UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Estabilidade de Lyapunov de sistemas impulsivos

Alexandre Batista de Souza

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Alexandre Batista de Souza

Estabilidade de Lyapunov de sistemas impulsivos

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto

USP – São Carlos
Janeiro de 2022

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

Batista de Souza, Alexandre
0e Estabilidade de Lyapunov de sistemas impulsivos / Alexandre Batista de Souza; orientador Everaldo de Mello Bonotto. -- São Carlos, 2022.
99 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Estabilidade. 2. Estabilidade de Lyapunov. 3. Sistemas impulsivos. 4. Mudanças abruptas de estado. 5. Impulso. I. de Mello Bonotto, Everaldo, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Alexandre Batista de Souza

Lyapunov Stability of impulsive systems

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto

USP – São Carlos
January 2022

Para Mariana.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

RESUMO

DE SOUZA, A. B. **Estabilidade de Lyapunov de sistemas impulsivos**. 2022. 101 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

O objetivo deste trabalho é estudar a estabilidade de Lyapunov de sistemas impulsivos. Inicialmente, apresentamos a noção de estabilidade sujeita a critérios topológicos, como compacidade e conexidade, ressaltando algumas semelhanças e diferenças com os sistemas sem impulsos. Em seguida, destacamos que em muitos casos, podemos obter estabilidade de sistemas impulsivos, via funções de Lyapunov.

Palavras-chave: Estabilidade, estabilidade de Lyapunov, sistemas impulsivos.

ABSTRACT

DE SOUZA, A. B. **Lyapunov Stability of impulsive systems**. 2022. 101 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

The aim of this work is to study the Lyapunov stability of impulsive systems. Initially, we present the notion of stability subject to topological criteria, such as compactness and connectedness, highlighting some similarities and differences with non-impulsive systems. Then, we emphasize that in many cases, we can obtain stability of impulsive systems, via Lyapunov functions.

Keywords: Stability, Lyapunov stability, impulsive systems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

(X,d) — Espaço métrico

$\mathbb{R}_+$ — Números reais não negativos

$\mathbb{R}^d$ — Espaço d-dimensional, $d \in \mathbb{N}$

$f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ — f é diferenciável com derivadas de primeira ordem contínuas em $\mathbb{R}^d$

$\overline{A}$ — Fecho do conjunto $A \subset X$

$\mathbb{N}$ — Conjunto dos números naturais $\{1,2,\ldots\}$

$\mathbb{N}_0$ — $\mathbb{N} \cup \{0\}$

A^o — Interior do conjunto $A \subset X$

(x_n) — sequência de elementos de X

$B(a,\varepsilon)$ — $\{x \in X : d(x,a) < \varepsilon\}$

$B(A,\varepsilon)$ — $= \{x \in X : d(x,A) < \varepsilon\}$

U_A — Vizinhança do conjunto $A \subset X$

τ_X — Topologia induzida pela métrica d

$S(A,\varepsilon)$ — $\{x \in X : d(x,A) = \varepsilon\}$

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Podemos dizer, que muitos processos de evolução - que intuitivamente descrevem o comportamento de determinado fenômeno em função do tempo - são caracterizados por mudanças abruptas de estado, e podem ser modelados, por exemplo, pela teoria dos sistemas dinâmicos impulsivos, como é o caso de fenômenos biológicos, físicos e metereológicos, veja (BONOTTO; DEMUNER, 2020). Em outras palavras, tais modelos descrevem a ocorrência de impacto, arremesso, irregularidade ou descontinuação de soluções, que sugerem mudanças instantâneas no comportamento de determinado processo.

Nos últimos anos, a teoria de sistemas dinâmicos impulsivos, tem sido desenvolvida intensamente, como pode ser constatado nos trabalhos (CIESIELSKI, 2000), (CIESIELSKI, 2004a), (BONOTTO; JR, 2010), (BONOTTO; DEMUNER, 2013), (BONOTTO; FERREIRA, 2015), (BONOTTO; GIMENES; SOUTO, 2016), (BONOTTO; SOUTO, 2019), assim como em muitos outros estudos.

A noção de estabilidade de conjuntos tem um lugar de destaque na teoria de sistemas dinâmicos, tanto discretos quanto contínuos, e nos diz intuitivamente se é possível ficar suficientemente próximo de um conjunto, ao longo do tempo, quando iniciamos na vizinhança desse conjunto. Podemos intuir tal ideia na estabilidade de soluções periódicas ou singulares de um sistema de equações diferenciais, isto é, uma solução é estável quando toda solução com valores iniciais próximos a ela, está definida para todo tempo e permanece, para sempre, tão próxima quanto se queira, (SOTOMAYOR, 2011). Como apresentada em (CIESIELSKI, 2004a), a estabilidade de conjuntos no contexto de sistemas impulsivos é definida como uma generalização da estabilidade de conjuntos em sistemas dinâmicos contínuos (BHATIA; SZEGÖ, 1970).

O objetivo deste trabalho, é estudar a estabilidade de conjuntos no contexto de sistemas impulsivos. Mostraremos que o estudo da estabilidade em sistemas impulsivos, se dá por dois caminhos, muitas vezes mutuamente exclusivos: via propriedades topológicas e via existência de funções de Lyapunov, que é o tema central dessa dissertação. Tal estratégia, é inspirada no método direto de Lyapunov que foi utilizado no estudo da estabilidade de soluções de equações diferenciais e suas propriedades qualitativas (HALE, 1969), e consiste de obter funções escalares não negativas que, dentre outras propriedades, decrescem ao longo de soluções, (BONOTTO; SOUTO, 2019), e indicam como tais soluções se comportam ao entrarem em um conjunto fechado, por exemplo, (BONOTTO; JR, 2010). Historicamente, o método direto de Lyapunov foi utilizado no estudo de sistemas conservativos, em que uma tal função de Lyapunov descreve a energia potencial e dá condições para a estabilidade de um sistema de equações diferenciais ordinárias.

O presente trabalho está divido em quatro capítulos e três apêndices. Os resultados principais estão apresentados nos artigos (CIESIELSKI, 2004a), (BONOTTO; JR, 2010) e (BONOTTO; SOUTO, 2019).

O Capítulo 2 apresenta os conceitos básicos da teoria de sistemas impulsivos, com ênfase em especial na condição forte de tubo que tem um papel fundamental na teoria dos sistemas dinâmicos impulsivos, e em particular na teoria de estabilidade.

No Capítulo 3, estudamos a estabilidade de conjuntos compactos utilizando critérios topológicos, com destaque ao Teorema de Ura que trata-se da equivalência $1) \iff 6)$ do Teorema 3.2.1. Ainda neste sentido, apresentamos algumas alternativas para estudar a estabilidade de conjuntos relativamente compactos, bem como discutimos a estabilidade das componentes conexas de um conjunto compacto, salientando que a equivalência entre estabilidade de um conjunto compacto e a estabilidade de suas componentes, não vale em geral para sistemas impulsivos, contrastando com o fato de que vale no caso de sistemas sem impulsos.

O Capítulo 4 dedica-se ao estudo da estabilidade de Lyapunov no contexto de sistemas impulsivos. Destacamos que em muitos casos podemos abrir mão de propriedades topológicas e avaliar a estabilidade via a existência de funções de Lyapunov. Um exemplo notável neste sentido, é o Teorema 4.2.4, que diz o seguinte: dado um espaço métrico (X,d) qualquer e um subconjunto $A \subset X$, a existência de uma função contínua que se anula em tal conjunto e não é constante em alguma órbita que começa em $\overline{A}$, implica que tal conjunto $\overline{A}$ é instável. Como aplicação desse resultado, o Exemplo 4.2.5 nos mostra que o anél $A[0;1,2]$ (que não é compacto em $L_2[0,1]$) é instável.

Finalizamos o presente trabalho, com a apresentação de três apêndices que abordam aspectos teóricos dos sistemas impulsivos. Tais resultados são fundamentais para a obtenção dos resultados principais de estabilidade. No Apêndice A, exibimos o estudo da continuidade da função de impacto, onde é possível observar a relevância da condição forte de tubo na teoria de sistemas impulsivos. O Apêndice B trata de propriedades de convergência do fluxo impulsivo. O Apêndice C caracteriza o conjunto limite e o conjunto prolongado, além de explorar suas invariâncias. Um Teorema do tipo Alfândega é apresentado para sistemas impulsivos.

CAPÍTULO

2

PRELIMINARES

Neste capítulo, veremos os elementos básicos da teoria de estabilidade em sistemas impulsivos. A referência utilizada na discussão dos resultados é (BONOTTO; SOUTO, 2019).

2.1 Sistemas impulsivos

Definição 2.1.1. Seja (X,d) um espaço métrico. Um **sistema semidinâmico (SSD)** em X é dado por uma tripla $(X,\pi,\mathbb{R}_+)$ em que:

i) $\pi : X \times \mathbb{R}_+ \to X$ é uma aplicação contínua em $X \times \mathbb{R}_+$.

ii) $\pi(x,0) = x$, para todo $x \in X$.

iii) $\pi(\pi(x,t),s) = \pi(x,t+s)$ para todos $x \in X$ e $t,s \in \mathbb{R}_+$.

Um exemplo que motiva o estudo de sistemas semidinâmicos é dado por equações diferenciais autônomas.

Exemplo 2.1.2. Considere a equação diferencial autônoma

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \ \ f \in C^1(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^d$, considere a solução $\varphi(\cdot,x)$ de $x' = f(x)$ que passa pelo ponto x em $t = 0$ e está definida em $\mathbb{R}_+$. Defina a aplicação $\pi\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ pela lei

$$\pi(x,t) \doteq \varphi(t,x),$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$.

Note que o item *ii*) da Definição 2.1.1 está satisfeito. O item *iii*) segue da unicidade das soluções e o item *i*) segue pela dependência contínua do fluxo, em relação as condições iniciais.

Definição 2.1.3. Seja $(X,\pi,\mathbb{R}_+)$ um SSD. Dados $D \subset X$ e $\Delta \subset \mathbb{R}_+$, o **passado de D no intervalo de tempo Δ** é dado por

$$F(D,\Delta) \doteq \{z \in X : \ \pi(z,t) \in D, \ \ \forall\, t \in \Delta\}.$$

Observação 2.1.4. A Figura 1 representa o passado de $x \in X$ no tempo $t \in \mathbb{R}_+$, de acordo com a Definição 2.1.3.

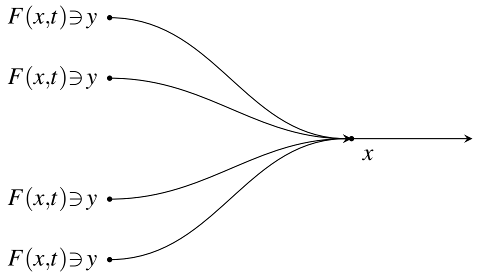

Figura 1 – Passado de x no tempo t.

Definição 2.1.5. Seja $(X,\pi,\mathbb{R}_+)$ um SSD. Um **sistema impulsivo (SI)** em X é dado por uma quíntupla $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ em que:

i) $M \subset X$, $M \neq \emptyset$ e $M = \overline{M}$ (**conjunto impulso**).

ii) $I : M \to X$ é contínua (**função impulso**).

iii) para todo $x \in M$, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $F(x,(0,\varepsilon_x)) \cap M = \emptyset$ e $\pi(x,(0,\varepsilon_x)) \cap M = \emptyset$.

Observação 2.1.6. A Figura 2 representa a condição *iii*) da Definição 2.1.5. Intuitivamente, temos que as órbitas contínuas do sistema $(X,\pi,\mathbb{R}_+)$ entram transversais a M.

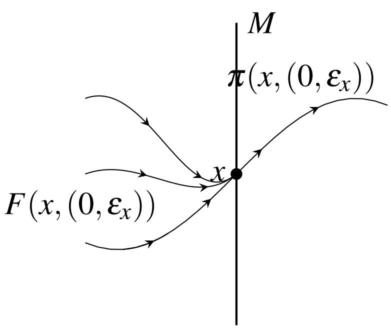

Figura 2 – Transversalidade das órbitas contínuas em M.

Definição 2.1.7. Seja $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI. Dado $x \in X$, a função **impacto de** x dada por $\phi : X \to (0,\infty]$ é definida pela lei

$$\phi(x) \doteq \begin{cases} s, & \text{se } \pi(x,s) \in M \ \text{ e } \ \pi(x,t) \notin M, \ \text{ para } \ t \in (0,s), \\ \infty & \text{se } \left(\bigcup_{t>0} \pi(x,t)\right) \cap M = \emptyset. \end{cases}$$

Observação 2.1.8. Segue da Proposição A.0.1 que ϕ está bem definida. Note ainda, que $\phi(x)$ representa o menor tempo positivo tal que a órbita contínua de x encontra M.

2.2 A órbita impulsiva

Em sistemas dinâmicos sem impulsos, dado $x \in X$, estamos interessados em saber o que acontece com a órbita $\pi(x,\cdot)$ quando o tempo evolui. Com este mesmo objetivo definimos agora a órbita impulsiva de $x \in X$.

Definição 2.2.1. Seja $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI. A **órbita impulsiva** de $x \in X$ é dada pela aplicação

$$\tilde{\pi}(x,\cdot) : [0,T(x)) \to X,$$

definida num intervalo $[0,T(x))$, construída indutivamente da seguinte forma:

- Se $\phi(x) = \infty$, então $\tilde{\pi}(x,t) \doteq \pi(x,t)$, para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

- Se $\phi(x) < \infty$, então definimos

$$\tilde{\pi}(x,t) \doteq \begin{cases} \pi(x,t) & \text{se} \quad 0 \leq t < \phi(x), \\ I(\pi(x,\phi(x))) & \text{se} \quad t = \phi(x). \end{cases}$$

Sejam $x_0^+ = x$, $x_1 \doteq \pi(x,\phi(x))$ e $x_1^+ \doteq I(x_1)$.

- Se $\phi(x_1^+) = \infty$, então $\tilde{\pi}(x,t) \doteq \pi\left(x_1^+, t-\phi(x)\right)$, para todo $t \geq \phi(x)$.

- Se $\phi(x_1^+) < \infty$, definimos

$$\tilde{\pi}(x,t) \doteq \begin{cases} \pi\left(x_1^+, t-\phi(x)\right) & \text{se} \quad \phi(x) \leq t < \phi(x)+\phi(x_1^+), \\ I\left(\pi(x_1^+,\phi(x_1^+))\right) & \text{se} \quad t = \phi(x)+\phi(x_1^+). \end{cases}$$

Sejam $x_2 \doteq \pi(x_1^+,\phi(x_1^+))$ e $x_2^+ \doteq I(x_2)$.

Continuando com este raciocínio, vamos supor que $x_k \doteq \pi(x_{k-1}^+,\phi(x_{k-1}^+))$ e $x_k^+ \doteq I(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$, estejam definidos.

- Se $\phi(x_k^+) = \infty$, então definimos

$$\tilde{\pi}(x,t) \doteq \pi\left(x_k^+, t - \sum_{i=0}^{k-1}\phi(x_i^+)\right), \text{ para todo } t \geq \sum_{i=0}^{k-1}\phi(x_i^+).$$

- Porém, se $\phi(x_k^+) < \infty$, definimos

$$\tilde{\pi}(x,t) \doteq \begin{cases} \pi\left(x_k^+, t - \sum\limits_{i=0}^{k-1}\phi(x_i^+)\right) & \text{se} \quad \sum\limits_{i=0}^{k-1}\phi(x_i^+) \leq t < \sum\limits_{i=0}^{k}\phi(x_i^+)), \\ I\left(\pi(x_k^+,\phi(x_k^+))\right) & \text{se} \quad t = \sum\limits_{i=0}^{k}\phi(x_i^+). \end{cases}$$

Sejam $x_{k+1} \doteq \pi(x_k^+, \phi(x_k^+))$ e $x_{k+1}^+ \doteq I(x_k)$. Defina

$$T(x) \doteq \begin{cases} \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \phi(x_k^+) & \text{se} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}_0, \;\; \phi(x_k^+) < \infty \\ \infty & \text{se} \quad \text{existe } k \in \mathbb{N}_0 \text{ tal que } \; \phi(x_k^+) = \infty. \end{cases}$$

Observação 2.2.2. A Proposição B.0.1 implica que para quaisquer $x \in X$ e $t, s \in \mathbb{R}_+$, tais que $t + s \in [0, T(x))$,

$$\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x,t), s) = \tilde{\pi}(x, t+s),$$

que é a propriedade de concatenação para a órbita impulsiva. A Figura 3 representa a evolução de uma órbita impulsiva.

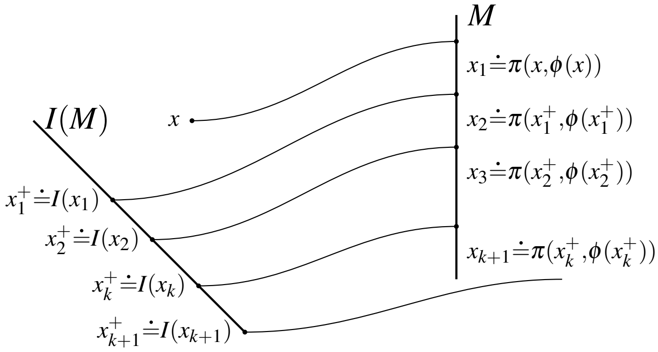

Figura 3 – Órbita impulsiva de $x \in X$.

2.3 A condição STC

Como apresentado em (CIESIELSKI, 2004b), uma propriedade importante da teoria de sistemas impulsivos, é quando um ponto $x \in M$ satisfaz a **condição de tubo forte (STC)**. Intuitivamente, isto significa que podemos obter uma caixa de fluxo que é uma vizinhaça de $x \in M$, veja Figura 9. Esta condição de tubo irá garantir boas propriedades para o fluxo impulsivo.

Definição 2.3.1. Seja $(X, \pi, \mathbb{R}_+, M, I)$ um SI. Dado $x \in X$, uma λ**-seção** através de x é um conjunto $S \subset X$ satisfazendo as seguintes propriedades:

a) $x \in S = \overline{S}$.

b) Existem $L = \overline{L} \subset X$ e $\lambda > 0$, tais que $F(L, \lambda) = S$.

c) $F(L, [0, 2\lambda])$ é vizinhança de x.

d) $F(L, \mu) \cap F(L, \nu) = \emptyset$, para $0 \leqslant \mu < \nu \leqslant 2\lambda$.

O conjunto $F(L, [0, 2\lambda])$ é chamado de **caixa de fluxo**.

Definição 2.3.2. Sejam $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI e $x \in X$. O ponto x satizfaz **STC** se existe uma λ-seção através de x tal que

$$S = M \cap F(L,[0,2\lambda]).$$

Exemplo 2.3.3. Considere $X \doteq \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \pi(x,t) \doteq x+t, \;\; x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad t \geq 0, \\ M \doteq \{1\}, \\ I\colon M \to \mathbb{R}, \;\; I(1) \doteq \{0\}. \end{cases}$$

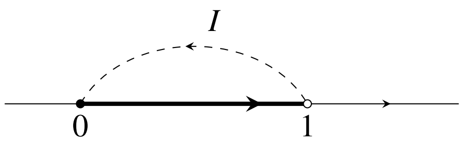

Figura 4 – Sistema impulsivo $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$.

Então $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ é um sistema impulsivo, uma vez que $(X,\mathbb{R}_+,\pi)$ é um sistema semidinâmico, $\emptyset \neq M = \overline{M}$ e I é contínua, pois está definida em um conjunto discreto. Note que a condição *iii*) da Definição 2.1.5 está satisfeita com $\varepsilon_1 \doteq \frac{1}{2}$. A Figura 4 representra $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$. Mais ainda, $S \doteq M$ é uma λ-seção através de 1 tal que 1 satisfaz STC. De fato, S satisfaz os quatro itens da Definição 2.3.1, pois:

a) $1 \in S = \overline{S}$.

b) Tome $L \doteq \{2\}$ e $\lambda \doteq 1$. Então

$$F(2,1) = \{z \in X:\; \pi(z,1) = 2\} = \{z \in X:\; z+1 = 2\} = M = S.$$

c) Temos que $1 \in F(2,[0,2])^{\circ} = \{z \in X:\; \pi(z,t) = 2,\; t \in [0,2]\}^{\circ} = (0,2)$.

d) Dados $\mu, \nu \in [0,2]$, tais que $\mu \neq \nu$ temos

$$F(2,\mu) \cap F(2,\nu) = \{2-\mu\} \cap \{2-\nu\} = \emptyset.$$

Além disso, S satisfaz a Defindção 2.3.2, pois $F(2,[0,2]) \cap M = \{1\} = S$.

Observação 2.3.4. Um fato muito importante que será utilizado nesse trabalho é o seguinte: suponha que $x \in M$ satisfaça a condição STC e seja $(x_n) \subset X$ uma sequência. Como x satisfaz STC, pela Definição 2.3.1 existe uma caixa de fluxo $F(L,[0,2\lambda])$ através de x. Pelo item *c*) da mesma, tome $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset F(L,[0,2\lambda])$. Defina $H_1 \doteq F(L,(\lambda,2\lambda)) \cap B(x,\delta)$ e $H_2 \doteq F(L,[0,\lambda)) \cap B(x,\delta)$, veja Figura 9.

- Se $H_1 \ni x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in M \implies \phi(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;

- Se $H_2 \ni x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in M \implies \phi(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$.

Este é o conteúdo do Teorema A.0.7.

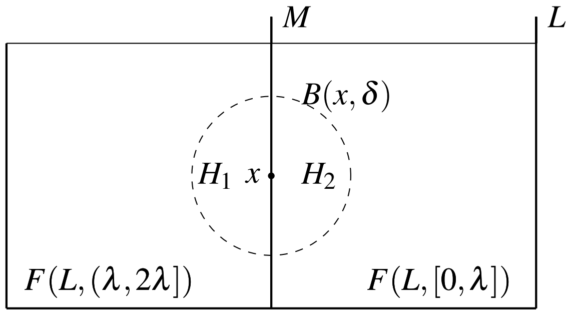

Figura 5 – $H_1 \doteq F(L,(\lambda,2\lambda)) \cap B(x,\delta)$ e $H_2 \doteq F(L,[0,\lambda)) \cap B(x,\delta)$.

2.4 Invariância e conjuntos limites

A noção de invariância em sistemas impulsivos é análoga a dada para sistemas sem impulsos, como pode ser observado em (BHATIA; SZEGÖ, 1970), e assim como neste caso, tem um papel importante no estudo da estabilidade.

Definição 2.4.1. Seja $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI. Um conjunto $A \subset X$ é **$\tilde{\pi}$-invariante**, se para todo $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\tilde{\pi}(A,t) \subset A.$$

Em sistemas dinâmicos sem impulso, se $A \subset X$ é π-invariante então $\overline{A}$ é π-invariante. Entretanto, esse fato não ocorre, em geral, em sistemas dinâmicos impulsivos. Veja o próximo exemplo.

Exemplo 2.4.2. Considere o Exemplo 2.3.3. O conjunto $A \doteq [0,1)$ é $\tilde{\pi}$-invariante. De fato, sejam $x \in [0,1)$ e $t \geq 0$. Se $0 \leq t < \phi(x)$ então

$$\tilde{\pi}(x,t) = \pi(x,t) \in A.$$

Se $t \geq \phi(x)$, pela definição de órbita impulsiva (Definição 2.2.1), existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $t \in \left[\sum_{i=0}^{k-1}\phi(x_i^+), \sum_{i=0}^{k}\phi(x_i^+)\right)$. Daí, ou $\tilde{\pi}(x,t) = 0$ ou

$$\tilde{\pi}(x,t) = x_k^+ + t - \sum_{i=0}^{k-1}\phi(x_i^k) = 0 + t - \sum_{i=0}^{k-1}\phi(x_i^k) < \phi(x_k^+) = 1, \tag{2.1}$$

uma vez que, $x_k^+ \in I(M) = \{0\}$, para todo $k \geq 1$. Mas $\overline{A} = [0,1]$ não é $\tilde{\pi}$-invariante, pois $\phi(1) = \infty$, logo $\tilde{\pi}\left(\overline{A},[0,\infty)\right) \subset [0,\infty)$.

Assim como em sistemas dinâmicos sem impulsos, alguns conjuntos especiais estão relacionados com o conceito de estabilidade no contexto de sistemas impulsivos. Tais conjuntos são inspirados do caso não impulsivo dado por (BHATIA; SZEGÖ, 1970). O primeiro destes conjuntos que apresentaremos é o conjunto ômega limite, que está relacionado com a noção de $\tilde{\pi}$-atrator (Definição 3.1.7) e $\tilde{\pi}$-estabilidade assintótica (Definição 3.1.8).

Definição 2.4.3. Seja $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI. O conjunto **ômega limite** de $A \subset X$ é dado por

$$\tilde{L}^+(A) \doteq \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} \tilde{\pi}(A,\tau)}.$$

O outro conjunto especial que abordaremos neste trabalho é o conjunto prolongado, que entre outras coisas está relacionado com o Teorema de Ura, (CIESIELSKI, 2004b), que é a equivalêcia entre 1) e 6), dada pelo Teorema 3.2.1.

Definição 2.4.4. Seja $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI. O conjunto **prolongado** de $A \subset X$ é dado por

$$\tilde{D}^+(A) \doteq \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\bigcup_{t \geq 0} \tilde{\pi}(B(A,\varepsilon),t)}.$$

Os próximos conjuntos que apresentaremos, estão relacionados com as noções de $\tilde{\pi}$-atrator e estabilidade assintótica, respectivamente, dadas pelas Definições 3.1.7 e 3.1.8.

Definição 2.4.5. Seja $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI. A **região de atração** de $A \subset X$ é dada por

$$\tilde{P}(A) \doteq \{x \in X : \emptyset \neq \tilde{L}^+(x) \subset \overline{A}\}.$$

Definição 2.4.6. Seja $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI. A **região de atração fraca** de $A \subset X$ é dada por

$$\tilde{P}_w(A) \doteq \{x \in X : \tilde{L}^+(x) \cap \overline{A} \neq \emptyset\}.$$

No que segue, apresentamos um exemplo com as descrições dos conjuntos ômega limite e prolongado e das regiões de atração e atração fraca.

Exemplo 2.4.7. Considere ainda o Exemplo 2.3.3 e $A \doteq [0,1)$. Então,

a) $\tilde{L}^+([0,1)) = [0,1]$. De fato, dado $t \geq 0$ segue de (2.1) que

$$\tilde{\pi}([0,1),[t,\infty)) \subset \tilde{\pi}([0,1),[0,\infty)) \subset [0,1). \tag{2.2}$$

Por outro lado, dados $x \in [0,1)$ e $t \geq 0$, como $\phi(x_k^+) = 1$, para todo $k \geq 1$, tem-se $\sum\limits_{i=0}^{k-1} \phi(x_i^+) + x \geq t$ para algum $k \geq 1$. Então, como $x < \phi(0) = 1$

$$\tilde{\pi}\left(x, \sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_i^+) + x\right) = \tilde{\pi}(0,x) = \pi(0,x) = x. \tag{2.3}$$

Segue de (2.3) que $[0,1) \subset \tilde{\pi}([0,1),[t,\infty))$, para todo $t \geq 0$, e com (2.2) temos

$$\tilde{L}^+([0,1)) \doteq \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} \tilde{\pi}([0,1),\tau)} = \bigcap_{t \geq 0} [0,1] = [0,1].$$

b) $\tilde{D}^+([0,1)) = [0,\infty)$. De fato, sejam $a \in (0,1)$ e $\varepsilon > 0$ tais que $\varepsilon < \eta \doteq \inf\{|a|, |1-a|\}$. Segue que

$$\tilde{\pi}\left(B(a,\varepsilon),[0,\infty)\right) = [0,1]. \tag{2.4}$$

De fato, dado $x \in [0,1]$, segue que $\tilde{\pi}(a,\phi(a)+x) = \tilde{\pi}(0,x) = \pi(0,x) = x$, donde $x \in \tilde{\pi}\left(B(a,\varepsilon),[0,\infty)\right)$. Por outro lado, como $B(a,\varepsilon) \subset (0,1)$, temos pelo Exemplo 2.4.2 que $\tilde{\pi}(B(a,\varepsilon),[0,\infty)) \subset [0,1) \subset [0,1]$. Assim a igualdade (2.4) é válida. Portanto, se $a \in (0,1)$ então por (2.4) temos

$$\tilde{D}^+(a) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\bigcup_{t\geq 0} \tilde{\pi}(B(a,\varepsilon),t)} = \bigcap_{\varepsilon\in(0,\eta)} \overline{\bigcup_{t\geq 0} \tilde{\pi}(B(a,\varepsilon),t)} = \bigcap_{\varepsilon\in(0,\eta)} [0,1] = [0,1]. \tag{2.5}$$

Além disso, para $\varepsilon \in (0,1)$, temos $\tilde{\pi}(B(0,\varepsilon),[0,\infty)) = (-\varepsilon,1)$ que implica em

$$\tilde{D}^+(0) = \bigcap_{\varepsilon\in(0,1)} \overline{\bigcup_{t\geq 0} \tilde{\pi}(B(0,\varepsilon),t)} = \bigcap_{\varepsilon\in(0,1)} [-\varepsilon,1] = [0,1]. \tag{2.6}$$

Por fim,

$$\tilde{D}^+(1) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\bigcup_{t\geq 0} \tilde{\pi}(B(1,\varepsilon),t)} = \bigcap_{\varepsilon>0} [0,\infty) = [0,\infty). \tag{2.7}$$

Portanto, uma vez que $\overline{A} = [0,1]$ é compacto, segue da Proposição C.0.2 e de (2.5), (2.6) e (2.7), que

$$\tilde{D}^+([0,1)) = \bigcup_{a\in[0,1]} \tilde{D}^+(a) = [0,\infty).$$

c) $\tilde{P}([0,1)) = (-\infty,1)$. Com efeito, dado $x \in (-\infty,1)$ tome $t_k \doteq \sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_i^+)$ para $k \in \mathbb{N}$ e $t_0 = 0$. Como $\phi(x_k^+) = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que $t_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\tilde{\pi}(x,t_k) = 0 \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donde da Proposição C.0.1, $0 \in \tilde{L}^+(x) \neq \emptyset$. Ainda, dado $y \in \tilde{L}^+(x)$, da Proposição C.0.1, existe $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\tilde{\pi}(x,t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. E como $x < 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{\pi}(x,t_n) \in [0,1]$, para todo $n \geq n_0$. Portanto, $y \in [0,1]$ e $\tilde{L}^+(x) \subset [0,1]$, donde $x \in \tilde{P}([0,1))$.

Por outro lado, se $x \in \tilde{P}([0,1))$ temos pela Proposição C.0.1 que existem $y \in X$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\tilde{\pi}(x,t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Agora, note que se $x \geq 1$ então $\tilde{\pi}(x,t_n) = \pi(x,t_n) = x + t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$. Portanto, $\tilde{P}([0,1)) \subset (-\infty,1)$.

d) $\tilde{P}_w([0,1)) = (-\infty,1)$. De fato, dados $x \in (-\infty,1)$ e $U_{[0,1)}$ vizinhança do conjunto $[0,1)$, tome $t_n \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \phi(x_i^+)$, $n \in \mathbb{N}$. Então $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\tilde{\pi}(x,t_n) \in [0,1) \subset U_{[0,1)}$, para todo $n \geq 1$. Por outro lado, para $x \geq 1$, tem-se $\tilde{\pi}(x,t_n) = \pi(x,t_n) = x + t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ qualquer que seja a sequência $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$. Assim $\tilde{P}_w([0,1)) \subset (-\infty,1)$.

