UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Harmônicos esféricos e funções definidas positivas

Jose Raphael Choquehuanca Palomino

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Jose Raphael Choquehuanca Palomino

Harmônicos esféricos e funções definidas positivas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Ana Paula Peron

USP – São Carlos
Março de 2022

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

P181h Palomino, Jose Raphael Choquehuanca
Harmônicos esféricos e funções definidas positivas / Jose Raphael Choquehuanca Palomino; orientador Ana Paula Peron. -- São Carlos, 2022.
84 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Espaços Harmônicos Esféricos. 2. Polinômios de Gegenbauer. 3. Funções Definidas Positivas. 4. Esferas. 5. Operadores Integrais e Diferenciais. I. Peron, Ana Paula, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Jose Raphael Choquehuanca Palomino

Spherical harmonic spaces and positive definite functions

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Ana Paula Peron

USP – São Carlos
March 2022

Este trabalho é dedicado aos meus
pais e a quem deles cuidaram.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me permitido viajar ao Brasil e conservar a minha saúde. Agradeço ao meu pai Buenaventura e à minha mãe Guadalupe por terem me apoiado incondicionalmente na viagem e estadia no Brasil, como também aos professores do ICMC com quem tive a oportunidade de aprender. Em especial, agradeço à minha orientadora Ana Paula Peron por ter me dirigido amável e sabiamente na dissertação. Aos meus caros amigos do laboratório e estudo: Carlos, Alex, Vinícius, Alexandre e Mariana, por terem compartilhado momentos simples de amizade, estudo, e ações que me influenciaram para o bem. Sou grato também à amizade sincera de Rita, Victor e Juan Pablo. Agradeço também a confiança que me brindaram o CNPq no meu projeto.

"A verdadeira grandeza do homem é medida pela força dos sentimentos que ele domina, e não pelos sentimentos que o dominam."

(Ellen G. White)

RESUMO

CHOQUEHUANCA, J. R. **Harmônicos esféricos e funções definidas positivas**. 2022. 84 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

Estudamos sistematicamente os espaços harmônicos esféricos, os quais fornecem uma decomposição ortogonal para os espaços de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^d)$ das funções de quadrado integrável sobre a esfera unitária real d-dimensional $\mathbb{S}^d$. Também estudamos propriedades dos polinômios de Legendre associados ao parâmetro d e de funções definidas positivas, com enfoque especial nas funções definidas positivas em $\mathbb{S}^d$ ($d \geq 2$). Estas funções possuem uma expansão em série de polinômios de Gegenbauer associados ao parâmetro $(d-1)/2$, os quais são múltiplos dos polinômios de Legendre associados a $(d+1)$, e surgem em diversas aplicações, como por exemplo em geoestatística e em problemas de interpolação. Como uma aplicação, apresentamos o operador integral e o operador diferencial, do tipo Montée e Descente, que quando aplicados em uma função definida positiva em $\mathbb{S}^d$, preservam a propriedade de positividade definida alterando porém a dimensão da esfera para $d+2$ e $d-2$, respectivamente.

Palavras-chave: Espaços Harmônicos Esféricos, Polinômios de Gegenbauer, Funções Definidas Positivas, Esferas, Operadores Integrais e Diferenciais.

ABSTRACT

CHOQUEHUANCA, J. R. **Spherical harmonic spaces and positive definite functions**. 2022. 84 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

We systematically study the spherical harmonic spaces, which provide an orthogonal decomposition for the Hilbert spaces $L^2(\mathbb{S}^d)$ of the square integrable functions defined in the unit real d-dimensional sphere $\mathbb{S}^d$. We also study some properties of the Legendre polynomials associated to the parameter d and of positive definite functions, with emphasis on the positive definite functions on $\mathbb{S}^d$ ($d \geq 2$). These functions can be expanded in series of Gegenbauer polynomials associated to the parameter $(d-1)/2$, which are multiples of the Legendre polynomials associated to $(d+1)$, and arise in several application, for instance in geostatistics and in interpolation problems. As an application, we present integral and differential operators, called of Montée and Descente, which, applied to a positive definite function on $\mathbb{S}^d$, preserve the positive definiteness property but changing the dimension of the sphere to $d+2$ or $d-2$, respectively.

