UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

TEOREMAS DE COMPARAÇÃO E APLICAÇÕES À ESTABILIDADE DE CONJUNTOS ASSINTOTICAMENTE AUTO-INVARIANTES

Antonio Marcos Vila

ORIENTADOR:

Prof. Dr. Antonio Fernandes Izé

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de "Mestre em Matemática"

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SÃO CARLOS
1976

Aos meus pais,

à Vera e ao

Fabiano.

Somos profundamente gratos

ao Prof. Dr. Antonio Fernandes Izé, pela orientação segura e estimulante em todo o desenvolvimento deste trabalho,

ao Prof. Dr. Nelson Onuchic, sempre pronto a prestar-nos o seu valioso auxílio,

aos colegas do ICMSC, pela amizade e colaboração,

aos colegas da FFCL de Araraquara, pelo incentivo e pela consideração de que sempre fui alvo,

aos colegas da FFCL de Guaxupé, pelo apoio e compreensão que sempre recebi.

Comparison Theorems and Applications to Stability of Asymptotically Self-Invariant Sets.

Antonio Marcos Vila

Adviser : Prof. Dr. Antonio Fernandes Izé

In many problems, like those relative to adaptive control systems, it is necessary to consider the stability of sets which are not self-invariant in the usual sense. To describe such situations, La Salle and Rath, in 1963, introduced the notion of eventual stability. Later, in 1965, Lakshimikantham and Leela [8.b], stablished the notion of asymptotically self - invariant set and obtained some results on stability of such sets. Roughly speaking, an asymptotically self-invariant set is invariant only if the solutions of the given differential equation start at an infinite time.

Recently, Bernfeld, Lakshimikantham and Leela [1] , based on a paper of Rashbaev [On the stability of first approximation of solutions of a system of differential equations with retarded arguments - Isv. Akad. Nauk - SSSR5 - 1971- pp 63/66] extended Rashbaev's investigations to perturbed functional differential equations presupposing that the unperturbed equation presents some non-uniform exponential asymptotic stability property relative to an asymptotically self-invariant set $\psi=0$.

In this work, our main objective is to extend the results obtained by Bernfeld, Lakshimikantham and Leela to perturbed functional differential equations of neutral type:

$$\frac{d}{dt} D(t,y_t) = f(t,y_t) + R(t,y_t) \quad ,$$

for which the operator $D(t,\psi)$ is defined by

$$D(t,\psi) = \psi(o) - g(t,\psi) \quad ,$$

where $g(t,\psi)$ is linear in ψ , following Hale [4a] , Izé [5] and Onuchic [10].

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Em muitos problemas, como os ligados a sistemas de controle adaptativos, surge a necessidade de se considerar a estabilidade de conjuntos que não são invariantes no sentido usual. Para descrever tais situações, La Salle e Rath introduziram, em 1963, a noção de estabilidade eventual. Posteriormente, em 1965, Lakshimikantham e Leela [8.b] estabeleceram a noção de conjunto assintoticamente auto-invariante e obtiveram alguns resultados relativos à estabilidade de tais conjuntos. Grosseiramente falando, um conjunto assintoticamente auto-invariante é invariante somente se as soluções da equação diferencial em consideração tem instante de partida infinito.

Mais recentemente, Bernfeld, Lakshimikantham, e Leela [1], apoiados sobre um trabalho de Rashbaev [on the stability of first approximation of solutions of a system of differential equations with retarded arguments - Isv, Akad, Nauk - SSSR 5 - 1971 - pp. 63-66] estenderam a investigação deste ao exame do comportamento de equações diferenciais funcionais com retardamento perturbadas, pressupondo que a equação não perturbada apresente alguma propriedade de estabilidade exponencial não-uniforme relativamente a um conjunto assintoticamente auto-invariante $\psi=0$.

Neste trabalho, o nosso objetivo consiste em extender os resultados obtidos por Bernfeld, Lakshimikantham e Leela à equações de tipo neutro perturbadas:

$$\frac{d}{dt} D(t,y_t) = f(t,y_t) + R(t,y_t)$$

nas quais o operador $D(t,\psi)$ apresenta-se sob a forma

$$D(t,\psi) = \psi(0) - g(t,\psi),$$

com $g(t,\psi)$ linear em ψ, inspirando-nos em Hale [4a], Izé [5] e Onuchic [10].

No capítulo 1, apresentamos a noção de equação diferencial funcional de tipo neutro, exemplos e destacamos alguns resultados a serem usados posteriormente.

No capítulo 2, abordamos as noções de conjunto assintoticamente auto-invariante, equiestabilidade e estabilidade equiexponencial assintótica.

Finalmente, o último capítulo é dedicado ao exame de diferentes tipos de perturbação.

CAPÍTULO I

Neste capítulo, introduziremos a notação a ser usada ao longo deste trabalho, destacaremos a noção de equação diferencial funcional do tipo neutro bem como estabeleceremos alguns resultados a serem utilizados posteriormente.

§1. Equações Diferenciais Funcionais

Usaremos os símbolos $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}^n$ para indicar, respectivamente, o conjunto dos números reais e um espaço vetorial , [real ou complexo] n-dimensional, com norma $|.|$.
Dado um número real $r > 0$, o espaço de Banach das aplicações definidas e continuas em $[-r; 0]$ e com valores em $\mathbb{E}^n$, munido da topologia da convergência uniforme, será indicado com o símbolo $C([-r; 0], \mathbb{E}^n)$ ou simplesmente C. A norma de um elemento $x \in C$ será denotada por:

$$\| x \| = \sup_{-r \leq s \leq 0} |x(s)|$$

Dado H, $0 < H \leq +\infty$, colocaremos: $C_H = \{\varphi \in C \mid \|\varphi\| < H\}$:
Naturalmente, no caso em que $H = +\infty$, temos: $C_H = C_\infty = C$

Se t_o e A são números reais quaiquer, com $A > 0$, e se $x \in C([t_o - r; t_o + A], \mathbb{E}^n)$, então para cada $t \in [t_o; t_o + A]$, indicaremos com x_t o elemento de C definido por:

$$x_t(\theta) = x(t + \theta) \text{ , para } -r \leq \theta \leq 0$$

Definição I,1

Seja U um aberto de $\mathbb{R} \times C$ e sejam $D,f: U \rightarrow \mathbb{E}^n$ funções contínuas. A relação:

$$\frac{d}{dt} D(t,x_t) = f(t,x_t) \qquad (I,1)$$

será chamada equação diferencial funcional.
No caso em que $r=0$, (I,1) reduz-se a uma equação diferencial ordinária.

Definição I,2

Diz-se que uma função x é solução de (I,1) se e somente se existem números reais t_o e A, com $A>0$, tais que $x \in C([t_o-r;t_o+A], \mathbb{E}^n)$, $(t,x_t) \in U$ para todo $t \in [t_o;t_o+A]$, $D(t,x_t)$ é continuamente diferenciável e satisfaz (I,1) para todo $t \in]t_o;t_o+A[$.

Dados $t_o \in \mathbb{R}$ e $\varphi_o \in C$, com $(t_o,\varphi_o) \in U$, diz-se que uma função $x= x(t,t_o,\varphi_o)$ é uma solução de (I,1) com função inicial φ_o no instante t_o ou, simplesmente, uma solução de (I,1) através de (t_o,φ_o), se e somente se existe um número real $A>0$ tal que $x(t,t_o,\varphi_o)$ é solução de (I,1) no intervalo $[t_o-r;\ t_o+A]$ e $x_{t_o}(t_o,\varphi_o) = \varphi_o$.

A equação (I,1) é um tipo bem geral de equação diferencial que inclui:

(a) as equações diferenciais ordinárias: $\dot{x} = f(t,x)$, caso em que $r = 0$.

(b) as equações com retardamento: $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$, onde o operador $D(t, \psi)$ é dado por: $D(t, \psi) = \psi(0)$.

(c) as equações integro-diferenciais: $\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} g(t,\theta,x(t + \theta))d\theta$

onde:

$$D(t, \psi) = \psi(0)$$

$$f(t, \psi) = \int_{-r}^{0} g(t,\theta, \psi(\theta))\, d\theta$$

(d) as equações integrais do tipo de Volterra:

$$x(t) = g(t) + \int_{0}^{t} a(t,s,x(s))\, ds$$

com $x(0) = g(0)$. Para equações deste tipo, temos:

$$D(t,\psi) = \psi(0) - g(t) - \int_{-t}^{0} a(t,t + u, \psi(u))du$$

$$f(t,\psi) \equiv 0$$

(e) as equações com adiantamento $\frac{d}{dt} x(t - r) = f(t, x_t)$,

onde $D(t,\psi) = \psi(-r)$.

Esta denominação provém do fato de que a derivada de x no "instante" $t - r$ é dada em termos dos valores de x nos "instantes posteriores" do intervalo $[t - r ;t]$.

(f) as equações do tipo misto $\frac{d}{dt} x(t - \frac{r}{2}) = f(t, x_t)$,

onde $D(t,\psi) = \psi(- \frac{r}{2})$.

Para estas equações, a derivada de x no "instante" $t - \frac{r}{2}$ é determinada pelos "valores futuros" de x em $[t - \frac{r}{2};t]$ e pelos "valores passados" de x em $[t-r;t- \frac{r}{2}]$.

O problema do valor inicial para a equação (I,1) nem sempre apresenta solução. Isto ocorre, por exemplo, com as equações do tipo adiantado e do tipo misto. A fim de se evitar inconvenientes como este, devemos impor condições adequadas sobre o operador $D(t,\varphi)$ de modo a excluir as equações que apresentam anormalidades como a mencionada acima.

§2. Equações Diferenciais Funcionais do Tipo Neutro

Consideremos uma equação diferencial funcional:

$$\frac{d}{dt} D(t,x_t) = f(t,x_t) \tag{I,2}$$

e admitamos que:

(i) $D,f : U \to E^n$ são contínuas no aberto $U \subset \mathbb{R} \times C$;

(ii) $D(t,\varphi)$ tem derivada de Frèchet continua, $D'_\varphi(t,\varphi)$, em relação a φ, no aberto U. Além disso, de acordo com o teorema da representação de Riesz, existe uma matriz $\mu(t,\varphi,\theta)$, $n \times n$, $(t,\varphi) \in U$ e $\theta \in [-r;0]$, de variação limitada em θ, tal que:

$$D'_\varphi(t,\varphi)\ \psi = \int_{-r}^{0} [d_\theta \mu(t,\varphi,\theta)]\psi(\theta)\ ,\ \forall (t,\varphi) \in U\ ,\psi \in C\ .$$

Definição I,3

Diz-se que (I,2) é uma equação diferencial funcional de tipo neutro se e somente se:

a) as aplicações $D,f\colon U \to E^n$ satisfazem (i) e (ii) ;

b) D é atômica em zero sobre U, isto é:

(iii) a matriz $A(t,\varphi) = \mu(t,\varphi,0^+) - \mu(t,\varphi,0^-)$ é contínua em t,φ e inversível para todo $(t,\varphi) \in \mathbb{R} \times C$.

(iv) existe uma função escalar $\gamma(t,\varphi,s)$, contínua para $(t,\varphi) \in U$, $s \geq 0$, com $\gamma(t,\varphi,0) = 0$ e tal que

$$\left| \int_{-s}^{0} [d_\theta \mu(t,\varphi,\theta)]\psi(\theta) - A(t,\varphi)\psi(0) \right| \leq \gamma(t,\varphi,s) \sup_{-s\leq\theta\leq 0} |\psi(\theta)|$$

As equações do tipo adiantado $\frac{d}{dt} x(t-r) = f(t,x_t)$ não são de tipo neutro. Com efeito, para estas equações temos que:

$$D(t,\varphi) = \varphi(-r) = \int_{-r}^{0} [d_\theta \ \mu(t,\theta)]\varphi(\theta) \quad ,$$

onde:

$$\mu(t,\theta) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad \theta = -r \\ I, & \text{se} \quad -r<\theta\leq 0 \end{cases}$$

$$A(t) = \mu(t,0^+) - \mu(t,0^-) = 0$$

Como A(t) é não-inversível, o operador $D(t,\psi)$ não é atômico em zero. Portanto, a equação considerada não é de tipo neutro.

Analogamente, pode-se verificar que as equações de tipo misto não são de tipo neutro.