2.5 Hipóteses adicionais

Seja $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI. Ao longo deste trabalho, vamos considerar hipóteses adicionais que serão necessárias para estabelecer os resultados principais. Deixaremos explícito em cada capítulo, quais estaremos utilizando. São elas:

(**H1**) Para todo $x \in M$, x satisfaz STC.

(**H2**) $M \cap I(M) = \emptyset$.

(**H3**) Para todo $x \in X$, $T(x) = \mathbb{R}_+$.

(**H4**) Para todo $x \in X$, $\phi(x) < \infty$.

A Hipótese (**H1**), segundo (BONOTTO; SOUTO, 2019), controla como a órbita contínua entra ou sai do conjunto impulsivo M - veja a Seção 2.3 - e confere boas propriedades de convergência para a função ϕ, como apresentadas no Apêndice A.

A Hipótese (**H2**), nos diz intuitivamente que quando a órbita contínua encontra o conjunto impulsivo M, então ela é arremessada para fora dele.

A Hipótese (**H3**) tem sua importância no estudo do comportamente assintótico das órbitas impulsivas, (BONOTTO; SOUTO, 2019), que intuitivamente, é o estudo do que acontece com $\tilde{\pi}(x, \cdot)$ com o passar do tempo.

A Hipótese (**H4**) nos diz que qualquer elemento $x \in X$ encontra o conjunto impulsivo M em tempo finito.

CAPÍTULO

3

ESTABILIDADE

A noção de estabilidade em sistemas impulsivos, está ligada a noção de estabilidade de soluções periódicas ou singulares de um sistema de equações diferenciais: a grosso modo, uma solução ψ é estável quando toda solução com valores iniciais próximos a $\psi(0)$, está definida para todo tempo e permanece, para sempre, tão próxima quanto se queira da solução ψ, (SOTOMAYOR, 2011). Neste capítulo, apresentaremos as definições de estabilidade para sistemas impulsivos - que são inspiradas nas definições dadas no caso sem impulso, como podemos observar em (BHATIA; SZEGÖ, 1970) - e apresentaremos vários resultados abordados em (CIESIELSKI, 2004b) e (BONOTTO; SOUTO, 2019), que os relacionam com condições topológicas. Para este capítulo assumiremos as hipóteses adicionais (**H1**), (**H2**) e (**H3**).

3.1 Estabilidade de conjuntos

Nas seguintes definições, consideremos $(X, \pi, \mathbb{R}_+, M, I)$ um SI.

Definição 3.1.1. Um conjunto $A \subset X$ é **$\tilde{\pi}$-estável**, se dados $\varepsilon > 0$ e $x \in A$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(B(x,\delta),[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon).$$

Definição 3.1.2. Um conjunto $A \subset X$ é **uniformemente $\tilde{\pi}$-estável**, se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon).$$

Definição 3.1.3. Um conjunto $A \subset X$ é **orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável** se dada U_A, vizinhança de A, existe V_A, vizinhança de A, tal que

$$\tilde{\pi}(V_A,[0,\infty)) \subset V_A \subset U_A.$$

Definição 3.1.4. Um conjunto $A \subset X$ é **BH $\tilde{\pi}$-estável** ($\tilde{\pi}$-estável no sentido de Bhatia e Hajek) se dados $x \in A$ e $y \notin A$, existem vizinhanças V_x de x e W_y de y, tais que

$$W_y \cap \tilde{\pi}(V_x, [0, \infty)) = \emptyset.$$

Definição 3.1.5. Um conjunto $A \subset X$ é **equi $\tilde{\pi}$-estável** se dado $x \notin A$, existe $\delta = \delta(x) > 0$ tal que

$$x \notin \overline{\tilde{\pi}(B(A, \delta), [0, \infty))}.$$

Definição 3.1.6. Um conjunto $A \subset X$ é **$\tilde{\pi}$-atrator fraco**, se $\tilde{P}_w(A)$ é vizinhaça de A.

Definição 3.1.7. Um conjunto $A \subset X$ é **$\tilde{\pi}$-atrator**, se $\tilde{P}(A)$ é vizinhaça de A.

Definição 3.1.8. Um conjunto $A \subset X$ é **assintoticamente $\tilde{\pi}$-estável** se é $\tilde{\pi}$-atrator fraco e orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável.

Exemplo 3.1.9. Considere o sistema impulsivo dado no Exemplo 2.3.3 e $A \doteq [0, 1)$. Então:

a) A é $\tilde{\pi}$-estável. De fato, dados $x \in A \setminus \{0\}$ e $\varepsilon > 0$, tome $\delta \doteq \min\{x, 1 - x\}$. Então, do Exemplo 2.4.2,

$$\tilde{\pi}(B(x, \delta), [0, \infty)) \subset \tilde{\pi}(A, [0, \infty)) \subset A \subset B(A, \varepsilon).$$

Se $x = 0$, tome $\delta \doteq \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $y \in B(0, \delta)$. Se $y \leq 0$, tome $t \doteq -y$, assim $\tilde{\pi}(y, [0, t]) = \pi(y, [0, t]) \subset B(A, \varepsilon)$ e $\tilde{\pi}(y, t) \in A$, consequentemente, $\tilde{\pi}(y, [0, \infty)) \subset B(A, \varepsilon)$. Se $y > 0$, então $\tilde{\pi}(y, [0, \infty)) \subset A$. Portanto, $\tilde{\pi}(B(0, \delta), [0, \infty)) \subset B(A, \varepsilon)$.

b) A não é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável. De fato, tome $\varepsilon = 1$, $\delta > 0$, $x = 1 + \frac{\delta}{2}$. Então,

$$d(x, A) = 1 + \frac{\delta}{2} - 1 = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

e para todo $t \geq 0$,

$$\tilde{\pi}(x, t) = \pi(x, t) = 1 + \frac{\delta}{2} + t.$$

Logo tomando $t = 1$,

$$d(\tilde{\pi}(x, 1), A) = 1 + \frac{\delta}{2} + 1 - 1 = 1 + \frac{\delta}{2} > 1 \implies \tilde{\pi}(x, 1) \notin B(A, \varepsilon).$$

c) A é orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável. De fato, seja U_A uma vizinhança de A. Então existe $\mathscr{O} \in \tau_X$ tal que $A \subset \mathscr{O} \subset U_A$. Logo existe $\eta > 0$ tal que $A \subset (-\eta, 1) \subset \mathscr{O} \subset U_A$. Defina $V_A \doteq (-\eta, 1)$. Pelo item *b*) do Exemplo 2.4.7, $\tilde{\pi}((-\eta, 1), [0, \infty)) = (-\eta, 1) \subset U_A$.

d) A não é BH $\tilde{\pi}$-estável. De fato, tome $x \doteq \frac{1}{2}$, $y \doteq 1$ e $\delta > 0$. Pelo item *b*) do Exemplo 2.4.7, $\tilde{\pi}(\frac{1}{2}, [0, \infty)) = [0, 1)$, donde

$$\emptyset \neq B(1, \delta) \cap \tilde{\pi}\left(\frac{1}{2}, [0, \infty)\right) \subset B(1, \delta) \cap \tilde{\pi}\left(B\left(\frac{1}{2}, \delta\right), [0, \infty)\right).$$

e) A não é equi $\tilde{\pi}$-estável. De fato, tome $x \doteq 1 \notin A$. Note que para todo $\delta > 0$ e para todo $x \in B(A,\delta)$, temos $x \in \tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty)) \subset \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty))}$.

f) A é $\tilde{\pi}$-atrator fraco e $\tilde{\pi}$-atrator, pois pelos itens *c*) e *d*) do Exemplo 2.4.7 temos $\tilde{P}_w(A) = \tilde{P}(A) = (-\infty, 1)$.

g) A é assintóticamente $\tilde{\pi}$-estável devido a c) e a f).

3.2 Estabilidade de conjuntos compactos

O primeiro teorema sobre estabilidade nos diz que mediante a hipótese de compacidade, podemos caracterizar muitas das definições de estabilidade que definimos. A equivalência 1) $\iff$ 6) do Teorema 3.2.1 é conhecida como o Teorema de URA.

Teorema 3.2.1. Sejam $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI, X localmente compacto e $A \subset X$ compacto. São equivalentes:

1) A é $\tilde{\pi}$-estável;

2) A é orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável;

3) A é BH $\tilde{\pi}$-estável;

4) A é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável;

5) A é equi $\tilde{\pi}$-estável;

6) $\tilde{D}^+(A) = A$;

Demonstração. Primeiramente, mostremos a equivalência 4) $\iff$ 5).

4) $\implies$ 5) Seja $x \notin A = \overline{A}$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \notin B(A,\varepsilon)$. Sendo A uniformemente $\tilde{\pi}$-estável, existe $\delta > 0$ tal que $\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty)) \subset B\left(A,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ donde

$$\overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty))} \subset \overline{B\left(A,\frac{\varepsilon}{2}\right)} \subset B(A,\varepsilon) \implies x \notin \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty))}.$$

5) $\implies$ 4) Como A é compacto e X localmente compacto, existe $\gamma > 0$ tal que $B[A,\gamma]$ é compacto. Seja $\varepsilon \in (0,\gamma)$. Então $S(A,\varepsilon) \subset B[A,\gamma]$ é compacto. Dado $x \in S(A,\varepsilon)$, isto é, $d(x,A) = \varepsilon > 0$, segue que $x \notin \overline{A} = A$ e como A é equi $\tilde{\pi}$-estável, existe $\delta_x = \delta(x) > 0$ tal que $x \notin \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta_x),[0,\infty))}$. Tome $\gamma_x > 0$ tal que $B(x,\gamma_x) \cap \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta_x),[0,\infty))} = \emptyset$. Da compacidade de $S(A,\varepsilon)$, existem $d \in \mathbb{N}$ e $x_i \in S(A,\varepsilon), i = 1,\dots,d$, tais que $S(A,\varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{d} B(x_i,\gamma_{x_i})$ com

$$B(x_i,\gamma_{x_i}) \cap \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta_{x_i}),[0,\infty))} = \emptyset, \quad i = 1,\dots,d.$$

Por outro lado, como $M \cap B[A,\gamma]$ é compacto e I é contínua, segue que $I(M \cap B[A,\gamma])$ também é compacto. Para cada $z \in I(M \cap B[A,\gamma]) \setminus B(A,\varepsilon)$, existe $\alpha_z = \alpha(z) > 0$ tal que $z \notin \overline{\tilde{\pi}(B(A,\alpha_z),[0,\infty))}$. Tome $\beta_z > 0$ tal que $B(z,\beta_z) \cap \overline{\tilde{\pi}(B(A,\alpha_z),[0,\infty))} = \emptyset$. Pela compacidade, existem $p \in \mathbb{N}$ e $z_i \in I(M \cap B[A,\gamma]) \setminus B(A,\varepsilon), i = 1,\ldots,p$, tais que $I(M \cap B[A,\gamma]) \setminus B(A,\varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{d} B(z_i,\beta_{z_i})$ com

$$B(z_i,\beta_{z_i}) \cap \overline{\tilde{\pi}(B(A,\alpha_{z_i}),[0,\infty))} = \emptyset, \quad i = 1,\ldots,p.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_{x_1},\ldots,\delta_{x_d},\alpha_{z_1},\ldots,\alpha_{z_p}\}$. Então

$$\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon).$$

Agora, mostremos a equivalência 1) $\iff$ 4).

1) $\implies$ 4) Seja $\varepsilon > 0$. Sendo A $\tilde{\pi}$-estável, dado $x \in A$, existe $\delta_x = \delta_x(x,\varepsilon) > 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(B(A,\delta_x),[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon). \tag{3.1}$$

Como $A \subset \bigcup_{x \in A} B(x,\delta_x)$, segue da compacidade de A que existem $d \in \mathbb{N}$ e $x_i \in A$, $i = 1,\ldots,d$, tais que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{d} B(x,\delta_{x_i}). \tag{3.2}$$

Assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$B(A,\delta) \subset \bigcup_{i=1}^{d} B(x,\delta_{x_i}). \tag{3.3}$$

Do contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiria $x_n \in B(A,\frac{1}{n})$ tal que $d(x_n,x_i) \geq \delta_{x_i}$, para todo $i \in \{1,\ldots,d\}$. Desta forma, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in A$ tal que

$$d(x_n,y_n) < d(x_n,A) + \frac{1}{n} < \frac{2}{n}. \tag{3.4}$$

Logo, como A é compacto, sem perda de generalidade, podemos assumir que $y_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in A$, donde (3.4) implica que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in A$. Mas, como $d(\cdot,x_i)$ é contínua, para cada $i \in \{1,\ldots,d\}$, obtemos $d(x,x_i) \geq \delta_{x_i}$, donde (3.2) implica $x \notin A$. Portanto, (3.3) e (3.1) implicam

$$\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty)) \subset \bigcup_{i=1}^{d} \tilde{\pi}(B(x,\delta_{x_i}),[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon).$$

4) $\implies$ 1) Sejam $x \in A$ e $\varepsilon > 0$. Sendo A uniformemente $\tilde{\pi}$-estável, existe $\delta > 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(B(x,\delta),[0,\infty)) \subset \tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon).$$

No que segue, mostraremos que 1) $\implies$ 2) $\implies$ 3) $\implies$ 6) $\implies$ 1).

1) $\Longrightarrow$ 2) Dado U_A vizinhança de A, como A é compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(A,\varepsilon) \subset U_A$. Como 1) implica 4), existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon) \subset U_A$. Note que $V_A \doteq \tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty))$ é uma vizinhança $\tilde{\pi}$-invariante de A e

$$\tilde{\pi}(V_A,[0,\infty)) \subset V_A = \tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon) \subset U_A.$$

2) $\Longrightarrow$ 3) Sejam $x \in A$ e $y \notin A$. Como A é compacto e $\{y\}$ é fechado, temos que $d(y,A) = \eta > 0$. Logo,

$$B\left(A,\frac{\eta}{2}\right) \cap B\left(y,\frac{\eta}{2}\right) = \emptyset. \tag{3.5}$$

Por hipótese, existe uma vizinhança V_A de A tal que

$$\tilde{\pi}(V_A,[0,\infty)) \subset V_A \subset B\left(A,\frac{\eta}{2}\right). \tag{3.6}$$

Segue de (3.5) e (3.6) que

$$B\left(y,\frac{\eta}{2}\right) \cap \tilde{\pi}(V_A,[0,\infty)) = \emptyset.$$

3) $\Longrightarrow$ 6) Dado $y \in A$ e tomando $x_n \doteq y$ e $t_n \doteq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos da Proposição C.0.1 que $y \in \tilde{D}^+(A)$. Por outro lado, sejam

$$y \notin A, \quad x \in A, \quad (x_n) \subset X \quad \text{com} \quad x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \quad \text{e} \quad (t_n) \subset \mathbb{R}_+. \tag{3.7}$$

Da hipótese, existem vizinhanças W_y de y e V_x de x tais que

$$W_y \cap \tilde{\pi}(V_x,[0,\infty)) = \emptyset. \tag{3.8}$$

Assim de (3.7), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$,

$$x_n \in V_x \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x_n,t_n) \in \tilde{\pi}(V_x,[0,\infty)). \tag{3.9}$$

Logo de (3.9) em (3.8), $\tilde{\pi}(x_n,t_n) \overset{n\to+\infty}{\not\to} y$, donde da arbitrariedade de $y \notin A$, $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ e $(x_n) \subset X$ e pela Proposição C.0.1, resulta em $y \notin \tilde{D}^+(x)$. Agora, da arbitrariedade de $x \in A$, compacidade de A e Proposição C.0.2, concluímos que $y \notin \bigcup_{x\in A} \tilde{D}^+(x) = \tilde{D}^+(A)$.

6) $\Longrightarrow$ 1) Suponhamos que existam $x \in A$, $\varepsilon_0 > 0$ e sequências $(x_n) \subset X$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ tais que

$$x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x_n,t_n) \notin B(A,\varepsilon_0),\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Como X é localmente compacto, existe $\varepsilon < \varepsilon_0$ tal que $\overline{B(A,\varepsilon)}$ é compacto.

Se existem subsequências $(t_{n_k}) \subset (t_n)$ e $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ tais que $t_{n_k} < \phi(x_{n_k})$, temos da Definição de órbita impulsiva (Definição 2.2.1) que,

$$\tilde{\pi}(x_{n_k},[0,t_{n_k}]) = \pi(x_{n_k},[0,t_{n_k}]). \tag{3.11}$$

Segue da continuidade de π, (3.10), (3.11) e do Teorema da Alfândega que existe $s_{n_k} \in [0,t_{n_k}]$, para cada $k \in \mathbb{N}$, com

$$\tilde{\pi}(x_{n_k},s_{n_k}) \in S(A,\varepsilon). \tag{3.12}$$

Da compacidade de $\overline{B(A,\varepsilon)}$, $S(A,\varepsilon)$ é compacto. Assim, usando (3.12), sem perda de generalidade, podemos assumir que $\tilde{\pi}(x_{n_k},s_{n_k}) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y \in S(A,\varepsilon)$, donde $y \notin A$. Mas pela Proposição C.0.1, obtemos $y \in \tilde{D}^+(A)$, donde $\tilde{D}^+(A) \neq A$ o que é uma contradição.

Por outro lado, se existem subsequências $(t_{n_k}) \subset (t_n)$ e $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ tais que $\phi(x_{n_k}) \leq t_{n_k}$, podemos definir

$$\Delta_{n_k} \doteq \{s \geq 0 : \tilde{\pi}(x_{n_k},s) \in B(A,\varepsilon)\}.$$

Então (3.10) implica que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq K$,

$$\tilde{\pi}(x_{n_k},0) = x_{n_k} \in B(A,\varepsilon) \implies 0 \in \Delta_{n_k}. \tag{3.13}$$

Defina

$$s_{n_k} \doteq \inf\{s \geq 0 : s \in [0,T(x_{n_k}))\backslash\Delta_{n_k}\}.$$

Então s_{n_k} está bem definido, pois da hipótese adicional **(H3)**, $T(x_{n_k}) = \infty$, donde (3.10) implica $t_{n_k} \in \{s \geq 0 : s \in [0,T(x_{n_k}))\backslash\Delta_{n_k}\}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{\pi}(x_{n_k},s_{n_k}) \notin B(A,\varepsilon). \tag{3.14}$$

Com efeito, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $(r_j) \subset (s_{n_k},\infty)$ uma sequência tal que $r_j \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} s_{n_k}$. Note que $(r_j) \subset [0,T(x_{n_k}))\backslash\Delta_{n_k}$, ou seja, $d(\tilde{\pi}(x_{n_k},r_j),A) \geq \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $\phi(x_{n_k}) \leq t_{n_k} < \infty$, segue pela Proposição B.0.7 que $\tilde{\pi}(x_{n_k},r_j) \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(x_{n_k},s_{n_k})$. Portanto, $d(\tilde{\pi}(x_{n_k},s_{n_k}),A) \geq \varepsilon$.

Também, para todo $\delta \in (0,\varepsilon)$, existe $K_1 \geq K$, tal que para todo $k \geq K_1$

$$\tilde{\pi}(x_{n_k},[0,s_{n_k})) \subset B(A,\delta). \tag{3.15}$$

Caso contrário, existiria $\delta_0 > 0$ e $u_{n_k} \in [0,s_{n_k})$, $k \in \mathbb{N}$, tais que

$$\tilde{\pi}(x_{n_k},u_{n_k}) \in C \doteq \overline{B(A,\varepsilon)} \cap (X \setminus B(A,\delta_0)) \subset \overline{B(A,\varepsilon)}.$$

Como C é fechado e $\overline{B(A,\varepsilon)}$ é compacto, C também é compacto. Logo, sem perda de generalidade, podemos assumir que $\tilde{\pi}(x_{n_k},u_{n_k}) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y \in C$, e assim $y \notin A$. Mas pela Proposição C.0.1, temos que $y \in \tilde{D}^+(A)$, donde $\tilde{D}^+(A) \neq A$ o que é uma contradição. Isso mostra a validade de (3.15).

Consequentemente, dado $\delta \in (0,\varepsilon)$, segue de (3.13), (3.14), (3.15) e da definição de s_{n_k} que para todo $k \geq K_1$,

$$\tilde{\pi}(x_{n_k},[0,s_{n_k})) \subset B(A,\delta) \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x_{n_k},s_{n_k}) \notin B(A,\varepsilon) \supset B(A,\delta),$$

donde $\tilde{\pi}(x_{n_k},\cdot)$ não é contínua em s_{n_k}. Assim podemos afirmar que $\tilde{\pi}(x_{n_k},s_{n_k}) = I(y_{n_k})$ para $y_{n_k} \in M \cap \overline{B(A,\delta)}$, para todo $k \geq K_1$. Como $M \cap \overline{B(A,\delta)}$ é compacto, pois $M \cap \overline{B(A,\delta)} \subset \overline{B(A,\varepsilon)}$, o qual é compacto, podemos assumir que $y_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y \in \overline{B(A,\delta)} \cap M$. Segue da continuidade da I que $I(y_{n_k}) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} I(y) \notin B(A,\varepsilon)$ já que (3.14) implica $I(y_{n_k}) = \tilde{\pi}(x_{n_k},s_{n_k}) \notin B(A,\varepsilon)$, e portanto $I(y) \notin A$. Mas pela Proposição C.0.1, $I(y) \in \tilde{D}^+(A)$, donde $\tilde{D}^+(A) \neq A$. Contradição. Portanto, A é $\tilde{\pi}$-estável. $\square$

Exemplo 3.2.2. Considere o sistema impulsivo do Exemplo 2.3.3. Pelo item $b)$ do Exemplo 2.4.7, $[0,\infty) = \tilde{D}^+([0,1))$, donde $\tilde{D}^+([0,1]) \neq [0,1]$. Logo, pelo Teorema 3.2.1, $A \doteq [0,1]$ não é $\tilde{\pi}$-estável, orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável, BH $\tilde{\pi}$-estável, uniformemente $\tilde{\pi}$-estável, assintoticamente $\tilde{\pi}$-estável e nem equi $\tilde{\pi}$-estável. Também A não é $\tilde{\pi}$-atrator e nem $\tilde{\pi}$-atrator fraco, pois $\tilde{L}^+(1) = \emptyset$.

O Exemplo 3.2.2 juntamente com o Exemplo 3.3.4 sugere, como argumenta (BONOTTO; SOUTO, 2019), que o conjunto impulsivo M pode ser responsável pela instabilidade.

O próximo exemplo mostra que a compacidade é essencial no Teorema 3.2.1.

Exemplo 3.2.3. Considere $X = \{(x,y) : y \geq 0\}$ e o sistema

$$\begin{cases} \pi((x,y),t) = (xe^{-t}, ye^t),\ x < -1, t \in \mathbb{R}, \\ \pi((x,y),t) = (t+x,y),\ x \geq -1, t \in \mathbb{R}, \\ M = \{(-1,y) : y \in \mathbb{R}\}, \\ I(-1,y) = (1,y), y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Note que $M = \overline{M}$ e I é contínua. Dado $(-1,y) \in M$, tome $\varepsilon_{(-1,y)} \doteq 1$. Segue que $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ satisfaz as condições da Definição 2.1.5, isto é, define um SI. Além disso, dado $(-1,y) \in M$, $(-1,y)$ satisfaz STC. De fato, defina

$$S \doteq \{-1\} \times [y-1,y+1] \quad \text{e} \quad L \doteq \{0\} \times [y-1,y+1].$$

Então para $\lambda \doteq 1$, $S = F(L,\lambda)$. Também, $[-e,0] \times [y-1,y+1] \subset F(L,[0,2])$ pois, dado $(u,v) \in [-e,0] \times [y-1,y+1]$, se $u \in [-1,0]$ então $\pi((u,v),t) = (t+u,v) \in L$ o que implica $t = -u \in [0,2]$. Se $u \in [-e,-1)$, $\pi((u,v),t) = (ue^{-t}, ve^t) \in M$ implica $u = -e^t$, donde $0 < t \leq 1$. Logo verificamos os itens $a), b)$ e $c)$, da Definição 2.3.1. O item $d)$ se verifica pois, o fluxo π corresponde a uma EDO autônoma, donde as órbitas não se intersectam. A Figura 6 representa $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$.

Considere, agora, o conjunto $A \doteq \mathbb{R}$. Então A é $\tilde{\pi}$-estável mas não é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável. De fato, sejam $\delta > 0$ e $\varepsilon = 1$. Assim $(-2,2) \notin B(A,1)$. Notemos que

$$d(\pi((-2,2),t),A) = d((-2e^{-t},2e^t),A) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Tome $\tau < 0$ tal que $(x_1,y_1) \doteq \pi((-2,2),\tau) \in B(A,\delta)$, donde

$$\tilde{\pi}((x_1,y_1),-\tau) = \pi(\pi((-2,2),\tau),-\tau) = (-2,2)$$

e A não é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável.

Por outro lado seja $\varepsilon > 0$. Considere $(x_0,0) \in A$ com $x_0 > -1$. Tome

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, d((x_0,0),(-1,0))\right\} = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, x_0+1\right\}.$$

Assim, dado $(x,y) \in B((x_0,0),\delta)$ temos que para todo $t \geq 0$,

$$\tilde{\pi}((x,y),t) = (x+t,y) \in B(A,\varepsilon).$$

Considere, agora, $(x_0,0) \in A$ com $x_0 < -1$. Temos que dado $(x,y) \in X$ com $x < -1$,

$$\pi((x,y),\phi(x,y)) = (e^{-\phi(x,y)}x, e^{\phi(x,y)}y) = (-1, e^{\phi(x,y)}y) \implies e^{-\phi(x,y)}x = -1,$$

ou seja,

$$\phi(x,y) = ln(-x) \quad \text{e} \quad e^{\phi(x,y)}y = -xy. \tag{3.16}$$

Desta forma, escolha $\delta \doteq \frac{\varepsilon}{\varepsilon - x_0} > 0$. Dado $(x,y) \in B((x_0,0),\delta)$, segue que

$$\max\{|y|,|x-x_0|\} \leq \sqrt{|x-x_0|^2 + y^2} = d((x,y),(x_0,0)) < \frac{\varepsilon}{\varepsilon - x_0} \leq \varepsilon,$$

logo,

$$|x| < \varepsilon + |x_0| = \varepsilon - x_0 \quad \text{e} \quad |y| < \frac{\varepsilon}{\varepsilon - x_0},$$

donde (3.16) implica

$$|e^{\phi(x,y)}y| = |xy| < (\varepsilon - x_0)\frac{\varepsilon}{\varepsilon - x_0} = \varepsilon,$$

e isso garante que $\tilde{\pi}((x,y),t) \in B(A,\varepsilon)$, para todo $t \geq 0$. Por fim para $(-1,0) \in A$, tome $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\}$. Portanto, A é $\tilde{\pi}$-estável.

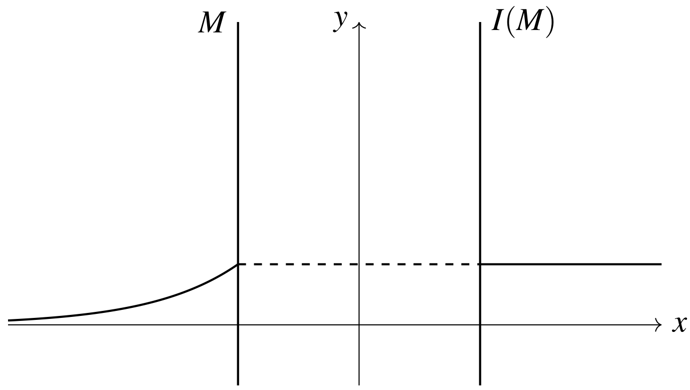

Figura 6 – $A = \mathbb{R}$ é $\tilde{\pi}$-estável mas não é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável.

3.3 Estabilidade de conjuntos relativamente compactos

Nos próximos três teoremas, veremos algumas alternativas do Teorema 3.2.1, em que as hipóteses de compacidade serão enfraquecidas. Tais alternativas, foram dadas por (BONOTTO; SOUTO, 2019).

Teorema 3.3.1. Sejam $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI e $A \subset X$ tal que $\overline{A}$ compacto. Então, A é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável, se e somente se, $\overline{A}$ é orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável.

Demonstração. Suponhamos que $\overline{A}$ seja orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável. Seja $\varepsilon > 0$. Como $\overline{A} \subset B(\overline{A},\varepsilon) \in \tau_X$, então existe $V_{\overline{A}} \subset B(\overline{A},\varepsilon)$ tal que

$$\tilde{\pi}(V_{\overline{A}},[0,\infty)) \subset V_{\overline{A}}. \tag{3.17}$$

Como $\overline{A}$ é compacto, existe $\delta = \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ tal que $B(\overline{A},\delta) \subset V_{\overline{A}}$. Segue de (3.17) que

$$\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty)) \subset \tilde{\pi}(V_{\overline{A}},[0,\infty)) \subset V_{\overline{A}} \subset B(\overline{A},\varepsilon) = B(A,\varepsilon).$$

Por outro lado, suponhamos que A seja uniformemente $\tilde{\pi}$-estável. Tome $U_{\overline{A}}$ uma vizinhança de $\overline{A}$. Como $\overline{A}$ é compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\overline{A},\varepsilon) \subset U_{\overline{A}}$. Sendo A uniformemente $\tilde{\pi}$-estável, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(B(\overline{A},\delta),[0,\infty)) = \tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon) = B(\overline{A},\varepsilon) \subset U_{\overline{A}}. \tag{3.18}$$

Tome $V_{\overline{A}} \doteq \tilde{\pi}(B(\overline{A},\delta),[0,\infty))$. Então $\tilde{\pi}(V_{\overline{A}},[0,\infty)) \subset V_{\overline{A}}$ e (3.18) implica $V_{\overline{A}} \subset U_{\overline{A}}$. □

Teorema 3.3.2. Sejam $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI e $A \subset X$. Suponha que $\overline{A}$ seja compacto e uniforme $\tilde{\pi}$-estável. Então, $\tilde{D}^+(A) = \overline{A}$.

Demonstração. Note que

$$A \subset \tilde{D}^+(A). \tag{3.19}$$

De fato, dado $y \in A$, tome $x_n \doteq y$ e $t_n \doteq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $d(x_n,A) = d(y,A) = 0$ e $\tilde{\pi}(y,t_n) = y \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$, donde da Proposição C.0.1 vale (3.19). Também, da Definição 2.4.4, obtemos

$$\tilde{D}^+(A) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\bigcup_{t\geq 0} \tilde{\pi}(B(A,\varepsilon),t)} \implies \tilde{D}^+(A) = \overline{\tilde{D}^+(A)}. \tag{3.20}$$

Segue de (3.19), (3.20) e da definição de $\overline{A}$ que $\overline{A} \subset \tilde{D}^+(A)$.

