \to \delta^n f(x,h_1,\ldots,h_n) \in Y$ é n-linear e simétrica ($n \geqslant 1$).

Demonstração

A simetria decorre da igualdade b) do teorema anterior e da igualdade das derivadas mistas. A linearidade decorre da definição 3.2 e do teorema 3.2.

Corolário 4.2

Se $f: U \to Y$ é G-analítico em U então a aplicação

$$(x,h_1,\ldots,h_n) \in U \times X \times\ldots\times X \to \delta^n f(x,h_1,\ldots,h_n) \in Y$$ é

G-analítica.

Demonstração

A aplicação acima é obviamente G-analítica em x. Em cada h_i é G-analítica por ser linear. O resultado decorre então do teorema 5.2.

Observação 2.2

Se $P: X^n \to Y$ é uma aplicação n-linear e simétrica, denotaremos por $\hat{P}$ a aplicação $x \in X \to \hat{P}(x) = P(\underbrace{x,\ldots,x}_{n}) \in Y$

TEOREMA 8.2

A aplicação $\hat{P}: X \to Y$ é G-analítica em X e tem-se para $x, h \in X$:

$$\delta^m \hat{P}(x,h) = \begin{cases} 0 \text{ se } m > n \\ m!\ P(x^{n-m}, h^m) \quad \text{se } m \leqslant n \end{cases}$$

Demonstração

Pela fórmula binomial de Newton temos:

$$\hat{P}\ (x+\alpha h) = P\ (x+\alpha h, \ldots, x+\alpha h) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \alpha^p\ P(x^{n-p}, h^p)\ , \quad \text{onde}$$

$$P(x^{n-p}, h^p) = P(\underbrace{x, \ldots, x}_{n-p}, \underbrace{h, \ldots, h}_{p}).$$ Decorre daí que

$$\delta^m \hat{P}(x;h) = \{\frac{d^m}{d\alpha^m}\ \hat{P}(x+\alpha h)\}_{\alpha=0} =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} P(x^{n-p}, h^p)\{\frac{d^m}{d\alpha^m}\ (\alpha)^p\}_{\alpha=0}\ ,$$

donde concluímos a tese.

TEOREMA 9.2 (Taylor)

Se $f: U \to Y$ é G-analítica em U, então dados $\xi \in U$ e $\rho > 0$ tais que $B(\xi,p) \subset U$ tem-se:

$$f(\xi+h) = \sum_{n>0} \frac{1}{n!} \delta^n f(\xi,h) \quad \text{para todo } h \in X \quad \text{com}$$

$|h| < \rho$.

Demonstração

Seja $h \in X$ com $|h| < \rho$. Verifica-se facilmente que, neste caso, $D(\xi;h)$ contém a bola unitária fechada $D = \{\alpha \in \mathbb{C} \,/\, |\alpha| \leqslant 1\}$ e que, tomando-se

$$r = \frac{1}{2} d(D, \text{front. } D(\xi,h)), \text{ a bola}$$

$B(0,1+r)$ está contida em $D(\xi;h)$.

A função $\alpha \in D(\xi;h) \to f(\xi+\alpha h) \in Y$ é holomorfa, então pelo teorema 4.1 tem-se:

$$f(\xi+\alpha h) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \left\{\frac{d^n}{d\beta^n} f(\xi+\beta h)\right\}_{\beta=0} \cdot \alpha^n =$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \delta^n f(\xi;h)\alpha^n \quad (\forall\, \alpha \in B(0,1+r)).$$

Fazendo $\alpha = 1$ obtemos a tese.

TEOREMA 10.2 (Fórmulas de Cauchy)

Se $f: U \to Y$ é G-analítica então dados $\xi \in U$ e $\rho > 0$ tais que $B(\xi,\rho) \subset U$, tem-se

$$a)\ \delta^n f(\xi;h) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi+\alpha h)}{n+1}\, d\alpha$$

para todo $h \in X$ com $|h| < \rho$ (Γ é a circunferência $|z| = 1$)

$$b)\ \delta^n f(\xi;h_1,\ldots,h_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma^n} \frac{f(\xi+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n}{\alpha_1^2 \ldots \alpha_n^2}$$

para quaisquer que sejam $h_1,\ldots,h_n \in X$

$$\text{com} \quad \sum_{i=1}^{n} |h_i| < \rho \quad (\Gamma^n = \underbrace{\Gamma_1 \times \ldots \Gamma_n}_{n})$$

Demonstração

a) Tal como na demonstração do teorema anterior, a bola $B = B(0,1+r)$ está contida em $D(\xi;h)$; pelo teorema 2.1 temos então:

$$\delta^n f(\xi;h) = \left\{\frac{d^n}{d\alpha^n} f(\xi+\alpha h)\right\}_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi+\alpha h)}{\alpha^{n+1}}\, d\alpha$$

b) Sejam $h_1,\ldots,h_n \in X$ com $\sum_{i=1}^{n} |h_i| < \rho$. Verifica-se que, neste caso, $D(\xi, h_1,\ldots,h_n)$ contém o polidisco.

$$P = \{ (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{C}^n \ / \ |\alpha_i| \leqslant 1 \ ; (1 \leqslant i \leqslant n)\} \quad ,$$

logo, pelo teorema 2.1 temos:

$$\delta^n f(\xi;h_1,\ldots,h_n) = \{ \frac{\partial^n}{\partial\alpha_1\cdots\partial\alpha_n} f(\xi+ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i)\}_{(0,\ldots 0)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi_i)^n} \int_{\Gamma^n} \frac{f(\xi+ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i) \ d\alpha_1\ldots d\alpha_n}{\alpha_1^2\ldots\alpha_n^2}$$

§ 2 - Desigualdades Fundamentais

TEOREMA 11.2

Sejam $f: U \to Y$ G-analítica e $\xi \in U$. Suponhamos que existam $M > 0$ e $\rho > 0$ tais que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in B(\xi,\rho) \subset U$. Nestas condições temos para todo $n \geq 0$.

a) (Desigualdade I)

$$|\delta^n f(\xi,h)| < M \; n! \; (\frac{|h|}{\rho})^n \quad (\forall h \in x)$$

b) (Desigualdade II)

$$|\delta^n f(\xi,h_1,\ldots,h_n)| < M(\frac{n}{\rho})^n \; |h_1|\ldots|h_n| \; .$$

$(\forall h_1,\ldots,h_n \in X)$.

c) (Desigualdade III)

Para cada s com $0 < s < \rho/e$, existe uma constante $K = K(s)$, tal que,

$$|f(x) - f(x')| < K|x-x'| \quad (\forall x, x' \in B(\xi,s))$$

d) (Desigualdade IV)

Se $\delta f(\xi;h) = 0$ para todo $h \in X$, então existe s' com $0 < s' < \rho/e$ tal que $|f(x) - f(x')| < |x-x'|$ $(\forall x \neq x' \in B(\xi,s'))$

Demonstração

a) Seja $h \in X$. Se $h = 0$ a desigualdade I vale trivialmente. Suponhamos então $h \neq 0$. Para todo r com $0 < r < \rho$ temos $\left|\frac{rh}{|h|}\right| < \rho$, portanto pelo teorema 10.2 a) tem-se:

$$|\delta^n f(\xi;v)| = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi+\beta v)\, d\beta}{\beta^{n+1}} \leq M.n! \quad ,$$

onde

$$v = \frac{rh}{|h|}.$$

Sendo $\delta^n F(\xi,v)$ homogênea vem que

$|\delta^n f(\xi;h)| \leq M.n! \left(\frac{|h|}{r}\right)^n$. Fazendo r tender a ρ obtemos a desigualdade I.

b) Sejam $h_1,\ldots,h_n \in X$. Se algum dos h_{i_s} for zero a desigualdade II vale trivialmente. Suponhamos então $h_i \neq 0$. $(1 \leq i \leq n)$. Para cada r com $0 < r < \frac{\rho}{n}$, os vetores $V_i = \frac{rh_i}{|h_i|}$ $(1 \leq i \leq n)$ teem norma $< \frac{\rho}{n}$, logo $\sum_{i=1}^{n} |v_i| < \rho$,

portanto do teorema 10.2 b) vem que

$$|\delta^n f(\xi;v_1,\ldots,v_n)| = \left|\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma^n} \frac{f(\xi+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i)\, d\alpha_1\ldots d\alpha_n}{\alpha_1^2 \ldots \alpha_n^2}\right| \leq M,$$

ou seja,

$$\delta^n f(\xi;h_1,\ldots,h_n) \leqslant \frac{M.|h_1|\ldots|h_n|}{r^n}$$

Fazendo r tender a $\frac{\rho}{n}$ obtemos a desigualdade II.

c) Seja s com $0 < s < \frac{\rho}{e}$. Dados $x = \xi+h$ e $x' = \xi+h'$ em $B(\xi,s)$ temos pelo teorema 9.2:

$$(*) \qquad |f(x) - f(x')| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!} \; |\delta^n f(\xi;h) - \delta^n f(\xi;h')|$$

Para cada $n \geqslant 1$, temos:

$$|\delta^n f(\xi;h) - \delta^n f(\xi;h')| =$$

$$= |\sum_{k=1}^{n} \delta^n f(\xi;h^{(k-1)}, (h-h'), h^{(n-k)})| \leqslant$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{n} |\delta^n f(\xi;h^{(k-1)}, (h-h'), h^{(n-k)})| \leqslant$$

$$\leqq M \,.\, (\frac{n}{\rho})^n \, |h-h'| \sum_{k=1}^{n} |h'|^{(k-1)} \, |h|^{(n-k)} \leqslant$$

$$\leqq M \, (\frac{n}{\rho})^n \, |h-h'| \, n \, s^{n-1} =$$

$$= \frac{M}{\rho} \, |h-h'| \; n^{n+1} \, (\frac{s}{\rho})^{n-1}$$

De (*) obtemos então:

$$(**) \qquad |f(x) - f(x')| \leqslant (\sum_{n\geqslant 1} \frac{M}{\rho} \, \frac{n^{n+1}}{n!} \, (\frac{s}{\rho})^{n-1}) \; |h-h'| =$$

$$= K \quad |h-h'| = K\ (x-x'), \qquad \text{onde}$$

$$K = \sum_{n\geq 1} \frac{M}{p} \frac{n^{n+1}}{n!} \left(\frac{s}{\rho}\right)^{n-1}$$

d) Seja s' com $0 < s' < \frac{p}{e}$. Supondo que $\delta f(\xi;h) = 0$ para todo $h \in X$, tem-se por (**) do item anterior:

$$|f(x) - f(x')| \leq \left(\sum_{n\geq 2} \frac{M}{\rho} \frac{n^{n+1}}{n!} \left(\frac{s'}{\rho}\right)^{n-1}\right) |h-h'|$$

para todo $x = \xi+h$, $x' = \xi+h'$ em $B(\xi,s')$.

Tomando-se s' suficientemente pequeno de modo que

$$\sum_{n>1} \frac{M}{p} \frac{n^{n+1}}{n!} \left(\frac{s'}{\rho}\right)^{n-1} < 1, \qquad \text{obtemos}$$

$$|f(x) - f(x')| < |h-h'| = |x-x'|$$

para todo $x \neq x' \in B(\xi;s')$

<u>DEFINIÇÃO 4.2</u>

Dizemos que uma aplicação $\hat{P}: X \to Y$ é um <u>polinômio n-homogêneo</u> se existir $P \in \mathcal{L}_s(X^n,Y)$ tal que $\hat{P}(x) = P(x^n) = P(\underbrace{x,\ldots,x}_{n})$ $\forall\, x \in X$, onde $\mathcal{L}_s(X^n,Y)$ é o espaço das aplicações n-lineares simétricas e contínuas de X^n em Y.

Corolário 5.2

Se $f: U \to Y$ é G-analítica e localmente limitado em U então:

1) Para cada x fixo em U a aplicação

$$(h_1,\ldots,h_n) \in X^n \to \delta^n f(x;h_1,\ldots,h_n) \in Y$$

é contínuo $(n \geqslant 1)$.

2) Para cada x fixo em U a aplicação

$$h \in X \to \delta^n f(x;h) \in Y$$

é um polinômio n-homogêneo.

A demonstração decorre do corolário 3.2 e do teorema anterior.

§ 3 - Definições equivalentes de função analítica em espaços de Banach.

DEFINIÇÃO 5.2

Uma função $f: U \to Y$ é analítica segundo Fréchet (F-analítica) em U se, correspondendo a cada $\xi \in U$ existir $T_\xi \in \mathcal{L}(X.Y)$ tal que, para h numa vizinhança conveniente da origem,

$$f(\xi;h) = f(\xi) + T_\xi.h+0(|h|)$$

onde, o $(|h|)$ é um infinitésimo de ordem superior a $|h|$.

A aplicação T_ξ é única e frequentemente anotada por $f'(\xi)$.

DEFINIÇÃO 6.2

Uma aplicação $f: U \to Y$ é analítica segundo Taylor (T-analítica) em U se, f for G-analítica e contínua.

DEFINIÇÃO 7.2

Uma função $f: U \to Y$ é analítica segundo Hille (H-analítica) em U se, f for G-analítica e localmente limitada.

DEFINIÇÃO 8.2

Uma função $f: U \to Y$ é analítica segundo Weierstrass (W-analítica) em U se, para cada $\xi \in U$ existirem $p > 0$ e uma sequência $(\hat{P}_n)_{n\in N}$ de polinômios n-homogêneos de X em Y tais que:

$$f(\xi+h) = \sum_{n\geq 0} \hat{P}_n(h) \quad , \quad \text{uniformemente}$$

para $\xi+h \in B(\xi,\rho) \subset U$.

TEOREMA 12.2.

São equivalentes as afirmações a respeito de uma aplicação $f: U \to Y$

a) f é F-analítica

b) f é T-analítica

c) f é H-analítica

d) f é W-analítica

Demonstração

a) $\Rightarrow$ b)

Sejam $x \in U$ e $h \in X$. Por hipótese tem-se:

$f(x+\alpha h) = f(x) + T_x.(\alpha h) + 0(|\alpha h|)$, de onde vem que

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha} = T_x.h = \delta f(x;h) \quad ;$$

além disso é óbvio que f é contínua.

E imediato que b) $\Rightarrow$ c)

c) $\Rightarrow$ d)

Sejam, $\xi \in U$, $\rho > 0$ e $M > 0$ constantes tais que

$|f(x)| \leq M$ $(\forall\, x \in B(\xi,p) \subset U)$.

Pelos teoremas 9.2 e 10.2 a) tem-se

$$f(\xi+h) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\delta^n f(\xi,h), \text{ uniformemente em}$$

$(|h| < \rho_1 < \rho)$. Sendo para cada $n \geq 0$ $\hat{P}_n(h) = \frac{1}{n!}\delta^n f(\xi,h)$ um polinômio n-homogêneo, segue o resultado.

d) $\Rightarrow$ a)

Sejam, $\xi \in U$ e $h \in X$. Por hipótese existem $\rho > 0$ e uma sequência $(\hat{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polinômios n-homogêneos de X em Y, tais que

$$f(\xi+h) = \sum_{n\geq 0} \hat{P}_n(h) \text{ uniformemente em } B(\xi,p) \subset U$$

Conforme os teoremas 6.2 e 8.2 f é G-analítica e contínua; além disso tem-se

$$\delta^n f(\xi;h) = n!\, \hat{P}_n(h) \quad (\forall\, n \geq 0,\ \forall\, h \in X)$$

Sejam $\rho_1 < \rho$ e M constantes positivos tais que $|f(x)| \leq M$ $(\forall\, x \in B(\xi,p_1) \subset U.)$

Temos:

$$\frac{|f(\xi+h) - f(\xi) - \delta f(\xi;h)|}{|h|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n!} |\delta^n f(\xi;h)| \leq$$

$$\leq \frac{M}{\rho_1} \sum_{n\geq 2} \left(\frac{|h|}{\rho_1}\right)^{n-1} \text{, donde vem}$$

que, $\lim_{h\to 0} \frac{|f(\xi+h)-f(\xi)-\delta f(\xi;h)|}{|h|} = 0$,

portanto f é F-analítica em U.

Observação 3.2

No que segue a expressão "função analítica" significará que f é analítica segundo uma das definições dadas neste parágrafo.

TEOREMA 13.2

Sejam, X, Y, Z espaços de Banach complexos, $U \subset X$ e $U' \subset Y$ abertos não vazios. Se $f: U \to U'$ e $g: U' \to Z$ são analíticas, então, a aplicação $g \circ f: U \to Z$ é analítica e tem-se:

$$(g\circ f)'(\xi) = g'(f(\xi)).f'(\xi)$$

para todo $\xi \in U$. (121, pág. 216)

TEOREMA 14.2 (Hartogs)

Sejam $U \subset X$, $V \subset Y$ abertos não vazios.

Se $f: U \times V \to Z$ é analítica separadamente em cada variável então f é analítico em $U \times V$. (131, pág. 28)

§ 4 - O teorema da função inversa

TEOREMA 15.2

Sejam, $U \subset X$ aberto com $0 \in U$ e $f: U \to X$ analítica em U com $f(0) = 0$ e $f'(0) = I_X$.

Existem vizinhanças abertas V e W da origem do X tais que $f/V: V \to W$ é uma bijeção analítica com inversa analítica.

Demonstração

Sejam $\rho > 0$ e $M > 0$ tais que

$$|f(x)| \leq M (\forall\, x \in B(0,\rho) \subset U).$$ Por hipótese

tem-se

$$f(h) = h + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} \delta^n f(0;h)$$

uniformemente em $B(0,\rho_1)$ onde $0 < \rho_1 < p$.

Ponhamos $\lambda(h) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} \delta^n f(0;h)$

para $h \in B(0;\rho_1)$; assim temos:

$$f(h) = h + \lambda(h) \quad (\forall\, h \in B(0,\rho_1)).$$

Pelo teorema 11.2 item d), existe s com $0 < s < \frac{\rho_1}{e}$

tal que $|\lambda(h)-\lambda(h')| < |h-h'|$ $(\forall\, h \neq h$ em $B(0,s)$. Decorre daí que f é injetiva em $B(0,s)$.

Consideremos a série de potências

$$A(z) = a_0+a_1z - \sum_{n\geq 2} a_n z^n \quad \text{onde} \quad a_0 = 0 ,$$

$a_1 = 1$, e $a_n = \frac{M}{n!}(\frac{n}{\rho_1})^n$ para $n \geq 2$. Sua inversa é dada por

$$B(z) = \sum_{n\geq 1} b_m z^m, \text{ onde } b_1 = 1 \text{ e } b_k = \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_n=k \\ 1<n\leq k}} a_n b_{m_1}\ldots b_{m_n} ,$$

a qual possui raio de convergência $r > 0$. Podemos supor sem perda que a convergência é uniforme em $B(0,r)$.

Para cada $n \geq 1$ seja

$$P_n(h_1,\ldots,h_n) = \frac{1}{n!}\,\delta^n f(0,h_1,\ldots,h_n)$$

e consideremos a sequência $(Q_m)_{m\geq 1}$ de funções analíticas de X em X dada por

$$Q_1(y) = y$$

$$Q_k(y) = -\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_n=k \\ 1<n\leq k}} P_n(Q_{m_1}(y),\ldots,Q_{m_n}(y))$$

para $k > 1$.

Afirmamos que $\sum_{m\geq 1} Q_m(y)$ converge uniformemente em $B(0,r)$.

De fato temos:

$|Q_1(y)| = |y| = b_1|y|^1$. Seja $k > 1$ e suponhamos que

$$|Q_{k-1}(y)| \leq b_{k-1}\,|y|^{k-1}$$

Tem-se

$$|Q_k(y)| \leq \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_n=k \\ 1<n\leq k}} |P_n(Q_{m_1}(y),\ldots,Q_{m_n}(y))| \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{m_1+\ldots m_n=k \\ 1<n\leq k}} \frac{M}{n!}\left(\frac{n}{\rho_1}\right)^n |Q_{m_1}(y)|\ldots|Q_{m_n}(y)| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_n=k \\ 1<n\leq k}} a_n b_{m_1}\ldots b_{m_n}\right) |y|^k = b_k|y|^k$$

Assim $g(y) = \sum_{m\geq 1} (Q_m(y))$ é uma função analítica definida em $B(0,r)$ (critério de Weierstrass e teorema 6.2).

Seja $W = B(0,r_1)$ com $0 < r_1 < r$ tal que $g(W) \subset B(0,s)$ e ponhamos $V = g(W)$.

Mostremos que para todo y em $B(0,r_1) = W$ tem-se $f\circ g\,(y) = y$.

De fato temos,

$$fog(y) = \sum_{n\geq 1} \hat{P}_n(q(y)) =$$

$$= \sum_{n\geq 1} P_n(\sum_{m_1\geq 1} (Q_{m_1}(y),\ldots,\sum_{m_n\geq 1} Q_{m_n}(y)) = \quad (1)$$

$$= \sum_{n\geq 1} (\sum_{m_1\geq 1}\cdots\sum_{m_n\geq 1} P_n(Q_{m_1}(y),\ldots,Q_{m_n}(y))) = \quad (2)$$

$$= \sum_{n\geq 1} (\sum_{k\geq 1} \sum_{m_1+\ldots+m_n=k} P_n(Q_{m_1}(y),\ldots,Q_{m_n}(y))) = \quad (3)$$

$$= \sum_{k\geq 1} \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_n=k \\ 1\leq n\leq k}} P_n(Q_{m_1}(y),\ldots,Q_{m_n}(y)) = \quad (4)$$

$$= y$$

A igualdade (1) decorre da linearidade e continuidade dos P_n, (2) e (3) decorrem da convergência absoluta da série $\sum_{n\geq 1} \hat{P}_n(h)$. Quanto (4) basta notar que $P_1(y) = y$ e portanto,

$$P_1(Q_k(y)) + \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_n=k \\ 1\leq n\leq k}} P_n(Q_{m_1}(y),\ldots,Q_{m_n}(y)) =$$

$$= \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_n=k \\ 1\leq n\leq k}} P_n(Q_{m_1}(y),\ldots,Q_{m_n}(y)) = 0$$

Sendo $f/V: V \to W$ uma bijeção com $fog = I_W$ vem que $(f/V)^{-1} = q/W$, portanto o teorema está demonstrado.