Um caso particular, mas importante, de equação diferencial funcional de tipo neutro ocorre quando o operador $D(t,\psi)$ satisfaz às condições:

a) $D(t,\psi)$ é linear em ψ. Então, segundo o teorema da representação de Riesz, temos que:

$$D(t,\psi) = \int_{-r}^{0} [d_\Theta\, \mu(t,\Theta)]\, \psi(\Theta) \quad , \forall (t,\psi) \in \mathbb{R} \times C \ ,$$

onde $\mu(t,\Theta)$ é uma matriz $n \times n$, de variação limitada em Θ e a matriz $A(t) = \mu(t,0^+) - \mu(t,0^-)$ é contínua e inversivel para todo $t \in \mathbb{R}$.

b) $\left| \int_{-s}^{0} [d_\Theta\, \mu(t,\Theta)]\, \psi(\Theta) - A(t)\, \psi(0) \right| \leq \gamma(t,s) \sup\limits_{-s \leq \Theta \leq 0} |\psi(\Theta)|$, onde

$\gamma(t,s)$ é contínua para todo $t \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ e $\gamma(t,0) = 0$.

As equações com retardamento estão nesta classe. Com efeito, para estas equações o operador $D(t,\psi)$ é linear, apresentando-se sob a forma:

$$D(t,\psi) = \psi(0) = \int_{-r}^{0} [d_\Theta\, \mu(t,\Theta)]\, \psi(\Theta) \ ,$$

onde:

(i) $$\mu(t,\Theta) = \begin{cases} 0, & \text{se } -r \leq \Theta < 0 \\ I, & \text{se } \Theta = 0 \end{cases}$$

$$A(t) = \mu(t,0^+) - \mu(t,0^-) = I \quad \text{(inversível para todo } t).$$

(ii) $$\left| \int_{-s}^{0} [d_\Theta \, \mu(t,\Theta)] \, \psi(\Theta) - I\psi(0) \right| = | \psi(0) - \psi(0) | \leq \gamma(t,s) \,.\, \sup_{-s \leq \Theta \leq 0} |\psi(\Theta)| \,,$$

para qualquer função $\gamma(t,s)$, positiva, continua para $t \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ e $\gamma(t,0) = 0$.

Também estão nesta classe as equações da forma:

$$\frac{d}{dt} [B(t).x(t) + C(t) \, x(t-r)] = f(t,x_t) \,,$$

onde $B(t)$, $C(t)$ são matrizes contínuas $n \times n$, $f: U \subset \mathbb{R} \times C \to E^n$ é contínua e $B(t)$ é inversível para todo t. Para estas equações temos que:

$$D(t,\psi) = B(t) \, \psi(0) + C(t) \, \psi(-r) = \int_{-r}^{0} d_\Theta \mu(t,\Theta) \psi(\Theta) \,,$$

onde:

$$\mu(t,\Theta) = \begin{cases} 0, \text{ se } \Theta \leq -r \\ C(t), \text{ se } -r<\Theta<0 \\ B(t)+C(t), \text{ se } \Theta \geq 0 \end{cases}$$

$$A(t) = \mu(t,0^+) - \mu(t,0^-) = B(t)$$

$$\left| \int_{-s}^{0} [d_\theta \mu(t,\Theta)] \psi(\Theta) - A(t)\psi(0) \right| = | B(t)\psi(0) - A(t)\psi(0) | = 0$$

A classe das equações de tipo neutro inclue também as equações integrais do tipo de Volterra.

Neste trabalho, consideraremos sistemas de tipo neutro:

$$\frac{d}{dt} D(t,x_t) = f(t,x_t)$$

e sistemas perturbados:

$$\frac{d}{dt} D(t,y_t) = f(t,y_t) + R(t,y_t)$$

nas quais o operador $D(t,\psi)$ apresenta-se sob a forma:

$$D(t,\psi) = \psi(0) - g(t,\psi) \; ,$$

onde:

(i) $$g(t,\psi) = \int_{-r}^{0} [d_\Theta \mu(t,\Theta)]\psi(\Theta), \quad \forall (t,\psi), (t,\psi) \in \mathbb{R} \times C \; ,$$

sendo que $\mu(t,\Theta)$ é uma matriz nxn de variação limitada em Θ;

(ii) existe uma função escalar $\ell(s)$, estritamente crescente em $[0;r]$, com $\ell(0)=0$ e tal que:

$$\left| \int_{-s}^{0} [d_\Theta \, \mu(t,\Theta)]\psi(\Theta) \right| \leq \ell(s) . \sup_{-s \leq \Theta \leq 0} |\psi(\Theta)| \; , \; t \in \mathbb{R}$$

§3. Generalidades

Neste parágrafo serão abordados alguns resultados a serem utilizados nos capítulos posteriores.

Para facilitar a notação em algumas definições e teoremas futuros, introduziremos duas classes de funções escalares através da:

Definição I,4

Colocaremos:

$$\mathcal{L} = \{\lambda \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+) \mid \lambda \text{ é decrescente e } \lim_{t\to+\infty}\lambda(t) = 0\}$$

$$\mathcal{B} = \{H \in C(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+) \mid \lim_{t\to+\infty}\left[\sup_{t_0\geqslant T_0} H(t,t_0)\right] = 0, \text{ para algum } T_0\geqslant 0\}$$

Lema I,1

Se $H: \mathbb{R}_+ \times [0; a[\to \mathbb{R}$ é uma função limitada, então

$$\sup_{\tau\geqslant 0}\ \overline{\lim_{h\to 0^+}}\ H(\tau,h) = \overline{\lim_{h\to 0^+}}\ \sup_{\tau\geqslant 0} H(\tau,h)$$

Prova

Inicialmente, para cada $h \in [0;a[$, temos que:

$$H(\tau',h) \leqslant \sup_{\tau\geqslant 0} H(\tau,h) \quad , \text{ para qualquer } \tau'\geqslant 0.$$

Segue-se daí que:

$$\overline{\lim_{h\to 0^+}} H(\tau',h) \leqslant \overline{\lim_{h\to 0^+}} \sup_{\tau\geqslant 0} H(\tau,h) \quad , \text{ para qualquer } \tau'\geqslant 0$$

Assim:

$$\sup_{\tau'\geqslant 0} \overline{\lim_{h\to 0^+}} H(\tau',h) \leqslant \overline{\lim_{h\to 0}} \sup_{\tau\geqslant 0} H(\tau,h)$$

Vamos mostrar agora que vale a desigualdade no sentido oposto. Para isto, utilizaremos uma propriedade da noção de limite superior de uma função.

Seja $\varepsilon>0$ um número real qualquer.

Afirmamos que existe um $\delta = \delta(\varepsilon)>0$ tal que:

$$\forall h,\ 0<h<\delta \implies \sup_{\tau\geqslant 0} H(\tau,h) \leqslant \sup_{\tau\geqslant 0} \overline{\lim_{h\to 0^+}} H(\tau,h)+\varepsilon$$

Com efeito, suponhamos que isto não ocorra. Logo, para qualquer $\delta > 0$, existe um h, $0 < h < \delta$, tal que:

$$\sup_{\tau\geqslant 0} H(\tau,h) > \sup_{\tau\geqslant 0} \overline{\lim_{h\to 0^+}} H(\tau,h) +\varepsilon$$

Em particular, existe uma sequência (h_n) , com $0 < h_n < \frac{1}{n}$, tal que:

$$\sup_{\tau\geqslant 0} H(\tau,h_n) > \sup_{\tau\geqslant 0} \overline{\lim_{h\to 0^+}} H(\tau,h) +\varepsilon \quad , \text{ para cada natural } n.$$

Deste fato segue que:

$$\sup_{\tau\geq 0} H(\tau,h_n) > \overline{\lim_{h\to 0^+}} H(\tau',h) + \varepsilon, \text{ para cada natural } n \text{ e } \tau'\geq 0.$$

Esta desigualdade garante que: para cada natural n existe um $\tau_n \geq 0$ de modo que:

$$H(\tau_n,h_n) > \overline{\lim_{h\to 0^+}} H(\tau',h) + \varepsilon \quad , \text{ qualquer que seja } \tau'\geq 0.$$

ou:

$$\overline{\lim_{h\to 0^+}} \left[H(\tau',h) - H(\tau_n,h_n)\right] < -\varepsilon \quad , \text{ qualquer que seja } \tau'\geq 0.$$

Com base numa propriedade da noção de limite superior, podemos afirmar que, para o $\varepsilon>0$ considerado, existe um $\sigma=\sigma(\varepsilon)>0$ tal que:

$$\forall h,\ 0<h<\sigma \Rightarrow H(\tau',h) - H(\tau_n,h_n) < -\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = -\frac{\varepsilon}{2}$$

para cada natural n e $\tau'\geq 0$.

Escolhamos um natural n suficientemente grande a fim de que $0<h_n<\sigma$. Então:

$$H(\tau',h_n) < H(\tau_n,h_n) - \frac{\varepsilon}{2} < H(\tau_n,h_n) \quad , \text{ para qualquer } \tau'\geq 0.$$

Em particular temos que $H(\tau_n,h_n) < H(\tau_n,h_n)$, o que constitui um absurdo.

Assim, a afirmação feita é verdadeira. Dela decorre que:

$$\overline{\lim_{h\to 0^+}} \sup_{\tau\geq 0} H(\tau,h) \leq \sup_{\tau\geq 0} \overline{\lim_{h\to 0^+}} H(\tau,h) \quad ,$$

o que completa a prova.

O próximo resultado é fundamental para a validade do teorema (III-3) do capítulo III. Ele acha-se demonstrado em [12], pg 18, de modo que nos limitaremos a destacar o seu enunciado.

Teorema I,2

Consideremos a equação diferencial escalar:

$$\frac{du}{dt} = g(t,u)$$

$$u(t_o) = u_o \; ,$$

onde $g\colon A\to R$ é contínua e $A = \{(t,u) \in \mathbb{R}^2 \mid t_o \leq t \leq t_o + a, |u| < b, b>0\}$

Suponhamos que a solução maximal $u(t)$ desta equação permaneça em A para todo $t \in [t_o; t_o + a[$.

Se uma função $x(t)$, contínua, satisfaz às condições:

(i) $\dot{x}(t) = \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{1}{h} [x(t+h) - x(t)] \leq g(t, x(t)), \forall t, \ t \in [t_o, t_o+a[,$

(ii) $x(t_o) = u_o$,

então:

$$x(t) \leq u(t) \quad , \text{ para todo } t \in [t_o; t_o+a[\ ,$$

Os lemas seguintes são devidos a Strauss e Yorke [11].

Lema I,3

Se $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva, então:

$$\int_{t_o}^{t} \gamma(s)ds \leq \int_{t_o-1}^{t} p(s)ds \ , \ \forall t, \ \ t \geq t_o \geq 1 \ ,$$

onde:

$$p(t) = \int_{t}^{t+1} \gamma(s)ds, \ \ t \in \mathbb{R}_+$$

Lema I,4

Se $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva, então para qualquer número real $\alpha > 0$ tem-se que:

$$\int_{t_o}^{t} e^{\alpha \cdot s} \ \gamma(s)ds \leq \int_{t_o-1}^{t} e^{\alpha(s+1)} \ p(s)ds \ , \ \forall t, \ \ t \geq t_o \geq 1 \ ,$$

onde:

$$p(t) = \int_{t}^{t+1} \gamma(s) \ ds \ , \quad t \in \mathbb{R}_+ \ .$$

<u>Lema I,5</u>

Se $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva e se $p(t) = \int_t^{t+1} \gamma(s)ds \to 0$ quando $t\to\infty$, então, para qualquer número real $\alpha>0$, tem-se:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s}\,\gamma(s)\,ds = 0$$

<u>Lema I,6</u>

Seja $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva e suponhamos que a função $p(t) = \int_t^{t+1} \gamma(s)ds$ seja limitada em $\mathbb{R}_+$.

Então, dado $\delta>0$, existe um $A= A(\delta)> 0$ tal que:

$$e^{-\delta t} \int_{t_0}^t e^{\delta s}\,\gamma(s)ds < A, \quad \forall t, \quad t\geqslant t_0\geqslant 1.$$

CAPÍTULO II

Neste capítulo, abordaremos as noções de conjunto assintoticamente auto-invariante, de equiestabilidade e de estabilidade equiexponencial assintótica. Além disso, apresentaremos exemplos para ilustrar estas noções.