Por outro lado, sejam $y \in \tilde{D}^+(A)$ e $\varepsilon > 0$. Como $\overline{A}$ é compacto, a Proposição C.0.2 implica que

$$\tilde{D}^+(A) = \bigcup_{a\in\overline{A}} \tilde{D}^+(a). \tag{3.21}$$

Logo de (3.21), existe $a \in \overline{A}$ tal que $y \in \tilde{D}^+(a)$. Pela Proposição C.0.1, existem sequências $(a_n) \subset X$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ tais que

$$a_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(a_n,t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y. \tag{3.22}$$

Como A é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty)) \subset B\left(A,\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{3.23}$$

Segue de (3.22) que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, $a_n \in B(A,\delta)$, donde (3.23) implica

$$\tilde{\pi}(a_n,t_n) \in \tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty)) \subset B\left(A,\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Logo, $y \in \overline{B(A,\frac{\varepsilon}{2})} \subset B(A,\varepsilon)$. Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, concluímos que $y \in \bigcap_{\varepsilon>0} B(A,\varepsilon) = \overline{A}$. □

Teorema 3.3.3. Sejam $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI, X localmente compacto e $A \subset X$ tal que $\overline{A}$ é compacto. Então, $\tilde{D}^+(A) = \overline{A}$, se e somente se, A é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como $\overline{A}$ é compacto, a Proposição C.0.2 implica que

$$\tilde{D}^+(A) = \bigcup_{a\in\overline{A}} \tilde{D}^+(a) = \tilde{D}^+(\overline{A}). \tag{3.24}$$

Supondo $\tilde{D}^+(A) = \overline{A}$, segue que $\tilde{D}^+(\overline{A}) = \overline{A}$. Logo, pelo Teorema 3.2.1 obtemos que $\overline{A}$ é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável. Desta forma, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty)) = \tilde{\pi}(B(\overline{A},\delta),[0,\infty)) \subset B(\overline{A},\varepsilon) = B(A,\varepsilon).$$

Por outro lado, se A é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável, como $\overline{A}$ é compacto, segue do Teorema 3.3.2 que $\tilde{D}^+(A) = \overline{A}$. $\square$

O próximo exemplo é uma aplicação dos Teoremas 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3, e nos mostra mais uma vez como o conjunto impulsivo pode ser responsável pela instabilidade.

Exemplo 3.3.4. Sejam $X = \mathbb{R}^2$, $A = [0,2) \times \{0\}$ e

$$\begin{cases} \pi((x,y),t) = (x+t,y),\ t \geq 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\}, \\ I(2,y) = (0,\frac{y}{2}),\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Note que $M = \overline{M}$ e I é contínua em M. Como o fluxo π corresponde a uma EDO autônoma, as órbitas não se intersectam. Logo dado $z \in M$, basta tomar $\varepsilon_z \doteq 1$, que as condições da Definição 2.1.5 estão satisfeitas, isto é, $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ é um SI. Note também que M satisfaz STC. De fato, tome $L \doteq \{(3,y) : y \in \mathbb{R}\}$, $S \doteq \{2\} \times [y-1,y+1]$ e $\lambda \doteq 1$. Logo S é uma λ-seção através de z que satisfaz a Definição 2.3.2. A Figura 7 representa o sistema $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$.

i) $\tilde{P}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 2\}$. De fato, se $(x,y) \in \tilde{P}(A)$ com $x \geq 2$, pela Proposição C.0.1, existem $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ e $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, tais que $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ e

$$\tilde{\pi}((x,y),t_n)) = \pi((x,y),t_n) = (x+t_n,y) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (u,v),$$

mas

$$\|\tilde{\pi}((x,y),t_n))\| = \|\pi((x,y),t_n))\| = \|(x+t_n,y)\| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Segue que $\tilde{P}(A) \subset \{(x,y) : x < 2\}$. Por outro lado, dado $z = (x,y)$, $x < 2$ tome $t_k \doteq \sum_{i=0}^{k-1} \phi(z_i^+)$, $k \in \mathbb{N}$. Como $\phi(z_i^+) = 2$ para todo i, $t_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$. Além disso, como $x < 2$ temos

$$\tilde{\pi}(z,t_k) = z_k^+ = \left(0,\frac{y}{2^{k-1}}\right) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3.25}$$

donde, pela Proposição C.0.1, $0 \in \tilde{L}^+(z) \neq \emptyset$. Também, sejam $(u,v) \in \tilde{L}^+(z)$ e $\varepsilon > 0$. Então, pela Proposição C.0.1, existe uma sequência $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(z,t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (u,v). \tag{3.26}$$

Como $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ e de (3.25), $z_k^+ \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, tome $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $\|z_{k_n}^+\| < \varepsilon$ e

$$t_n \in \left(\sum_{i=0}^{k_n-1} \phi(z_i^+), \sum_{i=0}^{k_n} \phi(z_i^+)\right).$$

Segue que,

$$\tilde{\pi}(z,t_n) = \pi\left(\left(0,\frac{y}{2^{k_n-1}}\right), t_n - \sum_{i=0}^{k_n-1} \phi(z_i^+)\right) = \left(t_n - \sum_{i=0}^{k_n-1} \phi(z_i^+), \frac{y}{2^{k_n-1}}\right),$$

ou seja,

$$d(\tilde{\pi}(z,t_n),A) = \|z_{k_n}^+\| = \left\|\left(0,\frac{y}{2^{k_n-1}}\right)\right\| < \varepsilon. \tag{3.27}$$

Portanto, (3.26) e (3.27) implicam $(u,v) \in \overline{A}$.

ii) A é $\tilde{\pi}$-estável. De fato, sejam $\varepsilon > 0$ e $z_0 = (x_0,0) \in A$. Como $x_0 < 2$ temos que

$$\delta \doteq \min\left\{\varepsilon, \frac{d(z_0,2)}{2}\right\} > 0.$$

Dado $z = (x,y) \in B(z_0,\delta)$, para $0 \leq t < \phi(z)$ tem-se

$$d(\tilde{\pi}(z,t),A) = d(\pi(z,t),A) = |y| < \varepsilon \implies \tilde{\pi}(z,[0,\phi(z)) \subset B(A,\varepsilon).$$

Para $z \in B(z_0,\delta)$ e $t \geq \phi(z)$, temos que $x < 2$, donde existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$t \in \left(\sum_{i=0}^{k-1} \phi(z_i^+), \sum_{i=0}^{k} \phi(z_i^+)\right).$$

Daí,

$$\tilde{\pi}(z,t) = \pi\left(\left(0,\frac{y}{2^{k-1}}\right), t - \sum_{i=0}^{k-1} \phi(z_i^+)\right) = \left(t - \sum_{i=0}^{k-1} \phi(z_i^+), \frac{y}{2^{k-1}}\right),$$

que nos leva

$$d(\tilde{\pi}(z,t),A) = \|z_k^+\| = \left\|\left(0,\frac{y}{2^{k-1}}\right)\right\| \leq |y| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\tilde{\pi}(z,[\phi(z),\infty)) \subset B(A,\varepsilon).$$

Portanto, $\tilde{\pi}(B(z_0,\delta),[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon)$.

iii) $\overline{A}$ não é $\tilde{\pi}$-estável. De fato, tome $(2,0) \in \overline{A}$, $\delta > 0$ e $\varepsilon = 1$. Seja $x \in (2,2+\delta)$. Então, $x > 2$ donde, para todo $t \geq 0$,

$$\tilde{\pi}((x,0),t) = \pi((x,0),t) = (x+t,0). \tag{3.28}$$

Tome $t > 0$ tal que $x+t > 3$. Portanto, (3.28) implica

$$d(\tilde{\pi}((x,0),t),A) = x+t-2 > 1 \implies \tilde{\pi}((x,0),t) \notin B(A,1).$$

iv) A não é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável. De fato, como iii) implica que $\overline{A}$ não é $\tilde{\pi}$-estável, sendo compacto e X localmente compacto, o Teorema 3.2.1 mostra que $\overline{A}$ não é orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável. Segue do Teorema 3.3.1 que A não é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável.

v) $\tilde{D}^+(A) \neq \overline{A}$. De fato, sendo X localmente compacto e $\overline{A}$ compacto, como iv) implica que A não é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável temos o resultado pelo Teorema 3.3.3.

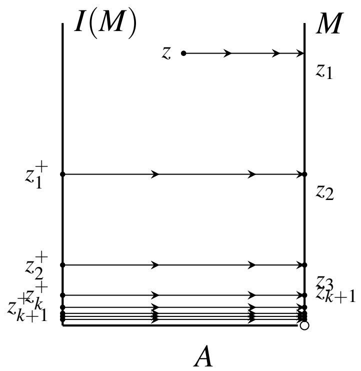

Figura 7 – Instabilidade gerada pelo conjunto impulsivo.

3.4 Estabilidade de componentes

Como podemos observar em (BHATIA; SZEGÖ, 1970), em sistemas dinâmicos sem impulso, um conjunto compacto é estável se, e somente se, suas componentes conexas o são. Isto não ocorre em sistemas impulsivos. Mais ainda: a condição STC, que tem grande importância na teoria dos sistemas dinâmicos impulsivos, (CIESIELSKI, 2004b), não implica, em geral, na estabilidade de componentes conexas. É necessário e essencial que a componente conexa seja isolada e invariante pela função impulso.

Exemplo 3.4.1. Considere $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$ e

$$\begin{cases} \pi((x,y),t) = (x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t), \ (x,y) \in X, \ t \geq 0, \\ M = \{0\} \times [-2,-1], \\ I(0,y) = (0,y+3), \ -2 \leq y \leq -1. \end{cases}$$

Note que $M = \overline{M}$ e I é contínua em M. Dado $(0,y) \in M$, temos que $\pi((0,y),t) = (-y\sin t, y\cos t)$. Desta forma, basta tomar $\varepsilon_{(0,y)} \doteq \frac{\pi}{2}$ que as condições da Definição 2.1.5 estão satisfeitas, isto é, $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ é um SI. Ainda, todo ponto de M satisfaz STC. De fato, seja $(0,y) \in M$ e defina

$$S \doteq M, \ \ L \doteq [1,2] \times \{0\} \ \ \text{e} \ \ \lambda \doteq \frac{\pi}{2}.$$

Assim, $S = \overline{S}$, $L = \overline{L}$ e $F(L,\lambda) = S$, pois

$$(0,y) \in S \implies \pi\left((0,y), \frac{\pi}{2}\right) \in L \implies (0,y) \in F(L,\lambda)$$

e

$$(u,v) \in F(L,\lambda) \implies (-v,u) = (v',0), \ \ v' \in [1,2] \implies (u,v) \in S.$$

Agora, note que $\{(x,y) \in X : y < 0\} \subset F(L,[0,\pi])$, pois tomando $t \doteq \cot^{-1}(\frac{-x}{y}) \in [0,\pi]$ tem-se

$$(x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t) \in L.$$

Ainda, como o fluxo π corresponde a uma EDO autônoma, as órbitas não se intersectam donde, para quaisquer $\mu, \nu \in [0,\pi]$,

$$F(L,\mu) \cap F(L,\nu) = \emptyset.$$

Por fim, $M \subset \{(x,y) \in X : y \leq 0\} \subset F(L,[0,\pi])$, donde $S = M \cap F(L,[0,\pi])$. Segue que S é uma $\frac{\pi}{2}$-seção que satisfaz STC (Definição 2.3.2). A Figura 8 representa o sistema $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$.

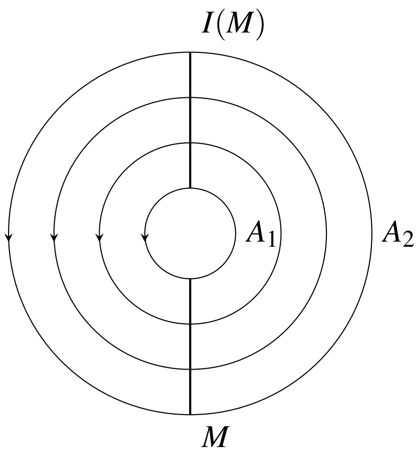

Figura 8 – $A_1 \cup A_2$ é $\tilde{\pi}$-estável mas sua componente A_1 não o é.

O conjunto $A \doteq A_1 \cup A_2$ com

$$A_1 \doteq \{(x,y) \in X : x^2 + y^2 = 1\} \ \ \text{e} \ \ A_2 \doteq \{(x,y) \in X : x^2 + y^2 = 4\},$$

é $\tilde{\pi}$-estável (veja Exemplo 4.1.8), enquanto A_1 não o é. De fato, sejam $(0,-1) \in A$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e $\delta > 0$. Assim

$$d((0,-1)_1^+, A_1) = d((0,2),(0,1)) = 1 > \varepsilon$$

e

$$(0,-1)_1^+ \in \tilde{\pi}(B(A_1,\delta),[0,\infty)),$$

o que mostra que A_1 não é $\tilde{\pi}$-estável.

O próximo resultado nos diz que a instabilidade das componentes, no Exemplo 3.4.1, vem do fato de que $I(M \cap A_1) \not\subset A_1$.

Teorema 3.4.2. Sejam $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI, X localmente compacto, $A \subset X$ compacto $\tilde{\pi}$-estável e $E \subset A$ uma componente conexa isolada tal que $I(M \cap E) \subset E$. Então E é $\tilde{\pi}$-estável.

Demonstração. Se E não for $\tilde{\pi}$-estável, então existem $x \in E$, $\varepsilon > 0$, $(x_n) \subset X$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ tais que

$$x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x_n,t_n) \notin B(E,\varepsilon),\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.29}$$

Como A é compacto e $E = \overline{E}$, segue que E também é compacto. Agora, como X é localmente compacto, sem perda de generalidade, podemos assumir que $\overline{B(E,\varepsilon)}$ é compacto. Pela definição de componente isolada, existem $U, V \in \tau_X$ tais que

$$E \subset U,\ \ A\setminus E \subset V \quad \text{e} \quad V \cap U = \emptyset. \tag{3.30}$$

Assim (3.30) implica $d(E,\overline{V}) > 0$, donde sem perda de generalidade, podemos considerar

$$\overline{B(E,\varepsilon)} \cap \overline{V} = \emptyset. \tag{3.31}$$

Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi(x_n) < \infty. \tag{3.32}$$

Do contrário, utilizando (3.29), a menos de subsequência, teríamos $\pi(x_n,t_n) = \tilde{\pi}(x_n,t_n) \notin B(E,\varepsilon)$ e $x_n \ \in B(E,\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$. Logo, como π é contínua, segue do Teorema da Alfândega que existe $(s_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(x_n,s_n) \in S(E,\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$. Como $\overline{B(E,\varepsilon)}$ é compacto, $S(E,\varepsilon)$ o é, donde sem perda de generalidade, obtemos $\pi(x_n,s_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in S(E,\varepsilon) \subset \overline{B(E,\varepsilon)}$. As condições (3.30) e (3.31) implicam que $y \notin A$. No entanto, (3.29) juntamente com as Proposições C.0.1 e C.0.2 e o Teorema 3.2.1. implicam que $y \in \tilde{D}^+(x) \subset \tilde{D}^+(A) = A$. Contradição. Portanto a condição (3.32) é válida.

Além disso, (3.30) implica $A \subset W \doteq B(E,\varepsilon) \cup V$. Da $\tilde{\pi}$-estabilidade de A, existe $\delta > 0$ tal que $\tilde{\pi}(B(x,\delta),[0,\infty)) \subset W$. Podemos assumir de (3.29) que

$$\tilde{\pi}(x_n,[0,\infty)) \subset W \quad \text{e} \quad \{t \in \mathbb{R}_+ : \tilde{\pi}(x_n,t) \in V\} \neq \emptyset, \tag{3.33}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina

$$u_n \doteq \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : \tilde{\pi}(x_n,t) \in V\},\ n \in \mathbb{N},$$

que está bem definido por (3.33). Note que $u_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Já de (3.29) e (3.31), $x_n \notin \overline{V}$, e pela continuidade de π podemos encontrar $\eta_n \in (0,\phi(x_n))$ tal que $\tilde{\pi}(x_n,(0,\eta_n)) \cap \overline{V} = \pi(x_n,(0,\eta_n)) \cap \overline{V} = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$. Segue de (3.33) e da definição de u_n, que

$$\tilde{\pi}(x_n,[0,u_n)) \subset B(E,\varepsilon) \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x_n,u_n) \in V, \tag{3.34}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo, de (3.34), temos que $\tilde{\pi}(x_n,u_n) = (x_n)^+_{k_n} = I(q_n)$ para algum $q_n \in M$. Assim, pela continuidade de π e de (3.34), concluímos que $q_n \in \overline{B(E,\varepsilon)}$. Da compacidade, podemos assumir que

$$q_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in M \cap \overline{B(E,\varepsilon)}. \tag{3.35}$$

Como $M \cap I(M) = \emptyset$ (hipótese (H2)), existe $v_n \in (0, u_n)$ tal que

$$\tilde{\pi}(x_n, (v_n, u_n)) \cap M = \emptyset, \; n \in \mathbb{N}. \tag{3.36}$$

Seja $s_n \in (v_n, u_n)$ tal que $u_n - s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e considere $y_n \doteq \tilde{\pi}(x_n, s_n)$, $n \in \mathbb{N}$. De (3.34), $y_n \in B(E, \varepsilon) \subset \overline{B(E,\varepsilon)}$, e da compacidade de tal conjunto, $y_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in \overline{B(E,\varepsilon)}$ a menos de subsequência. Segue das Proposições C.0.1, C.0.2 e de (3.29), que $y \in \tilde{D}^+(x) \subset \tilde{D}^+(A) = A$. Porém, como (3.30), (3.31) e $\overline{B(E,\varepsilon)} \cap (A \setminus E) = \emptyset$ são válidos, temos $y \in E$. Ainda, de (3.35),

$$V \ni \tilde{\pi}(x_n, u_n) = I(q_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(y),$$

logo $I(y) \in \overline{V}$. Mas como $y \in E \cap M$ e $I(M \cap E) \subset E$ (por hipótese), segue que $I(y) \in E \subset B(E, \varepsilon)$ contradizendo (3.31).

Portanto, E é $\tilde{\pi}$-estável. □

A hipótese da componente ser isolada no Teorema 3.4.2 é essencial. Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.4.3. Considere $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ e o sistema

$$\begin{cases} \pi((x,y),t) = (x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t), \; t \ge 0, (x,y) \in X, \\ M = \{0\} \times [1,2], \\ I(0,y) = (0, y-3), \; 1 \le y \le 2. \end{cases}$$

Então $M = \overline{M}$ e I é contínua em M. Dado $(y,0) \in M$ tome $\varepsilon_{(0,y)} \doteq \frac{\pi}{2}$ que as condições da Definição 2.1.5 estão satisfeitas, isto é, $(X, \pi, \mathbb{R}_+, M, I)$ é um SI. E, como no Exemplo 3.4.1, cada ponto de M satisfaz STC. Defina $A_\alpha \doteq \{(x,y) : x^2 + y^2 = \alpha^2\}$, $\alpha \in [1,2]$, e considere o conjunto

$$A \doteq A_1 \cup A_2 \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} A_{1+\frac{1}{n}} \right) \cup \left(\bigcup_{n=3}^{\infty} A_{2-\frac{1}{n}} \right).$$

Temos que A_1 e A_2 não são isoladas. De fato, suponhamos que existam $\varepsilon > 0$ e $V \in \tau_X$ tais que $A \setminus A_1 \subset V$ e $B(A_1, \varepsilon) \cap V = \emptyset$. Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Assim, dado $(x,y) \in A_{1+\frac{1}{n}}$, obtemos

$$d((x,y), A_1) = 1 + \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n} < \varepsilon \implies A_{1+\frac{1}{n}} \subset B(A_1, \varepsilon) \implies B(A_1, \varepsilon) \cap V \ne \emptyset.$$

Portanto, A_1 é isolado. Analogamente, A_2 não é isolada.

Note, também, que $A_1 \cup A_2$, $A_{\frac{3}{2}}$ e $A_{1+\frac{1}{n}} \cup A_{2-\frac{1}{n}}$, para cada $n \ge 3$, são conjuntos $\tilde{\pi}$-invariantes, pois esses conjuntos são π-invariantes e $I(0,1) = (0,-2)$, $I(0,2) = (0,-1)$, $I(0, \frac{3}{2}) = (0, -\frac{3}{2})$, $I(0, 1+\frac{1}{n}) = (0, -2+\frac{1}{n})$ e $I(0, 2-\frac{1}{n}) = (0, -1-\frac{1}{n})$.

Além disso, o compacto A é $\tilde{\pi}$-estável. Com efeito, sejam $\varepsilon > 0$ e $(x_0, y_0) \in A$. Consideremos o caso em que $(x_0, y_0) \in A_{1+\frac{1}{n}}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Note que, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, temos

$$\pi\left((x_{2k}^+, y_{2k}^+), [0, \phi(x_{2k}^+, y_{2k}^+))\right) \subset A_{1+\frac{1}{n}}$$

e

$$\pi\left((x^+_{2k+1},y^+_{2k+1}),[0,\phi(x^+_{2k+1},y^+_{2k+1})\right)\subset A_{2-\frac{1}{n}}.$$

Assim, tomando $\delta=\varepsilon$, se $(x,y)\in B((x_0,y_0),\delta)$ segue que

$$\tilde{\pi}((x,y),[0,\infty))\subset B(A_{1+\frac{1}{n}},\delta)\cup B\left(A_{2-\frac{1}{n}},\delta\right)\subset B(A,\varepsilon).$$

De mesma forma, se $(x_0,y_0)\in A_{2-\frac{1}{n}}$ para algum $n\in\mathbb{N}$, então dado $\varepsilon>0$, basta tomar $\delta=\varepsilon$, que se $(x,y)\in B((x_0,y_0),\delta)$ então

$$\tilde{\pi}((x,y),[0,\infty))\subset B\left(A_{1+\frac{1}{n}},\delta\right)\cup B\left(A_{2-\frac{1}{n}},\delta)\subset B(A,\varepsilon\right).$$

Entretanto, A_1 e A_2 não são $\tilde{\pi}$-estáveis. De fato, considere $B(A_1,\frac{1}{4})$ e $\delta>0$. Tome $(1,0)\in A_1$ e considere $n_0\in\mathbb{N}$, $n_0\geq 2$, tal que $(1+\frac{1}{n_0},0)\in B((1,0),\delta)$. Assim,

$$\tilde{\pi}\left(\left(1+\frac{1}{n_0},0\right),\frac{\pi}{2}\right)=I\left(0,1+\frac{1}{n_0}\right)=\left(0,-2+\frac{1}{n_0}\right)\notin B\left(A_1,\frac{1}{4}\right).$$

Analogamente, considere $B(A_2,\frac{1}{4})$ e $\delta>0$. Tome $(2,0)\in A_2$ e considere $n_0\in\mathbb{N}$, $n_0\geq 2$, tal que $(2-\frac{1}{n_0},0)\in B((1,0),\delta)$. Assim,

$$\tilde{\pi}\left(\left(2-\frac{1}{n_0},0\right),\frac{\pi}{2}\right)=I\left(0,2-\frac{1}{n_0}\right)=\left(0,-1-\frac{1}{n_0}\right)\notin B\left(A_1,\frac{1}{4}\right).$$

Teorema 3.4.4. Sejam $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI e $A\subset X$ compacto. Se qualquer componente conexa E de A é $\tilde{\pi}$-estável, então A é $\tilde{\pi}$-estável.

Demonstração. Sejam $\varepsilon>0$, $x\in A$ e A_x uma componente conexa que contém x. Como A_x é $\tilde{\pi}$-estável e $A\supset A_x$, existe $\delta>0$ tal que

$$\tilde{\pi}(B(x,\delta),[0,\infty))\subset B(A_x,\varepsilon)\subset B(A,\varepsilon).$$

Portanto, A é $\tilde{\pi}$-estável. □

Agora podemos apresentar condições para que a estabilidade das componentes de um conjunto seja equivalente a estabilidade do conjunto todo, como no caso sem impulso, dado por (BHATIA; SZEGÖ, 1970). A demonstração do próximo teorema segue dos Teoremas 3.4.2 e 3.4.4.

Corolário 3.4.5. Sejam $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI, X localmente compacto e $A\subset X$ compacto. Suponha que toda componente conexa E de A seja isolada e I-invariante, isto é, $I(M\cap E)\subset E$. Então A é $\tilde{\pi}$-estável se, e somente se, cada componente conexa de A é $\tilde{\pi}$-estável.

CAPÍTULO

4

ESTABILIDADE DE LYAPUNOV

No Capítulo 3, definimos alguns conceitos de estabilidade para sistemas impulsivos, relacionando-os com critérios topológicos dados pela literatura, como a compacidade. Alternativamente, neste capítulo, veremos que na maioria dos casos, podemos substituir aquelas condições topológicas pela existência de funções de Lyapunov. Tal estratégia, é inspirada no método direto de Lyapunov, para o estudo de estabilidade de soluções de equações diferenciais e suas propriedades qualitativas (HALE, 1969), e consiste de obter funções escalares não negativas que, entre outras coisas, decrescem ao longo de soluções, (BONOTTO; SOUTO, 2019), e indicam como tais soluções se comportam ao entrarem em um conjunto fechado, por exemplo, (BONOTTO; JR, 2010).

Os resultados apresentados nesse capítulo foram estabelecidos nos trabalhos (BONOTTO; JR, 2010) e (BONOTTO; SOUTO, 2019), e se utilizam das hipóteses adicionais (**H1**), (**H2**) e (**H3**). Para os Teoremas 4.1.3,4.1.4, 4.1.6, 4.1.7 e o Lema 4.3.5 assumiremos também a hipótese adicional (**H4**).

4.1 Estabilidade de conjuntos fechados

Inicialmente, vamos apresentar dois resultados auxiliares.

Lema 4.1.1. Sejam $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI e $\psi : X \to \mathbb{R}_+$ uma função satisfazendo as condições:

i) Dados $x \in X \setminus M$ e $0 \leq t \leq \phi(x) \implies \psi(\pi(x,t)) \leq \psi(x)$.

ii) $\psi(I(x)) \leq \psi(x)$, para todo $x \in M$.

Então $\psi(\tilde{\pi}(x,t)) \leq \psi(x)$ para todo $x \in X \setminus M$ e $t \geq 0$.

Demonstração. Sejam $x \in X \setminus M$ e $t \geq 0$. Se $t < \phi(x)$ então $\psi(\tilde{\pi}(x,t)) \leq \psi(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

$$\psi(\tilde{\pi}(x,t)) = \psi(\pi(x,t)) \overset{i)}{\leq} \psi(x).$$

Porém, se $t \geq \phi(x)$ então $\sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_i^+) \leq t < \sum_{i=0}^{k} \phi(x_i^+)$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Como $x_k^+ \notin M$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pois $M \cap I(M) = \emptyset$ (hipótese **(H2)**), segue que

$$\psi(\tilde{\pi}(x,t)) = \psi\left(\pi\left(x_k^+, t - \sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_i^+)\right)\right) \overset{i)}{\leq} \psi(x_k^+) = \psi(I(x_k)) \overset{ii)}{\leq} \psi(x_k) \overset{i)}{\leq} \psi(x).$$

□

Lema 4.1.2. Sejam $(X, \pi, \mathbb{R}_+, M, I)$ um SI e $\psi : X \to \mathbb{R}_+$ uma função contínua em $X \setminus M$ satisfazendo as condições:

i) Dados $x \in X \setminus M$ e $0 \leq t \leq \phi(x) \implies \psi(\pi(x,t)) \leq \psi(x)$;

ii) $\psi(I(x)) \leq \psi(x)$, para todo $x \in M$.

Se ψ for contínua em $z \in M$ então $\psi(\tilde{\pi}(z,t)) \leq \psi(z)$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Seja $z \in M$ tal que ψ é contínua em z. Pela condição iii) da Definição 2.1.5, existe $\varepsilon_z > 0$ tal que $\pi(z,(0,\varepsilon_z)) \cap M = \emptyset$. Seja $(\lambda_n) \subset (0, \varepsilon_z)$ tal que $\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Defina $w_n = \pi(z,\lambda_n) = \tilde{\pi}(z,\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Como $w_n \notin M$, $n \in \mathbb{N}$, segue do Lema 4.1.1 que

$$\psi(\tilde{\pi}(w_n,t)) \leq \psi(w_n),$$

para todo $t \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\psi(\tilde{\pi}(z,t+\lambda_n)) \leq \psi(w_n),$$

para todo $t \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Note que $w_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z$ e $\tilde{\pi}(z,t+\lambda_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(z,t)$ (veja Proposição B.0.7). Lembre-se que $\tilde{\pi}(z,t) \notin M$ para todo $t > 0$, pois pela hipótese **(H2)** temos $M \cap I(M) = \emptyset$. Daí, segue da continuidade de ψ em $X \setminus M$ e em z que

$$\psi(\tilde{\pi}(z,t)) \leq \psi(z),$$

para todo $t \geq 0$. □

O próximo resultado caracteriza a $\tilde{\pi}$-estabilidade (Definição 3.1.1) de conjuntos fechados.

Teorema 4.1.3. Sejam $(X, \pi, \mathbb{R}_+, M, I)$ um SI e $A \subset X$ um subconjunto fechado. Então, A é $\tilde{\pi}$-estável, se e somente se, existe uma função $\psi : X \to \mathbb{R}_+$ tal que:

$a)$ ψ é contínua em $X \setminus (M \setminus A) = (X \setminus M) \cup A$.

$b)$ Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $d(x,A) \geq \varepsilon$ e $x \notin M \implies \psi(x) \geq \delta$.

$c)$ Dada uma sequência $(w_n) \subset X$, com $w_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in A \implies \psi(w_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$d)$ Dados $x \in X \setminus M$ e $0 \leq t \leq \phi(x) \implies \psi(\pi(x,t)) \leq \psi(x)$;

$e)$ $\psi(I(x)) \leq \psi(x)$, para todo $x \in M$.

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Sejam $\varepsilon > 0$ e $x \in A = \overline{A} = A^{\mathrm{o}} \cup \partial A$. Podemos assumir que $X \setminus B(A,\varepsilon) \neq \emptyset$. Defina

$$\mu \doteq \inf\left\{\psi(w) \in \mathbb{R}_+ : w \notin M \ \text{ e } \ d(w,A) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{4.1}$$

Note que $\mu > 0$, pois do contrário existiria uma sequência $(w_n) \subset X$ com $w_n \notin M$ e $d(w_n,A) \geq \frac{\varepsilon}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $\psi(w_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Por outro lado, a condição $b)$ implica que existe $\delta > 0$ tal que $\psi(w_n) \geq \delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Contradição. Portanto, $\mu > 0$.