Corolário 6.2

Sejam, U X aberto e $x_o \in U$. Se $f: U \to Y$ é analítica e $f'(x_o) \in I_{som}(X,Y)$ então, existem vizinhanças abertas v_1 de x_o e W_1' de $f(x_o)$ tais que, $f/v_1: v_1' \to w_1'$ é uma bijeção analítica com inversa analítica.

Demonstração

Sejam as aplicações:

$$T = (f'(x_o))^{-1}: Y \to X;\ x \in X \xrightarrow{\alpha} x-x_o \in X\ ;$$

$$Y \in Y \xrightarrow{\beta} y-f(x_o) \in Y. \text{ Ponhamos } U' = \alpha(U).$$

A aplicação $h: U' \to X$ dada por $h = (To\beta)\ o\ f\ o\ \alpha^{-1}$ é analítica e tem-se $h(0) = 0$, $h'(0) = I_X$. Logo pelo teorema anterior existem vizinhanças abertas V_1 e W_1 da origem do X tais que $h/V_1: V_1 \to W_1$ é bijeção analítica com inversa analítica. Ponhamos $W_1' = (To\beta)^{-1}(W_1)$ e $V_1' = \alpha^{-1}(V_1)$. Sendo $f/V_1' = (To\beta)^{-1}\ o\ h\ o\ \alpha : V_1' \to W_1'$, α, h, e $(To\beta)$ bijeções analíticas com inversas analíticas segue o resultado.

CAPITULO III

O TEOREMA DE PROBENIUS

§ 1 - Diferenciais com acréscimos variáveis.

Sejam X e Y espaços de Banach complexos e U um subconjunto aberto e não vazio de X.

TEOREMA 1.3

Se $f: U \to Y$ é G-analítica em U então para cada $n \geq 1$ a aplicação

(*) $(x,h_1,\ldots,h_n) \in U \times X \times \ldots \times X \to \delta^n f(x;h_1,\ldots,h_n) \in Y$ é analítica.

Demonstração

Já vimos (corolário 5.2) que a aplicação acima é G-analítica.

Mostremos que a mesma é localmente limitada.

Sejam $(\xi_o,h_{1_o},\ldots,h_{n_o}) \in U \times X \times \ldots \times X$ e

$s = \max\{|h_{1_o}|,\ldots,|h_{n_o}|\}$. Sendo $f: U \to Y$ analíti

ca em U, existem $M > 0$ e $\rho > 0$ tais que

$$|f(x)| \leqslant M \quad , \quad (\forall\, x \in B(\xi_o, \rho)$$

A desigualdade II (teorema 11.2) nos dá:

$$|\delta^n f(\xi_o, h_1, \ldots, h_n)| \leqslant M \left(\frac{n}{\rho}\right)^n |h_1| \ldots |h_n|$$

$$(\forall\, h_1, \ldots, h_n \in X).$$

Em particular, para todo $x \in B\left(\xi_o, \frac{\rho}{2}\right)$, temos que $B\left(x, \frac{\rho}{2}\right) \subset B(\xi_o, \rho)$, então novamente a desigualdade II nos dá:

$$|\delta^n f(x; h_1, \ldots, h_n)| \leqslant M\left(\frac{2n}{\rho}\right)^n |h_1| \ldots |h_n|$$

$$(\forall\, h_1, \ldots, h_n \in X \text{ e } x \in B\left(\xi_o, \frac{\rho}{2}\right)).$$

Assim,

$$|\delta^n f(x, h_1, \ldots, h_n)| \leqslant M\left(\frac{2n}{\rho}\right)^n \left(\frac{\rho}{2} + s\right)^n$$

$$\forall\, (x, h_1, \ldots, h_n) \in B\left(\xi_o, \frac{\rho}{2}\right) \times B\left(h_{1_o}, \frac{\rho}{2}\right) \times \ldots \times B\left(h_{n_o}, \frac{\rho}{2}\right),$$

portanto (*) é localmente limitada.

<u>Corolário 1.3</u>

Se $f: U \to Y$ e $g: U \to X$ são analíticas então também é analítica a aplicação $x \in U \to \delta f(x; g(x))$.

Demonstração

A aplicação acima se escreve como composto das aplicações analíticas: $x \in U \to (x, g(x)) \in U \times X$ e

$(x,h) \in U \times X \to \delta f(x,h) \in Y$. O resultado segue então pela regra da cadeia.

DEFINIÇÃO 1.3

Sejam $f: U \to Y$ e $f_i: U \to X$ $(1 \leq i \leq n)$ funções analíticas em U. Definiremos por recorrência,

$$(\delta^{f_1} f)(x) = \delta f(x; f_1(x))$$

$$(\delta^{f_n} \ldots \delta^{f_1})(x) = \delta^{f_n}\{(\delta^{f_1} \ldots \delta^{f_n} f)\}(x)$$

Definiremos também,

$$\{(\delta^{f_1})^0 f\}(x) = f(x) \qquad \text{e}$$

$$\{(\delta^{f_1})^n f\}(x) = (\delta^{f_1} \ldots \delta^{f_1} f)(x)$$

Observação 1.3

Se $n > 1$, em geral não se tem

$(\delta^{f_n} \ldots \delta^{f_1} f)(x) = \delta^n f(x; f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Adotare

mos a terminologia seguinte: para cada $x \in U$,

$\delta^n f(x; f_1(x), \ldots, f_n(x))$ será chamado "G-diferencial de ordem n da função f no ponto x com acréscimos $f_1(x), \ldots, f_n(x)$"

e $(\delta^{f_n} \ldots \delta^{f_1} f)(x)$ será chamado "G-diferencial sucessiva de ordem n da função f no ponto x com acréscimos sucessivos - $f_1(x), \ldots, f_n(x)$.

Decorre do teorema 1.3 e corolário 1.3 que as aplicações:

$$x \in U \to \delta^n f(x; f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in Y \quad \text{e}$$

$$x \in U \to (\delta^{f_1} \ldots \delta^{f_n} f)(x) \in Y \quad \text{são analíticas em } U.$$

TEOREMA 2.3

Se $f: U \to Y$ e $f_1, f_2: U \to X$ são analíticas em U e $(\delta^{f_1} f_2)(x) = (\delta^{f_2} f_1)(x)$ $(\forall x \in U)$, então temos também,

$$(\delta^{f_1} \delta^{f_2} f)(x) = (\delta^{f_2} \delta^{f_1} f)(x) \quad (\forall x \in U).$$

Demonstração

De fato,

$$(\delta^{f_1} \delta^{f_2} f)(x) = \delta^{f_1(x)} (\delta f(x; f_2(x)) =$$

$$= \delta^2 f(x; f_2(x), f_1(x)) + \delta f(x; (\delta^{f_1} f_2)(x)) =$$

$$= \delta^2 f(x; f_1(x), f_2(x)) + \delta f(x; (\delta^{f_2} f_1)(x)) =$$

$$= (\delta^{f_2} \delta^{f_1} f)(x) \qquad (\forall\, x \in U)$$

Corolário 2.3

Se $f: U \to Y$ e $f_i: U \to X$ $(1 \leq i \leq n)$ são analíticas em U e, $(\delta^{f_i} f_j)(x) = (\delta^{f_j} f_i)(x)$ $((1 \leq i,j \leq n),\ \forall\, x \in U)$ então tem-se

$$(*) \quad (\delta^{f_n} \ldots \delta^{f_1} f)(x) = (\delta^{f_{\sigma(n)}} \ldots \delta^{f_{\sigma(1)}} f)(x)$$

$$(\forall\, x \in U \text{ e } \sigma \in S_n).$$

Demonstração

Basta notar que, de acordo com o teorema anterior o 1º membro de (*) é invariante pelas transposições $(1,2),\ldots,(1,n)$ as quais geram o grupo de permutações S_n.

TEOREMA 3.3

Se $f: U \to Y$ e $g: U \to X$, são analíticas em U, então, para cada $x \in U$ e $n \geq 1$ natural, $\{(\delta^g)^n f\}(x)$ é uma soma de G-diferenciais de ordem k de f no ponto x, com acréscimos

$$\{(\delta^g)^{r_i} g\}(x) \qquad (1 \leq i \leq k),$$ onde

$$k + \sum_{i=1}^{k} r_i = n$$

Demonstração

O teorema é verdadeiro para $n = 1$, pois

$\{(\delta^g)^1 f\}(x) = \delta f(x; g(x)) = \delta f(x; \{(\delta^g)^0 g\}(x)$.

Suponhamos $n > 1$ e que o teorema seja válido para $n-1$, isto é; que $\{(\delta^g)^{n-1} g\}(x)$ é uma soma de termos do tipo,

$$\delta^k f(x; \{(\delta^g)^{s_1} g\}(x), \ldots, (\delta^g)^{s_k} g\}(x))$$ onde

$$k + \sum_{i=1}^{k} s_i = n-1.$$

Para concluir que vale para n, basta mostrar que a G-diferencial de ordem 1 de cada parcela, com acréscimo $g(x)$ é da forma desejada. De fato, pela observação 1.2. e pela regra da cadeia temos:

$$\delta^{g(x)} \delta^k f(x; \{(\delta^g)^{s_1} g\}(x), \ldots, \{(\delta^g)^{s_k} g\}(x))\} =$$

$$= \delta^{k+1} f(x; \{(\delta^g)^{s_1} g\}(x), \ldots, \{(\delta^g)^{s_k} g\}(x), \{(\delta^g)^0 g(x)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \delta^k f(x, \ldots, \{(\delta^g)^{s_{i+1}} g\}(x), \ldots),$$ o que demonstra o teorema.

§ 2 - Desigualdade fundamental para G-diferenciais sucessivas.

TEOREMA 4.3

Sejam $f: U \to Y$ analítica e $\xi \in U$. Se $f_i: U \to X$ $(1 \leq i \leq n)$ são funções analíticas em U e, $M, M_1, \ldots, M_n$ são constantes positivas tais que, $|f(x)| \leq M$ e $|f_i(x)| \leq M_i$ - $(1 \leq i \leq n)$ $\forall\, x \in B(\xi,p) \subset U$, então temos:

$$|(\delta^{f_n} \ldots \delta^{f_1} f)\ (\xi)| \leq M(\frac{n}{\rho})^n\ M_1 \ldots M_n$$

Demonstração

Provemos inicialmente que para cada k natural com $1 \leq k \leq n-1$ a função $x \in B_k = B(\xi, \rho - \frac{k\rho}{n}) \to (\delta^{f_k} \ldots \delta^{f_1} f)(x) \in y$ satisfaz,

$$(*) \quad |(\delta^{f_k} \ldots \delta^{f_1} f)\ (x)| \leq M(\frac{n}{\rho})^k\ M_1 \ldots M_k$$

$(\forall\, x \in B_k)$

Com efeito, se $k = 1$ e $x \in B_1 = B(\xi, \rho - \frac{\rho}{n})$ então

$B(x, \frac{\rho}{n}) \subset B(\xi, \rho)$, logo pela desigualdade II (teorema

11.2) tem-se:

$$|(\delta^{f_1}f)(x) = |\delta f(x;f_1(x))| \leq M(\frac{n}{\rho}).M_1$$

Suponhamos $1 < k \leq n-1$ e que (*) seja válida $\forall\ x \in B_k$.

Se $x \in B_{k+1} = B(\xi,\rho-(k+1)\frac{\rho}{n})$ então $B(x,\frac{\rho}{n}) \subset B_k$, logo pela desigualdade II (teorema 11.2) temos:

$$|\{\delta^{f_{k+1}}(\delta^{f_k},..\delta^{f_1}f)\}\ (x)| \leq$$

$$\leq \{M.(\frac{n}{\rho})^k\ M_1...M_k\}\ (\frac{n}{\rho})\ M_{k+1} =$$

$$= M.(\frac{n}{\rho})^{k+1}\ M_1...M_{k+1}$$

isto é (*) vale para k+1.

Em particular temos,

$$|(\delta^{f_{n-1}}...\delta^{f_1}\ f)(x)| \leq M.(\frac{n}{\rho})^{n-1}\ M_1...M_{n-1}$$

$\forall\ x \in B_{n-1} = B(\ ,\frac{\rho}{n})$, então pela desigualdade II tem-se:

$$|(\delta^{f_n}...\delta^{f_1}\ f)\ (\xi)| = |\{\delta^{f_n}(\delta^{f_{n-1}}...\delta^{f_1}\ f)\}\ (\xi)| \leq$$

$$\leq M\ (\frac{n}{\rho})^n.M_1...M_n$$

Lema 1.3

Sejam $U_1 \subset X$, $U_2 \subset Y$ abertos não vazios e $f: U_1 \times U_2 \to \mathcal{L}(X,Y)$ tal que a aplicação

$$(x,y,h) \in U_1 \times U_2 \times X \to f(x,y)h \in Y$$

é analítica. Indiquemos por P_Y a projeção canônica de $X \times Y$ e para cada h fixo em X indiquemos por fh a aplicação

$$(x,y) \in U_1 \times U_2 \to f(x,y)h \in Y.$$

Se para cada $(x,y) \in U_1 \times U_2$ fixo, a aplicação $(h,k) \in X^2 \to \{\delta^{(h,fh)} \delta^{(k,fk)} P_Y\} (x,y) \in Y$ for simétrica, então, para cada $(x_o,y_o) \in U_1 \times U_2$ e $n \geq 1$ natural, a aplicação

$(h_1,\ldots,h_n) \in X^n \xrightarrow{P_n} \{\delta^{(h_n,fh_n)} \ldots \delta^{(h_1,fh_1)} P_Y\} (x_o,y_o) \in Y$ é n-linear simétrica e contínua.

Demonstração

Simetria

Fixados $h_1,\ldots,h_n$ em X, as aplicações

$(x,y) \xrightarrow{P_X} U_1 \times U_2 \xrightarrow{P_Y} y \in U_2$ e

$$(x,y) \in U_1 \times U_2 \xrightarrow{f_i} (h_i, f(x,y)h_i) \quad (1 \leq i \leq n)$$

são analíticas, e por hipótese tem-se:

$$(\delta^{f_i} f_j)\ (x,y) = (\delta^{f_j} f_i)\ (x,y) \quad (\forall (x,y) \in U_1 \times U_2;\ 1 \leq i,j \leq n) \quad ,$$

portanto em virtude do corolário 2.3, temos que:

$$(*) \qquad (\delta^{f_n} \ldots \delta^{f_1} P_y)\ (x,y) \text{ é invariante por permutações}$$

dos índices $1,2,\ldots,n$.

Fazendo $x = x_o$, $y = y_o$ em (*) concluimos que P_n é simétrica.

<u>n-linearidade</u>

Em vista da simetria basta provar que P_n é linear na 1ª variável. Fixados então $h_2,\ldots,h_n$ em X, a aplicação $h_1 \in X \to \{\delta^{(h_1,fh_1)} \ldots \delta^{(h_n,fh_n)} P_y\}\ (x_o,y_o) \in Y$ se escreve - como composta das aplicações lineares:

$$(h_1,k) \in X \times Y \to \delta^{(h_1,k)} (\delta^{(h_2,fh_2)} \ldots \delta^{(h_n,fh_n)} P_y)(x_0,y_0) \in Y$$

e $h_1 \in X \to (h_1,\ f(x_o,y_o)h_1) \in X \times Y$, logo é linear.

<u>Continuidade</u>

Consideremos em $X \times Y$ a norma do máximo. Sejam $M > 1$ e $\rho > 0$ tais que: $|f(x,y)h| \leq M|h|$ $(\forall\ (x,y) \in B((x_o,y_o),\rho)$ $U_1 \times U_2$, $\forall\ h \in X$ e sejam $h_1,\ldots,h_n \in X$ tais que $|h_i| \leq 1$,

$(1 \leq i \leq n)$. Temos:

$$|f_i(x,y)| = |(h_i, f(x,y)h_i)| = \max\{|h_i|, |f(x,y)h_i|\}$$

$$\leq M.|h_i| \qquad (\forall\ (x,y) \in B(x_o,y_o),\rho))$$

$$|P_y\ (x,y)| = |y| \leq |y-y_o| + |y_o| = \rho + |y_o|$$

$$(\forall\ (x,y) \in B(x_o,y_o),\rho))$$

Da desigualdade fundamental (teorema 4.3) temos então:

$$|P_n\ (h_1,\ldots,h_n)| = |\{\delta^{f_n}\ldots\delta^{f_1}\ P_y\}\ (x_o,y_o)| \leq$$

$$\leq (\rho+|y_o|).(\frac{n}{\rho})^n.\ (M|h_1|)\ldots(M\ |h_n|) \leq$$

$$< (\rho+|y_o|\ )\ (\frac{n}{\rho})^n.M^n\ ,$$ portanto P_n é contínua.

<u>Corolário 3.3</u>

Com as notações do lema anterior temos

a) $\hat{P}_n(h) = \{(\delta^{(h,fh)})^n\ P_y\}\ (x_o,y_o)$ é um polinômio n-homogêneo de X em Y.

b) $|\hat{P}_n(h)| \leq \rho(n-1)^{n-1}\ (\frac{M|h|}{\rho})^n \qquad (\forall\ h \in X \text{ e } n \geq 1)$

Demonstração

a) Imediato

b) $|\hat{P}_n(h)| = |\{(\delta^{(h,fh)})^n P_y \quad (x_o,y_o)| =$

$= |\{(\delta^{(h,fh)})^{n-1} fh\}(x_o,y_o| \leqslant$

$< M.|h| \ (\frac{n-1}{\rho})^{n-1} \ (M|h|)^{n-1} =$

$= \rho \ (n-1)^{n-1} \ (\frac{M|h|}{\rho})^n$

§ 3 - Teorema de Frobenius

DEFINIÇÃO 5.3

Sejam, $A \subset X$, $B \subset Y$ abertos não vazios e $f: A \times B \to \mathcal{L}(X,Y)$ tal que a aplicação

$$(x,y,h) \in A \times B \times X \to f(x,y)h \in Y \text{ é analítica.}$$

Consideremos a equação diferencial (*) $y'(x)k = f(x,y)k$

Dizemos que (*) é <u>completamente integrável em $A \times B$</u> quando, para cada $(x_o,y_o) \in A \times B$ o sistema

$$I(x_o, y_o) \begin{cases} y'(x)k = f(x,y)k \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$$

tem solução analítica.

TEOREMA 5.3 (Frobenius)

Sejam, $A \subset X$, $B \subset Y$ abertos não vazios e $f: A \times B \to \mathcal{L}(X;Y)$ tal que a aplicação

$$(x,y,h) \in A \times B \times X \to f(x,y)h \in Y \text{ é analítica.}$$

A fim de que a equação diferencial $y'(x)k = f(x,y)k$ seja completamente integrável em $A \times B$, é necessário e suficiente que para cada $(x,y) \in A \times B$ a função

$$(h,k) \in X^2 \to \{\delta^{(h,fh)} \delta^{(k,fh)} P_y\}(x,y) \in Y$$

seja simétrica.

Demonstração

Necessidade

Suponhamos $y'(x)k = f(x,y)k$ completamente integrável em $A \times B$. Dado $(x_o,y_o) \in A \times B$ o sistema:

$$\begin{cases} y'(x)k = f(x,y)k \\ y\ (x_o) = y_o \end{cases}$$

tem solução analítica. Significa que existem uma vizinhança aberta V do x_o e uma função analítica $y: V \to B$ tal que

$$y'(x)k = f(x,y(x))k \text{ e } y(x_o) = y_o$$

Pela regra da cadeia temos:

$$y''(x_o)(h,k) = \{\delta^{(h,fh)}\ \delta^{(k,fk)}\ P_y\}\ (x_o,y_o)$$

Sendo $y''(x_o)(h,k)$ simétrica e (x_o,y_o) arbitrário em $A \times B$ concluimos o resultado.

Suficiência

Suponhamos que para cada $(x,y) \in A \times B$ a aplicação:

$$(h,k) \in X^2 \to \{\delta^{(h,fh)}\ \delta^{(k,fk)}\ P_y\}(x,y) \in Y$$

seja simétrica. Seja $(x_o,y_o) \in A \times B$ e mostremos que o sistema:

$$I(x_o,y_o) \begin{cases} y'(x)k = f(x,y)k \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$$

tem solução analítica.

Sejam $\rho > 0$ e $M > 1$ tais que

$|f(x,y)h| \leqslant M|h|$ $(\forall\, h \in X,\ \forall (x,y) \in B((x_o,y_o),\rho) =$

$B(x_o,\rho) \times B(y_o,\rho) \subset A \times B)$

Conforme corolário 3.3, para cada $n \geqslant 0$,

$$\hat{P}_n(h) = \{\frac{1}{n!}\ (\delta^{(h,fh)})^n P_Y\}\ (x_o,y_o)$$

é um polinômio n-homogêneo de X em Y verificando

$$|\hat{P}_n(h)| \leqslant \rho\ \frac{(n-1)^{n-1}}{n!}\ (\frac{M|h|}{\rho})^n \qquad \text{para } n \geqslant 1$$

Sendo $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n-1)^{n-1}}{n!} (\frac{M|h|}{\rho})^n < \infty$

para $|h| < \rho\ \frac{1}{M_e}$, temos pelo critério de Weierstrass que a série $\sum_{n\geqslant 0} \hat{P}_n(h)$ converge uniformemente em $|h| < \rho\ \frac{1}{M_e}$, de onde vem que

$y(x_o+h) = \sum_{n\geqslant 0} \hat{P}_n(h)$ é uma função analítica definida -

em $|h| < \rho\frac{1}{M_e}$ com $y(x_o) = y_o$.

Seja

$$\theta = \sup\{\alpha \in (0,\frac{1}{e})/|x| < \alpha \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{(n-1)^{n-1}}{n!} |x|^n < 1\}$$

para

$|h| < \rho\,\frac{\theta}{M}$ temos $\frac{M|h|}{\rho} < \theta$, portanto

$$|y(x_o+h)-y_o)| \leq \sum_{n\geq 1} |\hat{P}_n(h)| \leq$$

$$\leq \rho \sum_{n\geq 1} \frac{(n-1)^{n-1}}{n!} (\frac{M.|h|}{\rho})^n < \rho$$

Isto significa que a função $y(x)$ está definida em $B(x_o,\rho\,\frac{\theta}{M}) \subset A$ e toma valores em $B(y_o,\rho) \subset B$. Mostremos que

$$y'(x_o+h)k = f(x_o+h,y(x_o+h))k$$

para todo $h \in X$ com $|h| < \rho\,\frac{\theta}{M}$.