Keywords: Spherical Harmonic Spaces, Gegenbauer Polynomials, Positive Definite Functions, Spheres, Integral and Differential Operators.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Em matemática como também nas ciências físicas, os harmônicos esféricos são funções especiais definidas na superfície de uma esfera. Eles são frequentemente empregados na resolução de equações diferenciais parciais em muitos campos científicos e surgem em diversas aplicações tais como em física atômica, eletrostática e mecânica quântica. Também são de grande importância na Teoria do Potencial e na Análise Esférica onde, por exemplo, harmônicos esféricos associados à esferas foram usados para obter a completa caracterização das funções zonais contínuas estritamente definidas positivas sobre esferas reais (CHEN; MENEGATTO; SUN, 2003). O Teorema da Adição para polinômios de Legendre teve grande importância no método utilizado por Chen, Menegatto e Sun para a resolução deste problema.

Funções definidas positivas e suas generalizações surgem em diversas áreas e são objeto de muita pesquisa desde a década de 1930. Tais funções aparecem, por exemplo, em Teoria da Aproximação, Análise de Fourier, Teoria de Probabilidades, Teoria de Operadores, Equações Integrais, Problemas de Valores de Contorno para Equações Diferenciais Parciais e Estatística Espacial. A teoria de funções definidas positivas e algumas de suas aplicações podem ser encontradas em (BERG, 2008; BERG; CHRISTENSEN; RESSEL, 1984; FASSHAUER, 2011; NARCOWICH, 1998; SASVÁRI, 1994). Na primeira metade do século XX, a teoria das funções definidas positivas se desenvolveu com a contribuição de vários matemáticos importantes, como J. Mercer, que utilizou tais funções na teoria de equações integrais, I. J. Schoenberg, G. Szegö e S. Bergman. Tais funções entraram como importante ferramenta no estudo de Análise Harmônica e podem ser encontradas em artigos por Caratheodory, Herglotz, Bernstein and Matthias, culminando nos bem conhecidos Teorema de Bochner de 1933 para funções definidas positivas em espaços Euclideanos (BOCHNER, 1933) e Teorema de Schoenberg de 1942 para funções definidas positivas em esferas reais (SCHOENBERG, 1942).

Vale destacar que em muitas áreas de atuação, tais como Geofísica, Geoestatística, Metereologia, Oceanografia, a superfície terrestre é o ambiente onde muitos problemas estão formulados (FASSHAUER; SCHUMAKER, 1998; FREEDEN; MICHEL; NUTZ, 2002), a qual é modelada matematicamente pela esfera $\mathbb{S}^2$ do espaço Euclideano $\mathbb{R}^3$.

Em Geoestatística ou Estatística, funções definidas positivas aparecem com o nome de covariância e funções definidas positivas na esfera real d-dimensional $\mathbb{S}^d$ do espaço Euclideano $\mathbb{R}^{d+1}$ são funções de autocorrelação de campos Gaussianos isotrópicos em $\mathbb{S}^d$ e então conhecer funções de covariância muitas vezes torna-se fundamental (EMERY; ARROYO; MERY, 2021). Também, funções definidas positivas no produto $\mathbb{S}^d \times \mathbb{R}$ ou no produto $\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^k$ $(d, k \geq 1)$ são diversas vezes consideradas, visto que a natureza de muitos problemas práticos envolve espaço-tempo ou espaço-espaço, os quais são modelados matematicamente pelos espaços $\mathbb{S}^d \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^k$, respectivamente (BINGHAM; SYMONS, 2017; PORCU; BEVILACQUA; GENTON, 2016). Na verdade funções definidas positivas que são estritamente positivas definidas podem fornecer soluções únicas para problemas de interesse direto da sociedade tais como o de melhorar os sistemas de previsão de desastres naturais como terremotos, tsunamis e furações. Também, problemas de interpolação no contexto esférico são muito considerados e um método de interpolação que gerou muita pesquisa pode ser formulado da seguinte forma (CHENEY, 1995): dados n pontos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em $\mathbb{S}^d$ e uma função $h : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$, o problema de interpolação requer encontrar uma função contínua $s : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$ da forma (para alguma função f)

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x \cdot x_j), \quad x \in \mathbb{S}^d, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},$$

de modo que

$$s(x_i) = h(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Se escolhemos f sendo positiva definida em $\mathbb{S}^d$, então a matriz de interpolação obtida do sistema acima pode ser singular e o problema de interpolação pode não ter solução única. Mas se f é estritamente positiva definida, então o problema de interpolação tem uma única solução para qualquer número de pontos n e quaisquer n pontos dados. (BACHOC *et al.*, 2020; DALEY; PORCU, 2014; DU; MA; LI, 2013; LIGHT; CHENEY, 1992) e nos trabalhos citados neles.

Diversos problemas práticos, bem como a encantadora teoria, motivaram e motivam até os dias atuais diversos pesquisadores a investigar caracterizações, propriedades e construções de funções definidas positivas em diversos contextos.