Suponha inicialmente que $x \in A^{\mathrm{o}}$. Definindo $w_n \doteq x$, para $n \in \mathbb{N}$, temos $w_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in A$, donde $a)$ e $c)$ implica $\psi(x) = 0$. Como ψ é contínua em x (condição $a)$), para $\mu > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in B(x,\delta) \subset A \implies \psi(y) < \mu. \tag{4.2}$$

Afirmamos que

$$\tilde{\pi}(B(x,\delta),[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon). \tag{4.3}$$

De fato, do contrário, existiriam $z \in B(x,\delta)$ e $t_1 \in (0,\infty)$ tais que

$$\tilde{\pi}(z,t_1) \notin B(A,\varepsilon). \tag{4.4}$$

Note que $\psi(z) < \mu$ e $\tilde{\pi}(z,t_1) \notin M$ já que $M \cap I(M) = \emptyset$. Daí, de (4.1) e (4.4), obtemos

$$\psi(\tilde{\pi}(z,t_1)) \geq \mu. \tag{4.5}$$

Como ψ é contínua em z, pois $z \in A$, segue dos Lemas 4.1.1 e 4.1.2 que

$$\psi(\tilde{\pi}(z,t_1)) \leq \psi(z) < \mu,$$

contradizendo (4.5). Portanto, $\tilde{\pi}(B(x,\delta),[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon)$.

Suponha agora que $x \in \partial A$. Então existe uma sequência $(w_n) \subset X$ tal que $w_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. A condição $c)$ implica que $\psi(w_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, e a condição $a)$ implica que $\psi(x) = 0$. Logo, como $M^{\mathrm{o}} = \emptyset$, existe $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$, tal que

$$y \in B(x,\delta) \setminus M \implies \psi(y) < \mu. \tag{4.6}$$

Afirmamos, neste caso, que

$$\tilde{\pi}(B(x,\delta),[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon). \tag{4.7}$$

Do contrário, existem $w \in B(x,\delta)$ e $t_2 \in (0,\infty)$ tais que

$$\tilde{\pi}(w,t_2) \notin B(A,\varepsilon). \tag{4.8}$$

Note que $\tilde{\pi}(w,t_2) \notin M$ já que $M \cap I(M) = \emptyset$. Daí, de (4.1) e (4.8), obtemos

$$\psi(\tilde{\pi}(w,t_2)) \geq \mu. \tag{4.9}$$

Se $w \in B(x,\delta) \setminus M$ então $\psi(w) < \mu$. Logo, pelo Lema 4.1.1

$$\psi(\tilde{\pi}(w,t_w)) \leq \psi(w) < \mu,$$

contradizendo (4.9).

Se $w \in B(x,\delta) \cap M$, existe $\tau \in (0,\phi(w))$ tal que

$$\tilde{\pi}(w,(0,\tau)) = \pi(w,(0,\tau)) \subset B(x,\delta) \setminus M. \tag{4.10}$$

Segue de (4.10) e (4.6) que para $t^* \in (0,\tau) \cap (0,t_2)$,

$$\psi(\tilde{\pi}(w,t_2)) = \psi(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(w,t^*),t_2 - t^*)) \overset{d)}{\leq} \psi(\tilde{\pi}(w,t^*)) < \mu,$$

contradizendo (4.9). Portanto, $\tilde{\pi}(B(x,\delta),[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon)$.

($\Longrightarrow$) Defina $\psi : X \to \mathbb{R}_+$ por

$$\psi(x) = \begin{cases} \sup_{k\geq 0}\left(\sup_{0\leq t\leq \phi(x_k^+)} \frac{d(\pi(x_k^+,t),A)}{1+d(\pi(x_k^+,t),A)}\right) & \text{se } x \notin M, \\ \psi(I(x)) & \text{se } x \in M. \end{cases}$$

a) Sejam $x \notin M$ e $w_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Como $M = \overline{M}$, podemos assumir sem perda de generalidade, que $w_n \notin M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $k = 1$, segue das continuidades de ϕ (Teorema A.0.6) em $X \setminus M$, I em M e π em $X \times \mathbb{R}_+$ que

$$(w_n)_1^+ = I(\pi(w_n,\phi(w_n))) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(\pi(x,\phi(x))) = x_1^+. \tag{4.11}$$

Suponha (4.11) válido para $k-1$, $k \geq 1$. Novamente, como ϕ é contínua em $X \setminus M$, I em M e π em $X \times \mathbb{R}_+$, então

$$(w_n)_k^+ = I(\pi((w_n)_{k-1}^+,\phi((w_n)_{k-1}^+))) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(\pi(x_{k-1}^+,\phi(x_{k-1}^+))) = x_k^+. \tag{4.12}$$

Portanto, $(w_n)_k^+ \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_k^+$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $M \cap I(M) = \emptyset$, segue que $x_k^+ \notin M$ para todo $k \in \mathbb{N}$, donde, sem perda de generalidade, podemos assumir que $(w_n)_k^+ \notin M$ para todos $n,k \in \mathbb{N}$. Logo, pelo Teorema A.0.6,

$$\phi((w_n)_k^+) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x_k^+), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Assim,

$$\sup_{0\leq t\leq \phi((w_n)_k^+)} \frac{d(\pi((w_n)_k^+,t),A)}{1+d(\pi((w_n)_k^+,t),A)} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sup_{0\leq t\leq \phi(x_k^+)} \frac{d(\pi(x_k^+,t),A)}{1+d(\pi(x_k^+,t),A)}.$$

Portanto,

$$\sup_{k\geq 0}\left(\sup_{0\leq t\leq \phi((w_n)_k^+)} \frac{d(\pi((w_n)_k^+,t),A)}{1+d(\pi((w_n)_k^+,t),A)}\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sup_{k\geq 0}\left(\sup_{0\leq t\leq \phi(x_k^+)} \frac{d(\pi(x_k^+,t),A)}{1+d(\pi(x_k^+,t),A)}\right),$$

isto é,

$$\psi(w_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \psi(x).$$

Agora, seja $x\in M\cap A$. Dado $\varepsilon>0$, segue da $\tilde{\pi}$-estabilidade de A que existe $\delta=\delta(x,\varepsilon)>0$ tal que

$$\tilde{\pi}(B(x,\delta),[0,\infty))\subset B(A,\varepsilon).$$

Como $\varepsilon>0$ é arbitrário, obtemos $\tilde{\pi}(x,[0,\infty))\subset \overline{A}=A$. Portanto, $\pi(x_k^+,t)\in A$ para todo $t\in[0,\phi(x_k^+))$ e $k\in\mathbb{N}_0$. Logo,

$$d(\pi(x_k^+,t),A)=0, \tag{4.13}$$

para todo $t\in[0,\phi(x_k^+))$ e $k\in\mathbb{N}_0$.

Como $x\in M$, $x_1^+\notin M$ (pois $M\cap I(M)=\emptyset$) e $(x_1^+)_k^+=x_{k+1}^+$, para todo $k\in\mathbb{N}_0$, segue de (4.13) que

$$\begin{aligned}\psi(x)=\psi(I(x))&=\psi(x_1^+)\\ &=\sup_{k\geq 0}\left(\sup_{0\leq t\leq \phi((x_1^+)_k^+)} \frac{d(\pi((x_1^+)_k^+,t),A)}{1+d(\pi((x_1^+)_k^+,t),A)}\right)\\ &=\sup_{k\geq 0}\left(\sup_{0\leq t\leq \phi(x_{k+1}^+)} \frac{d(\pi(x_{k+1}^+,t),A)}{1+d(\pi(x_{k+1}^+,t),A)}\right)=0.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Considere por fim $X\ni z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e $\varepsilon>0$. A $\tilde{\pi}$-estabilidade de A implica que $\tilde{\pi}(z_n,[0,\infty))\subset B(A,\varepsilon)$ para n suficientemente grande. Logo, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\pi((z_n)_k^+,t))\in B(A,\varepsilon),$$

para todo $t\in[0,\phi((z_n)_k^+)]$, $k\in\mathbb{N}_0$ e $n\geq n_0$. Consequentemente,

$$\sup_{k\geq 0}\left(\sup_{0\leq t\leq \phi((z_n)_k^+)} \frac{d(\pi((z_n)_k^+,t),A)}{1+d(\pi((z_n)_k^+,t),A)}\right)<\varepsilon$$

e

$$\sup_{k\geq 0}\left(\sup_{0\leq t\leq \phi(((z_n)_1^+)_k^+)} \frac{d(\pi(((z_n)_1^+)_k^+,t),A)}{1+d(\pi(((z_n)_1^+)_k^+,t),A)}\right)=$$

$$= \sup_{k\geq 0}\left(\sup_{0\leq t\leq \phi((z_n)^+_{k+1})} \frac{d(\pi((z_n)^+_{k+1},t),A)}{1+d(\pi((z_n)^+_{k+1},t),A)}\right) < \varepsilon,$$

ou seja, $\psi(z_n) < \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Isto mostra que $\psi(z_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \psi(x) = 0$, devido a (4.14).

b) Considere $x \notin M$, $\varepsilon > 0$ e $d(x,A) \geq \varepsilon$. Tomando $\delta \doteq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$,

$$\frac{d(\pi(x^+_0,0),A)}{1+d(\pi(x^+_0,0),A)} = \frac{d(x,A)}{1+d(x,A)} \geq \delta,$$

logo

$$\psi(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{0\leq t\leq \phi(x^+_k)} \frac{d(\pi(x^+_k,t),A)}{1+d(\pi(x^+_k,t),A)}\right) \geq \delta.$$

c) Sejam $x \in A$ e $X \ni w_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Pela definição de ψ e (4.13), $\psi(x) = 0$. Então pelo item *a*),

$$\psi(w_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \psi(x) = 0.$$

d) Sejam $x \in X \setminus M$, $s \in [0,\phi(x)]$ e $y \doteq \pi(x,s)$. Suponha $s < \phi(x)$. Note que $\phi(y) = \phi(x) - s$. Para $k = 1$,

$$y^+_1 = I(\pi(y,\phi(y)) = I(\pi(\pi(x,s),\phi(x)-s))) = I(\pi(x,\phi(x))) = x^+_1.$$

Indutivamente, obtemos $y^+_k = x^+_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, dado $k \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{0\leq t\leq \phi(x^+_k)} \frac{d(\pi(x^+_k,t),A)}{1+d(\pi(x^+_k,t),A)} = \sup_{0\leq t\leq \phi(y^+_k)} \frac{d(\pi(y^+_k,t),A)}{1+d(\pi(y^+_k,t),A)}. \tag{4.15}$$

Agora, se $k = 0$ tem-se $\phi(y^+_0) = \phi(y) \leq \phi(x) = \phi(x^+_0)$. Logo,

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq t\leq \phi(y^+_0)} \frac{d(\pi(y^+_0,t),A)}{1+d(\pi(y^+_0,t),A)} &= \sup_{0\leq t\leq \phi(x^+_0)-s} \frac{d(\pi(x^+_0,t+s),A)}{1+d(\pi(x^+_0,t+s),A)} \\ &\leq \sup_{0\leq t\leq \phi(x^+_0)} \frac{d(\pi(x^+_0,t),A)}{1+d(\pi(x^+_0,t),A)}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

De (4.15) e (4.16), concluímos que $\psi(\pi(x,t)) \leq \psi(x)$ sempre que $0 \leq t < \phi(x)$. Por outro lado, como $\pi(x,\phi(x)) \in M$,

$$\begin{aligned}\psi(\pi(x,\phi(x))) = \psi(I(\pi(x,\phi(x))) = \psi(x^+_1) &= \sup_{k\geq 1}\left(\sup_{0\leq t\leq \phi(x^+_k)} \frac{d(\pi(x^+_k,t),A)}{1+d(\pi(x^+_k,t),A)}\right) \\ &\leq \sup_{k\geq 0}\left(\sup_{0\leq t\leq \phi(x^+_k)} \frac{d(\pi(x^+_k,t),A)}{1+d(\pi(x^+_k,t),A)}\right) = \psi(x).\end{aligned}$$

Portanto, $\psi(\pi(x,t)) \leq \psi(x)$ para todo $t \in [0,\phi(x)]$.

e) Seja $x \in M$. Pela definição da ψ, temos que $\psi(I(x)) = \psi(x)$.

O teorema está provado. □

O próximo resultado caracteriza a equi $\tilde{\pi}$-estabilidade (Definição 3.1.5) de conjuntos fechados, que satisfazem uma condição de controle da função impulso.

Teorema 4.1.4. Sejam $(X, \pi, \mathbb{R}_+, M, I)$ um SI e $A \subset X$ um fechado. Suponha que $I(M \setminus A) \subset (X \setminus A) \setminus M$ e $d(I(x), A) \leq d(x, A)$, para todo $x \in M$. Então, A é equi $\tilde{\pi}$-estável se, e somente se, existe uma função $\psi : X \to \mathbb{R}_+$ satisfazendo as condições:

a) ψ é semicontínua inferiormente em $X \setminus (M \setminus A)$.

b) $\psi(x) = 0$ se $x \in A$ e $\psi(x) > 0$ se $x \notin M \cup A$.

c) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, A) \leq \delta \implies \psi(x) \leq \varepsilon$.

d) Dados $x \in X \setminus M$ e $0 \leq t \leq \phi(x) \implies \psi(\pi(x,t)) \leq \psi(x)$.

e) $\psi(I(x)) \leq \psi(x)$, para todo $x \in M$.

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Seja $x \notin A \cup M$. Como $A = \overline{A}$ e $\{x\}$ é compacto, defina $\varepsilon \doteq d(x, A) > 0$. Então por *b*), temos que $\mu \doteq \psi(x) > 0$ e assim, devido a *c*), existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$d(y, A) \leq \delta_0 \implies \psi(y) \leq \frac{\mu}{2}. \tag{4.17}$$

Afirmação: $x \notin \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta), [0,\infty))}$ para $\delta < \min\{\delta_0, \varepsilon\}$.

De fato, do contrário, existiriam sequências $(y_n) \subset B(A, \delta)$ e $(T_n) \subset \mathbb{R}_+$ tais que

$$\tilde{\pi}(y_n, T_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x. \tag{4.18}$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n \notin M. \tag{4.19}$$

De fato, suponha que $y_n \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se, a menos de subsequência, $T_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue de (4.19) que $y_n = \tilde{\pi}(y_n, T_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x \in M$ o que é uma contradição pois $x \notin M$. Assim, podemos assumir que $T_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, pela continuidade da π, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\tau_n > 0$ tal que

$$\pi(y_n, t) \in B(A, \delta) \quad \text{se} \quad t \in [0, \tau_n]. \tag{4.20}$$

Tome $T_n' < \min\{\phi(y_n), T_n, \tau_n\}$, com $T_n' > 0$, e defina $y_n' \doteq \pi(y_n, T_n')$, $n \in \mathbb{N}$. Então de (4.20), concluímos que $y_n' \in B(A, \delta) \setminus M$. Além disso, tomando $s_n \doteq T_n - T_n'$, segue que

$$\tilde{\pi}(y_n', s_n) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(y_n, T_n'), T_n - T_n') = \tilde{\pi}(y_n, T_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x.$$

Assim podemos assumir que (4.19) seja válido.

Além disso, podemos assumir que $\tilde{\pi}(y_n, T_n) \notin M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ devido a (4.18). Logo, a condição $a)$ implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\psi(\tilde{\pi}(y_n, T_n)) > \psi(x) - \frac{\mu}{3} \implies \frac{2\mu}{3} < \psi(\tilde{\pi}(y_n, T_n)), \tag{4.21}$$

para todo $n \geq N$. Pelo Lema 4.1.1 e (4.17), temos

$$\psi(\tilde{\pi}(y_n, T_n)) \leq \psi(y_n) \leq \frac{\mu}{2},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que contradiz a condição (4.21). Assim a Afirmação está provada.

Suponhamos, agora, que $x \notin A$ e $x \in M$. Seja $\delta > 0$. Suponhamos por contradição que $x \in \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty))}$. Então existem sequências $(w_n) \subset B(A,\delta)$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ tais que

$$\tilde{\pi}(w_n, t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x. \tag{4.22}$$

Como $x \in M$ satisfaz STC, existe um λ-tubo $F(L,[0,2\lambda])$ através de x. Pela propriedade de tubo existe $\eta > 0$ tal que $B(x,\eta) \subset F(L,[0,2\lambda])$. Defina

$$H_1 \doteq B(x,\eta) \cap F(L,(\lambda,2\lambda]) \quad \text{e} \quad H_2 \doteq B(x,\eta) \cap F(L,[0,\lambda]).$$

Se, a menos de subsequência, $\tilde{\pi}(w_n,t_n) \in H_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o Teorema A.0.7 implica que

$$\phi(\tilde{\pi}(w_n,t_n))) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donde

$$\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(w_n,t_n),\phi(\tilde{\pi}(w_n,t_n))) = I(\pi(\tilde{\pi}(w_n,t_n),\phi(\tilde{\pi}(w_n,t_n)))) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(x) \notin M,$$

isto é,

$$\tilde{\pi}(w_n,t_n + \phi(\tilde{\pi}(w_n,t_n))) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(x) \notin M.$$

Logo, $I(x) \in \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty))}$. Mas por hipótese, $I(M \setminus A) \subset (X \setminus A) \setminus M$, donde $I(x) \notin A \cup M$. Pelo caso anterior, existe $\delta_1 > 0$ tal que $I(x) \notin \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta_1),[0,\infty))}$. Como δ foi tomado arbitrário, obtemos uma contradição.

Se, a menos de subsequência, $\tilde{\pi}(w_n,t_n) \in H_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tome $t \in (0,\phi(x))$ tal que $\pi(x,t) \notin A$. Então, o Teorema A.0.7 implica que $\phi(\tilde{\pi}(w_n,t_n)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$. Logo $t \in (0,\phi(\tilde{\pi}(w_n,t_n)))$ para n suficientemente grande, donde,

$$\tilde{\pi}(w_n,t_n+t) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(w_n,t_n),t) = \pi(\tilde{\pi}(w_n,t_n),t) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x,t) \notin A \cup M. \tag{4.23}$$

Porém, pelo caso anterior, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\pi(x,t) \notin \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta_2),[0,\infty))},$$

que contradiz (4.23) já que δ é arbitrário.

($\Longrightarrow$) Defina $\psi : X \to \mathbb{R}_+$ pela lei

$$\psi(x) = \begin{cases} \sup\{\delta > 0 : x \notin \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty))}\} & \text{se } x \notin M \cap A, \\ \sup\{\delta > 0 : I(x) \notin \overline{\tilde{\pi}((B(A,\delta),[0,\infty))}\} & \text{se } x \notin M^c \cap A, \\ 0 & \text{se } x \in A. \end{cases}$$

a) Seja $x \in A$, logo $\psi(x) = 0$. Então qualquer que seja a sequência $w_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ segue que

$$\liminf \psi(w_n) \geq 0 = \psi(x).$$

Agora, sejam $x \notin (A \cup M)$ e $X \setminus M \ni w_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Como A é equi $\tilde{\pi}$-estável, existe $\delta > 0$ tal que $x \notin \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty))}$. Segue da definição da ψ que $x \notin \overline{\tilde{\pi}(B(A,\psi(x)),[0,\infty))}$. Então, sem perda de generalidade, podemos assumir que $w_n \notin \overline{\tilde{\pi}(B(A,\psi(x)),[0,\infty))}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e assim

$$\liminf \psi(w_n) \geq \psi(x).$$

b) Se $x \in A$, por definição de ψ, $\psi(x) = 0$. Se $x \notin A \cup M$, como A é equi $\tilde{\pi}$-estável, existe $\delta > 0$ tal que $x \notin \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty))}$, donde pela definição de ψ,

$$\psi(x) \geq \delta > 0.$$

c) Note que $\psi(x) \leq d(x,A)$, para todo $x \in X$. De fato, se $x \in A$, então $\psi(x) = 0 = d(x,A)$. Se $x \notin M \cup A$, segue da definição de ψ, que

$$\psi(x) \leq d(x,A). \tag{4.24}$$

Se $x \in M \setminus A$, temos que $I(x) \notin A \cup M$, pois por hipótese $I(M \setminus A) \subset (X \setminus A) \setminus M$, donde

$$\psi(x) = \psi(I(x)) \leq d(I(x),A) \leq d(x,A). \tag{4.25}$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon$, daí se $d(x,A) \leq \delta$ obtemos $\psi(x) \leq d(x,A) \leq \varepsilon$.

d) Seja $x \notin M$. Se $x \in A$ então temos $\tilde{\pi}(x,[0,\infty)) \subset A$, do contrário, existe $t > 0$ tal que $\tilde{\pi}(x,t) \notin A$, donde da equi $\tilde{\pi}$-estabilidade de A existe $\delta > 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(x,t) \notin \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty))} \implies \tilde{\pi}(x,t) \notin \tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty)),$$

o que é um absurdo, pois $x \in A$. Logo, pela definição da ψ, para todo $t \in [0,\phi(x)]$

$$\psi(\pi(x,t)) = 0 = \psi(x).$$

Se $x \notin A = \overline{A}$, como $\{x\}$ é compacto, temos que $\mu \doteq d(x,A) > 0$. Suponha que exista $t \in (0,\phi(x))$ tal que

$$\psi(\pi(x,t)) > \psi(x). \tag{4.26}$$

Segue de (4.26) e da definição da ψ, que existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$x \in \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta_0),[0,\infty))} \quad \text{e} \quad \pi(x,t) \notin \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta_0),[0,\infty))}. \tag{4.27}$$

Logo de (4.27), existem sequências $(w_n) \subset B(A,\delta_0)$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ tais que

$$\tilde{\pi}(w_n,t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x. \tag{4.28}$$

Como $x \notin M$ e temos (4.28), a Proposição B.0.3 implica que existe $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\varepsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\tilde{\pi}(w_n, t+\varepsilon_n+t_n) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(w_n,t_n), t+\varepsilon_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x,t),$$

ou seja, $\pi(x,t) \in \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta_0),[0,\infty))}$, contradizendo (4.27). Logo, $\psi(\pi(x,t)) \leq \psi(x)$, para todo $0 \leq t < \phi(x)$.

Agora, suponha que $\psi(\pi(x,\phi(x))) > \psi(x)$. Então existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta_1),[0,\infty))} \quad \text{e} \quad I(\pi(x,\phi(x))) \notin \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta_1),[0,\infty))}. \tag{4.29}$$

Logo de (4.29), existem sequências $(z_n) \subset B(A,\delta_1)$ e $(s_n) \subset \mathbb{R}_+$ tais que

$$\tilde{\pi}(z_n,s_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x. \tag{4.30}$$

Como $x \notin M$ e temos (4.30), a Proposição B.0.3 implica que existe $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\alpha_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\tilde{\pi}(z_n, \phi(x)+\alpha_n+s_n) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(z_n,s_n), \phi(x)+\alpha_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(x,\phi(x)) = I(\pi(x,\phi(x))),$$

ou seja, $I(\pi(x,\phi(x))) \in \overline{\tilde{\pi}(B(A,\delta_1),[0,\infty))}$, contradizendo (4.29). Assim, $\psi(\pi(x,\phi(x))) \leq \psi(x)$.

Portanto, $\psi(\pi(x,t)) \leq \psi(x)$, para todo $0 \leq t \leq \phi(x)$.

e) Seja $x \in M$. Se $x \notin A$ então

$$\psi(x) = \sup\{\delta > 0 : I(x) \notin \overline{\tilde{\pi}^+(B(A,\delta))}\} = \psi(I(x)),$$

pois $I(x) \notin M$ já que $I(M \setminus A) \subset (X \setminus A) \setminus M$. Se $x \in A$, segue do item *d*) que $I(x) \in \tilde{\pi}(x,[0,\infty)) \subset A$, donde $\psi(x) = 0 = \psi(I(x))$.

□

O próximo resultado será importante para caracterizarmos a $\tilde{\pi}$-estabilidade uniforme de conjuntos fechados.

Lema 4.1.5. Sejam $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI e $A \subset X$ um conjunto fechado. Suponha que exista um função $\psi : X \to \mathbb{R}_+$ tal que:

a) ψ é contínua em $X \setminus (M \setminus A)$.

b) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x,A) \geq \varepsilon$ e $x \notin M \implies \psi(x) \geq \delta$.

c) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x,A) \leq \delta \implies \psi(x) \leq \varepsilon$.

d) Existe $\delta_0 > 0$, tal que dados $t \in \mathbb{R}_+$ e $w \in \overline{B(A,\delta_0)} \setminus M \implies \psi(\tilde{\pi}(w,t)) \leq \psi(x)$.

Então existe $\delta \in (0, \delta_0]$, tal que $\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty)) \subset B(A,\delta_0)$.

Demonstração. Suponha que dada $(\delta_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\delta_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, existem $w_n \in B(A,\delta_n)$ e $\tau_n \in (0,\infty)$ tais que

$$\tilde{\pi}(w_n,\tau_n) \notin B(A,\delta_0). \tag{4.31}$$

Defina

$$\mu \doteq \inf\{\psi(w) \in \mathbb{R}_+ : w \notin M \quad \text{e} \quad d(w,A) \geq \delta_0\}.$$

Note que *b*) implica $\mu > 0$. Segue de *c*) que existe $\eta < \delta_0$ tal que

$$d(y,A) \leq \eta \implies \psi(y) \leq \frac{\mu}{2}. \tag{4.32}$$

Como $\delta_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $w_N \in B(A,\delta_N) \subset B(A,\eta)$, donde (4.32) implica

$$\psi(w_N) \leq \frac{\mu}{2}. \tag{4.33}$$

Se $w_N \notin M$, então $w_N \in \overline{B(A,\delta_0)} \setminus M$, donde de *d*) e (4.33), obtemos

$$\psi(\tilde{\pi}(w_N,\tau_N)) \leq \psi(w_N) \leq \frac{\mu}{2} < \mu. \tag{4.34}$$

Contudo (4.31) implica $d(\tilde{\pi}(w_N,\tau_N),A) \geq \delta_0$. Como $M \cap I(M) = \emptyset$, segue que $\tilde{\pi}(w_N,\tau_N) \notin M$ donde pela definição de μ,

$$\psi(\tilde{\pi}(w_N,\tau_N)) \geq \mu, \tag{4.35}$$

contradizendo (4.34).

Se $w_N \in M$, tome $\varepsilon_N < \min\{\tau_N, \phi(w_N)\}$ tal que $\pi(w_N,\varepsilon_N) \in B(A,\delta_N)$, daí

$$\tilde{\pi}(w_N,\varepsilon_N) = \pi(w_N,\varepsilon_N) \in (B(A,\delta_N) \setminus M) \subset (B(A,\eta) \setminus M). \tag{4.36}$$

Logo, utilizando (4.33), (4.36), *d*) e o fato de que $\tilde{\pi}(w_N,\varepsilon_N) \notin M$, obtemos

$$\psi(\tilde{\pi}(w_N,\tau_N)) = \psi(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(w_N,\varepsilon_N),\tau_N - \varepsilon_N)) \leq \psi(\tilde{\pi}(w_N,\varepsilon_N)) \leq \psi(w_N) \leq \frac{\mu}{2} < \mu,$$

contradizendo (4.35). □

Agora podemos apresentar uma caracterização para a $\tilde{\pi}$-estabilidade uniforme (Definição 3.1.2) de conjuntos fechados.

Teorema 4.1.6. Sejam $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI e $A \subset X$ um conjunto fechado. Então, A é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável se, e somente se, existe uma função $\psi : X \to \mathbb{R}_+$ tal que:

a) ψ é contínua em $X \setminus (M \setminus A)$.

b) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x,A) \geq \varepsilon$ e $x \notin M \implies \psi(x) \geq \delta$.

c) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x,A) \leq \delta \implies \psi(x) \leq \varepsilon$.

d) Dados $x \in X \setminus M$ e $0 \leq t \leq \phi(x) \implies \psi(\pi(x,t)) \leq \psi(x)$.

e) Para todo $x \in M$, $\psi(I(x)) \leq \psi(x)$.

Demonstração. $(\Longleftarrow)$ Seja $\varepsilon > 0$. As condições $d)$ e $e)$ implicam

$$x \in \overline{B(A,\varepsilon)} \setminus M \implies \psi(\tilde{\pi}(x,t)) \leq \psi(x), \quad \text{para todo} \quad t \geq 0.$$

Note que estamos nas hipóteses do Lema 4.1.5, com $\delta_0 \doteq \varepsilon$. Portanto, existe $\delta \in (0,\varepsilon]$, tal que

$$\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon).$$

$(\Longrightarrow)$ Como A é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável, segue que A é $\tilde{\pi}$-estável. Definindo

$$\psi(x) = \begin{cases} \sup_{k\geq 0}\left(\sup_{0\leq t\leq \phi(x_k^+)} \frac{d(\pi(x_k^+,t),A)}{1+d(\pi(x_k^+,t),A)}\right) & \text{se} \quad x \notin M, \\ \psi(I(x)) & \text{se} \quad x \in M, \end{cases}$$

segue do Teorema 4.1.3 que basta mostrarmos a condição $c)$. Para tanto, seja $\varepsilon > 0$. Como A é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\tilde{\pi}(B(A,\delta),[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon)$. Logo, $\tilde{\pi}(x,[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon)$ para todo $x \in B(A,\delta)$. Consequentemente,

$$\pi(x_k^+,t),\ \pi((I(x))_k^+,t) \in B(A,\varepsilon),$$

para quaisquer $t \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ e $x \in B(A,\delta)$. Portanto, $d(x,A) < \delta$ implica $\psi(x) \leq \varepsilon$. □

No último resultado dessa seção, vamos caracterizar a $\tilde{\pi}$-estabilidade assintótica (Definição 3.1.8). No entanto, além de assumir a existência de uma função de Lyapunov, vamos considerar hipóteses de compacidade.

Teorema 4.1.7. Sejam $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI, X locamente compacto e $A \subset X$ compacto. Então, A é assintoticamente $\tilde{\pi}$-estável, se e somente se, existe $\psi : X \to \mathbb{R}_+$ tal que:

a) ψ é contínua em $X \setminus (M \setminus A)$.

b) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x,A) \geq \varepsilon$ e $x \notin M \implies \psi(x) \geq \delta$.

c) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x,A) \leq \delta \implies \psi(x) \leq \varepsilon$.

d) Dados $x \in X \setminus M$ e $0 \leq t \leq \phi(x) \implies \psi(\pi(x,t)) \leq \psi(x)$.

e) Para todo $x \in M$, $\psi(I(x)) \leq \psi(x)$.

f) Existe $\delta > 0$ tal que se $x \in B(A,\delta) \setminus A \implies \psi(\tilde{\pi}(x,t)) \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Segue dos itens $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ e $e)$, e do Teorema 4.1.6 que A é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável. Logo, pelo Teorema 3.2.1, A é orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável. Como A é compacto e $\tilde{\pi}$-estável então $\tilde{\pi}(A,[0,\infty)) \subset A$. Assim dados $x \in A$ e uma vizinhança U_A de A, tome $t_n \doteq n$, $n \in \mathbb{N}$. Então $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \infty$ e para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in A$,

$$\tilde{\pi}(x,t_n) \in \tilde{\pi}(A,[0,\infty)) \subset A \subset U_A \implies x \in \tilde{P}_W^+(A),$$

ou seja, $A \subset \tilde{P}_W^+(A)$. Além disso, devemos ter $B(A,\delta) \setminus A \subset \tilde{P}_W^+(A)$, pois caso contrário, existiria $x \in (B(A,\delta) \setminus A) \cap \big(X \setminus \tilde{P}_W^+(A)\big)$. Daí, por definição de $\tilde{P}_W^+(A)$, existem vizinhança V_A e $\tau \in \mathbb{R}_+$ tais que

$$\overline{\tilde{\pi}(x,[\tau,\infty))} \cap V_A = \emptyset.$$

Como A é compacto, existe $\mu > 0$ tal que $d(\tilde{\pi}(x,t),A) \geq \mu$ para todo $t \in [\tau,\infty)$. Ainda, sendo $M \cap I(M) = \emptyset$, temos que $\tilde{\pi}(x,t) \notin M$. Portanto, a condição $b)$ implica na existência de $\delta_0 > 0$ tal que

$$\psi(\tilde{\pi}(x,t)) \geq \delta_0 > 0,$$

e isso contradiz a condição $f)$. Assim, A $\tilde{\pi}$-atrator fraco.