De fato, pelo teorema de Taylor temos:

$$y'(x_o+h)k = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} y^{n+1}(x_o)(k,h,\ldots,h).$$

Sendo $y(x_o+h) = \sum_{n\geq 0} \hat{P}_n(h)$ vem que

$$y^{n}(x_o)(h,\ldots,h) = \hat{P}_n(h).n! =$$

$$= \{(\delta^{(h,fh)})^n P_y \quad (x_o,y_o)\} \quad , \quad \text{de onde concluimos}$$

que

$$y^{n+1}(x_o)(k,h,\ldots,h) = \{(\delta^{(h,fh)})^n \delta^{(k,fk)} P_y\} \ (x_o,y_o),$$

portanto,

$$y'(x_o+h)k = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \{(\delta^{(h,f_h)})^n \delta^{(k,f_k)} P_y\} \ (x_o,y_o)$$

Por outro lado, ainda pelo teorema de Taylor temos:

$$f(x_o+h,\ y(x_o+h))k = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \{(\delta_x^h)^n \ f(x,y(x))k\}_{x=x_o}$$

A regra da cadeia nos dá:

$$\{\delta_x^h \ f(x,y(x))k\}_{x=x_o} =$$

$$= \quad \delta_x^h \ f(x_o,y_o)k + \delta_y^{y'(x_o)h} f(x_o,y_o)k =$$

$$= \quad \{\delta^{(h,y'h)} \ fk\} \ (x_o,y_o) = \{\delta^{(h,y'h)} \ \delta^{(k,fk)} P_y\} \ (x_o,y_o)$$

e, uma indicação trivial mostra que:

$$\{(\delta_x^h)^n f(x,y(x))k\}_{x=x_o} =$$

$$= \{(\delta^{(h,y'h)})^n \delta^{(k,f_k)} P_y\}(x_o,y_o)$$

portanto,

$$f(x_o+h,y(x_o+h))k = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \{(\delta^{(h,y'h)})^n \delta^{(k,f_k)} Py\}(x_o,y_o)$$

De acordo com o teorema 3.3

$$\{(\delta^{(h,fh)})^n \delta^{(k,fk)} P_y\}(x_o,y_o) \qquad e$$

$$\{(\delta^{(h,y'h)})^n \delta^{(k,f_k)} Py\}(x_o,y_o)$$ são somas de diferenciais de $\{\delta^{(k,f_k)} P_y\}(x,y)$ no ponto (x_o,y_o) com acréscimos respectivamente da forma

$$\{(\delta^{(h,f_h)})^{r_i} (h,f_h)\}(x_o,y_o) \qquad e$$

$$\{(\delta^{(h,y'h)})^{r_i} (h,y'h)\}(x_o,y_o)$$

Notando-se que:

$$\{(\delta^{(h,f_h)})^{r_i} (h,fh)\}(x_o,y_o) =$$

$$= (0,\{(\delta^{(h,fh)})^{r_i} fh\}\ (x_o,y_o) \quad =$$

$$= (0,\{(\delta^{(h,fh)})^{r_{i+1}} p_y\}\ (x_o,y_o) \quad =$$

$$= (0,\ \hat{p}_{r_{i+1}}(h)\ (r_i+1)!) \quad =$$

$$= (0,\ y^{r_{i+1}}(x_o)\ (\underbrace{h,\ldots,h}_{r_{i+1}}) \quad =$$

$$= \{(\delta^{(h,y'h)})^{r_i}\ (h,y'h)\}\ (x_o,y_o) \quad ,$$

concluimos que

$$y'(x_o+h)k = f(x_o+h,\ y(x_o+h))k, \qquad \text{portanto}$$

$y(x_o+h)$ é solução analítica de $I(x_o,y_o)$.

<u>Corolário 4.3</u>

Com as notações do teorema anterior, suponhamos que a equação diferencial $y'(x)k = f(x,y)k$ seja completamente - integrável em $A \times B$. Temos:

a) Para cada $(x_o,y_o) \in A \times B$, a solução de $I\ (x_o,y_o)$ é única e é dada por:

$$y(x_o+h) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \{ (\delta^{(h,fh)})^n P_y \} (x_o,y_o)$$

b) Se $\rho > 0$ e $M > 1$ são constantes tais que

$|f(x,y)h| \leq M.|h|$ $(\forall\, h \in X,\ \forall (x,y) \in B(x_o,\rho) \times B(y_o,\rho) \subset A \times B)$, então $y(x_o+h)$ está definida para $|h| < \rho \frac{\theta}{M}$ e toma valores em $B(y_o,\rho)$.

<u>Demonstração</u>

a) Sejam, $y(x)$ solução de $I(x_o,y_o)$ e V seu domínio máximo de definição.

A regra da cadeia nos dá para cada $n \geq 1$:

$$y^n(x_o)(h,\ldots,h) = \{ (\delta^{(h,fh)})^n P_y \} (x_o,y_o) \quad (\forall\, h \in X),$$

portanto, pelo teorema de Taylor temos:

$$(1) \qquad y(x_o+h) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \{ (\delta^{(h,fh)})^n P_y \} (x_o,y_o)$$

para todo h tal que $x_o+h \in V$, de onde concluimos a unicidade pois, o 2º membro de (1) só depende de f e de (x_o,y_o).

b) A série do 2º membro de (1) é majorada por

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(n-1)^{n-1}}{n!} \left(\frac{M|h|}{\rho}\right)^n$$ a qual converge quando

$|h| < \rho \frac{\theta}{M}$ portanto, $y(x_o+h)$ está definida para

$x_o+h \in B(x_o, \frac{\rho\theta}{M})$; por outro lado, já vimos na demonstração do teorema anterior que,

$$y'(x)k = f(x,y(x))k \qquad (\forall\ x \in B(x_o,\rho \frac{\theta}{M})) \qquad \text{e}$$

que,

$$|y(x_o+h)-y_o| \leq \rho \sum_{n\geq 1} \frac{(n-1)^{n-1}}{n!} \left(\frac{M.|h|}{\rho}\right)^n < \rho$$

$(\forall\ h \in X$ com $|h| < \rho \frac{\theta}{M})$ de onde conclui-se que

$V \supset B(x_o,\rho \frac{\theta}{M})$ e que $y(x)$ toma valores em $B(y_o,\rho)$.

§ 4 - Dependência das condições iniciais.

TEOREMA 6.3

Sejam, $A \subset X$, $B \subset Y$ abertos não vazios

$f: A \times B \to \mathcal{L}(X,Y)$ tal que a aplicação $(x,y,h) \in A \times B \times X \to$

$\to f(x,y)h \in Y$ é analítica, $(x_o,y_o) \in A \times B$ e, suponhamos

que a equação diferencial (*) $y'(x)k = f(x,y)k$ seja completamente integrável em $A \times B$.

Se $\rho > 0$ e $M > 1$ são constantes tais que

$|f(x,y)h| \leq M|h|$ $(\forall h \in X, \forall (x,y) \in B(x_o,\rho) \times B(y_o,\rho) \subset A \times B$,

então existe uma constante Δ, a qual depende apenas de M, tal que,

1) Se $(x_o',y_o') \in B((x_o,y_o),\rho\Delta)$, a solução de (*) pelo ponto (x_o',y_o') anotado por $y(x,x_o',y_o')$, está definido em $B(x_o,\rho\Delta)$ e toma valores em $B(y_o,\rho)$.

2) A aplicação

$$(x,x_o',y_o') \in \Omega \to y(x,x_o',y_o') \in B(y_o,\rho) \subset Y,$$

onde

$$\Omega = B(x_o,\rho_\Delta) \times B(x_o,\rho_\Delta) \times B(y_o,\rho_\Delta) \text{ é analítica.}$$

3) Para cada natural j, se $(x_o', y_o') \in B(x_o, y_o), \rho\Delta^{i+1})$ então $y(x, x_o', h_o')$ está definido em $B(x_o, \rho_\Delta{}^{i+1})$; toma valores em $B(y_o, \rho\Delta)$ e além disso é analítica a aplicação:

$$(x, x_o', y_o') \in \Omega_1 \to y(x, x_o', y_o') \in B(y_o, \rho_\Delta{}^{j}) \subset Y$$

onde

$$\Omega_1 = B(x_o, \rho_\Delta{}^{i+1}) \times B(x_o, \rho_\Delta{}^{i+1}) \times B(y_o, \rho_\Delta{}^{i+1}).$$

<u>Demonstração</u>

1) Notemos que se $(x_o', y_o') \in B((x_o, y_o).\rho/2)$ então $B((x_o', y_o'), \frac{\rho}{2}) \subset B((x_o, y_o).\rho)$, logo $\frac{\rho}{2}$ e $M > 1$ são constantes tais que

$$|f(x,y)h| \leq M|h| \qquad (\forall\ h \in X) \quad ,$$

$(\forall\ (x,y) \in B((x_o', y_o'), \frac{\rho}{2}))$, portanto, conforme corolário 4.3 a solução $y(x, x_o', y_o')$ está definida em $B(x_o', \frac{\rho}{2}\frac{\theta}{M}$ e toma valores em $B(y_o', \rho/2)$. Assim,

$$|y(x, x_o', y_o') - y_o| \leq$$

$$\leq |y(x, x_o', y_o') - y_o'| + |y_o - y_o'| < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho$$

Tomando-se $\Delta = \frac{1}{4}\frac{\theta}{M}$ vem que

$B((x_o,y_o),\rho\Delta) \subset B((x_o,y_o),\frac{\rho}{2})$ e para cada

$x_o' \in B(x_o,\rho\Delta)$ tem-se $B(x_o,\rho\Delta) \subset B(x_o', \frac{\rho}{2}\frac{\theta}{M})$, portanto, as soluções de (*) por pontos de $B((x_o,y_o),\rho\Delta)$ estão definidas em $B(x_o,\rho\Delta)$ e tomam valores em $B(y_o,\rho)$.

2) As aplicações $P_3: \Omega_1 \to V$ e $Q: \Omega_1 \to X \times X \times Y$, dadas por $P_3(h,x,y) = y$ e $Q(h,x,y) = (0,h,f(x,y)h)$, onde $\Omega_1 = B(0,\rho\Delta) \times B(x_o,\rho\Delta) \times B(y_o,\rho\Delta)$ são analíticas, logo, para cada $n \geq 1$, a aplicação:

$$(h,x,y) \in \Omega_1 \to \{(\delta^Q)^n P_3\}(h,x,y) \in Y \text{ é analítica.}$$

Por outro lado temos:

$$\{\delta^Q P_3\}(h,x,y) = f(x,y)h = \{\delta^{(h,fh)} P_y\}(x,y)$$

$$\{(\delta^Q)^2 P_3\}(h,x,y) = \delta^Q \delta^{(h,fh)} P_y =$$

$$= \{(\delta^{(h,fh)})^2 P_y\}(x,y) \text{ e por indução segue}$$

que

$$\{(\delta^Q)^n P_3\}(h,x,y) = \{(\delta^{(h,fh)})^n P_y\}(x,y)$$

Temos também:

$$\frac{1}{n!}|\{(\delta^{(h,fh)})^n P_y\}(x,y) \leq$$

$$\leq \rho \frac{(n-1)^{n-1}}{n!} \left(\frac{M|h|}{\rho}\right)^n \leq \rho \frac{(n-1)^{n-1}}{n!} (M\Delta)^n$$

$\forall\ (h,x,y) \in \Omega_1$.

Sendo $M\Delta < \theta \Rightarrow \sum_{n>1} \frac{(n-1)^{n-1}}{n!} (M\Delta)^n < 1$, portanto a série

$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \{(\delta^{(h,fh)})^n P_y\}(x,y)$ converge uniformemente em Ω_1, logo a função:

$(h,x,y) \in \Omega_1 \to y(x_o+h,x,y) \in B(y_o,\rho) \subset Y$ é analítica,

de onde se conclui que a função:

$(x,x'_o,y'_o) \in \Omega \to y(x,x'_o,y'_o) \in Y$ é analítica.

3) Basta notar que $\rho\Delta^\alpha$ e $M > 0$ são constantes tais que $|f(x,y)h| < M.|h|$ $(\forall h \in X,\ \forall (x,y) \in B((x_o,y_o),\Delta^\alpha)$. O resultado decorre então de 1) e 2).

CAPITULO IV

GRUPOS E ÁLGEBRAS DE LIE

§ 1 - Preliminares sobre grupos topológicos e grupos topológicos locais.

DEFINIÇÃO 1.4

Um grupo topológico é uma terna (ϕ, G, τ) onde, G é um conjunto, ϕ é uma operação sobre G relativamente a qual G é um grupo e τ é uma topologia sobre G tornando contínuas as aplicações:

$$\phi : G \times G \to G \quad e \quad x \in G \to x^{-1} \in G$$

A continuidade das aplicações acima é equivalente à continuidade da aplicação $(x,y) \in G \times G \to xy^{-1} \in G$. Num grupo topológico as translações:

$$x \in G \xrightarrow{\sigma_a} a.x \in G$$

$$x \in G \xrightarrow{\sigma_a} x.a \in G$$

são homeomorfismos. Em vista disso a topologia de um grupo topológico fica completamente determinada quando se conhece um sistema fundamental de vizinhanças da unidade.

PROPOSIÇÃO 1.4

Seja (ϕ, G, τ) um grupo topológico. A coleção β de todas as vizinhanças abertas da unidade "e" de G goza das seguintes propriedades:

1) Se $V_1, V_2 \in \beta \rightarrow V_1 \cap V_2 \in \beta$

2) Se $V_1 \in \beta$ e $x \in V_1$, então existe $V' \in \beta$ tal que $x.V' \subset V_1$.

3) Se $V_1 \in \beta$, existe $U \in \beta$ tal que $U.U^{-1} \subset V_1$

4) Se $V_1 \in \beta$ e $g \in G$, então existe $V \in \beta$ tal que $g.V.g^{-1} \subset V_1$.

Demonstração

1) Imediato

2) Decorre da continuidade de σ_x no ponto "e".

3) Decorre da continuidade da aplicação $(x,y) \in G \times G \rightarrow xy^{-1} \in G$ no ponto (e,e)

4) Decorre da continuidade da aplicação $x \in G \rightarrow g.x.g^{-1} \in G$ no ponto "e".

TEOREMA 1.4

Seja (ϕ,G) um grupo algébrico e β uma coleção de partes de G com as propriedades 1) a 4) da proposição anterior. Existe uma única topologia τ sobre G de modo que, (ϕ,G,τ) é um grupo topológico e, β é um sistema fundamental de vizinhanças abertas do elemento "e" de G.

Demonstração

Seja para cada $x \in G$,

$$B(x) = \{ W \subset G \ / \ xV \subset W, \text{ para algum } V \in \beta\}$$

B(x) tem as seguintes propriedades:

a) $W \in B(x) \Rightarrow x \in W$

b) Se $W, W' \in B(x) \Rightarrow W \cap W' \in B(x)$

c) Se $W \in B(x)$ e $W \subset W' \subset G$, então $W' \in B(x)$.

d) Se $W \in B(x)$, existe $U \subset W$ tal que $U \in B(y)$ $\forall y \in U$.

Verificaremos apenas d); as demais são imediatas. Sejam $W \in B(x)$ e $V \in \beta$ tal que $x.V \subset W$. Tomemos $U = x.V$

Se $y \in U = x.V$ então $x^{-1}y \in V$, por 2) existe $V' \in \beta$ tal que $x^{-1}y\ V' \subset V$ e assim $y\ V' \subset x\ V = U$, portanto $U \in B(y)$.

Decorre que existe uma topologia τ em G, tal que $V(x) = B(x)$ $\forall\ x \in G$.

Mostremos que relativamente a τ é continua a aplicação

(*) $\quad (x,y) \in G \times G \to x.y^{-1} \in G$

De fato, fixados x_o e y_o em G, sejam $W \in B(x_o y_o^{-1}) =$

$= V(x_o y_o^{-1})$ e $V_1 \in \beta$ tais que $x_o y_o^{-1} V \subset W$. Por 3) existe $V_2 \in \beta$ tal que

$$V_2 . V_2^{-1} \subset V_1, \text{ donde,}$$

$$x_o y_o^{-1} (V_2 . V_2^{-1}) \subset x_o y_o^{-1} V_1 \subset W$$

Por 4) existe $V_3 \in \beta$ tal que

$$y_o . V_3 . y_o^{-1} \subset V_2, \quad \text{donde,}$$

$$(x_o V_3) . (y_o^{-1} . V_2^{-1}) \subset x_o y_o^{-1} (V_2 . V_2^{-1}) \subset$$

$$\subset x_o y_o^{-1} V_1 \subset W,$$

ou seja,

$$(x_o V_3) . (V_2 . y_o)^{-1} \subset W$$

Ainda por 4), existe $V_4 \in \beta$ tal que $y_o V_4 y_o^{-1} \subset V_2$,

de modo que,

$$(x_o V_3)(y_o V_4)^{-1} \subset W.$$

o que prova a continuidade de (*).

Notemos que,

$$\beta \subset B(e) = \{W \subset G \ / \ \text{existe } V \in \beta \text{ com } V \subset W\},$$

portanto β é um sistema fundamental de vizinhanças abertas de "e".

Unicidade

Seja τ' outra topologia em G tal que (ϕ, U, τ) é um grupo topológico tendo β como sistema fundamental de vizinhanças abertas do "e". Mostremos que

$$V_{\tau}(x) = V_{\tau'}(x)$$

De fato,

$$V_{\tau}(x) = \{W \subset G \ / \ W \supset xV \text{ para algum } V \in \beta\} \subset V_{\tau'}(x).$$

Por outro lado, se $W \in V_{\tau'}(x) \Rightarrow x^{-1} W \in V_{\tau'}(e) \Rightarrow$ existe $V \in \beta$ tal que $x^{-1}W \supset V \Rightarrow x V \subset W$, portanto, $W \in V_{\tau}(x)$. Segue que $\tau = \tau'$.

DEFINIÇÃO 2.4

Num grupo topológico (ϕ, G, τ) uma vizinhança V do "e" com a propriedade $V = V^{-1}$ é chamada vizinhança simétrica do "e".

PROPOSIÇÃO 2.4

Num grupo topológico (ϕ, G, τ), toda vizinhança do "e"

contém uma vizinhança simétrica do "e".

Demonstração

Seja $U \in V(e)$. Da continuidade de ϕ existem P e Q em $V(e)$ tais que $P.Q \subset U$. Sejam $W = P \cap Q$ e $V = W \cap W^{-1}$.

Temos que $V \in V(e)$, $V = V^{-1}$ e

$$V \subset V.V \subset P.Q \subset U.$$

DEFINIÇÃO 3.4

Um subgrupo algébrico (ϕ,H) de um grupo topológico (ϕ,G,τ), munido da topologia induzida será chamado subgrupo topológico de (ϕ,G,τ).

PROPOSIÇÃO 3.4

Seja (ϕ,G,τ) um grupo topológico. Todo subgrupo topológico aberto de (ϕ,G,τ) também é fechado.

Demonstração

De fato, se (ϕ,H) é um subgrupo aberto de (ϕ,G,τ), então,

$K = \cup \{x H / x \notin H\}$ é aberto em G e $G-K = H$, portanto, H é fechado em G.

PROPOSIÇÃO 4.4

Se (ϕ,G,τ) é um grupo topológico conexo, então

$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} U^k$, onde U é qualquer vizinhança do "e".

Demonstração

Sejam $U \in V(e)$ e $V \in V(e)$ simétrica aberta com $V \subset U$. Afirmamos que $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} V^k$ é um subgrupo aberto de (ϕ, G, τ). De fato, Se x e $y \in H$ existem naturais $\underline{m}$ e $\underline{n}$ tais que $x \in V^n$ e $y \in V^m$, de modo que $x.y \in V^{n+m} \subset H$ e $x^{-1} \in (V^{-1})^n = V^n \subset H$.

Sendo V aberto temos que V^2 é aberto e por indução segue que que V^n é aberto $\forall\ n \geq 1$, portanto H é aberto.

O resultado segue então da proposição anterior e do fato de (ϕ, G, τ) ser conexo, isto é,

$$G = H = \bigcup_{k=1}^{\infty} V^k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U^k \subset G, \quad \text{de onde vem}$$

que

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} U^k$$

DEFINIÇÃO 4.4

Um <u>grupo topológico local</u> é uma quádrupla (ϕ, U, V, W), onde W é um espaço topológico, U e V são abertos de W com $U \subset V \subset W$ e, ϕ é uma aplicação de $V \times V$ em W, verificando as condições:

1) $\phi(U \times U) \subset V$

2) $\phi(x, \phi(y,z)) = \phi(\phi(x,y), z) \quad (\forall\ x,y,z \in U)$

3) Existe um elemento "e" $\in U$, tal que,

$\phi(x,e) = \phi(e,x) = x \quad (\forall\ x \in U)$

4) Para cada $x \in U$, existe $x^{-1} \in U$, tal que $\phi(x,x^{-1})=e$

5) As aplicações $\phi: V \times V \to W$ e $x \in U \to x^{-1} \in U$ são contínuas.

PROPOSIÇÃO 5.4

Num grupo topológico local (ϕ,U,V,W) valem as seguintes propriedades:

a) $(x^{-1})^{-1} = x \quad (\forall\ x \in U)$

b) $\phi(x^{-1},x) = e \quad (\forall\ x \in U)$

c) O elemento "e" de 3) é único.

d) O inverso x^{-1} de cada elemento x de U é único.

e) $U = U^{-1}$

f) $U_e = (U_e)^{-1}$, onde U_e é a componente conexa do "e" em U.

