

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

## Índice de Conley para fluxos Gutierrez-Sotomayor

**Denilson Tenório dos Santos Júnior**

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em  
Matemática (PPG-Mat)



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Denilson Tenório dos Santos Júnior**

## Índice de Conley para fluxos Gutierrez-Sotomayor

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior  
Coorientadora: Profa. Dra. Dahisy Valadão de Souza Lima

**USP – São Carlos**  
**Abril de 2022**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

T289Í Tenório, Denilson  
Índice de Conley para fluxos Gutierrez-Sotomayor  
/ Denilson Tenório; orientador Nivaldo Grulha;  
coorientadora Dahisy Valadão. -- São Carlos, 2022.  
121 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação  
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas  
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Índice de Conley. 2. Fluxo Gutierrez-  
Sotomayor. 3. Singularidades. I. Grulha, Nivaldo,  
orient. II. Valadão, Dahisy, coorient. III. Título.

~~Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:~~  
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938  
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

**Denilson Tenório dos Santos Júnior**

Conley index for Gutierrez-Sotomayor

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior

Co-advisor: Profa. Dra. Dahisy Valadão de Souza Lima

**USP – São Carlos**  
**April 2022**



*Dedico este trabalho à memória dos professores Carlos Teobaldo Gutierrez Vidalon e Jorge Manuel Sotomayor Tello. Dedico também aos meus familiares, em especial, à minha namorada Ayane Suênia Bastos.*





# AGRADECIMENTOS

---

---

Primeiro eu gostaria de agradecer aos meus orientadores: a profa. Dra. Dahisy Valadão de Souza Lima e o prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior, pelo apoio, suporte e paciência em toda esta jornada.

A todos os meus familiares, que mesmo sem entender muito bem o que eu faço, sempre me apoiaram e me deram todo o suporte necessário. Em especial, à minha mãe que nunca mediu esforços para que eu sempre tivesse a melhor educação possível.

A minha namorada e grande amiga, Ayane Suênia Bastos, que sempre esteve presente desde a graduação até aqui. Com ela pude dividir todos os meus planos e frustrações, sem dúvida, uma das pessoas mais importantes nesta caminhada.

Agradeço, também, à todos os professores do ICMC-USP pela contribuição na minha formação acadêmica.

Aos meus companheiros do Laboratório de Singularidades. Em especial, Igor Chagas Santos, Raphael de Omena Marinho, Thiago de Albuquerque Amorim e Verônica Santana Reis.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.



*“Não há palavra que deixa de ser liberdade”  
(Cordel do fogo encantado)*



# RESUMO

TENÓRIO, D. S. J. **Índice de Conley para fluxos Gutierrez-Sotomayor**. 2022. 118 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

Neste trabalho, estudamos o Índice de Conley de um conjunto invariante isolado em relação a um fluxo contínuo, mas antes de abordar a Teoria de Conley exibimos dois outros índices como uma forma de motivação. Dentre estes outros índices, destacamos o Índice de Morse, que foi uma das inspirações para Conley desenvolver a sua teoria. Apresentamos as variedades Gutierrez-Sotomayor e os campos vetoriais contínuos Gutierrez-Sotomayor, bem como seus fluxos associados. Finalizamos o trabalho aplicando a teoria do índice de Conley para os fluxos Gutierrez-Sotomayor e mostramos alguns resultados importantes da junção dessas duas teorias, em especial, ressaltamos a Igualdade de Poincaré-Hopf.

**Palavras-chave:** Fluxo contínuo, Índice de Conley, fluxos Gutierrez-Sotomayor.



# ABSTRACT

TENÓRIO, D. S. J. **Conley index for Gutierrez-Sotomayor**. 2022. 118 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

In this work, we study the Conley Index of an isolated invariant set with respect to a continuous flow, but before board Conley's Theory we show two other indexes as a form of motivation. Among these other indexes, we highlight the Morse Index, which was one of the inspirations for Conley to develop his theory. We present the Gutierrez-Sotomayor manifolds and the Gutierrez-Sotomayor continuous vector fields as well as their associated flows. We end this work by applying the Conley index to Gutierrez-Sotomayor flows and we show some important results of the junction of these two theories, in particular, we emphasize the Poincaré-Hopf Equality.

**Keywords:** Continuous flow, Conley index, Gutierrez-Sotomayor flow.





# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

---

Figura 1 – Exemplos de simplexes . . . . .	31
Figura 2 – Simplexes propriamente unidos e não propriamente unidos . . . . .	31
Figura 3 – Duas triangularizações distintas para uma superfície qualquer . . . . .	32
Figura 4 – Simplexes Orientados . . . . .	32
Figura 5 – Caminho $\sigma$ . . . . .	36
Figura 6 – $S^2$ . . . . .	40
Figura 7 – Um caminho em $X$ . . . . .	44
Figura 8 – Cilindro $X$ e subespaço $A$ . . . . .	45
Figura 9 – Interpretação geométrica de um campo vetorial e sua trajetória . . . . .	50
Figura 10 – Função $4x^2 + 12xy + 9y^2 - (6x + 7y)^4$ , que não é de Morse . . . . .	65
Figura 11 – Função de Morse $x^2 - y^2$ . . . . .	65
Figura 12 – Níveis da função suave . . . . .	66
Figura 13 – Vizinhança isolante de uma função altura . . . . .	72
Figura 14 – Par-índice para o conjunto invariante de uma função altura . . . . .	73
Figura 15 – Simplificação dos espaços, para acharmos os abertos da Proposição 11 . . . . .	75
Figura 16 – $[M_a/M_c] = \bar{0}$ . . . . .	76
Figura 17 – Par-índice no cilindro . . . . .	76
Figura 18 – Singularidade Hiperbólica . . . . .	77
Figura 19 – Toro inclinado . . . . .	78
Figura 20 – $(S^2, x_0) \vee (S^2, x_0)$ . . . . .	79
Figura 21 – Índice de Conley da singularidade $P_i$ . . . . .	79
Figura 22 – Índice de Conley do conjunto $\{P_1, P_2\}$ . . . . .	79
Figura 23 – Esboço de $N \setminus N^t$ . . . . .	81
Figura 24 – Esboço de $I(N)$ . . . . .	82
Figura 25 – Esboço das hipótese fixas . . . . .	83
Figura 26 – Plano . . . . .	89
Figura 27 – Cone . . . . .	90
Figura 28 – Cross-cap . . . . .	90
Figura 29 – Ponto duplo . . . . .	90
Figura 30 – Ponto Triplo . . . . .	91
Figura 31 – Toro pinçado . . . . .	91
Figura 32 – Pontos duplos e pontos regulares . . . . .	92
Figura 33 – As natureza da singularidade $p \in M(\mathcal{R})$ . . . . .	95
Figura 34 – As naturezas da singularidade $p \in M(\mathcal{C})$ . . . . .	95
Figura 35 – As naturezas da singularidade $p \in M(\mathcal{W})$ . . . . .	96

Figura 36 – As naturezas da singularidade $p \in M(\mathcal{D})$ . . . . .	96
Figura 37 – As naturezas da singularidade $p \in M(\mathcal{T})$ . . . . .	97
Figura 38 – Índice de Conley homotópico da singularidade $p \in M(\mathcal{R})$ com natureza $a$ . . . . .	99
Figura 39 – Índice de Conley da singularidade $p \in M(\mathcal{R})$ e natureza $s$ . . . . .	99
Figura 40 – Índice de Conley homotópico da singularidade $p \in M(\mathcal{R})$ e natureza $r$ . . . . .	100
Figura 41 – Índice de Conley homotópico da singularidade $p \in M(\mathcal{C})$ e natureza $a$ . . . . .	100
Figura 42 – Índice de Conley homotópico da singularidade $p \in M(\mathcal{R})$ e natureza $s$ . . . . .	101
Figura 43 – Índice de Conley homotópico da singularidade $p \in M(\mathcal{R})$ e natureza $r$ . . . . .	101
Figura 44 – Índice de Conley homotópico da singularidade $p \in M(\mathcal{D})$ e natureza $a$ . . . . .	102
Figura 45 – Índice de Conley homotópico da singularidade $p \in M(\mathcal{D})$ e natureza $sa$ . . . . .	102
Figura 46 – Índice de Conley da singularidade $p \in M(\mathcal{D})$ e natureza $sr$ . . . . .	103
Figura 47 – Índice de Conley homotópico da singularidade $p \in M(\mathcal{D})$ e natureza $ss_u$ . . . . .	103
Figura 48 – Índice de Conley da singularidade $p \in M(\mathcal{D})$ e natureza $ss_s$ . . . . .	104
Figura 49 – Índice de Conley homotópico da singularidade $p \in M(\mathcal{D})$ e natureza $r$ . . . . .	104
Figura 50 – Índice de Conley homotópico da singularidade $p \in M(\mathcal{W})$ e natureza $a$ . . . . .	105
Figura 51 – Índice de Conley homotópico da singularidade $p \in M(\mathcal{W})$ e natureza $s_u$ . . . . .	105
Figura 52 – Índice de Conley homotópico da singularidade $p \in M(\mathcal{W})$ e natureza $s_s$ . . . . .	105
Figura 53 – Índice de Conley homotópico da singularidade $p \in M(\mathcal{W})$ e natureza $r$ . . . . .	106
Figura 54 – Índice de Conley homotópico da singularidade $p \in M(\mathcal{T})$ e natureza $a$ . . . . .	107
Figura 55 – Índice de Conley homotópico da singularidade $p \in M(\mathcal{T})$ e natureza $ssa$ . . . . .	107
Figura 56 – Índice de Conley homotópico da singularidade $p \in M(\mathcal{T})$ e natureza $ssr$ . . . . .	108
Figura 57 – Índice de Conley homotópico da singularidade $p \in M(\mathcal{T})$ e natureza $r$ . . . . .	109
Figura 58 – Fluxo GS na variedade $M$ . . . . .	111

# SUMÁRIO

---

---

Introdução	19
<b>1</b>	<b>PRELIMINARES</b> . . . . . <b>21</b>
1.1	Topologia Algébrica . . . . . 21
1.1.1	<i>Homologia Formal</i> . . . . . 21
1.1.2	<i>Homologia Simplicial</i> . . . . . 31
1.1.3	<i>Homologia Singular</i> . . . . . 34
1.1.4	<i>Homologia Singular Relativa</i> . . . . . 41
1.1.5	<i>Homologia Singular Reduzida</i> . . . . . 47
1.2	Sistemas Dinâmicos . . . . . 49
1.2.1	<i>Fluxos e campos vetoriais</i> . . . . . 49
1.2.2	<i>Retrato de fase de um campo vetorial</i> . . . . . 51
1.3	Singularidades . . . . . 52
1.3.1	<i>Grupos de Mather</i> . . . . . 55
<b>2</b>	<b>TEORIA DE CONLEY</b> . . . . . <b>57</b>
2.1	Índice de um campo vetorial . . . . . 57
2.2	Índice de Morse . . . . . 60
2.3	Índice de Conley . . . . . 67
2.3.1	<i>Um pouco sobre fluxos</i> . . . . . 69
2.3.2	<i>Os índices de Conley</i> . . . . . 71
2.3.3	<i>Soma de Índices de Conley</i> . . . . . 78
2.3.4	<i>Existência de Pares-índices</i> . . . . . 80
2.3.5	<i>Homotopia de Pares-índices</i> . . . . . 83
<b>3</b>	<b>FLUXOS GUTIERREZ-SOTOMAYOR</b> . . . . . <b>89</b>
3.1	Os campos vetoriais Gutierrez-Sotomayor . . . . . 89
3.1.1	<i>Teoria de Conley para fluxos GS</i> . . . . . 97
3.1.2	<i>Característica de Euler</i> . . . . . 109
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . . <b>115</b>
REFERÊNCIAS	117



# INTRODUÇÃO

---



---

No ano de 1978, Conley introduziu em (CONLEY, 1978) o índice de homotopia para o fluxo induzido por um campo vetorial, na tentativa de generalizar a teoria de Morse. Conley utilizou o seu índice para estudar conjuntos  $S$  invariantes e isolados em relação a fluxos contínuos este índice está relacionado a existência de um par-índice  $(N_1, N_0)$  para  $S$ , pois Conley definiu o índice de homotopia como o tipo de homotopia do espaço pontuado  $(N_1 \setminus N_0, [N_0])$  (veja a Definição 11).

Por outro lado, Gutierrez e Sotomayor desenvolveram em (GUTIERREZ; SOTOMAYOR, 1982) uma teoria, a priori; sem ligação com a Teoria de Conley. O principal objetivo é estender os resultados obtidos por Peixoto e Peixoto em (PEIXOTO, 1962) e (PEIXOTO; PEIXOTO, 1959) sobre estabilidade estrutural de campos de vetores, tangentes à variedades 2-dimensionais compactas. Eles estenderam estes resultados para variedades com singularidades. Para isto, eles consideram algumas singularidades<sup>1</sup> que foram chamadas por eles de "singularidades simples", e passam a considerar certos conjuntos que são localmente difeomorfos a um plano ou a essas singularidades. Estes conjuntos foram denominados por eles como variedades 2-dimensionais com singularidades simples, atualmente, chamados de conjuntos de variedades GS.

Recentemente, com os trabalhos (MONTÚFAR, 2010), (ZIGART, 2017) (MONTÚFAR; REZENDE, 2020) e (LIMA; RAMINELLI; REZENDE, 2021) estas duas teorias que no passado foram desenvolvidas em paralelo puderam ser unidas, isto é, a Teoria de Índice de Conley pode ser aplicada a fluxos em variedades GS.

Começamos este trabalho lembrando algumas definições e resultados básicos da Topologia Algébrica, Sistemas Dinâmicos e Teoria das Singularidades, para que, nos Capítulos 2 e 3 possamos apresentar a Teoria de Conley e os fluxos GS da maneira mais fluída, menos carregada e mais compreensível.

No Capítulo 2 exibimos inicialmente, dois índices de campos vetoriais como motivação para a Teoria de Conley. Investigamos os índices de Conley e exibimos uma demonstração de que sempre existe um par-índice para um conjunto invariante isolado  $S$ . Tratamos, também, da independência do índice homotópico de  $S$  quanto à escolha de um par-índice.

No Capítulo 3, exibimos as variedades GS. Fazemos uma breve análise pelo viés da Teoria das Singularidades, para que vejamos que estas singularidades propostas têm propriedades em comum. Depois de apresentarmos as variedades GS, definimos o que são os campos vetoriais Gutierrez-Sotomayor, bem como, os seus fluxos induzidos. A partir dos campos vetoriais Gutierrez-Sotomayor somos capazes de relacionar essas duas teorias que são expostas no trabalho, ou seja, somos capazes de calcular o índice de Conley das singularidades de um determinado campo vetorial Gutierrez-Sotomayor. Resumimos este resultado no Teorema 16. E para finalizar o trabalho de maneira "elegante" apresentamos a Igualdade de

---

<sup>1</sup> Estas singularidades são exibidas no Capítulo 3.

Poincaré-Hopf [17](#), que mostra como a Teoria de Conley pode ser interessante e importante.

---

# PRELIMINARES

---

Como é costumeiro na apresentação de uma dissertação, antes de iniciarmos nosso estudo no tema central deste trabalho precisamos de alguns pré-requisitos. Estes pré-requisitos são desenvolvidos ou mencionados neste capítulo, que é subdividido em três seções: a primeira aborda as ferramentas que utilizamos de topologia algébrica, a segunda seção versa um pouco sobre sistemas dinâmicos e na terceira seção discutimos algumas definições e resultados da teoria clássica de singularidades.

O conteúdo abordado neste capítulo é utilizado sistematicamente no decorrer da dissertação, caso o leitor sinta-se confortável com estes assuntos ele pode optar por ir diretamente ao capítulo 2.

## 1.1 Topologia Algébrica

Nesta seção abordamos fatos básicos sobre topologia algébrica que são utilizados, fortemente, no desenvolvimento desta dissertação. Usamos como principal referência para esta seção o livro (LIMA, 2009).

### 1.1.1 Homologia Formal

Antes de começarmos a conversar sobre topologia algébrica precisamos lembrar, ou mesmo ver pela primeira vez, algumas definições básicas de álgebra. Considere  $R$  um anel comutativo com unidade. Um grupo abeliano aditivo  $(M, +)$  dotado de uma multiplicação por escalar

$$\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longmapsto r \cdot m \end{aligned}$$

é dito um **R-módulo** se satisfaz os seguintes axiomas,  $\forall r_1, r_2 \in R$  e  $\forall m_1, m_2 \in M$ :

- (i)  $1 \cdot m_1 = m_1$ ;
- (ii)  $(r_1 r_2) \cdot m_1 = r_1 \cdot (r_2 \cdot m_1)$ ;
- (iii)  $(r_1 + r_2) \cdot m_1 = r_1 \cdot m_1 + r_2 \cdot m_1$ ;

$$(iv) \quad r_1 \cdot (m_1 + m_2) = r_1 \cdot m_1 + r_1 \cdot m_2.$$

A partir de agora, vamos denotar por  $rm$  o elemento  $r \cdot m$ . Um subgrupo  $N$  de  $M$  é um **R-submódulo** se a multiplicação escalar do módulo  $M$  preserva  $N$ , ou seja,

$$rn \in N, \quad \forall r \in R \text{ e } \forall n \in N.$$

Um  $R$ -módulo  $M$  é dito um **R-módulo livre** se existe um subconjunto  $X \subset M$  que satisfaz:

1. Se  $m \in M$ , existem  $x_1, \dots, x_n \in X$  e  $r_1, \dots, r_n \in R$ , tais que:

$$m = r_1 x_1 + \dots + r_n x_n;$$

2. Se  $x_1, \dots, x_n \in X$  e  $r_1, \dots, r_n \in R$  são tais que:

$$r_1 x_1 + \dots + r_n x_n = 0,$$

então  $r_1 = \dots = r_n = 0$ .

Um subconjunto  $X \subset M$  que satisfaz as condições acima é chamado de **base** para o  $R$ -módulo  $M$ , podemos dizer também que  $M$  é **gerado** por  $X$ . No decorrer do texto utilizamos também as noções de categorias e funtores. Uma **categoria**  $\mathcal{C}$  é constituída por:

1. Uma classe de objetos (de qualquer natureza) que são denotados por  $X, Y, Z, \dots$ ;
2. Para cada par ordenado de  $\mathcal{C}$ ,  $(X, Y)$ , temos um conjunto de flechas ou **morfismos** e denotamos por **Hom(X, Y)** o conjunto de todos os morfismos  $f : X \rightarrow Y$ ;
3. Para cada tripla ordenada de objetos de  $\mathcal{C}$ ,  $(X, Y, Z)$ , temos a composição de morfismos:

$$\begin{aligned} \circ : \text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) &\longrightarrow \text{Hom}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto \circ(f, g) := g \circ f \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) **Associatividade:** Se  $f \in \text{Hom}(X, Y)$ ,  $g \in \text{Hom}(Y, Z)$  e  $h \in \text{Hom}(Z, W)$ , então:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- ii) **Existência do morfismo identidade:** Para todo  $f \in \text{Hom}(X, Y)$  e para todo  $g \in \text{Hom}(Y, Z)$ , existem um morfismos identidades  $Id_X \in \text{Hom}(X, X)$  e  $id_Z \in \text{Hom}(Z, Z)$ , que satisfazem:

$$f \circ Id_X = f \text{ e } Id_Z \circ g = g.$$

Sejam  $\mathcal{C}$  uma categoria,  $f, f' \in \text{Hom}(X, Y)$  e  $g, g' \in \text{Hom}(Y, X)$ : se  $g \circ f = Id_X$ , diremos que  $g$  é um **morfismo inverso à esquerda** de  $f$ . Analogamente, se  $f' \circ g' = Id_Y$ , diremos que  $g'$  é um **morfismo**



**inverso à direita** de  $f'$ . Em particular, se  $f$  possui inverso à esquerda  $g$  e à direita  $g'$ , então  $g = g'$ . De fato, se  $Id_Y = f \circ g'$  então

$$\begin{aligned} g &= g \circ Id_Y = g \circ (f \circ g') \\ &= (g \circ f) \circ g' \\ &= Id_X \circ g' \\ &= g'. \end{aligned}$$

Neste caso, diremos que  $g$  é um **morfismo inverso** de  $f$ . Se  $f$  possui um morfismo inverso, diremos que  $f$  é uma **equivalência** na categoria.

Um **funtor covariante** de uma categoria  $\mathcal{C}$  em uma categoria  $\mathcal{D}$  é uma regra:

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D},$$

que associa a cada objeto  $X \in \mathcal{C}$  um objeto  $F(X) \in \mathcal{D}$ , e associa cada morfismo  $f : X \longrightarrow Y$  um morfismo  $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$  de  $\mathcal{D}$ , além disso, satisfaz:

- i)  $F$  preserva identidades, isto é,  $F(Id_X) = Id_{F(X)}$ , para todo objeto  $X \in \mathcal{C}$ ;
- ii)  $F$  preserva a composição entre morfismos, ou seja,  $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ , para todo  $f \in Hom(X, Y)$  e para todo  $Hom(Y, Z)$ .

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & \searrow & \downarrow F & \nearrow & \\ F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) & \xrightarrow{F(g)} & F(Z). \end{array}$$

Note que, se  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  é um funtor covariante e  $f : X \longrightarrow Y$  é uma equivalência na categoria  $\mathcal{C}$ , então  $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$  é uma equivalência na categoria  $\mathcal{D}$ . Com efeito, existe  $g : Y \longrightarrow X$  em  $\mathcal{C}$  tal que  $g \circ f = Id_X$  e  $f \circ g = Id_Y$  uma vez que o funtor preserva a composição de morfismos e preserva identidades teremos que:

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(Id_X) = Id_{F(X)} \text{ e } F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(Id_Y) = Id_{F(Y)}.$$

Assim,  $F(g) : F(Y) \longrightarrow F(X)$  é um morfismo inverso de  $F(f)$ .

Agora, podemos seguir com os conceitos básicos da topologia algébrica. Uma sequência  $\mathcal{C} = (C_p, \partial_p)_{p \geq 0}$ , onde  $C_p$  são  $R$ -módulos e  $\partial_p : C_p \longrightarrow C_{p-1}$  são homomorfismos tais que  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ , é dito um **complexo de cadeias com coeficientes em  $\mathbf{R}$** . Escrevemos:

$$\mathcal{C} : \cdots \longrightarrow C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Os elementos  $x \in C_p$  são chamados de uma **p-cadeia** ou uma **cadeia de dimensão p**. Se  $\partial_p x = 0$ , diremos que  $x$  é um **p-ciclo** ou apenas **ciclo**. Considere  $Z_p$  o conjunto de todos os  $p$ -ciclos, isto é,  $Z_p = \text{Ker } \partial_p$ . Assim,  $Z_p$  é um  $R$ -submódulo de  $C_p$ . De fato,  $r \cdot x \in Z_p, \forall r \in R$  e  $\forall x \in Z_p$ , pois:

$$\partial_p(r \cdot x) = r \cdot \partial_p(x) = r \cdot 0 = 0.$$

Se  $\partial_{p+1}x = y$ , diremos que a  $p$ -cadeia  $y$  é o **bordo** da  $(p+1)$ -cadeia  $x$ . Considere  $B_p$  o conjunto das  $p$ -cadeias que são bordos de  $(p+1)$ -cadeias, ou seja,  $B_p = \text{Im } \partial_{p+1}$ . Donde  $B_p$  é um  $R$ -submódulo de  $C_p$ . De fato,  $r \cdot y \in B_p, \forall r \in R$  e  $\forall y \in B_p$ , pois existe  $x \in C_{p+1}$  tal que  $\partial_{p+1}x = y$ , logo:

$$r \cdot x \in C_{p+1} \implies \partial_{p+1}(r \cdot x) = r \cdot \partial_{p+1}x = r \cdot y.$$

Os homomorfismos  $\partial_p : C_p \longrightarrow C_{p-1}$  são chamados de **operadores bordo**. Geralmente vamos escrever  $\partial$  em vez de  $\partial_p$ , a menos que seja necessário ser mais explícito. Assim,  $\partial \circ \partial x = 0 \forall x \in C_p$ . A relação  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$  significa que todo bordo é um ciclo, ou seja,  $B_p \subset Z_p$ . Com efeito, se  $y \in B_p$ , existe  $x \in C_{p+1}$  tal que  $y = \partial_{p+1}x$ , logo,  $\partial_p(y) = \partial_p \circ \partial_{p+1}x = 0$ , isto é,  $y \in \text{Ker } \partial_p = Z_p$ .

Considere o  $R$ -módulo quociente  $H_p = H_p(\mathcal{C}) := \frac{Z_p}{B_p}$  que será chamado de **grupo homologia p-dimensional** do complexo  $\mathcal{C}$  com coeficientes em  $R$ . Os elementos desse grupo são as **classes de homologia**:

$$[z] = \{z + \partial x; x \in C_{p+1}\} = z + B_p, \text{ onde } z \in Z_p.$$

Se  $z$  e  $z'$  são  $p$ -ciclos, então  $[z] = [z']$  se, e somente se,  $z - z' = \partial x$ , para algum  $x \in C_{p+1}$ . Neste caso, diremos que  $z$  e  $z'$  são **ciclos homólogos**.

Se, para cada  $p \geq 0$ , tivermos um  $R$ -submódulo  $C'_p \subset C_p$  tal que  $\partial C'_{p+1} \subset C'_p$ , então defina  $\partial'_p = \partial_p|_{C'_p}$ , logo, a sequência  $\mathcal{C}' = (C'_p, \partial'_p)_{p \geq 0}$  é um complexo de cadeias, chamado de **sub-complexo de  $\mathcal{C}$** . Agora, para cada  $p \geq 0$ , considere o  $R$ -módulo quociente  $\overline{C}_p := \frac{C_p}{C'_p}$ . Existe um único homomorfismo  $\overline{\partial}_p : \overline{C}_p \longrightarrow \overline{C}_{p-1}$  que torna comutativo o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ \overline{C}_p & \xrightarrow{\overline{\partial}_p} & \overline{C}_{p-1} \end{array}$$

onde  $j$  é a aplicação quociente. Por definição, temos  $\overline{\partial} \circ j(x) = j \circ \partial(x)$ . Temos também,  $\overline{\partial}_p \circ \overline{\partial}_{p+1} = 0$ , logo, a sequência  $\overline{\mathcal{C}} = (\overline{C}_p, \overline{\partial}_p)_{p \geq 0}$  é um complexo de cadeias, chamado de **quociente de  $\mathcal{C}$  por  $\mathcal{C}'$**  (falaremos, mais tarde, da homologia singular relativa que é um exemplo de um complexo quociente).

Considere  $\mathcal{X} = (X_p, \partial_p)_{p \geq 0}$  e  $\mathcal{Y} = (Y_p, \partial_p)_{p \geq 0}$  complexos de cadeias, onde operadores bordo indicamos com o mesmo símbolo. Uma sequência de homomorfismos  $f_p : X_p \longrightarrow Y_p, p \geq 0$ , tais que,  $f_p(\partial x) = \partial f_{p+1}(x), \forall x \in X_p$ , é chamado de um **morfismo** e denotado por  $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ . Isto é, no

diagrama abaixo, todos os retângulos são comutativos.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots X_{p+1} & \xrightarrow{\partial} & X_p & \xrightarrow{\partial} & X_{p-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & X_0 \\
 \downarrow f_{p+1} & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} & & \downarrow & & \downarrow f_0 \\
 \cdots Y_{p+1} & \xrightarrow{\partial} & Y_p & \xrightarrow{\partial} & Y_{p-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & Y_0.
 \end{array}$$

Pois,  $\partial f_p(x) = f_{p-1}(\partial x)$  e  $\partial f_{p+1}(x) = f_p(\partial x)$ . Com isso, temos que para todo  $p \geq 0$ , o homomorfismo  $f_p : X_p \rightarrow Y_p$  leva  $p$ -ciclos de  $\mathcal{X}$  em  $p$ -ciclos de  $\mathcal{D}$ , o mesmo para os  $p$ -bordos, em notação de conjuntos temos:

$$f_p(Z_p(\mathcal{X})) \subset Z_p(\mathcal{D}) \text{ e } f_p(B_p(\mathcal{X})) \subset B_p(\mathcal{D}).$$

Assim,  $f_p$  induz, passando o quociente, um homomorfismo

$$(f_p)_* : H_p(\mathcal{X}) \rightarrow H_p(\mathcal{D}),$$

definido por:

$$(f_p)_*[z] = [f_p(z)], \quad \forall [z] \in H_p(\mathcal{X}), \text{ onde } z \in Z_p(\mathcal{X}).$$

Geralmente, vamos denotar apenas por  $(f)_* : H_p(\mathcal{X}) \rightarrow H_p(\mathcal{D})$ . Este homomorfismo induzido é natural, no seguinte sentido: se  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}$  é outro morfismo entre complexos de cadeias, para cada  $p \geq 0$ , induzindo o homomorfismo  $(g)_* : H_p(\mathcal{D}) \rightarrow H_p(\mathcal{M})$ , então o morfismo  $g \circ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$  induz, para cada  $p \geq 0$ , o homomorfismo:

$$(g \circ f)_* : H_p(\mathcal{X}) \rightarrow H_p(\mathcal{M}),$$

com  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ . Além disso, se  $id : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  é a identidade então  $id_* : H_p(\mathcal{X}) \rightarrow H_p(\mathcal{X})$  é também a identidade. Assim, temos que se o morfismo  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{D}$  admite inversa  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{X}$  então  $(f)_* : H_p(\mathcal{X}) \rightarrow H_p(\mathcal{D})$  é invertível para todo  $p \geq 0$ , com  $(f_*)^{-1} = g_*$ .

Podemos obter exemplos de morfismos entre complexos de cadeias a partir de um sub-complexo  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ . A aplicação inclusão  $i : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  e a projeção  $j : \mathcal{C} \rightarrow \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}'}$  são morfismos. Vale ressaltar que  $i : C'_p \rightarrow C_p$  é injetivo e  $j : C_p \rightarrow \frac{C_p}{C'_p}$  é sobrejetivo, mas essas propriedades não são necessariamente herdadas pelos homomorfismos induzidos:

$$i_* : H_p(\mathcal{C}') \rightarrow H_p(\mathcal{C}) \text{ e } j_* : H_p(\mathcal{C}) \rightarrow H_p\left(\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}'}\right).$$

Veremos esse fato nos próximos exemplos.

**Exemplo 1.** Sejam  $R$  o anel dos inteiros e o complexo  $\mathcal{C}$ , onde  $C_0$  é um grupo abeliano livre gerado pelos símbolos  $a, b, c$  (podemos imaginar como os vértices de um triângulo),  $C_1$  é o grupo abeliano livre

gerado por  $ab, bc, ca$  (lados do triângulo) e  $C_2$  é o grupo cíclico cujo gerador livre é  $abc$ . Os grupos  $C_p$ , onde  $p > 2$  são todos iguais a 0. Os operadores bordos  $\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1$  e  $\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0$  são definidos por:

$$\begin{aligned}\partial_2(abc) &= ab + bc + ca; \\ \partial_1(ab) &= b - a, \partial_1(bc) = c - b \text{ e } \partial_1(ca) = a - c; \\ \partial a &= \partial b = \partial c = 0.\end{aligned}$$

Note que,  $\partial \circ \partial = 0$  em todas as dimensões. Em verdade, basta mostrar que  $\partial \circ \partial(abc) = 0$ .

$$\begin{aligned}\partial \circ \partial(abc) &= \partial(ab + bc + ca) \\ &= \partial(ab) + \partial(bc) + \partial(ca) \\ &= b - a + c - b + a - c \\ &= 0.\end{aligned}$$

Em dimensão 2, a cadeia nula é o único ciclo, logo,  $H_2(\mathcal{C}) = \{0\}$ . Agora, vamos ver quem são os ciclos de dimensão 1. Uma cadeia  $x \in C_1$  é da forma:

$$x = m.ab + n.bc + p.ca, \text{ onde } m, n, p \in \mathbb{Z}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\partial x &= \partial(m.ab + n.bc + p.ca) \\ &= m.\partial(ab) + n.\partial(bc) + p.\partial(ca) \\ &= m.(b - a) + n.(c - b) + p.(a - c) \\ &= m.b - m.a + n.c - n.b + p.a - p.c \\ &= (p - m).a + (m - n).b + (n - p).c.\end{aligned}$$

Donde,  $\partial x = 0 \Leftrightarrow m = n = p \Leftrightarrow x = m(ab + bc + ca), m \in \mathbb{Z}$ . Assim, o ciclo  $z = ab + bc + ca$  é o gerador de  $Z_1(\mathcal{C})$ . Uma vez que,  $z = \partial(abc) \Rightarrow B_1(\mathcal{C}) = Z_1(\mathcal{C})$ , portanto, o grupo de homologia  $H_1(\mathcal{C}) = \frac{Z_1(\mathcal{C})}{B_1(\mathcal{C})}$  é nulo.

Nos resta calcular  $H_0(\mathcal{C})$ . Toda 0-cadeia é, por definição, um ciclo. Assim,  $Z_0(\mathcal{C})$  é o grupo abeliano livre gerado por  $a, b, c$ . Já calculamos o bordo de uma 1-cadeia genérica  $x = m.ab + n.bc + p.ca$ , obtivemos:

$$y = \partial x = (p - m).a + (m - n).b + (n - p).c.$$

Uma vez que,  $(p - m) + (m - n) + (n - p) = 0$ , concluímos que se uma 0-cadeia  $y = k_1.a + k_2.b + k_3.c$  é um bordo, então  $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ . A soma  $k_1 + k_2 + k_3$  é o **índice da cadeia y**.

Pode-se provar que, o sistema de três equações lineares  $x - y = k_1, y - z = k_2, z - x = k_3$  tem solução se, e somente se, seu índice é 0. (uma 0-cadeia é bordo  $\Leftrightarrow$  tem índice 0). Ainda mais, duas 0-cadeias são homólogas se, e somente se, têm o mesmo índice. Assim, o homomorfismo  $I_n : C_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ , que leva uma 0-cadeia em seu índice, tem o seguinte núcleo,  $\text{Ker} I_n = B_0$ .

Passando ao quociente, obtemos  $\frac{C_0}{B_0} \cong \mathbb{Z}$ , lembrando  $Z_0(\mathcal{C}) = C_0$ , logo,  $H_0(\mathcal{C}) = \frac{C_0}{B_0} \cong \mathbb{Z}$ . Portanto, os grupos de homologia do complexo  $\mathcal{C}$  são  $H_0(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}, H_1(\mathcal{C}) = H_2(\mathcal{C}) = \{0\}$ .

**Exemplo 2.** Mantendo as notações do exemplo anterior, consideramos o sub-complexo  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ , onde  $C'_2 = \{0\}$ ,  $C'_1 = C_1$  e  $C'_0 = C_0$ . Donde,  $H_2(\mathcal{C}') = \{0\}$  e  $H_0(\mathcal{C}') = H_0(\mathcal{C}) \cong \mathbb{Z}$ , mas  $\partial'_2 = 0 \Rightarrow B'_1 = \{0\}$ , então  $H_1(\mathcal{C}') = Z'_1 \cong \mathbb{Z}$ . Logo, os grupos de homologia do sub-complexo  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  são isomorfos a  $\mathbb{Z}$  nas dimensões 0 e 1 e nulas nas demais.

Esta configuração, nos dá um exemplo em que o homomorfismo  $i_* : H_1(\mathcal{C}') \rightarrow H_1(\mathcal{C})$  não é injetivo, onde  $i_*$  é induzido por  $i : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ , pois  $H_1(\mathcal{C}) = \{0\}$  e  $H_1(\mathcal{C}') \cong \mathbb{Z}$ . Nos dá também um exemplo em que o homomorfismo induzido  $j_* : H_2(\mathcal{C}) \rightarrow H_2(\overline{\mathcal{C}})$  não é sobrejetivo. Note que,  $\overline{\mathcal{C}} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}'}$  tem-se  $\overline{C}_2 = C_2$ ,  $\overline{C}_1 = \overline{C}_0 = \{0\}$ . Donde,  $H_1(\overline{\mathcal{C}}) = H_0(\overline{\mathcal{C}}) = \{0\}$  e  $H_2(\overline{\mathcal{C}})$  é o grupo cíclico infinito gerado pela classe de homologia do 2-ciclo  $j(abc) \in \overline{C}_2$ , onde  $j : C_2 \rightarrow \overline{C}_2$  é a aplicação quociente.

Considere  $\mathcal{X} = (X_p, \partial_p)_{p \geq 0}$ ,  $\mathcal{Y} = (Y_p, \partial_p)_{p \geq 0}$  e  $f, g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  morfismos entre os complexos de cadeias  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ . Uma **Homotopia Algébrica** entre  $f$  e  $g$  é uma sequência de homomorfismos de  $R$ -módulos:

$$D_p : X_p \rightarrow Y_{p+1},$$

tais que

$$\partial_{p+1} \circ D_p + D_{p-1} \circ \partial_p = f_p - g_p,$$

ou simplesmente:

$$\partial \circ D + D \circ \partial = f - g : X_p \rightarrow Y_p, \forall p \geq 0.$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_p & \xrightarrow{\partial_p} & X_{p-1} \\
 & \longleftarrow D_p & & & \\
 Y_{p+1} & & & & \\
 & \searrow \partial_{p+1} & \downarrow f-g & \swarrow D_{p-1} & \\
 & & Y_p & & 
 \end{array}$$

O principal resultado que obtemos diretamente dessa definição é:

**Proposição 1.** Se  $f, g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  são morfismos algebricamente homotópicos, então os homomorfismos induzidos por  $f$  e  $g$  nos grupos de homologia coincidem, isto é,  $f_* = g_* : H_p(\mathcal{X}) \rightarrow H_p(\mathcal{Y}), \forall p \geq 0$ .

Uma **sequência exata** é uma sequência de homomorfismos de  $R$ -módulos tais que, o núcleo de cada homomorfismo  $f_p$  é igual à imagem do homomorfismo anterior  $f_{p+1}$ .

$$\cdots \longrightarrow M_{p+1} \xrightarrow{f_{p+1}} M_p \xrightarrow{f_p} M_{p-1} \longrightarrow \cdots$$

Assim, uma sequência exata é um complexo de cadeias cujos grupos de homologia são iguais a zero em todas as dimensões. De fato,

$$Z_p = \text{Ker } f_p = \text{Im } f_{p+1} = B_p \Rightarrow H_p = \frac{Z_p}{B_p} = \{0\}.$$

Em uma sequência exata, o homomorfismo  $f_p$  é injetivo se, e somente se,  $f_{p+1} = 0$ . Com efeito,  $f_{p+1}$  é injetivo se, e só se,  $\text{Ker} f_p = \{0\}$ , como  $\text{Ker} f_p = \text{Im} f_{p+1}$  temos o resultado. Já  $f_{p+1}$  é sobrejetivo se, e somente se,  $f_p = 0$ . De fato,  $f_{p+1}$  é sobrejetivo se, e só se,  $\text{Im} f_{p+1} = M_p$ , como  $\text{Im} f_{p+1} = \text{Ker} f_p$ , temos o resultado. Com isso, as sequências abaixo são exatas se, e só se,  $f$  é injetivo e  $g$  é sobrejetivo.