($\Longrightarrow$) Defina $\psi : X \to \mathbb{R}_+$ por

$$\psi(x) = \begin{cases} \sup_{k \geq 0} \left(\sup_{0 \leq t \leq \phi(x_k^+)} \frac{d(\pi(x_k^+,t),A)}{1+d(\pi(x_k^+,t),A)} \right) & \text{se} \quad x \notin M, \\ \psi(I(x)) & \text{se} \quad x \in M. \end{cases}$$

Sendo A assintoticamente $\tilde{\pi}$-estável, temos que A é orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável. Logo, pelo Teorema 3.2.1, A é uniformemente $\tilde{\pi}$-estável. Então os itens $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ e $e)$ estão verificados de acordo com o Teorema 4.1.6. Como $\tilde{P}_W^+(A)$ é uma vizinhança do compacto A, existe $\delta > 0$ tal que

$$B(A,\delta) \subset \tilde{P}_W^+(A). \tag{4.37}$$

Sejam $x \in B(A,\delta) \setminus A$, $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\varepsilon > 0$. De (4.37), segue que $x \in \tilde{P}_W^+(A)$ donde existe $\tau \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\tilde{\pi}(x,[\tau,\infty)) \subset B(A,\varepsilon). \tag{4.38}$$

De fato, como A é orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável, existe uma vizinhança $\tilde{\pi}$-invariante V_A de A tal que $\tilde{\pi}(V_A,[0,\infty)) \subset V_A \subset B(A,\varepsilon)$. Agora, como $x \in \tilde{P}_W^+(A)$, ou seja, $\tilde{L}^+(x) \cap \overline{A} \neq \emptyset$, existe $r > 0$ tal que $\tilde{\pi}(x,r) \in V_A$. Assim, $\tilde{\pi}(x,[r,\infty)) \subset V_A \subset B(A,\varepsilon)$. Logo, (4.38) implica

$$(I(\tilde{\pi}(x,t_n)))_k^+,\ (\tilde{\pi}(x,t_n))_k^+ \in B(A,\varepsilon),$$

para quaisquer $t_n \geq \tau$, $k \in \mathbb{N}_0$. Assim, se $t_n \geq \tau$ e $k \in \mathbb{N}_0$, obtemos

$$d(\pi((\tilde{\pi}(x,t_n))_k^+,t),A)) < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \in [0,\phi((\tilde{\pi}(x,t_n))_k^+)],$$

e

$$d(\pi((I(\tilde{\pi}(x,t_n)))_k^+,t),A)) < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \in [0,\phi((I(\tilde{\pi}(x,t_n)))_k^+)].$$

Portanto vale o item $f)$. □

O Exemplo 4.1.8 trata-se de uma aplicação do Teorema 4.1.3. Ele apresenta um critério de estabilidade para o conjunto A do Exemplo 3.4.1.

Exemplo 4.1.8. Considere o sistema impulsivo do Exemplo 3.4.1 e o conjunto $A \doteq A_1 \cup A_2$ em que

$$A_1 \doteq \{(x,y) \in X : x^2+y^2 = 1\} \quad \text{e} \quad A_2 \doteq \{(x,y) \in X : x^2+y^2 = 4\}.$$

Defina $\psi : X \to \mathbb{R}_+$ por

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \sqrt{x^2+y^2} = 1, \\ \frac{\sqrt{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se} \quad 1 < \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{3}{2}, \\ \frac{2-\sqrt{x^2+y^2}}{3-\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se} \quad \frac{3}{2} < \sqrt{x^2+y^2} < 2, \\ 0 & \text{se} \quad \sqrt{x^2+y^2} = 2. \end{cases}$$

Mostremos que $A = A_1 \cup A_2$ é $\tilde{\pi}$-estável de acordo com o Teorema 4.1.3. De fato,

$a)$ Então ψ é contínua em $X \setminus (M \setminus A)$.

$b)$ Sejam $\varepsilon > 0$ e $(x,y) \in X$ tais que $(x,y) \notin M$ e $d((x,y),A) \geq \varepsilon$. Tome $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{2\varepsilon}{3}\right\}$. Se $1 < \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{3}{2}$, então

$$\sqrt{x^2+y^2}-1 \geq \varepsilon \implies \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{1+\varepsilon} \implies \psi(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \geq \delta.$$

Se $\frac{3}{2} < \sqrt{x^2+y^2} < 2$, então $d((x,y),A) = 2-\sqrt{x^2+y^2} \geq \varepsilon$ e $2 < 3-\sqrt{x^2+y^2} < \frac{3}{2}$, logo

$$\implies \psi(x,y) = \frac{2-\sqrt{x^2+y^2}}{3-\sqrt{x^2+y^2}} \geq \frac{2\varepsilon}{3} \geq \delta.$$

$c)$ Dada $(w_n,k_n) \subset X$ tal que $(w_n,k_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (x,y) \in A$ temos que $\psi(w_n,k_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, devido ao item $a)$.

$d)$ Note que o sistema sem impulsos é gerado pelo sistema de EDOs $x' = -y$ e $y' = x$. Seja $(x,y) \in X$. Se $1 < \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{3}{2}$ então

$$\psi'(x,y) = \frac{-xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Se $\frac{3}{2} < \sqrt{x^2+y^2} < 2$ então

$$\psi'(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)[3-\sqrt{x^2+y^2}]^2} + \frac{-xy}{(x^2+y^2)[3-\sqrt{x^2+y^2}]^2} = 0.$$

Segue, via integração, que dados $(x,y) \notin M$ e $t \in [0, \phi(x,y)]$

$$\psi(\pi((x,y),t)) = \psi(x,y).$$

e) Se $(0,y) \in M$, com $y \in [-2, -\frac{3}{2}]$, então

$$\psi(I(0,y)) = \psi(0,y+3) = \frac{y+2}{y+3} = \frac{2-|y|}{3-|y|} = \psi(0,y).$$

Se $(0,y) \in M$, com $y \in [-\frac{3}{2}, -1]$, então

$$\psi(I(0,y)) = \psi(0,y+3) = \frac{-y-1}{-y} = \frac{|y|-1}{|y|} = \psi(0,y).$$

Portanto, pelo Teorema 4.1.3, $A = A_1 \cup A_2$ é $\tilde{\pi}$-estável.

O próximo exemplo úma aplicação do Teorema 4.1.7 , como critério de estabilidade assintótica.

Exemplo 4.1.9. Considere em $X = \mathbb{R}^2 \times \{0,1\}$ o sistema

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y, \\ M \doteq M_0 \cup M_1, \\ I(x,y,0) \doteq (x,y,1), \quad (x,y,0) \in M_0, \\ I(x,y,1) \doteq (x,y,0), \quad (x,y,1) \in M_1, \end{cases}$$

com

$$M_0 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1,\ z = 0\} \quad \text{e} \quad M_1 = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 = \frac{1}{4},\ z = 1\right\}.$$

Note que $M = \overline{M}$, I é contínua em M e o fluxo π, dado pelas equações $x' = -x$ e $y' = -y$, tem as propriedades de existência, unicidade, dependência contínua e as soluções estão definidas em $\mathbb{R}$. Tome $\varepsilon_{(x,y,z)} = \frac{1}{2}$, para $(x,y,z) \in M$. Segue que as condições da Definição 2.1.5 estão satisfeitas, isto é, $(X, \pi, \mathbb{R}_+, M, I)$ é um SI.

Considere o conjunto $A \doteq A_0 \cup A_1$, em que

$$A_0 \doteq \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\} \times \{0\} \quad \text{e} \quad A_1 \doteq \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\} \times \{1\}.$$

No que segue, mostraremos que A é assintoticamente $\tilde{\pi}$-estável utilizando o Teorema 4.1.7. De fato, defina a função $\psi : X \to \mathbb{R}_+$ por

$$\psi(x,y,z) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se} \quad 1 < \sqrt{x^2+y^2} \ \text{ e } \ z \in \{0,1\}, \\ 0 & \text{se} \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \ \text{ e } \ z \in \{0,1\}. \end{cases}$$

a) ψ é contínua em X.

b) Sejam $\varepsilon > 0$ e $(x,y,z) \in X$ tais que $d((x,y,z),A) \geq \varepsilon$ e $(x,y,z) \notin M$. Como $d((x,y,z),A) \geq \varepsilon$, devemos ter $\sqrt{x^2+y^2} > 1$ e $z \in \{0,1\}$. Tome $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Então

$$\sqrt{x^2+y^2}-1 \geq \varepsilon \implies \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{1+\varepsilon} \implies \psi(x,y,z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = \delta.$$

c) Seja $\varepsilon \in (0,1)$. Se $d((x,y,0),A_0) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ e $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$, segue que $\psi(x,y,0) = 0 < \varepsilon$. E, se $\sqrt{x^2+y^2} > 1$, então

$$\psi(x,y,0) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}{\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}+1} = \varepsilon.$$

Analogamente, se $d((x,y,1),A_1) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ então obtemos $\psi(x,y,1) < \varepsilon$.

d) Seja $(x_0,y_0,0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Caso $\sqrt{x_0^2+y_0^2} > 1$, temos $\pi((x_0,y_0,0),t) \doteq (x(t,x_0),y(t,y_0),0)$ e

$$\psi'(\pi((x_0,y_0,0),t)) = \frac{\partial\psi}{\partial x}x' + \frac{\partial\psi}{\partial y}y' = \frac{x(-x)+y(-y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} < 0, \tag{4.39}$$

para todo $t \geq 0$. Se $\sqrt{x_0^2+y_0^2} \leq 1$, então $\pi((x_0,y_0,0),t) \in A_0$ para todo $t \geq 0$ e

$$\psi(\pi((x_0,y_0,0),t)) = 0, \quad t \geq 0. \tag{4.40}$$

Portanto, se $(x_0,y_0,0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, segue de (4.39) e (4.40), que para todo $t \geq 0$

$$\psi'(\pi((x_0,y_0,0),t)) \leq 0,$$

donde via integração,

$$\psi(\pi((x_0,y_0,0),t)) \leq \psi((x_0,y_0,0)),$$

para todo $t \geq 0$.

Analogamente, podemos mostrar que $\psi(\pi((x_0,y_0,1),t)) \leq \psi((x_0,y_0,1))$, para todo $(x_0,y_0,1) \in \mathbb{R}^2 \times \{1\}$ e $t \geq 0$.

e) Seja $(x,y,z) \in M$. Como $M \subset A$ e $I(M) \subset A$, temos $\psi(I(x,y,z)) = 0 = \psi(x,y,z)$.

f) Note que se $(x_0,y_0,0) \in (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \setminus A_0$ então

$$\phi(x_0,y_0,0) = \frac{1}{2}\ln(x_0^2+y_0^2) \doteq \ell_1$$

e

$$\phi\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, 1\right) = \ell_1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4x_0+4y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right) \doteq \ell_2.$$

Assim,

$$\tilde{\pi}((x_0,y_0,0),t)=\begin{cases}(x_0e^{-t},y_0e^{-t},0) & \text{se} \quad 0\leq t<\ell_1,\\ \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}e^{-(t-\ell_1)},\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}e^{-(t-\ell_1)},1\right) & \text{se} \quad \ell_1\leq t<\ell_2,\\ \left(\frac{x_0}{2\sqrt[4]{x_0^2+y_0^2}\sqrt{x_0+y_0}}e^{-(t-\ell_2)},\frac{y_0}{2\sqrt[4]{x_0^2+y_0^2}\sqrt{x_0+y_0}}e^{-(t-\ell_2)},0\right) & \text{se} \quad t>\ell_2.\end{cases}$$

Portanto,

$$\tilde{\pi}((x_0,y_0,0),t)\overset{t\to+\infty}{\longrightarrow}(0,0,0).$$

Analogamente, se $(x_0,y_0,1)\in(\mathbb{R}^2\times\{1\})\setminus A_1$ então

$$\phi(x_0,y_0,1)=\frac{1}{2}\ln[4(x_0^2+y_0^2)]\doteq\ell_3,$$

daí

$$\tilde{\pi}((x_0,y_0,1),t)=\begin{cases}(x_0e^{-t},y_0e^{-t},1) & \text{se} \quad 0\leq t<\ell_3,\\ \left(\frac{x_0}{2\sqrt{x_0^2+y_0^2}}e^{-(t-\ell_3)},\frac{y_0}{2\sqrt{x_0^2+y_0^2}}e^{-(t-\ell_3)},0\right) & \text{se} \quad t\geq\ell_3.\end{cases}$$

Logo, $\tilde{\pi}((x_0,y_0,1),t)\overset{t\to+\infty}{\longrightarrow}(0,0,0)$.

Portanto, pelo Teorema 4.1.7, A é assintoticamente $\tilde{\pi}$-estável.

4.2 Estabilidade de conjuntos da forma $\overline{A}\setminus M$

Nesta seção iremos apresentar resultados relativos a estabilidade de conjuntos da forma $\overline{A}\setminus M$, $A\subset X$. Como argumenta (BONOTTO; SOUTO, 2019), um motivo para tal empreitada é o fato de que, o atrator global no sentido (BONOTTO *et al.*, 2015) é dado por um conjunto $\mathscr{A}\subset X$ que satisfaz a propriedade $\mathscr{A}=\overline{\mathscr{A}}\setminus M$.

O primeiro resultado nesse sentido, nos diz que sob hipóteses de controle na função impulso e a existência de uma função de Lyapunov, temos a estabilidade de $\overline{A}\setminus M$, para $A\subset X$, sem pedir entre outras coisas, hipóteses sobre a limitação de A, (BONOTTO; SOUTO, 2019).

Teorema 4.2.1. Sejam $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI e $A\subset X$ tais que:

$a)$ Existe $r_0>0$ tal que para todo $r\in(0,r_0)$, $I(\overline{B(A,r)}\cap M)\subset B(A,r)$.

$b)$ Existem $\gamma>0$ e uma vizinhança U_A de A tais que $B(A,\gamma)\subset U_A$.

$c)$ Existe uma função $V:U_A\to\mathbb{R}_+$, contínua em $U_A\setminus M$, tal que

$c1)$ $x\in A \implies V(x)=0$.

$c2)$ Dada $(x_n)\subset U_A$, tal que $V(x_n)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0 \implies d(x_n,A)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

$c3)$ Existe $K > 0$ tal que, dados $x \in U_A \setminus M$ e $t \geq 0$, com $\tilde{\pi}(x,[0,t]) \subset U_A$, temos $V(\tilde{\pi}(x,t)) \leq KV(x)$.

Então $\overline{A} \setminus M$ é $\tilde{\pi}$-estável.

Demonstração. Suponha que existam $\varepsilon > 0$ e $x \in \overline{A} \setminus M$, tais que para todo $n \in \mathbb{N}$, existam $x_n \in X$ e $t_n \in \mathbb{R}_+$ satisfazendo

$$x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x_n,t_n) \notin B(A,\varepsilon). \tag{4.41}$$

Como $x \in \overline{A} \setminus M$, sem perda de generalidade, podemos assumir que $x_n \notin M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $c)$ e $c1)$ implicam

$$V(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} V(x) = 0. \tag{4.42}$$

De (4.41) e $\overline{A} = \bigcap_{\eta>0} B(A,\eta) \subset B(A,\varepsilon)$, podemos também assumir que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \in B(A,\varepsilon). \tag{4.43}$$

Tome $\mathscr{O} \doteq B(A,\varepsilon)$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\varepsilon < \min\{\gamma, r_0\}$, daí $a)$ implica em

$$I(\overline{B(A,\varepsilon)} \cap M) \subset B(A,\varepsilon),$$

donde (4.41) e (4.42), implicam pela Proposição C.0.7, na existência de uma sequência $(\tau_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$\tau_n \leq t_n, \ \ \tilde{\pi}(x_n,[0,\tau_n)) \subset B(A,\varepsilon) \ \text{ e } \ \tilde{\pi}(x_n,\tau_n) \in S(A,\varepsilon) \setminus M, \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.44}$$

Segue de (4.43) e $b)$ que $x_n \in B(A,\varepsilon) \subset U_A \setminus M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e (4.44) e $b)$ implicam

$$\tilde{\pi}(x_n,[0,\tau_n]) \subset U_A, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Agora, $c3)$ e (4.42) implicam

$$V(\tilde{\pi}(x_n,\tau_n)) \leq KV(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donde $c2)$ conclui na seguinte contradição

$$0 < \varepsilon \leq d(\tilde{\pi}(x_n,\tau_n),A) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto, $\overline{A} \setminus M$ é $\tilde{\pi}$-estável. □

Analogamente ao Teorema 4.2.1, obteremos agora um critério para a $\tilde{\pi}$-estabilidade orbital de $\overline{A} \setminus M$, para $A \subset X$, via controle da função impulso e a existência de uma função de Lyapunov. No entanto, adicionalmente, precisaremos controlar os elementos do complementar de $\overline{A} \setminus M$.

Teorema 4.2.2. Sejam $(X, \pi, \mathbb{R}_+, M, I)$ um SI e $A \subset X$ tais que:

a) Existe $r_0 > 0$ tal que para todo $r \in (0,r_0)$, $I(\overline{B(A,r)} \cap M) \subset B(A,r)$.

b) Existem $U_{\overline{A}}$, $\mathscr{O}^* \in \tau_X$ e $\alpha \in (0,r_0)$ tais que

$$\overline{A}\setminus M \subset \mathscr{O}^* \subset U_{\overline{A}} \quad \text{e} \quad d(z,A) \geq \alpha, \;\; \text{se} \;\; z \notin \mathscr{O}^*.$$

c) Existe uma função $V : U_{\overline{A}} \to \mathbb{R}_+$, contínua em $U_{\overline{A}}\setminus M$, tal que.

*c*1) $x \in A \implies V(x) = 0$.

*c*2) Dada $(x_n) \subset U_{\overline{A}}$ tal que $V(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \implies d(x_n,A) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

*c*3) Dados $x \in U_{\overline{A}}\setminus M$ e $t \geq 0$, com $\tilde{\pi}(x,[0,t]) \subset U_{\overline{A}}$, $V(\tilde{\pi}(x,t)) \leq V(x)$.

Então $\overline{A}\setminus M$ é orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável.

Demonstração. Seja $U_{\overline{A}\setminus M}$ uma vizinhança de $\overline{A}\setminus M$. Então existe $\mathscr{O}' \in \tau_X$ tal que $\overline{A}\setminus M \subset \mathscr{O}' \subset U_{\overline{A}\setminus M}$. Defina $\mathscr{O} \doteq \mathscr{O}' \cap B(A,\alpha)$. Note que *b*) implica $B(A,\alpha) \subset \mathscr{O}^*$. Logo, por *b*), obtemos

$$\overline{A}\setminus M \subset \overline{A} \subset B(\overline{A},\alpha) = B(A,\alpha) \subset \mathscr{O}^* \subset U_{\overline{A}}.$$

Consequentemente,

$$\overline{A}\setminus M \subset \mathscr{O} \subset U_{\overline{A}\setminus M} \cap U_{\overline{A}} \quad \text{e} \quad z \notin \mathscr{O} \implies d(z,A) \geq \alpha. \tag{4.45}$$

Além disso, existe $\beta \in (0,\alpha)$ tal que

$$S(A,\beta) \cap (X\setminus M) \neq \emptyset. \tag{4.46}$$

Do contrário,

$$\tau_X \ni B(A,\alpha)\setminus \overline{A} = \bigcup_{\beta \in (0,\alpha)} S(A,\beta) \subset M,$$

donde $M^{\mathrm{o}} \neq \emptyset$, contradição.

Defina $\mathscr{O}_1 \doteq \{z \in \mathscr{O} : d(z,A) < \beta\} = B(A,\beta) \cap \mathscr{O}$. Então

$$\mathscr{O}_1 \in \tau_X \quad \text{e} \quad \overline{A}\setminus M \subset \mathscr{O}_1, \tag{4.47}$$

devido a (4.45). Dado $z \in \overline{A}\setminus M$, $d(z,A) = d(z,\overline{A}) = 0 < \beta$. Ainda,

$$I(\overline{\mathscr{O}_1} \cap M) \subset \mathscr{O}_1. \tag{4.48}$$

De fato, seja $x \in \overline{\mathscr{O}_1} \cap M = \overline{B(A,\beta) \cap \mathscr{O}} \cap M$. Então $x \in \overline{\mathscr{O}} \cap \overline{B(A,\beta)} \cap M$. Assim *a*) implica $I(x) \in B(A,\beta)$, pois $\beta < \alpha < r_0$. Segue que $d(I(x),A) < \beta$. Logo, $I(x) \in \mathscr{O}$, pois do contrário (4.45) implicaria $d(I(x),A) \geq \alpha > \beta$.

Note que, se $z \in B(A,\beta)$, isto é, $d(z,A) < \beta < \alpha$, então usando (4.45) obtemos $z \in \mathscr{O}$. Logo, $B(A,\beta) \subset \mathscr{O}$, e assim $\mathscr{O}_1 = B(A,\beta) \cap \mathscr{O} = B(A,\beta)$, donde

$$z \in \partial \mathscr{O}_1 \setminus M = S(A,\beta)\setminus M \implies d(z,A) = \beta. \tag{4.49}$$

Defina

$$\mu \doteq \inf\{V(z) : z \in \partial\mathscr{O}_1 \setminus M\}.$$

Então, de $\beta < \alpha$ e (4.45), temos $\partial\mathscr{O}_1 \setminus M \subset U_{\overline{A}}$. Também por (4.46), $\partial\mathscr{O}_1 \setminus M = S(A,\beta) \setminus M \neq \emptyset$, donde $\{V(z) : z \in \partial\mathscr{O}_1 \setminus M\} \neq \emptyset$. Ainda $\mu > 0$, pois caso contrário, existiria uma sequência $(v_n) \subset \partial\mathscr{O}_1 \setminus M \subset U_{\overline{A}}$ tal que $V(v_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donde $c2)$ e (4.49) implicariam na contradição

$$0 < \beta = d(v_n, A) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Defina

$$K \doteq \{z \in \mathscr{O}_1 \setminus M : V(z) < \mu\}.$$

Então,

$$\overline{A} \setminus M \subset K. \tag{4.50}$$

De fato, dado $z \in \overline{A} \setminus M$, de (4.47) temos $z \in \mathscr{O}_1$, donde $z \in \mathscr{O}_1 \setminus M$. Se $z \in A$, então $c1)$ implica $V(z) = 0 < \mu$, donde $z \in K$. Se $z \in \partial A$, existe $(z_n) \subset A \setminus M$ tal que $z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z$ donde $c)$ implica $V(z) = 0 < \mu$, e temos $z \in K$. Assim, $\overline{A} \setminus M \subset K$.

Note, também, que

$$\tilde{\pi}(K, [0,\infty)) \subset K. \tag{4.51}$$

De fato, seja $x \in K$. Temos $\tilde{\pi}(x, [0,\infty)) \subset \mathscr{O}_1$, pois caso contrário, $\tilde{\pi}(x, t_0) \notin \mathscr{O}_1$ para algum $t_0 > 0$, e juntamente com (4.48) e a Proposição C.0.7, poderíamos obter $\tau \in (0, t_0]$ tal que

$$\tilde{\pi}(x, [0,\tau)) \subset \mathscr{O}_1 \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x,\tau) \in \partial\mathscr{O}_1 \setminus M,$$

donde $\tilde{\pi}(x, [0,\tau]) \subset U_{\overline{A}}$. Agora, do fato que $x \in K \subset U_{\overline{A}} \setminus M$, segue de $c3)$ e da definição de μ que

$$\mu \leq V(\tilde{\pi}(x,\tau)) \leq V(x) < \mu.$$

Além disso, $\tilde{\pi}(x,t) \notin M$ para todo $t \geq 0$, pois $x \notin M$ e estamos assumindo a hipótese **(H2)**. Novamente, pela condição $c3)$, $V(\tilde{\pi}(x,t)) \leq V(x) < \mu$ para todo $t \geq 0$ já que $\mathscr{O}_1 \subset U_{\overline{A}}$. Assim (4.51) é válido. Assim, $K \in \tau_X$ é uma vizinhança $\tilde{\pi}$-invariante.

Usando (4.50) e a definição de K, concluímos que

$$\overline{A} \setminus M \subset K \subset \mathscr{O} \setminus M \subset \mathscr{O} \subset U_{\overline{A} \setminus M},$$

donde temos a tese. □

Para conjuntos compactos temos o seguinte corolário do Teorema 4.2.2.

Corolário 4.2.3. Sejam $(X, \pi, \mathbb{R}_+, M, I)$ um SI e $A \subset X$ compacto tais que:

$a)$ Existe $r_0 > 0$ tal que para todo $r \in (0, r_0)$, $I(\overline{B(A,r)} \cap M) \subset B(A,r)$.

$c)$ Existe uma função $V : U_{\overline{A}} \to \mathbb{R}_+$, contínua em $U_{\overline{A}} \setminus M$, tal que:

$c1)$ $x \in A \implies V(x) = 0.$

$c2)$ Dada $(x_n) \subset U_{\overline{A}}$ tal que $V(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \implies d(x_n, A) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

$c3)$ Dados $x \in U_{\overline{A}} \setminus M$ e $t \geq 0$, com $\tilde{\pi}(x, [0,t]) \subset U_{\overline{A}} \implies V(\tilde{\pi}(x,t)) \leq V(x).$

Então $A \setminus M$ é orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável.

Demonstração. Basta verificar que a condição $b)$ do Teorema 4.2.2 está satisfeita. Sendo A compacto, existe $\alpha \in (0, r_0)$ tal que $A \subset B(A,\alpha) \subset U_A$. Tome $\mathscr{O}^* \doteq B(A,\alpha) \setminus M$. Então,

$$A \setminus M \subset \mathscr{O}^* \subset U_{\overline{A}} \quad \text{e} \quad d(z,A) \geq \alpha, \;\; \text{se} \;\; z \notin \mathscr{O}^*,$$

ou seja, a condição $b)$ do Teorema 4.2.2 está satisfeita. □

No próximo resultado, apresentamos um critério de instabilidade para $\overline{A}$, com $A \subset X$, via função de Lyapunov, que logo em seguida, será aplicado no nosso primeiro exemplo em dimensão infinita.

Teorema 4.2.4. Sejam $(X, \pi, \mathbb{R}_+, M, I)$ um SI, $A \subset X$ e $V : U_{\overline{A}} \to \mathbb{R}_+$ uma função contínua em $U_{\overline{A}} \setminus M$ tais que:

$a)$ $x \in A \implies V(x) = 0.$

$b)$ Existem $a \in \overline{A}$ e $s > 0$ tais que $V(\tilde{\pi}(a,s)) > 0.$

Então $\overline{A}$ não é $\tilde{\pi}$-estável.

Demonstração. Se $\overline{A}$ é $\tilde{\pi}$-estável, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(a,\varepsilon) > 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(B(a,\delta), [0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon) \implies \tilde{\pi}(a, [0,\infty)) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} B(A,\varepsilon) = \overline{A},$$

donde $\tilde{\pi}(a,s) \in \overline{A} \setminus M$, pois $M \cap I(M) = \emptyset$ pela hipótese **(H2)**. Logo, $\tilde{\pi}(a,s) \in U_{\overline{A}} \setminus M$. Da continuidade de V obtemos $V(\tilde{\pi}(a,s)) = 0$, contradizendo $b)$. □

Exemplo 4.2.5. Considere $X = L_2[0,1]$, o operador $A : X \to X$ dado por $(A\varphi)(\tau) = -\tau\varphi(\tau)$ e o sistema

$$(*) \begin{cases} x' = Ax, \\ M = \{x \in X : \|x\|_2 = 1\}, \\ I : M \to X, \\ \|I(\cdot)\|_2 \leq \alpha \|\cdot\|_2, \;\; \alpha \in (0,1). \end{cases}$$

Note que $(U(t)\varphi)(\tau) = e^{-\tau t}\varphi(\tau)$ é solução de $(*)$ e, para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in X$,

$$\pi(\varphi, t) \doteq U(t)\varphi.$$

é o fluxo gerado pela equação $x' = Ax$. Além disso, dado $\varphi \in M$ tome $\varepsilon_\varphi = 1$. Assim, para $t \in (0,1)$, temos

$$\|\pi(\varphi,t)\|_2 = \|U(t)\varphi\|_2 = \left(\int_0^1 e^{-2\tau t}|\varphi(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\int_0^1 |\varphi(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

e para $t \in (-1,0)$, temos

$$\|\pi(\varphi,t)\|_2 = \|U(t)\varphi\|_2 = \left(\int_0^1 e^{-2\tau t}|\varphi(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\int_0^1 |\varphi(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

donde $\pi(\varphi,(0,1)) \cap M = \pi(\varphi,(-1,0)) \cap M = \emptyset$. Portanto, $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ é um SI. O conjunto impulsivo M satisfaz STC (tome $L = \pi(S,1)$, sendo $S = M$, e note que $\{g \in L_2[0,1] : \frac{3}{4} < \|g\|_2 < \frac{5}{4}\} \subset F(L,[0,2])$) e $M \cap I(M) = \emptyset$, pois $\|I(\cdot)\|_2 \leq \alpha\|\cdot\|_2$, $\alpha \in (0,1)$.

Sejam $A \doteq A[0;1,2] = \{x \in X : 1 \leq \|x\|_2 \leq 2\}$ e $V : B_{L_2}(0,3) \to \mathbb{R}_+$ dada por

$$V(\varphi) = \begin{cases} \inf_{a\in A}\|\varphi - a\|_2 & \text{se} \quad \varphi \notin A, \\ 0 & \text{se} \quad \varphi \in A. \end{cases}$$

Mostraremos que o conjunto A instável utilizando o Teorema 4.2.4. De fato, como

$$\left|\inf_{a\in A}\|\varphi - a\|_2 - \inf_{a\in A}\|\psi - a\|_2\right| \leq \sup_{a\in A}\big|\|\varphi - a\|_2 - \|\psi - a\|_2\big| \leq \|\varphi - \psi\|_2,$$

segue que V é contínua em $B_{L_2}(0,3) \setminus M$. Além disso:

a) $V(A) = \{0\}$, pela definição de V.

b) $f \equiv 1 \in M \subset A = \overline{A}$. Para $t > 0$ e $\tau \in [0,1]$, temos $2\tau t \geq 0$ e

$$\|\pi(1,t)\|_2 = \left(\int_0^1 e^{-2\tau t}|1|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\int_0^1 1 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

donde, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\|\pi(1,t)\|_2 = \left(\int_0^1 e^{-2\tau t}|1|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{t\to+\infty} 0.$$

Logo, $\phi(1) = \infty$ e para $s \doteq 1$ temos $\tilde{\pi}(1,1) \notin A$. Portanto, da definição de V,

$$V(\tilde{\pi}(1,1)) = \inf_{a\in A}\|\tilde{\pi}(1,1) - a\|_2 \geq \inf_{a\in A}\|a\|_2 - \|\tilde{\pi}(1,1)\|_2 \geq 1 - \|\tilde{\pi}(1,1)\|_2 > 0.$$

Portanto, pelo Teorema 4.2.4, o conjunto A é instável.