Demonstração

a) Por 4) temos $(x^{-1}).(x^{-1})^{-1} = e$. Multiplicando-ambos os membros por x à esquerda obtemos $(x^{-1})^{-1} = x$.

b) Utilizando a) temos:

$$x^{-1}.x = (x^{-1}).(x^{-1})^{-1} = e$$

c) Seja $e' \in U$ tal que $x.e' = e'.x = x$ para todo $x \in U$. Temos em particular, $e' = e.e' = e'.e = e$.

d) Sejam $x \in U$ e $x' \in U$ tais que $\phi(x,x') = x.x' = e$. Tem-se

$$x' = e.x' = (x^{-1}.x).x' = x^{-1}.(x.x') = x^{-1}.e = x^{-1}$$

e) Decorre trivialmente de a).

f) Da continuidade da aplicação $x \in U \xrightarrow{\psi} x^{-1} \in U$ segue que $(U_e)^{-1} = \psi(U_e)$ é conexo e contém "e", portanto $(U_e)^{-1} \subset U_e$.

Por outro lado, sendo

$$U_e = [(U_e)^{-1}]^{-1} \quad \text{temos,}$$

$$U_e = [(U_e)^{-1}]^{-1} \subset (U_e)^{-1}, \text{ portanto } U_e = (U_e)^{-1}$$

TEOREMA 2.4

Sejam, (ϕ,G,τ) um grupo topológico e W uma vizinhança aberta do e.

Existem abertos U e V em G tais que (ϕ,U,V,W) é um grupo topológico local.

Demonstração

Da continuidade de ϕ existem vizinhanças abertas P e

Q do "e" tais que $P.Q \subset W$. Tomando-se $V = P \cap Q$ tem-se $V.V \subset W$.

Sendo V vizinhança aberta do "e", novamente pela continuidade de ϕ, existem vizinhanças abertas P' e Q' do "e" tais que, $P'.Q' \subset V$. Tomando-se $V_1 = P' \cap Q'$ e $U = V_1 \cap V_1^{-1}$ temos que U é vizinhança aberta do "e" e $U.U \subset V$. A quádrupla (ϕ,U,V,W) verifica trivialmente as condições 1) a 5) da definição 4.4, portanto é um grupo topológico local.

PROPOSIÇÃO 6.4

Sejam, (ϕ,G) um grupo algébrico e W um espaço topológico contido em G. Suponhamos que existam abertos U e V em W tais que (ϕ,U,V,W) é um grupo topológico local.

Temos:

a) $G_U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U^k$ é um subgrupo de (ϕ,G)

b) Existe em G_U uma estrutura de grupo topológico, tendo a coleção β das partes abertas de U que contém "e" como sistema fundamental de vizinhanças abertas do "e".

c) Se U é conexo na topologia de W então G_U será conexo.

Demonstração

a) Seja e_1 a unidade de $G_1 = (\phi,U,V,W)$ e indiquemos

por $(z^{-1})^*$ o inverso do elemento $z \in U$ em G_1.

Temos $z.e_1 = z$, portanto,

$$e_1 = z^{-1}.z = e$$

Por outro lado, z^{-1} é o único elemento de (ϕ,G) tal que $\phi(z,z^{-1}) = e$.

Sendo $\phi(z,(z^{-1})^*) = z.(z^{-1})^* = e_1 = e$ vem que $(z^{-1})^* = z^{-1}$, portanto $U = U^{-1}$.

Dados $x,y \in G_U$ existem naturais n e m tais que $x \in U^n$, $y \in U^m$, logo $x,y \in U^{n+m} \subset G_U$ e $x^{-1} \in (U^{-1})^n = U^n \subset G_U$, donde se conclui a afirmação.

b) Basta mostrar que a coleção β tem as propriedades - 1) - 4) do teorema 1.4.

1) Imediato

2) Decorre da continuidade da translação $\sigma_x: U \to V$.

3) Decorre da continuidade da aplicação

$$\phi: U \times U \to V$$

4) Sejam $V_1 \in$ e $g \in G_U$; temos $g = a_1,a_2\ldots a_n$,

onde $a_i \in U$ $(1 \leq i \leq n)$.

A aplicação $x \in U \to a_1.x.a_1^{-1} \in W$ é contínua, logo

existe $A_1 \in \beta$ tal que $a_1.A_1.a_1^{-1} \subset V_1$. Analogamente existe $A_2 \in \beta$ tal que $a_2.A_2.a_2^{-1} \subset A_1$ e, por indução existe $A_k \in \beta$, tal que $a_k.A_k.a_k^{-1} \subset A_{k-1}$ $(\forall\ k \geqslant 2)$.

Assim temos:

$$g.A_n.g^{-1} =$$

$$= a_1 \ldots a_n.A_n.a_n^{-1} \ldots a_1^{-1} \subset$$

$$\subset a_1 \ldots a_{n-1}.A_{n-1}.a_{n-1}^{-1} \ldots a_1^{-1} \subset$$

$$\vdots$$

$$\subset a_1 A_1 a_1^{-1} \subset V_1$$

c) Se U é conexo na topologia de W então U é conexo na topologia de G_U, segue da continuidade de $\phi: G_U \times G_U \to G_U$ que U^k é conexo em G_U $(\forall\ k \geqslant 1)$, portanto G_U é conexo.

DEFINIÇÃO 5.4

Sejam $G = (\phi, U, V, W)$ e $G_1 = (\phi_1, U_1, V_1, W_1)$ grupos topológicos locais com unidades "e" e "e_1" respectivamente.

Um homeomorfismo local de G em G_1 é uma aplicação contínua f, definida em uma vizinhança aberta A do e a valores em uma vizinhança aberta B do e_1, tal que

1) Se $x,y \in A$ e $\phi(x,y) \in A \Rightarrow \phi_1(f(x),f(y)) \in B$

2) $f(\phi(x,y)) = \phi_1(f(x),f(y))$ para todo $x,y \in A$ tal

que $\phi(x,y) \in A$

DEFINIÇÃO 6.4

Um isomorfismo local de G em G_1 é um homeomorfismo f, de uma vizinhança aberta A do "e" em uma vizinhança aberta B do "e_1" verificando as condições 1) e 2) da definição anterior.

§ 2 - Grupos de Lie e grupos de Lie locais em um espaço de Banach.

DEFINIÇÃO 7.4

Seja X um espaço de Banach sobre o corpo dos números complexos. Um grupo de Lie local em X é um grupo topológico local (ϕ,U,V,W) onde, W é um aberto de X e as aplicações $\phi: V \times V \to W$ e $x \in U \to x^{-1} \in U$ são analíticas.

DEFINIÇÃO 8.4

Um grupo de Lie em X é um grupo topológico (ϕ,U) onde, U é um aberto de X e as aplicações $\phi: U \times U \to U$ e $x \in U \to x^{-1} \in U$ são analíticas.

Observação 1.4

É claro que todo grupo de Lie pode ser visto como um grupo de Lie local (ϕ,U,V,W) onde $U = V = W$.

TEOREMA 3.4

Sejam $(\phi,U,V,W) \subset X$ um grupo de Lie local e $W' \in V_a(e)$ onde $V_a(e)$ é a coleção de todas as vizinhanças abertas do "e".

Existem $U', V' \in V_a(e)$ com $U' \subset U$, $V' \subset V$ tais que (ϕ,U',V',W') é um grupo de Lie local.

Demonstração

De fato, da continuidade de $\phi: V \times V \to W$, existem P, $Q \in V_a(e)$ tais que $P.Q \subset W'$. Tomemos $V' = P \cap Q \in V_a(e)$.

Da continuidade de $\phi: U \times U \to V$, existem $R,S \in V_a(e)$ tais que $R.S \subset V'$.

Tomemos $U' = (R \cap S) \cap (R \cap S)^{-1} \in V_a(e)$. Assim $U' \subset U$, $V' \subset V$, $W' \subset W$ e verifica-se facilmente que a quádrupla (ϕ,U',V',W') tem as propriedades 1) a 5) da definição 5.4, portanto é um grupo topológico local.

Sendo analíticas as aplicações $\phi: V' \times V' \to W'$ e $x \in U' \to x^{-1} \in U'$ vem que (ϕ,U',V',W') é um grupo de Lie local.

DEFINIÇÃO 9.4

Sejam, X e Y espaços de Banach complexos, $G = (\phi,U,V,W) \subset X$ e $G_1 = (\phi_1,U_1,V_1,W_1) \subset Y$ grupos de Lie locais com unidades "e" e "e_1" respectivamente.

Um homomorfismo local de G em G_1 é uma aplicação analítica f, definida em uma vizinhança aberta A do e a valores numa vizinhança aberta B do e_1, tal que,

1) Se $x,y \in A$ e $x.y \in A \Rightarrow \phi_1(f(x),f(y)) \in B$

2) $f(\phi(x,y)) = \phi_1(f(x),f(y))$, para todo $x,y \in A$ tal que $x.y \in A$.

DEFINIÇÃO 10.4

Um isomorfismo local de G em G_1 é uma bijeção analítica $f: A \in V_a(e) \to B \in V_a(e_1)$ com inversa analítica, verificando as condições 1) e 2) acima.

DEFINIÇÃO 11.4

Sejam $G = (\phi, U) \subset X$ e $G_1 = (\phi_1, U_1) \subset Y$ grupos de Lie. Um homomorfismo de G em G_1 é uma aplicação analítica $f: U \to U_1$. satisfazendo a condição 2) da definição 9.4.

Se f for inversível e f^{-1} analítica diremos que f é um isomorfismo de G em G_1.

PROPOSIÇÃO 7.4

Sejam, X e Y espaços de Banach complexos, $G = (\phi, U, V, W) \subset X$ um grupo de Lie local, $W_1 \subset Y$ aberto e $T: W \to W_1$ uma bijeção analítica com inversa analítica. Nestas condições,

$$G_{T(W)} = (T \circ \phi \circ (T^{-1} \times T^{-1}), T(U), T(V), T(W))$$

é um grupo de Lie local em Y e T é um isomorfismo local de G em $G_{T(W)}$.

Demonstração

Sendo $T: W \to T(W) = W_1$ um homeomorfismo, decorre

que $T(U)$, $T(V)$ são abertos em $T(W)$ com $T(U) \subset T(V) \subset T(W)$.

Pondo ξ: $T \circ \phi \circ (T^{-1} \times T^{-1})$ vemos que

$\xi(T(V) \times T(V) \subset T(W)$, $\xi(T(V) \times T(U)) \subset T(V)$ e que valem as demais condições de definição do grupo de Lie local para $G_{T(W)} = (\xi, T(U), T(V), T(W))$. É inteiramente óbvio que T é um isomorfismo local de G em $G_{T(W)}$.

§ 3 - Álgebras e subalgebras de Lie - Ideais.

DEFINIÇÃO 12.4

Uma álgebra de Lie é um par $(X.[\ \ ])$ onde, X é um espaço de Banach complexo e, $[\ ]$ é uma aplicação bilinear e contínua de $X \times X$ em X com as propriedades:

1) $[x,y] = -[y,x] \qquad (\forall\ x,y \in X)$

2) $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0$

$(\forall\ x,y,z \in X)$.

A identidade 2) é chamada "identidade de Jacobi" e a aplicação $[\ ]$ é usualmente chamada de colchete de Lie.

DEFINIÇÃO 13.4

Seja $(X,[\ \ ])$ uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de Lie de $(X,[\ ])$ é um subespaço vetorial E de X com as propriedades:

1) E é fechado em X.

2) Se $x,y \in E$ então $[x,y] \in E$.

DEFINIÇÃO 14.4

Um ideal de uma álgebra de Lie $(X,\ [\ ])$ é um subespaço vetorial E de X com as propriedades:

1) E é fechado em X.

2) $[x,y] \in E \quad (\forall\, x \in X,\ y \in E)$.

DEFINIÇÃO 15.4

Sejam $X = (X,[\ \cdot\ ])$ e $X_1 = (X_1,[\ \cdot\ ]_1)$ álgebras de Lie. Um homomorfismo de X em X_1 é um homomorfismo $f\colon X \to X_1$ tal que

$$(*) \qquad f([x,y]) = [f(x),f(y)]_1 \qquad (\forall\, x,y \in X).$$

Um isomorfismo de X em X_1 é um isomorfismo contínuo $f\colon X \to X_1$ verificando a condição (*) acima.

§ 4 - Transformações infinitesimais

DEFINIÇÃO 16.4

Sejam, X um espaço de Banach complexo e, $U \subset X$ aberto não vazio.

Consideremos o espaço vetorial $H(U,X)$ das aplicações analíticas em U a valores em X, Se $f, q \in H(U,X)$ colocaremos por definição,

$[f,q] = f'q - q'f$. Temos o seguinte:

PROPOSIÇÃO 8.4

$[\ ]: H(U,X) \times H(U,X) \to H(U,X)$ é bilinear e tem as seguintes propriedades:

1) $[f,q] = -[q,f]$, $(\forall\ f,q \in H(U,X)$.

2) $[[f,q],h] + [[q,h],f] + [[h,f],q] = 0$,

$(\forall\ f,h,q \in H(U,X))$.

Demonstração

A bilinearidade da aplicação $[\ ]$ e a igualdade 1) são de verificação imediata. Mostremos que vale 2). Com efeito temos:

$[[f.q],h] + [[q,h],f] + [[h,f],q] =$

$$= [f,q]'h-h'[f,q]+[q,h]'f-f'[q,h]+[h,f]'q-q'[h,f] =$$

$$= (f'q-q'f)'h-h'(f'q-q'f)+(q'h-h'q)'f-f'(q'h-h'q) +$$

$$+ (h'f-f'h)'q-q'(h'f-f'h) =$$

$$= (f''q+f'q'-q''f-q'f')h-h'(f'q-q'f)+(q''h+q'h'-h''q-h'q')f -$$

$$- f'(q'h-h'q)+(h''f+h'f'-f''h-f'h)q-q'(h'f-f'h) =$$

$$= 0$$

<u>DEFINIÇÃO 17.4</u>

Sejam, X um espaço de Banach complexo e $U \subset X$ aberto não vazio.

Uma transformação infinitesimal de U é uma aplicação $L: U \to GL(X)$ verificando as condições:

1) As aplicações $(x,h) \in U \times X \to L(x)h \in X$ e $(x,h) \in U \times X \to \mathcal{L}(x)h = (L(x))^{-1}h \in X$ são analíticas.

2) O subespaço vetorial,

$I(L,U) = \{Lh \in H(U,X) \ / \ h \in X\}$ é fechado relativamente ao colchete de $H(U,X)$, isto é, $[Lh,Lk] \in I(L,U) \quad (\forall\, h,k \in X)$.

Observação 2.4

Na definição acima estamos indicando por Lh a aplicação $x \in U \to L(x)h \in X$, para cada h fixado em X.

Lema 1.4

Seja $U \subset X$ aberto. Se $L: U \to GL(x)$ é tal que as aplicações $(x,h) \in U \times X \to L(x)h \in X$ e $(x,h) \in U \times X \to \pounds(x)h \in X$ são analíticas então tem-se:

$$(*) \quad \pounds(x)\,[Lh,Lk]\,(x) =$$

$$= \pounds'(x)(L(x)h,L(x)k) - \pounds'(x)(L(x)k,L(x)h),$$

$$(\forall\, h,\ k \in X,\ \forall\, x \in U).$$

Demonstração

Por definição,

$$[Lh,Lk]\,(x) = L'(x)(L(x)k,h) - L'(x)(L(x)h,k),$$

portanto,

$$(1) \quad \pounds(x)\,[Lh,Lk](x) = \pounds(x)L'(x)(L(x)k,h) - \pounds(x)L'(x)(L(x)h,k)$$

Diferenciando ambos os membros da igualdade $\pounds(x)L(x)h = h$ com acréscimo $L(x)k$, obtem-se:

$$(2) \quad \pounds(x)L'(x)(L(x)k,h) = -\pounds'(x)(L(x)k,L(x)h).$$

Analogamente, diferenciando-se ambos os membros da igualdade $\pounds(x)L(x)k = k$ com acréscimo $L(x)h$, obtem-se:

(3) $\pounds(x)L'(x)(L(x)h,k) = -\pounds'(x)(L(x)h,L(x)k)$

Substituindo (2) e (3) em (1) obtemos a igualdade (*)

TEOREMA 4.4

Sejam, $U \subset X$ aberto, e $L: U \to GL(x)$ tal que $(x,h) \in U \times X \to L(x)h \in X$ e $(x,h) \in U \times X \to \pounds(x)h \in X$ são analíticos.

As seguintes afirmações são equivalentes:

a) Se $r,s \in X \Rightarrow |L_r,L_s| \in I(L,U)$; isto é $I(L,U)$ é fechado relativamente ao colchete de $H(U,X)$.

b) Para cada (x,y) fixo em $U \times U$, a aplicação,

$(h,k) \in X^2 \to \{\delta^{(h,L(y)\pounds(x)h)} \cdot \delta^{(k,L(y)\pounds(x)k)} Py\}(x,y) \in X$ é simétrica.

c) A equação $y'(x)h = L(y).\pounds(x)h$ é completamente integrável em $U \times U$.

Demonstração

O teorema de Frobenius nos dá a equivalência entre b) e c). Basta então mostrarmos a equivalência entre a) e b).

a) => b)

Sejam, $(x,y) \in U \times U$, $(h,k) \in X^2$, $r=\pounds(x)h$ e $s=\pounds(x)k$.

Por hipótese existe $p \in X$ tal que,

$$\pounds(z).[L_r,L_s](z) = p \qquad (\forall\ z \in U)$$

Em particular para $z=x$ e $z=y$ tem-se:

$$(*) \qquad \pounds(x)[L_r,L_s](x) = \pounds(y)[L_r,L_s](y)$$

Desenvolvendo o 1º membro de (*) segundo o lema 1.4 e o 2º membro segundo a definição 16.4 e, substituindo-se r e s respectivamente por $\pounds(x)h$ e $\pounds(x)k$ obtemos:

$$\pounds'(x)(h,k) - \pounds'(x)(k,h) =$$

$$= \pounds(y)\{L'(y)(L(y)\pounds(x)k,\pounds(x)h) - L'(y)(L(y)\pounds(x)h,\pounds(x)k)\}\ ,$$ de onde vem que,

$$\{\delta^{(h,L(y)\pounds(x)h)}\ \delta^{(k,L(y)\pounds(x)k)}\ P_y\}(x,y) =$$

$$= L(y)\pounds'(x)(h,k) + L'(y)(L(y)\pounds(x)h,\pounds(x)k) =$$

$$= L(y)\pounds'(x)(k,h) + L'(y)(L(y)\pounds(x)k,\pounds(x)h) =$$

$$= \{\delta^{(k,L(y)\pounds(x)k)}\ \delta^{(h,L(y)\pounds(x)h)}\ P_y\}(x,y)$$

b) =>a)

Sejam $(x,y) \in U^2$, $(r,s) \in X^2$, $u=L(x)r$ e $v=L(x)s$.

Por hipótese temos:

$$L(y)\pounds'(x)(u,v) + L'(y)(L(y)\pounds(x)u,\pounds(x)v) =$$

$$= L(y)\pounds'(x)(v,u) + L'(y)(L(y)\pounds(x)v,\pounds(x)u),$$ de onde vem que

$$\pounds'(x)(u.v) - \pounds'(x)(v.u) =$$

$$= \pounds(y)\{L'(y)(L(y)\pounds(x)v,\pounds(x)u) - L'(y)(L(y)\pounds(x)u,\pounds(x)v)\}$$

Substituindo u e v na igualdade acima respectivamente por $L(x)r$ e $L(x)s$, obtemos:

$$\pounds'(x)(L(x)r,L(x)s) - \pounds'(x)(L(x)s,L(x)r) =$$

$$= \pounds(y)\{L'(y)(L(y)s,r) - L'(y)(L(y)r,s)\}$$

Segue pelo lema 1.4 que

$$\pounds(x)[L_r,L_s](x) = \pounds(y)[L_r.L_s](y)$$

Isto significa que a aplicação

$$x \in U \to \pounds(x)[L_r,L_s](x) \in X$$ é constante, portanto existe $p \in X$ tal que,

$$\pounds(x)[L_r,L_s](x) = p \quad \forall\, x \in U,$$

de onde vem que,

$$[L_r,L_s](x) = L(x)\,p \qquad \forall\, x \in U,$$

logo

$$[L_r,L_s] \in I(L,U)$$

§ 5 - Transformação infinitesimal e equação de Lie de um grupo de Lie local.

DEFINIÇÃO 18.4

Chamaremos de transformação infinitesimal de um grupo de Lie local $(\phi,U,V,W) \subset X$ à aplicação $L: U \to \mathcal{L}(X,X)$ dada por $L(x) = \phi_y(x,e)$.

TEOREMA 5.4

A transformação infinitesimal de um grupo de Lie local $(\phi,U,V,W) \subset X$ tem as seguintes propriedades:

1) $L(U) \subset GL(X)$

2) As aplicações $(x,h) \in U \times X \to L(x)h \in X$ e $(x,h) \in U \times X \to \mathcal{L}(x)h \in X$, onde $\mathcal{L}(x) = (L(x))^{-1}$ $\forall\, x \in U$, são analíticas.

Demonstração

1) A propriedade associativa nos dá:

$$\phi(\phi(x,y),z) = \phi(x,\phi(y,z)) \qquad (\forall\, x,y,z \in U)$$

Diferenciando ambos os membros da igualdade acima, com relação à variável z e acréscimo h obtemos:

$$\text{(I)} \quad \phi'_y(\phi(x,y),z)h = \phi'_y(x,\phi(y,z))\ \phi'_y(y,z)h$$

A restrição de (I) ao sunconjunto

$\{(x^{-1},x,e) \in U^3 \ / \ x \in U\}$ nos dá

$$(1) \quad h = \phi'_y(x^{-1},x).\phi'_y(x,e).h = \phi'_y(x^{-1},x).L(x).h$$

A restrição de (I) ao suconjunto

$\{(x,x^{-1},x) \in U^3 \ / \ x \in U\}$ nos dá:

$$(2) \quad h = \phi'_y(x,e).\phi'_y(x^{-1},x)h = L(x).\phi'_y(x^{-1},x).h$$

De (1) e (2) vemos que para cada $x \in U$, $L(x)$ é inversível e que sua inversa é dada por $\pounds(x) = (L(x))^{-1} = \phi'_y(x^{-1},x)$.

2) Conforme corolário 2.2, a aplicação

$$(x,y,k,h) \in \Omega \to \delta^{(k,h)}\phi(x,y) = \phi'_x(x,y)k + \phi'_y(x,y)h \in X,$$

onde $\Omega = U \times U \times X \times X$, é analítica.