§1. Conjunto assintoticamente auto-invariante, equiestabilidade e estabilidade equiexponencial assintótica.

Consideremos a equação diferencial funcional:

$$\frac{d}{dt} D(t,x_t) = f(t,x_t) \qquad \text{(II,1)}$$

bem como a sua perturbada:

$$\frac{d}{dt} D(t,y_t) = f(t,y_t) + R(t,y_t) \qquad \text{(II,2)}$$

e suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas:

(i) $D,f,R : \mathbb{R}_+ \times C_H \to \mathbb{E}^n$ são aplicações contínuas e f leva conjuntos $[0,\zeta] \times C_{H_1}$ em conjuntos limitados do $\mathbb{E}^n$, para todo ζ, H_1, com $0<\zeta<\infty$, $0 < H_1 < H$.

(ii) $D(t,\varphi) = \varphi(0) - g(t,\varphi)$, onde :

$$g(t,\varphi) = \int_{-r}^{0} [d_\theta\, \mu(t,\theta)]\varphi(\theta)\ , \ t \in \mathbb{R}\ , \varphi \in C_H\ ,$$

sendo que $\mu(t,\theta)$ é uma matriz nxn de variação limitada em θ.

(iii) existe uma função escalar $\ell(s)$, estritamente crescente em $[0;r]$, com $\ell(0)=0$ e tal que:

$$\left|\int_{-s}^{0}[d_\theta\,\mu(t,\theta)]\varphi(\theta)\right| \leqslant \ell(s).\sup_{-s\leqslant\theta\leqslant 0}|\varphi(\theta)|,\ \forall t, t\in\mathbb{R}.$$

Vamos indicar com $x(t,t_o,x_o)$ e $y(t,t_o,y_o)$ soluções quaisquer das equações (II.1), (II,2), respectivamente, passando pelo ponto (t_o,φ_o).

As definições seguintes são estabelecidas para a equação (II,1), mas, naturalmente, elas também se aplicam a (II,2). Caso não tenhamos unicidade de soluções para (II,1), exigiremos que as condições contidas nessas definições sejam satisfeitas por todas as soluções que passam pelo ponto (t_o,φ_o).

Definição II.1

Diz-se que o conjunto $\varphi=0$ é assintoticamente auto-invariante em relação à equação (II,1) se e somente se existe uma função $\lambda\in\mathcal{L}$ tal que, para qualquer $t_o\geqslant 0$, toda solução $x(t,t_o,0)$ de (II,1) está definida no futuro e satisfaz:

$$\|x_t(t_o,0)\|\leqslant\lambda(t_o)\ ,\ \forall t\ ,\ t\geqslant t_o\ .$$

Decorre imediatamente desta definição o seguinte fato:

"Se o conjunto $\varphi=0$ é assintoticamente auto-invariante em relação a (II,1), então, para qualquer sequência decrescente (ε_p), com $\varepsilon_p>0$ e $\varepsilon_p \to 0$ quando $p\to\infty$, existe uma sequência crescente $t_p(\varepsilon)$, com $t_p(\varepsilon)\to\infty$, quando $p\to\infty$, tal que, para qualquer natural p e qualquer $t_o \geqslant t_p(\varepsilon)$, toda solução $x(t,t_o,0)$ de (II.1) satisfaz:

$$\|x_t(t_o,0)\| < \varepsilon_p \quad , \quad \forall t \ , \ t \geqslant t_o \text{ ."}$$

Com efeito, como $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$, então para cada $\varepsilon_p > 0$ de uma sequência (ε_p) na condição acima, existe um $t_p(\varepsilon)$, tal que: $\lambda(t) < \varepsilon_p$, $\forall t$, $t \geqslant t_p(\varepsilon)$. Desta forma, temos uma sequência $(t_p(\varepsilon))$ de números reais que, sem perda de generalidade, podemos considerar crescente e com $t_p(\varepsilon) \to \infty$ quando $p \to \infty$. Além disso, para qualquer natural p e qualquer $t_o \geqslant t_p(\varepsilon)$, temos:

$$\|x_t(t_o,0)\| \leqslant \lambda(t_o) < \varepsilon_p \ , \quad \forall t \ , \quad t \geqslant t_o \ .$$

Para ilustrar a noção de conjunto assintoticamente auto invariante, de uma maneira bem simples, consideremos a equação diferencial ordinária $\dot{x} = x + e^{-t}$. A solução que passa pelo ponto $(t_o,0)$ é dada por: $x(t,t_o,0)= (t-t_o).\ e^{-t}$, $\forall t$, $t \geqslant t_o$. Como $t_o + 1$ é o único ponto de máximo local da função

$$g: t \to (t-t_o)\ e^{-t} \ ,$$

podemos escrever que:

$$|x(t,t_o,0)| \leqslant e^{-(t_o + 1)} \quad , \quad \forall t \ , \ t \geqslant t_o \ .$$

Deste modo, existe $\lambda \in \mathcal{L}$, definida por $\lambda(t) = e^{-(t+1)}$ tal que:

$$|x(t,t_o,0)| \leqslant \lambda(t_o) \quad , \forall t,\ t \geqslant t_o \ .$$

Definição II,2

Diz-se que o conjunto $\varphi=0$ é equiestável se e somente se existem funções $K \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, $q \in \mathcal{L}$, tais que, para quaisquer $t_o \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_o \in C_H$, toda solução $x(t,t_o,\varphi_o)$ de (II,1) está definida no futuro e satisfaz:

$$\|x_t(t_o,\varphi_o)\| \leqslant K(t_o)\|\varphi_o\| + q\ (t_o) \ , \forall t,\ t \geqslant t_o \ .$$

Destacamos abaixo alguns fatos decorrentes desta definição:

a) se o conjunto $\varphi=0$ é equiestável, então ele é assintoticamente auto-invariante em relação à equação (II,1).

b) se $x(t) \equiv 0$ é solução de (II,1) e se $q\ (t) \equiv 0$, a definição acima reduz-se à equiestabilidade da solução trivial $x(t) \equiv 0$. Com efeito, neste caso, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K(t_o)}$, uma vez que se pode supor $K(t_o) > 0$.

Daí, $\|\varphi_o\| < \delta \rightarrow \|x_t(t_o,\varphi_o)\| < \varepsilon$, $\forall t,\ t \geqslant t_o$.

c) se o conjunto $\varphi=0$ é equiestável, então, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\zeta = \zeta(\varepsilon)$ e, para todo $t_o \geqslant \zeta(\varepsilon)$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon, t_o) > 0$, tais que:

$$\|\varphi_o\| < \delta \rightarrow \|x_t(t_o,\varphi_o)\| < \varepsilon \ , \quad \forall t, \quad t \geq t_o \ .$$

De fato, dado $\varepsilon>0$, existe um $\zeta=\zeta(\varepsilon)$ tal que

$$q\ (t) < \frac{\varepsilon}{2} \ , \quad \forall t \ , \ t \geq \zeta \ .$$

Por outro lado, dado $t_o \geq \zeta(\varepsilon)$, podemos tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2.K(t_o)}$

Assim:

$$\|\varphi_o\| < \delta \rightarrow |x_t(t_o,\varphi_o)\| < K(t_o). \frac{\varepsilon}{2.K(t_o)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ \forall t \geq t_o \ .$$

Esta propriedade significa que o conjunto $\varphi=0$ é eventualmente estável relativamente à equação (II,1).

Definição II.3

Diz-se que o conjunto $\varphi=0$ é equiexponencialmente assintoticamente estável se e somente se existem funções $K \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, $H \in \mathcal{B}$, com $H(t,t)=0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}_+$, $H(t,t_o) \leq p(t_o)$ para algum $p \in \mathcal{L}$ e um número real $\alpha>0$, tais que, para quaisquer $t_o \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_o \in C_H$, toda solução $x(t,t_o,\varphi_o)$ de (II,1) está definida no futuro e satisfaz:

$$|x_t(t_o,\varphi_o)\| \leq K(t_o).e^{-\alpha(t-t_o)}\|\varphi_o\| + H(t,t_o), \quad \forall t, \ t \geq t_o \ .$$

Decorre desta definição que:

d) se o conjunto $\varphi=0$ é equiexponencialmente assintoticamente estável, então ele é equiestável.

e) se $x(t)\equiv 0$ é solução de (II,1) e se $H(t,t_o)\equiv 0$, a definição acima reduz-se à estabilidade equiexponencial assintótica da solução trivial $x(t)\equiv 0$. Com efeito, dados $\varepsilon>0$, $t_o \in \mathbb{R}_+$, podemos tomar $\delta=\frac{\varepsilon}{k(t_o)}$. Daí:

$$|\varphi_o| < \delta \Rightarrow \|x_t(t_o,\varphi_o)\| < \varepsilon . e^{-\alpha(t-t_o)} \ , \ \forall t,\ t\geq t_o.$$

§2. Um exemplo.

Apresentaremos agora um exemplo mais trabalhado para ilustrar as definições anteriores.

Consideremos a equação diferencial funcional linear

$$\dot{x}(t) = A(t).x(t) + B(t).x(t-r) \tag{II.3}$$

$$x_{t_o} = \varphi_o$$

onde $A(t)$ e $B(t)$ são matrizes nxn, contínuas em $\mathbb{R}_+$. Consideremos também a equação:

$$\dot{y}(t) = -y(t).A(t) - y(t+r)B(t+r) \tag{II.4}$$

que será chamada adjunta da equação (II.3), bem como a equação não homogênea:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-r) + w(t) \ , \tag{II.5}$$

onde $w \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$.

Para cada $t \in \mathbb{R}_+$ fixado, podemos construir uma matriz $Y(s,t)$,

nxn, que satisfaça (II.4) para $s \leq t$ e com $Y(t,t) = I$.
Com efeito, inicialmente colocamos:

$$Y(s,t) = 0 \ , \ \forall s, \ \ s>t.$$

Agora, para $t-r \leq s<t$, exigimos que $Y(s,t)$ satisfaça à equação adjunta:

$$\frac{\partial Y(s,t)}{\partial s} = - Y(s,t) \ A(s)$$

$$Y(t,t) = I.$$

Portanto, em $[t-r;t]$, a matriz $Y(s,t)$ é determinada por uma equação linear ordinária, bem como satisfaz (II.4). Vamos indicar com $U(s)$ a matriz $Y(s,t)$ construida nesta etapa.

Para $t-2r \leq s<t-r$, exigimos que $Y(s,t)$ satisfaça à equação:

$$\frac{\partial Y(s,t)}{\partial s} = -Y(s,t) \ A(s) \ - \ U(s+r)B(s+r)$$

$$Y(t-r,t) = U(t-r)$$

O processo pode ser continuado, seguindo-se o modelo acima, com o que acabaremos por construir a matriz $Y(s,t)$.

A seguir, multiplicando (II.5), membro a membro, pela matriz $Y(s,t)$ construída e integrando, obtemos:

$$\int_{t_o}^{t} Y(s,t)\,\dot{x}(s)ds = \int_{t_o}^{t} Y(s,t)A(s)x(s)ds + \int_{t_o}^{t} Y(s,t)B(s)x(s-r)ds + $$

$$+ \int_{t_o}^{t} Y(s,t)\,w(s)ds \,.$$

$$Y(t,t).x(t) - Y(t_o,t).x(t_o) - \int_{t_o}^{t} \frac{\partial Y(s,t)}{\partial s}\,x(s)ds =$$

$$= \int_{t_o}^{t} Y(s,t)\,A(s)\,x(s)ds + \int_{t_o}^{t} Y(s,t)B(s)x(s-r)ds +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} Y(s,t)\,w(s)ds$$

Daí, como: $\dfrac{\partial Y(s,t)}{\partial s} = -Y(s,t)A(s) - Y(s+r,t)\,B(s+r)$,

resulta:

$$x(t,t_o,\varphi_o) = Y(t_o,t)\,x(t_o) - \int_{t_o}^{t} Y(s+r,t)B(s+r)\,x(s)ds - \int_{t_o}^{t} Y(s,t)A(s)x(s)ds$$

$$+ \int_{t_o}^{t} Y(s,t)\,A(s)\,x(s)ds + \int_{t_o}^{t} Y(s,t)B(s)x(s-r)ds +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} Y(s,t)\,w(s)\,ds$$

$$x(t,t_o,\varphi_o)= Y(t_o,t)\ x(t_o) - \int_{t_o}^{t} Y(s+r,t)\ B(s+r)\ x(s)ds +$$

$$+ \int_{t_o-r}^{t-r} Y(s+r,t)\ B(s+r)\ x(s)ds + \int_{t_o}^{t} Y(s,t)\ w(s)ds$$

$$x(t,t_o,\varphi_o) = Y(t_o,t)\ x(t_o) + \int_{t_o-r}^{t_o} Y(s+r,t)\ B(s+r)\ x(s)\ ds$$

$$- \int_{t-r}^{t} Y(s+r,t)\ B(s+r)\ x(s)\ ds$$

$$+ \int_{t_o}^{t} Y(s,t)\ w(s)\ ds$$

Considerando que $Y(s+r,t)=0$ para $t-r<s\leq t$, vem:

$$x(t,t_o,\varphi_o)= Y(t_o,t).\varphi(0) + \int_{t_o-r}^{t_o} Y(s+r,t)\ B(s+r)\varphi_o(s)ds + \int_{t_o}^{t} Y(s,t)w(s)\ ds,$$

$$t\geq t_o.$$

Assim, passamos a dispor de uma maneira de exprimir uma solução da equação perturbada (II.5).