Como aplicação do Teorema 4.2.2, mostraremos a seguir que o conjunto $B[0,1] \setminus M$ apresentado no Exemplo 4.2.5, é orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável.

Exemplo 4.2.6. Considere o sistema impulsivo do Exemplo 4.2.5. Sejam $A \doteq B[0,1]$ e $V : B_{L_2}(0,3) \to \mathbb{R}_+$ dada por

$$V(\varphi) = \begin{cases} \|\varphi\|_2 - 1 & \text{se} \quad \varphi \notin A, \\ 0 & \text{se} \quad \varphi \in A. \end{cases}$$

Segue do Teorema 4.2.2 que $A \setminus M$ é orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável. De fato,

a) Tome $r_0 \doteq \frac{3}{2}$. Então dado $r \in (0, r_0)$, temos que $\overline{B(0,r)} \cap M = \emptyset$ para todo $0 < r < 1$ e $\overline{B(0,r)} \cap M = M$ para $1 \leq r < r_0$. Logo $I(\overline{B(0,r)} \cap M) \subset B(0,r)$, pois I é contração.

b) Defina $U_A \doteq B_{L_2}(0,3)$, $\mathscr{O}^* \doteq B_{L_2}(0,2)$ e $\beta = 1$. Então

$$\overline{A} \setminus M \subset \mathscr{O}^* \subset U_{\overline{A}} \quad \text{e} \quad d(z,A) \geq \beta, \quad \text{se} \ z \notin \mathscr{O}^*.$$

c) V é contínua em $B_{L_2}(0,3) \setminus M$, pois $\| \cdot \|_2$ o é.

c1) $V(A) = \{0\}$, por definição de V.

c2) Seja $(\varphi_n) \subset U_A$ uma sequência tal que $V(\varphi_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Se $(\varphi_n) \subset A$ (a menos de subsequência) então $d(\varphi_n, A) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $(\varphi_n) \subset U_A \setminus A$ então $d(\varphi_n, A) = \|\varphi_n\| - 1 = V(\varphi_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

c3) Por fim, $\|\pi(\varphi,t)\|_2 \leq \|\varphi\|_2$, para todo $t \geq 0$. Como $\|I(\varphi)\|_2 \leq \|\varphi\|_2$, segue que

$$V(\tilde{\pi}(\varphi,t)) = \|\tilde{\pi}(\varphi,t)\|_2 \leq \|\varphi\|_2 = V(\varphi),$$

para todo $t \geq 0$.

4.3 Estabilidade de $\tilde{\pi}$-atratores

Nesta seção iremos obter um critério para a $\tilde{\pi}$-atração (Definição 3.1.7) de um subconjunto $A \subset X$. Como dissemos no início deste capítulo e podemos observar ao longo dos teoremas anteriores, funções de Lyapunov decrescem ao longo de soluções. Agora veremos mais uma possível característica de tais funções: elas podem não ser constante ao longo de soluções.

Lema 4.3.1. Sejam $(X, \pi, \mathbb{R}_+, M, I)$ um SI e $A \subset X$ tais que:

a) Existe uma função $V : U_{\overline{A}} \to \mathbb{R}_+$, contínua em $U_{\overline{A}} \setminus M$, satisfazendo as condições:

*a*1) Dados $x \in U_A \setminus M$ e $t \geq 0$ com $\tilde{\pi}(x,[0,t]) \subset U_A$, tem-se $V(\tilde{\pi}(x,t)) \leq V(x)$.

*a*2) Dados $y \in \tilde{L}^+(x) \cap \left(U_{\overline{A}} \setminus A\right)$ e $t \geq 0$ tais que, $\tilde{\pi}(y,[0,t]) \subset \tilde{L}^+(x) \cap \left(U_{\overline{A}} \setminus A\right)$, existem $t_1, t_2 \in [0,t]$ satisfazendo

$$V(\tilde{\pi}(y,t_1)) \neq V(\tilde{\pi}(y,t_2)).$$

$b)$ Existem $K \in \tau_X$, com $\overline{K}$ compacto e $\tilde{\pi}(K,[0,\infty)) \subset K$, e $\mathscr{O} \in \tau_X$ tais que

$$K \subset \overline{K} \subset \mathscr{O} \subset U_{\overline{A}}.$$

Então $K \subset \tilde{P}(A)$.

Demonstração. Sejam $x \in K$ e $t_n \doteq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Do item $b)$, sem perda de generalidade, podemos assumir que $\tilde{\pi}(x,t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in \overline{K}$. Logo, pela Proposição C.0.1, dado $x \in K$

$$\tilde{L}^+(x) \neq \emptyset. \tag{4.52}$$

Assim, dado $y \in \tilde{L}^+(x)$, pela Proposição C.0.1, existe uma sequência $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $\tilde{\pi}(x,t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Logo $b)$ implica $y \in \overline{K}$, e assim, para todo $x \in K$, obtemos

$$\tilde{L}^+(x) \subset \overline{K}. \tag{4.53}$$

Afirmação 1: $\tilde{L}^+(x) \setminus M \subset \overline{A}$.

De fato, seja $y \in \tilde{L}^+(x) \setminus M$. Pela Proposição C.0.1, existe uma sequência $(s_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x,s_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y. \tag{4.54}$$

Suponha, por contradição, que $y \notin \overline{A}$. Desta forma, existe $t > 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(y,[0,t]) \cap \overline{A} = \emptyset, \tag{4.55}$$

já que $\tilde{\pi}(y,[0,\phi(y))) = \pi(y,[0,\phi(y)))$ e π é contínua.

Como $y \in \tilde{L}^+(x) \setminus M$, pela Proposição C.0.4, $\tilde{\pi}(y,s) \in \tilde{L}^+(x) \setminus M$ para todo $s \in [0,t]$, donde pela Proposição C.0.1, para cada $s \in [0,t]$, existe $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty, \;\; t_n \leq s_n \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x,t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(y,s). \tag{4.56}$$

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\tilde{\pi}(x,t_n),\ \tilde{\pi}(x,s_n) \notin (\overline{A} \cup M)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, devido a (4.54) e (4.56), respectivamente. Também, de (4.53) e $b)$, temos que $\tilde{\pi}(x,s_n) \in U_{\overline{A}}$ e $\tilde{\pi}(x,t_n) \in U_{\overline{A}}$, para todo n suficientemente grande. Em síntese,

$$\tilde{\pi}(x,t_n),\ \tilde{\pi}(x,s_n)\ \in U_{\overline{A}} \setminus (A \cup M), \tag{4.57}$$

para n suficientemente grande. Como $\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x,t_n),s_n-t_n) = \tilde{\pi}(x,s_n)$, condition $a1)$ e (4.57) implicam

$$V(\tilde{\pi}(x,s_n)) = V(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x,t_n),s_n-t_n)) \leq V(\tilde{\pi}(x,t_n)),$$

donde $a)$ e (4.57) implica

$$V(y) = \lim_{n\to\infty} V(\tilde{\pi}(x,s_n)) \leq \lim_{n\to\infty} V(\tilde{\pi}(x,t_n)) = V(\tilde{\pi}(y,s)) \leq V(y),$$

isto é,

$$V(y) = \tilde{\pi}(y,s), \text{ for all } s \in [0,t].$$

Assim, $\tilde{\pi}(y,[0,t]) \subset \tilde{L}^+(x) \cap \left(U_{\overline{A}} \setminus A\right)$ e $V(y) = \tilde{\pi}(y,s)$, for all $s \in [0,t]$, contradizendo $a2)$. Portanto, $\tilde{L}^+(x) \setminus M \subset \overline{A}$.

Afirmação 2: $\tilde{L}^+(x) \cap M \subset \overline{A}$.

Se $y \in \tilde{L}^+(x) \cap M$. Como $y \in M$ satisfaz STC, existe um λ-tubo $F(L,[0,2\lambda])$ através de y. Pela propriedade de tubo existe $\eta > 0$ tal que $B(y,\eta) \subset F(L,[0,2\lambda])$. Defina

$$H_1 \doteq B(y,\eta) \cap F(L,(\lambda,2\lambda]) \quad \text{e} \quad H_2 \doteq B(y,\eta) \cap F(L,[0,\lambda]).$$

Pela Proposição C.0.1, existe uma sequência $(s_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x,s_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y. \tag{4.58}$$

Suponha, a menos de subsequência, que $\tilde{\pi}(x,s_n) \in H_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De (4.58), podemos assumir que $s_n > \frac{\lambda}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $b)$ implica, sem perda de generalidade,

$$K \ni \tilde{\pi}\left(x, s_n - \frac{\lambda}{2}\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z \in \overline{K}. \tag{4.59}$$

Note, também, que

$$F(L,(\lambda,2\lambda]) \cap M = \emptyset \tag{4.60}$$

devido a condição STC.

Como $\tilde{\pi}(x,s_n) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x,s_n - \frac{\lambda}{2}), \frac{\lambda}{2})$, podemos concluir que

$$\phi\left(\tilde{\pi}\left(x, s_n - \frac{\lambda}{2}\right)\right) = \frac{\lambda}{2} + \phi(\tilde{\pi}(x,s_n)), \tag{4.61}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, mostremos que

$$z \notin M. \tag{4.62}$$

De fato, como $\tilde{\pi}(x,s_n) \in F(L,(\lambda,2\lambda])$, pela definição de tubo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $\lambda_n \in (\lambda,2\lambda]$ e $\overline{\lambda} \in [\lambda,2\lambda]$ tais que $\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{\lambda}$ e

$$L \ni \pi(\tilde{\pi}(x,s_n),\lambda_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(y,\overline{\lambda}) \in L,$$

logo $\lambda = \overline{\lambda}$. Por outro lado, (4.61) implica

$$\tilde{\pi}(x,s_n) = \tilde{\pi}\left(\tilde{\pi}\left(x, s_n - \frac{\lambda}{2}\right), \frac{\lambda}{2}\right) = \pi\left(\tilde{\pi}\left(x, s_n - \frac{\lambda}{2}\right), \frac{\lambda}{2}\right),$$

e, portanto,

$$L \ni \pi(\tilde{\pi}(x,s_n),\lambda_n) = \pi\left(\tilde{\pi}\left(x, s_n - \frac{\lambda}{2}\right), \frac{\lambda}{2} + \lambda_n\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi\left(z, \frac{3\lambda}{2}\right) \in L,$$

ou seja,

$$z \in F(L,(\lambda,2\lambda]).$$

De (4.60) segue que (4.62) vale. Daí, usando (4.61), a continuidade de ϕ em $X \setminus M$ e o Teorema A.0.7, obtemos

$$\phi(z) = \lim_{n\to\infty} \phi\left(\tilde{\pi}\left(x, s_n - \frac{\lambda}{2}\right)\right) = \frac{\lambda}{2} + \lim_{n\to\infty} \phi(\tilde{\pi}(x,s_n)) = \frac{\lambda}{2}.$$

Agora, de (4.58), (4.59), (4.61) e da continuidade de π, obtemos

$$\tilde{\pi}(x,s_n) = \tilde{\pi}\left(\tilde{\pi}\left(x, s_n - \frac{\lambda}{2}\right), \frac{\lambda}{2}\right) = \pi\left(\tilde{\pi}\left(x, s_n - \frac{\lambda}{2}\right), \frac{\lambda}{2}\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi\left(z, \frac{\lambda}{2}\right) = y. \qquad (4.63)$$

Note que de (4.59) e (4.62) temos $z \in \tilde{L}^+(x) \setminus M$, e assim, da Proposição C.0.4,

$$\pi\left(z, \left[0, \frac{\lambda}{2}\right)\right) = \tilde{\pi}\left(z, \left[0, \frac{\lambda}{2}\right)\right) \subset \tilde{L}^+(x) \setminus M, \qquad (4.64)$$

e assim, pela Afirmação 1, temos que

$$\pi\left(z, \left[0, \frac{\lambda}{2}\right)\right) = \tilde{\pi}\left(z, \left[0, \frac{\lambda}{2}\right)\right) \subset \overline{A},$$

donde, por (4.63), obtemos $y = \pi(z, \frac{\lambda}{2}) \in \overline{A}$. Neste caso, concluímos que $\tilde{L}^+(x) \cap M \subset \overline{A}$.

Suponha agora, a menos de subsequência, que $\tilde{\pi}(x,s_n) \in H_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então pelo Teorema A.0.7, $\phi(\tilde{\pi}(x,s_n)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(y)$, donde dado $t \in (0,\phi(y))$,

$$\tilde{\pi}(x,s_n+t) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x,s_n),t) = \pi(\tilde{\pi}(x,s_n),t) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(y,t).$$

Logo, pela Proposição C.0.1,

$$\tilde{\pi}(y,t) = \pi(y,t) \in \tilde{L}^+(x) \setminus M, \;\; t \in (0,\phi(y)).$$

Pela Afirmação 1, $\pi(y,(0,\phi(y)) = \tilde{\pi}(y,(0,\phi(y)) \subset \overline{A}$, donde $y \in \overline{A}$. Assim, $\tilde{L}^+(x) \cap M \subset \overline{A}$.

Conclusão, $K \subset \tilde{P}(A)$. □

Teorema 4.3.2. Sejam $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI e $A \subset X$ tais que:

a) Existe uma função $V : U_{\overline{A}} \to \mathbb{R}_+$, contínua em $U_{\overline{A}} \setminus M$, satisfazendo:

*a*1) Dados $x \in U_A \setminus M$ e $t \geq 0$, com $\tilde{\pi}(x,[0,t]) \subset U_A$, tem-se $V(\tilde{\pi}(x,t)) \leq V(x)$.

*a*2) Dados $y \in \tilde{L}^+(x) \cap \left(U_{\overline{A}} \setminus A\right)$ e $t \geq 0$, tais que $\tilde{\pi}(y,[0,t]) \subset \tilde{L}^+(x) \cap \left(U_{\overline{A}} \setminus A\right)$, existem $t_1, t_2 \in [0,t]$ satisfazendo

$$V(\tilde{\pi}(y,t_1)) \neq V(\tilde{\pi}(y,t_2)).$$

b) Existem $K \in \tau_X$, com $\overline{K}$ compacto e $\tilde{\pi}(K,[0,\infty)) \subset K$, e $\mathscr{O} \in \tau_X$ tais que

$$A \subset K \subset \overline{K} \subset \mathscr{O} \subset U_{\overline{A}}.$$

Então A é $\tilde{\pi}$-atrator.

Demonstração. Estamos nas hipóteses do Lema 4.3.1, donde $\tau_X \ni K \subset \tilde{P}(A)$. □

O corolário a seguir é uma aplicação do Corolário 4.2.3 e do Teorema 4.3.2.

Corolário 4.3.3. Sejam $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI, X localmente compacto, $A \subset X$ e $\overline{A}$ compacto tais que:

$a)$ Existe $r_0 > 0$ tal que para todo $r \in (0,r_0)$, $I(\overline{B(A,r)} \cap M) \subset B(A,r)$.

b) Existe uma função $V : U_{\overline{A}} \to \mathbb{R}_+$, contínua em $U_{\overline{A}} \setminus M$, tal que:

$b1)$ $x \in A \implies V(x) = 0$.

$b2)$ Dada $(x_n) \subset U_{\overline{A}}$ tal que $V(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \implies d(x_n,A) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;

$b3)$ Dados $x \in U_{\overline{A}} \setminus M$ e $t \geq 0$, com $\tilde{\pi}(x,[0,t]) \subset U_{\overline{A}}$, tem-se $V(\tilde{\pi}(x,t)) \leq V(x)$.

$b4)$ Dados $y \in \tilde{L}^+(x) \cap \left(U_{\overline{A}} \setminus A\right)$ e $t \geq 0$ tais que $\tilde{\pi}(y,[0,t]) \subset \tilde{L}^+(x) \cap \left(U_{\overline{A}} \setminus A\right)$, existem $t_1,t_2 \in [0,t]$ com
$$V(\tilde{\pi}(y,t_1)) \neq V(\tilde{\pi}(y,t_2)).$$

Então $\overline{A} \setminus M$ é orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável e A é $\tilde{\pi}$-atrator.

Demonstração. Como $\overline{A}$ é compacto o Corolário 4.2.3 se aplica, donde $\overline{A} \setminus M$ é orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável.

Mostremos agora que A é $\tilde{\pi}$-atrator. Como X é localmente compacto e $\overline{A}$ compacto, existe $\alpha \in (0,r_0)$ tal que
$$B(A,\alpha) \subset U_{\overline{A}} \quad \text{e} \quad \overline{B(A,\alpha)} \quad \text{é compacto.} \tag{4.65}$$

Defina
$$\mu \doteq \inf\left\{V(z): \; z \in S\left(A,\frac{\alpha}{2}\right)\right\}.$$

A condição $b2)$ implica que $\mu > 0$. Defina agora
$$K \doteq \left\{x \in B\left(A,\frac{\alpha}{2}\right) \setminus M : V(x) < \mu\right\}.$$

Então
$$\tilde{\pi}(K,[0,\infty)) \subset K. \tag{4.66}$$

De fato, seja $x \in K$. Se existir $t_0 > 0$ tal que $\tilde{\pi}(x,t_0) \notin B(A,\frac{\alpha}{2})$, então, por $a)$, estamos nas hipóteses da Proposição C.0.7, donde existe $\tau \in (0,t_0]$
$$\tilde{\pi}(x,[0,\tau)) \subset B\left(A,\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x,\tau) \in \partial B\left(A,\frac{\alpha}{2}\right) \setminus M. \tag{4.67}$$

Logo (4.67) implica $\tilde{\pi}(x,[0,\tau]) \subset U_{\overline{A}}$. Agora usando a definição de K, o fato de que $x \in U_{\overline{A}} \setminus M$, $b3$) e a definição de μ, concluímos que

$$\mu \leq V(\tilde{\pi}(x,\tau)) \leq V(x) < \mu.$$

Contradição. Portanto, $\tilde{\pi}(x,[0,\infty)) \subset B(A,\frac{\alpha}{2})$.

Por fim, como $M \cap I(M) = \emptyset$, temos que $\tilde{\pi}(x,[0,\infty)) \cap M = \emptyset$, para todo $x \in K$. Assim, por $b3$), obtemos que (4.66) é válida. Como $\overline{K} \subset \overline{B(A,\frac{\alpha}{2})}$, $\overline{K}$ é compacto e

$$A \subset K \subset \overline{K} \subset B(A,\alpha) \subset U_{\overline{A}},$$

e juntamente com (4.66), segue do Teorema 4.3.2 que A é $\tilde{\pi}$-atrator. $\square$

Exemplo 4.3.4. Seja $(\mathbb{R}^d,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI tal que $(\mathbb{R}^d,\pi,\mathbb{R}_+)$ é gerado pelo sistema

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

em que $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Vamos assumir que $\|I(x)-I(y)\| \leq \eta\|x-y\|$, para todos $x,y \in M$, com $\eta \in (0,1)$.

Suponhamos ainda que o SI $(\mathbb{R}^d,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ satisfaça as hipóteses adicionais (**H1**), (**H2**) e (**H3**). Sejam $V \in C^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}_+)$ e $A \subset \mathbb{R}^d$ um limitado tais que:

i) $V(x) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

ii) Existe $\alpha > 0$ tal que para $x \notin A$, $\nabla V(x) \cdot f(x) \leq -\alpha V(x)$.

iii) Para todo $x \in M \setminus \overline{A}$, $V(I(x)) < V(x)$;

iv) Para todo $x \in \overline{A} \cap M$, $V(I(x)) = V(x)$.

Então, o Corolário 4.3.3 implica que $\overline{A} \setminus M$ é orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável e A é $\tilde{\pi}$-atrator. De fato,

a) Se $\overline{A} \cap M = \emptyset$, segue do fato de $\overline{A}$ ser compacto que existe $r_0 > 0$ tal que $\overline{B(A,r_0)} \cap M = \emptyset$, donde $I(\overline{B(A,r)} \cap M) \subset B(A,r)$ para todo $r \in (0,r_0)$. Se $\overline{A} \cap M \neq \emptyset$, dado $x \in \overline{A} \cap M$ segue de i) e iv) que $V(I(x)) = V(x) = 0$, donde i) implica $I(x) \in \overline{A}$. Assim

$$I(\overline{A} \cap M) \subset \overline{A}. \tag{4.68}$$

Também,

$$I\left(B\left(\overline{A} \cap M, \frac{r}{\eta}\right)\right) \subset B(I(\overline{A} \cap M), r), \quad r > 0. \tag{4.69}$$

De fato, dados $x \in B\left(\overline{A} \cap M, \frac{r}{\eta}\right)$ e $y = I(x')$, com $x' \in \overline{A} \cap M$, temos

$$\|I(x) - y\| = \|I(x) - I(x')\| \leq \eta\|x - x'\|,$$

logo,

$$\inf_{y\in I(\overline{A}\cap M)} \|I(x)-y\| \leq \eta \inf_{x'\in\overline{A}\cap M} \|x-x'\| \leq \frac{r}{\eta}\eta = r, \ \ r>0.$$

Consequentemente, segue de (4.68) e (4.69),

$$I\left(B\left(\overline{A}\cap M,\frac{r}{\eta}\right)\right) \subset B(I(\overline{A}\cap M),r) \subset B(\overline{A},r) = B(A,r), \ \ r>0. \tag{4.70}$$

Como

$$\overline{B(A,r)}\cap M \subset \overline{B(\overline{A}\cap M,r)}\cap M \subset B\left(\overline{A}\cap M,\frac{r}{\eta}\right)\cap M,$$

segue por (4.70),

$$I(\overline{B(A,r)}\cap M) \subset I\left(B\left(\overline{A}\cap M,\frac{r}{\eta}\right)\cap M\right) \subset B(A,r), \ r>0.$$

$b)$ Dados $\gamma,\mu>0$ defina

$$U_{\overline{A}} \doteq \{x\in B(A,\gamma) : V(x)<\mu\}.$$

Note, em particular, que $V|_{U_{\overline{A}}}$ é contínua, já que $V\in C^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}_+)$.

$b1)$ Se $x\in A\subset\overline{A}$, pela definição de V, obtemos $V(x)=0$.

$b2)$ Se $(x_n)\subset U_{\overline{A}}$ é uma sequência tal que $d(x_n,A) \overset{n\to+\infty}{\not\to} 0$, então existem $\varepsilon>0$ e $(x_{n_k})\subset(x_n)$ tais que, para todo $k\in\mathbb{N}$,

$$d(x_{n_k},A)\geq\varepsilon.$$

Como A é limitado temos que $\overline{B(A,\gamma)}$ é compacto em $\mathbb{R}^d$. Assim, podemos assumir que $x_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x\in\overline{B(A,\gamma)}\setminus\overline{A}$ e, da continuidade da V e $b1)$, $V(x_{n_k}) \overset{k\to+\infty}{\not\to} 0$.

$b3)$ Sejam $x\in U_{\overline{A}}\setminus M$ e $t>0$ tais que $\pi(x,[0,t])\subset U_{\overline{A}}$. Como

$$\frac{d}{ds}V(\pi(x,s)) = \nabla V(\pi(x,s))\cdot f(\pi(x,s)) \leq -\alpha V(\pi(x,s)),$$

para todo $s\in[0,t]$, segue da desigualdade de Gronwall que

$$V(\pi(x,s)) \leq e^{-\alpha s}V(x) < V(x),$$

para todo $s\in[0,t]$. Porém, pela condição iii), sabemos que $V(I(x))<V(x)$ sempre que $x\in M\setminus\overline{A}$. Desta forma, concluímos que $V(\tilde{\pi}(x,t))<V(x)$ para todo $t>0$ tal que $\tilde{\pi}(x,[0,t])\subset U_{\overline{A}}$.

$b4)$ Seja $x\in U_{\overline{A}}$ tal que $\tilde{L}^+(x)\,\cap\,U_{\overline{A}}\setminus A\neq\emptyset$. Tome $y\in\tilde{L}^+(x)\,\cap\,U_{\overline{A}}\setminus A$ e $t>0$ tais que

$$\tilde{\pi}(y,[0,t])\subset\tilde{L}^+(x)\,\cap\,U_{\overline{A}}\setminus A.$$

Como $y\notin A$, a condição $ii)$ implica que para $s\in[0,t]$,

$$\frac{d}{ds}V(\pi(y,s)) = \nabla V(\pi(y,s))\cdot f(\pi(y,s)) \leq -\alpha V(\pi(y,s)).$$

Pela prova do item b3), concluímos que

$$V(\tilde{\pi}(x,s))<V(x), \ \ \text{para todo} \ \ s\in[0,t].$$

O próximo passo, é apresentar a recíproca do Corolário 4.3.3, que é o Corolário 4.3.7.

Lema 4.3.5. Sejam $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI e $A\subset X$ tal que $\overline{A}$ compacto, A é $\tilde{\pi}$-atrator e $\overline{A}\setminus M$ é $\tilde{\pi}$-estável. Então a função $W:\tilde{P}(A)\to\mathbb{R}_+$ definida por:

$$W(x)\doteq\begin{cases}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}d(\tilde{\pi}(x,t),A) & \text{se} \quad x\in\tilde{P}(A)\setminus M,\\ d(x,A) & \text{se} \quad x\in\tilde{P}(A)\cap M,\end{cases}$$

satisfaz as seguintes condições:

i) É contínua em $\tilde{P}(A)\setminus M$.

ii) Se $\overline{A}$ é $\tilde{\pi}$-estável $\implies$ W é contínua em $\tilde{P}(A)\setminus(M\setminus\overline{A})$.

iii) $x\in A \implies W(x)=0$.

iv) Dada $(x_n)\subset\tilde{P}(A)$ tal que $W(x_n)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0 \implies d(x_n,A)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

v) Dados $x\in\tilde{P}(A)\setminus M$ e $t\in\mathbb{R}_+$, então $W(\tilde{\pi}(x,t))\leq W(x)$.

Demonstração. A função W está bem definida. De fato, dado $x\in\tilde{P}(A)\setminus M$, por definição $\emptyset\neq\tilde{L}^+(x)\subset\overline{A}$. Assim, pela Proposição C.0.5, obtemos $\tilde{L}^+(x)\setminus M\neq\emptyset$. Seja $y\in\tilde{L}^+(x)\setminus M$, daí pela Proposição C.0.1, existe $(t_n)\subset\mathbb{R}_+$ tal que

$$t_n\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\infty \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x,t_n)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}y. \tag{4.71}$$

Como $\overline{A}\setminus M$ é $\tilde{\pi}$-estável e $y\in\tilde{L}^+(x)\setminus M\subset\overline{A}\setminus M$, existe $\delta=\delta(y,1)>0$ tal que

$$\tilde{\pi}(B(y,\delta),[0,\infty))\subset B(A,1). \tag{4.72}$$

Logo de (4.71) e (4.72), existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\tilde{\pi}(x,t_n)\in B(y,\delta)$, para todo $n\geq N$, donde (4.72) implica

$$\tilde{\pi}(x,[t_N,\infty))\subset B(A,1) \implies W(x)\leq\sup\{d\left(\tilde{\pi}(x,[0,t_N]),A\right),1\}<\infty.$$

i) Seja $(w_n)\subset\tilde{P}(A)$ com $w_n\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}x\in\tilde{P}(A)\setminus M$. Como $M\cap I(M)=\emptyset$, I é contínua em M e ϕ é contínua em $X\setminus M$ (Teorema A.0.6) segue, para todo $k\in\mathbb{N}$, que

$$(w_n)_k^+=I\left(\pi((w_n)_{k-1}^+,\phi((w_n)_{k-1}^+))\right)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}I\left(\pi(x_{k-1}^+,\phi(x_{k-1}^+))\right)=x_k^+,$$

$$\phi((w_n)_k^+)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\phi(x_k^+),$$

$$\sup_{0\leq t\leq\phi((w_n)_k^+)}d(\pi((w_n)_k^+,t),A)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\sup_{0\leq t\leq\phi(x_k^+)}d(\pi(x_k^+,t),A)$$

e

$$\sup_{k\in\mathbb{N}_0}\left(\sup_{0\leq t\leq\phi((w_n)_k^+)}d(\pi((w_n)_k^+,t),A)\right)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\sup_{k\in\mathbb{N}_0}\left(\sup_{0\leq t\leq\phi(x_k^+)}d(\pi(x_k^+,t),A)\right).$$

Portanto,

$$W(w_n)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}W(x).$$

ii) Seja $x \in \tilde{P}(A) \setminus (M \setminus \overline{A})$. Então ou $x \in \tilde{P}(A) \setminus M$ ou $x \in \tilde{P}(A) \cap A$. Pelo item i), basta verificar a continuidade em $x \in \overline{A} \cap M \cap \tilde{P}(A)$. Sejam $(z_n) \subset \tilde{P}(A)$ com $z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e $\varepsilon > 0$. Como $\overline{A}$ é $\tilde{\pi}$-estável, existe $\delta = \delta(x,\varepsilon)$ tal que

$$\tilde{\pi}(B(x,\delta),[0,\infty)) \subset B(\overline{A},\varepsilon),$$

donde existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{\pi}(z_n,[0,\infty)) \subset B(\overline{A},\varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$. Assim $W(z_n) < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Portanto,

$$W(z_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = d(x,A) = W(x).$$

iii) Seja $x \in A$. Se $x \in M$ então $x \in \tilde{P}(A) \cap M$ e, por definição, $W(x) = d(x,A) = 0$. Se $x \notin M$, então $x \in \overline{A} \setminus M$. Como $\overline{A} \setminus M$ é $\tilde{\pi}$-estável, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(x,[0,\infty)) \subset \tilde{\pi}(B(x,\delta),[0,\infty)) \subset B(A,\varepsilon).$$

Logo,

$$\tilde{\pi}(x,[0,\infty)) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} B(A,\varepsilon) = \overline{A},$$

consequentemente,

$$W(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} d(\tilde{\pi}(x,t),A) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} d(\tilde{\pi}(x,t),\overline{A}) = 0.$$

iv) Dada uma sequência $(x_n) \subset \tilde{P}(A)$ tal que $W(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, segue da definição de W, a seguinte convergência

$$d(x_n,A) \leq W(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

v) Sejam $x \in \tilde{P}(A) \setminus M$. Como $M \cap I(M) = \emptyset$, segue que $\tilde{\pi}(x,s) \notin M$ para todo $s \geq 0$. Pela Proposição C.0.6, $\tilde{\pi}(x,s) \in \tilde{P}(A) \setminus M$ para todo $s \geq 0$. Assim,

$$W(\tilde{\pi}(x,s)) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} d(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x,s),t),A) = \sup_{t\geq s} d(\tilde{\pi}(x,t),A) \leq \sup_{t\in\mathbb{R}_+} d(\tilde{\pi}(x,t),A) = W(x).$$

$\square$

Teorema 4.3.6. Sejam $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ um SI e $A \subset X$ um subconjunto tal que $\overline{A}$ é compacto, A é $\tilde{\pi}$-atrator e $\overline{A} \setminus M$ é $\tilde{\pi}$-estável. Suponha que exista $r_0 > 0$ tal que

$$I\left(\overline{B(A,r)} \cap M\right) \subset B(A,r), \quad \text{para todo} \quad r \in (0,r_0).$$

Então, existe uma função $V : U_A \to \mathbb{R}_+$ satisfazendo as seguintes condições:

a) V é contínua em $U_A \setminus M$.

b) se $x \in A \implies V(x) = 0$.