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \qquad M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0.$$

Assim, a sequência abaixo é exata se, e só se,  $f$  é um isomorfismo entre os  $R$ -módulos  $M$  e  $N$ .

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0.$$

Uma sequência exata do tipo:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{j} P \longrightarrow 0,$$

chama-se **curta**. Neste caso,  $i$  é injetivo,  $j$  é sobrejetivo e  $j^{-1}(0) = i(M)$ .

Um típico exemplo de uma sequência exata curta é aquele em que  $M$  é um submódulo de  $N$ ,  $i : M \rightarrow N$  é a inclusão e  $j : N \rightarrow \frac{N}{M}$  é a aplicação quociente.

**Um morfismo entre duas sequências exatas**  $(M_p, f_p)_{p \geq 0}$  e  $(N_p, g_p)_{p \geq 0}$  é uma sequência  $\varphi = (\varphi_p)_{p \geq 0}$  de homomorfismo  $\varphi_p : M_p \rightarrow N_p$  tais que

$$\varphi_{p-1} \circ f_p = g_p \circ \varphi_p \quad \forall p \geq 0,$$

isto é, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} M_p & \xrightarrow{f_p} & M_{p-1} \\ \downarrow \varphi_p & & \downarrow \varphi_{p-1} \\ N_p & \xrightarrow{g_p} & N_{p-1} \end{array}$$

**Lema 1. (Lema dos Cinco)** Em um morfismo entre sequências exatas de  $R$ -módulos:

$$\begin{array}{ccccccccc} M_5 & \xrightarrow{f_5} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_1 \\ \downarrow \varphi_5 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_1 \\ N_5 & \xrightarrow{g_5} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_1 \end{array}$$

Se  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$  e  $\varphi_5$  são isomorfismos, então  $\varphi_3$  também é um isomorfismo.

**Teorema 1.** Considere

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{j} \mathcal{C}'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de morfismos entre complexos de cadeias. Existe, para cada  $p > 0$ , um homomorfismo

$$\partial_* : H_p(\mathcal{C}'') \longrightarrow H_p(\mathcal{C}'),$$

tal que, a sequência:

$$\cdots \longrightarrow H_p(\mathcal{C}') \xrightarrow{i_*} H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{j_*} H_p(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{i_*} H_{p-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow \cdots$$

é exata. O homomorfismo  $\partial_*$  é conhecido como **homomorfismo conectante**.

**Exemplo 3.** Temos dois exemplos importantes de sequências exatas de homologia: **(i)** Quando se tem um sub-complexo  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ , tome  $\mathcal{C}'' := \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}'}$ . Neste caso,  $i : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  é a aplicação inclusão e  $j : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}''$  é a aplicação quociente. Temos a sequência exata de homologia associada à sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{j} \mathcal{C}'' \longrightarrow 0$$

que é chamada de **sequência exata do par**  $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  e os grupos de homologia  $H_p(\mathcal{C}'')$  chamados de **grupos de homologia relativo ao par**  $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ .

**(ii) Sequência de Mayer-Vietoris:**

Para obtermos a sequência de Mayer-Vietoris, precisamos de dois sub-complexos  $\mathcal{C}', \mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}$ , tais que:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}' + \mathcal{C}'',$$

isto é,  $C_p = C'_p + C''_p, \forall p \geq 0$ . Então, os A-módulos  $C'_p \cap C''_p$ , munidos do operador bordo  $\partial$  de  $\mathcal{C}$ , formam um complexo  $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}''$ .

Além disso, as somas diretas  $C'_p \oplus C''_p$  cujos elementos serão escritos como pares  $(x', x'')$ , onde  $x' \in C'_p$  e  $x'' \in C''_p$ , munidos do operador bordo

$$\partial : C'_p \oplus C''_p \longrightarrow C'_{p-1} \oplus C''_{p-1},$$

definido por:

$$\partial(x', x'') := (\partial x', \partial x''),$$

formam o complexo  $\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}''$ , e os grupos de homologia são  $H_p(\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'') \cong H_p(\mathcal{C}') \oplus H_p(\mathcal{C}'')$ , pode-se verificar esse isomorfismo.

Considere os morfismos abaixo:

$$\begin{aligned} i : \mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' &\longrightarrow \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'' \\ x &\longmapsto (x, x) \\ j : \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'' &\longrightarrow \mathcal{C} \\ (x, y) &\longmapsto x - y \end{aligned}$$

Note que,  $\text{Ker } j = \text{Im } i$ , logo, temos a sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' \xrightarrow{i} \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'' \xrightarrow{j} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

Desta sequência resulta a sequência exata de homologia:

$$\cdots \longrightarrow H_p(\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'') \xrightarrow{i_*} H_p(\mathcal{C}') \oplus H_p(\mathcal{C}'') \xrightarrow{j_*} H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'') \longrightarrow \cdots$$

Essa é a sequência de Mayer-Vietoris (da decomposição  $\mathcal{C} = \mathcal{C}' + \mathcal{C}''$ ). Nela usamos  $\Delta$  em vez de  $\partial_*$ . Os homomorfismos  $i_*$  e  $j_*$  são definidos por:  $i_*([z]) = ([z], [z])$  e  $j_*([z], [w]) = [z - w]$ . Já para  $\Delta$ , tem-se  $\Delta[z] = [\partial x] = [\partial y]$ , onde  $x - y = z$ ,  $x \in C'_p$ ,  $y \in C''_p$  e  $\partial x = \partial y$ .

Esta sequência exata de homologia é natural, no seguinte sentido: dado um morfismo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{X}' & \xrightarrow{i} & \mathcal{X} & \xrightarrow{j} & \mathcal{X}'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}' & \xrightarrow{i} & \mathcal{D} & \xrightarrow{j} & \mathcal{D}'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

entre duas sequências exatas curtas de complexos de cadeias, os homomorfismos induzidos em homologia por  $\varphi$ ,  $\varphi'$  e  $\varphi''$  determinam morfismos entre as sequências exatas de homologia, isto é, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_p(\mathcal{X}') & \xrightarrow{i_*} & H_p(\mathcal{X}) & \xrightarrow{j_*} & H_p(\mathcal{X}'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(\mathcal{X}') & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \varphi'_* & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi''_* & & \downarrow \varphi'_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_p(\mathcal{D}') & \xrightarrow{i_*} & H_p(\mathcal{D}) & \xrightarrow{j_*} & H_p(\mathcal{D}'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(\mathcal{D}') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Pelo morfismo entre duas sequências curtas, temos:

$$\varphi \circ i = i \circ \varphi' \text{ e } \varphi'' \circ j = j \circ \varphi.$$

Assim,

$$\varphi_* \circ i_* = i_* \circ \varphi'_* \text{ e } \varphi''_* \circ j_* = j_* \circ \varphi_*.$$

Para ver que  $\varphi'_* \circ \partial_* = \partial_* \circ \varphi''_*$ , vamos usar que  $\partial_*[z''] = [i^{-1} \circ \partial \circ j^{-1}(z'')]$ , esta caracterização pode ser vista em (LIMA, 2009). Assim,

$$\begin{aligned} \varphi'_* \circ \partial_*[z''] &= \varphi'_*[i^{-1} \circ \partial \circ j^{-1}(z'')] \\ &= [\varphi' \circ i^{-1} \circ \partial \circ j^{-1}(z'')] \\ &= [i^{-1} \varphi \partial j^{-1} z''] \\ &= [i^{-1} \partial \varphi j^{-1} z''] \\ &= [i^{-1} \partial j^{-1} \varphi'' z''] \\ &= \partial_* \circ \varphi''_*[z'']. \end{aligned}$$

Temos a naturalidade da sequência de Mayer-Vietoris se  $\mathcal{X} = \mathcal{X}' + \mathcal{X}''$  e  $\mathcal{D} = \mathcal{D}' + \mathcal{D}''$  implicam em um morfismo  $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{D}$ ;  $\varphi(\mathcal{X}') \subset \mathcal{D}'$  e  $\varphi(\mathcal{X}'') \subset \mathcal{D}''$  induz um morfismo entre as sequências de Mayer-Vietoris de  $(\mathcal{X}, \mathcal{X}', \mathcal{X}'')$  e  $(\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}'')$ .



### 1.1.2 Homologia Simplicial

Nesta seção teremos exemplos mais concretos da teoria que foi abordada na última seção. Iremos abordar a homologia simplicial, onde utilizamos como principal referência (VALDÉS; FÊMINA, 2018). Antes disso, precisamos de alguns termos e definições.

Um conjunto  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  de  $k + 1$  pontos em  $\mathbb{R}^n$  é dito **geometricamente independente** se os vetores  $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_k - a_0$  são linearmente independentes.

O conjunto dos pontos  $x \in \mathbb{R}^n$ , que são gerados pelo conjunto de pontos geometricamente independentes  $a_0, \dots, a_k$ , para os quais existem números reais não-negativos  $\lambda_0, \dots, \lambda_k$  tais que

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i a_i \quad e \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1,$$

é chamado de **k-simplexo**, e vamos denotá-lo por  $\sigma^k$ .

Alguns exemplos são: **0-simplexo** é um conjunto unitário, **1-simplexo** é um segmento de linha fechado, **2-simplexo** é um triângulo (interior e arestas) e **3-simplexo** é um tetraedro (interior e arestas), veja a Figura 1.

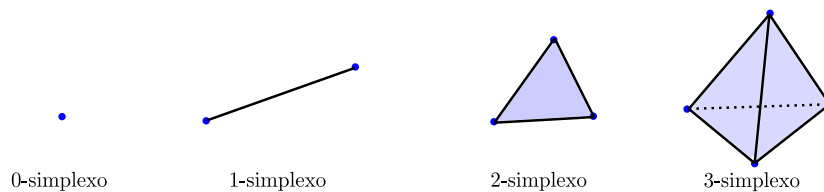
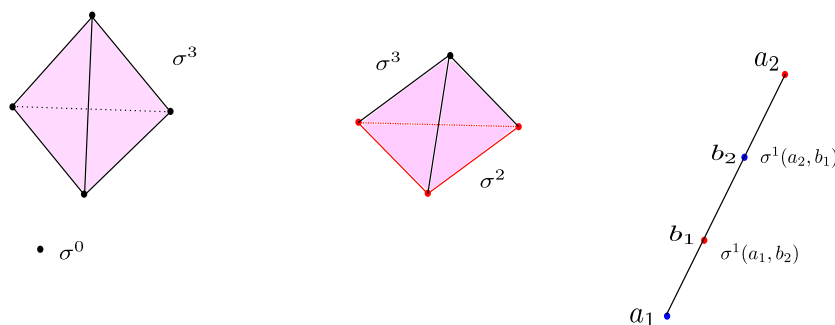


Figura 1 – Exemplos de simplexos

Também temos o conceito de um **k-simplexo aberto**. Por exemplo: **0-simplexo aberto** é um conjunto unitário, **1-simplexo aberto** é um segmento de linha sem os pontos finais, **2-simplexo aberto** é o interior de um triângulo e **3-simplexo aberto** é o interior de um tetraedro.

Um simplexo  $\sigma^k$ , onde  $0 \leq k \leq n$ , é uma **face** de um simplexo  $\sigma^n$  quando cada vértice de  $\sigma^k$  é também vértice de  $\sigma^n$ . Se  $\sigma^n$  é um simplexo com vértices  $\{a_0, \dots, a_n\}$  escrevemos  $\sigma^n = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ . Diremos que dois simplexos  $\sigma^m$  e  $\sigma^n$  são **propriamente unidos**, se  $\sigma^n \cap \sigma^m = \emptyset$  ou  $\sigma^n \cap \sigma^m = \sigma^k$  é uma face de ambos, na Figura 2 os dois primeiros exemplos são propriamente unidos e o terceiro não é.



$$\sigma^3 \cap \sigma^0 = \emptyset \qquad \sigma^3 \cap \sigma^2 = \sigma^2 \qquad \sigma^1(a_1, b_2) \cap \sigma^1(a_2, b_1) = \langle b_1, b_2 \rangle$$

Figura 2 – Simplexos propriamente unidos e não propriamente unidos

Um **complexo simplicial** é uma família finita  $\mathbf{K}$  de simplexos todos no mesmo espaço ( $\mathbb{R}^n$ ), tais que, são propriamente unidos e cada face de um elemento de  $K$  é também um elemento de  $K$ .

O maior índice  $r$  tal que  $K$  contém um  $r$ -simplexo é definido como **dimensão de  $K$** . Denotamos por  $|K|$  a união dos elementos de  $K$  em  $\mathbb{R}^n$  e é chamado de **poliedro** associado a  $K$ .

**Definição 1.** Uma **triangularização** de um espaço topológico  $X$  é composto por um complexo simplicial  $K$  e um homeomorfismo:

$$h : |K| \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow X.$$

Triangularizar uma superfície, geometricamente, é cobri-la de formas "triangulares", tais que, ou tem uma face em comum, ou um vértice ou uma aresta. Note que, triangularizar uma superfície pode ser feita de várias maneiras distintas, veja a Figura 3.



Figura 3 – Duas triangularizações distintas para uma superfície qualquer

Um **n-simplexo orientado**,  $n \geq 1$  (precisamos de mais de um ponto), é obtido de um  $n$ -simplexo  $\sigma^n = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$  escolhendo uma ordem para esses vértices.

O simplexo orientado positivamente  $+\sigma^n$  é determinado pela classe de equivalência de permutações pares para a escolha da ordem. Do mesmo modo, a classe de equivalência das permutações ímpares determina o simplexo orientado negativamente  $-\sigma^n$ .

Um **complexo simplicial orientado** é um complexo simplicial, onde para cada simplexo foi atribuído uma orientação, veja a Figura 4.

Seja  $\langle a_0, a_1, \dots, a_p \rangle = \sigma^p$ , então  $+\langle a_0, a_1, \dots, a_p \rangle$  denota a classe de permutações pares para indicar a ordem  $a_0, a_1, \dots, a_p$  e  $-\langle a_0, a_1, \dots, a_p \rangle$  denota a classe de permutações ímpares.

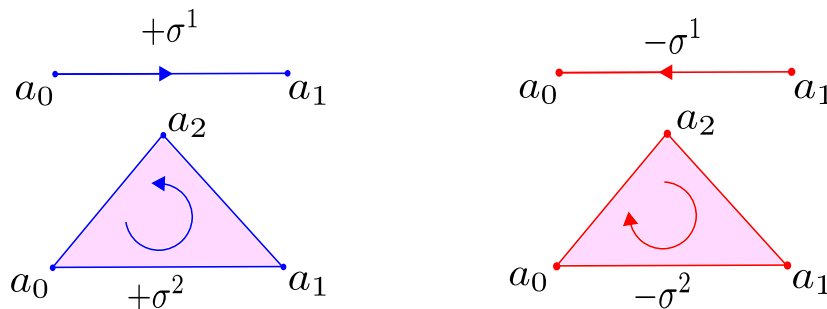


Figura 4 – Simplexos Orientados

Considere  $\sigma^{p+1}$  e  $\sigma^p$  simplexos de um complexo geométrico orientado  $K$ . A cada par  $(\sigma^{p+1}, \sigma^p)$

associamos um **número de incidência**  $[\sigma^{p+1}, \sigma^p]$  que definimos por:

$$[\sigma^{p+1}, \sigma^p] := \begin{cases} 0, & \text{se } \sigma^p \text{ não é uma face de } \sigma^{p+1}; \\ \pm 1, & \text{se } \sigma^p \text{ é uma face de } \sigma^{p+1}. \end{cases}$$

No caso em que,  $\sigma^p$  é uma face de  $\sigma^{p+1}$ , ordene os vértices  $a_0, \dots, a_p$  de  $\sigma^p$  tais que  $+\sigma^p = \langle a_0, \dots, a_p \rangle$ . Seja  $v$  o vértice de  $\sigma^{p+1}$  que não é vértice de  $\sigma^p$ ,

1. Se  $+\sigma^{p+1} = +\langle v, a_0, \dots, a_p \rangle$ , então  $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 1$ ;
2. Se  $-\sigma^{p+1} = -\langle v, a_0, \dots, a_p \rangle$ , então  $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = -1$ .

Considere um complexo simplicial orientado  $k$  e  $p \in \mathbb{N}$ , uma função

$$c_p : K \longrightarrow \mathbb{Z}$$

tal que, para cada  $p$ -simplexo  $\sigma^p$ , vale  $c_p(-\sigma^p) = -c_p(+\sigma^p)$ , é chamada de **p-cadeia** ou **p-dimensional cadeia**.

A família das  $p$ -cadeias formam o **grupo das p-cadeias de  $K$**  que denotamos por  $C_p(K)$ , com a operação de soma induzida dos inteiros.

Note que, se  $K$  tem  $\alpha_p$   $p$ -simplexos, então  $C_p(K)$  é isomorfo a soma direta de  $\alpha_p$  cópias de  $\mathbb{Z}$ .

A correspondência é dada por:

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} g_i \sigma_i^p \longleftrightarrow (g_1, g_2, \dots, g_{\alpha_p})$$

Considere  $p \in \mathbb{N}$  e  $g\sigma^p$  uma  $p$ -cadeia elementar, definimos **p bordo** de  $g\sigma^p$  por :

$$\partial_p(g\sigma^p) := \sum_{\sigma_i^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] g \sigma_i^{p-1} \in C_{p-1}(K).$$

Podemos estender este operador bordo para qualquer  $p$ -cadeia da seguinte maneira: se  $c_p = \sum g_i \sigma_i^p$  é uma  $p$ -cadeia arbitrária defina:

$$\partial_p(c_p) := \sum \partial_p(g_i \sigma_i^p).$$

Assim, estendemos o operador bordo para um homomorfismo

$$\partial_p : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K).$$

Vamos convencionar que o bordo de uma 0-cadeia é zero.

**Teorema 2.** Sejam  $K$  um complexo orientado e  $p \geq 2$ , então a composição  $\partial_{p-1} \circ \partial_p : C_p(K) \longrightarrow C_{p-2}(K)$  é igual a zero.

Uma  $p$ -cadeia  $z_p$  tal que  $\partial(z_p) = 0$  é conhecida como  $p$ -ciclo.  $\text{Ker}\partial_p$  é um subgrupo de  $C_p(K)$ . Vamos denotar  $\text{Ker}\partial_p = \mathbf{Z}_p(\mathbf{K})$  e o chamamos de **grupo dos  $p$ -ciclos de  $\mathbf{K}$** .

**Observação:** Como convencionamos que o bordo de toda  $0$ -cadeia sendo  $0$ , então toda  $0$ -cadeia é um  $0$ -ciclo, isto é,  $Z_0(K) = C_0(K)$ .

Uma  $p$ -cadeia  $b_p$  é dita um  **$p$ -bordo** em  $\mathbf{K}$ , quando existe uma  $(p+1)$ -cadeia  $c_{p+1}$  tal que  $\partial_{p+1}(c_{p+1}) = b_p$ .  $\text{Im}\partial_{p+1}$  é um subgrupo de  $C_p(K)$ . Vamos denotar  $\text{Im}\partial_{p+1} = \mathbf{B}_p(\mathbf{K})$  e o chamamos de  **$p$ -dimensional grupo bordo de  $\mathbf{K}$** .

Se a dimensão de  $K$  for  $n$ , então não existem  $p$ -cadeias em  $K$ , onde  $p > n$ , logo,  $C_p(K) = \{0\}$ . Neste caso,  $B_p(K) = \{0\} \quad \forall p \geq n$ , pois  $B_p(K) = \text{Im}\partial_{p+1}$ .

**Teorema 3.** Seja  $\mathbf{K}$  um complexo orientado de dimensão  $n$ , então  $B_p(K) \subset Z_p(K)$ , onde  $0 \leq p \leq n$ .

Considere dois  $p$ -ciclos  $w_p$  e  $z_p$  em um complexo  $\mathbf{K}$ , diremos que eles são **homólogos** ( $w_p \sim z_p$ ) se existe uma  $(p+1)$ -cadeia  $c_{p+1}$  tal que  $\partial(c_{p+1}) = w_p - z_p$ . Em particular, se um  $p$ -ciclo  $t_p$  é bordo de uma  $(p+1)$ -cadeia, diremos que  $t_p$  é homólogo ao zero.

A relação de homologia é uma relação de equivalência. Assim, as classes de homologia de  $Z_p(K)$  são:

$$[z_p] = \{w_p \in Z_p(K); w_p \sim z_p\}.$$

As classes laterais são:

$$z_p + B(K) = \{z_p + \partial_{p+1}(c_{p+1}); \partial_{p+1}(c_{p+1}) \in B_p(K)\},$$

logo, as classes de homologia são elementos do grupo quociente  $\frac{Z_p(K)}{B_p(K)}$ .

O **grupo de homologia  $p$ -dimensional de  $\mathbf{K}$**  é o grupo quociente

$$\mathbf{H}_p(\mathbf{K}) := \frac{Z_p(K)}{B_p(K)}.$$

### 1.1.3 Homologia Singular

Nesta seção mostramos exemplos mais concretos da teoria que foi abordada na última seção, pois abordamos aqui a **homologia singular**. Para esta seção a principal referência é (LIMA, 2009). Uma vantagem da homologia singular é que ela faz sentido para todo espaço topológico.

Vamos denotar por  $\Delta_r$  o  $r$ -simplexo, onde seus vértices  $e_0, e_1, \dots, e_r$  formam a base canônica do  $\mathbb{R}^{r+1}$ . Na notação de conjuntos:

$$\Delta_r = \{(t_0, t_1, \dots, t_r); t_i \geq 0, \sum_{i=0}^r t_i = 1\}.$$

Considere o espaço topológico  $X$ , uma aplicação contínua  $\sigma : \Delta_r \longrightarrow X$  é dita um **r-simplexo singular** em  $X$ . O  $R$ -módulo livre gerado pelos  $r$ -simplexos singulares de  $X$  é denotado por  $S_r(X)$ , e seus elementos são chamados de **r-cadeias singulares** de  $X$  com coeficientes no anel  $R$ , são representados da seguinte forma:

$$x = \sum_{\sigma} x_{\sigma} \sigma,$$

combinações lineares finitas de  $r$ -simplexos singulares  $\sigma$ , onde  $x_{\sigma} \in R$ . As vezes, vamos escrever  $S_r(X, R)$  em vez de  $S_r(X)$ . Considere  $i = 0, 1, \dots, r$ , definimos a **i-ésima face** do  $r$ -simplexo singular  $\sigma : \Delta_r \longrightarrow X$ , como o  $(r-1)$ -simplexo singular  $\partial_i \sigma : \Delta_{r-1} \longrightarrow X$ , definido por:

$$\partial_i \sigma(t_0, t_1, \dots, t_{r-1}) := \sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{r-1}).$$

Assim, podemos definir o operador **bordo**

$$\partial : S_r(X) \longrightarrow S_{r-1}(X),$$

que é o homomorfismo definido por:

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^r (-1)^i \partial_i \sigma,$$

para todo  $r$ -simplexo singular  $\sigma : \Delta_r \longrightarrow X$ . Podemos provar que  $\partial \circ \partial = 0$ , logo,

$$S(X) : \dots \longrightarrow S_r(X) \xrightarrow{\partial} S_{r-1}(X) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X),$$

é um complexo de cadeias, conhecido como **complexo singular** do espaço  $X$  e os grupos de homologia  $H_r(X)$  são chamados de **grupos de homologia singular** de  $X$ .

Dado uma aplicação contínua  $f : X \longrightarrow Y$ , para cada  $r \geq 0$ , ela induz um homomorfismo  $f : S_r(X) \longrightarrow S_r(Y)$ , definido por  $f(\sigma) = f \circ \sigma : \Delta_r \longrightarrow Y$ , para todo  $r$ -simplexo singular  $\sigma : \Delta_r \longrightarrow X$ . Temos que  $\partial f(\sigma) = f(\partial \sigma)$ , logo, fica definido o morfismo  $f : S(X) \longrightarrow S(Y)$ , donde, para cada  $r \geq 0$  fica definido o homomorfismo:

$$f_* : H_r(X) \longrightarrow H_r(Y),$$

que chamamos de **homomorfismo induzido** por  $f$ . Seja  $g : Y \longrightarrow Z$  outra aplicação contínua, então  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_r(X) \longrightarrow H_r(Z)$ . Ainda se  $id : X \longrightarrow X$  é a identidade então  $(id)_* : H_r(X) \longrightarrow H_r(X)$  é também a identidade. Assim, se  $f : X \longrightarrow Y$  é um homeomorfismo então  $f_* : H_r(X) \longrightarrow H_r(Y)$  é um isomorfismo.

Considere  $Y \subset X$  um subespaço, logo, os  $R$ -módulos  $S_r(Y)$  munidos do operador bordo  $\partial : S_r(Y) \longrightarrow S_{r-1}(Y)$ , formam um subcomplexo  $S(Y) \subset S(X)$ . Podemos considerar os grupos de homologia do complexo quociente que é formado pelos  $R$ -módulos  $\frac{S_r(X)}{S_r(Y)}$  munidos do operador:

$$\bar{\partial} : \frac{S_r(X)}{S_r(Y)} \longrightarrow \frac{S_{r-1}(X)}{S_{r-1}(Y)},$$

que indicaremos por  $\mathbf{H}_r(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  e serão chamados de **grupos de homologia relativa** de  $X$  mod  $Y$ . Sejam  $Y \subset X$ ,  $Y' \subset X'$  e uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow X'$  tal que  $f(Y) \subset Y'$ , esta aplicação  $f$  é chamada de **aplicação contínua do par**  $(X, Y)$  no par  $(X', Y')$  e vamos denota-la por  $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ . Assim, o morfismo  $f : S(X) \rightarrow S(X')$  é tal que  $f(S(Y)) \subset S(Y')$  e passando ao quociente fica bem definido o morfismo  $f : \frac{S(X)}{S(Y)} \rightarrow \frac{S(X')}{S(Y')}$ , logo, para cada  $r \geq 0$ , temos o homomorfismo induzido:

$$f_* : H_r(X, Y) \rightarrow H_r(X', Y').$$

A sequência exata curta

$$0 \longrightarrow S_r(Y) \xrightarrow{i} S_r(X) \xrightarrow{j} S_r(X)/S_r(Y) \longrightarrow 0,$$

dá origem à sequência exata longa de homologia singular do par  $(X, Y)$ :

$$\dots \longrightarrow H_r(Y) \xrightarrow{i_*} H_r(X) \xrightarrow{j_*} H_r(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{r-1}(Y) \longrightarrow \dots$$

**Exemplo 4. (Homologia de dimensão zero)** Note que, um 0-simplexo no espaço topológico  $X$  é apenas um ponto  $p \in X$ . Uma vez que, não existe um (-1)-simplexo, temos  $\partial p = 0$ . Donde, toda 0-cadeia é um ciclo. Definimos um homomorfismo  $In : S_0(X) \rightarrow A$  tal que  $In(p) = 1, \forall p \in X$ , logo,  $In(x) = \sum_p x_p p$ , quando  $x = \sum_p x_p p$ . Quando a 0-cadeia  $x = \sum_p x_p p$  é um bordo, isto é,  $x = \partial y$ , onde  $y = \sum_\sigma y_\sigma \sigma$ , e cada  $\sigma : \Delta_1 \rightarrow X$  é um caminho veja a Figura 5, pois  $\Delta_1 = \langle e_0, e_1 \rangle$ , com  $\sigma(e_0) = p_\sigma$  e  $\sigma(e_1) = q_\sigma$ ,

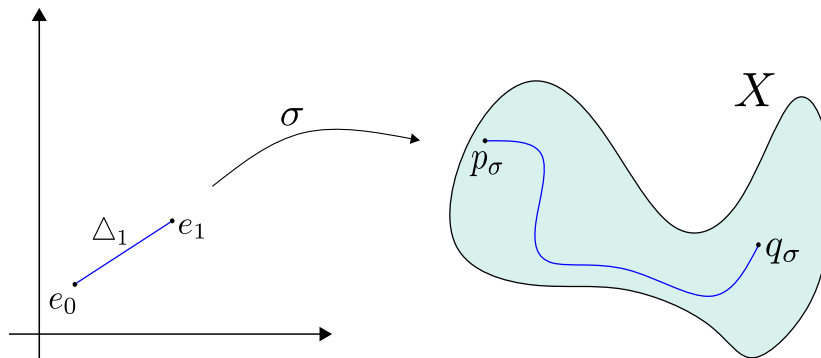


Figura 5 – Caminho  $\sigma$

logo,  $\partial \sigma = q_\sigma - p_\sigma$  e

$$\begin{aligned} In(X) &= In(\partial y) = In\left(\sum_\sigma y_\sigma \partial \sigma\right) \\ &= In\left(\sum_\sigma y_\sigma (q_\sigma - p_\sigma)\right) \\ &= \sum_\sigma y_\sigma In(q_\sigma - p_\sigma) \\ &= \sum_\sigma y_\sigma (1 - 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, se  $x$  é bordo, então  $In(x) = 0$ . Quando  $X$  é conexo por caminhos, vale a volta, isto é, se  $In(x) = 0$ , então  $x$  é bordo.

Se  $In(x) = 0$ , onde  $x = \sum_{i=1}^k x_i p_i$ , então  $x = \partial y$ , onde  $y \in S_1(X)$ . De fato, fixe um ponto  $a \in X$ , tomando caminhos  $\sigma_1, \dots, \sigma_k : \Delta_1 \rightarrow X$ , tais que  $\sigma_i(e_0) = a$  e  $\sigma_i(e_1) = p_i$  ( $X$  é conexo por caminhos). Defina a 1-cadeia  $y = \sum_{i=1}^k x_i \sigma_i$ , temos:

$$\begin{aligned} \partial y &= \sum_{i=1}^k x_i (p_i - a) \\ &= \sum_{i=1}^k x_i p_i - \left( \sum_{i=1}^k x_i \right) a \\ &= x. \end{aligned}$$

Com isso,  $\text{Ker } In = B_0(X)$ . Poderíamos provar que duas 0-cadeias em  $X$  são homologas se, e só, se têm o mesmo índice. Uma vez que,  $S_0(X) = Z_0(X)$ , então  $In$  induz um isomorfismo  $H_0(X) \cong R$  quando  $X$  é conexo por caminhos. Por exemplo, para  $n \geq 1$ , temos que  $S^n$  é conexa por caminhos, logo,  $H_0(S^n) \cong R$ , para todo  $n \geq 1$ .

Se  $X$  não é conexo por caminhos, podemos reduzir ao exemplo conexo, basta notar que, para todo  $r \geq 0$ , tem-se:

$$H_r(X) = \bigoplus_{\lambda \in L} H_r(X_\lambda),$$

onde  $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$  é a família das componentes conexas por caminhos do espaço  $X$ .

Uma aplicação direta desta observação é que, para  $r \geq 0$ :

$$H_r(S^0) \cong H_r(\{-1\}) \oplus H_r(\{1\}),$$

e pelo próximo exemplo teremos:

$$H_r(S^0) = \begin{cases} R \oplus R, & \text{se } r = 0; \\ 0, & \text{se } r > 0. \end{cases}$$

**Exemplo 5. (A homologia singular de um ponto)** Se o espaço  $X$  é composto de apenas um ponto  $p$ , então todo  $r$ -simplexo é constante, igual a  $p$ . Donde,  $S_r(X) = R \cdot p$ ,  $\forall r \geq 0$ . Ainda,

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i = \begin{cases} 0, & \text{se } r = 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{se } r = 2n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Logo, o operador bordo  $\partial S_r(X) \rightarrow S_{r-1}(X)$  é nulo para  $r$  ímpar e igual a identidade se  $r > 0$  é par.

Assim, se  $X = \{p\}$ , o complexo singular de  $X$  é:

$$\dots \longrightarrow R_{2k} \xrightarrow{id} R_{2k-1} \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{id} R_1 \xrightarrow{0} R_0 \longrightarrow 0,$$

onde  $R_r = R$ ,  $\forall r \geq 0$ , logo,  $H_r(X) = 0$  se  $r > 0$  e  $H_0(X) = R$ .

**Proposição 2.** Considere  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicações contínuas entre espaços topológicos. Se  $f$  e  $g$  são homotópicas<sup>1</sup>, então:

$$f_* = g_* : H_r(X) \longrightarrow H_r(Y), \forall r > 0.$$

Portanto, dois espaços topológicos com o mesmo tipo de homotopia têm grupos de homologia singular isomorfos em todas as dimensões. Em particular se  $X$  é um espaço contrátil<sup>2</sup>, pelo exemplo 5,

<sup>1</sup> Para ver mais sobre homotopia de funções veja o livro do Elon: Grupo fundamental e Espaços de Recobrimento.

<sup>2</sup> Tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.

temos que  $H_r(X) = 0, \forall r > 0$ .

Para obter exemplos de grupos de homologia singular, vamos recorrer a sequência de Mayer-Vietoris. Tentando estabelecê-la, tomemos abertos  $U, V$  tais que  $X = U \cup V$ . Sejam os homomorfismo:

$$\begin{aligned} i : S_r(U \cap V) &\longrightarrow S_r(U) \oplus S_r(V) \\ x &\longmapsto i(x) := (x, x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j : S_r(U) \oplus S_r(V) &\longrightarrow S_r(X) \\ (x, y) &\longmapsto j(x, y) := x - y, \end{aligned}$$

com isso, teremos a sequência curta:

$$0 \longrightarrow S_r(U \cap V) \xrightarrow{i} S_r(U) \oplus S_r(V) \xrightarrow{j} S_r(X) \longrightarrow 0,$$

que não é exata, pois  $j$  não é sobrejetivo. Por um lado,  $X = U \cup V$ , por outro lado, nem toda cadeia em  $S_r(X)$  pode ser escrita como soma de uma cadeia em  $U$  com uma cadeia em  $V$ . Mas, podemos superar isto com a subdivisão baricêntrica. Para saber mais consulte o livro (LIMA, 2009). Com isto conseguimos o seguinte resultado expresso no Teorema 4.

Considere  $\alpha$  uma cobertura do espaço  $X$  tal que o interior dos seus conjuntos ainda cobrem  $X$ . Um simplexo singular  $\sigma : \Delta_r \longrightarrow X$  é dito  $\alpha$ -pequeno se a sua imagem  $\sigma(\Delta_r)$  está contida em algum conjunto da cobertura  $\alpha$ . Vamos denotar por  $S_r^\alpha(X)$  o submódulo de  $S_r(X)$  formado pelas cadeias que são  $\alpha$ -pequenas, ou seja, são combinações lineares de  $r$ -simplexos  $\alpha$ -pequenos. Segue diretamente da definição de operador bordo que  $\partial(S_r^\alpha(X)) \subset S_{r-1}^\alpha(X)$ , logo, os módulos  $S_r^\alpha(X)$  munidos do operador bordo formam um subcomplexo  $S^\alpha(X) \subset S(X)$ , e seus grupos de homologia vamos denotar por  $H_r^\alpha(X)$ . Com esta notação temos o seguinte teorema:

**Teorema 4.** Se  $\alpha$  é uma cobertura qualquer de  $X$  tal que o interior de seus conjuntos ainda cobrem  $X$  então  $H_r^\alpha(X) \cong H_r(X), \forall r \geq 0$ .

Enfim, podemos estabelecer a sequência de Mayer-Vietoris para homologia singular. Considere  $U, V \subset X$  tais que  $X \subset \text{int } U \cup \text{int } V$ , onde  $\text{int}$  denota o interior de um conjunto. Aqui a cobertura  $\alpha$  é  $\{U, V\}$ , assim, temos a sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow S_r^\alpha(U \cap V) \xrightarrow{i} S_r^\alpha(U) \oplus S_r^\alpha(V) \xrightarrow{j} S_r^\alpha(X) \longrightarrow 0,$$

onde  $i(x) = (x, x)$  e  $j(x, y) = x - y$ . Uma vez que,  $H^\alpha(X) \cong H(X)$ , obtemos a sequência de Mayer-Vietoris para homologia singular:

$$\dots \longrightarrow H_r(U \cap V) \xrightarrow{i_*} H_r(U) \oplus H_r(V) \xrightarrow{j_*} H_r(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{r-1}(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

para toda classe  $[z] \in H_r(X)$ , definimos  $\partial_*[z]$  dá seguinte maneira: uma vez que  $z = x - y$ , onde  $x \in S_r(U)$  e  $y \in S_r(V)$ , logo,  $0 = \partial z = \partial x - \partial y$  donde  $\partial x = \partial y$ , então  $\partial_*[z] = [\partial x]$ . Como,  $\partial x \in S_{r-1}(U)$  e  $\partial y \in S_{r-1}(V)$ , donde,  $\partial x = \partial y \in S_{r-1}(U) \cap S_{r-1}(V) = S_{r-1}(U \cap V)$ .

Vamos terminar esta seção com um belo exemplo que é feito utilizando a sequência de Mayer-Vietoris.



**Exemplo 6.** Uma primeira aplicação da sequência de Mayer-Vietoris, vai ser calcular a **homologia singular da esfera  $S^n$** . Antes de começarmos a calcular, lembremos que já calculamos a homologia singular de  $S^0$  e os grupos de dimensão 0 para  $S^n$  com  $n \geq 1$  no exemplo 4. Agora, vamos calcular os grupos de  $S^1$ : considere  $U$  e  $V$  arcos abertos tais que  $S^1 = U \cup V$  e  $U \cap V$  é a união de dois arcos disjuntos, logo, tem o mesmo tipo de homotopia de um par de pontos. Na sequência de Mayer-Vietoris desta decomposição, vamos destacar:

$$H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{j_*} H_1(S^1) \xrightarrow{\partial_*} H_0(U \cap V) \xrightarrow{i_*} H_0(U) \oplus H_0(V).$$

Uma vez que,  $U$  e  $V$  tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto, então  $H_1(U) = H_1(V) = 0$ , logo,  $\partial_*$  é injetivo, isto é, um isomorfismo de  $H_1(S^1)$  sobre sua imagem, lembrando  $Im \partial_* = Ker i_*$ .