Suponhamos, a seguir, que estejam satisfeitas as seguintes condições:

(i) $\quad \| B(t) \| \leq B_O$, para $t_o\leq t\leq t_o + r$

(ii) $\quad \|Y(s,t)\| \leqslant \sigma . e^{\beta s-\alpha(t-s)}$, $t \geqslant s \geqslant 0$, onde $\sigma > 1$, $\alpha > 0$,

e $\beta \geqslant 0$.

Então:

$$|x(t,t_o,\varphi_o)| \leqslant \sigma . e^{\beta t_o - \alpha(t-t_o)} \|\varphi_o\| +$$

$$+ \int_{t_o-r}^{t_o} \sigma . e^{\beta(s+r) - \alpha(t-s-r)} . B_o \|\varphi_o\| ds$$

$$+ \int_{t_o}^{t} \sigma . e^{\beta s - \alpha(t-s)} |w(s)| ds, \quad \forall t, \quad t \geqslant t_o$$

$$|x(t,t_o,\varphi_o)| \leqslant \sigma . e^{\beta t_o} \|\varphi_o\| e^{-\alpha(t-t_o)} + \sigma . B_o . \|\varphi_o\| e^{(\beta+\alpha)r} . e^{-\alpha t} \int_{t_o-r}^{t_o} e^{(\beta+\alpha)s} ds +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \sigma . e^{\beta s} |w(s)| . ds , \; t \geqslant t_o$$

$$|x(t,t_o,\varphi_o)| \leqslant \sigma e^{\beta t_o} \left[1 + \frac{B_o . e^{(\alpha+\beta)r}}{\alpha + \beta}\right] \|\varphi_o\| . \; e^{-\alpha(t-t_o)} \; +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \sigma . e^{\beta s} |w(s)| ds.$$

Fixemos momentaneamente um $t \geqslant t_o$. Logo, para $t-r \leqslant t' \leqslant t$, temos

$$|x(t',t_o,\varphi_o)| \leqslant \sigma . \; e^{\beta t_o} \left[1 + \frac{B_o . \; e^{(\alpha+\beta)r}}{\alpha + \beta}\right] \|\varphi_o\| \, e^{-\alpha(t'-t_o)} \quad +$$

$$+ \int_{t_o}^{t'} e^{-\alpha(t'-s)} \sigma . e^{\beta s} |w(s)| ds.$$

$$|x(t',t_o,\psi_o)| \leqslant \sigma \cdot e^{\beta t_o}\left[1+\frac{B_o \cdot e^{(\alpha+\beta)r}}{\alpha+\beta}\right]\|\psi_o\|\, e^{-\alpha(t-t_o)} \cdot e^{\alpha(t-t')} +$$

$$+\int_{t_o}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\, e^{\alpha(t-t')}\, \sigma \cdot e^{\beta s}\, |w(s)|ds$$

Segue-se deste resultado que:

$$\|x_t(t_o,\psi_o)\| \leqslant \sigma. \quad e^{\beta t_o}\left[1+\frac{B_o \cdot e^{(\alpha+\beta)r}}{\alpha+\beta}\right]\|\psi_o\| \cdot e^{-\alpha(t-t_o)}\, e^{\alpha r} +$$

$$+\int_{t_o}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\, e^{\alpha r} \cdot \sigma \cdot e^{\beta s} \cdot |w(s)|\, ds \quad , t \geqslant t_o .$$

Colocando: $$K(u) = \sigma\left[1+\frac{B_o \cdot e^{(\alpha+\beta)r}}{\alpha+\beta}\right] e^{\alpha r+\beta u} \quad , u \in \mathbb{R}_+$$

$$\gamma(s) = \sigma \cdot \quad e^{\alpha r+\beta s} \quad |w(s)| \quad , \qquad s \in \mathbb{R}_+$$

$$H(t,t_o) = \int_{t_o}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\, \gamma(s)\, ds \qquad t,t_o \in \mathbb{R}_+ \quad ,$$

obtemos:

$$\|x_t(t_o,\psi_o)\| \leqslant K(t_o) \cdot \|\psi_o\| \cdot e^{-\alpha(t-t_o)} + H(t,t_o) \quad , \quad \forall t,\ t \geqslant t_o .$$

Suponhamos adicionalmente que $w(t)$ seja tal que:

$$\int_t^{t+1} \gamma(s)\, ds \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty$$

Então:

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t e^{-\alpha(t-s)} \gamma(s)\, ds = 0 .$$

Como:
$$\sup_{t_o \geqslant 1} H(t,t_o) = \sup_{t_o \geqslant 1} \int_{t_o}^t e^{-\alpha(t-s)} \gamma(s)\, ds = \int_1^t e^{-\alpha(t-s)} \gamma(s)\, ds,$$

resulta:
$$\lim_{t\to\infty} \left[\sup_{t_o \geqslant 1} H(t,t_o)\right] = 0$$

Por outro lado, segundo o lema (I.4), para $t_o \geqslant 1$ temos que:

$$H(t,t_o) = e^{-\alpha t} \int_{t_o}^t e^{\alpha s} \gamma(s)\, ds \leqslant e^{-\alpha t} \int_{t_o-1}^t e^{\alpha(s+1)} p(s)\, ds, \quad \text{onde}$$

$$p(s) = \int_s^{s+1} \gamma(u)\, du.$$

Para $0 \leqslant t_o \leqslant 1$, podemos estender γ por continuidade a $[-1;0]$, de modo a manter válida a desigualdade acima. Assim, para todo $t_o \geqslant 0$, podemos escrever que:

$$H(t,t_o) \leqslant e^{-\alpha t} \cdot \sup_{t_o-1 \leqslant s < \infty} p(s) \int_{t_o-1}^t e^{\alpha(s+1)}\, ds = \frac{e^{\alpha}}{\alpha} \cdot a(t_o) \quad ,$$

onde:

(i) $$a(t_o) = \sup_{t_o - 1 \leq s < \infty} p(s).$$

(ii) a função $\lambda: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definida por $\lambda(t) = \dfrac{e^{\alpha}}{\alpha}\, a(t)$ está na classe $\mathcal{L}$.

Estes resultados mostram que o conjunto $\phi=0$ é equiexponencialmente assintoticamente estável relativamente à equação perturbada (II.5).

Para finalizar, convém observar que se $x(t,t_o,\phi_o)$ e $x(t,t_o,\psi_o)$ são duas soluções quaisquer da equação não perturbada (II.3), então, de acordo com as suposições feitas, podemos escrever que:

$$\|x_t(t_o,\phi_o) - x_t(t_o,\psi_o)\| \leq K(t_o)\, \|\phi_o - \psi_o\|\, e^{-\alpha(t-t_o)}, \ \forall t,\ t \geq t_o.$$

CAPITULO III

Neste capítulo, procuramos estabelecer alguns resultados relativos ao sistema perturbado

$$\frac{d}{dt} D(t,y_t) = f(t,y_t) + R(t,y_t) \qquad \text{(III.2)}$$

do sistema:

$$\frac{d}{dt} D(t,x_t) = f(t,x_t) \qquad \text{(III.1)}$$

Para isto, primeiramente efetuaremos uma extensão de um princi pio de comparação devido a Hale [4a].

§1. Um teorema de comparação

<u>Lema III.1</u>

Suponhamos que:

A_1.) existam funções $K \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, $H \in \mathcal{B}$, com $H(t,t)=0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}_+$ e $H(t,t_o) \leqslant p(t_o)$ para algum $p \in \mathcal{L}$, $\alpha \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, com $\dot{\alpha}(t)$ contínua para todo $t \in \mathbb{R}_+$, tais que, para quaisquer $t_o \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_o \in C_H$, tem-se:

$$\|x_t(t_o,\varphi_o)\| \leq K(t_o) \cdot e^{-[\alpha(t)-\alpha(t_o)]}\|\varphi_o\| + H(t,t_o) \ , \ \forall t, \ t\geq t_o \ ,$$

onde $x(t,t_o,\varphi_o)$ indica uma solução de (III.1) passando pe lo ponto (t_o,φ_o) ;

A_2.) a função H seja parcialmente diferenciável relativamente

a t_o e $\sup\limits_{\zeta\geq 0} \dfrac{-\partial H(t+\zeta,t)}{\partial t_o} \cdot e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t)} \leq \eta(t)$, $\forall t$, $t \in \mathbb{R}_+$,

onde $\eta \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ e $\int_t^{t+1} \eta(s)ds \to 0$ quando $t\to\infty$.

A_3.) quaisquer duas soluções $x(t,t_o,\varphi_o)$, $x(t,t_o,\psi_o)$ de (III.1)

satisfaçam:

$$\|x_t(t_o,\varphi_o) - x_t(t_o,\psi_o)\| \leq K(t_o) \cdot e^{-[\alpha(t)-\alpha(t_o)]}\|\varphi_o-\psi_o\| \ , \ \forall t, \ t\geq t_o \ .$$

Nestas condições, existe um funcional $V: \mathbb{R}_+ \times C_H \to \mathbb{R}$, contínuo , tal que:

a) $\|\varphi\| \leq V(t,\varphi) \leq K(t)\ \|\varphi\|$,

b) $|V(t,\varphi_1) - V(t,\varphi_2)| \leq K(t)\|\varphi_1-\varphi_2\|$

c) $\dot{V}(t,\varphi) \leq -\dot{\alpha}(t)\ V(t,\varphi) + \eta(t)$
(III.1)

d) $|D(t,\varphi)| \leq (1 + \ell(r))\ V(t,\varphi)$

Prova

Inicialmente, colocamos:

$$V(t,\varphi) = \sup_{\zeta\geq 0} \left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t)\right] e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t)}$$

Vamos mostrar agora que $V(t,\varphi)$ está bem definido. Para isto , notamos que:

$$V(t,\varphi) \geq \left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t)\right] e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t)}, \ \forall\zeta, \zeta \in \mathbb{R}_+$$

Logo, em particular:

$$V(t,\varphi) \geq \|x_t(t,\varphi)\| - H(t,t) = \|\varphi\|$$

Por outro lado, como

$$\left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t)\right] e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t)} \leq K(t)\ \|\varphi\|, \ \forall\zeta,\ \zeta \in \mathbb{R}_+$$

segundo a hipótese A_1 , então:

$$V(t,\varphi) = \sup_{\zeta\geq 0} \left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t)\right] e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t)} \leq K(t)\ \|\varphi\| .$$

Quanto à propriedade (b), temos:

$$|V(t,\varphi_1) - V(t,\varphi_2)| = | \sup_{\zeta\geq 0} \left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi_1)\| - H(t+\zeta,t)\right] e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t)} -$$

$$- \sup_{\zeta\geq 0}\left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi_2) - H(t+\zeta,t)\right] e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t)}|$$

$$\leq \sup_{\zeta\geq 0} \|x_{t+\zeta}(t,\varphi_1) - x_{t+\zeta}(t,\varphi_2)\| \ e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t)}$$