Também são analíticas as aplicações:

$(x,h) \in U \times X \to (x,e,0,h) \in \Omega$ e $(x,h) \in U \times X \to (x^{-1},x,0,h) \in \Omega$. O resultado segue então pela composição.

<u>DEFINIÇÃO 19.4</u>

Sejam $(\phi,U,V,W) \subset X$ um grupo de Lie local e L sua transformação infinitesimal. A equação diferencial

$Z'(y)h = L(z).\pounds(y)h$ será chamada "<u>equação de Lie</u>" do grupo (ϕ,U,V,W).

<u>TEOREMA 6.4</u>

Seja $(\phi,U,V,W) \subset X$ um grupo de Lie local. Se U_1 é uma vizinhança aberta e simétrica do "e" com $U_1.U_1 \subset V$, então a equação de Lie de (ϕ,U,V,W) é completamente integrável em $U_1 \times U_1$.

<u>Demonstração</u>

Seja $(y_o,z_o) \in U_1 \times U_1$. Mostremos que o sistema:

$$I(y_o,z_o)\begin{cases} Z'(y)h = L(z).\pounds(y)h \\ Z(y_o) = z_o \end{cases}$$

tem solução analítica.

Ponhamos $x_o = z_o y_o^{-1}$ e consideremos a aplicação analítica

$y \in U_1 \xrightarrow{\xi} \phi(x_o,y) \in U$. Afirmamos que ξ é solução de $I(y_o,z_o)$.

De fato, $\xi(y_o)=z_o$ e restringindo a igualdade (I) do teorema anterior ao subconjunto

$$\{(x_o,y,e) \in U \times U_1 \times U \ / \ y \in U_1\}$$

obtem-se:

$$\phi'_y(\phi(x_o,y),e)h = \phi'_y(x_o,y) \cdot \phi'_y(y,e)h$$

ou seja,

$$L(\xi(y).h = \xi'(y)h \quad , \quad \text{de onde vem}$$

que,

$\xi'(y) = L(\xi(y)).\pounds(y)h$; o que prova a nossa afirmação.

<u>Corolário 1.4</u>

Se (ϕ,U,V,W) X é um grupo de Lie local e U_1 é uma vizinhança aberta simétrica do "e" com $U_1.U_1 \subset U$, então $L/U_1 : U_1 \to GL(x)$ é uma transformação infinitesimal do conjunto U_1.

§ 6 - Construção de um grupo de Lie local a partir de uma transformação infinitesimal.

TEOREMA 7.4

Sejam, $\Omega \subset X$ um aberto não vazio, L uma transformação infinitesimal de Ω e, suponhamos que exista "e" $\in \Omega$ tal que $L(e)=I_X$. Nestas condições existe um grupo de Lie local em X com unidade "e" tendo L como transformação infinitesimal.

Demonstração

Conforme teorema 4.4, a equação diferencial (*) $Z'(y).h = L(z).\mathcal{E}(y)h$ é completamente integrável em $\Omega \times \Omega$. Sejam $(e,e) \in \Omega \times \Omega$, $\rho > 0$ e $M > 1$ constantes tais que

$$|L(z).\mathcal{E}(y).h| \leq M.|h| \quad (\forall\, h \in X,\ \forall (y,z) \in B((e,e),\rho) =$$

$$= B(e,\rho) \times B(e,\rho) \quad \Omega \times \Omega).$$

Conforme o teorema 6.3, existe Δ tal que, se

$(y_o',z_o') \in B(e,\rho\Delta^{i+1}) \times B(e,\rho\Delta^{i+1})$ então a solução de (*) pelo ponto (y_o',z_o') anotada por $z(y,y_o',z_o')$, está definida para $y \in B(e,\rho\Delta^{i+1})$, toma valores em $B(e,\rho\Delta^{j})$, $(j=0,1)$;

além disso é analítica a aplicação:

$$(y,y_o',z_o') \in \Omega \xrightarrow{F} Z(y,y_o',z_o') \in B(e,\rho)$$

onde

$$\Omega = B(e,\rho\Delta) \times B(e,\rho\Delta) \times B(e,\rho\Delta)$$

Definamos ϕ,ψ: $B^2(e,\rho\Delta) \to B(e,\rho)$ por $\phi(x,y)=Z(y,e,x)$ e $\psi(x,y)=Z(y,x,e)$. É claro que ϕ e ψ são analíticos como compostas de analíticas; além disso tem-se $\phi(x,e)=x$ e $\psi(x,x)=e$ $\forall\ x \in B(e,\rho\Delta)$.

Tomemos, $U = B(e,\rho\Delta^2) \cap \lambda^{-1}(B(e,\rho\Delta^2)$, onde λ é a aplicação analítica

$$x \in B(e,\rho\Delta) \to \lambda(x)=\psi(x,e) \in B(e,\rho) \quad ,$$

$V = B(e,\rho\Delta)$ e $W = B(e,\rho)$. Mostremos que (ϕ,U,V,W) é um grupo de Lie local em X com unidade "e" tendo L como transformação infinitesimal.

1) É imediato que $\phi(U \times U) \subset V$ e $\phi(V \times V) \subset W$.

2) Sejam $x,\bar{x},\bar{\bar{x}} \in U$. Verifica-se facilmente que as aplicações:

$$y \in U \to \phi(\phi(x,\bar{x}),y) \in W \qquad \text{e}$$

$$y \in U \to \phi(x,\phi(\bar{x},y)) \in W$$

são soluções de (*) pelo ponto $(e,\phi(x,\bar{x}))$; portanto

$\phi(x,\phi(\bar{x},y) = \phi(\phi(x,\bar{x}),y) \quad \forall\, y \in U$ e em particular

$\phi(x,\phi(\bar{x}.\bar{\bar{x}}) = \phi(\phi(x,\bar{x}),\bar{\bar{x}})$.

3) É claro que $\phi(x,e) = x \quad \forall\, x \in U$. Por outro lado as aplicações $y \in U \to y \in V$ e $y \in U \to \phi(e,y) \in V$ são soluções de (*), pelo ponto (e,e), portanto temos $\phi(e,x) = x$ $\forall\, x \in U$.

4) Seja $x \in U$. Definamos $x^{-1} = \psi(x,e)$. Mostremos que $\phi(x,x^{-1}) = e$ e que $x^{-1} \in U$.

As aplicações $y \in U \to y \in W$ e $y \in U \to \phi(x,\psi(x,y)) \in W$ são soluções de (*) pelo ponto (e,e); portanto $\phi(x,\psi(x,y)) = y \quad \forall\, y \in U$. Em particular, $\phi(x,\psi(x,e)) = \phi(x,x^{-1}) = e$.

Por outro lado, as aplicações $y \in V \to \phi(x,y) \in W$ e $y \in V \to \psi(\psi(x,e),y) \in W$ são soluções de (*) pelo ponto (x^{-1},e), portanto $\phi(x,y) = \psi(\psi(x,e),y) \quad \forall\, y \in V$. Fazendo y=e obtemos $x = (x^{-1})^{-1}$. Assim de

$x \in U = B(e,\rho\Delta^2) \cap \lambda^{-1}(B(e,\rho\Delta^2)) \Rightarrow \lambda(x) = x^{-1} \in B(e,\rho\Delta^2) \Rightarrow$

$\lambda(x^{-1}) = (x^{-1})^{-1} = x \in B(e,\rho\Delta^2)$, de onde vem que,

$$x^{-1} \in B(e,\rho\Delta^2) \cap \lambda^{-1}(B(e,\rho\Delta^2)) = U$$

Sendo $\phi: V \times V \to W$ e $\psi: U \to U$ analíticos vem que (ϕ,U,V,W) é um grupo de Lie local.

Notemos que,

$\phi_Y(x,e) = L(\phi(x,e)).\pounds(e) = L(x) \quad \forall\, x \in U$ e portanto L é a transformação infinitesimal de (ϕ,U,V,W).

§ 7 - Subgrupos a um parâmetro de um grupo de Lie local.

DEFINIÇÃO 20.4

Um subgrupo a um parâmetro de um grupo de Lie local $(\phi,U,V,W) \subset X$ é um par (g,B_r) onde, B_r é uma bola de centro na origem do $\mathbb{C}$ e raio r e g é uma aplicação analítica de B_r em U com a propriedade:

$$g(\alpha+\beta) = \phi(g(\alpha),g(\beta)) \qquad \forall\ \alpha,\beta \in B_{r/2}$$

Notemos que $g(0) = g(0+0) = \phi(g(0),g(0))$, portanto $g(0) = e$.

Dois subgrupos a um parâmetro (g,B_r) e (h,B_s) de (ϕ,U,V,W) são considerados idênticos quando $h=g$ em alguma bola B_ρ com $0 < \rho < \min\{r,s\}$.

TEOREMA 8.4

Sejam, $(\phi,U,V,W) \subset X$ um grupo de Lie local e $a \in X$. Existe um único subgrupo a um parâmetro (g,B_r) de (ϕ,U,V,W) tal que $g'(0)=a$.

Demonstração

A equação diferencial

(*) $g'(\alpha) = L(g).a$ é completamente integrável em $\mathbb{C} \times U$ pois, para cada $(\alpha,g) \in \mathbb{C} \times U$ a aplicação $(w,z) \in \mathbb{C}^2 \to \{\delta^{(w,L(g)aw)} \; \delta^{(z,L(g)az)} p_x\} \; (\alpha,g) \in X$. é simétrica.

Indiquemos por $g(\alpha,a)$ a solução de (*) que passa pelo ponto $(0,e) \in \mathbb{C} \times U$ a qual podemos supor definida em uma bola $B(0,r) = B_r$. Afirmamos que (g,B_r) é um subgrupo a um parâmetro de (ϕ,U,V,W) com $g'(0) = a$.

De fato, sejam $\alpha,\beta \quad B_{r/2}$. As aplicações

$\beta \in B_r \to g(\alpha+\beta) \in U$ e $\beta \in B_r \to \phi(g(\alpha),g(\beta)) \in V$ são soluções de (*) passando pelo ponto $(0,g(\alpha)) \in \mathbb{C} \times U$, portanto $g(\alpha+\beta) = \phi(g(\alpha),g(\beta)) \quad \forall \quad \in B_{r/2}$, donde

$g(\alpha+\overline{\alpha}) = \phi(g(\alpha),g(\overline{\alpha}))$.

Assim, (g,B_r) é um subgrupo a um parâmetro de (ϕ,U,V,W) e é claro que $g'(0) = L(g(0)).a = L(e).a = a$

Seja (h,B_s) um subgrupo a um parâmetro de (ϕ,U,V,W) - tal que $h'(0) = a$.

Temos:

$$h(\alpha+\beta) = \phi(h(\alpha),h(\beta)) \qquad \forall \quad \alpha,\beta \in B_{s/2} \quad ,$$

donde;

$$h'(\alpha) = \{\frac{\partial}{\partial\beta} h(\alpha+\beta)\}_{\beta=0} =$$

$$= \{\phi'_y\ (h(\alpha),h(\beta))h'(\beta)\}_{\beta=0} \quad =$$

$= L(h(\alpha)).a$, portanto h é solução de (*) passando pelo ponto $(0,e) \in \mathbb{C} \times U$, de onde concluimos que h=g numa vizinhança de $0 \in C$ e assim $(g,B_r) = (h,B_s)$.

Corolário 2.4

(g,B_r) é um subgrupo a um parâmetro de (ϕ,U,V,W) se, e somente se, g é solução da equação (*) pelo ponto $(0,e) \in \mathbb{C} \times U$.

TEOREMA 9.4

Sejam (ϕ,U) um grupo de Lie em X e (g,B_r) um subgrupo a um parâmetro de (ϕ,U). Existe uma única aplicação analítica $\hat{g}: \mathbb{C} \to U$, tal que, $\hat{g}/B_r=g$ e $\hat{g}(\alpha+\beta) = \phi(\hat{g}(\alpha),\hat{g}(\beta))$ $\forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{C}$.

Demonstração

Definamos $\hat{g}: \mathbb{C} \to U$ por $\hat{g}(\alpha) = (g(\frac{\alpha}{p}))^p$ onde p é um natural tal que $\frac{\alpha}{p} \in B_r$. A definição acima não depende de p. De fato, se q é outro natural tal que $\frac{\alpha}{q} \in B_r$ temos.

$$(g(\frac{\alpha}{p}))^p = (g(q\frac{\alpha}{pq}))^p = (g(\frac{\alpha}{pq}))^{pq} \quad =$$

$$= (g(p\frac{\alpha}{pq}))^q = g(\frac{\alpha}{q})^q$$

A aplicação $\hat{g}$ é analítica em cada subconjunto aberto da forma $p.B_r$. De fato $\hat{g}/_{pB_r}$ é a composta das aplicações analíticas $x \in pB_r \to \frac{x}{p} \in B_r$ e $g: B_r \to U$. Sendo $\mathbb{C} = \bigcup_{p \in N} p.B_r$ concluimos que $\hat{q}$ é analítica em $\mathbb{C}$. É óbvio que $\hat{g}/B_r = g$, além disso temos:

$$\hat{g}(\alpha+\beta) = (g(\frac{\alpha+\beta}{p}))^p = g(\frac{\alpha}{p})^p . g(\frac{\beta}{p})^p =$$

$$= \phi(\hat{g}(\alpha), \hat{g}(\beta)).$$

<u>unicidade</u>: Seja $h: \mathbb{C} \to U$ com as propriedades $h/B_r = g$; $h(\alpha+\beta) = \phi(h(\alpha), h(\beta))$.

Temos:

$$\hat{g}(\alpha) = (g(\frac{\alpha}{p}))^p = (h(\frac{\alpha}{p}))^p = h(\alpha) \text{ daí } h = \hat{g}$$

<u>Observação 3.4</u>

Em vista do teorema acima não há perda de generalidade considerar os subgrupos a um parâmetro de um grupo de Lie definidos em $\mathbb{C}$.

§ 8 - Função exponencial - grupos de Lie locais canônicos.

TEOREMA 10.4

Seja $(\phi,U,V,W) \subset X$ um grupo de Lie local. se $\rho > 0$ e $M > 1$ são constantes tais que $|L(g).a| \leq M.|a|$ ($\forall\ a \in X$, $\forall\ g \in B(e,\rho) \subset U$), então existe uma única aplicação analítica.

$$E: B(0, \frac{1}{2}\frac{\rho\theta}{M}) \to U \quad \text{com as propriedades:}$$

1) $E\ (0) = e$

2) $E'\ (0) = I_X$

3) $E(\alpha+\beta)x) = E(\alpha x).E(\beta x) \quad (\forall\ \alpha,\beta \in B(0,1) \subset \mathbb{C})$

Demonstração

Para cada $a \in X$ a equação diferencial,

(I_a) $g'(\alpha) = L(g).a$, é completamente integrável em $\mathbb{C} \times U$, A solução de (I_a) pelo ponto $(0,e) \in \mathbb{C} \times U$, anotado - por $g(\alpha;a)$ está definida em

$$\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z|.|a| < \rho\ \frac{\theta}{M}\}$$

Se tomarmos $|g| < \frac{1}{2}\ \frac{\theta}{M}$ vemos que $g(\alpha;a)$ está definido para $|z| < 2$.

A aplicação

$$(\alpha,a) \in B(0,2) \times B(0,\tfrac{1}{2}\rho\tfrac{\theta}{M}) \to g(\alpha;a) \in U \quad \text{é analítica, de}$$

onde vem pelo teorema de Hartogs que a aplicação

$$a \in B(0,\tfrac{1}{2}\,\rho\,\tfrac{\theta}{M}) \overset{E}{\to} E(a) = g(1;0) \in U \quad \text{é analítica.}$$

Convém notar que E associa a cada $a \in B(0,\frac{1}{2}\,\rho\,\frac{\theta}{M}) \subset X$ o valor do subgrupo a um parâmetro determinado por a no ponto $\alpha=1$.

Note-se ainda que, fixado β com $|\beta| \leq 1$ as aplicações :

$$\alpha \in B(0,2) \subset \mathbb{C} \to g(\alpha;\beta a) \in U$$

$$\alpha \in B(0,2) \subset \mathbb{C} \to g(\alpha\beta;a) \in U$$

são subgrupos a um parâmetro de (ϕ,U,V,W) ambos determinados por βa, portanto, conforme o teorema 8.4,

$$g(\alpha;\beta a) = g(\alpha\beta,a) \qquad (\forall\ \alpha \text{ com } |\alpha| < 2).$$

Fazendo $\alpha=1$ obtemos:

$$g(1,\beta a) = g(\beta,a)$$

Mostremos agora que E tem as propriedades 1) a 3) acima.

1) $g'_\alpha(\alpha;0) = L(g(\alpha;0)).g'_\alpha(0,0) = 0$ segue que $g(\alpha;0)$ é constante. Sendo $g(0;0) = e$ vem que $g(\alpha;0) = e$ $(\forall\ \alpha$ com $|\alpha| <2)$, portanto,

$$E(0) = g(1;0) = e$$

2) $E'(0)h = \{\frac{d}{d\beta} E(0+\beta h)\}_{\beta=0} = \{\frac{d}{d\beta} g(1;\beta h)\}_{\beta=0} =$

$\{\frac{d}{d\beta} g(\beta;h)\}_{\beta=0} = g'_{\alpha}(0,h) = h$

3) Sejam $\alpha,\beta \in B(0,\frac{1}{2}) \subset \mathbb{C}$ e $x \in B(0,\frac{1}{2}\rho\frac{\theta}{M}) \subset X$.

Temos:

$E((\alpha+\beta)x) = g(1;(\alpha+\beta)x) =$

$= g((\alpha+\beta);x) = g(\alpha;x) \cdot g(\beta;x) =$

$= g(1;\alpha x) \cdot g(1,\beta x) = E(\alpha x) \cdot E(\beta x)$

<u>Unicidade</u>

Seja $F: B(0,\frac{1}{2}\rho\frac{\theta}{M}) \to U$ analítica com as propriedades 1) a 3) acima.

Dado $a \in B(0,\frac{1}{2}\rho\frac{\theta}{M})$, vemos por 3) que a aplicação $\alpha \in B(0,2) \subset \mathbb{C} \to F(\alpha a) \in U$ é um subgrupo a um parâmetro de (ϕ,U,V,W) com

$\{\frac{d}{d\beta} F(\alpha,a)\}_{\alpha=0} = \{F'(\alpha a).a\}_{\alpha=0} =$

$= F'(0).a = a$; portanto, em vista do teorema 8.4 temos que:

$F(\alpha a) = E(\alpha a)$ ($\forall\ \alpha$ com $|\alpha| < 2$) de onde vem

$$E(a) = E(1,a) = F(1.a) = F(a)$$

DEFINIÇÃO 21.4

Sejam, $(\phi,U,V,W) \subset X$ um grupo de Lie local, $\rho > 0$ e $M > 1$ constantes tais que $|L(g)a| \leq M|a|$ $(\forall\, a \in X$, $\forall\, g \in B(e,\rho) \subset U)$. A aplicação

$$x \in B(0,\frac{1}{2}\,\rho\,\frac{\theta}{M}) \subset X \overset{E}{\to} g(1,x) \in U$$

será chamada exponencial local de (ϕ,U,V,W) determinada por ρ e M.

TEOREMA 11.4

Se $(\phi,U) \subset X$ é um grupo de Lie então existe uma única aplicação analítica $\hat{E}: X \to U$ com as propriedades:

1) $\hat{E}(0) = e$

2) $\hat{E}'(0) = I_X$

3) $\hat{E}((\alpha+\beta)x) = \hat{E}(\alpha x)\cdot\hat{E}(\beta x)$, $(\forall\, x \in X,\ \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{C})$.

Demonstração

Sejam $\rho > 0$ e $M > 1$ constantes tais que

$|L(g).a| \leq M|a|$ $(\forall\, a \in X,\ \forall\, g \in B(e,\rho) \subset U)$.

Consideremos o exponencial local:

$x \in B(0,\frac{1}{2}\,\rho\,\frac{\theta}{M}) \overset{E}{\to} g(1;x) \in U$, determinada por ρ e M.

Definamos $\hat{E}: X \to U$ como segue:

$\hat{E}(x) = (E(\frac{x}{p}))^p$ onde p é um natural tal que

$\frac{x}{p} \in B(0,\frac{1}{2}\rho\frac{\theta}{M})$.

A definição acima não depende de p, pois se q é outro natural tal que $\frac{x}{q} \in B(0,\frac{1}{2}\rho\frac{\theta}{M})$ temos:

$$(E(\frac{x}{p}))^p = (E(q\frac{x}{pq}))^p =$$

$$= (E(\frac{x}{pq}))^{pq} = (E(\frac{x}{pq}))^q = (E(\frac{x}{q}))^q$$

A aplicação $\hat{E}$ é obviamente uma extensão de E portanto valem as propriedades 1) e 2).

$\hat{E}$ é analítico em cada sunconjunto aberto da forma $P.B(0,\frac{1}{2}\rho\frac{\theta}{M})$ com $P \in N$, pois de escreve aí como composta das aplicações analíticas:

$$x \in P.B(0,\frac{1}{2}\rho\frac{\theta}{M}) \to \frac{x}{p} \in B(0,\frac{1}{2}\rho\frac{\theta}{M}) \quad \text{e}$$

$$x \in B(0,\frac{1}{2}\rho\frac{\theta}{M}) \overset{E}{\to} g(1,x) \in U.$$

Sendo $X = \bigcup_{p\in N} p.B(0,\frac{1}{2}\rho\frac{\theta}{M})$ vem que $\hat{E}$ é analítico em todo X.

Sejam $\alpha,\beta \in C$ e $x \in X$.