Toda 0-cadeia em  $U \cap V$  é da forma  $z = x + y$ , onde  $x$  e  $y$  são 0-cadeias em cada uma das duas componentes conexas de  $U \cap V$ , e a classe  $[z]$  é caracterizada pelos índices  $\alpha = In(x)$  e  $\beta = In(y)$ , que pertencem a  $R$ . Assim, escrevemos  $[z] = (\alpha, \beta)$ . O homomorfismo  $i_*$  é definido por

$$i_*(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta),$$

logo,  $Ker i_*$  é formado pelos pares  $(\alpha, -\alpha)$ , onde  $\alpha \in R$ , donde,  $Ker i_* \cong R$ . Como

$$H_1(S^1) \cong Im \partial_* \cong Ker i_* \cong R.$$

Donde,  $H_1(S^1) \cong R$ . Considere  $r > 1$  e destacamos na sequência de Mayer-Vietoris o seguinte trecho:

$$H_r(U) \oplus H_r(V) \xrightarrow{j_*} H_r(S^1) \xrightarrow{\partial_*} H_{r-1}(U \cap V),$$

pela homologia do ponto, teremos:

$$0 \longrightarrow H_r(S^1) \longrightarrow 0.$$

Assim,

$$H_r(S^1) = 0, \text{ quando } r > 1.$$

Vamos ao caso geral, fixando  $\varepsilon \in (0, 1)$  teremos a decomposição  $S^n = U \cup V$ , onde:

$$U = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n; x_{n+1} > -\varepsilon\}$$

$$V = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n; x_{n+1} < \varepsilon\}.$$

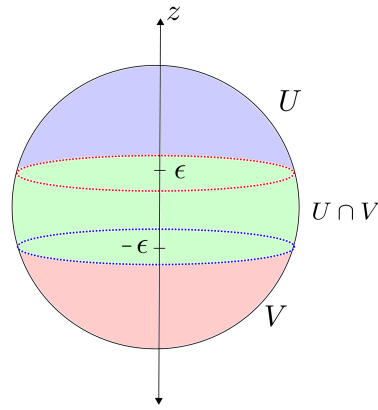
Para entender melhor vamos ver o caso  $n = 2$ , temos  $S^2 = U \cup V$ , onde

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2; x_3 > -\varepsilon\},$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2; x_3 < \varepsilon\}.$$

Donde,

$$U \cap V = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2; -\varepsilon < x_3 < \varepsilon\}.$$

Figura 6 –  $S^2$ 

$U \cap V$  tem o mesmo tipo de homotopia de  $S^1$  veja a figura 6. O mesmo acontece para um  $n$  qualquer,  $U \cap V$  tem o mesmo tipo de homotopia de  $S^{n-1}$ . Na sequência de Mayer-Vietoris relativa a esta decomposição vamos destacar o trecho:

$$H_r(U) \oplus H_r(V) \longrightarrow H_r(S^n) \longrightarrow H_{r-1}(U \cap V) \longrightarrow H_{r-1}(U) \oplus H_{r-1}(V).$$

Como  $U$  e  $V$  tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto teremos, para  $r > 1$  e  $n > 1$ :

$$0 \longrightarrow H_r(S^n) \longrightarrow H_{r-1}(U \cap V) \longrightarrow 0$$

Neste caso,  $H_r(S^n) \cong H_{r-1}(S^{n-1})$ . Indutivamente,  $H_r(S^n) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{R}$ .

Se  $r > n$ , digamos  $r = n + k$ , então

$$H_r(S^n) \cong H_{k+1}(S^1) = 0.$$

Enfim, se  $r < n$ , então  $H_r(S^n) \cong H_1(S^{n-r+1})$ . Se mostrarmos que  $H_1(S^m) = 0$ , para  $m \geq 2$ , teremos  $H^r(S^n) = 0$ . Temos isso pela sequência exata

$$0 \longrightarrow H_1(S^m) \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{R} \xrightarrow{i_*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$

pois,

$$0 = H_0(S^{m-1}) \text{ e } \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = H_0(U) \oplus H_0(V).$$

Note que,  $i_*(\alpha) = (\alpha, \alpha) \Rightarrow \text{Ker } i_* = \{0\}$ . Donde,

$$\begin{aligned} \text{Im } \partial_* &= \text{Ker } i_* = \{0\}, \\ H_1(S^m) &\cong \text{Im } \partial_* = \{0\}. \end{aligned}$$

Resumindo, para  $n \geq 1$  temos:

$$H_r(S^n) = \begin{cases} 0, & 0 < r < n \text{ ou } r > n; \\ \mathbb{R}, & r = n \text{ e } r = 0. \end{cases}$$

e para  $n = 0$  temos:

$$H_r(S^0) = \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & \text{se } r = 0; \\ 0, & \text{se } r > 0. \end{cases}$$

### 1.1.4 Homologia Singular Relativa

Considere um espaço topológico  $X$  e  $A \subset X$ , iremos nos referir a esta combinação como um par de espaços topológicos e iremos denotar por  $(X, A)$ . Nosso objetivo é definir um complexo de cadeias  $S_*(X, A, R)$  e obter uma sequência exata longa:

$$\cdots \longrightarrow H_p(A; R) \longrightarrow H_p(X; R) \longrightarrow H_p(X, A; R) \longrightarrow H_{p-1}(A; R) \longrightarrow \cdots$$

Com este objetivo em mente, considere os complexos de cadeias:

$$\begin{aligned} S_*(X; R) &= \{S_p(X; R); \partial_p\}_{p \geq 0} \\ S_*(A; R) &= \{S_p(A; R); \partial'_p\}_{p \geq 0}, \text{ onde } \partial'_p = \partial_p|_{S_p(A; R)}. \end{aligned}$$

Uma vez que,  $S_p(A; R) \subset S_p(X; R)$ , podemos considerar o  $R$ -módulo quociente:

$$S_p(X, A; R) := \frac{S_p(X; R)}{S_p(A; R)}, p \geq 0.$$

Como  $\partial_p(S_p(A; R)) \subset S_{p-1}(A; R)$ , existe um  $R$ -homomorfismo

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_p : S_p(X, A; R) &\longrightarrow S_{p-1}(X, A; R) \\ c_p + S_p(A; R) &\longmapsto \overline{\partial}_p(c_p + S_p(A; R)) := \partial_p(c_p) + S_{p-1}(A; R) \end{aligned}$$

que satisfaz  $\overline{\partial}_p \circ \overline{\partial}_{p+1} = 0$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_p \circ \overline{\partial}_{p+1}(C_{p+1} + S_{p+1}(A; R)) &= \overline{\partial}_p(\partial_{p+1}(C_{p+1}) + S_p(A; R)) \\ &= \partial_p \circ \partial_{p+1}(C_{p+1}) + S_{p-1}(A; R) \\ &= S_{p-1}(A). \end{aligned}$$

Assim, temos o complexo de cadeias:

$$S_*(X, A; R) = \{S_p(X, A; R), \overline{\partial}_p\}_{p \geq 0}.$$

O  $p$ -ésimo  $R$ -módulo de homologia do complexo de cadeias  $S_*(X, A; R)$  será denotado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p(\mathbf{X}, \mathbf{A}; \mathbf{R}) &:= H_p(S_*(X, A; R)) \\ &= \frac{Z_p(S_*(X, A; R))}{B_p(S_*(X, A; R))} \\ &= \frac{\text{Ker}(\overline{\partial}_p)}{\text{Im}(\overline{\partial}_p)}, \end{aligned}$$

os elementos de  $\text{Ker}(\overline{\partial}_p)$  são chamados de **ciclos relativos**, os elementos de  $\text{Im}(\overline{\partial}_p)$  são chamados de **bordos relativos** e o  $R$ -módulo é chamado de  $R$ -módulo de **homologia singular relativo** do par  $(X, A)$  e  $H_*(X, A; R) = \{H_p(X, A; R)\}_{p \geq 0}$  é a **homologia singular relativa** do par  $(X, A)$ .

Existe uma inclusão natural  $i_\# : S_p(A; R) \longrightarrow S_p(X; R)$ , para cada,  $\sigma : \Delta_p \longrightarrow A$  definimos  $i_\#(\sigma) := i \circ \sigma : \Delta_p \longrightarrow X$ , que é injetora, pois  $i : A \longrightarrow X$  é injetora. Existe, também, uma projeção natural  $j_\# : S_p(X; R) \longrightarrow S_p(X, A; R)$ , para cada,  $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$  definimos  $j_\#(\sigma) := \sigma + S_p(A; R)$  que é sobrejetiva,

pois  $j : (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$ . Assim, obtemos uma seqüência exata curta de complexos de cadeias e aplicações de cadeias, para cada  $p > 0$  temos:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_{p+1}(A;R) & \longrightarrow & S_{p+1}(X;R) & \longrightarrow & S_{p+1}(X,A;R) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial'_{p+1} & & \downarrow \partial_{p+1} & & \downarrow \bar{\partial}_{p+1} \\ 0 & \longrightarrow & S_p(A;R) & \longrightarrow & S_p(X;R) & \longrightarrow & S_p(X,A;R) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial'_p & & \downarrow \partial_p & & \downarrow \bar{\partial}_p \\ 0 & \longrightarrow & S_{p-1}(A;R) & \longrightarrow & S_{p-1}(X;R) & \longrightarrow & S_{p-1}(X,A;R) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Pela construção do homomorfismo conectante veja o Teorema 1, existe uma seqüência exata longa, chamada de seqüência exata longa do par  $(X, A)$ :

$$\dots \longrightarrow H_p(A;R) \xrightarrow{i_*} H_p(X;R) \xrightarrow{j_*} H_p(X,A;R) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(A;R) \longrightarrow \dots$$

vale ressaltar que nem sempre o quociente de  $R$ -módulos livres é um  $R$ -módulo livre, neste caso,  $S_p(X, A; R)$  é um  $R$ -módulo livre e tem como base os elementos da forma  $\sigma + S_p(A; R)$ , onde  $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$  é um  $p$ -simplexo singular de  $X$  cuja imagem não está inteiramente contida em  $A$ . Uma vez que, se  $\sigma(\Delta_p) \subset A$ , implica em  $\sigma + S_p(A; R) = S_p(A; R)$  que é a classe nula. Assim, uma  $p$ -cadeia em  $S_p(X, A; R)$  é da seguinte forma:

$$c_p + S_p(A; R) = \alpha_1 \sigma_1 + \dots + \alpha_r \sigma_r + S_p(A; R),$$

onde cada  $\sigma_i : \Delta_p \longrightarrow X$  não tem imagem inteiramente contida em  $A$ . Considere  $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  uma aplicação de pares. Seja

$$f_{\#} : S_p(X; R) \longrightarrow S_p(Y; R),$$

definida por

$$f_{\#} \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i \sigma_i \right) := \sum_{i=1}^r (f \circ \sigma_i),$$

onde  $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$  é um  $p$ -simplexo singular de  $X$ . Note que, se  $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$ ;  $\sigma(\Delta_p) \subset A$ , então  $\sigma \in S_p(A; R)$ . Uma vez que,  $f(A) \subset B$ , temos

$$\begin{array}{ccc} \Delta_p & \xrightarrow{\sigma} & A \xrightarrow{f} B, \\ & \searrow & \nearrow \end{array}$$

$f \circ \sigma$  é um  $p$ -simplexo singular de  $B$ , logo,  $f \circ \sigma \in S_p(B; R)$ . Assim,  $f_{\#}$  induz um  $R$ -homomorfismo:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\#} : S_p(X, A; R) &\longrightarrow S_p(Y, B; R) \\ c_p + S_p(A; R) &\longmapsto f_{\#}(c_p) + S_p(B; R) \end{aligned}$$

$\bar{f}_{\#}$  é um morfismo, isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} S_{p+1}(X, A; R) & \xrightarrow{\bar{f}_{\#}} & S_{p+1}(Y, B; R) \\ \downarrow \bar{\partial}_{p+1} & & \downarrow \bar{\partial}_{p+1} \\ S_p(X, A; R) & \xrightarrow{\bar{f}_{\#}} & S_p(Y, B; R) \end{array}$$

Se  $z_p + S_p(A; R)$  é um ciclo relativo em  $Z_p(X, A; R)$ , então  $f_{\#}(z_p) + S_p(B; R)$  é um ciclo relativo em  $Z_p(Y, B; R)$ . De fato,

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_p(f_{\#}(z_p) + S_p(B; R)) &= \overline{\partial}_p \circ \overline{f_{\#}}(z_p + S_p(A; R)) \\ &= \overline{f_{\#}} \circ \overline{\partial}_p(z_p + S_p(A; R)) \\ &= \overline{f_{\#}}(S_{p-1}(A; R)) \\ &= S_{p-1}(B; R). \end{aligned}$$

Assim,  $\overline{f_{\#}}$  induz um  $R$ -homomorfismo

$$\begin{aligned} f_* : H_p(X, A; R) &\longrightarrow H_p(Y, B; R) \\ (z_p + S_p(A; R)) + B_p(X, A; R) &\longmapsto (f_{\#}(z_p) + S_p(B; R)) + B_p(Y, B; R). \end{aligned}$$

Esse homomorfismo induzido é natural no seguinte sentido. Considere  $f_1 : a \longrightarrow B$ , obtida por restrição da  $f$ . Cada quadrado do diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_p(A; R) & \xrightarrow{i_*} & H_p(X; R) & \xrightarrow{j_*} & H_p(X, A; R) & \xrightarrow{\Delta} & H_{p-1}(A; R) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{1*} & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_{1*} & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_p(B; R) & \xrightarrow{i'_*} & H_p(Y; R) & \xrightarrow{j'_*} & H_p(Y, B; R) & \xrightarrow{\Delta'} & H_{p-1}(B; R) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Caracterização de uma classe de homologia em  $H_p(X, A; R)$ :

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_p : S_p(X, A; R) &\longrightarrow S_{p-1}(X, A; R) \\ c_p + S_p(A; R) &\longmapsto \partial_p(c_p) + S_{p-1}(A; R). \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\overline{\partial}_p) &= Z_p(X, A; R) \\ &= \{c_p + S_p(A; R); \overline{\partial}_p(c_p + S_p(A; R)) = \partial_p(c_p) + S_{p-1}(A; R) = S_{p-1}(A; R)\} \\ &= \{c_p + S_p(A; R); c_p \in S_p(X; R) \text{ e } \partial_p(c_p) \in S_{p-1}(A; R)\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$[c_p] = c_p + S_p(A; R),$$

representará a classe de homologia em  $H_p(X, A; R)$  se, e só se,

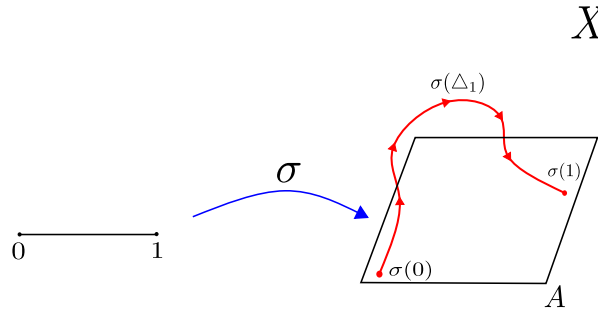
$$\partial_p(c_p) \in S_{p-1}(A; R),$$

com  $c_p \in S_p(X; R)$ . Vamos chamar de **classe de homologia singular relativa** e denotar por:

$$[c_p] + B_p(X, A; R) = \{c_p + S_p(A; R)\} + B_p(X, A; R) \in H_p(X, A; R)$$

satisfazendo  $\partial_p(c_p) \in S_{p-1}(A; R)$ , com  $c_p \in S_p(X; R)$ .

**Exemplo 7.** Considere  $c_1 + S_1(A; R) \in Z_1(X, A; R)$  um 1-ciclo relativo, onde  $c_1 = 1 \cdot \sigma$ , onde  $\sigma$  é um 1-simplexo singular de  $X$ , ou seja,  $\sigma$  é um caminho em  $X$  e:  $\partial(c_1) = \partial(1) = \partial(1) - \partial(0) \in S_0(A; R)$ .

Figura 7 – Um caminho em  $X$ 

**Teorema 5.** Se  $X$  é conexo por caminhos e  $A \neq \emptyset$ , então  $H_0(X, A; R) \cong \{0\}$ .

Este último teorema é útil para calcular alguns exemplos, como veremos a seguir:

**Exemplo 8.**  $H_p(D^2, S^1, R)$ : Uma vez que,  $D^2$  é conexo por caminhos e  $S^1 \neq \emptyset$ , pelo último Teorema, temos :

$$H_0(D^2, S^1; R) = \{0\}.$$

Para  $p = 1$ , vamos considerar o seguinte trecho da sequência exata:

$$\dots \longrightarrow H_1(D^2; R) \xrightarrow{j_*} H_1(D^2, S^1; R) \xrightarrow{\Delta} H_0(S^1; R) \xrightarrow{i_*} H_0(D^2; R),$$

uma vez que  $D^2$  é contrátil temos  $H_1(D^2; R) = 0$  e  $i_* : H_0(S^1; R) \longrightarrow H_0(D^2; R)$  é injetora temos  $\ker i_* = \{0\}$ , pela exatidão da sequência,  $0 = \ker i_* = \text{Im } \Delta$ . Assim, temos a sequência exata:

$$0 \longrightarrow H_1(D^2, S^1; R) \longrightarrow 0$$

Donde,

$$H_1(D^2, S^1, R) = \{0\}.$$

Enfim, para o caso  $p > 1$  no trecho da sequência exata longa:

$$\dots \quad H_p(D^2; R) \longrightarrow H_p(D^2, S^1; R) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(S^1; R) \longrightarrow H_{p-1}(D^2; R) \longrightarrow \dots$$

Temos que  $\Delta$  é um  $R$ -isomorfismo pois  $H_p(D^2; R) = H_{p-1}(D^2; R)$ , logo, para  $p > 1$ :

$$H_p(D^2, S^1; R) \cong H_{p-1}(S^1, R) = \begin{cases} R, & p = 1, 2; \\ 0, & \text{qualquer outro caso.} \end{cases}$$

Portanto, para todo  $p \geq 0$  temos:

$$H_p(D^2, S^1; R) = \begin{cases} R, & p = 1, 2; \\ 0, & \text{qualquer outro caso.} \end{cases}$$

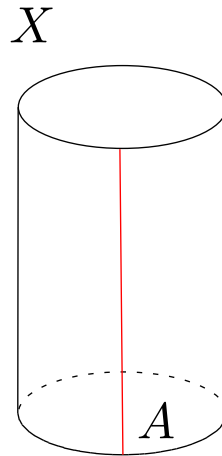


Figura 8 – Cilindro  $X$  e subespaço  $A$

**Exemplo 9.** Considere  $(X, A)$ , onde  $X$  é um cilindro e  $A \subset X$  é um segmento de reta como na figura 8. Vamos mostrar que:

$$H_p(X, A; R) = \begin{cases} R, & p = 1; \\ 0, & \text{qualquer outro caso.} \end{cases}$$

Uma vez que,  $X$  é conexo por caminhos e  $A \neq \emptyset$ , então  $H_0(X, A; R) = \{0\}$ . Para  $p = 1$ , vamos considerar o seguinte trecho da sequência exata longa:

$$\dots \longrightarrow H_1(A; R) \xrightarrow{i_*} H_1(X; R) \xrightarrow{j_*} H_1(X, A; R) \xrightarrow{\Delta} H_0(A; R) \xrightarrow{i_*} H_0(X; R),$$

como  $A$  é contrátil, então  $H_1(A; R) = \{0\}$ . Além disso, como  $X$  e  $A$  são conexos por caminhos, então  $R \cong H_0(A; R) \cong H_0(X; R)$ , logo,  $i_* : H_0(A; R) \rightarrow H_0(X; R)$  é isomorfismo, isto é,  $\{0\} = \text{Ker } i_*$ . Pela exatidão da sequência temos  $\text{Im } \Delta = \text{Ker } i_* = \{0\}$ . Assim,

$$0 \longrightarrow H_1(X; R) \xrightarrow{j_*} H_1(X, A; R) \longrightarrow 0$$

É uma sequência exata, uma vez que,  $X$  é homotópico a  $S^1$  temos

$$H_1(X, A; R) \cong H_1(X; R) \cong R.$$

Enfim, para o caso em que  $p > 1$ , consideramos o seguinte trecho da sequência exata longa:

$$H_p(A; R) \longrightarrow H_p(X; R) \longrightarrow H_p(X, A; R) \longrightarrow H_{p-1}(A; R) \longrightarrow H_{p-1}(X; R)$$

como  $X$  é homotópico a  $S^1$ , então  $H_p(X; R) \cong 0$  e  $H_1(A; R) \cong 0$ , pois  $A$  é contrátil, donde

$$0 \longrightarrow H_p(X, A; R) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata, logo,  $H_p(X, A; R) \cong 0$ .

Portanto,

$$H_p(X, A; R) = \begin{cases} R, & p = 1; \\ 0, & \text{qualquer outro caso.} \end{cases}$$

Sejam  $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  aplicações de pares. Diremos que  $f$  e  $g$  são **homotópicas como aplicações de pares**  $f \cong g$  se existe uma aplicação de pares

$$F : (X \times I, A \times I) \longrightarrow (Y, B)$$

tal que:

1.  $F(x, 0) = f(x), \forall x \in X;$
2.  $F(x, 1) = g(x), \forall x \in X.$

$F$  é uma **homotopia de pares** entre  $f$  e  $g$ . Diremos que  $(X, A)$  tem o **mesmo tipo de homotopia** de  $(Y, B)$  e escrevemos  $(X, A) \cong (Y, B)$  quando existem aplicações de pares

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B) \quad e \quad g : (Y, B) \longrightarrow (X, A)$$

tais que

1.  $g \circ f \cong Id_{(X, A)};$
2.  $f \circ g \cong Id_{(Y, B)}.$

As homotopias acima são no sentido de aplicações de pares,  $f$  é uma **equivalência homotópica entre pares**.

**Teorema 6. (da invariância homotópica para pares de espaços)** Considere  $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  aplicações de pares homotópicas, então  $f_* = g_* : H_p(X, A; R) \longrightarrow H_p(Y, B; R)$ .

**Corolário 1.** Se  $(X, A) \cong (Y, B)$ , então  $H_p(X, A; R) \cong H_p(Y, B; R), \forall p \geq 0$ .

Às vezes, é útil usar a contra positiva do corolário para mostrar quando dois pares de espaços não tem o mesmo tipo de homotopia. Considere o par  $(X, A)$  e a inclusão  $i : A \longrightarrow X$ . Suponha que,  $A$  seja um **retrato** de  $X$ , isto é, existe uma aplicação contínua  $M : X \longrightarrow A$ ;

$$M \circ i = M|_A = Id_A.$$

Diremos que  $A$  é um **retrato por deformação** de  $X$  se a composição  $i \circ M \cong Id_X$ .

**Observações:**

1. Se  $A$  for um retrato de  $X$ , temos:

$$(M \circ i)_* = M_* \circ i_* = Id_{H_p(A; R)},$$

logo,  $i_*$  tem inversa à esquerda, donde,  $i_*$  é injetora  $\forall p \geq 0$ .

2. Se  $A$  for um retrato por deformação de  $X$ , então a inclusão  $i : A \longrightarrow X$  é uma equivalência homotópica, logo, induz o isomorfismo

$$i_* : H_p(A; R) \longrightarrow H_p(X; R), \quad \forall p \geq 0.$$



**Teorema 7.** Se  $A$  é um retrato de  $X$ , então

$$H_p(X;R) \cong H_p(A;R) \oplus H_p(X,A;R).$$

Em particular, se  $A$  for um retrato forte de deformação de  $X$  teremos  $H_p(X;R) \cong H_p(A;R)$  e, neste caso, pelo Teorema 7 temos que  $H_p(X,A;R) \cong \{0\}$ , para todo  $p \geq 0$ .

### 1.1.5 Homologia Singular Reduzida

Nosso objetivo é definir os  $R$ -módulos de homologia singular reduzidos em um espaço topológico  $X$ , que será:

$$\tilde{H}_p(X;R) = \begin{cases} H_p(X;R), & \forall p \geq 1; \\ H_0(X, x_0;R). \end{cases}$$

**Proposição 3.** Considere a decomposição  $X = \cup_{\lambda \in L} X_\lambda$ , onde cada  $X_\lambda$  é componente conexa por caminhos de  $X$  e  $A \subset X$ . Então

$$H_p(X,A;R) \cong \bigoplus_{\lambda \in L} H_p(X_\lambda, A \cap X_\lambda;R).$$

Um caso particular da proposição 3 anterior é quando  $A = \{x_0\} \subset X$ , teremos:

$$H_p(X, \{x_0\};R) \cong \bigoplus_{\lambda \in L} H_p(X_\lambda, \{x_0\} \cap X_\lambda;R),$$

onde  $X = \cup_{\lambda \in L} X_\lambda$  e os  $X'_\lambda$ s são as componentes conexas por caminhos de  $X$ . Uma vez que,  $x_0 \in X_{\lambda_0}$ , para um único  $\lambda_0 \in L$ , teremos:

$$\{x_0\} \cap X_\lambda = \begin{cases} \emptyset, & \lambda \neq \lambda_0; \\ \{x_0\}, & \lambda = \lambda_0. \end{cases}$$

Donde,

$$H_p(X, \{x_0\};R) \cong \bigoplus_{\lambda \in L - \{\lambda_0\}} H_p(X_\lambda;R) \oplus H_p(X_{\lambda_0}, \{x_0\};R), \quad \forall p \geq 0.$$

Como  $X_{\lambda_0}$  é conexo por caminhos e  $A = \{x_0\} \neq \emptyset$ , teremos que  $H_0(X_{\lambda_0}, \{x_0\};R) \cong \{0\}$ . Assim,

$$H_0(X, \{x_0\};R) \cong \bigoplus_{\lambda \in L - \{\lambda_0\}} H_0(X_\lambda;R) \cong \bigoplus_{\lambda \in L - \{\lambda_0\}} R_\lambda,$$

onde  $R_\lambda = R$ ,  $\forall \lambda \in L - \{\lambda_0\}$ .  $H_0(X, \{x_0\};R)$  é o  $R$ -módulo livre de "rank" igual a cardinalidade do conjunto  $L - \{\lambda_0\}$ .

**Teorema 8.** Para todo  $p \geq 1$  temos  $H_p(X, \{x_0\};R) \cong H_p(X;R)$ .

Assim, se  $X = \cup_{\lambda \in L} X_\lambda$ , então:

$$H_p(X, \{x_0\};R) = \begin{cases} \bigoplus_{\lambda \in L - \{\lambda_0\}} R, & p = 0; \\ H_p(X;R), & p \geq 1. \end{cases}$$

O  $R$ -módulo de **homologia reduzida** de  $X$  é por definição:

$$\tilde{H}_p(X; R) = \begin{cases} H_0(X, \{x_0\}; R) \cong \bigoplus_{\lambda \in L \setminus \{\lambda_0\}} R, & p = 0; \\ H_p(X, \{x_0\}; R) \cong H_p(X; R), & p \geq 1. \end{cases}$$

Em particular, se  $X$  é conexo por caminhos, teremos:

$$\tilde{H}_0(X; R) \cong H_0(X, \{x_0\}; R) \cong \{0\},$$

pois  $X$  tem apenas uma componente conexa.

**Exemplo 10. Homologia reduzida das esferas:** Para  $n \geq 1$  teremos que:

$$\tilde{H}_p(S^n; R) = \begin{cases} 0, & p = 0; \\ H_p(S^n, \{x_0\}; R) \cong H_p(S^n; R), & p \geq 1. \end{cases}$$

Assim,

$$\tilde{H}_p(S^n; R) = \begin{cases} 0, & p \neq n; \\ R, & p = n. \end{cases}$$

Para  $n = 0$  teremos:

$$\tilde{H}_p(S^0; R) = \begin{cases} R, & p = 0; \\ H_p(S^0, \{x_0\}; R) \cong H_p(S^0; R), & p \geq 1. \end{cases}$$

Então,

$$\tilde{H}_p(S^0; R) = \begin{cases} R, & p = 0; \\ 0, & p \geq 1. \end{cases}$$

Dados dois espaços pontuados  $(X, x_0), (Y, y_0)$  definimos o **wedge (ou buquê)** como o espaço quociente definido por:

$$(\mathbf{X}, \mathbf{x}_0) \vee (\mathbf{Y}, \mathbf{y}_0) := \mathbf{X} \cup \mathbf{Y} / \{\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0\}.$$

**Teorema 9.** Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos, onde os pontos básicos são identificados em  $X \vee Y$  e são retratos de deformação de uma vizinhança de  $X$  e de  $Y$ . Então, para todo  $n \geq 1$  teremos:

$$H_n(X \vee Y) \cong H_n(X) \oplus H_n(Y).$$

**Corolário 2.** Em particular, vale o mesmo para homologia reduzida:

$$\tilde{H}_n(X \vee Y) \cong \tilde{H}_n(X) \oplus \tilde{H}_n(Y).$$

**Exemplo 11. Homologia reduzida de um buquê de esferas** Considere o buquê de  $k$  esferas  $S^n$ , onde  $n \geq 1$ . Note que,  $\bigvee_{i=1}^k S^n$  é conexo por caminhos, logo,  $\tilde{H}_0(\bigvee_{i=1}^k S^n; R) = 0$ . Se  $p \geq 1$ , então pelo Teorema 9, teremos

$$\tilde{H}_p(\bigvee_{i=1}^k S^n; R) \cong \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^k R, & p = n; \\ 0, & p \neq n. \end{cases}$$

## 1.2 Sistemas Dinâmicos

Esta seção é uma breve introdução para relembrar alguns conceitos da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias que utilizaremos ao longo desta dissertação. Os principais assuntos que iremos abordar são algumas propriedades de um fluxo e de um campo vetoriais. A principal referência para esta seção foi o livro do Jorge Sotomayor ([SOTOMAYOR, 2011](#)).

### 1.2.1 Fluxos e campos vetoriais

Considere a aplicação de classe  $C^1$ ,  $\varphi : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ , onde  $E$  é um espaço vetorial. Dizemos que  $\varphi$  é um **fluxo** se satisfaz:

1.  $\varphi(0, x) = x$ ;
2.  $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ ,  $t, s \in \mathbb{R}$ .

Ainda, diremos que  $\varphi$  é um **fluxo linear** se  $\varphi$  é um fluxo e, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_t(x) := \varphi(t, x)$  é uma aplicação linear em  $E$ .

Seja  $\Delta$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ . Definimos **Campo vetorial** de classe  $C^k$ , onde  $1 \leq k \leq \infty$ , em  $\Delta$  como uma aplicação  $X : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^n$  que é de classe  $C^k$ . Note que, a dimensão do domínio e da imagem tem exatamente a mesma dimensão. Ao campo vetorial  $X$  associamos a equação diferencial:

$$x' = X(x). \quad (1.1)$$

As soluções de (1.1) são as aplicações diferenciáveis  $\varphi : I \longrightarrow \Delta$ , onde  $I$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$ , tais que

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X(\varphi(t)), \forall t \in I. \quad (1.2)$$

As soluções de (1.1) são chamadas de **trajetórias** ou **curvas integrais** de  $X$  ou da equação diferencial (1.2). Um ponto  $x \in \Delta$  é um **ponto singular** de  $X$  se  $X(x) = 0$ , caso contrário,  $x \in \Delta$  é um **ponto regular** de  $X$ .

**Observação:** Se  $x$  é ponto singular de  $X$ , então  $\varphi(t) = x$ , para todo  $-\infty < t < +\infty$  é solução de (1.1). De fato,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} = 0 = X(x) = X(\varphi(t)).$$

Donde,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X(\varphi(t)).$$

Por outro lado, Se  $\varphi(t) = x$ , para todo  $-\infty < t < +\infty$  é solução de (1.1), então  $x$  é um ponto singular de  $X$ . Com efeito,

$$0 = \frac{d\varphi(t)}{dt} = X(\varphi(t)) = X(x).$$

Uma trajetória ou curva integral  $\varphi : I \rightarrow \Delta$  de  $X$  é dita **máxima** quando para toda trajetória  $\phi : J \rightarrow \Delta$ , onde  $J \supset I$  e  $\varphi = \phi|_I$ , então  $J = I$ . Neste caso, dizemos que  $I$  é um **intervalo máximo**. Podemos interpretar a equação (1.1) (ou a equação (1.2)) geometricamente, no seguinte sentido: a curva  $\varphi : I \rightarrow \Delta$  é uma trajetória de  $X$  se seu vetor velocidade  $\varphi'(t)$  coincide com o valor do campo  $X$  em  $\varphi(t)$  (veja a figura 9).

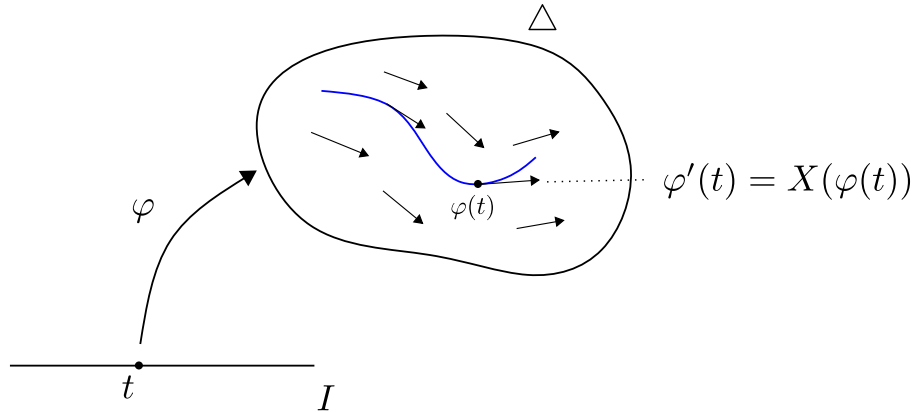


Figura 9 – Interpretação geométrica de um campo vetorial e sua trajetória

As equações na forma da equação (1.1) são chamadas de **equações diferenciais autonômas**, ou seja, o campo vetorial  $X$  independe do tempo. Podemos colocar equações diferenciais autonômas no contexto de uma EDO, basta definir  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $\Omega = \mathbb{R} \times \Delta$  e  $f(t, x) := X(x)$ . Por outro lado, uma equação não autonôma dada por  $x' = f(t, x)$ , e definida em  $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$  pode ser considerada autonôma da seguinte maneira:  $z' = F(z)$  em  $\Omega$ , onde  $z = (t, x)$  e  $F(z) = (1, f(z))$ .

**Teorema 10.** Seguindo as notações anteriores temos os seguintes resultados:

- (a) Para cada  $x \in \Delta$  existe um intervalo aberto  $I_x$  que contém o zero, onde está definida a única solução máxima  $\varphi_x$  de (1.1) tal que  $\varphi_x(0) = x$ ;
- (b) Se  $y = \varphi_x(s)$  e  $s \in I_x$ , então  $I_y = I_x - s$ ,  $\varphi_y(0) = y$  e  $\varphi_y(t) = \varphi_x(t + s)$ ,  $\forall t \in I_y$ ;
- (c) O conjunto  $A = \{(t, x); x \in \Delta \text{ e } t \in I_x\}$  é aberto em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e a aplicação  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $\varphi(t, x) := \varphi_x(t)$  é de classe  $C^k$ . Além disso,  $\varphi$  satisfaz a equação:

$$D_1 D_2 \varphi(t, x) = DX(\varphi(t, x)) \cdot D_2 \varphi(t, x),$$

$$D_2 \varphi(t, x)|_{t=0} = E,$$

para todo  $(t, x) \in A$ . Aqui  $E$  denota a inidentidade em  $\mathbb{R}^n$  e  $D_1$ ,  $D_2$  e  $DX$  são as derivadas na primeira coordenada, na segunda coordenada e a derivada do campo  $X$ , respectivamente.

**Definição 2.** A aplicação  $\varphi : A \rightarrow \Delta$  do Teorema 10 é chamado de **fluxo gerado** pelo campo vetorial  $X$ . Note que, as condições da definição de fluxo de classe  $C^k$  estão satisfeitas, ou seja,  $\varphi(0, x) = \varphi_x(0) = x$  e  $\varphi(t + s, x) = \varphi_x(t + s) = \varphi_y(t) = \varphi(t, y) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ , onde a segunda condição só é válida no contexto do item (b) do Teorema 10. É claro que se  $I_x = \mathbb{R}$  para todo  $x$ , o fluxo gerado por  $X$  é um fluxo de classe  $C^k$  em  $\Delta$ . Entretanto, nem sempre  $I_x = \mathbb{R}$ . Por esse motivo o fluxo gerado por  $X$  é chamado de **fluxo local** ou **grupo local a um parâmetro** gerado por  $X$ .

A última denominação vem do fato de que a condição (b) do Teorema 10 define, quando  $A = \mathbb{R} \times \Delta$ , um homomorfismo do grupo aditivo de  $\mathbb{R}$  no grupo dos difeomorfismos de classe  $C^k$  em  $\Delta$  munido da composição de funções. O homomorfismo é dado por  $t \rightarrow \varphi_t$ , onde  $\varphi_{t+s} := \varphi_t \circ \varphi_s$  e  $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$ , para  $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ . Assim, podemos interpretar que os pontos de  $\Delta$  fluem ao longo das trajetórias de  $X$  como um fluido que se desloca ao longo de suas linhas correntes.

**Observação:** A parte (b) do Teorema 10 é garantida pela unicidade de soluções e do fato da equação ser autonôma. Pois,  $\varphi_y(s)$  e  $\varphi_x(t+s)$  são soluções do mesmo problema de Cauchy.

**Corolário 3.** Considere  $X$  um campo vetorial de classe  $C^k$  em  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ , onde  $k \geq 1$ . Se  $x \in \Delta$  e  $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$ , onde  $\omega_+(x) < \infty$  e  $\omega_-(x) > -\infty$ , então  $\varphi_x(t) \rightarrow \partial\Delta$  quando  $t \rightarrow \omega_+(x)$  (ou  $\omega_-(x)$ ), ou seja,  $\forall K \subset \Delta$  (compacto) existe  $\varepsilon(K) > 0$ ;  $t \in [\omega_+(x) - \varepsilon, \omega_+(x)]$  ou  $(\omega_-(x), \omega_-(x) + \varepsilon]$  implica que  $\varphi_x(t) \notin K$ .

**Corolário 4.** Se  $\Delta = \mathbb{R}^n$  e  $|X(x)| < c, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , então  $I_x = \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**Corolário 5.** Sejam  $\varphi_x$  uma solução de (1.1) definida no intervalo máximo  $I_x$  e  $\varphi_x(t_1) = \varphi_x(t_2)$  para  $t_1 \neq t_2$ , então  $I_x = \mathbb{R}$  e  $\varphi_x(t+c) = \varphi_x(t) \forall t \in \mathbb{R}$ , onde  $c = t_2 - t_1$ . Ou seja,  $\varphi_x$  é uma solução periódica de período  $t_2 - t_1$ .