Neste trabalho fazemos um estudo sistemático de conceitos citados anteriormente e apresentamos no último capítulo nosso principal objetivo: uma aplicação de como construir funções definidas positivas em esferas reais. O trabalho está, essencialmente, dividido em quatro partes:

No Capítulo 2, apresentamos notações e definições básicas, definimos e abordamos propriedades dos espaços harmônicos esféricos. Apresentamos o importante exemplo de um polinômio homogêneo harmônico esférico: harmônico de Legendre. O polinômio de Legendre é definido.

No Capítulo 3, estudamos diversas propriedades dos polinômios de Legendre e definimos os polinômios de Gegenbauer. Apresentamos a relação entre tais polinômios, a qual permite concluir importantes propriedades dos polinômios de Gegenbauer que serão úteis para o propósito principal do trabalho.

No Capítulo 4, os conceitos de matrizes e funções definidas positivas são abordados. Estudamos algumas de suas propriedades e apresentamos exemplos. Destacamos em especial as funções contínuas definidas positivas em esferas reais.

No Capítulo 5, apresentamos o objetivo principal de nosso trabalho: baseado no artigo de Beatson e zu Castell (BEATSON; CASTELL, 2017), apresentamos operador integral e operador diferencial, chamados Montée e Descente, que aplicados às funções definidas positivas (respectivamente, estritamente definidas positivas) em esferas reais preservam tal propriedade mudando (de dois passos) a dimensão da esfera inicialmente considerada.

CAPÍTULO

2

HARMÔNICOS ESFÉRICOS

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar os espaços harmônicos esféricos de diferentes ordens e os polinômios de Legendre. Na Seção 2.1, apresentamos as notações, definições e resultados elementares que serão usados ao longo da dissertação. Na Seção 2.2, apresentamos os espaços dos polinômios homogêneos e dos polinômios harmônicos juntamente com alguns resultados e exemplos, destacando o importante exemplo do polinômio de Legendre na Seção 2.2.1. Na Seção 2.3, definimos os espaços harmônicos, provamos que é irredutível e apresentamos o Teorema da Adição. A principal referência que utilizamos neste capítulo é (ATKINSON; HAN, 2012).

2.1 Notações e definições básicas

Nesta seção apresentaremos algumas notações e definições básicas, bem como resultados preliminares pertinentes que serão usados ao longo do trabalho. Colocaremos somente algumas poucas demonstrações que consideramos necessárias. Demonstrações e mais detalhes podem ser encontrados em (ATKINSON; HAN, 2012, p.3-9).

Iniciamos com as seguintes notações:
$\mathbb{N}$: representa o conjunto dos números inteiros positivos;
$\mathbb{N}_0$: representa o conjunto dos números inteiros não negativos;
$\mathbb{R}$: representa o conjunto dos números reais;
$\mathbb{R}_+$: representa o conjunto dos números reais positivos;
$\mathbb{R}_0^+$: representa o conjunto dos números reais não negativos.

Em nosso trabalho, usaremos $d \in \mathbb{N}$ para representar a dimensão do espaço Euclidiano:

$$\mathbb{R}^d := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_d)^T; \quad x_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq d \right\}. \tag{2.1}$$

Definição 2.1.1 (Produto interno real)**.** O produto interno usual em $\mathbb{R}^d$ é a função $\cdot : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

definida por:

$$(x,y) \longmapsto x \cdot y := \sum_{j=1}^{d} x_j y_j, \tag{2.2}$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_d)^T$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_d)^T$. A norma de $x \in \mathbb{R}^d$ é dada por:

$$|x| := (x \cdot x)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

Em $\mathbb{R}^d$ usaremos a base canônica:

$$e_1 := (1,0,...0)^T, \ldots, \quad e_d := (0,0,...,1)^T, \tag{2.4}$$

e consequentemente, $x \in \mathbb{R}^d$ pode ser escrito como:

$$x = \sum_{j=1}^{d} x_j e_j. \tag{2.5}$$

Para $x \in \mathbb{R}$, a parte inteira de x será denotada por $[x]$. O símbolo $M_{nm}(\mathbb{C})$ denotará o conjunto das matrizes $n \times m$ com entrada complexas, no caso $m = n$ escreveremos $M_n(\mathbb{C})$. Semelhantemente $M_{nm}(\mathbb{R})$ são as matrizes $n \times m$ com entradas reais. Se $A \in M_{nm}(\mathbb{C})$, denotaremos por A^* a matriz transposta conjugada de A. Se $A \in M_{nm}(\mathbb{R})$, a matriz transposta conjugada é denotada por A^T. No espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ qualquer elemento $x \in \mathbb{C}^n$ é também um elemento de $M_{n1}(\mathbb{C})$.