Temos:

$$\hat{E}((\alpha+\beta)x) = (E(\frac{(\alpha+\beta)x}{p}))^p =$$

$$= (E(\frac{\alpha x}{p}))^p \; (E(\frac{\beta x}{p}))^p = \hat{E}(\alpha x).\hat{E}(\beta x), \text{ portanto vale 3).}$$

Unicidade

Seja $F: X \to U$ com as propriedades 1) a 3) acima. Dado $x \in X$, as aplicações:

$$\alpha \in \mathbb{C} \to F(\alpha x) \in U$$

$$\alpha \in \mathbb{C} \to \hat{E}(\alpha x) \in U$$ são subgrupos a um parâmetro de (ϕ, U) com

$$\{\frac{d}{d\alpha} F(\alpha x)\}_{\alpha=0} = \{\frac{d}{d\alpha} \hat{E}(\alpha x)\}_{\alpha=0} = x, \text{ portanto},$$

conforme o teorema 8.4 temos

$$F(\alpha x) = \hat{E}(\alpha x) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C} \text{ donde vem que}$$

$$F(x) = \hat{E}(x).$$

DEFINIÇÃO 22.4

Seja (ϕ, U) um grupo de Lie. A única aplicação de X em U com as propriedades 1) a 3) do teorema anterior será chamada "função exponencial do grupo de Lie (ϕ, U)" e anotado por $\exp_U$.

A condição 2) garante-nos que $\exp_U$ é localmente inversível na origem de X. Sua inversa local (em e) será anotada por Log_U.

DEFINIÇÃO 23.4

Dizemos que um grupo de Lie local $(\phi,U,V,W) \subset X$ é canônico quando as condições seguintes estiverem verificados:

a) $e = 0$

b) $L(x).x = x \quad (\forall\, x \in U)$

Sejam, $(\phi,U,V,W) \subset X$ um grupo de Lie local canônicos, Existe $a \in X$ e $r_a > 0$ tal que $|\alpha| < r_a \Rightarrow \alpha a \in U$.

O par (f_a, B_{r_a}) onde, $B_{r_a} = B(0,r_a) \subset \mathbb{C}$ e f_a é a aplicação $\alpha \in B_{r_a} \to \alpha a \in U$, é um subgrupo a um parâmetro de (ϕ,U,V,W); pois:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\alpha} F_a(\alpha) = a = L(\alpha a).a \\ f_a(0) = e \end{cases}$$

Tais subgrupos a um parâmetro serão chamados lineares.

Do exposto acima e pelo teorema 8.4 concluimos que todos os subgrupos a um parâmetro de um grupo de Lie local canônico são lineares. O teorema seguinte mostra que a recíproca também é verdadeira.

TEOREMA 12.4

Seja $(\phi,U,V,W) \subset X$ um grupo de Lie local. Se todos os seus subgrupos a um parâmetro forem lineares então (ϕ,U,V,W) é canônico.

Demonstração

Sejam, $a \in X$ e (f_a,B_{r_a}) o subgrupo linear a um parâmetro determinado por a. Temos:

$e = f_a(0) = 0.a = 0$, de onde vem que vale a condição a) da definição.

Por outro lado, sejam $x \in U$ e (f_x,B_{r_x}) o subgrupo linear a um parâmetro determinado por x. Temos:

$$\frac{d}{d\alpha} f_x(\alpha) = x = L(\alpha x).x \quad (\forall\ \alpha \in B_{r_x})$$

Fazendo $\alpha=1$ vem $L(x).x = x$ e por tanto vale b).

TEOREMA 13.4

Todo grupo de Lie local $(\phi,U,V,W) \subset X$ é isomorfo a um grupo de Lie local canônico.

Demonstração

Sejam, $\rho > 1$ e $M > 1$ tais que $|L(g)a| \leqslant M|a|$ $(\forall a \in X, \forall\ g \in B(e,\rho) \subset U)$.

Consideremos a exponencial local

$$x \in B(0,\frac{1}{2}\rho\frac{\theta}{M}) \subset X \xrightarrow{E} g(1;x) \in U.$$

Sendo $E'(0) = I_X$ vem que E é localmente inversível com inversa analítica, isto é, existem vizinhanças W_1 do zero em X e W' do "e" em U tais que,

$E/W_1 : W_1 \to W'$ é analítica com inversa analítica.

Seja (ϕ,U',V',W') o grupo de Lie local determinado por W' conforme o teorema 3.4. Decorre da proposição 7.4 que $G_{E^{-1}(W')} = (\phi_1,E^{-1}(U'),E^{-1}(V'),E^{-1}(W'))$ onde

$\phi_1 = E^{-1} o\ \phi\ o\ (E \times E)$, é um grupo de Lie local em X com unidade $e_1=0$, localmente isomorfo a (ϕ,U',V',W') portanto, localmente isomorfo a (ϕ,U,V,W).

Para concluir a demonstração falta mostrar que $L_1(x).x = x$ $(\forall\ x \in E^{-1}(U'))$, onde, L_1 é a transformação infinitesimal de $G_{E^{-1}(W')}$.

Por hipótese temos:

$$\phi_1(x,y) = E^{-1} o\ \phi\ o\ (E \times E)(x,y) = (E^{-1} o\ \phi)(E(x).E(y))$$

$(\forall\ x,y \in E^{-1}(U')$, de onde vem que,

$$L_1(x).x = \phi'_{1y}(x,e_1).x =$$

$$= (E^{-1})'(E(x)\ \phi'(E(x).x = (E^{-1})'(E(x)).L(E(x)).x$$

$$y$$

Sendo $E'(x).x = \{\frac{d}{d\beta}\ g(1;x+\beta x)\Big|_{\beta=0} =$

$$=\{\frac{d}{d\beta}\ g(1+\beta;x)\}\Big|_{\beta=0} = \{L(g(1+\beta;x)).x\}\Big|_{\beta=0} =$$

$= L(E(x)).x$ vem que

$$L_1(x).x = (E^{-1} \circ E)'(x) = x$$

§ 9 - A álgebra de Lie de um grupo de Lie local.

TEOREMA 14.4

Sejam (ϕ,U,V,W) um grupo de Lie local num espaço de Banach X e L sua transformação infinitesimal.

A aplicação $[\ ]_\phi : X^2 \to X$ dado por

$[h,k]_\phi = L'(e)(k,h) - L'(e)(h,k)$ define uma estrutura de álgebra de Lie em X.

Demonstração

Seja U_1 uma vizinhança aberta e simétrica do "e" tal que $U_1.U_1 \subset U$. Conforme o corolário 1.4, a restrição de L ao subconjunto U_1 é uma transformação infinitesimal do aberto U_1, portanto o subespaço $I(L_1,U_1) = \{Lh: U_1 \to X / h \in X\} \subset H(U_1,X)$ é fechado relativamente ao colchete de $H(U_1,X)$.

Consideremos a aplicação:

$\theta : X \to I(L_1,U_1)$, dado por $\theta(h) = Lh$. Verifica-se facilmente que θ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais X e $I(L_1,U_1)$.

Definamos $[\cdot]_1 : X^2 \to X$ por $[h,k]_1 = \theta^{-1}([Lh,Lk])$. Demonstra-se sem dificuldade que $[\cdot]_1$ é bilinear e que valem as

propriedades:

1) $[h,k]_1 = [k,h]_1$

2) $[[h,k]_1,r]_1 + [[k,r]_1,h]_1 + [[r,h]_1,k]_1 = 0$

$(\forall\ h,k,r \in X)$.

Afirmamos que $[\ ]_1 = [\ ]_\phi$.

Com efeito temos:

$L_{[h,k]_1} = [Lh,Lk]$. Isto significa que:

$L(x).[h,k]_1 = [Lh,Lk]\ (x) \quad (\forall\ x \in U_1)$, de onde vem que

$[h,k]_1 = \varepsilon(x).[Lh,Lk]\ (x) \quad (\forall\ x \in U_1)$ pondo x=e tem-se

$[h,k]_1 = L'(e)(k,h) - L'(e)(h,k) = [h,k]_\phi$

Sendo contínuas as aplicações:

$(h,k) \in X^2 \to L'(e)(h,k) \in X$ e $(h,k) \in X^2 \to L'(e)(k,h) \in X$

vem que $[\ ]_\phi : X^2 \to X$ é contínua, portanto, $X = (X, [\ ]_\phi)$ é uma álgebra de Lie.

DEFINIÇÃO 24.4

Se $G = (\phi,U,V,W) \subset X$ é um grupo de Lie local, então, a álgebra de Lie $G = (X,[\ ]_\phi)$ construida acima, será chamada a álgebra de Lie do grupo (ϕ,U,V,W).

TEOREMA 15.4

Se dois grupos de Lie locais são isomorfos então suas álgebras de Lie são isomorfas.

Demonstração

Sejam, X e Y espaços de Banach complexos,

$G=(\phi;U,V,W)\subset X$ e $G_1=(\phi_1,U_1,V_1,W_1) \subset Y$ grupos de Lie locais com unidades "e" e "e_1" respectivamente e f um isomorfismo local de G em G_1.

Mostraremos que $f'(e)$ é um isomorfismo entre as álgebras de Lie $X = (X,[.]_\phi|$ e $Y= (Y,[.]_{\phi 1})$

Por hipótese existem $A \in V_a(e)$ e $B \in V_a(e_1)$ tais que $f: A \to B$ é uma bijeção analítica com inversa analítica satisfazendo:

$$f(\phi(x,y)) = \phi_1(f(x).f(y))$$

$$(\forall\ x,y \in A\ /\ \phi(x,y) \in A)$$

Diferenciando ambos os membros da igualdade acima, com relação à variável y e com acréscimo h no ponto y=e obtemos:

(1) $f'(x)L(x).h = L_1(f(x)).f'(e).h$

onde, L e L_1 são respectivamente as transformações infinitesimais de G e G_1.

Diferenciando ambos os membros de (1) com acréscimo k no ponto x=e, obtemos,

(2) $$f''(e)(k,h) + f'(e)L'(e)(k,h) =$$

$$= L_1'(e_1).(f'(e)k,f'(e)h).$$

Permutando-se h e k obtemos:

(3) $$f''(e)(h,k) + f'(e)L'(e)(h,k) =$$

$$= L_1'(e_1)(f'(e)h,f'(e)k)$$

De (2) e (3) obtemos por subtração:

$$f'(e).(L'(e)(k,h) - L'(e)(h,k) =$$

$$= L_1'(e_1)(f'(e)k,f'(e)h) - L_1'(e_1)(f'(e)h,f'(e)k)$$

ou seja,

$$f'(e).\ [h,k]_\phi = [f'(e)k,f'(e)h]_{\phi 1}$$

Como $f'(e) \in \mathrm{Isom}\,(X,Y)$ e é contínua segue que X e Y são isomorfas.

Lema 2.4

Seja $(\phi,U,V,W) \subset X$ um grupo de Lie local canônico.

Para cada $(y,h) \in X^2$, a aplicação

$t \in \Omega(y) \to \mathcal{E}(ty)(th) \in X$ onde $\Omega(y) = \{t \in \mathbb{C} \,/\, ty \in U\}$ é solução da equação diferencial

$$W'(t) = h + [y,w]_\phi \text{ pelo ponto } (0,0) \in \mathbb{C} \times X.$$

Demonstração

Pelo teorema 5.4 e pelo lema 1.4 temos:

$$[r,s]_\phi = \mathcal{E}(z)\ [L_r,L_s]\ (z) =$$

$$= \mathcal{E}'(z)(L(z)r,L(z)s) - \mathcal{E}'(z)(L(z)s,L(z)r),$$

$$(\forall\ r,s \in X,\ \ \forall\ z \in U).$$

Fazendo $z=r=ty$ e $s=\mathcal{E}(ty)h$ onde $t \in \Omega(y)$ vem:

(1) $[ty,\mathcal{E}(ty)h]_\phi = \mathcal{E}'(ty)(L(ty)(ty)),L(ty).\mathcal{E}(ty).h) -$

$- \mathcal{E}'(ty)(L(ty)\mathcal{E}(ty)h\ ,\ L(ty)(ty) =$

$= \mathcal{E}'(ty)(ty,h) - \mathcal{E}'(ty)(h,ty)$.

Por outro lado diferenciando-se ambos os membros da igualdade $\mathcal{E}(z).z=z$, com acréscimo h, obtemos:

$$\pounds'(z)(h,z) + \pounds(z).h = h$$

Fazendo $z=ty$ com $t \in \Omega(y)$ obtemos:

$$(2) \qquad \pounds'(ty)(h,ty) + \pounds(ty)h = h$$

De (1) e (2) segue que,

$$h + [y,\pounds(ty)(th)]_\phi = \pounds'(ty)(ty,h) + \pounds(ty)h =$$

$$= \frac{d}{dt}\{\pounds(ty)(th)\}$$

Sendo $\pounds(o.y)(o,h) = \pounds(0).0 = 0$, está concluida a demonstração.

TEOREMA 16.4

Sejam, X, Y espaços de Banach complexos, $G = (\phi,U,V,W) \subset X$ e $G_1 = (\phi_1,U_1,V_1,W_1) \subset Y$ grupos de Lie locais. Se suas álgebras de Lie $\mathcal{X} = (X, [\ ]_\phi)$ e $\mathcal{Y} = (Y,[\cdot]_{\phi 1})$ são isomorfos então G e G_1 são isomorfos.

Demonstração

Podemos supor sem perda que G e G_1 são canônicos. Seja T um isomorfismo de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$. Significa que $T \in Isom(X,Y)$, é contínua e $T[h,k]_\phi = [Th,Tk]_{\phi_1}$, $(\forall\ h,k \in X)$.

Pelo teorema de Banach (|11| , pág.34) segue que T é um homeomorfismo de X em Y. Logo, existem abertos $A \subset U$ e

$B \subset U_1$ tais que $T: A \to B$ é analítica com inversa analítica.

Afirmamos que para cada $(y,h) \in A \times X$ tem-se:

(1) $\quad T.(\pounds.(y)h) = \pounds_1(Ty).(Th)$

onde $\pounds$ e $\pounds_1$ são respectivamente, transformação infinitesimal inversa de G e G_1.

Com efeito, sejam $(y,h) \in A \times X$ e

$\Omega(y) = \{t \in \mathbb{C} \ / \ t.y \in A\} = \{t \in \mathbb{C} \ / \ t.(Ty) \in B\}$.

De acordo com o lema 2.4, a aplicação:

$t \in \Omega(y) \to \pounds_1(t.(Ty))(t.(Th)) \in Y$ é solução da equação diferencial,

(*) $\quad w'(t) = Th + [Ty,w]_{\phi_1}$

pelo ponto $(0,0) \in \mathbb{C} \times Y$.

Por outro lado a aplicação

$t \in \Omega(y) \to T(\pounds(ty)(th) \in Y$ também é solução de (*) pelo ponto $(0,0) \in \mathbb{C} \times Y$, pois,

$$\frac{d}{dt}\{T(\pounds(ty)(th)\} =$$

$$= T\,(h + [y,\ (ty)(th)]\,) =$$

$$= T.h + [Ty, T(\pounds(ty)(th))] \qquad \text{e}$$

é claro que $T.(\pounds(0.y)(0,h) = 0$

Logo,

$T(\pounds(ty)(th) = \pounds_1(t(T_y))(t.(Th))(\forall\ t \in \Omega(y))$. Fazendo t=1 na igualdade acima obtemos a fórmula (1).

De (1) decorre imediatamente

(2) $\quad T(L(y)h) = L_1(Ty)(Th)$.

Sejam $x,y \in A$ tais que $\phi(x,y) = x.y \in A$. Consideremos as funções:

$$Z \in A \to T\phi(x,z) \in Y \quad \text{e}$$

$$Z \in A \to \phi_1(Tx,Tz) \in Y$$

Temos:

$$(I) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dz}(T.\phi(x,z))h = \\ = T.(L(\phi(x,z)).\pounds(z)h) = \\ = L_1(T.\phi(x,z)).\pounds_1(T.z)(Th) \\ T.\phi(x,0) = T.x \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dz}\phi_1(Tx,Tz).h = \\ = L_1(\phi_1,(Tx,Tz)).\pounds_1(Tz)(Th) \\ \phi_1(Tx,To) = Tx \end{cases}$$

De (I) e (II) segue que $T.\phi(x,y) = \phi_1(Tx,Ty)$, de onde vem que T é um isomorfismo de G em G_1.

§ 10 - Construção de um grupo de Lie local canônico a partir de uma álgebra de Lie.

TEOREMA 17.4

Se $\mathcal{X} = (X, [.])$ é uma álgebra de Lie então existe um grupo de Lie local canônico em X cuja álgebra de Lie é $\mathcal{X}$.

Demonstração

Para cada $(y,h) \in X^2$ consideremos a equação diferencial

(*) $w'(t) = y + [h,w]$, a qual é completamente integrável em $\mathbb{C} \times X$. A solução de (*) pelo ponto $(0,0) \in \mathbb{C} \times X$ será anotado por $w(t,y)h$.

Sejam $\rho > 0$ e $M > 1$ constantes tais que

$$|h + [y,w]| \leq |h| + M|y|\rho, \quad (\forall\, h \in X, \quad \forall\, w \in B(0,\rho) \subset X)$$

Pelo corolário 4.3 , $w(t.y)h$ está definido em $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z|(\frac{|h| + M|y|\rho}{\rho}) < \theta\}$.

Se tomarmos y em $B_1 = B(0,\frac{\theta}{4M})$ e h em $B_2 = B(0,\frac{\theta\rho}{4})$ vemos que $w(t,y)h$ está definida para $|t| < 2$.

Mostremos que para $(y,h) \in B_1 \times X$ a solução $w(t,y)h$ também está definida para $|t| < 2$. Com efeito, seja p natural tal que $(\frac{h}{p}) \in B_2$ e consideremos a aplicação:

$$t \in (|t| < 2) \to p\omega(t,y)\left(\frac{h}{p}\right) \in X.$$

Temos:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\{p\omega(ty)\left(\frac{h}{p}\right)\} = p.\frac{d}{dt}\,\omega(t,y)\left(\frac{h}{p}\right) = \\ = p\,\frac{h}{p} + |y, \omega(t,y)\left(\frac{h}{p}\right)| = \\ = h + |y,\ p\omega(t,y)\left(\frac{h}{p}\right)| \quad , \quad e \\ p\ \omega(o,h)\left(\frac{h}{p}\right) = 0 \end{cases}$$

portanto $\omega(t,y)h = p\ \omega(t,y)\left(\frac{h}{p}\right)$, donde se conclui que $\omega(t,y)h$ está definida para $t \in B = B(0,2) \subset \mathbb{C}$.

A aplicação $(t,y,h) \in B \times B_2 \times X \to \omega(t,y)h \in X$ é analítica pois, o 2º membro de (*) depende analíticamente de y e h. Logo é analítica a aplicação

$$(**) \qquad (y,h) \in B_2 \times X \to \omega(1,y)h \in X.$$

Afirmamos que (**) é linear em h para cada y fixo em B_2. De fato, sejam h, h' $\in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$, e consideremos as aplicações:

$$t \in B \xrightarrow{f_1} \omega(t,y)h \in X$$

$$t \in B \xrightarrow{f_2} \omega(t,y)h + \omega(t,y)h' \in X.$$

Temos:

$$\begin{cases} f_1(0) = f_2(0) = 0 \\ f_1'(t) = \lambda h + [y, f_1(t)] \\ f_2'(t) = (h+h') + [y, f_2(t)] \end{cases}$$

portanto,

$$\omega(t,y)(\lambda h) = \lambda . \omega(t.y)h$$

$$\omega(t,y)(h+h') = \omega(t,y)h + \omega(t,y)h'$$

Fazendo t=1 obtemos a linearidade (**).

Seja $\pounds: B_2 \to \pounds(X,X)$ onde para cada $y \in B_1$, $\pounds_1(y)$ é a aplicação linear dada por $\pounds_1(y)h = \omega(1,y)h$, $(\forall\ h \in X)$.

Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que

$|y| < \delta \Rightarrow \pounds(y) \in GL(X)$. De fato, seja $\bar{\varepsilon}$ com $0 < \varepsilon < 1$ tal que $B(I_X, \varepsilon) \subset GL(X)$. Da analiticidade de (**) e teorema 11.2, existe $\delta > 0$ com $0 < \delta < \frac{\theta}{4M}$ tal que,

$|\pounds(y)h - \pounds(y')h'| < \varepsilon$, $(\forall\ (y,h), (y',h') \in X \times X$ com $|y-y'| < \delta$, $|h-h'| < \delta)$.

Em particular, $|\pounds(y)h - \pounds(0)h| < \varepsilon$, $(\forall\ y$ com $|y| < \delta)$;

de onde vem que $\|\pounds(y) - I_X\| < \varepsilon$ para todo y com $|y| < \delta$.

Seja $L: B(0,\delta) \to GL(X)$ dado por $L(x) = (\pounds(x))^{-1}$. Mostremos que L é uma transformação infinitesimal de $B(0,\delta)$.

Com efeito, decorre da analiticidade de (**) que a aplicação

$(y,h) \in B(0,\delta) \times X \to \pounds(y)h \in X$ é analítica.

Por outro lado, sendo

$$L(y)h = (\pounds(y))^{-1}h = (I_X - (I_X - \pounds(y)))^{-1} =$$

$$= \sum_{n\geq 0} (I_X - \pounds(y))^n.h \quad , \quad \text{vem que}$$

$(y,h) \in B(0,\delta) \times X \to L(y)h \in X$ é analítica.