**Definição 3.** Considere  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^k$ , onde  $k \geq 1$ . Além disso, considere  $p \in \Delta$  e  $\varphi(t) = \varphi(t, p)$  a trajetória que passa pelo ponto  $p$  e é definida no intervalo máximo  $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$ . Se  $\omega_+(p) = +\infty$ , podemos definir o seguinte conjunto:

$$\omega(p) := \{q \in \Delta \mid \exists \{t_n\}; t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Do mesmo modo, se  $\omega_-(p) = -\infty$ , podemos definir o seguinte conjunto:

$$\alpha(p) := \{q \in \Delta \mid \exists \{t_n\}; t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Estes conjuntos são chamados, respectivamente, de  $\omega$ -limite e  $\alpha$ -limite de  $p$ .

**Definição 4.** Considere  $p$  uma singularidade do campo  $X$ . Definimos a variedade estável e instável de  $p$ , respectivamente por:

$$W_p^s := \{q \in \Delta \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, q) = p\},$$

$$W_p^u := \{q \in \Delta \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, q) = p\}.$$

**Definição 5.** Um ponto singular  $p$  de um campo vetorial  $X$  de classe  $C^k$ , onde  $k \geq 1$ , é dito **hiperbólico** se todos os autovalores de  $DX(p)$  têm parte real diferente de zero.

### 1.2.2 Retrato de fase de um campo vetorial

Considere o seguinte conjunto  $\gamma_p := \{\varphi(t, p); t \in I_p\}$ , é a imagem da trajetória de  $X$  pelo ponto  $p$ , chamamos  $\gamma_p$  de **órbita de  $X$  pelo ponto  $p$** . Note que,  $q \in \gamma_p \Leftrightarrow \gamma_p = \gamma_q$ . Com efeito, se  $q \in \gamma_p$ , temos que

$q = \varphi(t_1, p)$  e  $\varphi(t, q) = \varphi(t + t_1, p)$ , onde  $I_p - t_1 = I_q$ . Com isso, temos que duas órbitas de  $X$  coincidem ou são disjuntas, isto é,  $\Delta$  fica decomposto em uma união disjunta de curvas diferenciáveis, podendo cada uma ser: imagem biunívoca de um intervalo de  $\mathbb{R}$ , ou um ponto, ou ainda difeomorfa a um círculo. Cada um desses casos corresponde a uma alternativa do nosso próximo Teorema. No segundo caso,  $p = \gamma_p$ , esta órbita chama-se **ponto singular**, no terceiro caso a órbita chama-se **fechada** ou **periódica**.

**Teorema 11.** Se  $\varphi_x$  é uma solução máxima de (1.1) em  $I_x$ , então  $\varphi_x$  satisfaz apenas uma das seguintes alternativas:

1.  $\varphi_x$  é injetiva;
2.  $I_x = \mathbb{R}$  e  $\varphi_x$  é constante;
3.  $I_x = \mathbb{R}$  e  $\varphi_x$  é periódica.

O conjunto aberto  $\Delta$ , munido da decomposição em órbitas de  $X$ , chama-se **retrato de fase** de  $X$ . As órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais do campo  $X$ ; os pontos singulares são munidos da orientação trivial.

### 1.3 Singularidades

Esta seção tem como objetivo apresentar alguns conceitos básicos de Teoria de Singularidades que são úteis para compreensão de aspectos importantes no Capítulo 3 deste trabalho, onde a teoria clássica das singularidades de aplicações é utilizada para justificar as singularidades que são utilizadas como base para as variedades Gutierrez-Sotomayor. As principais referências que utilizamos são o livros (GIBSON, 1979) e (IZUMIYA *et al.*, 2016).

Sejam  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  ambos contendo  $p \in \mathbb{R}^n$ , diremos que  $X$  é **equivalente** a  $Y$  quando existe um subconjunto aberto  $W \subset \mathbb{R}^n$  que também contém o ponto  $p$  tal que

$$X \cap W = Y \cap W,$$

não é difícil perceber que esta relação entre os conjuntos que contém  $p$  define uma relação de equivalência. A classe de equivalência de um subconjunto  $X$  será chamado de **germe** de  $X$  em  $p$  e denotado por  $(X, p)$ . Considere  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  subconjuntos abertos e ambos contendo o ponto  $p \in \mathbb{R}^n$ , e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  duas aplicações suaves. Dizemos que  $f$  é **equivalente** a  $g$  se existe um subconjunto aberto  $W \subset U \cap V$  que também contém o ponto  $p$  tal que  $f|_W = g|_W$ . Também não é difícil perceber que esta relação é uma relação de equivalência, e o **germe** no ponto  $p$  de uma aplicação suave  $f$  é definido como uma classe de equivalência e é denotado por:

$$f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

As vezes denotaremos por  $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  um representante do germe  $f$  em uma vizinhança  $U$  de  $p$ . Quando desejamos que todos os elementos da classe de equivalência assumam o mesmo valor, digamos que este valor seja  $q$ , então denotaremos por:

$$f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, q).$$

Definimos o seguinte conjunto:

$$\mathcal{E}_n := \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é uma função suave}\},$$

$\mathcal{E}_n$  munido das operações de adição e multiplicação é uma  $\mathbb{R}$ -álgebra comutativa com unidade. Temos o ideal maximal  $\mathcal{M}_n$  que é o subconjunto de germes que se anulam na origem, ou seja,

$$\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{E}_n \mid f(0) = 0\},$$

$\mathcal{E}_n$  é uma álgebra local, pois  $\mathcal{M}_n$  é o único ideal maximal de  $\mathcal{E}_n$ . Pelo Lema 2, podemos utilizar um sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $(\mathbb{R}^n, 0)$  e gerar  $\mathcal{M}_n$  por germes de funções  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , isto é,

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{E}_n \cdot \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Seja  $k \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $\mathcal{M}_n^k$  a  $k$ -ésima potência do ideal maximal  $\mathcal{M}_n$ , que é o conjunto dos germes de aplicações  $f \in \mathcal{M}_n$  cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a  $k - 1$  são todas iguais a zero na origem. Poderíamos provar com o auxílio do mesmo lema que:

$$\mathcal{M}_n^k = \mathcal{E}_n \cdot \{x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \mid i_1 + \cdots + i_n = k\}.$$

Denotamos por  $\mathcal{E}_{n,m}$  o conjunto de todos os germes de aplicações  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ . Perceba que  $\mathcal{E}_{n,m}$  é o produto direto de  $m$ -cópias de  $\mathcal{E}_n$ , ou seja:

$$\mathcal{E}_{n,m} = \mathcal{E}_n \times \cdots \times \mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n^m.$$

O conjunto dos germes de aplicações  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a  $k$  se anula na origem será denota por:

$$(\mathcal{M}_n^{k+1})^m = \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \mathcal{E}_{n,m}.$$

Podemos definir o espaço dos  $k$ -jatos,  $J^k(n, m)$ , como o seguinte quociente:

$$J^k(n, m) := \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,m} / \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \mathcal{E}_{n,m},$$

que pode ser identificado pelo conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a  $k$  sem constante.

Agora, vamos abordar uma definição muito importante para o entendimento deste trabalho, pois algumas das singularidades controladas que utilizaremos na definição de variedade  $GS$  são multi-germes. Para os multi-germes vamos considerar  $S$  a coleção de  $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{R}^n$  todos pontos distintos. A relação de equivalência que acabamos de ver para apenas um ponto pode ser estendida de maneira natural, para  $S$ . Sejam  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, s$  (respectivamente para  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ ) subconjuntos abertos e disjuntos do  $\mathbb{R}^n$  com  $p_i \in U_i \cap V_i$ , e  $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g_i : V_i \longrightarrow \mathbb{R}^m$  para  $i = 1, \dots, s$  funções suaves:

$$f := \cup_{i=1}^s U_i \longrightarrow \mathbb{R}^m;$$

$$g := \cup_{i=1}^s V_i \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

definidas por  $f(x) := f_i(x)$ , se  $x \in U_i$  e  $g(x) := g_i(x)$ , se  $x \in V_i$ . Diremos que  $f$  é equivalente a  $g$  e denotamos por  $f \sim_S g$  quando existem abertos  $W_i \subset U_i \cap V_i$  contendo  $p_i$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ , tais que

$f_i|_{W_i} = g_i|_{W_i}$ . Esta é uma relação de equivalência e um representante de uma classe de equivalência será chamada de multi-germe em  $S$ . Nós iremos denotar por  $(\mathbb{R}^n, S) = \cup_{i=1}^s (\mathbb{R}^n, p_i)$  e escrever  $f = (f_i)_{i=1}^s : (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow \mathbb{R}^m$  para denotar um multi-germe em  $S$ . Quando for do nosso interesse que o multi-germe assuma um valor fixo em  $p_i, i = 1, \dots, s$ , digamos  $f_i(p_i) = q$ , para todo  $i = 1, \dots, s$  escrevemos:

$$f : (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow (\mathbb{R}^m, q).$$

Tomando  $s$  sistemas locais de coordenadas independentes de  $(\mathbb{R}^n, p_i)$ , com todos os  $p_i$ 's definidos como origem, denotamos um multi-germe neste caso por  $f : (\mathbb{R}^n, 0_S) \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\mathcal{E}(n, m)_s$  o conjunto de todos esses multi-germes. Assim, o conjunto dos multi-jatos pode ser definido como:

$$J^k(n, m)_s := (\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n, m})_s / (\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \mathcal{E}_{n, m})_s,$$

um elemento  $j^k f_s$  é a expansão de Taylor de grau  $k$  de  $f \in (\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n, m})_s$ .

**Exemplo 12.** Como nosso propósito com a teoria das singularidades é justificar as singularidades escolhidas na definição de variedade  $GS$  que temos no Capítulo 3, então vamos exibir aqui os germes e multi-germes que aparecem nesta definição:

1. o primeiro deles é o plano em  $\mathbb{R}^3$ , que podemos ver como o germe  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  definido por:

$$f(x, y) = (x, y, 0);$$

2. O cross-cap, que pode ser visto como o germe  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  definido por:

$$f(x, y) = (x, y^2, xy);$$

3. O ponto duplo, que pode ser visto como o multi-germe  $f : (\mathbb{R}^2, 0_S) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ , onde  $S = \{p_1, p_2\} \subset \mathbb{R}^2$ , e associamos dois abertos disjuntos tais que  $p_1 \in U_1$  e  $p_2 \in U_2$ , de modo que:

$$f(x, y) := \begin{cases} f_1(x, y) := (x, y, 0), & \text{se } (x, y) \in U_1, \\ f_2(x, y) := (0, x, y), & \text{se } (x, y) \in U_2; \end{cases}$$

4. O ponto triplo, que pode ser visto como o multi-germe  $f : (\mathbb{R}^2, 0_S) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ , onde  $S = \{p_1, p_2, p_3\} \subset \mathbb{R}^2$ , e associamos três abertos disjuntos tais que  $p_1 \in U_1, p_2 \in U_2$  e  $p_3 \in U_3$ , de modo que:

$$f(x, y) := \begin{cases} f_1(x, y) := (x, y, 0), & \text{se } (x, y) \in U_1, \\ f_2(x, y) := (x, 0, y), & \text{se } (x, y) \in U_2, \\ f_3(x, y) := (0, x, y), & \text{se } (x, y) \in U_3. \end{cases}$$

5. O cone, que pode ser visto como o germe  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  definido por:

$$f(x, y) = (x \operatorname{sen}(y), x \operatorname{cos}(y), x).$$



### 1.3.1 Grupos de Mather

Nesta subseção vamos apresentar três dos cinco grupos que são conhecidos como **grupos de Mather**, mas antes de apresentarmos tais grupos precisamos definir o que é a **ação de um grupo sobre um conjunto**. Considere  $G$  um grupo e  $M$  um conjunto qualquer. A ação de  $G$  em  $M$  é uma aplicação  $\varphi : G \times M \rightarrow M$ , que denotamos por  $\varphi(g, x) = g \cdot x$ , e esta aplicação satisfaz duas propriedades: para todo  $x \in M$  temos  $1 \cdot x = x$ , onde  $1$  é a identidade do grupo  $G$ ; e para todo  $x \in M$  e todo  $g, h \in G$  temos  $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ . Toda ação de um grupo  $G$  sobre  $M$  induz uma relação de equivalência em  $M$  da seguinte forma, diremos que  $x, y \in M$  são equivalentes se existe um  $g \in G$  tal que  $y = g \cdot x$ . Definimos a **órbita** de  $x \in M$  como a classe de equivalência de  $x$ , isto é, os  $y \in M$  tais que existe  $g \in G$  com  $y = g \cdot x$ . Vamos denotar a órbita de  $x$  da seguinte maneira:

$$G \cdot x := \{y \in M \mid \exists g \in G; y = g \cdot x\}.$$

Uma classe especial de grupos são os **grupos de Lie**. Diremos que o grupo multiplicativo  $G$  é um grupo de Lie se  $G$  é uma variedade e as operações de multiplicação e inversão são aplicações suaves. Por exemplo, o grupo  $GL(\mathbb{R}^n)$  dos isomorfismos lineares de  $\mathbb{R}^n$  é um grupo de Lie. Podemos falar da **ação de um grupo de Lie  $G$  em uma variedade  $M$**  que é uma ação  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  tal que  $\varphi$  é suave.

Na Teoria das Singularidades um dos mais importantes assuntos é o conceito de estabilidade, e este conceito pode ser abordado de várias maneiras, mas para este trabalho vamos considerar a estabilidade das órbitas de uma ação de um grupo de Lie em uma variedade.

Considere a ação de um grupo de Lie  $G$  na variedade  $M$ . Diremos que  $x \in M$  é **estável** se sua órbita  $G \cdot x$  é um aberto em  $M$ . A **codimensão** de  $x \in M$ , denotada por  $\text{codim } x$ , é definida como a codimensão de sua órbita  $G \cdot x$  em  $M$ . A seguir uma proposição bastante útil para caracterizar os elementos estáveis de  $M$ .

**Proposição 4.**  $x \in M$  é estável se, e somente se,  $\text{codim } x = 0$ .

Para classificar os germes de  $\mathcal{E}_{m,p}$  consideramos a ação dos grupos de Mather. Como falamos no início, os grupos de Mather são cinco grupos, mas para a nossa finalidade vamos precisar apenas de três deles. O primeiro destes grupos é o grupo  $\mathcal{R}$ , que é composto por todos os germes de difeomorfismos  $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , este grupo é chamado de "grupo à direita" e age suavemente em  $\mathcal{E}(n, m)$  da seguinte maneira: para qualquer  $h \in \mathcal{R}$  e  $f \in \mathcal{E}_{n,m}$ , temos  $h \cdot f := f \circ h^{-1}$ .

O grupo  $\mathcal{L}$  de todos os germes de difeomorfismos  $(\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  é chamado de "grupo à esquerda" e age suavemente em  $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,m}$  por: para quaisquer  $k \in \mathcal{L}$  e  $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,m}$ , temos  $k \cdot f := k \circ f$ .

O último grupo que vamos apresentar é o grupo  $\mathcal{A}$  que é o produto direto de  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{L}$ , isto é,  $\mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ , este grupo é chamado de "direita-esquerda" e age suavemente em  $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,m}$  da seguinte maneira: para  $(h, k) \in \mathcal{A}$  e  $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,m}$ , temos  $(h, k) \cdot f := k \circ f \circ h^{-1}$ .

Perceba que,  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{L}$  podem ser vistos como subgrupos do grupo  $\mathcal{A}$ . Vamos denotar por  $\mathcal{G}$  um dos três grupos de Mather que acabamos de apresentar.

Pelo artigo (HOBBS; KIRK, 2001), temos que os primeiros quatro germes e multi-germes do Exemplo 12 têm  $\mathcal{A}$ -codimensões iguais a zero. Assim, pela Proposição 4 temos que esses quatro germes ou multi-germes são  $\mathcal{A}$ -estáveis.

**Definição 6.** Sejam  $\mathcal{G}$  um grupo de Mather e dois germes de aplicações  $f_1$  e  $f_2$ . Diremos que  $f_1$  e  $f_2$  são  $\mathcal{G}$ -equivalentes quando estão na mesma  $\mathcal{G}$ -órbita, ou seja,  $f_2 = g \cdot f_1$ , para algum  $g \in \mathcal{G}$ .

**Definição 7.** Considere um germe  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  e  $\mathcal{G}$  um dos grupos de Mather. Diremos que  $f$  é  $k$ - $\mathcal{G}$ -determinado se para todo germe  $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  tal que  $j^k g(0) = j^k f(0)$ , então  $g$  é  $\mathcal{G}$ -equivalente a  $f$ . Ainda, diremos que  $f$  é  $\mathcal{G}$ -finitamente determinado se é  $k$ - $\mathcal{G}$ -determinado para algum  $k$  finito. Caso contrário, diremos que  $f$  não é  $\mathcal{G}$ -finitamente determinado.

## TEORIA DE CONLEY

Neste capítulo vamos apresentar os Índices de Conley para conjuntos invariantes pelo fluxo de um campo vetorial. Podemos ver que este índice está associado a existência de um par índice, veja a Definição 11. Apresentamos uma prova de que o mesmo está bem definido. Mas antes disso destinamos duas seções para apresentar outros índices de campos vetoriais. Em especial, o índice de Morse tem um importante papel no desenvolvimento do índice de Conley pois Conley buscava a generalização do índice de Morse em (CONLEY, 1978). A Propriedade de Continuação do Índice de Conley é muito importante, mas não é abordada nesta dissertação para ver esta propriedade você pode consultar (CONLEY, 1978) ou (ZIGART, 2017).

### 2.1 Índice de um campo vetorial

Antes de estudarmos a teoria de Conley optamos por apresentar alguns índices. Isto serve para entendermos melhor os índices de Conley e seus resultados. Nesta seção iremos abordar o índice de um campo vetorial, e a principal referência para esta seção é o livro (BRASSELET, 2021).

Um **campo vetorial contínuo** definido em uma  $n$ -variedade suave  $M$  é uma seção do fibrado tangente  $TM$ . Podemos expressar, localmente, um campo vetorial em  $M$ . Dada uma carta local  $(U_a, \phi)$  em  $M$ , onde  $\phi : U_a \rightarrow B^n$ , denotamos por  $\underline{x}_i = x_i \circ \phi$  as funções coordenadas de  $\phi$ , ou seja, as coordenadas locais em  $U_a$ . Já o vetor tangente em  $x$ , que é denotado por  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  e definindo por:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}_i} := \frac{\partial}{\partial x_i} (h \circ \phi^{-1})|_{\phi(x)},$$

onde  $h \in C^\infty(M)$ . Considere  $\underline{x} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$  a coordenada local de uma variedade  $M$  em uma vizinhança aberta  $U_a$ , o campo vetorial  $v$  pode ser escrito em termos da base  $\{\frac{\partial}{\partial \underline{x}_i}\}_{1 \leq i \leq n}$  do espaço tangente  $T_x M$ :

$$v = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial \underline{x}_i}. \quad (2.1)$$

As funções  $(f_1, \dots, f_n)$  são chamadas de coordenadas do campo vetorial  $v$  em  $U_a$ . Diremos que o campo vetorial é contínuo, suave, analítico se suas funções coordenadas são contínuas, suaves, analíticas,

respectivamente. Para não carregar tanto a notação, nós iremos identificar as coordenadas em  $U_a$  e  $B^n$ , omitindo  $\phi$  e iremos denotar  $\underline{x}_i$  por  $x_i$ .

Uma **singularidade** ou **singularidade de primeiro tipo**  $a$  de um campo de vetores é um ponto tal que todas as funções coordenadas zeram, isto é, para todo índice  $i$  tem-se  $f_i(a) = 0$ .

Considere  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . O fibrado tangente de  $M$ , denotado por  $TM$ , é o fibrado vetorial real de rank  $2n$ , cuja fibra no ponto  $x$  de  $M$  é o espaço tangente de  $M$  em  $x$ , denotado por  $T_x(M)$  e é isomorfo ao  $\mathbb{R}^n$ . O fibrado vetorial  $TM$  é localmente trivial, ou seja, existe uma cobertura de  $M$  por subconjuntos  $\{U_a\}$  tal que a restrição de  $TM$  em cada  $U_a$  é homeomorfo a  $U_a \times \mathbb{R}^n$ . Vamos denotar por  $s_0$  a seção zero  $TM$  tal que  $s_0(x) = 0 \in T_x M \cong \mathbb{R}^n$ . Nós iremos considerar a fibra do fibrado (não mais um fibrado vetorial)  $T^*M = TM \setminus s_0(M)$ . Sua fibra em um ponto  $x \in M$  é  $T_x^*M \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Considere uma bola  $B(a)$  centrada em  $a$ , contida em uma carta aberta  $U_a$  sobre a qual  $TM$  é trivial e suficientemente pequena para que  $a$  seja a única singularidade de  $v$  em  $B(a)$ . O campo vetorial  $v$  define uma seção de  $TM$  sem zero sobre  $S(a) = \partial B(a)$ , teremos :

$$\begin{array}{ccc} S(a) \cong S^{n-1} & \xrightarrow{v} & T^*M|_{U_a} \cong U_a \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \\ & \searrow p_2 \circ v & \downarrow p_2 \\ & & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \end{array}$$

onde  $p_2$  é a projeção da segunda coordenada. Obtemos uma aplicação

$$S^{n-1} \cong \partial B(a) \xrightarrow{p_2 \circ v} \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

O qual define um elemento  $\lambda(v, a)$  no grupo de homotopia  $\pi_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})^1$ . Este grupo de homotopia é isomorfo a  $\mathbb{Z}$  e permite definir:

**Definição 8.** O índice  $I(v, a)$  de um campo de vetores  $v$  em uma singularidade isolada  $a$  é o inteiro que corresponde a  $\lambda(v, a)$  pelo isomorfismo  $\pi_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ .

Vamos considerar a aplicação de Gauss:

$$\gamma: \partial B(a) = S(a) \cong S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

que é definida por  $\gamma(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$ .

**Proposição 5.** O índice de  $v$  em  $a$  é igual ao grau da aplicação de Gauss  $\gamma: S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ . Este grau é a aplicação induzida em homologia

$$\gamma_*: H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}.$$

Ou seja,  $\gamma_*$  é a multiplicação por  $I(v, a)$ .

<sup>1</sup> Consulte o livro (LIMA, 2009)

O índice local não depende da escolha da bola  $B(a)$ , não depende da escolha de coordenadas e nem da escolha de orientação. Pela teoria de homotopia clássica, a aplicação:

$$S^{n-1} \cong \partial B(a) \xrightarrow{p_2 \circ v} \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

pode ser estendida para uma aplicação

$$B(a) \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

se, e somente se, o elemento  $\lambda(v, a)$  é 0 em  $\pi_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Ou seja, o campo vetorial  $v$  estende-se sem singularidades dentro da bola  $B(a)$  se, e só se, o índice  $I(v, a)$  é zero.

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} \cong \partial B(a) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \downarrow & \nearrow & \\ B(a) \cong B^n & & \end{array}$$

Esta construção é base da teoria de obstrução, você pode ler mais sobre isto no capítulo 3 do livro (BRASSELET, 2021).

Vamos utilizar um tipo diferente de singularidade para um campo vetorial, que Marie-Hélène Schwartz chamou de **singularidades de segundo tipo** e que iremos definir a seguir. Dado um campo vetorial  $v$  definido no bordo  $S(a)$  de uma bola  $B(a)$  de raio 1 e centrada em  $a$ , existem muitas maneiras de estender o campo vetorial no interior de  $B(a)$ . Duas delas são naturais. Denotamos por  $S_\varepsilon(a)$  a esfera de raio  $\varepsilon$ , onde  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Se  $x \in S(a)$  o vetor  $v(\varepsilon x)$  é o ponto  $\varepsilon x \in S_\varepsilon(a)$  definido como  $v(\varepsilon x) = \varepsilon v(x)$  ou  $v(\varepsilon x) = v(x)$ . No primeiro caso, o campo vetorial  $v$  vai zerar em  $a$ , este já é o tipo de singularidade definida, que chamaremos de singularidade de primeiro tipo. No segundo caso, a extensão não é definida em  $a$  (veja (SCHWARTZ, 1991)), mas define um ciclo  $\kappa(v)$  na fibra  $T_a \mathbb{R}^n$  do fibrado tangente  $\mathbb{R}^n$ . O ciclo:

$$\kappa(v) = \{u \in T_a \mathbb{R}^n \mid \text{existe } x \in S(a), u = v(x)\},$$

é o conjunto dos limites dos vetores  $v(x)$  quando  $x$  tende a  $a$ . De acordo com Marie-Hélène Schwartz, nós iremos chamar essas singularidades de **singularidades de segundo tipo**. Não importa o tipo de singularidades, o índice  $I(v, a)$  de  $v$  na singularidade  $a$  é bem definida e não depende das escolhas envolvidas.

**Proposição 6.** Se considerarmos  $a$  uma singularidade de segundo tipo, então o índice do ciclo  $\kappa(v)$  na fibra pontuada  $T_a \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  é igual a  $I(v, a)$ . Isto é, pela identificação  $H_{n-1}(T_a \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ , a imagem de  $[\kappa(v)]$  é  $I(v, a)$ .

*Demonstração.* Considere  $s_0$  a seção zero de um fibrado tangente  $T\mathbb{R}^n$ . O fibrado tangente  $T\mathbb{R}^n$  é trivial sobre  $B(a)$ , assim como  $T^*\mathbb{R}^n = T\mathbb{R}^n \setminus \text{Im } s_0$ . A fibra de  $T^*\mathbb{R}^n$  em  $a$  é  $T_a \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e, restrito em  $B(a)$ , o fibrado é homeomorfo a  $B(a) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . O campo vetorial  $v$  define a seção  $T^*\mathbb{R}^n$  sobre  $S(a)$  cuja imagem pela segunda projeção

$$B(a) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

é igual a  $\kappa(v)$ , por definição. □

## 2.2 Índice de Morse

Aqui abordamos um pouco da teoria clássica do índice de Morse, pois ela foi uma das inspirações para Conley desenvolver sua teoria. A principal referência desta seção é o livro (MILNOR, 1963).

Considere  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Diremos que  $p \in M$  é um **ponto crítico** de  $f$  quando a aplicação induzida nos espaços tangentes for nula:

$$df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}.$$

Em outras palavras, se escolhermos um sistema de coordenadas locais  $\phi = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  em torno de  $p$  teremos que:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) = \dots = \frac{\partial}{\partial x_n} (f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) = 0.$$

Quando  $p \in M$  é um ponto crítico de  $f$ , diremos que  $f(p)$  é um **valor crítico** de  $f$ . Iremos denotar o conjunto de todos os pontos críticos de  $f$  por:

$$\text{Crit}(f) := \{p \in M \mid df_p = 0\}.$$

Dado um ponto  $p \in \text{Crit}(f)$ , escolhendo coordenadas locais  $\phi = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definimos a **Hessiana** de  $f$  no ponto  $p$  como a forma bilinear simétrica em  $T_p M$  por:

$$H_p^f(\xi, \eta) := \sum_{i,j=1}^n S_{ij} \xi^i \eta^j,$$

onde

$$S_{ij} = S_{ij}(f, p, \phi) = \frac{\partial^2 (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j} \phi(p).$$

Podemos classificar os pontos críticos de  $f$  através da Hessiana. Um ponto  $p \in \text{Crit}(f)$  é dito **não-degenerado** quando a matriz Hessiana de  $f$  no ponto  $p$ :

$$H_p^f = \left( \frac{\partial^2 (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j} \phi(p) \right)$$

é não-singular, isto é, o determinante de  $H_p^f$  é diferente de zero, caso contrário diremos que o ponto  $p \in \text{Crit}(f)$  é **degenerado**.

Podemos definir o **índice de Morse** de  $p$  como o número de autovalores negativos de  $H_p^f$  e denotado por  $\text{ind}_f(p)$ . A soma dos autoespaços associados aos autovalores negativos de  $H_p^f$  é denotado por  $E^u(p)$ , analogamente, a soma dos autoespaços associados aos autovalores positivos de  $H_p^f$  é denotado por  $E^s(p)$ . Note que, para um ponto  $p \in \text{Crit}(f)$ , as noções da Hessiana, do índice de Morse e ponto não-degenerado não dependem da escolha do sistema de coordenadas.

**Teorema 12. (Lema de Morse)** Considere  $p$  um ponto crítico não-degenerado de  $f$ . Existe um sistema de coordenadas locais  $\phi = (y_1, \dots, y_n)$  em uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que:

1.  $\phi(p) = (y_1(p), \dots, y_n(p)) = (0, \dots, 0)$ ;

2.  $(f \circ \phi^{-1})(y_1, \dots, y_n) = f(p) - y_1^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_n^2$  em  $U$ , onde  $\lambda$  é o índice de Morse de  $f$  no ponto  $p$ .

*Demonstração.* Primeiro vamos mostrar que se existe alguma expressão (dessa natureza) para  $f$ , então  $\lambda$  tem que ser o índice de Morse de  $f$  no ponto  $p$ . Seja  $(z_1, \dots, z_n)$  um sistema de coordenadas tal que:

$$f(q) = f(p) - z_1(q)^2 - \dots - z_\lambda(q)^2 + z_{\lambda+1}(q)^2 + \dots + z_n(q)^2.$$

Então, teremos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(p) = \begin{cases} -2, & i = j \leq \lambda; \\ 2, & i = j > \lambda; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, a matriz Hessiana de  $f$  no ponto  $p$  é:

$$H_p^f = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donde, o índice de Morse de  $f$  em  $p$  é  $\lambda$ . O próximo passo é mostrar que existe um sistema de coordenadas adequado  $(y_1, \dots, y_n)$ , para isto, vamos considerar o seguinte lema:

**Lema 2.** Seja  $f \in C^\infty$  com  $f(0) = 0$ , definida em uma vizinhança convexa  $V$  do  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Então:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n),$$

para certas funções suaves  $g_i$  definidas em  $V$ , com  $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ .

Para provar este lema podemos escrever a função  $f$  da seguinte maneira:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt,$$

podemos fazer isto, pois  $V$  é convexo. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_i dt \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt. \end{aligned}$$

Defina

$$g_i(x_1, \dots, x_n) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt.$$

Portanto,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n),$$

além disso,

$$\begin{aligned} g_i(0) &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) dt \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \int_0^1 dt \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(0). \end{aligned}$$

□

Voltando à prova do Lema de Morse 12, podemos assumir que  $f(p) = f(0) = 0$  e que  $p$  é a origem de  $\mathbb{R}^n$ . Pelo Lema 2, que acabamos de provar, temos:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n),$$

para  $(x_1, \dots, x_n)$  em alguma vizinhança de 0. Uma vez que  $p$  é ponto crítico temos:

$$g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0.$$

Podemos aplicar o Lema 2 para a função  $g_j$  e obter:

$$g_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i h_{ij}(x_1, \dots, x_n),$$

onde  $h_{ij}$  são funções suaves adequadas. Donde,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Nós podemos assumir que  $h_{ij} = h_{ji}$ , pois podemos escrever  $\tilde{h}_{ij} := \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$  e teremos  $\tilde{h}_{ij} = \tilde{h}_{ji}$  com  $f = \sum x_i x_j \tilde{h}_{ij}$ . Além disso, a matriz  $(\tilde{h}_{ij}(0))$  é igual a  $(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0))$  que, por hipótese, é não-singular.

Existe uma transformação não-singular de funções coordenadas que nos dá a expressão desejada de  $f$  provavelmente em uma vizinhança menor do 0. Para verificar isso "imitamos" a prova usual da diagonalização de uma forma quadrática. Os passos chaves são descritos a seguir.

Suponha, por indução, que existem coordenadas  $u_1, \dots, u_n$  em uma vizinhança  $U_1$  de 0 tais que:

$$f = \pm u_1^2 \pm \dots \pm u_{r-1}^2 + \sum_{i,j \geq r}^n u_i u_j H_{ij}(u_1, \dots, u_n),$$

onde a matriz  $(H_{ij}(u_1, \dots, u_n))$  é simétrica. Após uma mudança linear nas últimas  $n - r + 1$  coordenadas, podemos assumir que  $H_{rr}(0) \neq 0$ . Seja  $g(u_1, \dots, u_n)$  a raiz quadrada de  $|H_{rr}(u_1, \dots, u_n)|$ . Isto será uma



função suave e não-nula de  $u_1, \dots, u_n$  dentro de uma vizinhança  $U_2 \subset U_1$  de 0. Agora, introduzimos novas coordenadas  $v_1, \dots, v_n$  definidas por:

$$v_i(u_1, \dots, u_n) := \begin{cases} u_i & i \neq r \\ g(u_1, \dots, u_n) \left[ u_r + \sum_{i>r}^n u_i \frac{H_{ir}(u_1, \dots, u_n)}{H_{rr}(u_1, \dots, u_n)} \right] & i = r. \end{cases}$$

Segue do Teorema da Função Inversa que  $v_1, \dots, v_n$  servirão como funções coordenadas dentro de uma vizinhança suficientemente pequena  $U_3$  de 0. Podemos verificar que:

$$f = \sum_{i \leq r} \pm v_i^2 + \sum_{i, j > r}^n v_i v_j H'_{ij}(v_1, \dots, v_n),$$

dentro de  $U_3$ . Isto completa a indução. Portanto, provamos o Lema de Morse.  $\square$

**Definição 9.** Uma função de Morse é uma função suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , onde todos os seus pontos críticos são não-degenerados.

Agora vamos apresentar um exemplo de função de Morse e outro que não é.

**Exemplo 13.** Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) := (2x + 3y - (6x + 7y)^2) \cdot (2x + 3y + (6x + 7y)^2).$$

Afirmamos que esta função não é uma função de Morse. De fato, vamos mostrar que  $(0, 0)$  é um ponto crítico degenerado. Com efeito,

$$\begin{aligned} f(x, y) &:= (2x + 3y - (6x + 7y)^2) \cdot (2x + 3y + (6x + 7y)^2) \\ &= (2x + 3y - A^2) \cdot (2x + 3y + A^2) \\ &= 4x^2 + 12xy + 9y^2 - A^4, \end{aligned}$$

onde  $A = 6x + 7y$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 8x + 12y - 24A^3; \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 12x + 18y - 28A^3. \end{aligned}$$

Note que  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  é um ponto crítico de  $f$  pois:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= 0; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Agora, vamos calcular a Hessiana de  $f$  em  $(0, 0)$ , para isto precisamos calcular as derivadas de ordem dois dessa função:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x} (8x + 12y - 24A^3) \\ &= 8 - 432A^2. \end{aligned}$$

Donde,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) = 8 - 0 = 8.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y} (12x + 18y - 28A^3) \\ &= 18 - 588A^2.\end{aligned}$$

Então,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0) = 18 - 0 = 18.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} (12x + 18y - 28A^3) \\ &= 12 - 504A^2.\end{aligned}$$

Donde,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 12 - 0 = 12$  e pelo Teorema de Schwarz, temos que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 12.$$

Assim, a Hessiana de  $f$  em  $(0,0)$  é dado por:

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$$

e seu determinante é:

$$\begin{aligned}\det(H) &= 18 \cdot 8 - 144 \\ &= 144 - 144 = 0.\end{aligned}$$

Portanto,  $f(x,y) = (2x + 3y - (6x + 7y)^2) \cdot (2x + 3y - (6x + 7y)^2)$  não é uma função de Morse, pois  $(0,0) \in \mathbb{R}^2$  é um ponto crítico degenerado. Veja o gráfico de  $f$  na Figura 10.

**Exemplo 14.** Agora, vamos dar um exemplo simples de uma função de Morse, ou seja, cujos pontos críticos são todos não-degenerados. Considere  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x,y) := x^2 - y^2$ . Observe-que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= -2y.\end{aligned}$$

Logo,  $(0,0)$  é o único ponto crítico da função  $g$ . Vamos calcular a Hessiana de  $g$  neste ponto, para isto, perceba que  $\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x} = 2$ ,  $\frac{\partial^2 g}{\partial^2 y} = -2$  e  $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 0$ . Donde,

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

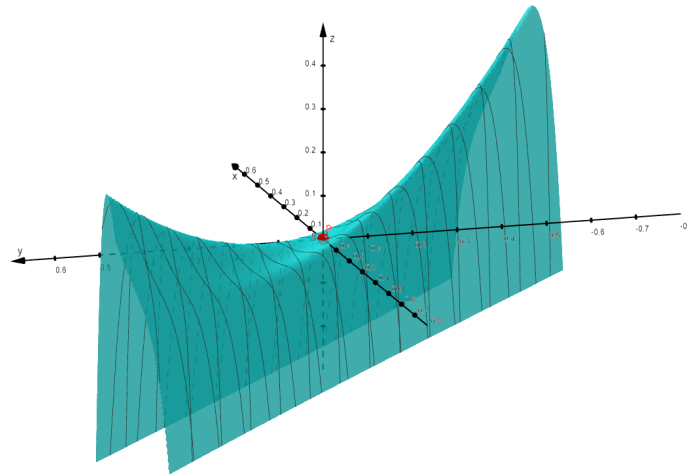


Figura 10 – Função  $4x^2 + 12xy + 9y^2 - (6x + 7y)^4$ , que não é de Morse

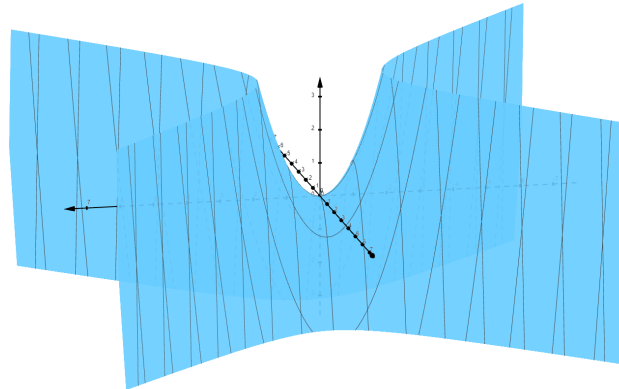


Figura 11 – Função de Morse  $x^2 - y^2$

e  $\det(H) = -4 \neq 0$ , logo,  $(0,0)$  é um ponto crítico não-degenerado. Portanto,  $g(x,y) = x^2 - y^2$  é uma função de Morse. Além disso, o índice de Morse desse ponto crítico é 1. Podemos ver o gráfico da função  $g$  na Figura 11.

Podemos considerar o campo gradiente  $F(x) := -\nabla f(x)$ , onde  $f$  é uma função de Morse. Perceba que, uma singularidade para o campo  $F$  é um ponto crítico da função  $f$ . Podemos definir o índice de Morse do campo  $F = -\nabla f$  em um ponto  $p$  como o índice de Morse da função  $f$  no ponto  $p$  e denotamos este índice por  $I(p)$ .