Segue-se, pela hipótese A_3, que

$$|V(t,\varphi_1) - V(t,\varphi_2)| \leq \sup_{\zeta\geq 0}\left[K(t).\ e^{-\left[\alpha(t+\zeta) - \alpha(t)\right]} \|\varphi_1-\varphi_2\| \ e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t)}\right] =$$

$$= K(t) \|\varphi_1-\varphi_2\|$$

Vamos passar à verificação da propriedade (c). Temos:

$$\dot{V}(t,\varphi) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \ \frac{1}{h} \left[V(t+h,\ x_{t+h}(t,\varphi)) - V(t,\varphi)\right]$$

(III.1)

$$= \overline{\lim_{h\to 0^+}} \ \frac{1}{h}\{ \sup_{\zeta\geq 0} \left[\|x_{t+h+\zeta}(t+h,x_{t+h}(t,\varphi))\| - H(t+h+\zeta,\ t+h)\right| e^{\alpha(t+h+\zeta)-\alpha(t+h)} -$$

$$-\sup_{\zeta\geq 0}\left[\| x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t)\right] e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t)} \}$$

Como a hipótese A_3 garante unicidade de soluções para a equação (III.1), temos que:

$$x_{t+h+\zeta}(t+h,\ x_{t+h}(t,\varphi) = x_{t+h+\zeta}(t,\varphi)$$

Logo:

$$\dot{V}_{(III.1)}(t,\varphi) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h} \{ \sup_{\zeta\geq h}\left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta, t+h)\right] e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t+h)} -$$

$$- \sup_{\zeta\geq 0}\left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t+h)\right] e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t)} \}$$

$$\dot{V}_{(III.1)}(t,\varphi) \leq \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h} \{ \sup_{\zeta\geq 0}\left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t+h)\right] e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t+h)} -$$

$$-\sup_{\zeta\geq 0}\left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t+h)\right] e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t)} \}$$

$$\dot{V}_{(III.1)}(t,\varphi) \leq \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h} \{ \sup_{\zeta\geq 0}\left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t+h)\right] e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t+h)} -$$

$$-\sup_{\zeta\geq 0}\left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t)\right] e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t+h)} +$$

$$+ \sup_{\zeta\geq 0}\left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t)\right] e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t+h)} -$$

$$- \sup_{\zeta\geq 0}\left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t)\right] e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t)} \}$$

$$\dot{V}_{(III.1)}(t,\varphi) \leq \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h} \{ \sup_{\zeta\geq 0}\left[H(t+\zeta,t) - H(t+\zeta,t+h)\right] e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t+h)} +$$

$$+ \sup_{\zeta\geq 0}\left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t)\right] e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t)} (e^{\alpha(t)-\alpha(t+h)} - 1) \}$$

$$\dot{V}_{(III.1)}(t,\psi) \leqslant \overline{\lim_{h\to 0^+}} \sup_{\zeta\geqslant 0} \frac{H(t+\zeta,t) - H(t+\zeta,t+h)}{h} e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t+h)} +$$

$$+ V(t,\psi) . \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{e^{\alpha(t) - \alpha(t+h)} - 1}{h}$$

Uma vez que:

$$\overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{e^{\alpha(t) - \alpha(t+h)} - 1}{h} = - \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{e^{\alpha(t+h)} - e^{\alpha(t)}}{h} . \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{e^{\alpha(t+h)}}$$

$$= - \left[\dot{\widehat{e^{\alpha(t)}}}\right] . \frac{1}{e^{\alpha(t)}} = -\dot{\alpha}(t).e^{\alpha(t)}.e^{-\alpha(t)}$$

$$= - \dot{\alpha}(t) ,$$

obtemos:

$$\dot{V}_{(III.1)}(t,\psi) \leqslant \overline{\lim_{h\to 0^+}} \left[\sup_{\zeta\geqslant 0} \frac{H(t+\zeta,t) - H(t+\zeta,t+h)}{h} . e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t+h)} \right] -$$

$$- \dot{\alpha}(t). V(t,\psi)$$

Segundo a hipótese A_2, podemos escrever que:

$$\sup_{\zeta\geqslant 0}\left[\frac{-\partial H(t+\zeta,t)}{\partial t_o} e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t)}\right] = \sup_{\zeta\geqslant 0} \left(\overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{H(t+\zeta,t) - H(t+\zeta,t+h)}{h} \right) e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t)}$$

$$= \sup_{\zeta\geqslant 0} \left(\overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{H(t+\zeta,t)-H(t+\zeta,t+h)}{h} e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t+h)} \right)$$

$$\leqslant \eta(t) \ , \ \forall t, \ t \in \mathbb{R}_+$$

Logo, para cada $\zeta \in \mathbb{R}_+$, temos:

$$\overline{\lim_{h\to 0^+}} \left(\frac{H(t+\zeta,t) - H(t+\zeta,t+h)}{h} \cdot e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t+h)} \right) \leqslant \eta(t) \ , \forall t, \ t \in \mathbb{R}_+$$

Então, dado $\varepsilon = 1$, existe um $\delta > 0$ tal que:

$$\forall h, \ 0<h<\delta \Rightarrow \frac{H(t+\zeta,t) - H(t+\zeta,t+h)}{h} \cdot e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t+h)} \leqslant \eta(t)+1 \ , \forall t, t \in R_+$$

Devido a esta limitação para a função:

$$(\zeta,h) \mapsto \frac{H(t+\zeta,t) - H(t+\zeta,t+h)}{h} \cdot e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t+h)}$$

no conjunto $\mathbb{R}_+ \times \,]0;\delta[$, o lema I.1 nos permite escrever:

$$\overline{\lim_{h\to 0^+}} \sup_{\zeta \geqslant 0} \left[\frac{H(t+\zeta,t) - H(t+\zeta,t+h)}{h} \cdot e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t+h)} \right] =$$

$$= \sup_{\zeta \geqslant 0} \overline{\lim_{h\to 0^+}} \left[\frac{H(t+\zeta,t) - H(t+\zeta,t+h)}{h} \cdot e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t+h)} \right]$$

Portanto, em vista destes resultados, temos:

$$\dot{V}(t,\varphi) \leqslant -\dot{\alpha}(t) . \ V(t,\varphi) + \eta(t) \ , \ \forall (t,\varphi), \ (t,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C_H$$
(III.2)

Quanto à propriedade (d), temos:

$$|D(t,\varphi)| = |\varphi(o) - \int_{-r}^{0-} [d_\Theta\, \mu(t,\Theta)]\varphi(\Theta)| \leqslant \|\varphi\| + \ell(r)\|\varphi\| = (1+\ell(r))\|\varphi\| .$$

Vamos mostrar agora que o funcional $V(t,\varphi)$ é contínuo. Para isto, sejam $\varphi,\psi \in C_H$ e $\xi > 0$. Temos:

$$|V(t+\xi,\psi) - V(t,\varphi)| \leqslant |V(t+\xi,\psi) - V(t+\xi,\varphi)|$$

$$+ |V(t+\xi,\varphi) - V(t+\xi,\, x_{t+\xi}(t,\varphi))|$$

$$+ |V(t+\xi,x_{t+\xi}(t,\varphi)) - V(t,\varphi)|$$

$$|V(t+\xi,\psi) - V(t,\varphi)| \leqslant K(t+\xi)\|\psi - \varphi\| +$$

$$+ K(t+\xi)\|\varphi - x_{t+\xi}(t,\varphi)\|$$

$$+ |V(t+\xi,x_{t+\xi}(t,\varphi)) - V(t,\varphi)|$$

Observamos, a seguir, que:

(i) o termo $K(t+\xi)\|\psi-\varphi\|$ é arbitrariamente pequeno, desde que ξ e $\|\psi-\varphi\|$ o sejam;

(ii) a aplicação $\xi \mapsto x_{t+\xi}(t,\varphi)$ é contínua. Portanto, o termo $K(t+\xi)\|\varphi - x_{t+\xi}(t,\varphi)\|$ pode ser tornado arbitrariamente pe queno.

Resta examinar, portanto, a "pequenez" do terceiro termo. Da definição do funcional $V(t,\varphi)$, temos:

$$|V(t+\xi,\ x_{t+\xi}(t,\varphi) - V(t,\varphi)| \ =$$

$$=|\sup_{\zeta\geq 0}\left[\|x_{t+\xi+\zeta}(t+\xi,\ x_{t+\xi}(t,\varphi))\| - H(t+\xi+\zeta,\ t+\xi)\right] e^{\alpha(t+\xi+\zeta) - \alpha(t+\xi)}$$

$$- \sup_{\zeta\geq 0}\left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t)\right].\ e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t)}|$$

$$\leq \sup_{\zeta\geq\xi}\left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t+\xi)\right] e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t+\xi)}$$

$$- \sup_{\zeta\geq 0}\left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t)\right].\ e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t)}|$$

Colocando agora:

$$a(\xi)= \sup_{\zeta\geq\xi}\left[\| x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t)\right] e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t)} \quad ,$$

obtemos:

(iii) $$a(0)= \sup_{\zeta\geq 0}\left[\|x_{t+\zeta}(t,\varphi)\| - H(t+\zeta,t)\right] e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t)}$$

(iv) $$|V(t+\xi, x_{t+\xi}(t,\psi)) - V(t,\psi)| \leqslant \Big|a(\xi).\ e^{\alpha(t) - \alpha(t+\xi)} + \sup_{\zeta\geqslant\xi}\left[H(t+\zeta,t)-H(t+\zeta,t+\xi)\right]e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t+\xi)} - a(o)\Big|$$

Enfim, notando que $a(\xi)$ é uma função decrescente, com $a(\xi)\to a(o)$ quando $\xi\to 0$, e que:

$$\sup_{\zeta\geqslant\eta}\left[H(t+\zeta,t) - H(t+\zeta,t+\xi)\right] e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t+\xi)} \to 0 \text{ quando } \xi\to 0,$$

concluimos que o termo $|V(t+\xi,x_{t+\xi}(t,\psi)) - V(t,\psi)|$ pode ser tornado arbitrariamente pequeno.

Em vista destes resultados, pode-se afirmar que o funcional $V(t,\psi)$ é contínuo.

<u>Observação</u>

No lema anterior, definimos um funcional $V:\mathbb{R}_+ x C_H \to \mathbb{R}$, colocando:

$$V(t,\psi) = \sup_{\zeta\geqslant 0}\left[\|x_{t+\zeta}(t,\psi)\| - H(t+\zeta,t)\right] e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t)}$$

Se tivéssemos colocado:

$$V(t,\psi) = \sup_{\zeta\geqslant 0} \|x_{t+\zeta}(t,\psi)\| \ e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t)}$$

e tivéssemos exigido que $f(t,\psi)$ fosse linear em ψ, teríamos obtido todas as propriedades (a), (b), (c) e (d), exceto a limitação superior. Com efeito, neste caso, teríamos chegado à desigualdade:

$$V(t,\psi) \leq K(t)\|\psi\| + \sup_{\zeta \geq 0} H(t+\zeta,t) . e^{\alpha(t+\zeta)-\alpha(t)} ,$$

mas não poderíamos garantir que o supremo acima fosse finito. Para ilustrar esta situação, consideremos as funções H e α definidas por:

$$H(t,t_o) = \int_{t_o}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \gamma(s).ds \quad , \quad \alpha(t) = \lambda t \ , \quad (\lambda > 0)$$

e suponhamos que:

$$\gamma(s) = e^{-\lambda s} \quad , \quad \forall s,\ s \in \mathbb{R}_+ .$$

Então:

(i) $$\sup_{\zeta \geq 0} \frac{-\partial H(t+\zeta,t)}{\partial t_o} e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t)} = e^{-\lambda t} \quad , \forall t,\ t \in \mathbb{R}_+$$

(ii) $$\sup_{\zeta \geq 0} \left[H(t+\zeta,t)\, e^{\alpha(t+\zeta) - \alpha(t)} \right] = e^{-\lambda t} . \sup_{\zeta \geq 0} \zeta = +\infty, \ \forall t,\ t \in \mathbb{R}_+$$

Para os próximos resultados, admitiremos que o sistema perturbado (III-2) possui uma única solução passando através de cada ponto $(t_o,\psi_o) \in \mathbb{R}_+ x C_H$

Lema III.2

Suponhamos que as hipóteses A_1, A_2 e A_3 do lema anterior estejam satisfeitas e seja $V(t,\varphi)$ o funcional definido neste mesmo lema. Então:

$$\underset{(III-2)}{\dot{V}(t,\varphi)} \leq -\dot{\alpha}(t)\, V(t,\varphi) + \eta(t) + \frac{K(t)}{1-\ell(h_o)}\,|R(t,\varphi)|\ ,\ \forall (t,\varphi),\ (t,\varphi) \in \mathbb{R}_+ x C_H,$$

para algum h_o, $0<h_o\leq r$.