Definição 2.1.2 (Produto interno complexo)**.** O produto interno usual em $\mathbb{C}^n$ é dado por:

$$x \cdot y := y^* x = \begin{pmatrix} \overline{y_1}, & \cdots & ,\overline{y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}, \quad x, y \in \mathbb{C}^n. \tag{2.6}$$

Ao longo deste trabalho usaremos a mesma notação para indicar os produtos internos real e complexo. Isso não será motivo de confusão pelo contexto.

Algumas vezes será útil indicar explicitamente a dimensão do espaço na notação do vetor, e então poderemos escrever $x_{(d)}$ em lugar de x. Assim

$$x_{(d)} = x_{(d-1)} + x_d e_d, \tag{2.7}$$

onde $x_{(d-1)} = (x_1, \cdots, x_{d-1}, 0)^T \in \mathbb{R}^d$. Por conveniência, também usaremos o símbolo $x_{(d-1)}$ para indicar o vetor $(d-1)$-dimensional $(x_1, ..., x_{d-1})^T$. Isso não vai causar confusão no contexto.

Iremos frequentemente usar a esfera unitária, $(d-1)$-dimensional em $\mathbb{R}^d$, denotada por:

$$\mathbb{S}^{d-1} := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d; \quad |\xi| = 1 \right\}. \tag{2.8}$$

Podemos descrever um ponto $x \in \mathbb{R}^d$ em coordenadas polares, na forma $x = r\xi$, onde $r = |x|$ e $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ com

$$\xi = t e_d + (1-t^2)^{1/2} \xi_{(d-1)}, \quad \text{para} \quad t \in [-1,1], \quad \text{e} \quad \xi_{(d-1)} \in \mathbb{S}^{d-2}. \tag{2.9}$$

Denotamos por $C(\mathbb{S}^{d-1})$ o espaço das funções contínuas a valores complexos (ou reais) em $\mathbb{S}^{d-1}$. Este é um espaço de Banach com a norma canônica

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(\xi)| : \xi \in \mathbb{S}^{d-1}\}. \tag{2.10}$$

O usual espaço $C([-1,1])$ das funções contínuas definidas no intervalo $[-1,1]$ também será requisitado ao longo do trabalho.

Denotamos por $L^1(\mathbb{S}^{d-1})$ o espaço das funções integráveis a valores complexos (ou reais) em $\mathbb{S}^{d-1}$, ou seja,

$$L^1(\mathbb{S}^{d-1}) := \left\{ f : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{C}; \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(\eta)| dS^{d-1}(\eta) < \infty \right\}; \tag{2.11}$$

e por $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ o espaço das funções de quadrado integráveis a valores complexos (ou reais) em $\mathbb{S}^{d-1}$, ou seja,

$$L^2(\mathbb{S}^{d-1}) := \left\{ f : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{C}; \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(\eta)|^2 dS^{d-1}(\eta) < \infty \right\}. \tag{2.12}$$

O espaço $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ é um espaço de Hilbert com o produto interno canônico:

$$(f,g)_{\mathbb{S}^{d-1}} := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\eta)\overline{g(\eta)} dS^{d-1}(\eta), \tag{2.13}$$

e a norma em $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ será denotada por $\|\cdot\|_{\mathbb{S}^{d-1}}$.

A notação dS^{d-1} será usada para o elemento de superfície $(d-1)$-dimensional sobre a esfera unitária $\mathbb{S}^{d-1}$ (medida de Lebesgue esférica). A fórmula a seguir fornece uma relação entre os elementos de superfície sobre diferentes valores de d e será bastante útil (veja em (ATKINSON; HAN, 2012, p.7)):

$$dS^{d-1} = (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt dS^{d-2}, \quad \text{para} \quad d \geq 3, \quad t \in [-1,1]. \tag{2.14}$$

A função Gamma Γ será usada frequentemente ao longo deste trabalho. A seguir definimos e listamos algumas de suas propriedades que serão utilizadas. As demonstrações podem ser encontradas em (ATKINSON; HAN, 2012).