Queremos relacionar o índice de Morse com a topologia de subconjuntos de nível de uma função de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $M$  é uma variedade suave  $n$ -dimensional, veja a Figura 12.

Dados  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , considere os seguintes conjuntos:

$$M_c = \{x \in M; f(x) \leq c\}$$

$$M_{[a,b]} = \{x \in M; a \leq f(x) \leq b\}$$

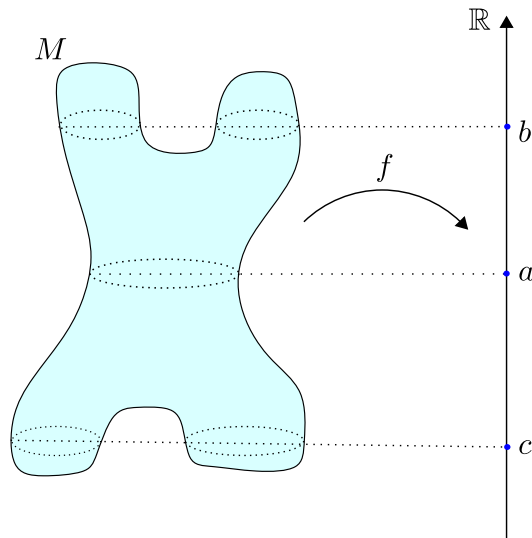


Figura 12 – Níveis da função suave

Se  $a < b$ , então  $M_a \subset M_b$ . Podemos relacionar os pontos críticos em  $M_{[a,b]}$  com os grupos de homologia relativa  $H_*(M_b, M_a)$ . Para esta relação, precisamos dos **polinômios de Poincaré**. Primeiro definimos:

$$\beta_k(M_b, M_a) := \text{posto } H_k(M_b, M_a),$$

onde posto de  $H_k(M_b, M_a) = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}_{n_j}$  é igual a cardinalidade do conjunto de índices  $I$ . Os  $\beta_k(M_b, M_a)$  são conhecidos como os **números de Betti** do par  $(M_b, M_a)$ . Em particular,  $\beta_k \geq 0$ . No caso em que  $\beta_k < \infty$ , para todo  $k$  e  $\beta_k = 0$  para  $k$  suficientemente grande, definimos o **polinômio de Poincaré** por:

$$P(t) := \sum_{k \geq 0} \beta_k(M_b, M_a) t^k.$$

Agora, defina a soma formal, usando o índice de Morse dos pontos críticos:

$$M(t) := \sum_{p \in M_{[a,b]}} t^{I(p)} = \sum_{k \geq 0} \gamma_k(M_b, M_a) t^k,$$

onde  $\gamma_k(M_b, M_a)$  é o número de pontos críticos em  $M_{[a,b]}$  com índice de Morse igual a  $k$ . Se  $\gamma_k < \infty$ , para todo  $k$  e  $\gamma_k = 0$  para  $k$  suficientemente grande,  $M(t)$  é denominado **polinômio de Morse**.

Com estas notações teremos o seguinte resultado:

**Teorema 13.** Suponhamos que  $M_{[a,b]}$  é compacto, que todos os pontos críticos de  $f$  em  $M_{[a,b]}$  são não-degenerados e que seus valores críticos estão no intervalo aberto  $(a, b)$ . Então,  $P(t)$  e  $M(t)$  são polinômios, além disso, satisfazem a seguinte igualdade:

$$M(t) = P(t) + (1+t)Q(t),$$

onde  $Q(t)$  é um polinômio com coeficientes não-negativos.

## 2.3 Índice de Conley

Nesta seção iremos tratar sobre a Teoria de Conley, esta teoria será aplicada no próximo capítulo. As principais referências são (CAVALCANTI, 2007) e (CONLEY, 1978).

Considere  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  um fluxo gerado pelo campo vetorial contínuo  $X : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $\Delta$  é um aberto. Veja a Definição 2. Denotaremos ao longo deste capítulo  $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$  por  $x \cdot t$  e, mais geralmente, se  $B \subset \mathbb{R}$  e  $A \subset \Delta$  iremos considerar o seguinte conjunto:

$$A \cdot B := \{x \cdot t \mid x \in A \text{ e } t \in B\}.$$

Agora, vamos fixar algumas nomenclaturas de propriedades do fluxo que são úteis para o desenvolvimento da Teoria de Conley.

**Definição 10.** Considere um subconjunto  $A \subset \Delta$ ,  $A$  é dito **invariante** se para todo  $x \in A$  e todo  $t \in I_x$ , então  $x \cdot t \in A$ , ou seja, para todo  $x \in A$  temos que  $A \cdot I_x \subset A$ .  $A$  é dito **positivamente invariante** se para todo  $x \in A$  e todo  $t \in I_x$  com  $t \geq 0$ , então  $x \cdot t \in A$ .  $A$  é dito **estritamente positivamente invariante** se para todo  $x \in A$  e todo  $t \in I_x$  com  $t > 0$ , então  $x \cdot t \in \text{int}(A)$ .

Na seção anterior, vimos que a teoria de Morse tem duas hipóteses: a função  $f$  é uma função de Morse e o sistema dinâmico é da forma  $x' = -\nabla f(x)$ . Com essas hipóteses podemos provar que se  $H_k(M_b, M_a) \neq \{0\}$ , então existem singularidades para o sistema, basta utilizar o Teorema 13. Se o objetivo é conhecer a existência de um **conjunto invariante** não vazio, não precisamos que o sistema seja gradiente. No lugar de subníveis de uma função, vamos usar pares de conjuntos  $(B, A)$  positivamente invariantes. O papel do conjunto  $M_{[a,b]}$  será desempenhado por  $\overline{B \setminus A}$ .

**Lema 3.** Considere um campo  $X : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e seu fluxo gerado  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Além disso, sejam  $B \subset \Delta$  um subconjunto positivamente invariante e  $A \subset B$  um subconjunto fechado e estritamente positivamente invariante. Suponha que, para cada  $x \in B$  existe  $t \geq 0$  com  $x \cdot t \in A$ . Então, a função  $T : B \rightarrow [0, \infty)$  definida por:

$$T(x) := \inf \{t \geq 0 \mid x \cdot t \in A\}$$

é contínua e  $x \cdot T(x) \in A$ . Além disso, a inclusão  $i : A \rightarrow B$  é uma equivalência homotópica. Logo,  $i_* : H_k(A) \cong H_k(B)$  e  $H_k(B, A) \cong 0$ , para todo  $k$ .

*Demonstração.* Tome  $x \in B$  e  $\varepsilon > 0$ . Vamos encontrar vizinhanças  $x$ , de modo que, seus pontos  $y$  são tais que  $T(y) \geq T(x) - \varepsilon$  ou  $T(y) \leq T(x) + \varepsilon$ . Perceba que, se  $T(x) - \varepsilon \leq 0$ , então para qualquer  $y$  teremos  $T(y) \geq T(x) - \varepsilon$ , pois imagem de  $T$  é um subconjunto de  $[0, \infty)$ . Assim, podemos assumir que  $T(x) > \varepsilon$ . Logo, pela definição da função  $T$  temos que  $x \cdot (T(x) - \varepsilon) \in B \setminus A$ .

Uma vez que  $A$  é fechado, o conjunto  $B \setminus A$  é aberto. Como o fluxo local é contínuo, existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que se  $y \in U$ , então  $y \cdot (T(x) - \varepsilon) \in B \setminus A$ . Por hipótese,  $A$  é positivamente invariante, então  $y \cdot [0, T(x) - \varepsilon] \subset B \setminus A$ . Donde,  $T(y) \geq T(x) - \varepsilon$ .

Agora, vamos tomar  $t$  tal que  $x \cdot t \in A$ . Podemos assumir que  $t \in [T(x), T(x) + \varepsilon]$  e, aumentando  $t$  caso necessário, temos que  $x \cdot t \in \text{int} A$ . Novamente, pela continuidade do fluxo, existe uma vizinhança

$V$  de  $x$  tal que se  $y \in V$ , então  $y \cdot t \in \text{int } A$ . Logo,  $T(y) \leq t \leq T(x) + \varepsilon$ . Por hipótese,  $A$  é fechado, então  $T(x)$  está contido no conjunto  $\{t \geq 0 \mid x \cdot t \in A\}$ , donde,  $x \cdot T(x) \in A$ .

Defina  $h(s, x) = h_s(x) := x \cdot (s \cdot T(x))$ . Note que:  $h_0(x) = x \cdot 0 = x$ , ou seja,  $h_0$  é a identidade em  $B$ , e  $h_1(x) = x \cdot T(x) \in A$ , isto é,  $h_1 : B \rightarrow A$ .  $h_1$  é uma inversa homotópica da inclusão de  $i : A \rightarrow B$ . De fato, por um lado temos que:

$$(i \circ h_1)(x) = h_1(x) \text{ e } h_1 \cong h_0 = \text{id}_B, \quad \forall x \in B.$$

Por outro lado,

$$(h_1 \circ i)(x) = h_1(x) = x \cdot T(x) = x \cdot 0, \quad \forall x \in A.$$

Assim,  $A$  é um retrato de  $B$ . Logo, temos o isomorfismo  $i_* : H_k(A) \cong H_k(B)$ , para todo  $k$ . Enfim, utilizando a sequência exata:

$$\cdots \longrightarrow H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(B) \longrightarrow H_k(B, A) \longrightarrow H_{k-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{k-1}(B) \longrightarrow \cdots$$

obtemos  $H_k(B, A) = 0$ . □

Seja  $N$  um subconjunto de  $\Delta$  com um fluxo local. Definimos o conjunto **invariante maximal** em  $N$  por:

$$\text{Inv}(N) := \{x \in N \mid x \cdot t \in N, \forall t \in I_x\}.$$

Vamos considerar  $N$  compacto. Neste caso, as órbitas em  $\text{inv}(N)$  estão definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 7.** Suponha que  $A \subset B \subset M$ , onde  $B$  é positivamente invariante,  $A$  é estritamente positivamente invariante e  $\overline{B \setminus A}$  é compacto. Se a inclusão  $i : A \rightarrow B$  for uma equivalência homotópica, então  $\text{inv}(\overline{B \setminus A}) \neq \emptyset$ .

*Demonstração.* Pelo Lema 3, existe algum  $x \in B$  tal que não existe  $t \geq 0$ ,  $t \in D_x$  com  $x \cdot t \in A$ . Uma vez que  $\overline{B \setminus A}$  é compacto,  $x \cdot t$  existe para todo  $t \geq 0$  e  $x \cdot \mathbb{R}^+ \subset B \setminus A$ . Pela compacidade,  $x \cdot \mathbb{R}^+$  tem um ponto de acumulação  $y$ . Considere  $\{t_n\}$  uma sequência tal que  $x \cdot t_n$  converge para  $y$ .

**Afirmção:**  $y \cdot t \in \overline{B \setminus A}$  para todo  $t \in D_y$ .

Seja  $t \in D_y$  (possivelmente  $t < 0$ ), para  $n$  suficientemente grande,  $t_n + t \geq 0$  e:

$$x \cdot (t_n + t) = (x \cdot t_n) \cdot t \rightarrow y \cdot t$$

A igualdade se sustenta na propriedade de fluxos  $\varphi(x, t_n + t) = \varphi(\varphi(x, t_n), t)$ . Como  $x \cdot (t_n + t) \in B \setminus A$ , então  $y \cdot t \in \overline{B \setminus A}$ . Portanto,  $y \in \text{Inv}(\overline{B \setminus A})$ . □

**Observação:** No lugar de tomar  $\overline{B \setminus A}$  como compacto, podemos supor que existe um compacto  $K \subset \overline{B \setminus A}$  tal que:

$$x \cdot \mathbb{R}^+ \subset \overline{B \setminus A} \Rightarrow x \cdot \mathbb{R}^+ \subset K.$$

Neste caso, vamos ter  $x \cdot \mathbb{R}^+ \subset K$ ,  $y \in K$  e  $y \cdot t \in K$  na demonstração acima. Teremos então

$$y \in \text{Inv}(K) \subset \text{Inv}(\overline{B \setminus A}).$$

A ideia que dá origem ao índice de Conley é utilizar o tipo de homotopia dos pares de espaços  $(B, A)$  como um índice topológico associado aos conjuntos invariantes em  $\overline{B \setminus A}$ .

### 2.3.1 Um pouco sobre fluxos

Considere  $M$  um espaço topológico. Uma **curva regular** em  $M$  é uma aplicação contínua  $\gamma : D_\gamma \rightarrow M$ , onde  $D_\gamma$  é um intervalo aberto, tal que, seu gráfico é fechado. Dado um fluxo local  $\phi : D \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  para cada  $x \in M$ , a curva  $\gamma : D_x \rightarrow M$ , definida por  $\gamma(t) := \phi(t, x)$  é regular. Se o domínio  $D$  for todo o  $\mathbb{R} \times M$ , diremos que  $\phi$  é um **fluxo global** ou às vezes diremos que  $\phi$  é apenas um **fluxo**.

Vamos mostrar como mergulhar um fluxo local em um fluxo. Denotamos o conjunto de todas as curvas regulares em  $M$  por  $\Gamma(M)$ . Obtemos uma topologia em  $\Gamma(M)$  tomando por sub-base os conjuntos da forma:

$$\Gamma(K, V) = \{\gamma \in \Gamma(M) \mid \gamma(K) \subset V\},$$

onde  $K \subset \mathbb{R}$  é um compacto e  $V \subset M$  é um aberto. Esta é a conhecida topologia compacto aberta.  $\Gamma(M)$  possui um fluxo natural, o **fluxo de translação à esquerda**:

dada uma curva  $\gamma : D_\gamma \rightarrow M$ , defina  $\gamma \cdot t : D_{\gamma \cdot t} \rightarrow M$  por  $(\gamma \cdot t)(s) := \gamma(t + s)$ , onde  $D_{\gamma \cdot t} = D_\gamma - \{t\}$ .

Para representar esta translação vamos utilizar a notação:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} \times \Gamma(M) &\longrightarrow \Gamma(M) \\ (t, \gamma) &\longmapsto \psi(t, \gamma) := \gamma \cdot t \end{aligned}$$

Seja  $\phi$  um fluxo local. Definimos o mergulho:

$$\begin{aligned} h : M &\longrightarrow \Gamma(M) \\ x &\longmapsto \gamma := \phi(\cdot, x), \end{aligned}$$

onde  $\phi(\cdot, x) : D_x \rightarrow M$ . Considere  $\Phi = h(M)$  a imagem de  $M$  em  $\Gamma(M)$ . Defina:

$$\begin{aligned} D' &= \bigcup_{\gamma \in \Phi} D_\gamma \times \{\gamma\} = \{(t, \gamma) \in \mathbb{R} \times \Phi; t \in D_\gamma, \gamma \in \Phi\} \\ &\subset \mathbb{R} \times \Phi. \end{aligned}$$

**Proposição 8.** A aplicação  $h : M \rightarrow \Phi$  é um homeomorfismo. Além disso, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\phi} & M \\ \downarrow \text{Id} \times h & & \downarrow h \\ D' & \xrightarrow{\psi} & \Phi \end{array}$$

*Demonstração.* Como  $\phi(0, \cdot) = Id_M$ , temos que  $h^{-1}(\gamma) = \gamma(0)$ , ficando bem definido  $h^{-1} : \Phi \rightarrow M$ . Primeiro, vamos mostrar que  $h$  é contínua. Dado  $x \in M$ , tome  $\gamma = h(x)$ . Escolha uma vizinhança  $\Gamma(K, V) = \{\gamma \in \Gamma(M); \gamma(K) \subset V\}$ , onde  $K \subset \mathbb{R}$  é um compacto e  $V \subset M$  é um aberto. Para cada  $(t, x) \in K \times \{x\}$ , tome  $\varepsilon > 0$  e uma vizinhança  $U_x$  de  $x$  em  $M$  tais que:

$$(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times U_x \subset D \quad e \quad \phi((t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times U_x) \subset V.$$

Uma vez que  $K \times \{x\}$  é compacto, podemos tomar uma subcobertura finita  $(t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon) \times (U_x)_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Defina  $U := \bigcap_{i=1}^n (U_x)_i$ . Assim,  $U$  é uma vizinhança de  $x$  em  $M$  cujos pontos são levados em  $\Gamma(K, V)$  por  $h$ . Portanto,  $h$  é contínua. Para garantir a continuidade de  $h^{-1}$  note que, dada uma vizinhança  $U$  de  $\gamma(0)$ ,  $\Gamma(\{0\}, U)$  é uma vizinhança de  $\gamma$  tal que  $h^{-1}(\gamma') \in U$ , para todo  $\gamma' \in \Gamma(0, U)$ . Donde,  $h^{-1}$  é contínua.

Agora, precisamos mostrar que o diagrama é comutativo. Note que,

$$\begin{aligned} h \circ \phi(t, x) &= h(\phi(t, x)) \\ &= \phi(\cdot, \phi(t, x)) \\ &= \phi(t + \cdot, x), \end{aligned}$$

a terceira igualdade é verdadeira, pois  $\phi$  é um fluxo. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \psi \circ (Id \times h)(t, x) &= \psi(Id \times h(t, x)) \\ &= \psi(t, h(x)) \\ &= \psi(t, \phi(\cdot, x)) \\ &= \phi(t + \cdot, x). \end{aligned}$$

Portanto,  $h \circ \phi = \psi \circ (Id \times h)$ , isto é, o diagrama comuta.  $\square$

A última proposição nos dá um mergulho de  $M$ , munido de um fluxo local  $\phi$ , em  $\Gamma(M)$ , munido de um fluxo global  $\psi$ . O fato de  $\phi$  ser um fluxo local implica em  $\Phi$  ser um conjunto localmente invariante por translação em  $\Gamma(M)$ . Mais geralmente, se  $X$  é um espaço topológico com um fluxo, um subconjunto  $Q$  de  $X$  é dito **localmente invariante** se existe um aberto  $V$  contendo  $Q$  tal que:

$$\gamma \in Q, \gamma \cdot [a, b] \in V \quad (a < 0 < b) \Rightarrow \gamma \cdot [a, b] \in Q.$$

Temos outra definição, que é equivalente,  $Q$  é localmente invariante se, dado  $\gamma \in Q$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $\gamma$  e  $\varepsilon > 0$  tais que:

$$(U \cap Q) \cdot (-\varepsilon, \varepsilon) \subset Q.$$

**Proposição 9.** O conjunto  $\Phi = h(M)$ , que definimos acima, é localmente invariante em  $\Gamma(M)$ .

*Demonstração.* Vamos usar o fato de  $D$ , o domínio de  $\phi$ , ser aberto.  $\gamma$  é a solução que passa por  $x$ .  $D \subset \mathbb{R} \times M$  é aberto. Tome  $\gamma \in \Phi$ , assim  $D' = Id \times h(D)$  é aberto, pois como vimos  $h$  é um homomorfismo. Considere  $D''$  a projeção de  $D'$  em  $\Gamma(M)$ , logo,  $D''$  é vizinhança de  $\gamma$ . Além disso,  $(D'' \cap \Phi) \cdot (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \Phi$ .  $\square$



Com estes resultados podemos concluir o seguinte:

**Proposição 10.** Todo fluxo local pode ser mergulhado em um fluxo como um subconjunto localmente invariante. De maneira recíproca, a restrição de um fluxo a um conjunto localmente invariante é um fluxo local neste conjunto.

### 2.3.2 Os índices de Conley

Sejam  $\Gamma$  um espaço topológico com fluxo (que vamos denotar por  $x \cdot t$ ) e  $\Phi$  um subconjunto localmente invariante de  $\Gamma$ . Vamos supor, ao longo dessa seção, que  $\Phi$  é localmente compacto e Hausdorff.

Lembrando, se um espaço topológico  $X$  é localmente compacto, então para cada  $x \in X$  existe ao menos uma vizinhança compacta. Além disso, se  $X$  é Hausdorff, então para cada  $x \in X$ , existe vizinhanças compactas arbitrariamente pequenas, ou seja, dada a vizinhança  $U$  de  $x$ , existe  $N$  vizinhança compacta de  $x$  tal que  $N \subset U$ .

Pela Proposição 10, a restrição do fluxo a  $\Phi$  é um fluxo local em  $\Phi$ .

**Proposição 11.** Considere  $N \subset \Phi$  compacto e  $x \in N$  tal que  $x \cdot \mathbb{R}^+ \not\subset N$ . Existe  $t \geq 0$  tal que

$$x \cdot [0, t] \subset \Phi,$$

mas  $x \cdot t \notin N$ . Além disso, existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  em  $\Phi$  e  $t \geq 0$  tais que

$$U \cdot [0, t] \subset \Phi \quad e \quad (U \cdot t) \cap N = \emptyset.$$

*Demonstração.* Defina

$$\begin{aligned} T &= \inf\{t \geq 0 \mid x \cdot t \notin N\} \\ &= \sup\{t \geq 0 \mid x \cdot [0, t] \subset N\}. \end{aligned}$$

Por hipótese  $T < \infty$  e como  $N$  é compacto, existe uma sequência  $t_n \rightarrow T$  tal que  $x \cdot t_n$  converge para algum ponto de  $N$ , mas  $x \cdot t_n \rightarrow x \cdot T$ , logo,  $x \cdot T \in N$ . Além disso,  $x \cdot [0, T] \subset N$ . Como  $\Phi$  é localmente invariante, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $x \cdot [0, T + \varepsilon] \subset \Phi$ . Pela definição de  $T$ , temos que existe  $t \in (T, T + \varepsilon)$  com  $x \cdot t \notin N$ , isto prova a primeira parte da proposição.

Uma vez que  $\Phi$  é Hausdorff e  $N$  é compacto, então  $N$  é fechado e  $\Phi \setminus N$  é aberto. Pela continuidade do fluxo local em  $\Phi$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que, para  $y \in U$  tem-se  $y \cdot t \in \Phi \setminus N$ , donde,

$$U \cdot [0, t] \subset \Phi \quad e \quad (U \cdot t) \cap N = \emptyset$$

e isto prova a segunda parte da proposição. □

Seja  $N \subset \Phi$  um compacto, vamos considerar os seguintes subconjuntos de  $N$ :

$$\begin{aligned} I(N) &:= \{x \in N \mid x \cdot \mathbb{R} \subset N\}; \\ A^+(N) &:= \{x \in N \mid x \cdot \mathbb{R}_+ \subset N\}; \\ A^-(N) &:= \{x \in N \mid x \cdot \mathbb{R}_- \subset N\}. \end{aligned}$$

**Proposição 12.** Para todo compacto  $N \subset \Phi$ , temos que os conjuntos  $I(N)$ ,  $A^+(N)$  e  $A^-(N)$  são compactos e são invariante, positivamente invariante e negativamente invariante, respectivamente. Além disso,

$$A^+(N) \cap A^-(N) = I(N).$$

*Demonstração.* Iremos fazer a prova para o conjunto  $A^+(N)$ . Pela Proposição 8, o conjunto

$$B = \{x \in N \mid x \cdot \mathbb{R}^+ \not\subset N\}$$

é aberto em  $N$ . Por outro lado,  $B = N \setminus A^+(N)$ . Logo,  $A^+(N)$  é fechado em  $N$ . Donde,  $A^+(N)$  é compacto, pois  $N$  é compacto.

Agora, vamos provar que  $A^+(N)$  é positivamente invariante. Se  $x \in A^+(N)$  e  $t \geq 0$ , então  $(x \cdot t) \cdot \mathbb{R}_+ = x \cdot [t, +\infty) \subset N$ . Portanto,  $x \cdot t \in A^+(N)$ .

Os argumentos para provar que  $A^-(N)$  e  $I(N)$  são compactos e que são negativamente invariante e invariante, respectivamente, são análogos ao que fizemos agora. Além disso, segue diretamente das definições dos conjuntos que:

$$I(N) = A^+(N) \cap A^-(N).$$

□

Uma **vizinhança isolante** é um subconjunto  $N \subset \Phi$  tal que  $I(N) \subset \text{int}(N)$ . Note que,  $N$  é uma vizinhança isolante se, e somente se, todo ponto de fronteira deixa  $N$  em uma (ou ambas) direção do tempo, ou seja,  $\partial N \cap I(N) = \emptyset$ .

**Exemplo 15.** Sejam  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  a função altura, suave e  $a < b$ , tais que,  $N = M_{[a,b]}$  é compacto, então  $N$  é uma vizinhança isolante.

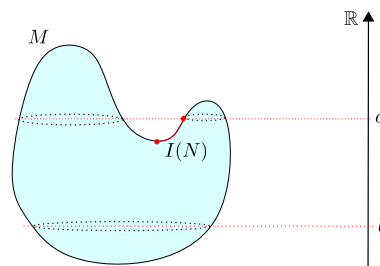


Figura 13 – Vizinhança isolante de uma função altura

**Definição 11.** Considere  $S \subset \Phi$  um conjunto compacto e invariante pelo fluxo local  $\Phi \subset \Gamma$ . Um par  $(N_1, N_0)$  de conjuntos compactos  $N_0 \subset N_1 \subset \Phi$  é dito um **par-índice** para  $S$  em  $\Phi$  se satisfaz:

- (i)  $\overline{N_1 \setminus N_0}$  é uma vizinhança isolante para  $S$ ;
- (ii)  $N_0$  é positivamente invariante em  $N_1$ , ou seja,

$$x \in N_0, x \cdot [0, t] \subset N_1 \Rightarrow x \cdot [0, t] \subset N_0, \forall t \geq 0;$$

(iii)  $N_0$  é um **conjunto de saída** para  $N_1$ , isto é,

$$x \in N_1, x \cdot \mathbb{R}^+ \not\subset N_1 \Rightarrow \text{existe } t_0 \geq 0; x \cdot [0, t_0] \subset N_1 \text{ e } x \cdot t_0 \in N_0.$$

**Exemplo 16.** Considere  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função altura, suave. Suponha que  $M_a \subset M_b$  são ambos compactos e  $a, b$  não são valores críticos, então  $(M_b, M_a)$  é um par-índice para o conjunto  $I(M_{[a,b]})$ . Ainda, se  $M_a$  não é compacto, mas  $M_{[a,b]}$  o é, podemos usar o par  $(M_{[a,b]}, M_{[a,\alpha]})$ , onde  $\alpha \in (a, b)$  e  $M_{[a,\alpha]}$  não contém pontos críticos.

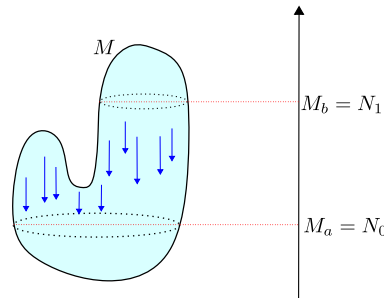


Figura 14 – Par-índice para o conjunto invariante de uma função altura

Seja  $(N_1, N_0)$  um par-índice de um conjunto invariante  $S$  em  $\Phi$ , a teoria de Morse sugere que o grupo  $H_k(N_1, N_0)$  seja um índice para  $S$ . Lembre que uma  $k$ -cadeia relativa em  $(N_1, N_0)$  é um elemento do quociente:

$$S_k(X, A; R) := \frac{S_k(X; R)}{S_k(A; R)}.$$

No lugar de trabalharmos com a homologia relativa vamos trabalhar com o espaço quociente  $N_1/N_0$ .

O espaço quociente tem por pontos as classes de equivalência de  $N_1$  pela relação  $x \sim y$  se, e só se,  $x, y \in N_0$ , ou  $x = y$ . A classe de  $x \in N_1$  vai ser denotada por  $[x]$ . A projeção de  $N_1$  sobre o quociente  $N_1/N_0$  é:

$$\begin{aligned} \pi : N_1 &\longrightarrow N_1/N_0 \\ x &\longmapsto [x]. \end{aligned}$$

Consideramos em  $N_1/N_0$  a topologia quociente, que é a topologia mais fina tal que  $\pi$  é contínua. Note que, o conjunto  $N_0$  corresponde a um ponto do espaço quociente  $N_1/N_0$ , vamos denotá-lo por  $*$ . Assim, podemos ver a projeção como uma aplicação de pares de espaços

$$\pi : (N_1, N_0) \longrightarrow (N_1/N_0, *).$$

Um **espaço pontuado** é um par de espaços, onde o segundo espaço consiste apenas de um ponto.

**Observação:** Poderíamos provar que  $H_k(N_1, N_0) \cong H_k(N_1/N_0, *)$ . Por outro lado, não existe uma relação simples entre os grupos de homotopia.

Dado um espaço pontuado  $(X, *)$ , vamos denotar por  $[X, *]$  o **tipo de homotopia do par**  $(X, *)$ , ou seja,  $[X, *]$  é o conjunto de todos os espaços pontuados homotopicamente<sup>2</sup> equivalentes a  $(X, *)$ .

<sup>2</sup> Aqui a homotopia é no sentido de aplicação de pares

O **índice de Conley homotópico** de um conjunto invariante isolado  $S$  em  $\Phi$  é definido por:

$$h(S) := [N_1/N_0, *],$$

onde  $(N_1, N_0)$  é um par-índice para  $S$ . Já o **índice de Conley homológico** de  $S$  é definido por:

$$CH_*(S) := H_*(h(S)),$$

onde  $H_*$  denota a homologia singular sobre  $\mathbb{Z}$ . Os **índices de Conley numéricos** de  $S$  são definidos como o rank dos grupos de homologia  $H_*(h(S))$ , e denotados por:

$$h_*(S) = \text{rank } CH_*(S).$$

Por simplicidade, vamos denotar a classe de homotopia do espaço pontuado  $(N_1/N_0, *)$  apenas por  $[N_1/N_0]$ .

Para que o índice de Conley homotópico fique bem definido precisamos provar que, sempre existe um par-índice para um conjunto invariante isolado e que o índice independe da escolha do par-índice. Esses fatos são garantidos pelo próximo resultado.

**Teorema 14.** Dado um conjunto invariante isolado  $S$ , sempre existe um par-índice associado a este conjunto. Além disso, se  $(N_1, N_0)$  e  $(M_1, M_0)$  são pares-índice para o conjunto invariante isolado  $S$ , então

$$[N_1/N_0] = [M_1/M_0].$$

O resto deste capítulo é destinado a prova do Teorema 14.

**Proposição 13.** Se  $h(S) \neq \bar{0}$ , então  $S \neq \emptyset$ .

*Demonstração.* Suponha que  $S = \emptyset$ . Como  $S$  é um conjunto invariante isolado,  $(\emptyset, \emptyset)$  é uma par-índice. Onde,  $h(S) = 0$ . Isto é, provamos o resultado pela contra-positiva.  $\square$

Pela Proposição 13, se o índice de Conley do conjunto invariante maximal de  $N$ , não é a classe de um ponto, ou seja,  $h(I(N)) \neq \bar{0}$ , então  $I(N) \neq \emptyset$ . Onde, teremos um conjunto não-trivial no interior de  $N$ .

**Proposição 14.** Se  $N_0 \subset N_1$  são espaços de Hausdorff compactos,  $N_1/N_0$  também é um espaço de Hausdorff compacto. Além disso, se  $f : (N_1, N_0) \rightarrow (N'_1, N'_0)$  é contínua, então o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (N_1, N_0) & \xrightarrow{f} & (N'_1, N'_0) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ (N_1/N_0, *) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (N'_1/N'_0, *) \end{array}$$

é comutativo, onde  $\tilde{f}$  é a aplicação induzida por  $f$ .

*Demonstração.* Como  $\pi : (N_1, N_0) \longrightarrow (N_1/N_0, *)$  é contínua e sobrejetora, segue que  $(N_1/N_0, *)$  é compacto. Vamos provar que  $(N_1/N_0, *)$  também é um espaço de Hausdorff. De fato, dados  $[x]$  e  $[y]$  em  $N_1/N_0$ , distintos e diferentes de "zero", existem abertos  $V_1$  e  $V_2$  em  $N_1$  tais que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $x \in V_1$  e  $y \in V_2$ . Conseguimos estes abertos, pois  $N_1$  é um espaço Hausdorff. Assim,  $\pi(V_1)$  e  $\pi(V_2)$  são abertos em  $N_1/N_0$  tais que  $\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \emptyset$ ,  $[x] \in \pi(V_1)$  e  $[y] \in \pi(V_2)$ . Veja a Figura 15 para entender melhor como achamos os abertos.

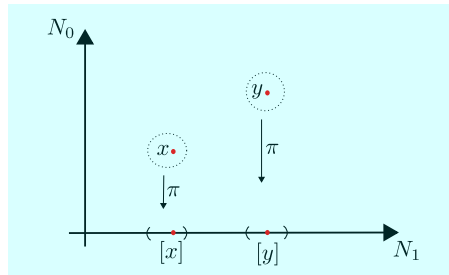


Figura 15 – Simplificação dos espaços, para acharmos os abertos da Proposição 11

Ainda resta mostrar que o diagrama é comutativo. Por definição  $\tilde{f}([x]) = [f(x)]$ . Assim,  $\pi \circ f(x) = [f(x)]$  e  $\tilde{f} \circ \pi(x) = [f(x)]$ . Donde,  $\pi \circ f = \tilde{f} \circ \pi$ .

□

**Corolário 6.** Se  $(N_1, N_0)$  e  $(N'_1, N'_0)$  são Hausdorff compactos e homotopicamente equivalentes, então

$$[N_1/N_0] = [N'_1/N'_0].$$

*Demonstração.* Por hipótese,  $(N_1, N_0)$  e  $(N'_1, N'_0)$  são homotopicamente equivalentes, então existem aplicações de pares  $f : (N_1, N_0) \longrightarrow (N'_1, N'_0)$  e  $g : (N'_1, N'_0) \longrightarrow (N_1, N_0)$  tais que  $f \circ g \cong Id_{(N'_1, N'_0)}$  e  $g \circ f \cong Id_{(N_1, N_0)}$ . Pela Proposição 14, os quadrados do diagrama abaixo são comutativos:

$$\begin{array}{ccccc} (N_1, N_0) & \xrightarrow{f} & (N'_1, N'_0) & \xrightarrow{g} & (N_1, N_0) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ (N_1/N_0, *) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (N'_1/N'_0, *) & \xrightarrow{\tilde{g}} & (N_1/N_0, *) \end{array}$$

Teremos que  $\tilde{f} \circ \tilde{g} \cong Id_{(N'_1/N'_0, *)}$  e  $\tilde{g} \circ \tilde{f} \cong Id_{(N_1/N_0, *)}$ . Portanto,  $(N_1/N_0, *)$  e  $(N'_1/N'_0, *)$  são homotopicamente equivalentes.

□

Considere  $N_0 \subset N_1$ , diremos que  $N_0$  é **retrato forte de deformação** de  $N_1$  se existir uma homotopia  $H : [0, 1] \times N_1 \longrightarrow N_1$  tal que  $H_0 = Id_{N_1}$  e  $H_1(x) \in N_0$ , para todo  $x \in N_1$ , além disso, para todo  $t \in [0, 1]$  e todo  $x \in N_0$ , temos  $H_t(x) = x$ .

**Corolário 7.** Quando  $N_0$  é um retrato forte de deformação de  $N_1$ , teremos que  $[N_1/N_0] = \bar{0}$ .

*Demonstração.* Uma vez que,  $N_0$  é um retrato forte de deformação de  $N_1$ , existe a aplicação de pares:

$$H_1 : (N_1, N_0) \longrightarrow (N_0, N_0)$$

que é uma equivalência homotópica (a inversa é a aplicação induzida pela inclusão  $i: N_0 \rightarrow N_1$ ). Assim,

$$[N_1/N_0] = [N_0/N_0] = [*] = 0.$$

□

**Exemplo 17.** Considere  $M_{[a,c]}$  compacto e sem ponto críticos ( $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  função altura).

Já vimos que,  $(M_a, M_c)$  é um par-índice para  $I(M_{[a,c]}) = \emptyset$ , não temos conjuntos invariantes em  $M_{[a,c]}$ . Donde,  $[M_a/M_c] = \bar{0}$ .

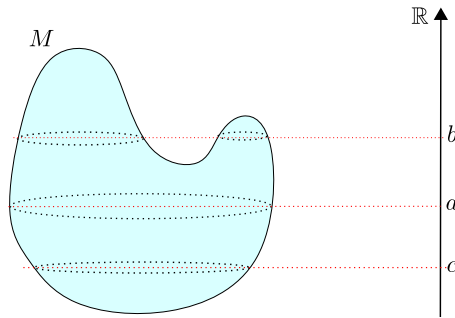


Figura 16 –  $[M_a/M_c] = \bar{0}$

**Exemplo 18. Cilindro com um nó:**

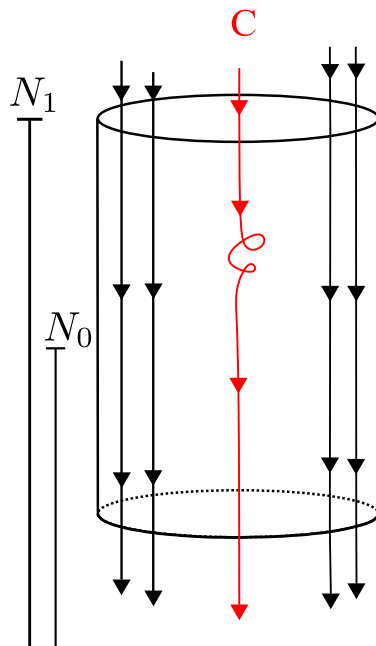


Figura 17 – Par-índice no cilindro

O cilindro com um nó  $C$  é dado na Figura 17.  $N_0$ , que é a parte compacta depois do nó  $C$ , é um retrato forte de deformação de  $N_1$ , que é a parte compacta antes do nó  $C$ , a homotopia é dada pelo fluxo.

Pelo corolário,  $[N_1/N_0] = \bar{0}$ . Vejamos que  $(N_1, N_0)$  é um par-índice para o cilindro com um nó:

1.  $N_0 \subset N_1$  são compactos;

2.  $S = I(\overline{N_1 \setminus N_0})$ ;
3.  $N_0$  é positivamente invariante em  $N_1$ , basta ver as linhas de fluxo no desenho;
4.  $N_0$  é conjunto de saída para  $N_1$ , novamente é só olhar as linhas de fluxo.

**Exemplo 19. Singularidades Hiperbólicas:**

Vamos considerar o fluxo da E.D.O.  $x' = F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Seja  $P_i$  uma singularidade hiperbólica dessa E.D.O.. Sabemos que, existe uma vizinhança  $N_1$  de  $P_i$  tal que o fluxo é o produto de uma parte instável de dimensão  $u_i$  por uma parte estável de dimensão  $s_i$ .  $N_1$  é o quadrado na Figura 18.