Falta verificar que $I(L,B(0,\delta))$ é fechado relativamente ao colchete de $H(B(0,\delta),X)$. Para isto mostremos que vale a igualdade

$$[\pounds(y)r, \pounds(y)s] = \pounds'(y)(r,s) - \pounds'(y)(s,r) \ ,$$

$$(\forall\ r,s \in X, \ \forall\ y \in B(0,\delta))$$

Seja

$$X(t) = (w(t.y)s)'_y r - (w(t,y)r)'_y s - [w(t,y)r, w(t,y)s]$$

onde $t \in B = B(0,2) \subset \mathbb{C}$. Temos:

$$X'(t) =$$

$$= (s+[y,\omega(t,y)s])'_y r-(r+[y,\omega(t,y)r])'_y s-\frac{d}{dt}([\omega(t,y)r,\omega(t,y)s]) =$$

$$= [y,(\omega(t,y)s)'_y r] + [r,\omega(t,y)s] -$$

$$- [y,(\omega(t,y)r)'_y s] - [s,\omega(t,y)r] -$$

$$- [\omega(t,y)r,s+[y,\omega(t,y)s]] -$$

$$- [r+[y,\omega(t,y)r] , \omega(t,y)s] =$$

$$= [y,(\omega(t,y)s)'_y r] + [r,\omega(t,y)s] -$$

$$- [y,(\omega(t,y)r)'_y s] - [s,\omega(t,y)r] -$$

$$- [\omega(t,y)r,s] - [\omega(t,y)r,[y,\omega(t,y)s] -$$

$$- [r,\omega(t,y)s] - [[y,\omega(t,y)r] , \omega(t,y)s] =$$

$$= [y,\{(\omega(t,y)s)'_y r-(\omega(t,y)r)'_y s-[\omega(t,y)r,\omega(t,y)s]\}]$$

$$= [y,X(t)]$$

Isto significa que a aplicação $t \in B \to X(t)$ é solução do sistema:

$$(I) \qquad \begin{cases} X'(t) = [y,X] \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

Logo $X(t)=0$ ($\forall\ t \in B$) pois, a função identicamente nula é solução de (I). Fazendo $t=1$ obtemos:

$$(w(1,y)s)'_y r-(w(t,y)r)'_y s-[w(1,y)r,w(1,y)s] = 0 ,$$

de onde vem que

$$[\pounds(y)r,\pounds(y)s] = \pounds'(y)(r,s)-\pounds'(y)(s,r).$$

Sejam $h,k \in X$ e $y \in B(0,s)$. Pondo-se $r=L(y)h$ e $s=L(y)k$ na igualdade acima tem-se pelo lema 1.4:

$$[h,k] = \pounds'(y)(L(y)h.L(y)k-\pounds'(y)(L(y)k,L(y)h) =$$

$= \pounds(y)[Lh,Lk]_H(y)$, onde $[,]_H$ é o colchete de $H(B(0,\delta),X)$

Logo,

$[Lh,Lk]_H = L_p$ onde $p=[h,k]$, portanto, $I(L.B(0,\delta))$ é fechada relativamente a $[\ ]$. Assim L é uma transformação - infinitesimal do aberto $B(0,\delta)$ e é óbvio que $L(0)=I_X$.

Pelo teorema 7.4, existe um grupo de Lie local - $G=(\phi,U,V,W)$ em X com $W \subset B(0,\delta)$, tendo unidade $e=0$ e transformação infinitesimal L.

A álgebra de Lie de G é evidentemente X pois,

$$[h,k]_{\phi 1} = L'(e)(k,h)-L'(e)(h,k) = [h,k]$$

Dado $a \in U$, seja $r_a > 0$ tal que $|t| < r_a \Rightarrow t_a \in U$.

Consideremos a aplicação $t \in B_{r_a}=B(0,r_a) \subset C \xrightarrow{f_a} t_a \in U$.

Temos:

$$\begin{cases} f_a'(t) = a = a+[a,t_a] = a+[a,f_a(t)] \\ \\ f_a(0) = 0 \end{cases}$$

Logo, $w(t,a).a = ta$ ($\forall$ $t \in B_{r_a}$. Fazendo $t=1$ obtemos $\pounds(a).a=a$ de onde decorre imediatamente que $L(a).a = a$, portanto G é canônico.

CAPÍTULO V

SUBGRUPOS DE UM GRUPO DE LIE

§ 1 . Variedades Analíticas

DEFINIÇÃO 1.5

Seja M um conjunto. Uma carta em M é uma terna (ϕ, U, E) onde, U é uma parte de M, E é um espaço de Banach complexo, e ϕ é uma bijeção de U em $\phi(U)$, sendo $\phi(U)$ aberto em E

DEFINIÇÃO 2.5

Um atlas analítico sobre M é uma coleção de cartas $A = (\phi_\alpha, U_\alpha, E_\alpha)_{\alpha \in I}$ satisfazendo as condições:

$A_1)$ $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$

$A_2)$ Para quaisquer α e β em I, $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é aberto em E_α.

$A_3)$ Para quaisquer α e β em I, a aplicação

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é analítica.

DEFINIÇÃO 3.5

Duas cartas (ϕ,U,E) e (ψ,V,F) com $U \cap V \neq \emptyset$ sobre um conjunto M são compatíveis se, $\phi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são abertos em E e em F respectivamente e a aplicação

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$$

é um difeomorfismo analítico.

DEFINIÇÃO 4.5

Uma carta (ψ,V,F) diz-se compativel com um atlas $A = (\phi_\alpha,U_\alpha,E_\alpha)_{\alpha \in I}$ se, cada carta $(\phi_\alpha,U_\alpha, E_\alpha) \in A$ com $U_\alpha \cap V \neq \emptyset$ for compativel com (ψ,V,F).

DEFINIÇÃO 5.5

Dois atlas A e A^* sobre um conjunto M são compativeis se, cada carta de um deles for compativel com o outro atlas.

Verifica-se que a relação de compatibilidade entre atlas analíticos é de equivalência. A classe de equivalência determinada por um atlas analítico será anotada por $\bar{A}$

DEFINIÇÃO 6.5

Uma variedade analítica é um par $(M,\bar{A})$ onde M é um conjunto e A é um atlas analítico sobre M.

Se $(M,\overline{\mathcal{U}})$ e $(N,\overline{\mathcal{V}})$ são variedades analíticas então a coleção

$$\mathcal{U}\times\mathcal{V} = ((\phi_\alpha\times\psi_\beta), (U_\alpha\times V_\beta) , (E_\alpha\times F_\beta))_{(\alpha,\beta)\in I\times J}$$

define um atlas analítico sobre o conjunto $M\times N$. Assim o par $(M\times N, \overline{\mathcal{U}\times\mathcal{V}})$ é uma variedade analítica.

TEOREMA 1.5

Seja $(M, \overline{A})$ uma variedade analítica. Existe uma única topologia τ sobre M de modo que, se $(\phi,U,F) \in \overline{A}$ então $U \in \tau$ e ϕ é um homeomorfismo de U em $\phi(U)$.

Demonstração

Consideremos a coleção

$$\mathcal{B} = \{ \phi^{-1}(\Omega) \ / \ \Omega \text{ é aberto em } \phi(U) \text{ e } (\phi,U,E) \in \overline{A} \}$$

A coleção $\mathcal{B}$ tem as propriedades:

(1) Se $p \in M$, então existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $p \in C$.

(2) Se $C_1, C_2 \in \mathcal{B}$ e $p \in C_1 \cap C_2$ então existe $C_3 \in \mathcal{B}$, tal que, $p \in C_3 \subset C_1 \cap C_2$.

De fato, se $p \in M$ existe uma carta $(\phi,U,E) \in \overline{A}$, tal que $p \in U$, basta então tomar $C = \phi^{-1}(U)$ que teremos (1).

Sejam $C_1, C_2 \in \mathcal{B}$ e $p \in C_1 \cap C_2$. Podemos escrever:

$C_1 = \phi^{-1}(\Omega_1)$ onde $\Omega_1 \subset \phi(U)$ é aberto e $(\phi,U,E) \in \overline{A}$,

$C_2 = \psi^{-1}(\Omega_2)$ onde $\Omega_2 \subset \psi(V)$ é aberto e $(\psi,V,F) \in \overline{A}$.

Pondo-se

$$W = \Omega_1 \cap \phi \circ \psi^{-1}(\Omega_2) \quad \text{e} \quad C_3 = \phi^{-1}(W)$$

temos que, $C_3 \in \mathcal{B}$ e $p \in C_3 \subset C_1 \cap C_3$, o que verifica (2)

De acordo com (12, pág.70) é base de uma topologia τ em M com a propriedade: se $(\phi,U,F) \in \bar{A}$ então $U \in \tau$ e ϕ é um homeomorfismo de U em $\phi(U)$.

Se τ' é outra topologia em M com a propriedade citada então τ' terá $\mathcal{B}$ como base de abertos e portanto $\tau = \tau'$.

DEFINIÇÃO 7.5

Sejam $(M,\bar{W})$ e $(N,\bar{V})$ variedades analíticas. Dizemos que uma aplicação $f: M \to N$ é analítica se, para cada $p \in M$ existirem cartas $(\phi,U,E) \in \bar{W}$, $(\psi,V,F) \in \bar{V}$, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que, a aplicação $\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(U) \to \psi(V)$ é analítica.

A definição acima não depende das cartas escolhidas.

DEFINIÇÃO 8.5

Seja X um espaço de Banach complexo e $(M,\bar{W})$ uma variedade analítica com $M \subset X$.

Dizemos que $(M,\bar{W})$ é uma subvariedade analítica de X se cada carta $(\phi,U,E) \in \bar{W}$ verificar as condições:

$S_1)$ $\phi^{-1}: \phi(U) \to X$ é analítica

$S_2)$ $(\phi^{-1})'(x): E \to X$ é injetiva, $\forall\, x \in \phi(U)$

$S_3)$ $(\phi^{-1})'(x).E$ é fechado na topologia de X.

DEFINIÇÃO 9.5

Seja $(M,\overline{W})$ uma subvariedade analítica de um espaço de Banach X. O espaço tangente a M no ponto p, anotado por TM_p é o subespaço

$$TM_p = (\phi^{-1})'(\phi(p)).E \quad ,$$ onde (ϕ,U,E) é uma carta em p.

Verifica-se que a definição acima não depende da carta considerada em p.

TEOREMA 2.5

Sejam, X e Y espaços de Banach complexos e $U \subset X$ aberto. Se $f: U \to Y$ é uma aplicação analítica, $(M,\overline{W})$ e $(N,\overline{V})$, são subvariedades analíticas com $M \subset U$, $f(M) \subset N \subset Y$ e $f/M: M \to N$ é analítica, então, $f'(p).\ TM_p \quad TN_{f(p)} \quad \forall\, p \in M$

Demonstração

Sejam $p \in M$, $(\phi,U,E) \in \overline{W}(\psi,V,F) \in V$ cartas em p e $f(p)$ respectivamente. Denotemos por T a aplicação:

$$(\phi^{-1})\ (\phi(p))\ :\ E \to TM_p.$$

Sejam $h \in TM_p$ e $w \in E$ tal que $h = T(w)$.

Temos:

$$f'(p).h = f'(p).T(w) =$$

$$= f'(p)\ (\phi^{-1})'(\phi(p).w =$$

$$= (f \circ \phi^{-1})'(\phi(p))w =$$

$$= (\psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}))'(\phi(p)).w =$$

$$= (\psi^{-1})'(\psi(f(p))).(\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(p)).w$$

Como $(\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(p)).w \in F$ vem que,

$$f'(p).h \in TN_{f(p)}.$$

§ 2 - Subgrupos e Subálgebras de Lie

DEFINIÇÃO 10.5

Sejam, X um espaço de Banach complexo, $G = (\phi, G)$ um grupo de Lie em X. Um subgrupo de Lie de G é uma subvariedade analítica H de X, satisfazendo as condições:

SG_1) H é um subgrupo de G. (no sentido algébrico)

SG_2) As aplicações

$$\phi: H \times H \to H \qquad \text{e} \qquad x \in H \to x^{-1} \in H$$

são analíticas.

LEMA 1.5

Sejam, X e Y espaços de Banach, $G = (\phi, G) \subset X$ e $G_1 = (\phi_1, G_1) \subset Y$ grupos de Lie, $H \subset G$ e $H_1 \subset G_1$ subgrupos de Lie. Se $f: H \to H$ é um homomorfismo algébrico, analítico em e, então f é analítica em H.

Demonstração

Por hipótese existem cartas (ϕ, U, E) em e, (ψ, V, F) em $e_1 = f(e)$ com $f(U) \subset V$, tais que, a aplicação:

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V) \qquad \text{é analítica.}$$

Seja $a \in H$ e $b=f(a) \in H_1$.

As ternas $(\phi \circ \tau_a - 1, aV, E)$ e $(\psi \circ \tau_b - 1, bV, F)$ são cartas em a e em b respectivamente, com $f(aU) = f(a).f(U) \subset bV$.

Tem-se:

$$(\psi \circ \tau_b - 1) \circ f \circ (\phi \circ \tau_a - 1)^{-1} =$$

$$= (\psi \circ \tau_b - 1) \circ f \circ (\tau_a \circ \phi^{-1}) = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$$

de onde vem que o primeiro membro é analítico e, portanto, f é analítica.

PROPOSIÇÃO 1.5

Sejam $G = (\Phi, G)$ um grupo de Lie em X e H um subgrupo de Lie de G. Se (ϕ, W, E) é uma carta em e, então, existe um grupo de Lie local em E, localmente homomorfo a G por meio de ϕ^{-1}.

Demonstração

Sendo H um grupo topológico relativamente à topologia definida pela sua estrutura de variedade, existem (conforme teorema 2.4) abertos U e V em H tais que (Φ, U, V, W) é um grupo topológico local contido em H. Sendo ϕ um homeomorfismo de W em $\phi(W)$ vem que os subconjuntos $\phi(U)$ e $\phi(V)$ são abertos em $\phi(W)$. Definindo-se $\xi : \phi(V) \times \phi(V) \to \phi(W)$ por:

$$\xi(x,y) = (\phi \circ \Phi)(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y))$$

verifica-se que $G_1 = (\xi, \phi(U), \phi(V), \phi(W))$ é um grupo de Lie local em E e que $\phi^{-1} : \phi(W) \to G$ é um homomorfismo local de G em G_1.

§ 3 - A subálgebra de Lie associada a um subgrupo de Lie.

TEOREMA 3.5

Sejam $G = (\phi, G)$ um grupo de Lie num espaço de Banach X e H um subgrupo de Lie de G. O espaço tangente TM_e é uma subalgebra de Lie da álgebra $\mathcal{G} = (X; [\ ])$.

Demonstração

Conforme proposição 1.5, se (ϕ, w, E) é carta em "e" então existe um grupo de Lie local $G_1 = (\xi, \phi(U), \phi(V), \phi(W))$ em E tal que $\phi^{-1}: G_1 \to G$ é um homomorfismo local. Verifica - se (como no teorema 15.4) que $(\phi^{-1})'(\phi(e)) = T$ é um homomorfismo de álgebra de Lie $\mathcal{G}_1 = (E, [\ ]_\xi)$ do grupo G_1 na álgebra de Lie $\mathcal{G} = (X, [\ ]_\phi)$ do grupo G.

É óbvio que TH_e é subespaço fechado de X e além disso dados h, k $\in TH_e = T.E$ existem x,y $\in$ E tais que $h = T(x)$ $k = T(y)$ e daí

$$[h,k]_\phi = [T(x)\ ,\ T(y)] = T[x,y]_\xi \in TM_e$$

portanto TH_e é subálgebra de Lie da álgebra G.

DEFINIÇÃO 11.5

A subalgebra de Lie $H = (TH_e, [\ ]_\phi)$ da algebra G será chamada "a álgebra de Lie de H".

§ 4. Caracterização dos subgrupos de Lie conexos

TEOREMA 4.5

Seja $G = (\Phi, G)$ um grupo de Lie num espaço de Banach X e H um subgrupo de Lie conexo de G. Existe uma bola $B_r = B(o,r)$ em TH_e tal que

$$H = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\exp_G(B_r))^k$$

Demonstração

Seja (ϕ, W, E) uma carta em $e \in H$. Pela proposição 1.5 existe um grupo de Lie local $G_1 = (\xi_1, A_1, B_1, C_1)$ em E localmente homomorfo a G por meio de ϕ^{-1}. Pela proposição 7.4, sendo $T_\phi = (\phi^{-1})\phi(e_1)$ (onde e_1 é o elemento unidade de G_1) uma bijeção analítica com inversa analítica de E em TH_e, existe um grupo de Lie local $G_2 = (\xi_2, A_2, B_2, C_2)$ em TH_e, localmente isomorfo a G_1 por meio de T_ϕ. Pelo teorema 13.4, G_2 é localmente isomorfo a um grupo de Lie local canônico $G_3 = (\Phi_3, A_3, B_3, C_3)$ em TH_e por meio de $\exp_{G_2} = E_\phi$.

Assim a aplicação

$$F_\phi = \phi^{-1} \circ T_\phi^{-1} \circ E_\phi : A_3 \to H$$

é um homomorfismo de G_3 em H e é também um homeomorfismo de C_3 em $F_\phi(C_3) \subset H$. Tomando-se $r > o$ tal que $B_r = B(o,r) \subset A_3$

vem pela proposição 4.4 que

$$H = \bigcup_{k=1}^{\infty} (F_\phi(B_r))^k$$

Para concluir a demonstração basta provar que $F_\phi = \exp_G$ em B_r.

Sejam L e L_3 as transformações infinitesimais de G e de G_3 respectivamente. Afirmamos que em B_r F_ϕ satisfaz a equação diferencial abaixo

$$\begin{cases} y'(x).h = L(y).\mathcal{L}_3(x).h \\ y(0) = e \end{cases}$$

Com efeito, sendo F_ϕ um homomorfismo temos:

$$F_\phi(\Phi_3(x,y)) = \Phi(F_\phi(x), F_\phi(y)) \qquad (\forall x,y \in B_r)$$

Diferenciando ambos os membros com relação à variável y e acréscimo h no ponto y = 0 , temos:

$$(F_\phi)'(x).\Phi'_{3_y}(x,0).h = \Phi'_y(F_\phi(x),e).(F_\phi)'(0).h$$

Notando-se que,

$$(F_\phi)'(0).h = (\phi^{-1} \circ T_\phi^{-1} \circ E_\phi)'(0).h =$$

$$= (\phi^{-1} \circ T_\phi^{-1})'(e_2).h = (\phi^{-1})'(e_1).T_\phi^{-1}.h =$$

$$= (T_\phi \circ T_\phi^{-1}).h = h$$

obtemos a partir de (*)

$$(F_\phi)'(x).L_3(x).h = L(F_\phi(x)).h \quad , \text{daí}$$

$$\begin{cases} (F_\phi)'(x).h = L(F_\phi(x)).\ \pounds_3(x).h \\ F_\phi(0) = e \end{cases}$$

Sejam $x \in B_r$ e $s > 1$ tal que, $|\alpha| < 1 \Rightarrow \alpha x \in B_r$.
A aplicação:

$$\alpha \in (\ |\alpha|<1) \to F_\phi(\alpha x) \in G$$

é um subgrupo a um parâmetro de G. De fato, temos,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\alpha} F_\phi(\alpha x) = F'_\phi(\alpha x).x = L(F_\phi(\alpha x)).\pounds_3(\alpha x).x = \\ \qquad = L(F_\phi(\alpha x).x \\ F_\phi(0.x) = F_\phi(0) = e \end{cases}$$

Portanto, $F_\phi(\alpha x) = F_\phi(1.x) = \exp_G(x)$. Segue então que $F_\phi(B_r) = \exp_G(B_r)$ o que conclui a demonstração.

Corolário 1.5

Sejam, $G = (\phi, G)$ um grupo de Lie num espaço de Banach X, (H, A) e (H^*, A^*) subgrupos de Lie conexos de G.

Se $TH_e = TH_e^*$ então $(H, A) = (H^*, A^*)$.

Demonstração

Sejam $(\phi, U, E) \in A$ e $(\psi, V, F) \in A^*$ cartas em "e". Pelo teorema anterior existem bolas B_{r_1} e B_{r_2} centradas na origem do $TH_e = TH_e^*$ tais que

$$H = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\exp_G(B_{r_1}))^k$$

$$H^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\exp_G(B_{r_2}))^k$$

Tomando-se $r = \min\{r_1, r_2\}$ vem que $H = H^*$. Mostremos agora $A \simeq A^*$. Com as notações do teorema anterior temos

$$F_\phi = \phi^{-1} \circ T_\phi^{-1} \circ E_\phi = \exp_{G/B_r}$$

$$F_\psi = \psi^{-1} \circ T_\psi^{-1} \circ E_\psi = \exp_{G/B_r},$$

daí segue que a aplicação:

$$\phi \circ \psi^{-1} = T_\phi^{-1} \circ E_\phi \circ E_\psi^{-1} \circ T_\psi$$ é

um difeomorfismo analítico de $\psi(\exp_G B_r)$ em $\phi(\exp_G B_r)$. Isto significa que a aplicação $i : (H,A) \to (H,A^*)$ é um difeomorfismo analítico em "e". Sendo i um isomorfismo algébrico segue pelo lema 1.5 que i é um difeomorfismo analítico de (H,A) em (H,A^*) e portanto $A \simeq A^*$.

TEOREMA 5.5

Sejam, $G = (\Phi,G)$ um grupo de Lie num espaço de Banach X, H um grupo topológico com $H \subset G$ subgrupo de G no sentido algébrico, e Z um subespaço fechado de X.

Se existirem abertos A_1 em Z contendo a origem e V em H contendo "e" tais que $\exp_{G/A_1} : A_1 \to V$ é um homeomorfismo, então existe uma estrutura de subgrupo de Lie em H com $TH_e = Z$.

Demonstração

Sabemos que $\exp_G$ é um difeomorfismo analítico de uma vizinhança aberta A da origem do X numa vizinhança aberta B do "e" $\in$ G. Podemos supor sem perda de generalidade que $A_1 \subset A$.

Consideremos a coleção:

$$\mathcal{W} = (\phi_a = \log/_V \circ \sigma_a{-1}\ ,\ aV\ ,\ Z)_{a \in H}$$

Para cada $a \in H$, o subconjunto aV é aberto em H pois a translação $\sigma_{a/H} : x \in H \to a.x \in H$ é um homeomorfismo. Sendo $\log/_V : V \to A_1$ um homeomorfismo vem que a aplicação

$$\phi_a = \log/_V \circ \sigma_a{-1} : aV \to A_1$$

é homeomorfismo. Decorre daí que, para quaisquer a e $b \in H$, $\phi_a\ (aV \cap bV)$ é aberto em Z.

A aplicação:

$$\phi_a \circ \phi_b^{-1} : \phi_b(aV \cap bV) \to \phi_a(aV \cap bV)$$

é analítica, pois

$$\phi_a \circ \phi_b^{-1} = (\log/_V \circ \sigma_a{-1}) \circ (\log/_V \circ \sigma_b{-1})^{-1} =$$

$$= \log \circ \sigma_a{-1}_b \circ \exp_G$$

Notando-se que $H = \bigcup_{a \in H} aV$ temos que $\mathcal{W}$ é um atlas analítico sobre H.