Definição 2.1.3. A **função Gamma** Γ é definida por:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{2.15}$$

Obviamente temos $\Gamma(1) = 1$, além disso

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{2.16}$$

o que implica

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.17}$$

ou seja, a função Γ estende o operador fatorial de inteiros positivos a números reais positivos. Fica também definido o valor,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{2.18}$$

É útil também notar:

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1), \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.19}$$

A fórmula (2.14) resulta ser útil para calcular a área de superfície de uma esfera unitária que é dada por:

$$|\mathbb{S}^{d-1}| := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} dS^{d-1}, \quad d \geq 3. \tag{2.20}$$

Na verdade temos (ver (ATKINSON; HAN, 2012, p.7))

$$|\mathbb{S}^{d-1}| = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}|\mathbb{S}^{d-2}|, \quad d \geq 3, \quad |\mathbb{S}^1| = 2\pi, \tag{2.21}$$

onde $|\mathbb{S}^1|$ é o perímetro do círculo unitário. Além disso, da relação (2.21) decorre que

$$|\mathbb{S}^{d-1}| = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}, \quad d \geq 2. \tag{2.22}$$

O conjunto $\mathbb{O}^d$ representará o conjunto das matrizes ortogonais de entradas reais e ordem d, explicitamente,

$$\mathbb{O}^d := \{A \in M_d(\mathbb{R}); \quad AA^T = I_d\}$$

onde I_d é a matriz identidade de ordem d. Não é difícil ver que $\det(A) = \pm 1$ para qualquer $A \in \mathbb{O}^d$.

Observação 2.1.4. O produto interno usual em $\mathbb{R}^d$ possui a propriedade de invariância em relação aos elementos de $\mathbb{O}^d$, isto é,

$$Ax \cdot Ay = x \cdot y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \forall A \in \mathbb{O}^d. \tag{2.23}$$

Observação 2.1.5. O produto interno usual em $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ é invariante com relação a elementos de $\mathbb{O}^d$.

De fato, dada $A \in \mathbb{O}^d$,

$$\begin{aligned}
(f \circ A, g \circ A)_{\mathbb{S}^{d-1}} &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(A\eta)\overline{g(A\eta)}dS^{d-1}(\eta) \\
&= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(A\eta)\overline{g(A\eta)}dS^{d-1}(A\eta) \\
&= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}dS^{d-1}(\zeta) = (f,g)_{\mathbb{S}^{d-1}}, \quad f, g \in L^2(\mathbb{S}^{d-1}).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Para qualquer vetor não nulo $\eta \in \mathbb{R}^d$, consideraremos

$$\mathbb{O}^d(\eta) := \{A \in \mathbb{O}^d; \quad A\eta = \eta\}$$

o subconjunto das matrizes ortogonais que deixa invariável o subespaço gerado por η, $span\{\eta\} := \{\alpha\eta : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Definição 2.1.6. Sejam $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ uma função e $A \in M_d(\mathbb{R})$ uma matriz , definimos $f_A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ como segue

$$f_A(x) := f(Ax), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Usaremos frequentemente a definição acima para matrizes ortogonais. Encerramos a seção com o seguinte resultado que será usado na construção dos harmônicos de Legendre.

Proposição 2.1.7. Se $f_A = f$ para qualquer $A \in \mathbb{O}^d$, então o valor $f(x)$ depende de x mediante $|x|$, isto é, f é constante numa esfera de raio $|x|$.

Demonstração. Dados $x, y \in \mathbb{R}^d$ tais que $|x| = |y|$, pode-se achar uma matriz $A \in \mathbb{O}^d$ tal que $Ax = y$. Assim

$$f(x) = f_A(x) = f(Ax) = f(y).$$

$\square$

Observação 2.1.8. Notemos que o conjunto $\mathbb{O}^d(e_d)$ na verdade é da forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}; \quad A_1 \in \mathbb{O}^{d-1} \right\}.$$

De fato, é claro que qualquer matriz da forma $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$ pertence a $\mathbb{O}^d$ sempre que $A_1 \in \mathbb{O}^{d-1}$. A outra inclusão não é mais difícil. Dado $A \in \mathbb{O}^d(e_d)$ de entradas a_{ij}, e já que $Ae_d = e_d$ temos $a_{1d} = ... = a_{(d-1)d} = 0$ e $a_{dd} = 1$. Se cumpre também que $e_d = A^T e_d$, e de forma semelhante como se fez em A, se deduz que $a_{d1} = ... = a_{d(d-1)} = 0$, e $a_{dd} = 1$. Assim $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$. Além disso, $\det(A) = 1 \det(A_1) = \pm 1$. Logo, se conclui que $A \in \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}; \quad A_1 \in \mathbb{O}^d \right\}$.

Da observação anterior segue:

Corolário 2.1.9. Se $f_A = f$ para qualquer $A \in \mathbb{O}^d(e_d)$, então o valor $f(x)$ depende de x mediante $|x_{(d-1)}|$ e x_d.