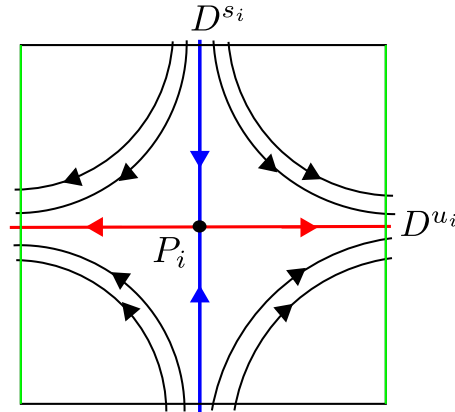


Figura 18 – Singularidade Hiperbólica

Defina  $N_0 = \partial D^{u_i} \times D^{s_i}$ .  $N_0$  é a borda verde do quadrado na Figura 8. Logo,  $(N_1, N_0)$  é um par-índice para  $P_i$ . Note que,

$$H : ([0, 1] \times D^{u_i}, [0, 1] \times \partial D^{u_i}) \longrightarrow (N_1, N_0)$$

$$(t, x) \longmapsto H_t(x) := x \cdot t$$

é uma homotopia. Com isso,  $(N_1, N_0) \cong (D^{u_i}, \partial D^{u_i})$ , então  $[N_1/N_0] = [D^{u_i}/\partial D^{u_i}]$ .

Perceba também que,  $D^{u_i}/\partial D^{u_i}$  é homotópico a  $(S^{u_i}, *)$  que é a esfera pontuada de dimensão  $u_i$ . Portanto,

$$h(P_i) = [D^{u_i}/\partial D^{u_i}] = [S^{u_i}].$$

Vamos denotar por  $\Sigma^u$  a classe de homotopia de  $(S^u, *)$ . Assim,  $h(P_i) = \Sigma^{u_i}$ . Com este exemplo, provamos a seguinte proposição

**Proposição 15.** O índice de Conley homotópico de uma singularidade hiperbólica de dimensão instável  $u$  é  $\Sigma^u$ .

**Exemplo 20.** O índice de Conley de um conjunto  $M_{[a,b]}$ .

Na teoria de Morse, se  $M_{[a,b]}$  é compacto e contém um ponto crítico  $p$ , o qual não é degenerado, então

$$h(I(M_{[a,b]})) = h(p) = [M_b/M_a] = \Sigma^{I(p)},$$

onde  $I(p)$  é o índice de Morse de  $p$ .

### 2.3.3 Soma de Índices de Conley

Esta seção é destinada a definição do produto wedge e mostrar como o índice de Conley interage com o wedge. Antes de darmos a definição vejamos um exemplo que nos motiva.

**Exemplo 21. Toro inclinado:** Considere a função altura no toro inclinado, como mostra a Figura 19.

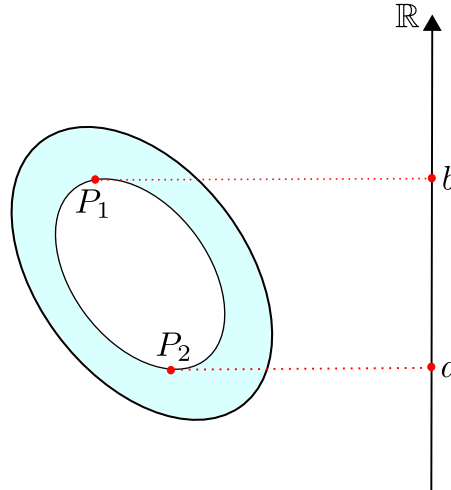


Figura 19 – Toro inclinado

Uma vez que  $a$  e  $b$  são valores críticos para a função altura, já sabemos que  $(M_b + \varepsilon, M_a - \varepsilon)$ , onde  $\varepsilon > 0$  é um par-índice para  $I(M_{[a,b]})$ . Poderíamos ter  $(N'_1, N'_0)$  e  $(N''_1, N''_0)$  pares-índices para as singularidades  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente. A partir destes dois queremos encontrar um par-índice para  $I(M_{[a,b]}) = \{P_1, P_2\}$ . Note que,  $(N_1, N_0) = (N'_1, N'_0) \cup (N''_1, N''_0)$  é um par-índice de  $I(M_{[a,b]})$ .

Com esse par-índice surge uma pergunta: "Como definir a classe de homotopia de espaços topológicos que são união de outros espaços topológicos?" Esta pergunta nos leva a definição:

Dados dois espaços pontuados  $(X, x_0), (Y, y_0)$  definimos o **wedge (ou buquê)** como o espaço quociente definido por:

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) := X \cup Y / \{x_0 \sim y_0\},$$

onde a união é disjunta.

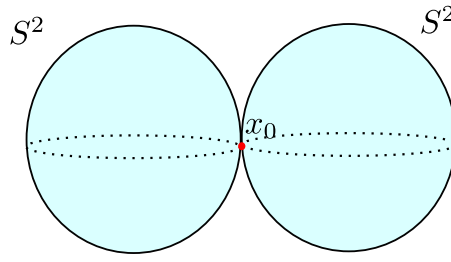
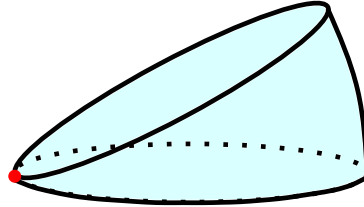
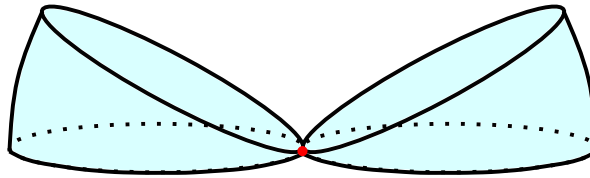
**Exemplo 22. Buquê de duas esferas:** Um exemplo mais simples e bom para entender a definição é o buquê de duas  $S^2$  no mesmo ponto  $x_0$ . Veja a figura 20.

Note que, se  $[X] = [X']$  e  $[Y] = [Y']$ , então  $[X \vee Y] = [X' \vee Y']$ , logo, podemos definir  $[X \vee Y] = [X] \vee [Y]$ . Voltando ao exemplo do toro inclinado, temos:

$$[N_1/N_0] = [N'_1/N'_0 \vee N''_1/N''_0] = [N'_1/N'_0] \vee [N''_1/N''_0].$$

Cada singularidade  $P_i$  tem índice de Conley dado pela classe de homotopia da Figura 21.



Figura 20 –  $(S^2, x_0) \vee (S^2, x_0)$ Figura 21 – Índice de Conley da singularidade  $P_i$ Figura 22 – Índice de Conley do conjunto  $\{P_1, P_2\}$ 

Assim, pela definição do wedge, temos que o índice de Conley do conjunto  $\{P_1, P_2\}$  é dado pela classe de homotopia da Figura 22.

O wedge também é conhecido como soma de índices de conjuntos invariantes isolados. Outra maneira de definir o wedge é da seguinte forma:

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) := (X \times \{y_0\}) \times (\{x_0\} \times Y) \subset X \times Y,$$

munido da topologia induzida (topologia produto).

**Proposição 16.** Considere  $S$  um conjunto invariante isolado, onde  $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$  e  $S_i \cap S_j = \emptyset$  se  $i \neq j$ . O índice de Conley de  $S$  é dado por:

$$h(S) = h(S_1) \vee \dots \vee h(S_n).$$

*Demonstração.* Considere  $(N_1^i, N_0^i)$  um par-índice de  $S_i$ , onde esses pares-índices são disjuntos dois a dois. Já vimos, no exemplo anterior, o caso  $n = 2$ , usando indução teremos:

$$\begin{aligned} h(S) &= [N_1/N_0] = [N_1^1/N_0^1] \vee \dots \vee [N_1^n/N_0^n] \\ &= h(S_1) \vee \dots \vee h(S_n) \end{aligned}$$

□

### 2.3.4 Existência de Pares-índices

Para que o índice de Conley homotópico fique bem definido, precisamos provar que dado um conjunto invariante isolado sempre existe um par-índice. Além disso, na próxima seção provaremos que o índice independe da escolha do par-índice. Antes de encontrarmos um par-índice vamos enunciar e provar o seguinte lema:

**Lema 4.** Considere  $N$  uma vizinhança isolante compacta de  $S$ , ou seja  $I(N) = S$ . Suponha que  $N_0 \subset N_1 \subset N$  são compactos, positivamente invariantes em  $N$  e satisfazem:

- (1)  $S \subset \text{int}(N_1)$ ;
- (2)  $S \cap N_0 = \emptyset$ ;
- (3)  $N_1 \cap \partial N = \partial N \subset N_0$ .

Então,  $(N_1, N_0)$  é um par índice para  $S = I(N)$ .

*Demonstração.* Vamos mostrar que (1), (2) e (3) implica nas condições (i), (ii) e (iii), da definição de par-índice, veja a Definição 11.

- (i) Pelos itens (1) e (2) temos que  $S \subset \text{int}(N_1) \setminus N_0 \subset \text{int}(N_1 \setminus N_0)$ . De fato,  $\text{int}(N_1) \setminus N_0$  é um aberto contido em  $N_1 \setminus N_0$ ;
- (ii)  $N_0$  é positivamente invariante em  $N_1$ :

De fato, dado  $x \in N_0$  e  $x \cdot [0, t] \subset N_1 \subset N$  e como por hipótese  $N_0$  é positivamente invariante em  $N$  então  $x \cdot [0, t] \subset N_0$ ;

- (iii)  $N_0$  é conjunto de saída para  $N_1$ :

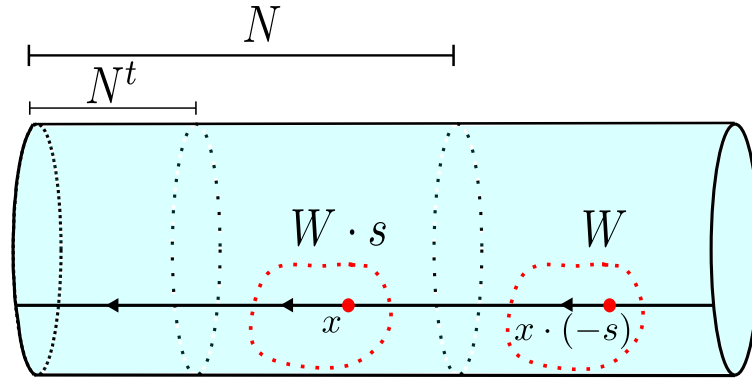
Com efeito, se  $x \in N_1$  e  $x \cdot \mathbb{R}_+ \subset N$ , então  $x \cdot \mathbb{R}_+ \subset N_1$ , pois  $N_1$  é positivamente invariante em  $N$ . Assim, existe  $s \geq 0$  tal que  $x \cdot [a, s] \subset N$  e  $x \cdot s \in \partial N$ . Novamente, usando o fato de  $N_1$  ser positivamente invariante em  $N$ , teremos  $x \cdot [0, s] \subset N_1$ , logo,  $x \cdot s \in N_1 \cap \partial N \subset N_0$ . Portanto,  $N_0$  é um conjunto de saída para  $N_1$ .

□

Dado um conjunto invariante isolado  $S = I(N)$ , onde  $N$  é uma vizinhança isolante de  $S$ , vamos encontrar um par-índice  $(N_1, N_0)$  para  $S$ . Seja  $N^t = \{x \in N \mid x \cdot [-t, 0] \subset N\}$ , podemos ver  $N^t$  como o conjunto dos pontos que "podem andar  $t$  para trás em  $N$ ", onde  $t \geq 0$ .

**Proposição 17.**  $N^t$  é compacto e positivamente invariante em  $N$ .

*Demonstração.* Para mostrar que  $N^t \subset N$  é compacto, basta mostrar que  $N^t$  é fechado. Para isto, mostraremos que  $N \setminus N^t$  é aberto.

Figura 23 – Esboço de  $N \setminus N^t$ 

Se  $x \in N \setminus N^t$ , então  $x \cdot [-t, 0] \not\subset N$ , logo, existe  $-s \in [-t, 0]$ , tal que,  $x \cdot (-s) \notin N$ . Uma vez que  $N$  é compacto e o fluxo é contínuo, existe uma vizinhança  $W$  de  $x \cdot (-s)$  tal que  $W$  está contida no complementar de  $N$  e  $W \cdot s \subset N$ . Assim,  $W \cdot s$  é uma vizinhança de  $x$  tal que  $W \cdot s \subset (N \setminus N^t)$ .

Agora, vamos mostrar que  $N^t$  é positivamente invariante em  $N$ . Dado  $x \in N^t$  tal que  $x \cdot [0, s] \subset N$ , tome  $y \in x \cdot [0, s]$ , logo,  $y = x \cdot v$  para algum  $v \in [0, s]$ . Precisamos mostrar que,  $y \cdot [-t, 0] \subset N$  (pois  $y \in N^t$ ), isto é,  $x \cdot [v-t, v] \subset N$ . vamos separar em dois casos:

(i)  $v - t \geq 0$ , temos  $x \cdot [v-t, v] \subset x \cdot [0, v] \subset N$ , pois  $v \leq s$ ;

(ii)  $v - t \leq 0$ , sabemos que  $x \cdot [-t, 0] \subset N$  e como,

$$x \cdot [v-t, v] = x \cdot [v-t, 0] \cup x \cdot [0, v],$$

temos que  $x \cdot [v-t, v] \subset N$ .

Em qualquer caso,  $y \in N^t$ . Donde,  $x \cdot [0, s] \subset N^t$ . Portanto,  $N^t$  é compacto e positivamente invariante em  $N$ .  $\square$

O conjunto  $N^t$  é importante para encontrarmos o par-índice para  $S = I(N)$ , pois nosso  $N_1 = N^t$ , visto que,  $I(N) = S \subset N^t$ .

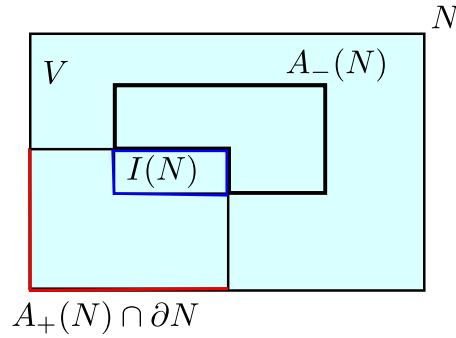
**Observação:**  $\cap_{t \geq 0} N^t = A_-(N) = \{x \in N; x \cdot \mathbb{R}_- \subset N\}$ .

Queremos encontrar o  $t$  tal que  $N_1 = N^t$ . Note que  $A_+(N) \cap \partial N$  é um conjunto compacto, pois é interseção de dois compactos, logo,  $V = N \setminus A_+(N) \cap \partial N$  é um aberto em  $N$ , veja a Figura 24. Uma vez que,

$$A_+(N) \cap \partial N \cap A_-(N) = S \cap \partial N = I(N) \cap \partial N = \emptyset,$$

então  $V$  é uma vizinhança de  $A_-(N)$ .

Pela observação, existe  $T' \geq 0$ , tal que,  $N^{T'} \subset N \setminus A_+(N) \cap \partial N$ , logo,  $N^{T'} \cap A_+(N) \cap \partial N = \emptyset$ . Considere  $N^{T'} \cap \partial N$ , que é disjunto de  $A_+(N)$ . Assim, todos os pontos de  $N^{T'} \cap \partial N$  tem um tempo positivo de saída.

Figura 24 – Esboço de  $I(N)$ 

Tome  $T'' \geq 0$  tal que  $x \in N^{T'} \cap \partial N \Rightarrow x \cdot [0, T''] \not\subset N$ . Seja  $T = \max\{T', T''\}$  e defina  $N_1 = N^T$ . Para construirmos  $N_0$ , considere o conjunto  $N_1 \cap \partial N$  e defina:

$$N_0 = N_1 \cap ((N_1 \cap \partial N) \cdot [0, T]),$$

Perceba que,  $N_0$  é compacto, pois é interseção de compactos.

**Proposição 18.**  $N_0$  é positivamente invariante em  $N_1$ .

*Demonstração.* Se  $x \in N_0$  é tal que  $x \cdot [0, s] \subset N_1$ , temos que mostrar que:

$$x \cdot [0, s] \subset N_0 = N_1 \cap ((N_1 \cap \partial N) \cdot [0, T]),$$

logo, basta mostra que,

$$x \cdot [0, s] \subset ((N_1 \cap \partial N) \cdot [0, T]).$$

Uma vez que,  $x \in N_0$ , então  $x = y \cdot t$ , onde  $y \in N_1 \cap \partial N$  e  $t \in [0, T]$  tais que  $y \cdot t \in N_1$ . Assim, tomando  $z \in x \cdot [0, s] = y \cdot [t, s+t]$ , então  $z = y \cdot w$ , onde  $w \in [t, t+s]$  e  $y \in N_1 \cap \partial N$ . Só resta provar que  $w \in [0, T]$  e  $y \cdot w \in N_1$ . Para isto, mostramos que  $y \cdot [0, s] \subset N_1$ . Como  $x \in N_0 \Rightarrow x \cdot [0, T] \subset N \Rightarrow y \cdot [t-T, t] \subset N$  e, por hipótese, temos que  $x \cdot [0, s] \subset N_1 \subset N$ , obtemos  $y \cdot [0, s+t] \subset N$ . Já sabemos que  $N_1$  é positivamente invariante e  $N$ , logo,  $y \cdot [0, s+t] \subset N_1$ .

Para finalizar, temos que  $[0, s+t] \subset [0, T]$ , visto que,  $t+s > T \Rightarrow y \cdot [0, s+t] \subset N_1 \subset N$ , mas os pontos de  $N_1$  saem para  $N$  em tempos maiores que  $T$ , ou seja, teríamos uma contradição. Assim,  $w \in [0, t+s] \subset [0, T]$ . Portanto,  $N_0$  é positivamente invariante em  $N_1$ .  $\square$

Relembrando, definimos  $N_0 \subset N_1 \subset N$  mostramos que são compactos e positivamente invariantes em  $N$ . Para finalizar a demonstração da existência de pares-índices, precisamos provar que  $(N_1, N_0)$  satisfazem as condições 1. 2. e 3. do Lema 4.

**1.  $S \subset \text{int}(N_1)$  :** Sabemos que  $I(N) = S \subset \text{int}(N)$ . Dado  $x \in S \Rightarrow x \cdot [-T, 0] \subset S \subset \text{int}(N)$ . Podemos pegar uma cobertura aberta para o compacto  $x \cdot [-T, 0]$  e tomar uma subcobertura finita, escolhendo o "menor" dos abertos  $U$  desta subcobertura, tal que,

$$U \cdot [-T, 0] \subset \text{int}(N)$$

assim,  $U \subset N^T = N_1 \Rightarrow x \in \text{int}(N_1)$ .

2.  $S \cap N_0 = \emptyset$  :

De fato,  $N_0 = N^T \cap ((N_1 \cap \partial N) \cdot [0, T])$ , os pontos de  $N_0$  deixam  $N$  para  $t > T$  e  $S = I(N)$  é o conjunto invariante de  $N$  (os pontos que não deixam  $N$ ).

3.  $N_1 \cap \partial N \subset N_0$  :

$$N_1 \cap \partial N = N_1 \cap ((N_1 \cap \partial N) \cdot 0) \subset N_1 \cap ((N_1 \cap \partial N) \cdot [0, T]) = N_0$$

$$\therefore N_1 \cap \partial N \subset N_0.$$

Portanto, o par  $(N_1, N_0)$  (que construímos) é um par-índice para  $S = I(N)$

### 2.3.5 Homotopia de Pares-índices

Agora, vamos verificar que o índice de homotopia de Conley para conjuntos invariantes está bem definido, isto é, independe da escolha de pares-índices para o conjunto invariante. A ideia principal para mostrar o Teorema 14 é construir uma equivalência homotópica entre  $N_1/N_0$  e  $M_1/M_0$ . Dados dois pares-índices,  $(M_1, M_0)$ ,  $(N_1, N_0)$  definimos a família de funções:

$$f_{t,u,v} : M_1/M_0 \longrightarrow N_1/N_0,$$

definido por:

$$f_{(t,u,v)}([x]_M) := \begin{cases} [x \cdot (t+u+v)]_N, & \text{se } x \cdot [0, t+u] \subset M_1 \setminus M_0 \text{ ou } x \cdot [t, t+u+v] \subset N_1 \setminus N_0 \\ *, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos fixar algumas hipótese sobre  $(t, u, v)$  :

1.  $t+u \geq 0, u+v \geq 0$ ;
2.  $x \cdot [-t, u] \subset M_1 \setminus M_0 \Rightarrow x \in N_1$ ;
3.  $x \in M_1, x \cdot [-u, v] \subset N_1 \setminus N_0 \Rightarrow x \in M_1 \setminus M_0$ .

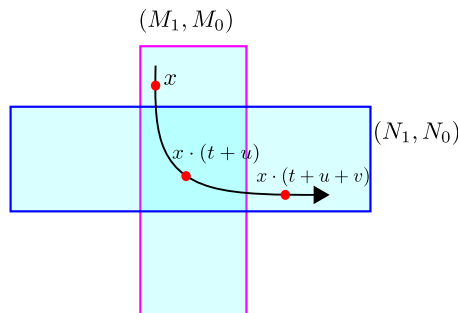


Figura 25 – Esboço das hipótese fixas

**Proposição 19.** Cada  $f_{(t,u,v)}$  é contínua.

A demonstração da Proposição 19 pode ser encontrada em (CAVALCANTI, 2007). Iremos omitir esta demonstração, pois o nosso objetivo central é aplicar a Teoria de Conley no Capítulo 3.

**Observação:** Quando as hipóteses 1., 2. e 3. são satisfeitas para um certo  $(t_0, u_0, v_0)$ , então são satisfeitos para qualquer  $(t, u, v)$ , onde  $t \geq t_0$ ,  $u \geq u_0$  e  $v \geq v_0$ .

**Proposição 20.** As funções  $f_{(t,u,v)}$ , onde  $(t, u, v)$  satisfazem as hipóteses que fixamos, são duas a duas homotópicas e cada uma é equivalência homotópica.

*Demonstração.* Considere  $f_{(t,u,v)}$  e  $f_{(t',u',v')}$ , cujos índices satisfazem 1, 2 e 3, tome

$$T = \max \{t, u, v, t', u', v'\}.$$

Afirmamos que

$$f : M_1/M_0 \times [T, \infty) \times [T, \infty) \times [T, \infty) \longrightarrow N_1/N_0$$

que é definida por  $f([x]_M, t_0, u_0, v_0) := f_{(t_0, u_0, v_0)}([x]_M)$ , é contínua e  $f_{(t,u,v)}$  é homotópica a  $f_{(T,T,T)}$ .

De fato, seja  $Q = [T, \infty) \times [T, \infty) \times [T, \infty)$ , como  $Q$  é convexo existe um caminho  $\lambda : [0, 1] \longrightarrow Q$  tal que  $\lambda(0) = (t, u, v)$  e  $\lambda(1) = (T, T, T)$ . Nossa homotopia será definida por

$$H_s([x]_M) := f_{\lambda(s)}([x]_M).$$

Analogamente, provamos que  $f_{t',u',v'}$  é homotópica a  $f_{(T,T,T)}$ . Portanto,  $f_{t',u',v'} \cong f_{(T,T,T)}$

□

**Lema 5.** Se  $f_{(t,u,v)} : M_1/M_0 \longrightarrow N_1/N_0$  e  $f'_{(t',u',v')} : N_1/N_0 \longrightarrow P_1/P_0$ , onde  $(t, u, v)$  satisfaz as hipóteses fixas e  $(t', u', v')$  satisfaz as hipóteses fixas (mudando apenas os conjuntos), então

$$f'_{(t',u',v')} \circ f_{(t,u,v)} = f''_{(t'',u'',v'')} : M_1/N_0 \longrightarrow P_1/P_0,$$

onde  $(t'' = t + t', u'' = u + u', v'' = v + v')$  satisfaz as hipótese fixas (com as alterações necessárias de conjuntos).

A prova do Lema 5, também, pode ser encontrada em (CAVALCANTI, 2007). Utilizaremos um caso particular deste Lema, onde  $(P_1, P_0) = (M_1, M_0)$ . Note que,  $f''_{(0,0,0)}$  é uma das  $(f'')'_s$ , isto é,  $(0, 0, 0)$  satisfaz as hipóteses fixas. Além disso, temos que  $f''_{(0,0,0)}([x]_M) = [x]_M$  se, e somente se,  $x \in M_1 \setminus M_0$ , donde,  $f''_{(0,0,0)} = id_{M_1/M_0}$ .

Assim,  $f' \circ f = f'' \cong f''_{(0,0,0)} = id_{M_1/M_0}$ , analogamente,  $f \circ f' \cong id_{N_1/N_0}$ . Portanto,  $f$  é uma equivalência homotópica.

**Exemplo 23. A inclusão induzida:** Considere  $(M_1, M_0)$  e  $(N_1, N_0)$  pares-índices para o conjunto invariante  $S$  tais que

$$M_1 \setminus M_0 \subset N_1 \quad e \quad M_0 \cap N_1 \subset N_0.$$

Considere a aplicação **inclusão induzida** (inclusão do quociente).

$$\tilde{i} : M_1/M_0 \longrightarrow N_1/N_0$$

definida por

$$\tilde{i}[x]_M := \begin{cases} [x]_N, & x \in M_1 \setminus M_0 \\ *, & x \in M_0. \end{cases}$$

Note que,  $\tilde{i}$  pode ser escrito como uma das  $f'$ s sendo assim, o índice de homotopia de Conley está bem definido para este exemplo.

$$f_{(0,0,0)}[x]_m := \begin{cases} [x]_N, & x \in M_1 \setminus M_0 \text{ e } x \in N_1 \setminus N_0 \\ *, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

mas  $M_1 \setminus M_0 \subset N_1$  implica em  $(M_1 \setminus M_0) \cap (N_1 \setminus N_0) \subset N_1 \setminus N_0$ , donde,

$$f_{(0,0,0)}[x]_M = \tilde{i}[x]_M \text{ e } [N_1 \setminus N_0] = [M_1 \setminus M_0].$$

Pelo Lema 4, podemos verificar que dado um par-índice  $(P_1, P_0)$  para S, então  $(P_1, P_0^{-t})$  e  $(P_1, P_1^t \cap P_0)$  também são pares-índices para S, onde

$$P_0^{-t} := \{x; \exists s \in [0, t] \text{ tal que } x \cdot [a, s] \subset P_1 \text{ e } x \cdot s \in P_0\}.$$

Vejamos um exemplo importante, o do **homomorfismo induzido pelo fluxo**:

**Exemplo 24.** Considere  $h(x) := x \cdot t$ , que é um homomorfismo, cujo inverso é  $h^{-1}(y) = y \cdot (-t)$ . Considere a função induzida por  $h$

$$\tilde{h} : P_1/P_0^{-t} \longrightarrow P_1^t/P_1^t \cap P_0$$

definida por:

$$\tilde{h}[x] := \begin{cases} [x-t], & x \in P_1 \setminus P_0 \\ *, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que,  $\tilde{h}$  é uma das  $f'$ s. Usando a notação  $(M_1, M_0) = (P_1, P_0^t)$  e  $(N_1, N_0) = (P_1^t, P_1^t \cap P_0)$  teremos:

$$f_{(t,-t,t)}[x] = \begin{cases} [x-t], & x \in P_1 \setminus P_0 \text{ e } x \cdot t \in N_1 \setminus N_0 \\ *, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Porém,  $x \in M_1 \setminus M_0 \Rightarrow x \cdot t \in N_1 \setminus N_0$ . De fato,  $x \in M_1 \setminus M_0 = P_1 \setminus P_0^{-t} \Rightarrow x \notin P_0^{-t}$ . Assim,  $x \cdot [0, t] \subset P_1 \setminus P_0 \Leftrightarrow x \cdot t \cdot [-t, 0] \subset P_1 \setminus P_0$ , logo,  $x \cdot t \subset P_1^t \setminus P_0^{-t} \subset N_1 \setminus N_0$ . Portanto,  $f_{(t,-t,t)}[x] = \tilde{h}[x]$ .

Só precisamos verificar que  $(t, -t, t)$  satisfazem as hipóteses fixas:

1.  $t - t \geq 0$ ;
2.  $x \cdot [-t, -t] = x \cdot (-t) \in M_1 \setminus M_0 \Rightarrow x \in P_1^t = N_1$ ;
3.  $x \in M_1 = P_1, x \cdot [t, t] = x \cdot t \in N_1 \setminus N_0 = P_1^t \setminus P_1^t \cap P_0$ , logo,  $x \cdot t \cdot [-t, 0] \subset P_1 \setminus P_0$ , então  $x \in P_1 \setminus P_0^t = M_1 \setminus M_0$ .

**Corolário 8.** Qualquer composição de inclusão induzida e homeomorfismo induzido por fluxos locais é uma equivalência homotópica, e quaisquer duas composições (com mesmo domínio e contradomínio) são homotópicas.

*Demonstração.* De fato, basta perceber que as inclusões induzidas e homeomorfismos induzidos por fluxos locais são escritos como  $f$ 's

□

Agora, vamos provar a equivalência dos pares-índices. Observe que a função  $T$  que aparece no Teorema 15 pode ser obtida utilizando o Lema 3.

**Teorema 15.** Considere  $(M_1, M_0)$  e  $(N_1, N_0)$  pares-índices de um conjunto invariante isolado  $S$ , e suponha que existe uma função  $T : M_1 \rightarrow [0, +\infty)$ . tal que, para  $x \in M_1$  temos  $x \cdot [0, T(x)] \subset N_1$  e para  $x \in M_0$  temos  $x \cdot [0, T(x)] \subset N_0$ . Assim, definimos

$$\begin{aligned} g : (M_1, M_0) &\longrightarrow (N_1, N_0) \\ x &\longmapsto x \cdot T(x) \end{aligned}$$

Esta  $g$  induz uma  $\tilde{g} : M_1/M_0 \rightarrow N_1/N_0$  que é uma das  $f$ 's. Em particular, temos a equivalência homotópica entre os espaços quocientes.

*Demonstração.* Seja  $K$  um compacto que é uma vizinhança de  $A^+$  disjunto de  $M_0$ , podemos pegar este  $K$  porque  $M_0$  é o conjunto de saída e  $A^+(N)$  é formado pelos pontos que não saem de  $N$  para  $t \geq 0$ .

Uma vez que,  $K$  e  $M_0$  são compactos disjuntos, podemos utilizar o Teorema de Urysohn, para garantir a existência de uma  $\varphi : N_1 \rightarrow [0, 1]$  que vale 0 em  $K$  e vale 1 em  $M_0$ . Com isso, defina  $h(x) := x \cdot \varphi(x) \cdot T(x)$ .

Temos que  $g \cong h$ , com efeito,  $H_t(x) := x \cdot ((1-t)\varphi(x) + t) \cdot T(x)$  é uma homotopia entre as funções. Queremos mostrar que  $\tilde{h} \cong f_{(t,u,v)}$ , onde  $\tilde{h}([x]) = [h(x)]$ . Escolhendo  $t \geq 0$  tal que  $N_1 \setminus N_0^{-t} \subset K$  ( $K$  é vizinhança de  $A^+(N)$ ), donde,

$$M_1/M_0 \xrightarrow{\tilde{h}} N_1/N_0 \xrightarrow{\tilde{\pi}} N_1/N_0^{-t}$$

onde  $\tilde{\pi}$  é a aplicação induzida pela projeção. Assim, se  $x \in K$  teremos  $\tilde{\pi} \circ \tilde{h}(x) = x$ , ou seja,  $\tilde{\pi} \circ \tilde{h}$  é uma inclusão induzida, logo, está na família das  $f$ 's. Então,  $\tilde{\pi} \circ \tilde{h} \cong f_{(t,u,v)}$ , como  $\tilde{\pi}$  tem uma inversa homotópica, teremos:

$$\tilde{h} \cong \tilde{\pi}^{-1} \circ f_{(t,u,v)} \cong f_{(t',u',v')}.$$



Portanto,  $\tilde{g}$  é uma equivalência homotópica e

$$[N_1/N_0] = [M_1/M_0]$$

□

Portanto os índices de Conley ficam bem definidos.



## FLUXOS GUTIERREZ-SOTOMAYOR

Nosso objetivo neste capítulo é aplicar a Teoria de Conley para uma classe especial de campos vetoriais, os campos Gutierrez-Sotomayor. Estes campos foram apresentados pela primeira vez por Gutierrez e Sotomayor em (GUTIERREZ; SOTOMAYOR, 1982). Eles definiram estes campos em variedades 2-dimensionais com singularidades simples. Posteriormente, Montúfar em (MONTÚFAR, 2010) denominou-os de variedades GS. Como na Teoria de Singularidade o termo "singularidade simples" tem outro significado, optamos por denominá-las singularidades controladas. Em homenagem aos grandes matemáticos Gutierrez e Sotomayor, abreviamos ao longo do texto por variedades, campos e fluxos GS.

### 3.1 Os campos vetoriais Gutierrez-Sotomayor

Nesta seção vamos definir o que é uma variedade 2-dimensional com singularidades controladas, e o que é um campo Gutierrez-Sotomayor, bem como o seu fluxo associado. As nossas principais referências foram (GUTIERREZ; SOTOMAYOR, 1982), (MONTÚFAR, 2010), (MONTÚFAR; REZENDE, 2020) e para a prova do Lema 6 utilizamos como referência a dissertação do Zigart (ZIGART, 2017).

Uma **variedade 2-dimensional com singularidades controladas**, ou simplesmente, **variedade GS** é um subconjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  tal que para todo  $p \in M$  existe uma vizinhança  $V_p$  de  $p$  em  $M$  e um difeomorfismo  $\psi : V_p \rightarrow \mathcal{P}$  de classe  $C^\infty$ , com  $\psi(p) = 0$ , onde  $\mathcal{P}$  é um dos seguintes subconjuntos do  $\mathbb{R}^3$ :

- (i) O **plano**  $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ ;

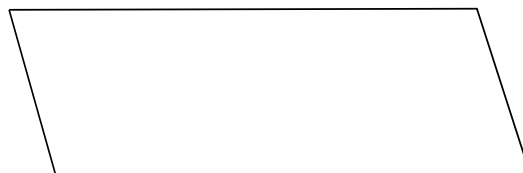


Figura 26 – Plano

- (ii) O **cone**  $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 - y^2 - x^2 = 0\}$ ;

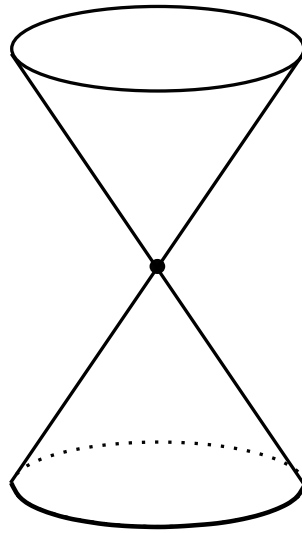


Figura 27 – Cone

(iii) O **cross-cap**  $\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid zx^2 - y^2 = 0 \text{ e } z \geq 0\}$ ;

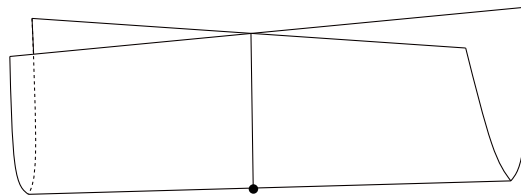


Figura 28 – Cross-cap

(iv) O **ponto duplo**  $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$ ;

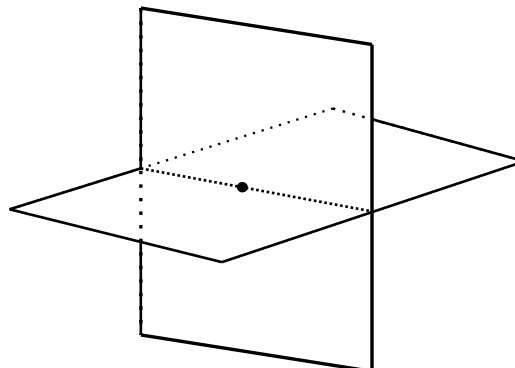


Figura 29 – Ponto duplo

(v) O **ponto triplo**  $\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$ .

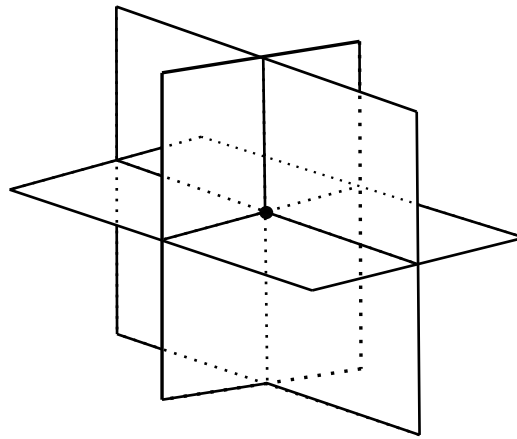


Figura 30 – Ponto Triplo

Como vimos no Exemplo 12, as singularidades que surgem na definição de variedade GS são superfícies parametrizadas e, estas parametrizações, são germes ou multi-germes  $\mathcal{A}$ -estáveis. A menos do cone, este por sua vez, não é estável. Porém, geometricamente este germe agrega valor a teoria.

**Exemplo 25.** O **toro pinçado** é um exemplo de variedade 2-dimensional com singularidades controladas. De fato, o toro pinçado é parecido com um toro, a menos de um dos círculos meridianos ser colapsado a um ponto. Veja a Figura 31. Neste ponto, temos uma vizinhança que é difeomorfo ao cone, os demais pontos ainda são localmente difeomorfos ao plano.

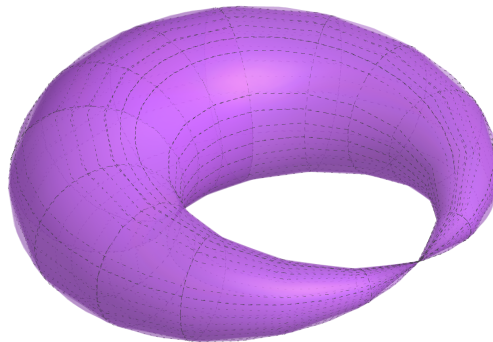


Figura 31 – Toro pinçado

Os difeomorfismos  $\psi$  que caracterizam localmente a variedade GS são chamados de **cartas locais**. Vamos denotar por  $M(\mathcal{P})$  o conjunto de todos os pontos  $p \in M$  tais que  $\psi(p) = 0$  para uma carta local  $\psi : V_p \rightarrow \mathcal{P}$ , onde  $\mathcal{P} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{W}, \mathcal{D}, \mathcal{T}$ . Note que,  $M(\mathcal{R})$  é uma variedade suave 2-dimensional que chamamos de **parte regular** de  $M$ . Dado  $p \in M(\mathcal{R})$ , todo ponto de  $\psi(V_p)$  pertence a  $M(\mathcal{R})$ , onde  $V_p$  é uma vizinhança aberta do ponto  $p$ . Agora,  $M(\mathcal{D})$  é uma variedade 1-dimensional, pois os pontos de  $\psi(V_p)$  situados no eixo- $z$  (dimensão 1) são todos pontos duplos, e os demais são pontos regulares. Veja a Figura 32. Por outro lado,  $M(\mathcal{W})$ ,  $M(\mathcal{C})$  e  $M(\mathcal{T})$  são conjuntos discretos, pois  $\psi(V_p)$  não possui outros pontos de  $M(\mathcal{W})$ ,  $M(\mathcal{C})$  e  $M(\mathcal{T})$ , respectivamente.