$c)$ Dada $(x_n) \subset U_A$ tal que $V(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \implies d(x_n, A) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;

d) Dados $x \in U_A \setminus (M \cup \overline{A})$ e $t \in \mathbb{R}_+$, com $\tilde{\pi}(x,[0,t]) \subset U_A \setminus (M \cup \overline{A})$, então $V(\tilde{\pi}(x,t)) < V(x)$.

Demonstração. Seja $U_A = \tilde{P}(A)$ e defina a função $V : \tilde{P}(A) \to \mathbb{R}_+$ pela lei

$$V(x) \doteq \begin{cases} W(x) + \int_0^\infty W(\tilde{\pi}(x,\tau))\exp(-\tau)d\tau & \text{se} \quad x \in \tilde{P}(A) \setminus M, \\ 1 & \text{se} \quad x \in \big(\tilde{P}(A) \setminus A\big) \cap M, \\ 0 & \text{se} \quad x \in A \cap M, \end{cases}$$

em que $W : \tilde{P}(A) \to \mathbb{R}_+$ é a função dada no Lema 4.3.5. Assim, V está bem definida.

Inicialmente, notemos que da Proposição C.0.6, temos

$$\tilde{\pi}(x,[0,\infty)) \subset \tilde{P}(A), \quad \text{para todo} \ \ x \in \tilde{P}(A).$$

A função $\tau \mapsto W(\tilde{\pi}(x,\tau))$ é mensurável para todo $x \in \tilde{P}(A) \setminus M$, pois se $x \in \tilde{P}(A) \setminus M$ então $\tilde{\pi}(x,t) \in \tilde{P}(A) \setminus M$ para todo $t \geq 0$, $m(\{\tau : \tilde{\pi}(x,\cdot) \notin C^0\}) = 0$ e W é contínua em $\tilde{P}(A) \setminus M$.

Além disso, pela condição $v)$ do Lema 4.3.5, obtemos

$$\int_0^\infty W(\tilde{\pi}(x,\tau))\exp(-\tau)d\tau \leq \int_0^\infty W(x)\exp(-\tau)d\tau < \infty,$$

para todo $x \in \tilde{P}(A) \setminus M$.

$a)$ Seja $(x_n) \subset \tilde{P}(A)$ tal que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in \tilde{P}(A) \setminus M$. Para $\tau \neq t_k(x)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos da Proposição B.0.5 e da condição $i)$ do Lema 4.3.5 que

$$W(\tilde{\pi}(x_n,\tau)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} W(\tilde{\pi}(x,\tau)),$$

consequentemente,

$$W(\tilde{\pi}(x_n,\tau))e^{-\tau} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} W(\tilde{\pi}(x,\tau))e^{-\tau}. \tag{4.73}$$

Também, a condição $i)$ do Lema 4.3.5 implica que $W(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} W(x)$, donde $W(x_n) \leq C$, para algum $C \geq 0$, e para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue do item $v)$ do Lema 4.3.5, que

$$W(\tilde{\pi}(x_n,\tau))e^{-\tau} \leq W(x_n)e^{-\tau} \leq Ce^{-\tau} \in L^1([0,\infty)), \ \tau - qtp. \tag{4.74}$$

Portanto, as condições (4.73) e (4.74) implicam as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada, donde

$$\int_0^\infty W(\tilde{\pi}(x_n,\tau))\exp(-\tau)d\tau \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty W(\tilde{\pi}(x,\tau))\exp(-\tau)d\tau$$

Portanto, $V(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} V(x)$.

b) Seja $x \in A$. Se $x \in M$ então por definição $V(x) = 0$. Se $x \notin M$ então $x \in \tilde{P}(A) \setminus M$ e $W(x) = 0$ pelo item *iii*) do Lema 4.3.5. Usando a condição *v*) do Lema 4.3.5, obtemos

$$V(x) = W(x) + \int_0^\infty W(\tilde{\pi}(x,\tau)) \exp(-\tau) d\tau \leq \int_0^\infty W(x) \exp(-\tau) d\tau = 0.$$

c) Suponha que $(x_n) \subset \tilde{P}(A)$ seja uma sequência tal que $V(x_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Se (x_n) admite uma subsequência $(x_{n_k}) \subset M$, segue da definição da V que $x_{n_k} \in A \cap M$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e assim, $d(x_{n_k}, A) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Agora, se (x_n) admite uma subsequência $(x_{n_k}) \subset \tilde{P}(A) \setminus M$, então

$$W(x_{n_k}) + \int_0^\infty W(\tilde{\pi}(x_{n_k}, \tau)) \exp(-\tau) d\tau \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como $W(x_{n_k}) \geq 0$ e $\int_0^\infty W(\tilde{\pi}(x_{n_k}, \tau)) \exp(-\tau) d\tau \geq 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$W(x_{n_k}) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo, pela condição *iv*) do Lema 4.3.5, tem-se $d(x_{n_k}, A) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Portanto, segue de ambos os casos que $d(x_n, A) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

d) Suponhamos que, existam $x_0 \in \tilde{P}(A) \setminus \left(M \cup \overline{A}\right)$ e $s > 0$ tais que

$$\tilde{\pi}(x_0, [0,s]) \subset \tilde{P}(A) \setminus (M \cup \overline{A}) \quad \text{e} \quad V(\tilde{\pi}(x_0, s)) = V(x_0). \tag{4.75}$$

Segue de (4.75) e da definição de V que

$$W(\tilde{\pi}(x_0, s)) - W(x_0) + \int_0^\infty [W(\tilde{\pi}(x_0, s+\tau)) - W(\tilde{\pi}(x_0, \tau))] \exp(-\tau) d\tau = 0.$$

Logo,

$$W(\tilde{\pi}(x_0, s+\tau)) = W(\tilde{\pi}(x_0, \tau)), \ \tau - qtp. \tag{4.76}$$

Afirmação 1: Para todo $t \geq 0$, temos

$$W(\tilde{\pi}(x_0, s+t)) = W(\tilde{\pi}(x_0, t)). \tag{4.77}$$

De fato, do contrário, utilizando a condição *v*) do Lema 4.3.5, existe $\tau \geq 0$ tal que

$$W(\tilde{\pi}(x_0, s+\tau)) < W(\tilde{\pi}(x_0, \tau)). \tag{4.78}$$

Para $s > 0$, tem-se $m([\tau, \tau+s]) = s > 0$ e

$$m\left(B\left(\tau, \frac{1}{n}\right) \cap [\tau, \tau+s]\right) > 0, \tag{4.79}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo de (4.76) e (4.79), existe uma sequência $(\tau_n) \subset \mathbb{R}_+$ satisfazendo $\tau_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tau$, $\tau_n \geq \tau$, $\tau + s - \tau_n \geq 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$W(\tilde{\pi}(x_0, s+\tau_n)) = W(\tilde{\pi}(x_0, \tau_n)). \tag{4.80}$$

Como $\tau_n \geq \tau$ e $\tau_n \leq \tau + s$, $n \in \mathbb{N}$, segue da condição $v)$ do Lema 4.3.5 a seguinte estimativa

$$W(\tilde{\pi}(x_0, s+\tau_n)) = W(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x_0, \tau+s), \tau_n - \tau)) \leq W(\tilde{\pi}(x_0, \tau+s)) \leq W(\tilde{\pi}(x_0, \tau_n)),$$

donde, utilizando (4.80), concluímos

$$W(\tilde{\pi}(x_0, s+\tau)) = W(\tilde{\pi}(x_0, \tau_n)), \tag{4.81}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, note que, como $\tau_n \geq \tau$, $n \in \mathbb{N}$, e $x_0 \notin M$, pela Proposição B.0.6, existe $(\beta_n) \subset \mathbb{R}_+$, $\beta_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ com

$$\tilde{\pi}(x_0, \beta_n + \tau_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(x_0, \tau) \notin M,$$

donde das condições $i)$ e $v)$ do Lema 4.3.5 e (4.81), obtemos

$$W(\tilde{\pi}(x_0, \tau)) = \lim_{n\to\infty} W(\tilde{\pi}(x_0, \beta_n + \tau_n)) \leq \lim_{n\to\infty} W(\tilde{\pi}(x_0, \tau_n) = W(\tilde{\pi}(x_0, s+\tau)),$$

contradizendo (4.78). Portanto, a Afirmação 1 é válida. Consequentemente,

$$W(\tilde{\pi}(x_0, ns)) = W(x_0), \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.82}$$

Afirmação 2: Dado $\varepsilon > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(x_0, [t_0, \infty)) \subset B(A, \varepsilon). \tag{4.83}$$

De fato, como $x_0 \in \tilde{P}(A) \doteq \{x \in X : \emptyset \neq \tilde{L}(x) \subset \overline{A}\}$, temos que $\tilde{L}(x_0) \neq \emptyset$, donde pela Proposição C.0.5, $\tilde{L}(x_0) \setminus M \neq \emptyset$. Seja $y \in \tilde{L}(x_0) \setminus M$. Então pela Proposição C.0.1, existe uma sequência $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$\tilde{\pi}(x_0, t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in \overline{A} \setminus M. \tag{4.84}$$

Seja $\varepsilon > 0$. Como $\overline{A} \setminus M$ é $\tilde{\pi}$-estável, existe $\delta > 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(B(y, \delta), [0, \infty)) \subset B(A, \varepsilon),$$

donde (4.84) implica na existência de um natural $n_0 > 0$ tal que $\tilde{\pi}(x_0, t_n) \in B(y, \delta)$, para todo $n \geq n_0$. Assim,

$$\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x_0, t_{n_0}), [0, \infty)) \subset B(A, \varepsilon),$$

ou seja,

$$\tilde{\pi}(x_0, [t_{n_0}, \infty)) \subset B(A, \varepsilon).$$

Assim, a menos de subsequência, a compacidade de $\overline{A}$ e a Proposição C.0.1, implicam

$$\tilde{\pi}(x_0, ns) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \in \tilde{L}(x_0). \tag{4.85}$$

Se $a \in \tilde{L}(x_0) \setminus M$ então $a \in \overline{A} \setminus M$, pois $x_0 \in P(A) \doteq \{x \in X : \emptyset \neq \tilde{L}(x) \subset \overline{A}\}$. Assim, existe uma sequência $(a_n) \subset A$ tal que $a_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \notin M$, donde as condições $i)$ e $iii)$ do Lema 4.3.5 implicam

$$0 = W(a_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} W(a) \implies W(a) = 0.$$

Logo, de (4.82), (4.85) e item $i)$ do Lema 4.3.5, obtemos

$$W(x_0) = W(\tilde{\pi}(x_0, ns)) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} W(a) = 0 \implies W(x_0) = 0,$$

o que é um absurdo, pois $x_0 \notin \overline{A}$ e pela definição de W,

$$W(x_0) \geq d(x_0, A) = d(x_0, \overline{A}) > 0.$$

Agora consideremos o caso $a \in \tilde{L}(x_0) \cap M$. Como $a \in M$ satisfaz STC, existe um λ-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ através de a. Pela propriedade de tubo existe $\eta > 0$ tal que $B(a, \eta) \subset F(L, [0, 2\lambda])$. Defina

$$H_1 \doteq B(a, \eta) \cap F(L, (\lambda, 2\lambda]) \quad \text{e} \quad H_2 \doteq B(a, \eta) \cap F(L, [0, \lambda]).$$

Se $\tilde{\pi}(x_0, ns) \in H_1$, a menos de subsequência, segue do Teorema A.0.7 que $\phi(\tilde{\pi}(x_0, ns)) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Desta forma,

$$\tilde{\pi}(x_0, ns + \phi(\tilde{\pi}(x_0, ns)) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x_0, ns), \phi(\tilde{\pi}(x_0, ns))) = I(\pi(\tilde{\pi}(x_0, ns), \phi(\tilde{\pi}(x_0, ns)))) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(a),$$

e assim pela Proposição C.0.1, $I(a) \in \tilde{L}(x_0) \setminus M \subset \overline{A} \setminus M$ e $W(I(a)) = 0$. Mas (4.77) implica

$$W(\tilde{\pi}(x_0, ns + \phi(\tilde{\pi}(x_0, ns)))) = W(\tilde{\pi}(x_0, \phi(\tilde{\pi}(x_0, ns)))), \quad n \in \mathbb{N},$$

donde $x_0 \notin M$ e $\phi(\tilde{\pi}(x_0, ns)) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, implicam pela Proposição B.0.2

$$W(\tilde{\pi}(x_0, ns + \phi(\tilde{\pi}(x_0, ns)))) = W(\tilde{\pi}(x_0, \phi(\tilde{\pi}(x_0, ns)))) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} W(x_0).$$

A condição $i)$ do Lema 4.3.5 implica $W(x_0) = W(I(a)) = 0$, contradizendo a definição de W, uma vez que $x_0 \notin \overline{A}$.

Se $\tilde{\pi}(x_0, ns) \in H_2$, a menos de subsequência, segue do Teorema A.0.7 que $\phi(\tilde{\pi}(x_0, ns)) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(a)$. Pela Observação B.0.4, existe uma sequência $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\varepsilon_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\tilde{\pi}(x_0, ns + s + \varepsilon_n) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x_0, ns), s + \varepsilon_n) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(a, s),$$

donde pela Proposição C.0.1,

$$\tilde{\pi}(a, s) \in \tilde{L}(x_0) \setminus M \subset \overline{A} \setminus M \implies W(\tilde{\pi}(a, s)) = 0.$$

Mas (4.77) implica que

$$W(\tilde{\pi}(x_0, ns + \varepsilon_n + s)) = W(\tilde{\pi}(x_0, \varepsilon_n)).$$

Logo, pela Proposição B.0.2, obtemos

$$W(\tilde{\pi}(x_0, ns + \varepsilon_n + s)) = W(\tilde{\pi}(x_0, \varepsilon_n)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} W(x_0),$$

e, assim, concluímos que $W(x_0) = W(\tilde{\pi}(a,s)) = 0$. Mas isso contradiz a definição de W, uma vez que $x_0 \notin \overline{A}$.

Em ambos os casos chegamos a uma contradição. Portanto, (4.75) não pode ocorrer. $\square$

Para finalizar este capítulo, apresentamos o Corolário 4.3.7, que é a recíproca do Corolário 4.3.3.

Corolário 4.3.7. Sejam $(X, \pi, \mathbb{R}_+, M, I)$ um SI e $A \subset X$ um subconjunto tal que $\overline{A}$ é compacto, A é $\tilde{\pi}$-atrator e $\overline{A} \setminus M$ é orbitalmente $\tilde{\pi}$-estável. Suponha que exista $r_0 > 0$ tal que

$$I(\overline{B(A,r)} \cap M) \subset B(A,r),$$

para todo $r \in (0, r_0)$. Então existe uma função $V : U_A \to \mathbb{R}_+$ satisfazendo as seguintes condições:

$a)$ V é contínua em $U_A \setminus M$.

$b)$ Se $x \in A \implies V(x) = 0$;

$c)$ Dada $(x_n) \subset U_{\overline{A}}$ com $V(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \implies d(x_n, A) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;

$d)$ Dados $x \in U_A \setminus M$ e $t \geq 0$, com $\tilde{\pi}(x,[0,t]) \subset U_A$, então $V(\tilde{\pi}(x,t)) \leq V(x)$;

$e)$ Dados $y \in \tilde{L}^+(x) \cap \big(U_{\overline{A}} \setminus A\big)$ e $t \in \mathbb{R}_+$ tais que $\tilde{\pi}(y,[0,t]) \subset \tilde{L}^+(x) \cap \big(U_{\overline{A}} \setminus A\big)$, existem $t_1, t_2 \in [0,t]$ satisfazendo
$$V(\tilde{\pi}(y,t_1)) \neq V(\tilde{\pi}(y,t_2)).$$

Demonstração. Considere $U_A = \tilde{P}(A)$ e a função $V : \tilde{P}(A) \to \mathbb{R}_+$ definida no Teorema 4.3.6. Os itens $a), b)$ e $c)$ seguem dos itens $a), b)$ e $c)$ do Teorema 4.3.6. O item $e)$ segue pelo item $d)$ do Teorema 4.3.6.

Para demonstrar o item $d)$, sejam dados $x \in U_A \setminus M$ e $t \geq 0$ tais que $\tilde{\pi}(x,[0,t]) \subset U_A$, temos que $\tilde{\pi}(x,\tau) \notin M$ para todo $\tau \geq 0$, pois $M \cap I(M) = \emptyset$. Segue do item $v)$ do Lema 4.3.5, que

$$V(\tilde{\pi}(x,t)) = W(\tilde{\pi}(x,t)) + \int_0^\infty W(\tilde{\pi}(x,t+\tau))e^{-\tau}d\tau = W(\tilde{\pi}(x,t)) + \int_0^\infty W(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x,\tau),t))e^{-\tau}d\tau$$

$$\leq W(x) + \int_0^\infty W(\tilde{\pi}(x,\tau))e^{-\tau}d\tau = V(x).$$

$\square$

APÊNDICE

A

A CONTINUIDADE DA FUNÇÃO ϕ

Apresentaremos aqui, resultados sobre a continuidade da função ϕ (veja Definição 2.1.7), que possui muitas aplicações em sistemas impulsivos (CIESIELSKI, 2004a) e, em geral, tem um papel fundamental em na teoria de estabilidade. Para tanto, assumiremos que o SI $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ satisfaz a hipótese adicional **(H1)**. As referências utilizadas neste apêndice são (CIESIELSKI, 2004a) e (CIESIELSKI, 2000).

O primeiro resultado verifica a boa definição da função de impacto ϕ.

Proposição A.0.1. A função ϕ apresentada na Definição 2.1.7 está bem definida.

Demonstração. Dado $x \in X$, temos que se $\left(\bigcup_{t>0} \pi(x,t)\right) \cap M \neq \emptyset$, então existe $s > 0$ tal que

$$\pi(x,s) \in M \quad \text{e} \quad \pi(x,t) \notin M, \ \ t \in (0,s).$$

De fato, caso contrário, existe uma sequência $(s_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que $s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\pi(x,s_n) \in M, \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{A.1}$$

Como $M = \overline{M}$ e π é contínua, a condição (A.1) implica $x \in M$. Mas do item *iii*) da Definição 2.1.5, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que

$$\pi(x,(0,\varepsilon_x)) \cap M = \emptyset, \tag{A.2}$$

e como $s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_n \in (0,\varepsilon_x)$ para $n \geq n_0$, donde por (A.2), $\pi(x,s_n) \notin M$ para $n \geq n_0$, contradizendo (A.1). $\square$

O próximo resultado auxiliar nos diz que dado uma λ-seção (Definição 2.3.1), podemos obter outras seções diminuindo λ. Tal resultado foi introduzido por (CIESIELSKI, 2000).

Proposição A.0.2. Se S é λ-seção através de x então, dado $\eta \in (0,\lambda]$, S é η-seção em x.

Demonstração. Defina $L_\eta \doteq F(L_\lambda, \lambda - \eta)$. Então vale as condições da Definição 2.3.1, pois:

a) Como S é λ-seção através de x, temos que $S = \overline{S}$ e $x \in S$.

b) Como $L_\eta \doteq F(L_\lambda, \lambda - \eta) = \{z \in X : \pi(z, \lambda - \eta) \in L_\lambda\}$, π é contínua e $L_\lambda = \overline{L}_\lambda$, segue que $L_\eta = \overline{L}_\eta$. Ainda, pela Definição 2.1.3, temos

$$F(L_\eta, \eta) = \{z \in X : \pi(z, \eta) \in L_\eta\} =$$

$$= \{z \in X : \pi(\pi(z, \eta), \lambda - \eta) \in L_\lambda\} = \{z \in X : \pi(z, \lambda) \in L_\lambda\} = F(L_\lambda, \lambda) = S.$$

c) Primeiramente, mostremos que

$$F(L_\lambda, [0, \lambda - \eta] \cup [\lambda + \eta, 2\lambda]) = \overline{F(L_\lambda, [0, \lambda - \eta] \cup [\lambda + \eta, 2\lambda])}. \tag{A.3}$$

De fato, seja $(x_n) \subset F(L_\lambda, [0, \lambda - \eta] \cup [\lambda + \eta, 2\lambda])$ uma sequência tal que $x_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x^* \in X$. Pela Definição 2.1.3, $\pi(x_n, t_n) \in L_\lambda$ para algum $t_n \in [0, \lambda - \eta] \cup [\lambda + \eta, 2\lambda]$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $t_n \in [0, \lambda - \eta]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $[0, \lambda - \eta]$ é compacto, podemos assumir também que $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \tau \in [0, \lambda - \eta]$. Como $x_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x^*$, $L_\lambda = \overline{L}_\lambda$ e π é contínua, então $\pi(x^*, \tau) \in L_\lambda$, ou seja, $x^* \in F(L_\lambda, [0, \lambda - \eta] \cup [\lambda + \eta, 2\lambda])$.

Agora, tome $x \in S = F(L_\lambda, \lambda)$. Como $\lambda \notin [0, \lambda - \eta] \cup [\lambda + \eta, 2\lambda]$, segue do item *d*) da Definição 2.3.1 que $x \notin F(L_\lambda, [0, \lambda - \eta] \cup [\lambda + \eta, 2\lambda])$. Daí, por (A.3), existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$B(x, \varepsilon_1) \cap F(L_\lambda, [0, \lambda - \eta] \cup [\lambda + \eta, 2\lambda]) = \emptyset. \tag{A.4}$$

Também, pelo item *c*) da Definição 2.1.3, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que

$$B(x, \varepsilon_2) \subset F(L_\lambda, [0, 2\lambda]). \tag{A.5}$$

Portanto, de (A.4) e (A.5), existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_1) \cap B(x, \varepsilon_2)$. Consequentemente,

$$B(x, \varepsilon) \subset F(L_\eta, [0, 2\eta]),$$

pois dado $y \in B(x, \varepsilon)$, segue de (A.5) que existe $t \in [0, 2\lambda]$ tal que $\pi(y, t) \in L_\lambda$. Tome $s \doteq t + \eta - \lambda$. Então $s \in [0, 2\eta]$, já que (A.4) implica $\lambda - \eta < t < \lambda + \eta$. Logo,

$$\pi(\pi(y, t + \eta - \lambda), \lambda - \eta) = \pi(y, t) \in L_\lambda \implies y \in F(L_\eta, [0, 2\eta]).$$

d) Dados $\mu, \nu \in [0, 2\eta]$, temos $F(L_\eta, \cdot) = F(F(L_\lambda, \lambda - \eta), \cdot) = F(L_\lambda, \lambda - \eta + \cdot)$. Então

$$F(L_\eta, \mu) \cap F(L_\eta, \nu) = F(L_\lambda, \lambda - \eta + \mu) \cap F(L_\lambda, \lambda - \eta + \nu) = \emptyset,$$

pois S é uma λ-seção através de x.

$\square$

O próximo resultado, é uma importante consequência da Proposição A.0.2.

Proposição A.0.3. Se S é λ-seção através de x que satisfaz STC então, dado $\eta \in (0,\lambda]$, temos que S é η-seção através de x que satisfaz STC.

Demonstração. Pela Proposição A.0.2, S é η-seção através de x. Mais ainda, $S = F(L_\eta,[0,2\eta]) \cap M$. De fato, dado $y \in F(L_\eta,[0,2\eta]) \cap M$ temos que $\pi(y,t) \in L_\eta = F(L_\lambda, \lambda-\eta)$, para algum $t \in [0,2\eta]$. Logo, $\pi(y,t+\lambda-\eta) = \pi(\pi(y,t),\lambda-\eta) \in L_\lambda$. Portanto, $y \in F(L_\lambda,[0,2\lambda] \cap M = S$, já que $t+\lambda-\eta < 2\eta+\lambda-\eta = \lambda+\eta < 2\lambda$. Por outro lado, dado $y \in F(L_\eta,\eta) = S \subset M$ temos $y \in M$ e $\pi(y,\eta) \in L_\eta$. Portanto $y \in F(L_\eta,[0,2\eta]) \cap M$. □

Passaremos agora, a apresentar alguns resultados de continuidade da função impacto ϕ. Como é possível observar, a condição STC (Definição 2.3.2), tem papel fundamental nos resultados que seguem, o que exemplifica sua importância em sistemas impulsivos.

Teorema A.0.4. Se $x \in M$ então ϕ é semicontínua superiormente x.

Demonstração. Sejam $x \in X$, $(x_n) \subset X$ tais que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e $\varepsilon > 0$. Se $\phi(x) = \infty$, então

$$\limsup \phi(x_n) \leq \infty = \phi(x).$$

Se $\phi(x) < \infty$, segue da definição da função ϕ que $y \doteq \pi(x,\phi(x)) \in M$ e $\pi(x,(0,\phi(x)) \cap M = \emptyset$. Como $y \in M$ satisfaz STC, podemos tomar uma λ-seção S através de y. Sem perda de generalidade, considere $\varepsilon < \min\{\phi(x),\lambda\}$. Pela Proposição A.0.3, S é uma ε-seção através de y. Em particular, do item c) da Definição 2.3.1, existe $\mathscr{O} \in \tau_X$ tal que $y \in \mathscr{O} \subset F(L,[0,2\varepsilon])$, donde existe $\delta > 0$ tal que

$$\pi(B(x,\delta),\phi(x)) \subset \mathscr{O} \subset F(L,[0,2\varepsilon]), \tag{A.6}$$

já que π é contínua. Como $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, (A.6) implica que existe n_0 tal que $\pi(x_n,\phi(x)) \in \mathscr{O} \subset F(L,[0,2\varepsilon])$ se $n \geq n_0$. Segue da Definição 2.1.3, para $n \geq n_0$, que existe $t_n \in [0,2\varepsilon]$ tal que

$$\pi(\pi(x_n,\phi(x)+t_n-\varepsilon),\varepsilon) = \pi(x_n,\phi(x)+t_n) = \pi(\pi(x_n,\phi(x)),t_n) \in L, \tag{A.7}$$

ou seja, $\pi(x_n,\phi(x)-\varepsilon+t_n) \in F(L,\varepsilon) = S \subset M$, donde segue da definição da ϕ (Definição 2.1.7) e (A.7),

$$\phi(x_n) \leq \phi(x)+t_n-\varepsilon \leq \phi(x)+2\varepsilon-\varepsilon = \phi(x)+\varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Portanto, $\limsup \phi(x_n) \leq \phi(x)$. □

Teorema A.0.5. Se $x \notin M$ então ϕ é semicontínua inferiormente em x.

Demonstração. Seja $(x_n) \subset X$ uma sequência tal que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Suponha que $\phi(x) = \infty$ mas $T \doteq \liminf \phi(x_n) < \infty$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\phi(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T$. Como $M = \overline{M}$, obtemos $\pi(x_n,\phi(x_n)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x,T) \in M$. Logo, $\infty = \phi(x) \leq T < \infty$ o que é uma contradição. Portanto,

$$\liminf \phi(x_n) = \infty = \phi(x).$$

Agora, suponha que $\phi(x) < \infty$. Seja $(x_n) \subset X$ uma sequência tal que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ mas $\liminf \phi(x_n) = T < \phi(x)$. A menos de subsequência, vamos assumir que $\phi(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \notin M$ e $\phi(x_n) < \infty$ para $n \geq n_0$. Como $\pi(x_n, \phi(x_n)) \in M$, π contínua e $M = \overline{M}$, obtemos $\pi(x,T) \in M$ donde $x \in M$ se $T = 0$ ou $\phi(x) \leq T < \phi(x)$ se $T > 0$, o que é uma contradição. Assim, concluímos que

$$\liminf \phi(x_n) \geq \phi(x).$$

□

Como consequência dos Teoremas A.0.4 e A.0.5, temos que a condição STC implica na continuidade da função impacto ϕ, fora do conjunto impulsivo M.

Teorema A.0.6. A função ϕ é contínua em $X \setminus M$.

Demonstração. Seja $x \in X \setminus M$. Pelo Teorema A.0.4, ϕ é semicontínua superiormente em x e pelo Teorema A.0.5, ϕ é semicontínua inferiomente em x. □

No que segue, apresentamos um resultado de convergência da função ϕ, que é fundamental para tratar de estabilidade em sistemas impulsivos.

Teorema A.0.7. Sejam $x \in M$, S uma λ-seção através de x que satisfaz STC e $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset F(L,[0,2\lambda])$. Considere os conjuntos

$$H_1 \doteq F(L,(\lambda,2\lambda]) \cap B(x,\delta) \quad \text{e} \quad H_2 \doteq F(L,[0,\lambda]) \cap B(x,\delta).$$

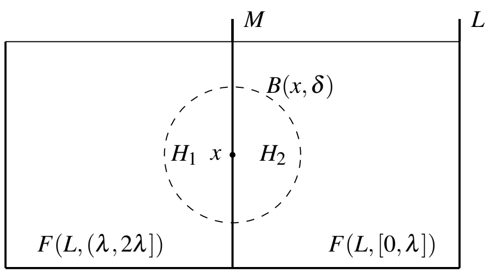

Figura 9 – $H_1 \doteq F(L,(\lambda,2\lambda)) \cap B(x,\delta)$ e $H_2 \doteq F(L,[0,\lambda)) \cap B(x,\delta)$.

As seguinte afirmações são válidas.

a) Dada uma sequência $(x_n) \subset H_1$ tal que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \implies \phi(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;

b) Dada uma sequência $(x_n) \subset H_2$ tal que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \implies \phi(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$.

Demonstração. a) Como $x_n \in H_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\pi(x_n, \lambda_n) \in L$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $\lambda_n \in (\lambda, 2\lambda]$. Assim,

$$\pi(\pi(x_n, \lambda_n - \lambda), \lambda) = \pi(x_n, \lambda_n) \in L,$$

donde $\pi(x_n, \lambda_n - \lambda) \in F(L, \lambda) = S = M \cap F(L, [0, 2\lambda]) \subset M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, já que x satisfaz STC. Consequentemente, da definição de ϕ (Definição 2.1.7),

$$0 < \phi(x_n) \leq \lambda_n - \lambda, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{A.8}$$

Como $\lambda_n \in [\lambda, 2\lambda]$, podemos assumir que $\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t \in [\lambda, 2\lambda]$. Como $\pi(x_n, \lambda_n) \in L = \overline{L}$ e π é contínua, segue que $\pi(x, t) \in L$. Assim, $x \in F(L, t) \cap S$. Como S é uma λ-seção através de x, concluímos que $t = \lambda$. Daí $\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ e, de (A.8), obtemos $\phi(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Seja $(x_n) \subset H_2$ uma sequência tal que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in M$. Note que $\pi(x, (0, \lambda]) \cap M = \emptyset$, pois x satisfaz STC, e $\pi(x, \lambda) \in L$. Como $(x_n) \subset H_2$, também temos

$$\pi(x_n, (0, T_n]) \cap M = \emptyset \quad \text{e} \quad \pi(x_n, T_n) \in L,$$

para algum $T_n \in [0, \lambda]$, $n \in \mathbb{N}$. Sejam $w = \pi(x, \lambda)$ e $w_n = \pi(x_n, T_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\phi(x) = \lambda + \phi(w) \quad \text{e} \quad \phi(x_n) = T_n + \phi(w_n), \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Afirmação: $T_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$.