Finalizamos esta seção com seguintes definições:

Definição 2.1.10. Considere um subespaço $\mathbb{V}$ de funções definidas em $\mathbb{R}^d$ ou sobre um subconjunto de $\mathbb{R}^d$. O espaço $\mathbb{V}$ é dito **invariante** se para toda $f \in \mathbb{V}$ e para toda $A \in \mathbb{O}^d$, temos que $f_A \in \mathbb{V}$.

O espaço $\mathbb{V}$ é chamado de **redutível** se puder ser escrito como soma de dois subespaços invariantes não triviais $\mathbb{V}_1$ e $\mathbb{V}_2$ com $\mathbb{V}_1$ ortogonal a $\mathbb{V}_2$ (denotado por $\mathbb{V}_1 \perp \mathbb{V}_2$, significando que $(f,g) = 0$ para toda $f \in \mathbb{V}_1$ e $g \in \mathbb{V}_2$). Dizemos que $\mathbb{V}$ é **irredutível** se este não for redutível.

Finalmente, $\mathbb{V}$ é dito **primitivo** se é invariante e também irredutível.

Nos Capítulos 2 e 3 veremos que os espaços harmônicos esféricos são espaços irredutíveis e primitivos, respectivamente. Sua construção depende dos espaços dos polinômios homogêneos e dos polinômios harmônicos os quais apresentamos na próxima seção.

2.2 Espaço dos Polinômios Homogêneos Harmônicos

Começamos definindo o espaço de todos os polinômios homogêneos $\mathbb{H}_n^d$ de grau n em d variáveis ($d \geq 2$).

Definição 2.2.1. O **espaço dos polinômios homogêneos** $\mathbb{H}_n^d$ consiste de todas as funções da forma

$$H_n(x_1,\dots,x_d) = \sum_{|i_{(d)}|=n} a_{i_1,\dots,i_d} x_1^{i_1}\dots x_d^{i_d}, \quad a_{i_1,\dots,i_d} \in \mathbb{C}, \tag{2.25}$$

onde $1 \leq i_1,\dots,i_d \leq n$, $i_{(d)} = (i_1,\dots,i_d)$ e $|i_{(d)}| = i_1+\dots+i_d$.

Exemplo 2.2.2. Os seguintes exemplos ilustram os espaços dos polinômios homogêneos de grau 2 em 2 e 3 variáveis, respectivamente:

$$\mathbb{H}_2^2 = \{a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2 : a_j \in \mathbb{C}\},$$
$$\mathbb{H}_2^3 = \{a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_1x_3 + a_4x_2^2 + a_5x_2x_3 + a_6x_3^2 : a_j \in \mathbb{C}\}.$$

Não é difícil ver que $\mathbb{H}_n^d$ é um espaço invariante, cuja dimensão (veja (ATKINSON; HAN, 2012, pág. 13)) é dada por

$$\dim \mathbb{H}_n^d = \binom{n+d-1}{d-1}. \tag{2.26}$$

Qualquer polinômio $H_n \in \mathbb{H}_n^d$ pode ser escrito da forma (2.25), e naturalmente definimos

$$H_n(\nabla) := H_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \sum_{|i_{(d)}|=n} a_{i_1,\dots,i_d} \frac{\partial^{i_1}}{\partial^{i_1}_{x_1}}\cdots\frac{\partial^{i_d}}{\partial^{i_d}_{x_n}}. \tag{2.27}$$

Dados quaisquer dois polinômios em $\mathbb{H}_n^d$,

$$H_n(x) := \sum_{|i_{(d)}|=n} a_{i_1,\dots,i_d} x_1^{i_1}\dots x_d^{i_d}, \quad e \quad \widetilde{H_n}(x) := \sum_{|i_{(d)}|=n} b_{i_1,\dots,i_d} x_1^{i_1}\dots x_d^{i_d},$$

definimos o produto interno $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{H}_n^d} : \mathbb{H}_n^d \times \mathbb{H}_n^d \to \mathbb{C}$ por

$$(H_n, \widetilde{H_n})_{\mathbb{H}_n^d} := H_n(\nabla)\overline{\widetilde{H_n}(x)}.$$

A seguir vamos introduzir o espaço dos polinômios homogêneos harmônicos. Para isso lembramos que:

Definição 2.2.3. Uma função f definida em um subconjunto de $\mathbb{R}^d$ cujo operador Laplaciano é nulo, ou seja,

$$\Delta_{(d)} f = \Delta f = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 0, \tag{2.28}$$

é chamada de **função harmônica**.

O seguinte lema mostra que, ser harmônica é uma propriedade invariante para funções.