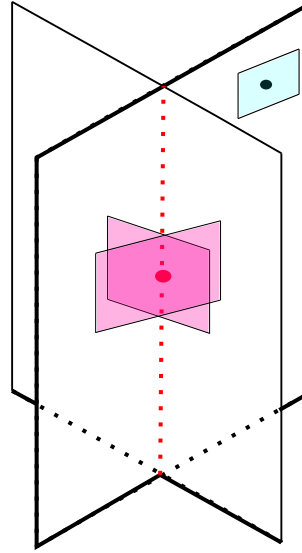


Figura 32 – Pontos duplos e pontos regulares

Um campo vetorial  $X$  de classe  $C^r$  em  $\mathbb{R}^n$  é **tangente** a uma variedade  $M \subset \mathbb{R}^n$  com singularidade controlada se for tangente às subvariedades  $M(\mathcal{P})$ , para todo  $\mathcal{P} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{W}, \mathcal{D}, \mathcal{I}$ . Vamos denotar o espaço vetorial destes campos por  $\mathcal{X}^r(M)$ . Considere  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade GS,  $\psi : V_p \rightarrow \mathcal{P}$  uma carta local de  $M$  em  $p$ , e  $\widehat{\psi} : \widehat{V}_p \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\widehat{\psi}^{-1} : \widehat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  extensões  $C^\infty$  de  $\psi$  e  $\psi^{-1}$  respectivamente, a conjuntos abertos  $\widehat{V}_p$  e  $\widehat{\mathcal{P}}$ . Considere, também,  $p$  uma singularidade de  $X \in \mathcal{X}^r(M)$ , isto é,  $X(p) = 0$ . A expressão local de  $X$  em função de  $\widehat{\psi}$  e  $\widehat{\psi}^{-1}$  é o campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  definido por:

$$X_{\psi(q)} = D\widehat{\psi}_p X(p),$$

onde  $q$  é tal que  $p = \widehat{\psi}^{-1}(q)$ . Tomando esta notação para  $X \in \mathcal{X}^r(M)$  e considerando  $p$  uma singularidade de  $X$ , ou seja,  $X(p) = 0$ , temos o seguinte lema que nos dá uma caracterização para a matriz  $DX$ :

**Lema 6.** Seja  $DX_{\psi(0)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a matriz da aplicação linear, com respeito a base canônica.

(i) Se  $p \in M(\mathcal{R})$ , então

$$DX_{\psi(0)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

(ii) Se  $p \in M(\mathcal{C})$ , então

$$DX_{\psi(0)} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -\beta & \alpha & \delta \\ \gamma & \delta & \alpha \end{pmatrix}.$$

(iii) Se  $p \in M(\mathcal{W})$ , então

$$DX_{\psi(0)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \beta/2 & 0 \\ 0 & \gamma & \beta \end{pmatrix}.$$

(iv) Se  $p \in M(\mathcal{D})$ , então

$$DX_{\psi(0)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ \delta & \rho & \gamma \end{pmatrix}.$$

(v) Se  $p \in M(\mathcal{T})$ , então

$$DX_{\psi(0)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

*Demonstração.* Considere a matriz da aplicação linear  $DX_{\psi(0)}$  na base canônica:

$$DX_{\psi(0)} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Seja  $p \in M(\mathcal{R})$ . Então  $\psi(q) \in \mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$ ,  $\forall q \in V_p$ . Assim, aplicando o campo em  $\psi(q) = (x, y, 0)$ , temos:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot x + A_2 \cdot y \\ B_1 \cdot x + B_2 \cdot y \\ C_1 \cdot x + C_2 \cdot y \end{pmatrix}.$$

Além disso, o campo é caracterizado por ser tangente em  $M(\mathcal{R})$ , logo, devemos ter:

$$C_1 \cdot x + C_2 \cdot y = 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Em particular se  $x = 0$  e  $y \neq 0$ , temos  $C_2 = 0$ , e se  $y = 0$  e  $x \neq 0$ , então  $C_1 = 0$ . Donde,

$$DX_{\psi(0)} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Iremos omitir a demonstração dos outros itens, mas a ideia é bem parecida com o item (i), de utilizar a geometria do campo para deduzir a sua forma algébrica.  $\square$

Utilizando o resultado do Lema 6, isto é, a caracterização da matriz  $DX$ , e a Definição 5 podemos caracterizar quando um ponto singular  $p \in M$  de um campo  $X \in \mathcal{X}^r(M)$  é hiperbólico:

- (i) Se os autovalores da matriz 2x2 superior à esquerda tem parte real não nula;
- (ii) Se  $\alpha \pm \sqrt{\delta^2 + \gamma^2 + \beta^2}$ ;
- (iii) Se  $\alpha\beta \neq 0$ ;
- (iv) Se  $\alpha\beta\gamma \neq 0$ ;

(v) Se  $\alpha\beta\gamma \neq 0$ .

**Observação:** Os itens acima estão associados com os itens do Lema 6, ou seja, se  $p \in M(\mathcal{R})$  teremos a caracterização da matriz  $DX(0)$  e quando os autovalores da matriz  $2 \times 2$  superior à esquerda tem parte real não nula, então  $p \in M(\mathcal{R})$  é hiperbólico. O mesmo ocorre com os demais.

**Definição 12.** Dada  $M$  uma variedade GS, diremos que  $X \in \mathcal{X}^r(M)$  é um **campo Gutierrez-Sotomayor** se satisfaz:

1.  $X$  tem um número finito de singularidades e de órbitas periódicas e todas elas são hiperbólicas;
2. Os ciclos limites singulares de  $X$  são simples e  $X$  não tem conexão de sela<sup>1</sup>;
3. Os conjuntos  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite de toda trajetória de  $X$  são ponto singular, órbita periódica ou ciclo singular.

O fluxo  $X_t$  induzido por esse campo é chamado de **fluxo Gutierrez-Sotomayor** ou apenas **fluxo GS**.

Nesse trabalho vamos considerar uma subclasse desses campos, onde o fluxo GS não admite órbitas periódicas nem ciclos limites. Mais precisamente, vamos considerar campos  $X \in \mathcal{X}^r(M)$  tais que:

1.  $X$  tem um número finito de singularidades e todas elas são hiperbólicas;
2.  $X$  não tem conexão de sela;
3. Os conjuntos  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limites de toda trajetória de  $X$  são constituídos de apenas um ponto singular.

A seguir, apresentamos todas as singularidades hiperbólicas, bem como o fluxo GS associado as mesmas, e fixamos nomenclaturas para cada uma delas. Estas nomenclaturas são utilizadas ao longo deste capítulo.

- Se  $p \in M(\mathcal{R})$ , dizemos que  $p$  tem natureza:
  - **a** quando  $p$  é uma singularidade atratora;
  - **s** quando  $p$  é uma singularidade sela;
  - **r** quando  $p$  é uma singularidade repulsora.

<sup>1</sup> uma trajetória  $\gamma \subset M(\mathcal{R})$  é uma conexão de sela se existem duas singularidades hiperbólicas  $p$  e  $q$  de  $X$  tais que  $W^u(p) \cap W^s(q) = \gamma$  e  $W^u(p) \cup W^s(q)$  é constituído de um número finito de trajetórias, onde  $W^u(p)$  e  $W^s(q)$  denotam os conjuntos instável de  $p$  e estável de  $q$ , respectivamente.



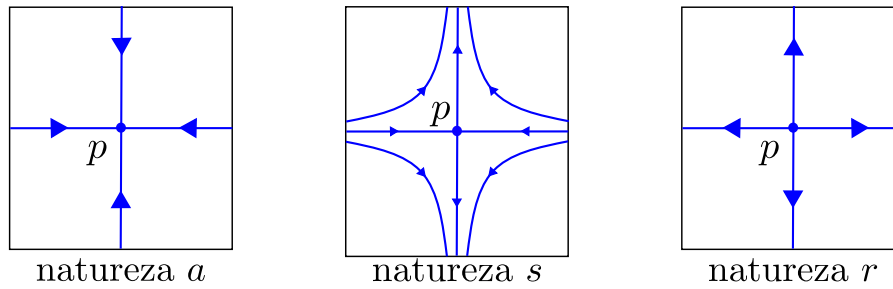


Figura 33 – As natureza da singularidade  $p \in M(\mathcal{R})$

- Se  $p \in M(\mathcal{C})$ , dizemos que  $p$  tem natureza:
  - **a** quando  $p$  é uma singularidade atratora;
  - **s** quando  $p$  é uma singularidade sela;
  - **r** quando  $p$  é uma singularidade repulsora.

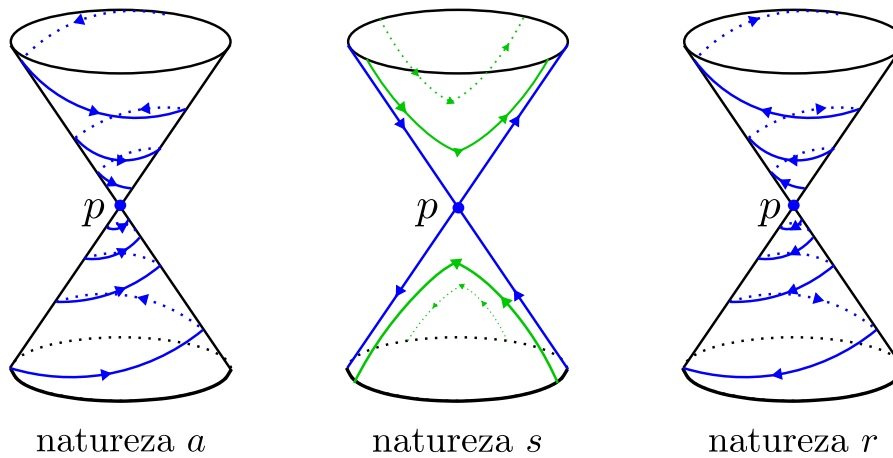


Figura 34 – As naturezas da singularidade  $p \in M(\mathcal{C})$

- Se  $p \in M(\mathcal{W})$ , dizemos que  $p$  tem natureza:
  - **a** quando  $p$  é uma singularidade atratora;
  - **s<sub>u</sub>** quando  $p$  é uma singularidade sela que tem a variedade instável singular;
  - **s<sub>s</sub>** quando  $p$  é uma singularidade sela que tem a variedade estável singular;
  - **r** quando  $p$  é uma singularidade repulsora.

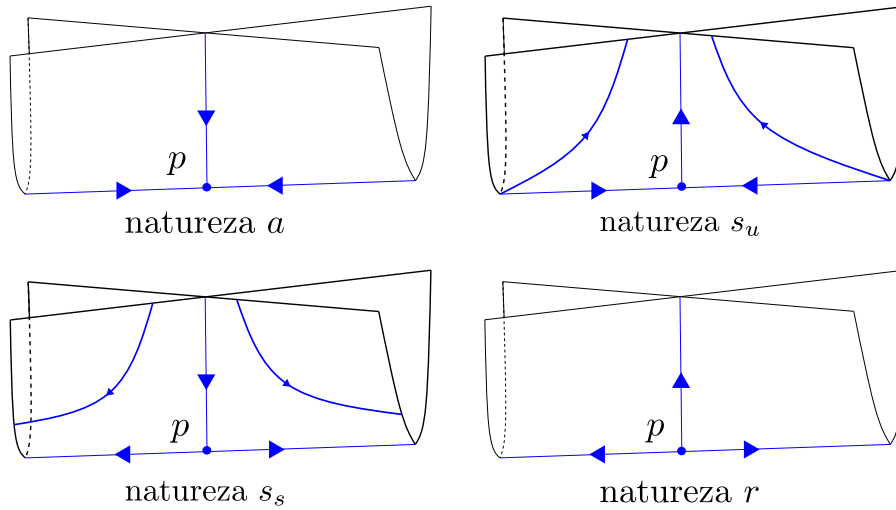


Figura 35 – As naturezas da singularidade  $p \in M(\mathcal{W})$

- Se  $p \in M(\mathcal{D})$ , dizemos que  $p$  tem natureza:
  - $\mathbf{a}^2$  quando  $p$  é uma singularidade atratora;
  - $\mathbf{sa}$  quando  $p$  é uma singularidade sela que é formada por sela e atrator regular;
  - $\mathbf{sr}$  quando  $p$  é uma singularidade sela que é formada por sela e repulsor regular;
  - $\mathbf{ss}_u$  quando  $p$  é uma singularidade sela que é formada por duas selas que se identificam nas suas variedade instáveis;
  - $\mathbf{ss}_s$  quando  $p$  é uma singularidade sela que é formada por duas selas que se identificam nas suas variedade estáveis;
  - $\mathbf{r}^2$  quando  $p$  é uma singularidade repulsora.

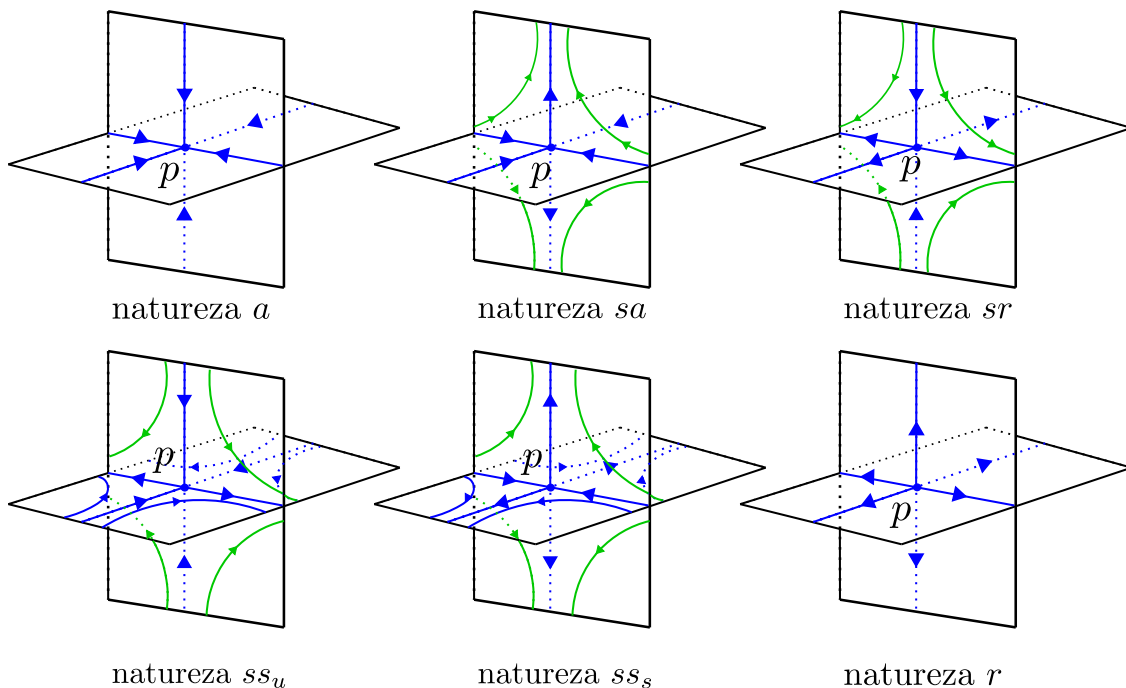


Figura 36 – As naturezas da singularidade  $p \in M(\mathcal{D})$

- Se  $p \in M(\mathcal{T})$ , dizemos que  $p$  tem natureza:
  - $\mathbf{a}^3$  quando  $p$  é uma singularidade atratora;
  - $\mathbf{ssa}$  quando  $p$  é uma singularidade sela que é formada por duas selas e um atrator regular;
  - $\mathbf{ssr}$  quando  $p$  é uma singularidade sela que é formada por duas selas e um repulsor regular;
  - $\mathbf{r}^3$  quando  $p$  é uma singularidade repulsora.

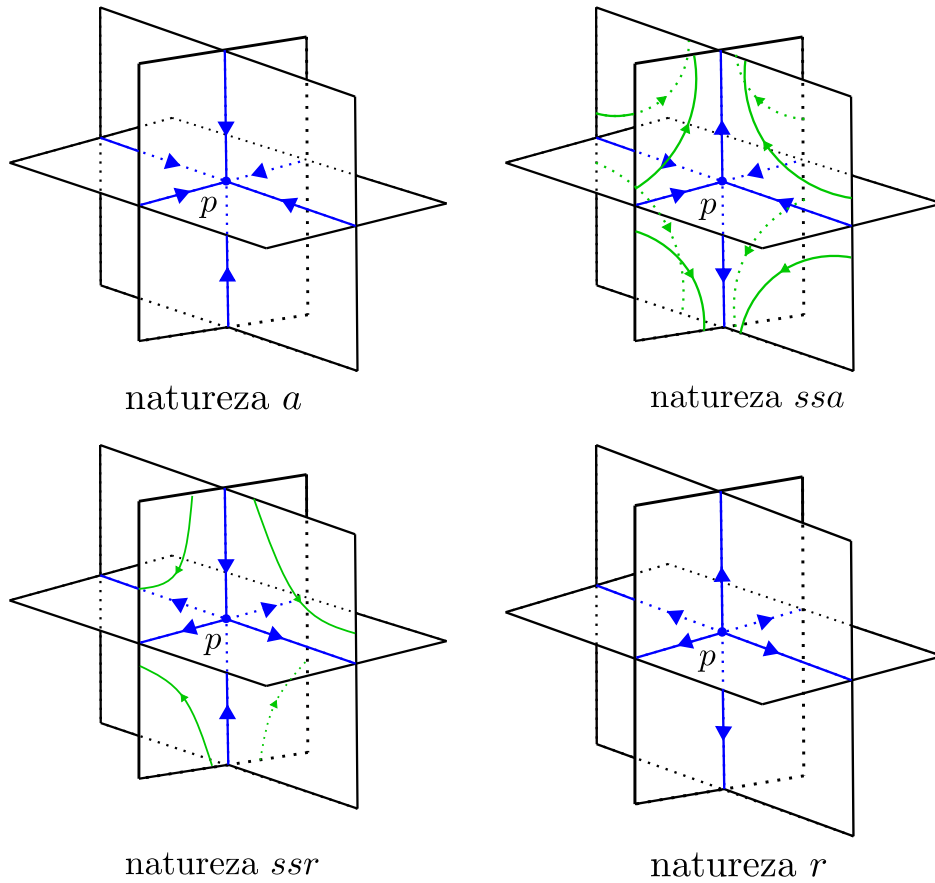


Figura 37 – As naturezas da singularidade  $p \in M(\mathcal{T})$

### 3.1.1 Teoria de Conley para fluxos GS

Nesta seção vamos aplicar a teoria de Conley, que vimos no Capítulo 2 para os fluxos GS. Nossas principais referências foram (MONTÚFAR, 2010) e (MONTÚFAR; REZENDE, 2020), onde foram apresentados os índices de Conley das singularidades do fluxo GS, para todos os tipos e naturezas existentes. Resumimos estes resultado em um único teorema:

**Teorema 16.** Sejam  $M$  uma variedade GS e  $X_t$  um fluxo Gutierrez-Sotomayor em  $M$ . Considere  $p$  uma singularidade de  $X_t$ .

- Se  $p \in M(\mathcal{R})$ , então

Natureza	Homotópico	Homológico	Numérico
<b>a</b>	$S^0$	$\tilde{H}_*(S^0)$	(1, 0, 0)
<b>s</b>	$S^1$	$\tilde{H}_*(S^1)$	(0, 1, 0)
<b>r</b>	$S^2$	$\tilde{H}_*(S^2)$	(0, 0, 1)

- Se  $p \in M(\mathcal{C})$ , então

Natureza	Homotópico	Homológico	Numérico
<b>a</b>	$S^0$	$\tilde{H}_*(S^0)$	(1, 0, 0)
<b>s</b>	$S^1$	$\tilde{H}_*(S^1)$	(0, 1, 0)
<b>r</b>	$S^2 \vee S^2 \vee S^1$	$\tilde{H}_*(S^2) \oplus \tilde{H}_*(S^2) \oplus \tilde{H}_*(S^1)$	(0, 1, 2)

- Se  $p \in M(\mathcal{W})$ , então

Natureza	Homotópico	Homológico	Numérico
<b>a</b>	$S^0$	$\tilde{H}_*(S^0)$	(1, 0, 0)
<b>s<sub>u</sub></b>	$\bar{0}$	$\tilde{H}_*(\bar{0})$	(0, 0, 0)
<b>s<sub>s</sub></b>	$S^1$	$\tilde{H}_*(S^1)$	(0, 1, 0)
<b>r</b>	$S^2 \vee S^2$	$\tilde{H}_*(S^2) \oplus \tilde{H}_*(S^2)$	(0, 0, 2)

- Se  $p \in M(\mathcal{D})$ , então

Natureza	Homotópico	Homológico	Numérico
<b>a</b>	$S^0$	$\tilde{H}_*(S^0)$	(1, 0, 0)
<b>sa</b>	$S^1$	$\tilde{H}_*(S^1)$	(0, 1, 0)
<b>sr</b>	$S^2$	$\tilde{H}_*(S^2)$	(0, 0, 1)
<b>ss<sub>u</sub></b>	$S^1$	$\tilde{H}_*(S^1)$	(0, 1, 0)
<b>ss<sub>s</sub></b>	$S^1 \vee S^1 \vee S^1$	$\tilde{H}_*(S^1) \oplus \tilde{H}_*(S^1) \oplus \tilde{H}_*(S^1)$	(0, 3, 0)
<b>r</b>	$S^2 \vee S^2 \vee S^2$	$\tilde{H}_*(S^2) \oplus \tilde{H}_*(S^2) \oplus \tilde{H}_*(S^2)$	(0, 0, 3)

- Se  $p \in M(\mathcal{T})$ , então

Natureza	Homotópico	Homológico	Numérico
<b>a</b>	$S^0$	$\tilde{H}_*(S^0)$	(1, 0, 0)
<b>ssa</b>	$S^1$	$\tilde{H}_*(S^1)$	(0, 1, 0)
<b>ssr</b>	$S^2$	$\tilde{H}_*(S^2)$	(0, 0, 1)
<b>r</b>	$\bigvee_{i=1}^7 S^2$	$\bigoplus_{i=1}^7 \tilde{H}_*(S^2)$	(0, 0, 7)

*Demonstração.* Em todos os casos as setas nas figuras representam as homotopias e os quocientes entre espaços. Quase sempre utilizamos as linhas do fluxo para nos guiar nas contrações e homotopias.

- Vamos começar analisando as singularidades do tipo  $p \in M(\mathcal{R})$ .

- (i) O primeiro caso que vamos considerar são as singularidades de natureza atratora  $a$ . Neste caso, podemos tomar um par-índice  $(N, L)$  formado pelo retângulo  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e por  $L = \emptyset$ , como mostrado na Figura 38.

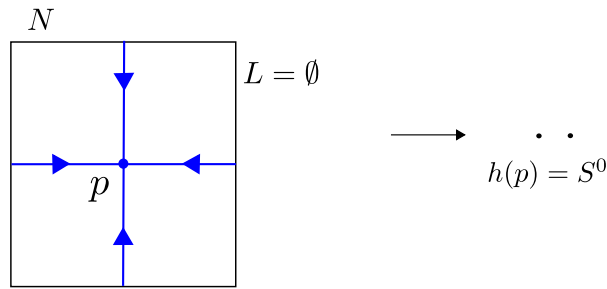


Figura 38 – Índice de Conley homotópico da singularidade  $p \in M(\mathcal{R})$  com natureza  $a$

Agora, para calcular o índice de Conley homológico desta singularidade, utilizamos os cálculos apresentados no Exemplo 10, daí:

$$\tilde{H}_p(S^0) = \tilde{H}_p(S^0; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 0; \\ 0, & p \geq 1. \end{cases}$$

Assim, o índice de Conley numérico para esta singularidade é  $(1, 0, 0)$ .

- (ii) O segundo caso são as singularidades de natureza  $s$ . Aqui, tomamos o par-índice  $(N, L)$  composto pelo retângulo  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e por  $L$  que é formado pelos dois segmentos de reta em vermelho na fronteira de  $N$ , como pode ser visto na Figura 39.

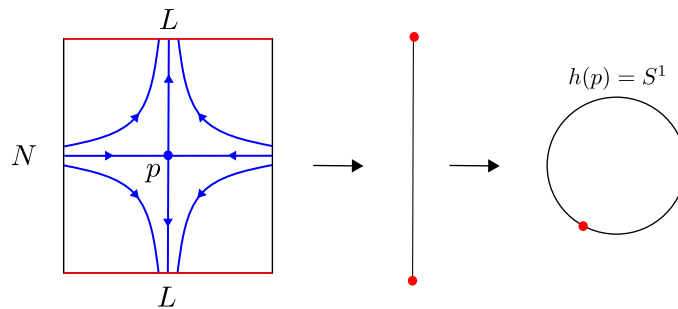


Figura 39 – Índice de Conley da singularidade  $p \in M(\mathcal{R})$  e natureza  $s$

Novamente, para calcular o índice de Conley homológico desta singularidade, utilizamos o Exemplo 10, daí:

$$\tilde{H}_p(S^1) = \tilde{H}_p(S^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 1; \\ 0, & p \neq 1. \end{cases}$$

Donde, o índice de Conley numérico para esta singularidade é  $(0, 1, 0)$ .

- (iii) O terceiro e último caso desse tipo de singularidade são as de natureza repulsora  $r$ . Neste caso, tomamos o par-índice  $(N, L)$  e que  $N$  é um retângulo em torno da singularidade  $p$ , e  $L$  é toda a borda do retângulo  $N$ . Veja na Figura 40.

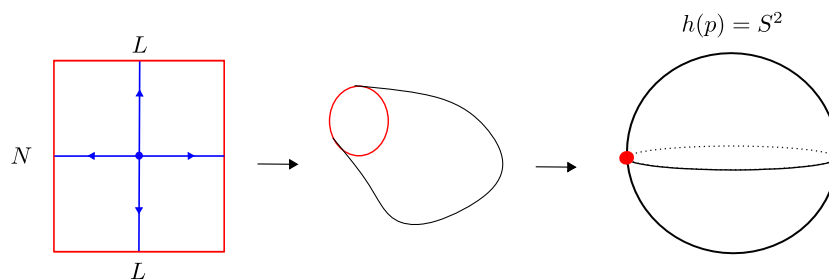


Figura 40 – Índice de Conley homotópico da singularidade  $p \in M(\mathcal{R})$  e natureza  $r$

Os índices de Conley homológico e numérico de são obtidos da mesma maneira que nos casos anteriores. Logo, o índice de Conley homológico é dado por:

$$\tilde{H}_p(S^2) = \tilde{H}_p(S^2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 2; \\ 0, & p \neq 2. \end{cases}$$

E o índice de Conley numérico é dado por  $(0, 0, 1)$ .

- Agora, vamos analisar as singularidades do tipo  $p \in M(\mathcal{C})$ .
  - (i) O primeiro caso que vamos observar são as singularidades de natureza atratora  $a$ . Neste caso, tomamos um par-índice  $(N, L)$  formado pelo cone  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e  $L = \emptyset$  como vemos na Figura 41.

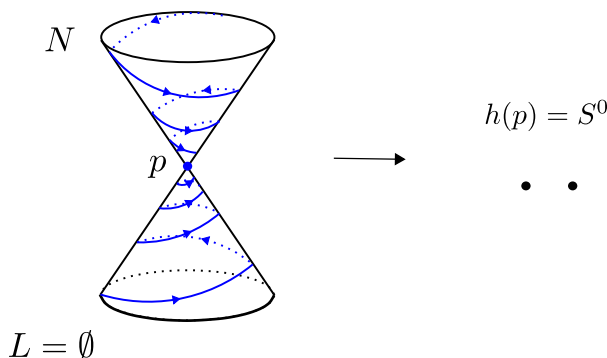


Figura 41 – Índice de Conley homotópico da singularidade  $p \in M(\mathcal{C})$  e natureza  $a$

Novamente, para calcular o índice de Conley homológico desta singularidade, utilizamos o Exemplo 10, logo:

$$\tilde{H}_p(S^0) = \tilde{H}_p(S^0; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 0; \\ 0, & p \geq 1. \end{cases}$$

Assim, podemos calcular o índice de Conley numérico para esta singularidade, que é  $(1, 0, 0)$ .

- (ii) O segundo caso são as singularidade de natureza sela  $s$ . Aqui, tomamos o par-índice  $(N, L)$  composto pelo cone  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e  $L$  formado pelos dois segmentos em vermelho na fronteira de  $N$ , isso pode ser visto na figura 42.

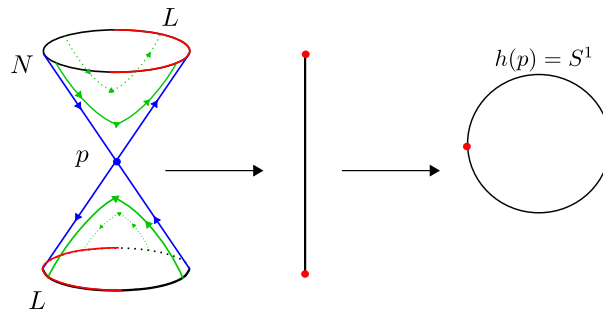


Figura 42 – Índice de Conley homotópico da singularidade  $p \in M(\mathcal{R})$  e natureza  $s$

Novamente, para calcular o índice de Conley homológico desta singularidade, utilizamos os cálculos do Exemplo 10, daí:

$$\tilde{H}_p(S^1) = \tilde{H}_p(S^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 1; \\ 0, & p \neq 1. \end{cases}$$

Donde, o índice de Conley numérico para esta singularidade é  $(0, 1, 0)$ .

- (iii) O terceiro e último caso desse tipo de singularidade são as de natureza repulsora  $r$ . Neste caso, tomamos um par-índice  $(N, L)$  formado pelo cone  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e  $L$  composto de duas circunferências na borda do cone  $N$ . O processo de tomar a equivalência  $N/L$  e a deformação homotópica pode ser visto na Figura 43.

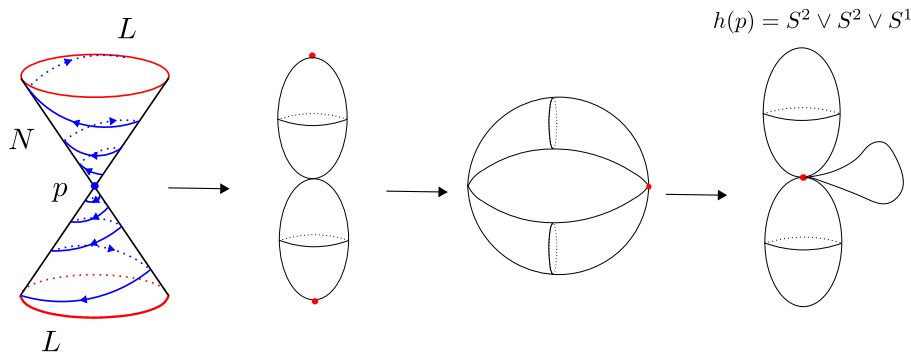


Figura 43 – Índice de Conley homotópico da singularidade  $p \in M(\mathcal{R})$  e natureza  $r$

Para esta singularidade, utilizamos os resultados do Exemplo 11, pois precisamos calcular a homologia reduzida desse buquê, que é dada por:

$$\tilde{H}_p(S^2 \vee S^2 \vee S^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & p = 2; \\ \mathbb{Z}, & p = 1; \\ 0, & p \neq 1, 2. \end{cases}$$

Assim, o índice de Conley numérico desta singularidade é dado por  $(0, 1, 2)$ .

- Agora, vamos analisar as singularidades do tipo  $p \in M(\mathcal{D})$ .

- (i) O primeiro caso que vamos observar são as singularidades de natureza atratora  $a$ . Neste caso, tomamos um par-índice  $(N, L)$  formado por dois planos intersectados  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e  $L = \emptyset$  como vemos na Figura 44.

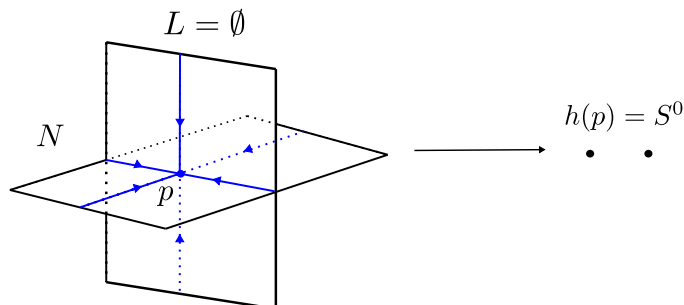


Figura 44 – Índice de Conley homotópico da singularidade  $p \in M(\mathcal{D})$  e natureza  $a$

Os índices de Conley homológico e numérico são dados da mesma forma que nos casos anteriores. Logo:

$$\tilde{H}_p(S^0) = \tilde{H}_p(S^0; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 0; \\ 0, & p \geq 1. \end{cases}$$

Assim, podemos calcular o índice de Conley numérico para esta singularidade, que é  $(1, 0, 0)$ .

- (ii) O segundo caso são as singularidades de natureza  $sa$ . Aqui tomamos como par-índice o par de compactos  $(N, L)$  composto pelos dois planos intersectados  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e  $L$  é formado pelos dois segmentos em vermelho na fronteira de  $N$ , isso pode ser visto na Figura 45.

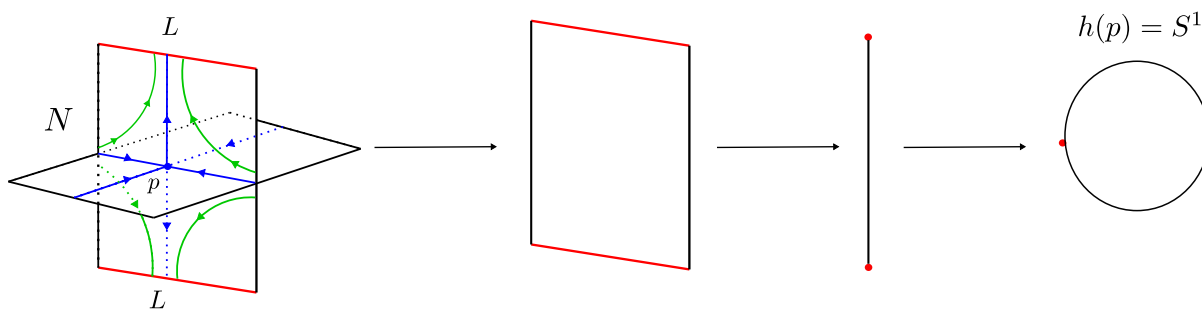


Figura 45 – Índice de Conley homotópico da singularidade  $p \in M(\mathcal{D})$  e natureza  $sa$

Novamente, o índice de Conley homológico é dado por:

$$\tilde{H}_p(S^1) = \tilde{H}_p(S^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 1; \\ 0, & p \neq 1. \end{cases}$$

Já o numérico é dado por  $(0, 1, 0)$ .

- (iii) O terceiro caso desse tipo de singularidade são as de natureza  $sr$ . Neste caso, considere o par-índice  $(N, L)$  formado pelos dois planos intersectados  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e  $L$



é composto pelos segmentos em vermelho na borda de  $N$ . O processo de tomar a equivalência  $N/L$  e a deformação homotópica pode ser visto na Figura 46.

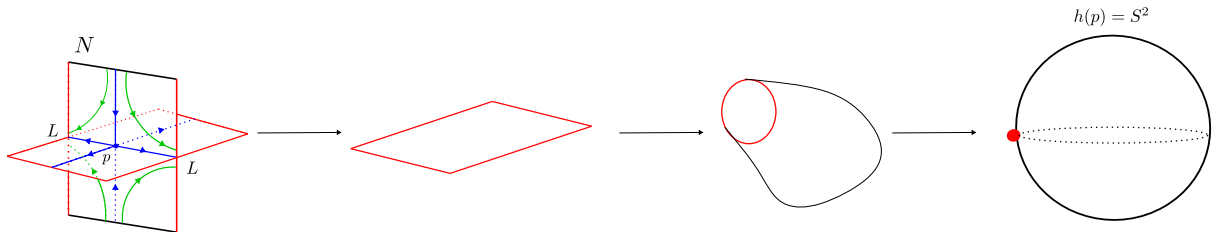


Figura 46 – Índice de Conley da singularidade  $p \in M(\mathcal{D})$  e natureza  $sr$

O índice de Conley homológico desta singularidade é dado por:

$$\tilde{H}_p(S^2) = \tilde{H}_p(S^2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 2; \\ 0, & p \neq 2. \end{cases}$$

Portanto, o índice numérico é dado por  $(0, 0, 1)$ .

- (iv) O quarto caso que vamos observar são as singularidades de natureza  $ss_u$ . Neste caso, tomamos como par-índice o par  $(N, L)$  formado pelos dois planos intersectados  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e  $L$  é composto pelos quatro segmentos de reta na borda de  $N$ . O processo de tomar a equivalência  $N/L$  e a deformação homotópica pode ser visto na Figura 47.

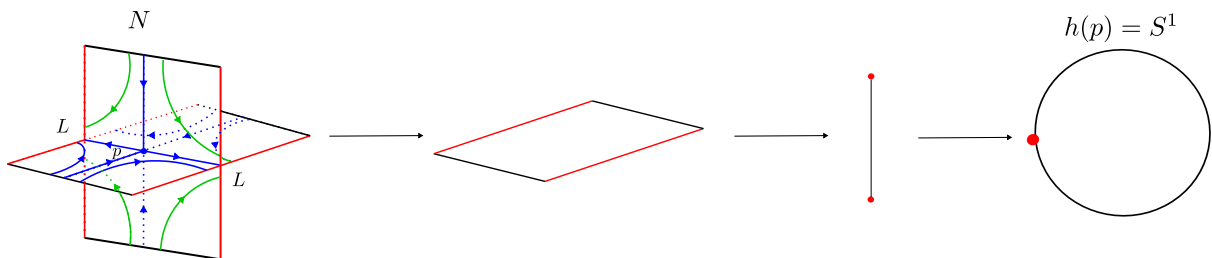


Figura 47 – Índice de Conley homotópico da singularidade  $p \in M(\mathcal{D})$  e natureza  $ss_u$

O índice de Conley homológico desta singularidade é dado por:

$$\tilde{H}_p(S^1) = \tilde{H}_p(S^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 1; \\ 0, & p \neq 1. \end{cases}$$

Portanto, o índice numérico é dado por  $(0, 1, 0)$ .