Prova

Sejam $x(t+\zeta,t,\varphi)$ e $y(t+\zeta,t,\varphi)$ soluções das equações (III-1) e (III-2) respectivamente. Temos:

$$\underset{(III-2)}{\dot{V}(t,\varphi)} = \overline{\lim_{h\to 0^+}}\ \frac{1}{h}\left[V(t+h,\ y_{t+h}(t,\varphi)) - V(t,\varphi)\right]$$

$$= \overline{\lim_{h\to 0^+}}\ \frac{1}{h}\Big[\,V(t+h,\ y_{t+h}(t,\varphi)) - V(t+h,\ x_{t+h}(t,\varphi)) +$$

$$+ V(t+h,\ x_{t+h}(t,\varphi)) - V(t,\varphi)\,\Big]$$

$$\leq \overline{\lim_{h\to 0^+}}\ \frac{1}{h}\left[V(t+h,\ x_{t+h}(t,\varphi)) - V(t,\varphi)\right] +$$

$$+ \overline{\lim_{h\to 0^+}}\ \frac{1}{h}\left[V(t+h,\ y_{t+h}(t,\varphi)) - V(t+h,\ x_{t+h}(t,\varphi))\right]$$

Introduzindo a desigualdade (b) do lema III.1, obtemos:

$$\underset{(III-2)}{\dot{V}(t,\varphi)} \leqslant \underset{(III-1)}{\dot{V}(t,\varphi)} + \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h} K(t+h) \| y_{t+h}(t,\varphi) - x_{t+h}(t,\varphi) \|$$

$$\leqslant -\dot{\alpha}(t)\, V(t,\varphi) + \eta(t) + K(t). \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h} \| y_{t+h}(t,\varphi) - x_{t+h}(t,\varphi) \| \qquad \text{(III-3)}$$

Observemos agora que:

$$D(t+h, x_{t+h}(t,\varphi)) = D(t,\varphi) + \int_t^{t+h} f(s, x_s(t,\varphi))\, ds \quad , h\geqslant 0$$

$$D(t+h, y_{t+h}(t,\varphi)) = D(t,\varphi) + \int_t^{t+h} f(s,y_s(t,\varphi))\, ds + \int_t^{t+h} R(s, y_s(t,\varphi))\, ds$$

Como o operador D é linear, temos que:

$$D(t+h,y_{t+h}(t,\varphi) - x_{t+h}(t,\varphi)) = \int_t^{t+h} \left[f(s,y_s(t,\varphi)) - f(s,x_s(t,\varphi))\right]ds + \int_t^{t+h} R(s,y_s(t,\varphi))ds$$

Mas:

$$D(t+h,y_{t+h}(t,\varphi) - x_{t+h}(t,\varphi)) = y(t+h,t,\varphi) - x(t+h,t,\varphi) - g(t+h,y_{t+h}(t,\varphi) - x_{t+h}(t,\varphi)).$$

Segue-se, pois:

$$y(t+h,t,\varphi) - x(t+h,t,\varphi) = g(t+h, y_{t+h}(t,\varphi) - x_{t+h}(t,\varphi)) +$$

$$+ \int_t^{t+h} \left[f(s,y_s(t,\varphi)) - f(s,x_s(t,\varphi))\right] ds \ +$$

$$+ \int_t^{t+h} R(s,y_s(t,\varphi))\ ds$$

Por outro lado, para $0 \leqslant h \leq r$, temos:

$$|g(t+h,y_{t+h}(t,\varphi) - x_{t+h}(t,\varphi))| = \left|\int_{-r}^{0} \left[d_\Theta\ \mu(t,\Theta)\right]\left[y_{t+h}(\Theta) - x_{t+h}(\Theta)\right]\right|$$

$$= \left|\int_{-h}^{0} \left[d_\Theta \mu(t,\Theta)\right]\ \left[y_{t+h}(\Theta) - x_{t+h}(\Theta)\right]\right|$$

$$|g(t+h,y_{t+h}(t,\varphi) - x_{t+h}(t,\varphi)| \leqslant \ell(h)\, \| y_{t+h}(t,\varphi) - x_{t+h}(t,\varphi) \|$$

Assim:

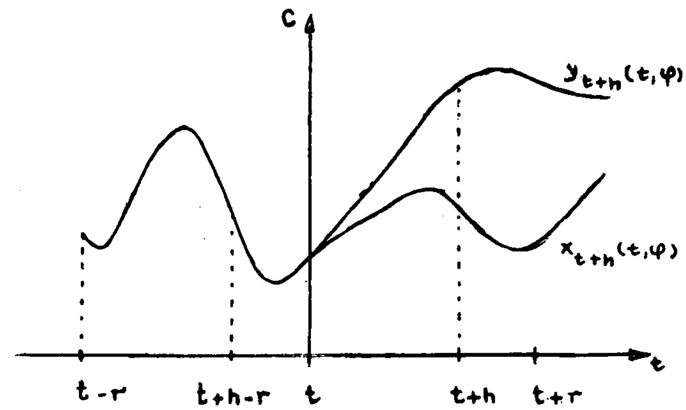
$$|y(t+h,t,\varphi) - x(t+h,t,\varphi)| \leqslant \ell(h)\ \|y_{t+h}(t,\varphi) - x_{t+h}(t,\varphi)\| \ \ +$$

$$+ \int_t^{t+h} |f(s,y_s(t,\varphi)) - f(s,x_s(t,\varphi))|\ ds \ +$$

$$+ \int_t^{t+h} |R(s,\ y_s(t,\varphi))|\ ds \quad ,$$

para $0 \leq h \leq r$.

Deste modo, para todo h', $0 \leq h' \leq h$, temos que:



$$|y(t+h',t,\varphi) - x(t+h',t,\varphi)| \leq \ell(h') \| y_{t+h'}(t,\varphi) - x_{t+h'}(t,\varphi) \| +$$

$$+ \int_t^{t+h'} |f(s,y_s(t,\varphi)) - f(s,x_s(t,\varphi))| ds +$$

$$+ \int_t^{t+h'} |R(s,y_s(t,\varphi)| \; ds$$

$$\leq \ell(h) . \| y_{t+h}(t,\varphi) - x_{t+h}(t,\varphi) \| +$$

$$+ \int_t^{t+h} |f(s,y_s(t,\varphi)) - f(s,x_s(t,\varphi))| \; ds +$$

$$+ \int_t^{t+h} |R(s,y_s(t,\varphi))| \; ds$$

Segue-se daí que:

$$\|y_{t+h}(t,\varphi) - x_{t+h}(t,\varphi)\| = \sup_{0\leq h'\leq h\leq r} | y(t+h',t,\varphi)- x(t+h',t,\varphi) | \leq$$

$$\leq \ell(h) \| y_{t+h}(t,\varphi) - x_{t+h}(t,\varphi)\| +$$

$$+ \int_t^{t+h} | f(s, y_s(t,\varphi)) - f(s,x_s(t,\varphi))| ds +$$

$$+ \int_t^{t+h} | R(s, y_s(t,\varphi)) | ds$$

Como $\ell(0)=0$ e $\ell(s)$ é contínua, então, dado $\varepsilon = 1$, existe um h_o , $0<h_o\leq r$, tal que:

$$\forall h, \quad 0\leq h\leq h_o \implies \ell(h)< 1 \quad .$$

Portanto, para $0\leq h\leq h_o$, podemos escrever:

$$(1-\ell(h_o))\| y_{t+h}(t,\varphi)-x_{t+h}(t,\varphi)\| \leq \int_t^{t+h} |f(s,y_s(t,\varphi))- f(s,x_s(t,\varphi))| ds +$$

$$+ \int_t^{t+h} |R(s,y_s(t,\varphi))| ds$$

$$\| y_{t+h}(t,\varphi)- x_{t+h}(t,\varphi)\| \leq \frac{1}{1-\ell(h_o)} \left[\int_t^{t+h} |f(s,y_s(t,\varphi))- f(s,x_s(t,\varphi))| ds + \right.$$

$$\left. + \int_t^{t+h} | R(s, y_s(t,\varphi))| ds\right]$$

Enfim, levando este resultado para (III-3), obtemos:

$$\dot{V}(t,\psi) \leqslant -\dot{\alpha}(t)\ V(t,\psi) + \eta(t) + \frac{K(t)}{1-\ell(h_o)}\ \overline{\lim_{h\to 0^+}}\ \frac{1}{h}\left[\int_t^{t+h} |f(s,y_s(t,\psi))-f(s,x_s(t,\psi))|\ ds + \right.$$
(III.2)

$$\left. + \int_t^{t+h} |R(s,\ y_s(t,\psi)|ds\right]$$

$$\dot{V}(t,\psi) \leqslant -\dot{\alpha}(t)\ V(t,\psi)+\eta(t) + \frac{K(t)}{1-\ell(h_o)}\left[|f(t,y_t(t,\psi)) - f(t,x_t(t,\psi)| + \right.$$
(III-2)

$$\left. + R(t,\ y_t(t,\psi))|\right]$$

$$\dot{V}(t,\psi) \leqslant -\dot{\alpha}(t).\ V(t,\psi) + \eta(t) + \frac{K(t)}{1-\ell(h_o)}\ |R(t,\psi)|\ .$$
(III-2)

Observação:

A fim de facilitar a notação para resultados posteriores, colocaremos:

$$\rho_o = \frac{1}{1-\ell(h_o)}$$

Convém notar que $0<\rho_o<1$.

Teorema III-3

Suponhamos que as hipóteses A_1, A_2, e A_3 do lema III-1 estejam satisfeitas e que:

A_4.) exista uma função $\omega(t,u) \in C(\mathbb{R}_+ x \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, crescente em u para cada $t \in \mathbb{R}_+$, tal que:

$$|R(t,\varphi)| \leqslant \omega(t,\|\varphi\|) \ , \ \forall (t,\varphi), \ (t,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C_H \ .$$

Seja $u(t,t_o,\varphi_o)$ a solução maximal do problema:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\dot{\alpha}(t).u + \rho_o \ . \ K(t).\omega(t,u) + \eta(t) \\ u(t_o) &= V(t_o,\varphi_o) \ , \end{aligned} \qquad \text{(III-4)}$$

onde $V(t,\varphi)$ é o funcional definido no lema III-1.

Suponhamos ainda que: $u(t,t_o,\varphi_o) < H$, $\forall t$, $t \geqslant t_o$.

Nestas condições, a solução $y(t,t_o,\varphi_o)$ da equação (III-2) satisfaz:

$$\|y_t(t_o,\varphi_o)\| \leqslant u(t,t_o,\varphi_o) \ , \ \forall t, \ t \geqslant t_o$$

Prova

Do lema anterior e da hipótese A_4, obtemos:

$$\dot{V}(t,y_t(t_o,\varphi_o)) \leqslant -\dot{\alpha}(t) \ V(t,y_t(t_o,\varphi_o)) + \rho_o \ .K(t). \ \omega(t,\|y_t(t_o,\varphi_o)\|) + \eta(t) \ ,$$

(III-2)

,

para $t_o \leqslant t < t_+$, onde $[t_o;t_+[$ é o máximo intervalo de existência à direita da solução $y(t,t_o,\varphi_o)$ da equação (III.2).

Considerando agora que:

$$\|y_t(t_o,\varphi_o)\| \leqslant V(t,y_t(t_o,\varphi_o)) \ , \quad \forall t,\ t \in [t_o;t_+[$$

e que $\omega(t,u)$ é crescente em u para cada t fixo, vem:

$$\dot{V}(t,y_t(t_o,\varphi_o)) \leqslant -\dot{\alpha}(t)\ V(t,y_t(t_o,\varphi_o)) + \rho_o .\ K(t)\ \omega(t,\ V(t,y_t(t_o,\varphi_o)) + \eta(t) \ ,$$
(III-2)

para $t \in [t_o;t_+[$.