De fato, como $[0, \lambda]$ é compacto, podemos assumir que $T_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T^* \in [0, \lambda]$. Segue da continuidade da π e do fato de L ser fechado que

$$\pi(x, T^*) \in L \implies x \in F(L, T^*).$$

Como $F(L, \lambda) = S$ e $x \in S$, obtemos $x \in F(L, T^*) \cap F(L, \lambda)$. Pela condição $d)$ da Definição 2.3.1, devemos ter $T^* = \lambda$. Isso prova a afirmação.

Assim, $T_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ e

$$w_n = \pi(x_n, T_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x, \lambda) = w \notin M.$$

Pelo Teorema A.0.6, obtemos $\phi(w_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(w)$. Portanto,

$$\phi(x_n) = T_n + \phi(w_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda + \phi(w) = \phi(x).$$

□

APÊNDICE

B

PROPRIEDADES DE CONVERGÊNCIA DE $\tilde{\pi}$

Tendo em vista a Definição 2.2.1, é razoável esperar que $\tilde{\pi}$ não seja contínua. No entanto, como apresentaremos aqui, existem resultados sobre a convergência da função $\tilde{\pi}$ que são úteis para o estudo da estabilidade. No que segue, assumiremos que o SI $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ satisfaz as hipótese adicionais **(H1)**, **(H2)** e **(H3)**. As referências utilizadas neste apêndice são (BONOTTO *et al.*, 2015) e (BONOTTO; GIMENES; SOUTO, 2016).

O primeiro resultado é a propriedade de concatenação - ou propriedade de semigrupo - para a função $\tilde{\pi}$.

Proposição B.0.1. Para quaisquer $x \in X$ e $t,s \in [0,T(x))$, com $t+s \in [0,T(x))$,

$$\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x,t),s) = \tilde{\pi}(x,t+s).$$

Demonstração. Seja $x \in X$. Se $\phi(x) = \infty$ então $\tilde{\pi} = \pi$, donde temos a tese, pela definição de $(X,\pi,\mathbb{R}_+)$ (Definição 2.1.1).

Se $\phi(x) < \infty$, tome $t,s \in [0,T(x))$ com $t+s \in [0,T(x))$. Defina $y \doteq \tilde{\pi}(x,t)$. Pela Definição 2.2.1, existem $k,l \in \mathbb{N}_0$ tais que

$$t = t_k(x) + t', \;\; 0 \leq t' < \phi(x_k^+) \;\text{ e }\; \tilde{\pi}(x,t) = \pi(x_k^+,t') \tag{B.1}$$

e

$$s = t_l(y) + s', \;\; 0 \leq s' < \phi(y_l^+) \;\text{ e }\; \tilde{\pi}(y,s) = \pi(y_l^+,s'), \tag{B.2}$$

sendo $t_0(x) = t_0(y) = 0$ e

$$t_j(x) \doteq \sum_{i=0}^{j-1} \phi(x_i^+) \;\text{ e }\; t_j(y) \doteq \sum_{i=0}^{j-1} \phi(y_i^+), \quad \text{para} \quad j \geq 1.$$

Note que (B.1) implica $\phi(y) = \phi(x_k^+) - t'$, donde $y_j^+ = x_{k+j}^+$ para todo $j \in \{1,\dots,l\}$. De fato, por definição, temos $y_1^+ = I(\pi(y,\phi(y)))$ e $x_{k+1}^+ = I(\pi(x_k^+,\phi(x_k^+)))$. Mas $\pi(y,\phi(y)) =$

$\pi(\pi(x_k^+,t'),\phi(x_k^+)-t') = \pi(x_k^+,\phi(x_k^+))$ donde temos $y_1^+ = x_{k+1}^+$. Supondo, para $j<l$, vale $y_j^+ = x_{k+j}^+$ então

$$y_l^+ = I(\pi(y_{l-1}^+,\phi(y_{l-1}^+))) = I(\pi(x_{k+l-1}^+,\phi(x_{k+l-1}^+))) = x_{k+l}^+.$$

Logo, concluímos

$$t_l(y) = \sum_{i=0}^{l-1}\phi(y_i^+) = \sum_{j=k}^{k+l-1}\phi(x_j^+) - t'.$$

Consequentemente,

$$t+s = t_k(x)+t'+t_l(y)+s' = t_{k+l}(x)+s', \tag{B.3}$$

com $0 \le s' < \phi(y_l^+) = \phi(x_{k+l}^+)$. Isso mostra que

$$\tilde{\pi}(x,t+s) = \pi(x_{k+l}^+,s'). \tag{B.4}$$

Assim, (B.1), (B.2), (B.3) e (B.4) implicam

$$\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x,t),s) = \tilde{\pi}(y,s) = \pi(y_l^+,s') = \pi(x_{k+l}^+,s') = \tilde{\pi}(x,t+s).$$

□

A partir de agora, investigaremos a convergência da função $\tilde{\pi}$. Como dissemos anteriormente, é esperado que tal função não seja contínua, mas, em alguns casos, é possível fazer uma correção na variável temporal, e obter certos tipos de convergência.

Proposição B.0.2. Sejam $x \in X\setminus M$, $(x_n) \subset X$ e $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$ tais que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e $\alpha_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Então,

$$\tilde{\pi}(x_n,\alpha_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Demonstração. Se $\phi(x)=\infty$, o resultado é válido pela continuidade da π. Suponha $\phi(x)<\infty$. Do Teorema A.0.6, ϕ é contínua em $X\setminus M$. Por esse motivo, como $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \notin M$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\phi(x)}{2} < \phi(x_n) < \frac{3\phi(x)}{2},$$

para todo $n \ge n_0$. Agora, como $\alpha_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, podemos assumir que $0 \le \alpha_n < \phi(x_n)$, para $n \ge n_0$, pois $\phi(x_n) > \frac{\phi(x)}{2} > 0$. Da continuidade de π, obtemos

$$\tilde{\pi}(x_n,\alpha_n) = \pi(x_n,\alpha_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x,0) = x.$$

□

Proposição B.0.3. Sejam $x \in X\setminus M$ e $(x_n) \subset X$ tais que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Então, dado $t \in \mathbb{R}_+$, existe $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\varepsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\tilde{\pi}(x_n,t+\varepsilon_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(x,t).$$

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que $\phi(x) = +\infty$. Segue do Teorema A.0.6 que ϕ é contínua em $X \setminus M$, donde, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(x_n) > t$, para todo $n \geq n_0$. Logo,

$$\tilde{\pi}(x_n,t) = \pi(x_n,t) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x,t) = \tilde{\pi}(x,t).$$

Neste caso, bastar tomar $\varepsilon_n \doteq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, suponhamos que $\phi(x) < +\infty$. Assim, existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $t \in [t_k(x), t_{k+1}(x))$, donde

$$\tilde{\pi}(x,t) = \pi(x_k^+,t'), \;\; t = t_k(x) + t', \;\; 0 \leq t' < \phi(x_k^+), \tag{B.5}$$

em que $t_0(x) \doteq 0$ e $t_k(x) \doteq \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \phi(x_j^+)$ se $k \geq 1$.

Da continuidade de π em $X \times \mathbb{R}_+$, ϕ em $X \setminus M$ (Teorema A.0.6), I em M e $M \cap I(M) = \emptyset$, obtemos $\phi(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$ e, para $j = 1, \ldots, k$,

$$\phi((x_n)_j^+) = \phi(I(\pi((x_n)_{j-1}^+, \phi((x_n)_{j-1}^+))) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(I(\pi(x_{j-1}^+, \phi(x_{j-1}^+))) = \phi(x_j^+). \tag{B.6}$$

Daí,

$$t_k(x_n) = \sum_{j=0}^{k-1} \phi((x_n)_j^+) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t_k(x). \tag{B.7}$$

Defina $\varepsilon_n \doteq t_k(x_n) - t_k(x) + |t_k(x_n) - t_k(x)|$, $n \in \mathbb{N}$. De (B.7), tem-se $\varepsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Agora, de (B.5) e (B.6), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$,

$$t' < \phi((x_n)_k^+). \tag{B.8}$$

De (B.5), (B.8) e da definição de ε_n, para $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(x_n, t+\varepsilon_n) &= \tilde{\pi}(x_n, t_k(x) + t' + t_k(x_n) - t_k(x) + |t_k(x_n) - t_k(x)|) \\ &= \tilde{\pi}(x_n, t' + t_k(x_n) + |t_k(x_n) - t_k(x)|) \\ &= \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x_n, t' + t_k(x_n)), |t_k(x_n) - t_k(x)|) \\ &= \tilde{\pi}(\pi((x_n)_k^+, t'), |t_k(x_n) - t_k(x)|). \end{aligned} \tag{B.9}$$

Como $\pi(x_k^+, t') \notin M$, pois $I(M) \cap M = \emptyset$, segue de (B.5) que

$$\pi((x_n)_k^+, t') \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x_k^+, t') = \tilde{\pi}(x,t).$$

Assim, dessa última convergência, juntamente com (B.9) e a Proposição B.0.2, obtemos

$$\tilde{\pi}(x_n, t+\varepsilon_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(\pi(x_k^+, t'), 0) = \tilde{\pi}(x,t).$$

□

Observação B.0.4. Sejam $x \in M$, S uma λ-seção através de x que satisfaz STC e $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset F(L,[0,2\lambda])$. Considere o conjunto $H_2 \doteq F(L,[0,\lambda]) \cap B(x,\delta)$. Sejam $t \in \mathbb{R}_+$ e $(x_n) \subset H_2$ uma sequência tal que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Analogamente a prova da Proposição B.0.3, podemos obter uma sequência $(\beta_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\beta_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\tilde{\pi}(x_n, t+\beta_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(x,t).$$

Agora, veremos que dado $x \in X \setminus M$, a função $\tilde{\pi}(x,\cdot)$ é descontínua no máximo, em um conjunto enumerável, como sugere a definição de órbita impulsiva (Definição 2.2.1).

Proposição B.0.5. Sejam $x \in X \setminus M$, $t \in \mathbb{R}_+$, $(x_n) \subset X$ e $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}_+$, tais que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, $t \neq \sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_i^+)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e $\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t$. Então,

$$\tilde{\pi}(x_n,\lambda_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(x,t).$$

Demonstração. Se $t=0$, o resultado segue pela Proposição B.0.2. Se $t>0$, seja $k \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$t_k(x) < t < t_{k+1}(x),$$

em que $t_0(x)=0$ e $t_k(x)=\sum_{i=0}^{k-1}\phi(x_i^+)$ se $k \geq 1$. Como fizemos em (B.6), segue que $\phi((x_n)_j^+) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x_j^+)$, para todo $j=0,1,2,\dots,k$. Como $\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n \in (t_k(x_n), t_{k+1}(x_n))$, para todo $n \geq n_0$. Como $t_k(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t_k(x)$, concluímos

$$\tilde{\pi}(x_n,\lambda_n) = \pi((x_n)_k^+, \lambda_n - t_k(x_n)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(x_k^+, t-t_k(x)) = \tilde{\pi}(x,t).$$

□

Analogamente a Proposição B.0.3, o próximo resultado é mais um tipo de correção que é possível ser feito na variável temporal, de maneira que se obtêm convergência.

Proposição B.0.6. Sejam $x \in X \setminus M$, $t \in \mathbb{R}_+$, $(x_n) \subset X$ e $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}_+$, tais que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, $\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t$ e $\lambda_n \geq t$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, existe $(\beta_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\beta_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\tilde{\pi}(x_n, \lambda_n + \beta_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(x,t).$$

Demonstração. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \geq t$, e $\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t$, podemos escrever $\lambda_n = t + \alpha_n$, com $\alpha_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Pela Proposição B.0.3, existe uma sequência $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\varepsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\tilde{\pi}(x_n, \lambda_n - \alpha_n + \varepsilon_n) = \tilde{\pi}(x_n, t+\varepsilon_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(x,t) \notin M, \tag{B.10}$$

pois $I(M) \cap M = \emptyset$. De (B.10) e $|\alpha_n| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, segue da Proposição B.0.2 que

$$\tilde{\pi}(x_n, \lambda_n + |\alpha_n| - \alpha_n + \varepsilon_n) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x_n, \lambda_n - \alpha_n + \varepsilon_n), |\alpha_n|) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(x,t).$$

Defina $\beta_n \doteq |\alpha_n| - \alpha_n + \varepsilon_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. □

Proposição B.0.7. Sejam $x \in X$, $t \in \mathbb{R}_+$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência tais que $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t$ e $t_n \geq t$, $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\tilde{\pi}(x,t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(x,t).$$

Demonstração. Se $\phi(x) = \infty$, o resultado segue da continuidade da π. Suponhamos que $\phi(x) < \infty$. Então, existe $k \in \mathbb{N}_0$, tal que $t_k(x) \leq t < t_{k+1}(x)$, em que $t_0(x) = 0$ e $t_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_i^+)$ se $k \geq 1$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $t_n \in [t_k(x), t_{k+1}(x))$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue da definição de órbita impulsiva (Definição 2.2.1) e da continuidade da π,

$$\tilde{\pi}(x,t_n) = \pi\left(x_k^+, t_n - \sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_i^+)\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi\left(x_k^+, t - \sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_i^+)\right) = \tilde{\pi}(x,t).$$

□

APÊNDICE

C

CONJUNTOS LIMITE E PROPRIEDADES DE INVARIÂNCIA

Neste apêndice, apresentaremos resultados sobre conjuntos limites e invariância. Para tanto, assumiremos que o SI $(X,\pi,\mathbb{R}_+,M,I)$ satisfaça as hipóteses adicionais (**H1**), (**H2**) e (**H3**). As referências utilizadas nesse apêndice são (BONOTTO; DEMUNER, 2013), (BONOTTO; GIMENES; SOUTO, 2016), (BONOTTO; SOUTO, 2019) e (BONOTTO; FERREIRA, 2015).

O primeiro resultado neste sentido é dar uma caracterização via sequências para o conjunto ômega limite e o conjunto prolongado, das respectivas Definições 2.4.3 e 2.4.4.

Proposição C.0.1. Sejam $A \subset X$ e $y \in X$.

a) $y \in \tilde{L}^+(A)$ se, e somente se, existem sequências $(x_n) \subset A$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$, tais que

$$t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x_n,t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y;$$

b) $y \in \tilde{D}^+(A)$ se, e somente se, existem sequências $(x_n) \subset X$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$, tais que

$$d(x_n,A) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x_n,t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y.$$

Demonstração. a) Se $y \in \tilde{L}^+(A)$, da Definição 2.4.3, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $y \in \overline{\bigcup_{\tau\geq n} \tilde{\pi}(A,\tau)}$.

Assim, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in \bigcup_{\tau\geq n} \tilde{\pi}(A,\tau)$ com

$$d(y_n,y) < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad y_n = \tilde{\pi}(x_n,\tau_n), \;\; x_n \in A, \;\; \tau_n \geq n.$$

Por outro lado, dado $t \geq 0$, como $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t$ para todo $n \geq n_0$. Daí, $\tilde{\pi}(x_n,t_n) \in \bigcup_{\tau\geq t} \tilde{\pi}(A,\tau)$ para todo $n \geq n_0$. Logo, $y \in \tilde{L}^+(A)$.

b) Se $y \in \tilde{D}^+(A)$, da Definição 2.4.4, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $y \in \overline{\bigcup_{t \geq 0} \tilde{\pi}\left(B\left(A, \frac{1}{n}\right), t\right)}$. Segue que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in \bigcup_{t \geq 0} \tilde{\pi}\left(B\left(A, \frac{1}{n}\right), t\right)$ tal que

$$d(y_n, y) < \frac{1}{n}, \ \ y_n = \tilde{\pi}(x_n, t_n), \ \ x_n \in A, \ \ d(x_n, A) < \frac{1}{n} \ \ \text{e} \ \ t_n \geq 0.$$

Por outro lado, dados $\varepsilon > 0$ e $t \geq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(A, \varepsilon)$, para todo $n \geq n_0$. Assim $\tilde{\pi}(x_n, t_n) \in \bigcup_{t \geq 0} \tilde{\pi}(B(A, \varepsilon), t)$, para $n \geq n_0$. Portanto, $y \in \tilde{D}^+(A)$.

□

No caso de conjuntos relativamente compactos, podemos caracterizar o conjunto prolongado, conhecendo o conjunto prolongado dos elementos de seu fecho.

Proposição C.0.2. Seja $A \subset X$ com $\overline{A}$ compacto. Então,

$$\tilde{D}^+(A) = \bigcup_{a \in \overline{A}} \tilde{D}^+(a).$$

Demonstração. Seja $y \in \tilde{D}^+(\overline{A})$. Pela Proposição C.0.1, existem sequências $(x_n) \subset X$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ tais que $d(x_n, \overline{A}) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\tilde{\pi}(x_n, t_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y$. Da definição de $d(x_n, \overline{A})$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in \overline{A}$ tal que

$$d(x_n, a_n) < \frac{1}{n} + d(x_n, \overline{A}). \tag{C.1}$$

Como $\overline{A}$ é compacto, a menos de subsequência, podemos assumir que $a_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a \in \overline{A}$. De (C.1) vem

$$d(x_n, a) < d(x_n, a_n) + d(a_n, a) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donde pela Proposição C.0.1, $y \in \tilde{D}^+(a)$, $a \in \overline{A}$.

Por outro lado, pela Proposição C.0.1, temos $\bigcup_{a \in \overline{A}} \tilde{D}^+(a) \subset \tilde{D}^+(\overline{A})$. Como $d(\cdot, A) = d(\cdot, \overline{A})$, temos $\tilde{D}^+(A) = \tilde{D}^+(\overline{A})$. Portanto, $\bigcup_{a \in \overline{A}} \tilde{D}^+(a) \subset \tilde{D}^+(\overline{A}) = \tilde{D}^+(A)$. □

Do Exemplo 2.3.3, sabemos que para sistemas dinâmicos sem impulsos, se $A \subset X$ é invariante então $\overline{A}$ o é, o que não ocorre em sistemas impulsivos. No entanto, o próximo resultado nos diz o que aquele exemplo sugere: a invariância de $\overline{A}$ em sistemas impulsivos, supondo $A \subset X$ invariante, só pode ser destruída por elementos do conjunto impulsivo M.

Proposição C.0.3. Se $A \subset X$ é $\tilde{\pi}$-invariante, então $\overline{A} \setminus M$ é $\tilde{\pi}$-invariante.

Demonstração. Sejam $a \in \overline{A} \setminus M$ e $t \geq 0$. Então existe uma sequência $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$. Pela Proposição B.0.3, existe uma sequência $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\varepsilon_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$A \ni \tilde{\pi}(x_n, t + \varepsilon_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(a, t),$$

já que A é $\tilde{\pi}$-invariante. Portanto, usando o fato de que $I(M) \cap M = \emptyset$, segue que $\tilde{\pi}(a,t) \in \overline{A} \setminus M$. $\square$

Proposição C.0.4. Os conjuntos $\tilde{L}^+(A) \setminus M$ e $\tilde{D}^+(A) \setminus M$ são $\tilde{\pi}$-invariantes.

Demonstração. Sejam $y \in \tilde{L}^+(A) \setminus M$ e $t \geq 0$. Pela Proposição C.0.1, existem sequências $(x_n) \subset A$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ tais que $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\tilde{\pi}(x_n,t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Como $y \notin M$, segue da Proposição B.0.3, que existe $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\varepsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\tilde{\pi}(x_n, t_n + t + \varepsilon_n) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x_n,t_n), t + \varepsilon_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(y,t). \tag{C.2}$$

Como $t_n + t + \varepsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $(x_n) \subset A$, pela Proposição C.0.1 e (C.2) implicam $\tilde{\pi}(y,t) \in \tilde{L}^+(A)$. Como $I(M) \cap M = \emptyset$, segue que $\tilde{\pi}(y,t) \in \tilde{L}^+(A) \setminus M$. Portanto, $\tilde{L}^+(A) \setminus M$ é $\tilde{\pi}$-invariante.

Sejam $y \in \tilde{D}^+(A) \setminus M$ e $t \geq 0$. Pela Proposição C.0.1, existem sequências $(x_n) \subset A$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ tais que $d(x_n, A) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\tilde{\pi}(x_n,t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Como $y \notin M$, segue da Proposição B.0.3, que existe $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\varepsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\tilde{\pi}(x_n, t_n + t + \varepsilon_n) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x_n,t_n), t + \varepsilon_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(y,t). \tag{C.3}$$

Como $(t_n + t + \varepsilon_n) \subset \mathbb{R}_+$ e $(x_n) \subset A$, a Proposição C.0.1 e a condição (C.3) implicam $\tilde{\pi}(y,t) \in \tilde{D}^+(A)$. Como $I(M) \cap M = \emptyset$, segue que $\tilde{\pi}(y,t) \in \tilde{D}^+(A) \setminus M$. Portanto, $\tilde{D}^+(A) \setminus M$ é $\tilde{\pi}$-invariante. $\square$

O próximo resultado nos diz que se o conjunto ômega limite de um ponto é não vázio, então o é tirando os pontos do conjunto impulsivo M. Em particular, tal resultado é uma aplicação do estudo da continuidade da função impacto, que se expressa neste trabalho, no Teorema A.0.7.

Proposição C.0.5. Se $\tilde{L}^+(x) \neq \emptyset$, $x \in X$, então $\tilde{L}^+(x) \setminus M \neq \emptyset$.

Demonstração. Se $\tilde{L}^+(x) \cap M = \emptyset$, então o resultado está provado. Por outro lado, suponha que exista $y \in \tilde{L}^+(x) \cap M$. Como $y \in M$ satisfaz STC, existe um λ-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ através de y. Pela propriedade de tubo existe $\eta > 0$ tal que $B(y, \eta) \subset F(L, [0, 2\lambda])$. Defina

$$H_1 \doteq B(y,\eta) \cap F(L, (\lambda, 2\lambda]) \quad \text{e} \quad H_2 \doteq B(y,\eta) \cap F(L, [0, \lambda]).$$

Pela Proposição C.0.1, existe uma sequência $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\tilde{\pi}(x,t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Se, a menos de subsequência, $\tilde{\pi}(x,t_n) \in H_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então, pelo Teorema A.0.7, $\phi(\tilde{\pi}(x,t_n)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donde

$$\tilde{\pi}(x, t_n + \phi(\tilde{\pi}(x,t_n))) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x,t_n), \phi(\tilde{\pi}(x,t_n))) = I(\pi(\tilde{\pi}(x,t_n), \phi(\tilde{\pi}(x,t_n)))) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(y).$$

Como $t_n + \phi(\tilde{\pi}(x,t_n)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $M \cap I(M) = \emptyset$, segue pela Proposição C.0.1 que $I(y) \in \tilde{L}^+(x) \setminus M$.

Se, a menos de subsequência, $\tilde{\pi}(x,t_n) \in H_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, do Teorema A.0.7, obtemos $\phi(\tilde{\pi}(x,t_n)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(y)$. Também, como $y \in M$, existe $\varepsilon_y > 0$ tal que $\pi(y,(0,\varepsilon_y]) \cap M = \emptyset$ (Definição 2.1.5) e $\varepsilon_y < \phi(y)$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_y < \phi(\tilde{\pi}(x,t_n))$, para todo $n \geq n_0$. Então

$$\tilde{\pi}(x,t_n+\varepsilon_y) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x,t_n),\varepsilon_y) = \pi(\tilde{\pi}(x,t_n),\varepsilon_y) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(y,\varepsilon_y),$$

já que π é contínua, e assim, como $t_n + \varepsilon_y \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$, da Proposição C.0.1, $\pi(y,\varepsilon_y) \in \tilde{L}^+(x) \setminus M$. □

O próximo resultado lida com a invariância da região de atração.

Proposição C.0.6. Dado $A \subset X$, os conjuntos $\tilde{P}(A)$ e $\overline{\tilde{P}(A)} \setminus M$ são $\tilde{\pi}$-invariantes.

Demonstração. Sejam $x \in \tilde{P}(A)$ e $t \geq 0$. Então, pela Definição 2.4.5, $\emptyset \neq \tilde{L}^+(x) \subset \overline{A}$. Como consequência da Proposição C.0.1, obtemos $\tilde{L}^+(x) = \tilde{L}^+(\tilde{\pi}(x,t))$, donde $\tilde{\pi}(x,t) \in \tilde{P}(A)$, e este é $\tilde{\pi}$-invariante. Mas assim, da Proposição C.0.3, $\overline{\tilde{P}(A)} \setminus M$ é $\tilde{\pi}$-invariante. □

Para finalizar este apêndice, apresentamos uma tipo de Teorema da Alfândega para sistemas impulsivos, sob controle na função impulso.

Proposição C.0.7. Sejam $\mathscr{O} \in \tau_X$, $x \in \mathscr{O}$ e $t_0 > 0$, tais que $\tilde{\pi}(x,t_0) \notin \mathscr{O}$. Suponha que $I(\overline{\mathscr{O}} \cap M) \subset \mathscr{O}$. Então, existe $\tau \in (0,t_0]$ tal que,

$$\tilde{\pi}(x,[0,\tau)) \subset \mathscr{O} \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x,\tau) \in \partial\mathscr{O} \setminus M.$$

Demonstração. Defina $\tau \doteq \inf\{t > 0 : \tilde{\pi}(x,t) \notin \mathscr{O}\}$. Como $\tilde{\pi}(x,t_0) \notin \mathscr{O}$, $t_0 > 0$, τ está bem definido. Como $\mathscr{O} \in \tau_X$ e π contínua, existe $\varepsilon \in (0,\phi(x))$ tal que

$$\tilde{\pi}(x,[0,\varepsilon)) = \pi(x,[0,\varepsilon)) \subset \mathscr{O}. \tag{C.4}$$

Assim $\tau > 0$, pois do contrário existiria $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\tilde{\pi}(x,t_n) \notin \mathscr{O}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n < \varepsilon$, para $n \geq n_0$, donde temos uma contradição com (C.4).

Também, devemos ter $\tau \neq \sum_{i=0}^{k} \phi(x_i^+)$, para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Do contrário, se $\tau = \sum_{i=0}^{k} \phi(x_i^+)$ para algum $k \in \mathbb{N}_0$, então $\tilde{\pi}(x,\tau) = \tilde{\pi}\left(x, \sum_{i=0}^{k} \phi(x_i^+)\right) = x_{k+1}^+$ e, da minimalidade de τ, segue que

$$\pi(x_k^+,(0,\phi(x_k^+)) \subset \mathscr{O}. \tag{C.5}$$

Daí, $x_{k+1} = \pi(x_k^+,\phi(x_k^+)) \in \overline{\mathscr{O}} \cap M$. Como $I(\overline{\mathscr{O}} \cap M) \subset \mathscr{O}$, segue que $x_{k+1}^+ = I(x_{k+1}) \in \mathscr{O}$ e isso contradiz a definição de τ.

Portanto, podemos tomar $k \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\eta_1 \doteq \sum_{i=0}^{k} \phi(x_i^+) < \tau < \sum_{i=0}^{k+1} \phi(x_i^+) \doteq \eta_2.$$

Logo, pela definição de τ, obtemos

$$\tilde{\pi}(x,[0,\eta_1)) \subset \mathscr{O}, \;\; \tilde{\pi}(x,[\eta_1,\tau)) = \pi(x_k^+,[0,\tau-\eta_1)) \subset \mathscr{O} \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x,\tau) = \pi(x_k^+,\tau-\eta_1) \notin \mathscr{O}. \tag{C.6}$$

Logo (C.6) implica $\tilde{\pi}(x,[0,\tau)) \subset \mathscr{O}$, e como $\pi(x_k^+,\cdot)$ é contínua em $[0,\tau-\eta_1]$, do Teorema da Alfândega,

$$\tilde{\pi}(x,\tau) = \pi(x_k^+,\tau-\eta_1) \in \partial\mathscr{O}.$$

Por fim, como $M \cap I(M) = \emptyset$ segue que $\tilde{\pi}(x,\tau) \in \partial\mathscr{O} \setminus M$. $\square$

REFERÊNCIAS

BHATIA, N. P.; SZEGÖ, G. P. Stability theory of dynamical systems. In: . [S.l.: s.n.], 1970. Citado nas páginas 19, 26, 27, 31, 42 e 46.

BONOTTO, E. M.; BORTOLAN, M. C.; CARVALHO, A. N.; CZAJA, R. Global attractors for impulsive dynamical systems: a precompact approach. **Journal of Differential Equations**, v. 259, n. 7, p. 2602–2625, 2015. ISSN 0022-0396. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039615001813>. Citado nas páginas 63 e 89.

BONOTTO, E. M.; DEMUNER, D. P. Autonomous dissipative semidynamical systems with impulses. **Topological Methods in Nonlinear Analysis**, v. 41, 03 2013. Citado nas páginas 19 e 95.

____. Stability and forward attractors for non-autonomous impulsive semidynamical systems. **Communications on Pure & Applied Analysis**, v. 19, p. 1979–1996, 01 2020. Citado na página 19.

BONOTTO, E. M.; FERREIRA, J. d. C. Dissipativity in impulsive systems via lyapunov functions. **Mathematische Nachrichten**, v. 289, 08 2015. Citado nas páginas 19 e 95.

BONOTTO, E. M.; GIMENES, L.; SOUTO, G. M. Asymptotically almost periodic motions in impulsive semidynamical systems. **Topological Methods in Nonlinear Analysis**, v. 49, 10 2016. Citado nas páginas 19, 89 e 95.

BONOTTO, E. M.; JR, N. G. G. Lyapunov stability of closed sets in impulsive semidynamical systems. **Electronic Journal of Differential Equations**, v. 2010, 06 2010. Citado nas páginas 19, 20 e 47.

BONOTTO, E. M.; SOUTO, G. M. On the lyapunov stability theory for impulsive dynamical systems. **Topological Methods in Nonlinear Analysis**, v. 53, p. 1, 02 2019. Citado nas páginas 19, 20, 21, 29, 31, 37, 38, 47, 63 e 95.

CIESIELSKI, K. Sections in semidynamical systems. **Bulletin of The Polish Academy of Sciences Mathematics**, v. 40, p. 297–307, 01 2000. Citado nas páginas 19 e 83.

____. On semicontinuity in impulsive dynamical systems. **Bulletin of The Polish Academy of Sciences Mathematics**, v. 52, p. 71–80, 01 2004. Citado nas páginas 19, 20 e 83.

____. On stability in impulsive dynamical systems. **Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics**, v. 84, p. 81–91, 01 2004. Citado nas páginas 24, 27, 31 e 42.

HALE, J. **Ordinary Differential Equations**. Wiley, 1969. (Pure and applied mathematics : a Wiley-Interscience series of texts, monographs, and tracts). ISBN 9780471340904. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=2jOxAAAAIAAJ>. Citado nas páginas 20 e 47.

SOTOMAYOR, T. J. M. **Equacoes Diferenciais Ordinarias**. Livraria da Física, 2011. (textos universitários do IME). ISBN 9788578611187. Disponível em: <https://livrariadafisica.com.br>. Citado nas páginas 19 e 31.

ICMC USP
SÃO CARLOS