- (v) O quinto caso são as singularidade de natureza  $ss_s$ . Aqui, consideramos um par-índice  $(N, L)$  composto pelos dois planos intersectados  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e  $L$  é formado pelos quatro segmentos em vermelho na fronteira de  $N$ , isso pode ser visto na Figura 48.

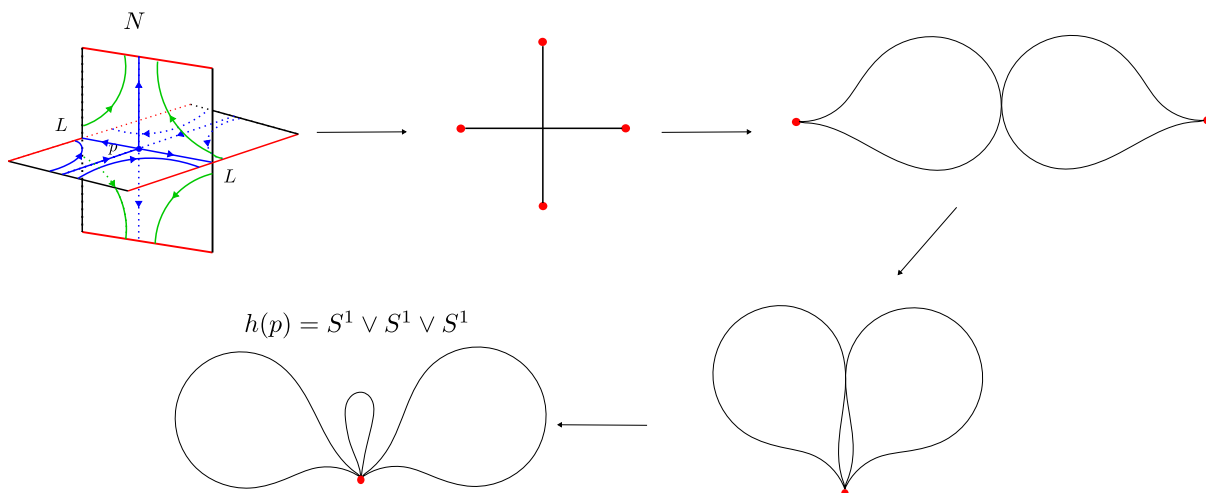


Figura 48 – Índice de Conley da singularidade  $p \in M(\mathcal{D})$  e natureza  $ss_s$

Para esta singularidade, usamos o Exemplo 11, pois precisamos calcular a homologia reduzida desse buquê, que é dada por:

$$\tilde{H}_p(S^1 \vee S^1 \vee S^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & p = 1; \\ 0, & p \neq 1. \end{cases}$$

Assim, o índice de Conley numérico desta singularidade é dado por  $(0, 3, 0)$ .

(vi) O sexto e último caso desse tipo de singularidade são as de natureza repulsora  $r$ . Neste caso, tomamos um par-índice  $(N, L)$  formado por dois planos intersectados  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e  $L$  é composto pela borda de  $N$ , que na Figura 49 representamos  $L$  de vermelho. O processo de tomar a equivalência  $N/L$  e a deformação homotópica pode ser visto na figura 49.

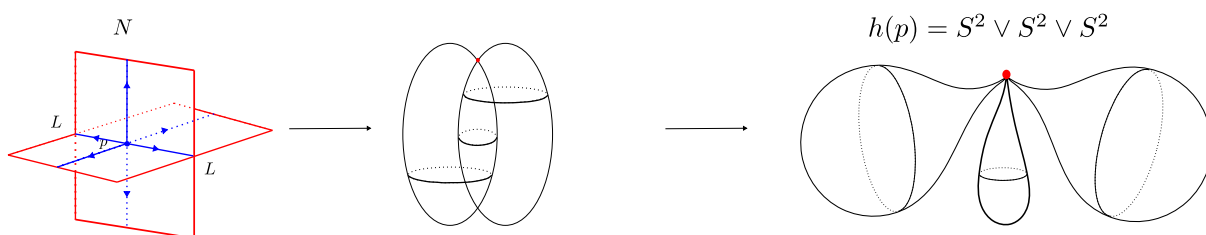


Figura 49 – Índice de Conley homotópico da singularidade  $p \in M(\mathcal{D})$  e natureza  $r$

Utilizando o Exemplo 11, pois precisamos calcular a homologia reduzida desse buquê, temos:

$$\tilde{H}_p(S^2 \vee S^2 \vee S^2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & p = 2; \\ 0, & p \neq 2. \end{cases}$$

Assim, o índice de Conley numérico desta singularidade é dado por  $(0, 3, 0)$ .

- Agora, vamos analisar as singularidades do tipo  $p \in M(\mathcal{W})$ .

- (i) O primeiro caso que vamos observar são as singularidades de natureza atratora  $a$ . Neste caso, tomamos um par-índice  $(N, L)$  formado pelo cross-cap  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e  $L = \emptyset$  como vemos na Figura 50.

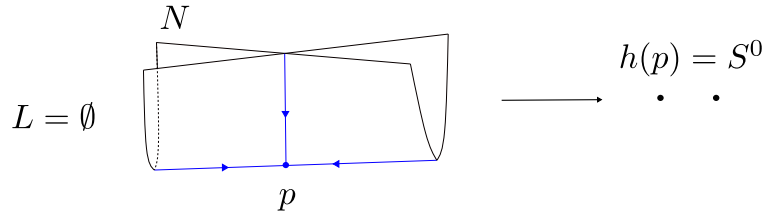


Figura 50 – Índice de Conley homotópico da singularidade  $p \in M(\mathcal{W})$  e natureza  $a$

O índice de Conley homológico é dado da mesma forma que nos casos anteriores. Logo:

$$\tilde{H}_p(S^0) = \tilde{H}_p(S^0; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 0; \\ 0, & p \geq 1. \end{cases}$$

Assim, podemos calcular o índice de Conley numérico para esta singularidade, que é dado por  $(1, 0, 0)$ .

- (ii) O segundo caso são as singularidades de natureza  $s_u$ . Aqui tomamos um par-índice  $(N, L)$  composto pelo cross-cap  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e  $L$  é formado pelos dois segmentos em vermelho na borda de  $N$ , isso pode ser visto na Figura 51.

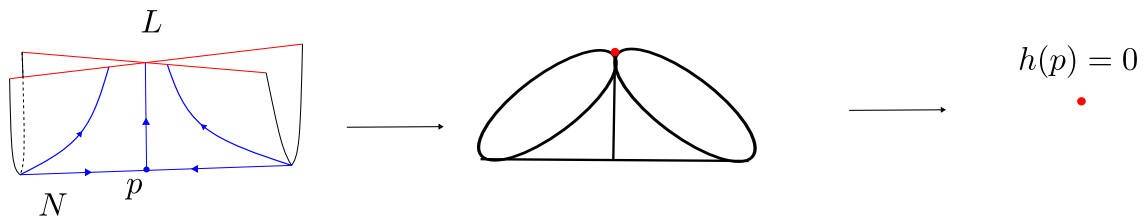


Figura 51 – Índice de Conley homotópico da singularidade  $p \in M(\mathcal{W})$  e natureza  $s_u$

Para este caso, o índice de Conley homológico é zero, pois é dado pela homologia do espaço formado por um único ponto, portanto, o índice de Conley numérico é  $(0, 0, 0)$ .

- (iii) O terceiro caso desse tipo de singularidade são as de natureza  $s_s$ . Neste caso, tomamos um par-índice  $(N, L)$  formado pelo cross-cap  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e  $L$  é composto pelos segmentos em vermelho na borda de  $N$ . O processo de tomar a equivalência  $N/L$  e a deformação homotópica pode ser visto na Figura 52.

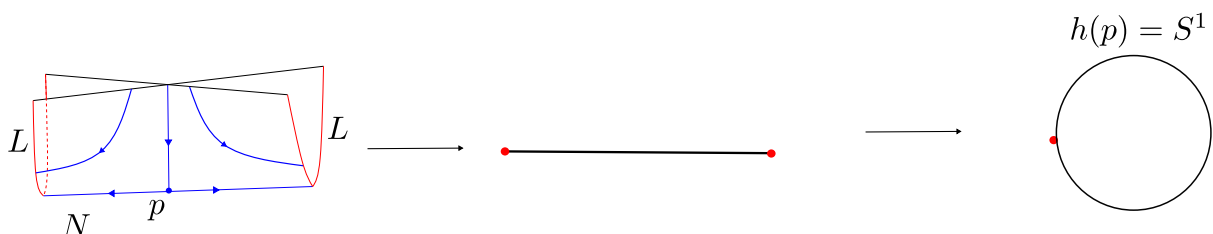


Figura 52 – Índice de Conley homotópico da singularidade  $p \in M(\mathcal{W})$  e natureza  $s_s$

O índice de Conley homológico desta singularidade é dado por:

$$\tilde{H}_p(S^1) = \tilde{H}_p(S^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 1; \\ 0, & p \neq 1. \end{cases}$$

Portanto, o índice numérico é dado por  $(0, 1, 0)$ .

- (iv) O quarto caso que vamos analisar são as singularidades de natureza  $r$ . Neste caso, tomamos um par-índice  $(N, L)$  formado pelo cross cap  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e  $L$  é composto pela borda de  $N$ , que representamos em vermelho, veja a Figura 53. O processo de tomar a equivalência  $N/L$  e a deformação homotópica pode ser visto na figura 53.

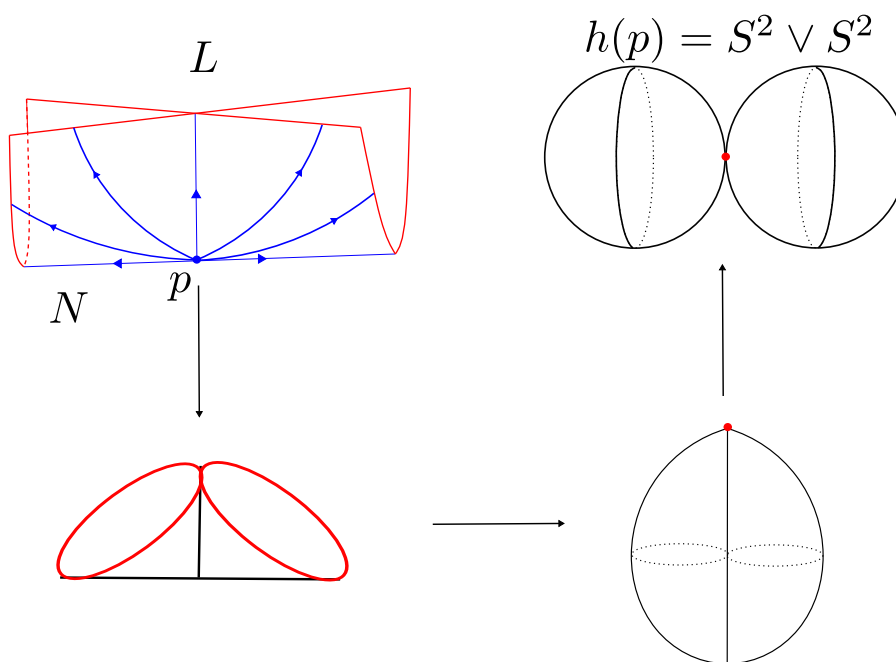


Figura 53 – Índice de Conley homotópico da singularidade  $p \in M(\mathcal{W})$  e natureza  $r$

Como nos casos de buquê, utilizamos o Exemplo 11, para calcular o índice de Conley homológico desta singularidade:

$$\tilde{H}_p(S^2 \vee S^2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & p = 2; \\ 0, & p \neq 2. \end{cases}$$

Assim, o índice de Conley numérico desta singularidade é dado por  $(0, 2, 0)$ .

- Agora, vamos analisar as singularidades do tipo  $p \in M(\mathcal{T})$ .

- (i) O primeiro caso que vamos considerar são as singularidades de natureza atratora  $a$ . Neste caso, tomamos um par-índice  $(N, L)$  formado por três planos intersectados  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e  $L = \emptyset$  como vemos na Figura 54.

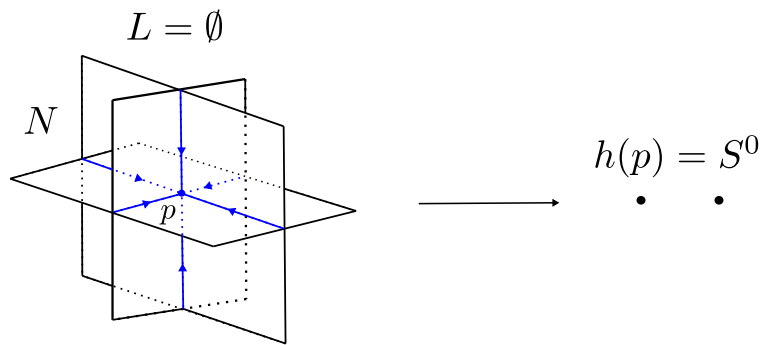


Figura 54 – Índice de Conley homotópico da singularidade  $p \in M(\mathcal{T})$  e natureza  $a$

Novamente, o índice de Conley homológico é dado por:

$$\tilde{H}_p(S^1) = \tilde{H}_p(S^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 1; \\ 0, & p \neq 1. \end{cases}$$

Já o índice de Conley numérico é dado por  $(0, 1, 0)$ .

- (ii) O segundo caso desse tipo de singularidade são as de natureza  $ssa$ . Neste caso, tomamos um par-índice  $(N, L)$  formado por três planos intersectados  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e  $L$  é composto pelos segmentos em vermelho na borda de  $N$ . O processo de tomar a equivalência  $N/L$  e a deformação homotópica pode ser visto na Figura 55.

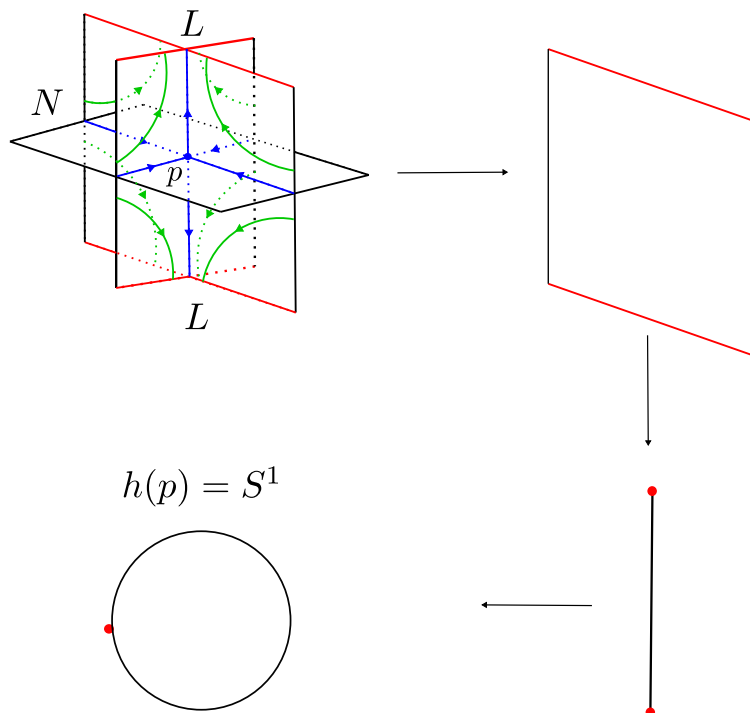


Figura 55 – Índice de Conley homotópico da singularidade  $p \in M(\mathcal{T})$  e natureza  $ssa$

O índice de Conley homológico desta singularidade é dado por:

$$\tilde{H}_p(S^1) = \tilde{H}_p(S^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 1; \\ 0, & p \neq 1. \end{cases}$$

Portanto, o índice de Conley numérico é dado por  $(0, 1, 0)$ .

- (iii) O terceiro caso são as singularidade de natureza *ssr*. Aqui escolhemos um par-índice  $(N, L)$  formado pelos três planos intersectados  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e  $L$  é formado pelos segmentos em vermelho na borda de  $N$ , isso pode ser visto na Figura 56.

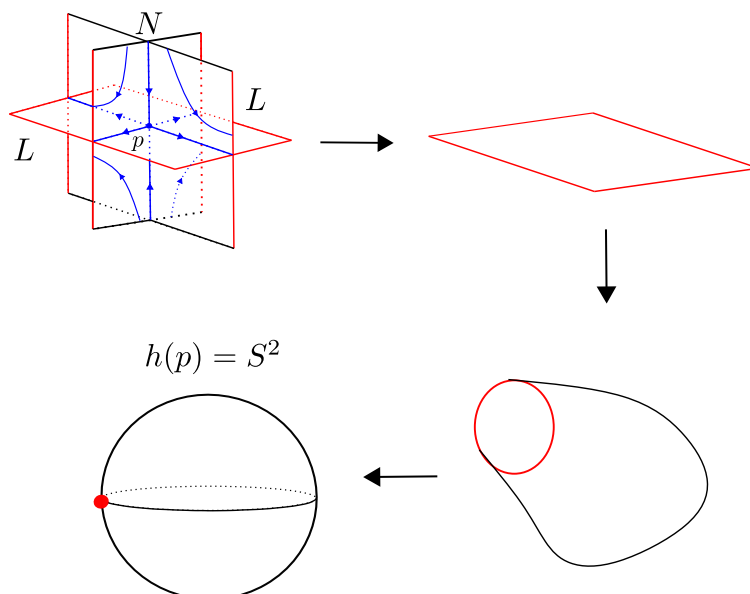


Figura 56 – Índice de Conley homotópico da singularidade  $p \in M(\mathcal{T})$  e natureza *ssr*

O índice de Conley homológico desta singularidade é dado por:

$$\tilde{H}_p(S^2) = \tilde{H}_p(S^2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 2; \\ 0, & p \neq 2. \end{cases}$$

Portanto, o índice de Conley numérico é dado por  $(0, 0, 1)$ .

- (iv) O quarto caso que vamos analisar são as singularidades de natureza *r*. Neste caso, tomamos um par-índice  $(N, L)$  formado pelos três planos intersectados  $N$ , em torno da singularidade  $p$ , e  $L$  é composto pela borda de  $N$ , que representamos em vermelho, como pode ser visto na Figura 57. Com o processo de tomar a equivalência  $N/L$  ficamos com um objeto intermediário, para melhor entendimento deste objeto fizemos um corte horizontal, com isso conseguimos contar sete regiões distintas, cada uma delas está identificada com uma cor diferente, e cada uma dessas regiões são homotópicas a uma  $S^2$  e estão todas coladas no ponto vermelho  $L$ . Todo este processo pode ser visto na Figura 57.

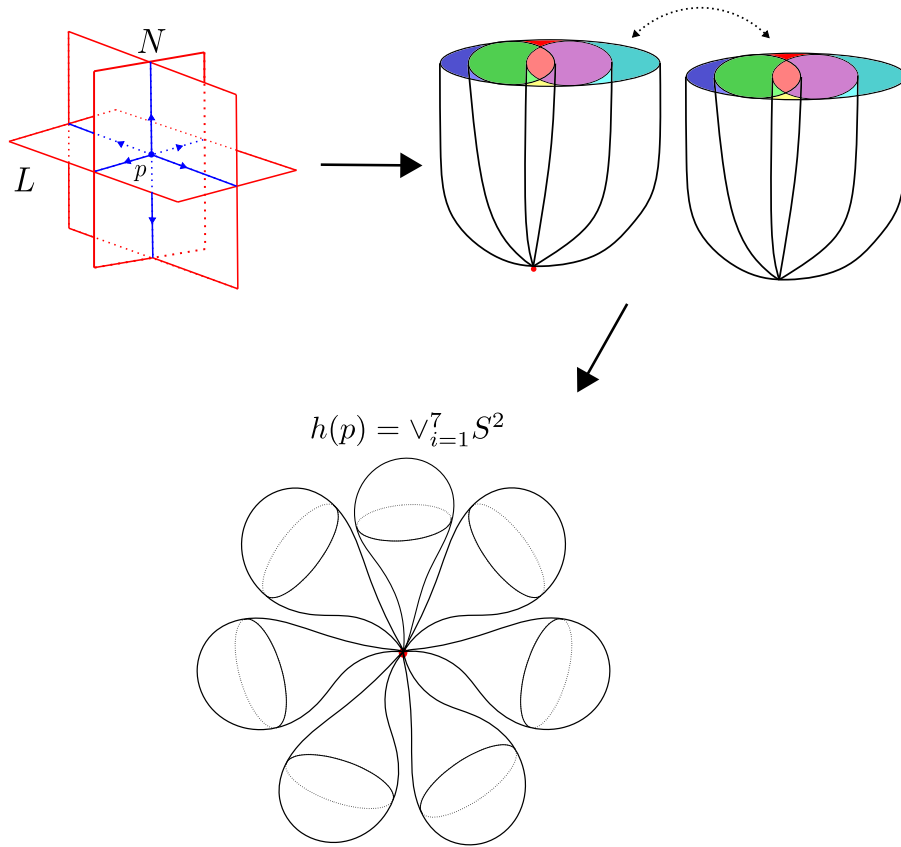


Figura 57 – Índice de Conley homotópico da singularidade  $p \in M(\mathcal{F})$  e natureza  $r$

Como nos casos de buquê, utilizamos o Exemplo 11, para calcular o índice de Conley homológico desta singularidade:

$$\tilde{H}_p(\bigvee_{i=1}^7 S^2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^7 \mathbb{Z}, & p = 2; \\ 0, & p \neq 2. \end{cases}$$

Portanto, o índice de Conley numérico desta singularidade é dado por  $(0, 0, 7)$ .

□

### 3.1.2 Característica de Euler

Nesta seção daremos uma forma de como o resultado do Teorema 16 pode ser utilizado. Para esta última seção as principais referências são (MONTÚFAR; REZENDE, 2020) e (MONTÚFAR, 2010).

Sejam  $M$  uma variedade GS e  $X_t$  um fluxo GS sobre  $M$ , uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é dita de **Lyapunov** se satisfaz:

1. Para cada  $M(\mathcal{P})$  de  $M$ ,  $f|_{M(\mathcal{P})}$  é uma função suave e  $f$  é contínua em  $M$ ;
2. Para cada  $M(\mathcal{P})$  de  $M$ , os pontos críticos de  $f|_{M(\mathcal{P})}$  são não degenerados e coincidem com as singularidades de  $X_t$ ;
3.  $\frac{d}{dt} (f|_{M(\mathcal{P})}(X_t(x))) < 0$ , se  $x$  não é singularidade de  $X_t$ , para cada  $M(\mathcal{P})$ ;

4. Se  $p$  e  $q$  são singularidades de  $X_t$ , então  $f(p) \neq f(q)$ .

Seja  $X = |K|$  um espaço topológico de dimensão  $n$ , com uma triangularização  $h : |K| \rightarrow X$ , veja a Definição 1. A **característica de Euler**<sup>2</sup> do Poliedro  $K$  é a soma alternada:

$$\chi(K) := \sum_{r=0}^n (-1)^r \alpha_r,$$

onde  $\alpha_r$  é o número de simplexes de dimensão  $r$  e  $n$  é a dimensão de  $|K|$ . Já em 1893, Poincaré nos mostrou que se consideramos a homologia com coeficientes inteiros, então:

$$\chi(K) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \beta_r,$$

onde os  $\beta_r$  são os números de Betti de  $K$ . Logo, temos um invariante topológico. Para que tenhamos uma noção de como o índice de Conley é interessante, trouxemos o seguinte resultado:

**Proposição 21.** Considere  $M$  uma variedade GS munida de um fluxo GS  $X_t$ , com um conjunto de singularidades  $\mathcal{L} = \cup_{i=1}^m L_i$ . Se  $(h_0^i, h_1^i, h_2^i)$  é o índice de Conley numérico para  $L_i$ , então:

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^m (h_0^i - h_1^i + h_2^i). \quad (3.1)$$

*Demonstração.* Sejam  $G_k \subset M$  uma sequência de conjuntos tais que:

$$G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_m = M$$

e  $(G_i, G_{i-1})$  é um par-índice para  $L_i$ , para todo  $1 \leq i \leq m$ . Podemos conseguir uma tal sequência de conjuntos graças as funções de Lyapunov e as demonstrações que podem ser encontradas em (MONTÚFAR; REZENDE, 2020). Considere a sequência exata longa do par  $(G_i, G_{i-1})$ :

$$\dots \xrightarrow{p_j} H_j(G_i, G_{i-1}) \xrightarrow{\partial_j} H_{j-1}(G_{i-1}) \xrightarrow{i_*} H_{j-1}(G_i) \xrightarrow{p_{j-1}} H_{j-1}(G_i, G_{i-1}) \xrightarrow{\partial_{j-1}} \dots$$

Pela exatidão da sequência, obtemos:

$$\dim(\text{Im } p_j) = \dim(\text{Ker } \partial_j) \quad (3.2)$$

$$= \dim(H_j(G_i, G_{i-1})) - \dim(\text{Im } \partial_j) \quad (3.3)$$

$$= \dim(H_j(G_i, G_{i-1})) - \dim(\text{ker } i_*). \quad (3.4)$$

Novamente pela exatidão da sequência temos que:

$$\dim(\text{Im } p_{j-1}) = -\dim(\text{Ker } p_{j-1}) + \dim(H_{j-1}(G_i)) \quad (3.5)$$

$$= -\dim(\text{Im } i_*) + \dim(H_{j-1}(G_i)). \quad (3.6)$$

Somando as equações (3.4) e (3.6):

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im } p_{j-1}) + \dim(\text{Im } p_j) &= \dim(H_j(G_i, G_{i-1})) - \dim(\text{ker } i_*) + \dim(H_{j-1}(G_i)) - \dim(\text{Im } i_*) \\ &= \dim(H_j(G_i, G_{i-1})) + \dim(H_{j-1}(G_i)) - (\dim(\text{Im } i_*) + \dim(\text{Ker } i_*)). \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Este número inteiro foi introduzido por Euler em 1758, na famosa expressão  $\chi(K) = V - A + F$ . Veja (LIMA, 2009).



Portanto, temos que:

$$\dim(\text{Im } p_{j-1}) + \dim(\text{Im } p_j) = \dim(H_j(G_i, G_{i-1})) + \dim(H_{j-1}(G_i)) - \dim(H_{j-1}(G_{i-1})).$$

Uma vez que  $CH_*(L_i) \cong H_*(G_i, G_{i-1})$ , teremos que  $h_j(L_i) = \dim(H_j(G_i, G_{i-1}))$ . Assim,

$$\dim(\text{Im } p_{j-1}) + \dim(\text{Im } p_j) = h_j(L_i) - \beta_{j-1}(G_{i-1}) + \beta_{j-1}(G_i).$$

Para  $i$  fixado, considere a soma alternada em  $j$ :

$$\sum_{j=0}^2 (-1)^j h_j(L_i) + \sum_{j=1}^3 (-1)^j [\beta_{j-1}(G_i) - \beta_{j-1}(G_{i-1})] = 0.$$

Agora, somando a expressão acima para  $i = 1, \dots, m$ , temos:

$$\sum_{i,j} (-1)^j h_j(L_i) + \sum_{j=1}^3 (-1)^j \beta_{j-1}(G_m) = 0.$$

Como  $G_m = M$ , temos:

$$\sum_{i,j} (-1)^j h_j(L_i) + \sum_{j=0}^2 (-1)^j \beta_j(M) = 0.$$

Assim,

$$\chi(M) = \sum_{i,j} (-1)^j h_j(L_i),$$

para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 0, 1, 2$ . Portanto,

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^m (h_0^i - h_1^i + h_2^i).$$

□

**Exemplo 26.** Agora vamos dar um exemplo de como utilizar a Proposição 21 em conjunto do Teorema 16. Considere  $M$  como a variedade GS composta por exatamente duas singularidades do tipo cone, a singularidade  $p_1$  é de natureza repulsora e a singularidade  $p_2$  é de natureza atratora. Veja a Figura 58.

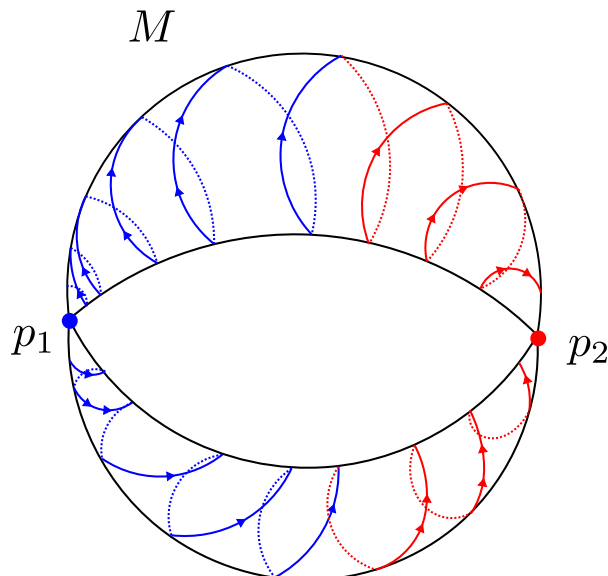


Figura 58 – Fluxo GS na variedade  $M$

Pelo Teorema 16, temos que o índice de Conley numérico de  $p_1$  é dado por  $(0, 1, 2)$  e da singularidade  $p_2$  é dado por  $(1, 0, 0)$ . Pela Proposição 21, temos que a característica de Euler é igual a:

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \sum_{i=1}^2 (h_0^i - h_1^i + h_2^i) \\ &= (0 - 1 + 2) + (1 - 0 + 0) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Definimos um **bloco isolante** como uma vizinhança isolante  $N$  tal que o seguinte conjunto:

$$N^{-1} := \{x \in N \mid x \cdot [0, T) \not\subset N, \forall T > 0\}$$

é um conjunto fechado. A existência de blocos isolantes para fluxos GS é consequência da existência de uma função de Lyapunov  $f$ . Se  $p$  é uma singularidade do campo GS, de maneira que,  $f(p) = c$  e  $\varepsilon > 0$  é tal que não existem valores críticos em  $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ , então definimos um bloco isolante  $N$  de  $p$  como a componente conexa  $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$  que contém  $p$  e não contém outra singularidade nesta componente. Assim,  $N^- = f^{-1}(c - \varepsilon) \cap N$ . Além disso,  $(N, N^-)$  é um par-índice para  $\text{Inv}(N) = \{p\}$ . Na tese do Montúfar (MONTÚFAR, 2010), ele trata mais detalhadamente de como construir os blocos isolantes, para cada tipo de singularidade, via teoria das alças generalizadas e analisando diferentes tipos de colagem.

O próximo teorema dá uma relação entre o número de Betti das subvariedades que são fronteiras do bloco isolante contendo  $p$ , com o número de componentes conexas da fronteira e o índice de Conley numérico  $(h_0, h_1, h_2)$ .

**Teorema 17. (Igualdade de Poincaré-Hopf:)** Considere  $(N_1, N_0)$  um par-índice para uma singularidade  $p \in M$  de  $X \in \mathcal{X}^r(M)$ , cujo índice de Conley numérico é  $(h_0, h_1, h_2)$ . Então

$$(h_2 - h_1 + h_0) - (h_2 - h_1 + h_0)^* = e^+ - \beta^+ - e^- + \beta^-, \quad (3.7)$$

onde:

- $*$  indica o índice de Conley para o fluxo reverso;
- $e^+(e^-)$  é o número de componentes conexas da fronteira de entrada (respectivamente saída) de  $N_1$ ;
- $\beta^+ = \sum_{k=1}^{e^+} b_k^+$  ( $\beta^- = \sum_{k=1}^{e^-} b_k^-$ ), onde  $b_k^+(b_k^-)$  é o primeiro número de Betti da  $k$ -ésima componente conexa do bordo de entrada (respectivamente saída) de  $N_1$ .

*Demonstração.* Temos pela Proposição 21 que,

$$\chi((N_1, N_0)) = h_2 - h_1 + h_0.$$

Pela sequência longa exata do par  $(N_1, N_0)$ , temos que  $\chi((N_1, N_0)) = \chi(N_1) - \chi(N_0)$ . Donde,

$$\chi(N_1) = \chi(N_0) + h_2 - h_1 + h_0.$$

Como  $N_0 = \partial N_1^-$ , ficamos com a seguinte igualdade:

$$\chi(N_1) = \chi(\partial N_1^-) + h_2 - h_1 + h_0. \quad (3.8)$$

Poderíamos provar também uma igualdade análoga para o fluxo reverso, isto é:

$$\chi(N_1) = \chi(\partial N_1^+) + (h_2 - h_1 + h_0)^*. \quad (3.9)$$

Subtraindo a igualdade (3.9) da igualdade (3.8), obtemos:

$$(h_2 - h_2 + h_0) - (h_2 - h_2 + h_0)^* + \chi(\partial N_1^-) - \chi(\partial N_1^+) = 0.$$

Donde,

$$(h_2 - h_2 + h_0) - (h_2 - h_2 + h_0)^* = \chi(\partial N_1^+) - \chi(\partial N_1^-).$$

Como podemos escrever

$$\begin{aligned} \partial N^+ &= \bigcup_{k=1}^{e^+} \partial N_k^+, \\ \partial N^- &= \bigcup_{k=1}^{e^-} \partial N_k^-. \end{aligned}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \chi(\partial N^+) &= \sum_{k=1}^{e^+} \chi(\partial N_k^+) = \sum_{k=1}^{e^+} ((-1)^0 \cdot 1 - b_k^+); \\ \chi(\partial N^-) &= \sum_{k=1}^{e^-} \chi(\partial N_k^-) = \sum_{k=1}^{e^-} ((-1)^0 \cdot 1 - b_k^-). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \chi(\partial N^+) &= e^+ - \sum_{k=1}^{e^+} b_k^+ = e^+ - \beta^+; \\ \chi(\partial N^-) &= e^- - \sum_{k=1}^{e^-} b_k^- = e^- - \beta^-. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(h_2 - h_2 + h_0) - (h_2 - h_2 + h_0)^* = e^+ - \beta^+ - e^- + \beta^-.$$

□



---

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

Ressaltamos a quantidade de áreas abordadas com esse tema: Topologia Algébrica, Sistemas dinâmicos e Teoria das Singularidades. O objetivo deste trabalho é unificar todos os resultados básicos e essenciais para o entendimento do tema abordado, ou seja, ser uma referência mais autocontida possível para futuros estudantes que almejam uma introdução à Teoria de Conley em Fluxos Gutierrez-Sotomayor.

É notável que algumas lacunas ainda não foram preenchidas. No Capítulo 3 algumas classes de fluxos GS não foram trabalhadas, por exemplo não discutimos os fluxos GS com órbitas periódicas. É perceptível que pouco utilizamos as ferramentas da Teoria das Singularidades. Portanto, a Teoria de Conley para Fluxos Gutierrez-Stomayor ainda é fértil para novos resultados e novas abordagens.



## REFERÊNCIAS

---

- BRASSELET, J.-P. **An introduction to characteristic classes**. [S.l.]: IMPA, 2021. Citado nas páginas 57 e 59.
- CAVALCANTI, A. S. **Introdução ao índice de Conley e aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2007. Citado nas páginas 67 e 84.
- CONLEY, C. C. **Isolated invariant sets and the Morse index**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1978. Citado nas páginas 19, 57 e 67.
- GIBSON, C. G. **Singular points of smooth mappings**. [S.l.]: Pitman publishing, 1979. Citado na página 52.
- GUTIERREZ, C.; SOTOMAYOR, J. Stable vector fields on manifolds with simple singularities. **Proceedings of the London Mathematical Society**, Oxford Academic, v. 3, n. 1, p. 97–112, 1982. Citado nas páginas 19 e 89.
- HOBBS, C.; KIRK, N. On the classification and bifurcation of multigerms of maps from surfaces to 3-space. **Mathematica Scandinavica**, JSTOR, p. 57–96, 2001. Citado na página 56.
- IZUMIYA, S.; FUSTER, M. d. C. R.; RUAS, M. A. S.; TARI, F. **Differential geometry from a singularity theory viewpoint**. [S.l.]: World Scientific, 2016. Citado na página 52.
- LIMA, D.; RAMINELLI, S.; REZENDE, K. D. Homotopical cancellation theory for gutierrez-sotomayor singular flows. **Journal of Singularities**, v. 23, p. 33–91, 2021. Citado na página 19.
- LIMA, E. L. **Homologia básica**. [S.l.]: IMPA, 2009. Citado nas páginas 21, 30, 34, 38, 58 e 110.
- MILNOR, J. **Morse Theory**. [S.l.]: Princeton University Press, 1963. Citado na página 60.
- MONTÚFAR, H. **Teoria de Conley para Campos Gutierrez-Sotomayor**. Tese (Doutorado) — Thesis (PhD in Mathematics), Universidade Estadual de Campinas, 2010. Citado nas páginas 19, 89, 97, 109 e 112.
- MONTÚFAR, H.; REZENDE, K. de. Conley theory for gutierrez-sotomayor fields. **Journal of singularities**, Worldwide Center of Mathematics, 2020. Citado nas páginas 19, 89, 97, 109 e 110.
- PEIXOTO, M. C.; PEIXOTO, M. M. Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions. **An. Acad. Brasil. Ci**, v. 31, n. 2, p. 135–160, 1959. Citado na página 19.
- PEIXOTO, M. M. Structural stability on two-dimensional manifolds. **Topology**, Pergamon, v. 1, n. 2, p. 101–120, 1962. Citado na página 19.
- SCHWARTZ, M.-H. Champs radiaux sur une stratification analytique complexe. **Travaux en cours**, Hermann, v. 39, 1991. Citado na página 59.
- SOTOMAYOR, J. **Equações diferenciais ordinárias**. **Sao Paulo: Editora Livraria da Física**, 2011. Citado na página 49.
- VALDÉS, W. D.; FÊMINA, L. L. Calculando detalhadamente os grupos de homologia simplicial do toro, do plano projetivo e da garrafa de klein. **Matemática e Estatística em Foco**, v. 6, n. 1, p. 47–56, 2018. Citado na página 31.

ZIGART, M. A. d. J. Continuação de campos gutierrez-sotomayor. 2017. Citado nas páginas 19, 57 e 89.