O resultado acima aliado ao fato de que $u(t,t_o,\varphi_o)$ é solução maximal de (III-4) nos permite escrever que:

$$V(t,y_t(t_o,\varphi_o)) \leqslant u(t,t_o,\varphi_o) \ , \ \forall t,\ t \in [\,t_o;\ t_+[$$

e daí:

$$\|y_t(t_o,\varphi_o)\| \leqslant u(t,t_o,\varphi_o) \ , \ \forall t,\ t \in [t_o;\ t_+[\ .$$

Afirmamos agora que $t_+ = \infty$. Com efeito, se $t_+ < \infty$, então, como $u(t,t_o,\varphi_o)$ é limitada em $[t_o,t_+]$, existe um $H_1, 0<H_1<H$, tal que $u(t,t_o,\varphi_o) \leqslant H_1$, $\forall t,\ t \in [t_o;t_+]$. Deste fato e da desigualdade anterior obtemos:

$$\|y_t(t_o,\varphi_o)\| \leqslant H_1 < H, \ \forall t,\ t \in [t_o;t_+[\ .$$

Decorre desta limitação que $t_+ = \infty$, o que constitui uma contradição. Assim, devemos ter:

$$\| y_t(t_o,\varphi_o) \| \leqslant u(t,t_o,\varphi_o) \ , \ \forall t, \ t \geqslant t_o$$

<u>Teorema III-4</u>

Suponhamos que o conjunto $\varphi=0$ seja equiexponencialmente assintoticamente estável relativamente à equação (III-1) , isto é, que existam funções $K \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, $H \in \mathcal{D}$, com $H(t,t)=0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}_+$ e $H(t,t_o) \leqslant p(t_o)$ para algum $p \in \mathcal{L}$, e um número real $\alpha>0$, tais que, para quaisquer $t_o \geqslant 0$ e $\varphi_o \in C_H$, tem-se:

$$\|x_t(t_o,\varphi_o)\| \leqslant K(t_o). \ e^{-\alpha(t-t_o)} \| \varphi_o \| + H(t,t_o) \ , \ \forall t \geqslant t_o \ .$$

Suponhamos ainda que as hipóteses A_2 e A_3 do lema III-1 e a hipótese A_4 do teorema III-3 estejam satisfeitas.
Se o conjunto $u=0$ é equiestável (equiexponencialmente assintoticamente estável) relativamente à equação:

$$\dot{u} = -\alpha u + \rho_o. K(t) \, \omega(t,u) + \eta(t) \tag{III-5}$$

então o conjunto $\varphi=0$ é equiestável (equiexponencialmente assintoticamente estável) relativamente à equação (III-2).

Prova

Como o conjunto $u = 0$ é equiestável relativamente à equação (III-5), existem funções $L \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ e $a \in \mathcal{K}$ tais que, para quaisquer $t_o \in \mathbb{R}_+$ e $u_o \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$|u(t,t_o,u_o)| \leqslant L(t_o) \cdot |u_o| + a(t_o) \ , \ \forall t, \ t \geqslant t_o \quad .$$

Em particular, dados $t_o \in \mathbb{R}_+$ e $\psi_o \in C_H$, a solução maximal $u(t,t_o,\psi_o)$ da equação (III-5), com condição inicial $u(t_o) = V(t_o,\psi_o)$, também satisfaz:

$$|u(t,t_o,\psi_o)| \leqslant L(t_o) . V(t_o,\psi_o) + a(t_o) \ , \ \forall t, \ t \geqslant t_o$$

ou

$$|u(t,t_o,\psi_o)| \leqslant K(t_o) . L(t_o) \|\psi_o\| + a(t_o) \ , \ \forall t, \ t \geqslant t_o \ .$$

Observemos agora que a fim de utilizarmos o teorema anterior visando obter informações sobre a solução $y(t,t_o,\psi_o)$ da equação perturbada (III-2), devemos ter que:

$$|u(t,t_o,\psi_o)| < H \ , \quad \forall t, \ t \geqslant t_o \qquad \text{(III-6)}$$

Por outro lado, a nossa definição de equiestabilidade exige a manipulação de funções iniciais ψ_o de todo o espaço C_H. Estes dois fatos não nos deixam outra alternativa senão a de tomar $H = +\infty$ a fim de que a condição (III-6) se verifique para qualquer $\psi_o \in C_H$.

Deste modo, de acordo com o teorema anterior, podemos garantir que a solução $y(t,t_o,\psi_o)$ da equação (III-2) satisfaz:

$$\|y_t(t_o,\psi_o)\| \leqslant K(t_o) . L(t_o) \|\psi_o\| + a(t_o) \ , \ \forall t, \ t \geqslant t_o \ .$$

A seguir, estabelecemos alguns resultados concernentes à equação (III-2), impondo certas condições sobre o termo perturbador $R(t,\psi)$.

§2. Efeito de perturbações

Teorema III-5

Suponhamos que o conjunto $\psi=0$ seja equiexponencialmente assintoticamente estável relativamente à equação (III-1), isto é, que existam funções $K \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, $H \in \mathcal{B}$, com $H(t,t)=0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}_+$ e $H(t,t_0) \leq p(t_0)$ para algum $p \in \mathcal{B}$, e um número real $\alpha>0$, tais que, para quaisquer $t_0 \geq 0$ e $\psi_0 \in C$, tem-se:

$$\|x_t(t_0,\psi_0)\| \leq K(t_0)\,.\,e^{-\alpha(t-t_0)}\|\psi_0\| + H(t,t_0)\ ,\quad \forall t,\ t\geq t_0\ .$$

Suponhamos também que estejam satisfeitas as hipóteses A_2 e A_3 do lema III-1 e que:

A_5.) $|R(t,\psi)| \leq b(t).\|\psi\|$, $\forall(t,\psi)$, $(t,\psi) \in \mathbb{R}_+ \times C$, onde $b:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$

é uma função contínua que satisfaz à condição:

$$\overline{\lim_{(t,v)\to(\infty,\infty)}}\ \frac{1}{v}\int_t^{t+v} K(s)\,b(s)\,ds < \frac{\alpha}{\rho_0} \qquad \text{(III-7)}$$

Então, o conjunto $\psi=0$ é equiexponencialmente assintoticamente estável relativamente à equação (III-2).

Prova

A função ω: $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\omega(t,s) = b(t).s$$

é contínua, é crescente na variável s para cada $t \in \mathbb{R}_+$ e satisfaz:

$$|R(t,\varphi)| \leq \omega(t,\|\varphi\|) , \quad \forall(t,\varphi) , \ (t,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C .$$

Consideremos agora a equação diferencial escalar:

$$\dot{u} = -\alpha u + \rho_o . K(t) . \omega(t,u) + \eta(t)$$

$$= -\alpha u + \rho_o . K(t).b(t). u + \eta(t) \qquad \text{(III-8)}$$

Como a função $b(t)$ satisfaz à condição (III-7), a solução $v(t) \equiv 0$ da equação:

$$\dot{v} = -\alpha v + \rho_o . K(t). v \qquad \text{(III-9)}$$

é uniformemente assintoticamente estável. Além disso, uma vez que esta equação é linear, $v(t) \equiv 0$ é exponencialmente estável.

Por outro lado, para cada $s \in \mathbb{R}_+$, indiquemos com $v(t,s)$ a solução da equação (III-9) satisfazendo: $v(s,s) = 1$.

Nesta situação, a solução $u(t,t_o,u_o)$ da equação (III-8) satisfaz:

$$u(t,t_o,u_o) = v(t,t_o).u_o + \int_{t_o}^{t} v(t,s).\eta(s).ds \ , \ \forall t, \ t \geq t_o \ .$$

Ora, como a solução $v(t) \equiv 0$ da equação (III-9) é exponencialmente estável, existem constantes k, $\sigma > 0$ tais que:

$$|v(t,s)| \leq k. \ e^{-\sigma(t-s)} \ , \ \forall t, \ t \geq s \geq 0 \ .$$

Daí, temos que:

$$|u(t,t_o,u_o)| \leq k.e^{-\sigma(t-t_o)}|u_o| + \int_{t_o}^{t} k \ e^{-\sigma(t-s)}.\eta(s)ds, \ \ \forall t, \ \ t \geq t_o \ .$$

Mostramos assim que, para quaisquer $t_o \in \mathbb{R}_+$ e $u_o \in \mathbb{R}$, a solução $u(t,t_o,u_o)$ da equação (III-8) satisfaz:

$$|u(t,t_o,u_o)| \leq J(t_o). \ e^{-\sigma(t-t_o)}|u_o| + I(t,t_o), \ \ \forall t, \ \ t \geq t_o \ ,$$

onde:

(i) $J(t) = k \quad , \ t \in \mathbb{R}_+$

$$I(t,t_o) = \int_{t_o}^{t} k.e^{-\sigma(t-s)}.\eta(s).ds. \quad , \ (t,t_o) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.$$

(ii) a função $I(t,t_o)$ satisfaz às condições:

$$\lim_{t\to\infty} \left[\sup_{t_o \geq 1} I(t,t_o)\right] = 0$$

$$I(t,t_o) \leq \lambda(t_o) \text{ , onde } \lambda(t) = \frac{k.e^{\sigma}}{\sigma} \sup_{t-1\leq s<\infty} \int_s^{s+1} \eta(u)\,du \in \mathcal{L}$$

Isto significa que o conjunto $u=0$ é equiexponencialmente assintoticamente estável relativamente à equação (III-8). Portanto , segundo o teorema III-4, o conjunto $\varphi=0$ é equiexponencialmente assintoticamente estável em relação à equação (III-2).

Corolario III-6

Suponhamos satisfeitas todas as hipóteses do teorema III-5, exceto A_5, que será substituída por:

A_6.) $|R(t,\varphi)| \leq b(t)\,\|\varphi\|$, $\forall(t,\varphi)$,$(t,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C$, onde $b:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ é uma função contínua que satisfaz à condição:

$$\int_0^{\infty} K(t) \;.\; b(t).dt < \infty \qquad \text{(III-10)}$$

Então o conjunto $\varphi=0$ é equiexponencialmente assintoticamente estável relativamente à equação (III-2).

Prova

Como a função $b:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ satisfaz (III-10), ela também satisfaz (III-7). Segue-se, pelo teorema (III-5), que o conjunto $\varphi=0$ é equiexponencialmente assintoticamente estável relativamente à equação (III-2).

Corolário III-7

Suponhamos satisfeitas todas as hipóteses do teorema III-5, exceto A_5, que será substituída por:

A_7.) $|R(t,\varphi)| \leq b(t)\|\varphi\|$, $\forall(t,\varphi)$, $(t,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C$, onde $b:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

é uma função contínua que satisfaz à condição:

$$\lim_{t\to\infty} b(t) = 0 \qquad \text{(III-11)}$$

Então o conjunto $\varphi=0$ é equiexponencialmente assintoticamente estável relativamente àequação (III-2).

Prova

Como a função $b:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ satisfaz (III-11), ela também satis faz (III-7). Então, segundo o teorema (III-5), o conjunto $\varphi = 0$ é equiexponencialmente assintoticamente estável relativamente à equação (III-2).

Os próximos resultados dizem respeito ao sistema:

$$\frac{d}{dt} D(t,y_t) = f(t,y_t) + R(t,y_t) + S(t,y_t) \qquad \text{(III-12)}$$

o qual admitiremos sujeito à exigência:

"o sistema (III-12) possui uma única solução passando através de cada ponto $(t_o,\varphi_o) \in \mathbb{R}_+ \times C$".

Nosso primeiro resultado contém o teorema III-5 como caso particular.

Teorema III-8

Suponhamos que o conjunto $\varphi=0$ seja equiexponencialmente assintoticamente estável relativamente à equação (III-1), isto é, que existam funções $K \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, $H \in \mathcal{B}$, com $H(t,t)=0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}_+$ e $H(t,t_0) \leq p(t_0)$ para algum $p \in \mathcal{L}$, e um número real $\alpha>0$, tais que, para quaisquer $t_0 \in \mathbb{R}_+$ e $\varphi_0 \in C$, tem-se:

$$\|x_t(t_0,\varphi_0)\| \leq K(t_0).\ e^{-\alpha(t-t_0)}\|\varphi_0\| + H(t,t_0)\ ,\ \forall t,\ t\geq t_0\ .$$

Suponhamos também que estejam satisfeitas as hipóteses A_2, A_3 do lema III-1, a hipótese A_5 do teorema III-5 e que

A_7.) $|S(t,\varphi)| \leq c(t)$, $\forall (t,\varphi)$, $(t,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C$, onde $c: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é uma função contínua que satisfaz à condição:

$$\int_t^{t+1} K(s).\ c(s).\, ds \to 0 \text{ quando } t\to\infty\ .$$

Então o conjunto $\varphi=0$ é equiexponencialmente assintoticamente estável relativamente à equação (III-12).