Lema 2.2.4. Se $\Delta f = 0$, então $\Delta f_A = 0$, para toda $A \in \mathbb{O}^d$.

Demonstração. Ver (ATKINSON; HAN, 2012, p.15). □

Definição 2.2.5. O **espaço dos polinômios homogêneos harmônicos de grau n em d variáveis**, denotado por $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$, consiste de todos os polinômios em $\mathbb{H}_n^d$ que são harmônicos.

Exemplo 2.2.6. Vamos considerar distintos casos:

1. Se $n = 0$ ou $n = 1$, então $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d) = \mathbb{H}_n^d$.

2. $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d) = \emptyset$ para $d = 1$ e $n \geq 2$.

3. $\mathbb{Y}_2(\mathbb{R}^2) = \left\{a(x_1^2 - x_2^2) + bx_1x_2; a, b \in \mathbb{C}\right\}$.

4. Para $d = 2$, os polinômios da forma $(x_1 + ix_2)^n$ pertencem a $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^2)$.

5. Para $d = 3$, qualquer polinômio da forma $(x_3 + ix_1 \cos t + ix_2 \sin t)^n$, com $t \in \mathbb{R}$ fixo, pertence a $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^3)$.

A seguir forneceremos uma relação entre a dimensão dos espaços homogêneos e a dimensão de $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$.

Lema 2.2.7. Seja $N_{n,d} := \dim \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$, para $n \geq 1$ e $d \geq 2$. Então $N_{n,d} = \dim \mathbb{H}_n^{d-1} + \dim \mathbb{H}_{n-1}^{d-1}$. Explicitamente,

$$N_{n,d} = \frac{(2n+d-2)(n+d-3)}{n!(d-2)!}. \tag{2.29}$$

Demonstração. Primeiramente observe que qualquer polinômio $H_n \in \mathbb{H}_n^d$ pode ser expresso da forma:

$$H_n(x_1,\dots,x_d) = \sum_{j=0}^{n} x_d^j h_{n-j}(x_1,\dots,x_{d-1}), \quad \text{onde} \quad h_{n-j} = \mathbb{H}_{n-j}^{d-1}. \tag{2.30}$$

Então, aplicando o operador Laplaciano, temos

$$\Delta_{(d)} H_n(x_1,\dots,x_d) = \Delta_{(d)} \sum_{j=0}^{n} x_d^j h_{n-j}(x_1,\dots,x_{d-1}). \tag{2.31}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\Delta_{(d)} H_n(x_{(d)}) = \\
= \;& \underbrace{x_d^0 \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} h_n(x_{(d-1)})}_{=0} + x_d^0 \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} h_n(x_{(d-1)}) + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} x_d^1 h_{n-1}(x_{(d-1)}) + x_d^1 \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} h_{n-1}(x_{(d-1)}) \\
+ \;& \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} x_d^2 h_{n-2}(x_{(d-1)}) + x_d^2 \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} h_{n-2}(x_{(d-1)}) \\
+ \;& \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} x_d^{n-2} h_2(x_{(d-1)}) + x_d^{n-2} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} h_2(x_{(d-1)}) \\
+ \;& \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} x_d^{n-1} h_1(x_{(d-1)}) + x_d^{n-1} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} h_1(x_{(d-1)}) + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} x_d^n h_0(x_{(d-1)}) + x_d^n \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} h_0(x_{(d-1)}).
\end{aligned}$$

Reagrupando,

$$\begin{aligned}
\Delta_{(d)} H_n(x_{(d)}) &= \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} x_d^j \Delta_{(d-1)} h_{n-j}(x_{(d-1)}) + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} x_d^k h_{n-k}(x_{(d-1)}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} x_d^j \Delta_{(d-1)} h_{n-j}(x_{(d-1)}) + \sum_{k=2}^{n-2} k(k-1) x_d^{k-2} h_{n-k}(x_{(d-1)}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} x_d^j \Delta_{(d-1)} h_{n-j}(x_{(d-1)}) + \sum_{j=0}^{n-4} (j+2)(j+2-1) x_d^j h_{n-(j+2)}(x_{(d-1)}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} [\Delta_{(d-1)} h_{n-j}(x_{(d-1)}) + (j+2)(j+2-1) x_d^j h_{n-j-2)}(x_{(d-1)})],
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade consideramos $j = k-2$ no segundo somatório. Se $H_n \in \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$, então $\Delta_{(d)} H_n = 0$ e

$$h_{n-j-2} = -\frac{1}{(j+2)(j+1)} \Delta_{(d-1)} h_{n-j}, \quad 0 \le j \le n-2. \tag{2.32}$$