Afirmamos que $(H, \overline{\mathcal{W}})$ é uma subvariedade analítica de X com $TH_e = Z$. Com efeito, para cada carta (ϕ_a, aV, Z) temos:

$$\phi_a^{-1} = \sigma_a \circ \exp_G : A_1 \to X$$

é analítica,

$$(*) \quad (\phi_a^{-1})'(x).h = (\sigma_a \circ \exp_G)'(x).h =$$

$$= \Phi_y'(a, \exp_G(x)) \,.\, \exp_G'(x).h =$$

$$= L\,(\Phi(a, \exp_G(x)).\ \pounds\ (\exp_G(x)).(\exp'(x).h$$

$(\forall x \in A_1$ e $h \in Z)$, portanto $(\phi_a^{-1})\ (x)$ é injetiva.

Sendo Z fechado, vemos por (*) que

$$(\forall x \in A_1)\ (\phi_a^{-1})'(x).\ Z$$

é fechado em X e também que

$$TH_e = (\phi_e^{-1})'(\phi(e)).Z = (\phi_e^{-1})'(0).Z = Z$$

Para concluir a demonstração devemos provar que as aplicações $\Phi : H \times H \to H$ e $I : x \in H \to x^{-1} \in H$ são analíticas.

Sejam a, b $\in$ H. Da continuidade das aplicações Φ e I existem subconjuntos abertos V_1, V_2, V_3 de V, tais que,

$$\Phi\ (aV_1, bV_2) \subset abV$$

$$I\ (aV_3) \subset a^{-1}V$$

As ternas $(\phi_a,\ aV_1,\ Z)$, $(\phi_b,\ bV_2,\ Z)$ e $(\phi_{ab},\ abV,\ Z)$ são cartas em a, b e ab respectivamente e tem-se

$$\phi_{ab} \circ \Phi \circ (\phi_a^{-1} \times \phi_b^{-1})\ (x,y) = \log\ (b^{-1}\exp_G(x).b\ \exp_G(y))$$

$\forall\ (x,y) \in (\log V_1 \times \log V_2)$, de onde se conclui que

$$\phi_{ab} \circ \Phi \circ (\phi_a^{-1} \times \phi_b^{-1}) : (\log V_1 \times \log V_2) \to A_1$$

é analítica.

Analogamente, as ternas $(\phi_a,\ aV_3,\ Z)$ e $(\phi_a{-1},\ a^{-1}V,\ Z)$ são cartas em a e em a^{-1} respectivamente e tem-se $(\phi_a \circ I \circ \phi^{-1}_{a^{-1}})\ (x) = \log\ (a.(\exp(x))^{-1}.a^{-1})$

$\forall\ x \in \log(V_3)$, portanto $I : H \to H$ é analítica.

<u>TEOREMA 6.5</u>

Sejam, $G = (\Phi,G)$ um grupo de Lie num espaço de Banach X e $Z = (Z,[\ ]_\phi)$ uma subalgebra de Lie da álgebra de Lie $X = (X,[\ ]_\phi)$ do grupo de G. Existe um subgrupo de Lie conexo H de G cuja algebra de Lie é Z.

Demonstração

Conforme o teorema 17.4 existe um grupo de Lie local canônico $G_1 = (\Phi_1, U_1, V_1, W_1)$ em Z cuja algebra de Lie é Z. Consideremos o sistema:

$$(I) \quad \begin{cases} y'(x).h = L(y).\mathcal{E}_1(x).h \\ y(0) = e \end{cases}$$

onde L e $\mathcal{E}_1$ são as transformações infinitesimais de G e de G_1 respectivamente.

Afirmamos que (I) tem solução analítica. De fato, definindo-se $f : U_1 \times G \to \mathcal{E}(X,Z)$ por $f(x,y) = L(y)\ \mathcal{E}_1(x)$ temos que a aplicação:

$$(x,y,h) \in U_1 \times G \times Z \to f(x,y)h \in X$$

é analítica, linear em h fixados x e y, e que para cada $(x,y) \in U_1 \times G$ a aplicação:

$$(h,k) \in Z \times Z \quad \{ \delta^{(h,\ fh)}\ \delta^{(k,fk)}\ Py \}\ (x,y) \in X$$

é simétrica, pois,

$$\{ \delta^{(h,fh)}\ \delta^{(k,fk)}\ Py \}\ (x,y) =$$

$$= \delta^{(h,fh)}\ L(y)\ \mathcal{E}_1(x)\ k =$$

$$= L(y)\ \pounds_1'(x)\ (h,k) + L'(y)\ (L(y)\ \pounds_1(x)h, \pounds_1(x)k)$$

Sendo $[r,s]_{\Phi_1} = [r,s]_{\Phi}$ $(\forall r,s \in Z)$

temos:

$$\pounds_1(x)\ [L_1 r,\ L_1 s]\ (x) = \pounds(y)\ [Lr,\ Ls]\ (\forall x,\ y \in U_1 \times G)$$

Desenvolvendo o 1º membro pelo lema 1.4 e o 2º membro pela definição 16.4 e pondo $r = \pounds_1(x)h$, $s = \pounds_1(x)k$ obtemos a simetria. A afirmação resulta então do teorema de Frobenius.

Denotemos por ψ a solução de (I) a qual podemos supor definida numa bola C_1 centrada em $0 \in Z$, com $0 \in C_1 \subset U_1$.

Afirmamos que $\psi = \exp_G/_{C_1}$

De fato, sejam $x \in C_1$ e $s > 1$ tal que

$$\alpha \in (|\alpha| < s) \Rightarrow \alpha x \in C_1.$$

Consideremos a aplicação $\alpha \in (|\alpha| < s) \Rightarrow \psi(\alpha x) \in G$

Temos:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\alpha}\ \psi(\alpha x) = \psi'(\alpha x).x = L(\psi(\alpha x)).\pounds_1(x).x = \\ \qquad\qquad = L(\psi(\alpha x)).x \\ \psi(0.x) = e \end{cases}$$

portanto, a aplicação $\alpha \to \psi(\alpha x)$ é um subgrupo a um parâmetro de G, logo, $\psi(x) = \psi(1.x) = \exp_G(x)$.

Afirmamos que ψ é um homomorfismo local de G_1 em G. Com efeito, sejam $x, y \in C_1$ tais que $\Phi_1(x,y) \in C_1$.

Temos:

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi(\Phi_1(x,y)).h =$$

$$= \psi'(\Phi_1(x,y)).\Phi'_{1_y}(x,y).h =$$

$$= L(\psi(\Phi_1(x,y))).\mathcal{E}_1(\Phi_1(x,y)).L_1(\Phi_1(x,y)).\mathcal{E}_1(y).h =$$

$$= L(\psi(\Phi_1(x,y))).\mathcal{E}_1(y).h.$$

Isto é,

$$(1)\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\psi(\Phi_1(x,y)).h = L(\psi(\Phi_1(x,y))).\mathcal{E}_1(y)h \\ \\ \psi(\Phi_1(x,0)) = \psi(x) \end{cases}$$

Por outro lado temos também:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi(\psi(x), \psi(y)).h =$$

$$= \Phi'_y(\psi(x), \psi(y)).\psi'(y).h =$$

$$= L(\Phi(\psi(x),\ \psi(y))).\pounds(\psi(y)).L(\psi(y))\ \pounds_1(y).h\ =$$

$$= L(\Phi(\psi(x),\ \psi(y)).\ \pounds_1(y).h.$$

Isto é,

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\ \Phi(\psi(x),\ \psi(y)).h = L(\Phi(\psi(x),\ \psi(y))).\ \pounds_1(y).h \\ \\ \Phi(\psi(x),\ \psi(0)) \ = \psi(x) \end{cases}$$

De (1) e (2) vem que $\psi(\Phi_1(x,y)) = \Phi(\psi(x),\ \psi(x))$, portanto ψ é um homomorfismo local de G_1 em G.

Como se sabe, existem abertos A e B em X, com $0 \in A$, $e \in B \subset G$, tais que, $\exp/_{A}^{G} : A \to B$ é uma bijeção analítica com inversa analítica. Podemos supor sem perda de generalidade que $C_1 \subset A$.

Indiquemos por $\hat{G}_1 = (\Phi_1,\ A_1,\ B_1,\ C_1)$ o grupo de Lie local em Z determinado por C_1 (conforme teorema 4.3).

É claro que $\hat{G}_1$ é localmente homomorfo a G por meio de $\psi = \exp/_{G}^{C_1}$ além disso, sendo $\psi : C_1 \to \psi(C_1)$ um homeomorfismo temos que $G_\psi = (\Phi,\ \psi(A_1),\ \psi(B_1),\ \psi(C_1))$ é um grupo topológico local contido em G.

Pondo-se $V = \psi(A_1) = \exp_G (A_1)$ temos pela proposição 6.4 que $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} V^k$ possui estrutura algébrica de subgrupo de G, além disso é possível definir uma estrutura de grupo topológico conexo em H tendo a coleção β das partes abertas de V como sistema fundamental de vizinhanças abertas do "e".

Sendo $\exp : A_1 \subset Z \to V$ um homeomorfismo, vem pelo teorema 5.5 que existe uma estrutura de subgrupo de Lie em H tal que $TH_e = Z$.

c.q.d.

§ 5. Caracterização dos subgrupos de Lie normais conexos.

DEFINIÇÃO 12.5

Seja $G = (\Phi, G)$ um grupo de Lie num espaço de Banach X. Dizemos que um subgrupo de Lie H de G é normal em G quando as seguintes condições estiverem verificadas.

N_1) Para todo $z \in G$, $z.H.z^{-1} \subset H$

N_2) A aplicação $(x,z) \in H \times G \to z.x.z^{-1} \in H$

é analítica.

Lema 2.5

Seja $G = (\Phi,G)$ um grupo de Lie num espaço de Banach X e H um subgrupo de Lie normal de G. A aplicação:

$$(x,z) \in G \times G \xrightarrow{g} z.x.z^{-1} \in H$$

tem as seguintes propriedades

1) $g'_x(e,z).TH_e \subset TH_e \quad (\forall z \in G)$

2) $g'_{xz}(e,e)\ (k,h) \in TH_e \quad (\forall h \in TH_e, \forall k \in X)$

3) $g'_{xz}(e,e)\ (k,h) = [h,k]_{\Phi}$.

Demonstração

1) Fixado z e G, a aplicação $F_z : G \to G$ dada por $F_z(x) = z.x.z^{-1}$ é analítica com $F_z(H) \subset H$, $F_{z/_H} : H \to H$ analítica. Decorre então do teorema 2.5, que $F'_z(x).TH_x \subset TH_x$, $\forall x \in H$. Em particular para x = e temos

$$g'_x(e,z).TH_e = F'_z(e)\ TH_e \subset TH_e .$$

2) Sejam $h \in TH_e$ e $k \in X$. Temos:

$$g'_{xz}(e,e)\ (k,h) = \{\frac{d}{d\alpha}\ g'_x(e,e + \alpha k)h\}_{\alpha=0} \in TH_e$$

pois TH_e é fechado.

3) Temos:

$$g(x,z) = z.x.z^{-1} = \Phi(\Phi(z,x),\ z^{-1})$$

Diferenciando a igualdade acima com relação à variável x e acréscimo h no ponto x = e obtemos:

$$(*) \qquad g'_x(e,z).h = \Phi'_x(z,z^{-1}).\Phi'_y(z,e).h \ =$$

$$= \Phi'(z,z^{-1}).L(z).h,$$

onde L é a transformação infinitesimal de G.

Notando-se que $\Phi'_x\ (z,z^{-1})$ é inversível com inversa dada por $\Phi'_x\ (e,z)$, obtemos a partir de (*):

$$(**) \qquad \Phi'_x\ (e,z).\ g_x(e,z).h \ = \ L(z).h$$

Diferenciando ambos os membros de (**) com acréscimo k no ponto z = e, obtemos:

$$(***)\ \Phi''_{xz}\ (e,e).(k,\ g'_x\ (e,e)h) + \Phi'_x\ (e,e).g''_{xz}\ (e,e)\ (k,h) =$$

$$= \ L'(e)\ (k,h)$$

Notando-se que $g'_x(e,e) = I_X$, $\Phi'_x\ (e,e) = I_X$, e

$$\Phi''_{xz}(e,e)\ (k,h) = \Phi''_{zx}(e,e)\ (h,k) = L'(e)\ (h,k)$$

obtem-se a partir de (***)

$$g''_{xz}\ (e,e)\ (k,h) = L'(e)\ (k,h) - L'(e)(h,k) = [h,k]_{\Phi}$$

<u>Lema 3.5</u>

Sejam X, Y espaços de Banach, $G = (\Phi,G) \subset X$ e

$G_1=(\Phi_1,G_1) \subset Y$ grupos de Lie. Se $f: G \to G_1$ é um homomorfismo, então tem-se

$$f \circ \exp_G = \exp_{G_1} \circ f'(e)$$

Demonstração

Fixado $x \in G$, as aplicações

$$\alpha \in C \xrightarrow{\lambda_1} f \circ \exp_G(\alpha x) \in G_1$$

$$\alpha \in C \xrightarrow{\lambda_2} \exp_{G_1} \circ f'(e)(\alpha x) \in G_1$$

são subgrupos a um parâmetro de G_1 com $\lambda'_1(0) = \lambda'_2(0)=f'(e).x$ Segue do teorema 8.4 que $\lambda_1 = \lambda_2$. Fazendo $\alpha= 1$ obtemos a tese.

TEOREMA 7.5

Sejam $G = (\Phi,G)$ um grupo de Lie conexo num espaço de Banach X e H um subgrupo de Lie conexo de G. São equivalentes as afirmações:

(a) H é normal em G

(b) A álgebra de Lie de H é um ideal da álgebra de Lie de G.

Demonstração (a) => (b)

Consideremos a aplicação:

$$(x,z) \in G \times G \xrightarrow{g} z.x.z^{-1} \in G$$

Se H é normal em G tem-se pelo lema 2.5 :

$$[h,k]_{\Phi} = g'_{xz}(e,e)(k,h) \in TH_e \quad (\forall\, h \in TH_e,\ \forall\, k \in X)$$

o que prova a implicação acima.

(b) => (a)

Para cada $z \in G$ consideremos a aplicação $F_z : G \to G$, dada por: $F_z(x) = g(x,z) = z.x.z^{-1}$. Consideremos também a aplicação $\Gamma : G \to GL(X)$ dada por $\Gamma(z) = g'_x(e,z)$.

Com relação à composição $GL(X)$ é um grupo de Lie no espaço de Banach $\mathcal{L}(X,X)$ das aplicações lineares e contínuas de X em X. Verifica-se sem dificuldades que Γ é um homomorfismo de G em $GL(X,X) = (o, GL(X,X))$

Temos então pelo lema 4.5 :

$$(1) \qquad \Gamma \circ \exp_G = \exp_{GL(X)} \circ \Gamma'(e)$$

Afirmamos que $\Gamma(z).h \in TH_e$,$(\forall\, z \in G,\ \forall\, h \in TH_e)$

De fato, sendo G conexo, existe uma vizinhança aberta W da origem do X, tal que,

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} V^k ,$$

onde $V = \exp_G(W)$.

Assim, se $(z,h) \in G \times TH_e$, existem $w_1, \ldots w_n \in W$, tais que, $z = \exp_G(w_1).\exp_G(w_2)\ldots\exp_G(w_n)$.

Sendo Γ um homomorfismo tem-se:

$$\Gamma(z).h = \{\Gamma(\exp_G(w_1)).\Gamma(\exp_G(w_2))\ldots\Gamma(\exp_G(w_n))\}.h \quad ,$$

portanto basta mostrar que

$$\Gamma(\exp_G(w)).h \in TH_e, \quad (\forall\, w \in W,\ \forall\, h \in TH_e)$$

Por (1) tem-se:

$$\Gamma(\exp_G(w)).h = (\exp_{GL(X)} (\Gamma'(e).w).h =$$

$$= \left(\sum_{n \geq o} \frac{1}{n!} (\Gamma'(e).w)^n \right).h =$$

$$= \left(\sum_{n \geq o} \frac{1}{n!} (\Gamma'(e).w)^n \right).h$$

Sendo $\mathcal{TH}_e = (TH_e, [\ ]_\Phi)$ um ideal de $\mathcal{X} = (X, [\ ]_\Phi)$ vem que,

$$(\Gamma'(e).w).h = g''_{xz}(e,e)(w,h) = [h,w]_\Phi \in TH_e$$

de onde se conclui que $\Gamma(\exp_G(w)).h \in TH_e$ e assim $\Gamma(z).h \in TH_e$.

Afirmamos que $z.H.z^{-1} \subset H$.

De fato, pelo lema 3.5 temos:

$$F_z \circ \exp_G = \exp_G \circ F'_z(e)$$

Notando-se que $F'_z(e) = \Gamma(z)$ e que $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\exp_G(B_r))^k$,

onde B_r é uma bola com centro na origem do TH_e contida em W, tem-se:

$$F_z(\exp_G(B_r)) = \exp_G (F'_z(e).B_r) =$$

$$= \exp_G (\Gamma(z).B_r) \subset \exp_G(TH_e) \subset H$$

Dado $a \in H$ temos que

$$a = \exp_G(b_1).\ \exp_G(b_2)\ldots\ \exp_G(b_n)$$

onde $b_i \in B_r$ para $i = 1,\ldots,n$. Sendo F_z um homomorfismo vem que

$$F_z(a) = F_z(\exp_G(b_1)).F_z(\exp_G(b_2))\ldots F_z(\exp_G(b_n)) \in H ,$$

logo, $F_z(H) = z.H.z^{-1} \subset H$.

Mostraremos agora que a aplicação

$$(x,z) \in H\times G \xrightarrow{\xi} z.x.z^{-1} \in H$$

é analítica. De acordo com o teorema de Hartogs basta provar que as aplicações parciais

$$x \in H \xrightarrow{\xi_z} z.x.z^{-1} \in H$$

$$z \in G \xrightarrow{\xi_x} z.x.z^{-1} \in H$$

são analíticas. A aplicação $\xi_z : H \to H$ é um homomorfismo, logo conforme o lema 1.5 , basta mostrar que ξ_z é analítica em e. De acordo com o teorema 4.5, existe uma bola $B_r \subset TH_e$ tal que

$$H = \bigcup_{k=1}^{\infty} V^k \text{ , onde } V = \exp_G (B_r) .$$

A aplicação linear $\Gamma(z): TH_e \to TH_e$ é contínua, portanto existe $B_{r_1} \subset TH_e$, com $0<r_1<r$ tal que $\Gamma(z).B_{r_1} \subset B_r$.

Pondo $V_1 = \exp_G(B_{r_1})$ temos que $(\log_{/V_1}, V_1, TH_e)$ e $(\log_{/V}, V, TH_e)$ são cartas em e, com:

$$\xi_z(V_1) = z.V_1.z^{-1} = z. \exp_G(B_{r_1}). z^{-1} = \exp_G(F'_z(e).Br_1) =$$

$$= \exp_G(\Gamma_z(Br_1) \subset \exp_G(B_r) = V ,$$

além disso a aplicação

$$\log_{/V} \circ \xi_z \circ \exp_{G/Br_1} = \log_G \circ \hat{\xi}_z \circ \exp_G$$

(onde $\hat{\xi}_z$ é a aplicação $x \in G \to z.x.z^{-1} \in G$) é analítica.

Portanto $\xi_z : H \to H$ é analítica.

Sejam $z_o \in G$ e $(\log_{/V}, V, TH_e)$ a carta em e considerada acima . Da continuidade da aplicação

$$(z,h) \in G \times TH_e \to \Gamma(z).h \in TH_e$$

existem vizinhanças abertas $B_{r_2} = B(o,r_2) \subset TH_e$ com $0<r_2<r$ e U_{z_o} do z_o tais que $\Gamma(U_{z_o}).B_{r_2} \subset B_r$. Pondo $V_2 = \exp_G(B_{r_2})$ temos $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} (V)^k$. Vamos mostrar que para cada $a \in V_2$ a aplicação

$$z \in U_{z_o} \xrightarrow{\xi_a} z.a.z^{-1} \in H$$

é analítica.

De fato, se $z \in U_{z_o}$ temos:

$$z.a.z^{-1} = z.\exp_G(b).z^{-1} = \exp_G(\Gamma(z)b) \in \exp_G(B_r) = V$$

Assim, $(\log_{/V}, V, TH_e)$ é uma carta em $z_o.a.z_o^{-1}$ e a aplicação $\log \circ \xi_a : U_{z_o} \to B_r$ é analítica. Portanto é analítica a aplicação $\xi_a : U_{z_o} \to H$.

Agora, fixado x arbitrariamente em H, temos que

$$\xi_x(z) = z.x.z^{-1} = (z.a_1.z^{-1})\ldots(z.a_n.z^{-1})$$

onde $a_1,\ldots a_n \in V_2$ e $x = a_1\ldots a_n$, daí decorre que ξ_x é analítica em U_{z_o} . Sendo z_o arbitrário em G vem que ξ_x é analítica em G.

BIBLIOGRAFIA

01. DIEUDONNÉ, J. - Foudations of Modern Analysis - Academic Press, London, 1960.

02. NACHBIN, L. - Lectures on the theory of distributions - Universidade do Recife, 1964.

03. ALEXANDER, H. - Analytic functions on Banach spaces - Thesis, University of California, Berkeley, 1968.

04. HILLE, E. - Funcional Analysis and Semi-groups - American Mathematical Colloquium Publications - Vol. XXXI, 1957.

05. PISANELLI, D. - Sull integrazione di un sistema di equazione ai diferenziali totali in uno espazio di Banach - Rendiconti dell'Academia dei Lincei, 1969.

06. PISANELLI, D. - Grupos finitos de transformações - Universidade de São Paulo, 1977.

07. PISANELLI, D. - Théorèmes d'Oveyannicov Frobenius d'inversion et groupes de Lie locaux dans les échelles d'espaces de Banach - C.R.A.S., 1973.

08. MAISSEN, B. - Lie gruppen mit Banachraumen als pavameterraum - Acta Math - 108, 1962.

09. CHEVALLEY, C. - Theory of Lie groups - Princeton University Press, 1948.

10. PONTRTAGIN, L. - Topological groups - Princeton University Press, 1948.

11. BOURBAKI, N. - Espaces vectoriels topologiques - livre V - Hermann Editeurs, Paris, 1955.

12. LIMA, E.L. - Elementos de Topologia Geral - Rio de Janeiro, Ao Livro Tecnico, 1970.