Prova:

A função $\omega: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definida por:

$$\omega(t,s) = b(t).s + c(s)$$

é contínua, é crescente na variável s para cada $t \in R_+$ e satisfaz:

$$|R(t,\varphi) + S(t,\varphi)| \leq \omega(t,\|\varphi\|) \ , \quad \forall (t,\varphi) \ , \ (t,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C$$

Consideremos, a seguir, a equação diferencial escalar:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\alpha u + \rho_o.K(t).\omega(t,u) + \eta(t) \\ &= -\alpha u + \rho_o.\ K(t).\ b(t).u + \rho_o.\ K(t).c(t) + \eta(t) \ , \end{aligned} \qquad \text{(III-13)}$$

a qual pode ser considerada como perturbada da equação:

$$\dot{v} = -\alpha v + \rho_o\ .\ K(t).b(t).v \qquad \text{(III-14)}$$

Como vimos no teorema III-5, a solução $v(t) \equiv 0$ desta última é exponencialmente estável. Portanto, se para cada $s \geq 0$, indicarmos com $v(t,s)$ a solução de (III-13) satisfazendo $v(s,s) = 1$, podemos afirmar que existem constantes $k, \sigma > 0$ tais que:

$$|v(t,s)| < k.\ e^{-\sigma(t-s)} \ , \ \forall t, \ t \geq s \geq 0 \ .$$

Agora, dados $t_o \in \mathbb{R}_+$ e $u_o \in \mathbb{R}$, como a solução $u(t,t_o,u_o)$ de (III-12) pode ser expressa por:

$$u(t,t_o,u_o) = v(t,t_o).u_o + \int_{t_o}^{t} v(t,s).\left[\rho_o.\ K(s).c(s) + \eta(s)\right] ds \ , \ \forall t \geq t_o \ ,$$

obtemos:

$$|u(t,t_o,u_o)| \leq k.\, e^{-\sigma(t-t_o)}\, |u_o| \;+$$

$$+ \int_{t_o}^{t} k.\, e^{-\sigma(t-s)} \left[\rho_o \,.\, K(s).c(s) + \eta(s)\right] ds \;,\; \forall t,\; t \geq t_o$$

ou:

$$|u(t,t_o,u_o)| \leq J(t_o) \,.\, e^{-\sigma(t-t_o)}\, |u_o| \;+\; I(t,t_o) \;,\; \forall t,\; t \geq t_o \;,$$

onde:

$$J(t) = k, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$$I(t,t_o) = \int_{t_o}^{t} k.\, e^{-\sigma(t-s)} \left[\rho_o \,.\, K(s).\, c(s) + \eta(s)\right] ds, \; (t,t_o) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ .$$

Além disso, a função $I(t,t_o)$ satisfaz às condições:

$$\lim_{t \to \infty} \left[\sup_{t_o \geq 1} I(t,t_o) \right] = 0$$

$$I(t,t_o) \leq \lambda(t_o) \;, \text{ onde}$$

$$\lambda(t) = \frac{k.e^{\sigma}}{\sigma} \,.\, \sup_{t-1 \leq s < \infty} \int_{s}^{s+1} \left[\rho_o .\, K(\xi) c(\xi) + \eta(\xi)\right] d\xi \;\; \epsilon \; \mathcal{L}$$

Portanto, o conjunto $u=o$ é equiexponencialmente assintoticamente estável relativamente à equação (III-12). Segue-se que o conjunto $\psi = 0$ também o é em relação a (III-12).

Teorema III-9

Suponhamos que o conjunto $\varphi = 0$ seja equiexponencialmente assintoticamente estável relativamente à equação (III-1), isto é, que existam funções $K \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $H \in \mathcal{B}$, $H(t,t)=0$ pa para qualquer $t \in \mathbb{R}_+$ e $H(t,t_o) \leq p(t_o)$ para algum $p \in \mathcal{L}$, e um número real $\alpha>0$, tais que, para quaisquer $t_o \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_o \in C_H$ tem-se:

$$\|x_t(t_o,\varphi_o)\| \leq K(t_o).\, e^{-\alpha(t-t_o)} \|\varphi_o\| + H(t,t_o) \;,\; \forall t,\; t \geq t_o \;.$$

Suponhamos também que estejam satisfeitas as hipóteses A_2, A_3 do lema III-1, A_5 do teorema III-5 e que:

A_8.) $|S(t,\varphi)| \leq c(t)$, $\forall (t,\varphi)$, $(t,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C_H$, onde $c: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

é uma função contínua e $\int_t^{t+1} K(s).\, c(s).ds$ é limitada em $\mathbb{R}_+$.

Nestas condições, existe uma constante $B>0$ tal que, para todo $t_o \in \mathbb{R}_+$, existe um $\delta = \delta(t_o) > 0$ e um $T = T(t_o, \delta)$ de modo que:

$\|\varphi_o\| < \delta \Rightarrow$ a solução $y(t,t_o,\varphi_o)$ da equação (III-12) satisfaz:

$$\| y_t(t_o,\varphi_o) \| < B \;,\; \forall t,\; t \geq t_o + T \;.$$

Prova:

A função $\omega: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definida por:

$$\omega(t,s) = b(t).s + c(s)$$

é contínua, é crescente na variável s para cada $t \in \mathbb{R}_+$ e satisfaz:

$$|R(t,\psi) + S(t,\psi)| \leqslant \omega(t,\|\psi\|) \quad , \forall (t,\psi) \ , \ (t,\psi) \in \mathbb{R}_+ \times C_H$$

Consideremos, a seguir, a equação diferencial escalar:

$$\dot{u} = -\alpha u + \rho_o \ . \ K(t) \ . \ \omega(t,u) + \eta(t)$$

$$= -\alpha u + \rho_o \ . \ K(t).b(t).u + \rho_o.K(t).c(t) + \eta(t) \qquad \text{(III-15)}$$

Como vimos na prova do teorema anterior, existem constantes k, $\sigma>0$ tais que, dados $t_o \in \mathbb{R}_+$ e $u_o \in \mathbb{R}$, a solução $u(t,t_o,u_o)$ da equação acima, satisfaz:

$$|u(t,t_o,u_o)| \leqslant k.\ e^{-\sigma(t-t_o)}\ |u_o| + \int_{t_o}^{t} k.e^{-\sigma(t-s)}\ [\rho_o.K(s).c(s) + \eta(s)]\ ds,$$

$$\forall t,\ t \geqslant t_o\ .$$

Em particular, dados $t_o \in \mathbb{R}_+$ e $\psi_o \in C_H$, a solução maximal $u(t,t_o,\psi_o)$ da equação (III.15) satisfaz:

$$|u(t,t_o,\psi_o)| \leqslant k.K(t_o).e^{-\sigma(t-t_o)}\|\psi_o\| + \int_{t_o}^{t} k.e^{-\sigma(t-s)}[\rho_o.K(s).c(s)+\eta(s)]\ ds,$$

$$\forall t,\ t \geqslant t_o\ .$$

Por outro lado, como a função $t \to \int_t^{t+1} \eta(s)ds$ é limitada em $\mathbb{R}_+$, uma vez que:

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{t+1} \eta(s)\, ds = 0,$$

resulta que a função $E: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, definida por:

$$E(t) = \int_t^{t+1} \left[\rho_o . K(s) . c(s) + \eta(s) \right] ds$$

também é limitada. Deste modo, segundo o lema I.6, para o $\sigma>0$ acima existe um número real $A= A(\sigma)>0$ tal que:

$$e^{-\sigma t} \int_{t_o}^{t} e^{\sigma s} E(s)ds = \int_{t_o}^{t} e^{-\sigma(t-s)} E(s)ds < A \text{ , } \forall t,\ t\geq t_o\geq 0.$$

Segue-se que:

$$|u(t,t_o,\varphi_o)| \leqslant k.\ K(t_o).\ e^{-\sigma(t-t_o)} \|\varphi_o\| + k.A \text{ , } \forall t,\ t\geq t_o\geq 0.$$

Vamos tomar: $H>k.A$ e $\delta < \dfrac{H - kA}{k.\ K(t_o)}$.

Então:

$$\|\varphi_o\| < \delta(t_o) \Rightarrow |u(t,t_o,\varphi_o)| < H \text{ , } \forall t,\ t\geq t_o .$$

Portanto, de acordo com o teorema III-3, a solução $y(t,t_o,\varphi_o)$ da equação (III-2) satisfaz:

$$\|y_t(t_o,\varphi_o)\| \leqslant k.K(t_o).\ e^{-\sigma(t-t_o)} \|\varphi_o\| + k.A \text{ , } \forall t,\ t\geq t_o .$$

A seguir, podemos escolher um $T = T(t_o, \delta)$, de modo que:

$$k.K(t_o).\, e^{-\sigma T}\, .\, \delta < 1$$

Enfim, colocando $B = 1 + k.A$, obtemos:

$$\|\varphi_o\| < \delta \Rightarrow \|y_t(t_o, \varphi_o)\| < B \quad , \forall t, \; t \geq t_o + T\, .$$

REFERÊNCIAS

[1] Bernfeld, S, Lakshimikantham, V. and Leela, S. - Perturbations of Functional- Differential Equations with Non-uniform Stability Behavior.
J. Math. An. and Appl. 46, 249-260 (1974).

[2] Cruz, M.A. and Hale, J.K.
Stability of Functional Differential Equations of Neutral Type.
J. of Diff. Eq. 7, 334-355 (1970)

[3] Halanay, A.
Differential Equations, Stability, Oscillations, Time Lag.
Academic Press, N.Y. 1966.

[4] Hale, J. K.
(a)- Asymptotic Behavior of the Solutions of Differential--Difference Equations".
Proc. Symp. of Non linear Oscillations.
Kiev, USSR, II, 409-426 (1961).
(b)- Functional Differential Equations.
Springer-Verlag, N.Y., 1971 (Applied Math. Sciences, 3)
(c)- Ordinary Differential Equations
Wiley - Interscience - N.Y., 1969.

[5] Izé, A. F.
Stability of Perturbed Functional Differential Equations of Neutral Type.
II Reunião de Análise Funcional - R.J.- 1975.

[6] Kamala, P.S. and Lakshimikantham, V.
Asymptotic Self-invariant Sets and Functional Differential Equations in Banach Spaces.
Ann. di. Mat. Pura ed Appl. (IV), 217-231 (1973)

[7] Ladeira, L.A.C.
Teoremas de Existência, Unicidade e Continuidade com Relação às Condições Iniciais de Equações Diferenciais do Tipo Neutro.
Dissertação de Mestrado apresentada ao Dep. de Mat. do Inst. de Ciências Matemáticas de São Carlos (1976).

[8] Lakshimikantham, V. and Leela, S.
a)- Differential and Integral Inequalities
vol. I, II - Academic Press - N.Y. 1969.
b)- Asymptotically Self-Invariant Sets and Conditional Stability.
Proc. Int. Symp. Diff. Eq. and. Dyn. Systems.
Puerto Rico (1967).
Academic Press, pp. 363-373 (NY- 1967).

[9] Leela, S.
Asymptotically Self-Invariant Sets and Perturbed Systems.
Ann. di Mat. Pura ed. Appl. (IV), 283-289 (1972).

[10] Onuchic, N.
a)-Equações Diferenciais com Retardamento
8º Colóquio Brasileiro de Matemática
Poços de Caldas - 1971.

b)- Asympotic Behavior of a Perturbed Linear Diff. Equations with Time Lag on a Product Space.
Ann. di Mat. Pura ed Appl. (IV), 115-124.

[11] Strauss, A. and Yorke, J.
Perturbations Theorems for Ordinary Diff. Equations.
J. of Diff. Eq. 3, 15-30 (1967).

[12] Yoshizawa, P.
Stability Theory by Liapunov's Second Method.
The Mathematical Society of Japan - 1966.