Consequentemente $H_n \in \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$ é determinado unicamente por $h_n \in \mathbb{H}_n^{d-1}$ e $h_{n-1} \in \mathbb{H}_{n-1}^{d-1}$ na expressão (2.30). Assim podemos concluir, pela fórmula (2.26), que:

$$N_{n,d} = \dim \mathbb{H}_n^{d-1} + \dim \mathbb{H}_{n-1}^{d-1} = \frac{(2n+d-2)(n+d-3)}{n!(d-2)!}. \tag{2.33}$$

$\square$

2.2.1 Harmônicos de Legendre e Polinômios de Legendre P_n^d

Vamos ver agora um exemplo importante de polinômio homogêneo harmônico: o harmônico de Legendre.

Definição 2.2.8. Sejam $d \geq 2$ e $n \geq 0$, um **harmônico de Legendre de grau** n **em** d **variáveis** é um polinômio $L_{n,d} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ que cumpre as três condições abaixo:

$$L_{n,d} \in \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d), \tag{2.34}$$

$$L_{n,d}(Ax) = L_{n,d}(x), \quad \forall A \in \mathbb{O}^d(e_d), \forall x \in \mathbb{R}^d, \tag{2.35}$$

$$L_{n,d}(e_d) = 1. \tag{2.36}$$

Afirmamos que na verdade existe um único polinômio $L_{n,d}$ que satisfaz as três condições acima.
De fato, pela condição (2.35) e Observação 2.1.8, temos

$$L_{n,d}(Ax) = L_{n,d}\left(\begin{pmatrix} A_1 & 0^T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{(d-1)} \\ x_d \end{pmatrix}\right) = L_{n,d}\left(\begin{pmatrix} A_1 x_{(d-1)} \\ x_d \end{pmatrix}\right). \tag{2.37}$$

É obvio que pela condição (2.34), $L_{n,d} \in \mathbb{H}_n^d$. Logo, $L_{n,d}$ poder ser escrito da forma (2.30), e obtemos:

$$L_{n,d}(Ax) = \sum_{j=1}^{n} x_d^j h_{n-j}(A_1 x_{(d-1)}) = \sum_{j=1}^{n} x_d^j h_{n-j}(x_{(d-1)}),$$

onde $h_{n-j} \in \mathbb{H}_{n-j}^{d-1}$ e a última igualdade ocorre pela condição (2.35). Se compararmos as últimas duas somatórias da equação acima temos $h_{n-j}(A_1 x_{(d-1)}) = h_{n-j}(x_{(d-1)})$, para todo $A_1 \in \mathbb{O}^{d-1}$, $x_{(d-1)} \in \mathbb{R}^{d-1}$, $0 \leq j \leq n$. Então, pela Proposição 2.1.7, h_{n-j} depende de $x_{(d-1)}$ através de $|x_{(d-1)}|$.
Para $j = n$, existe $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que $h_0(x_{(d-1)}) = c_0 |x_{(d-1)}|^0$.
Para $j = n-1$, $h_1(x_{(d-1)}) = 0$, pois não existe número racional k tal que $|x_{(d-1)}|^k$ seja um polinômio de grau 1.
Para $j = n-2$, existe $c_1 \in \mathbb{R}$ tal que $h_2(x_{(d-1)}) = c_1 |x_{(d-1)}|^2$ é um polinômio homogêneo de grau 2, e assim por diante.
Logo,

$$h_{n-j}(x_{(d-1)}) = \begin{cases} c_k |x_{(d-1)}|^{2k}, & n-j = 2k, \quad c_k \in \mathbb{R}, \\ 0, & n-j = 2k+1. \end{cases} \tag{2.38}$$

Assim, a verdadeira forma de $L_{n,d}(x)$ é:

1. Se n é ímpar, temos $L_{n,d}(x) = \sum_{j=1,3,..,n} x_d^j h_{n-j}(x_{(d-1)})$.

2. Se n é par, temos $L_{n,d}(x) = \sum_{j=0,2,...,n} x_d^j h_{n-j}(x_{(d-1)})$.

De forma geral

$$
\begin{aligned}
L_{n,d}(x) &= \sum_{j=n,n-2,\dots p} x_d^j h_{n-j}(x_{(d-1)}) \\
&= x_d^n h_0(x_{(d-1)}) + x_d^{n-2} h_2(x_{(d-1)}) + \dots + x_d^p h_{n-p}(x_{(d-1)}) \\
&= x_d^n c_0 + x_d^{n-2} c_1 |x_{(d-1)}|^2 + \dots + x_d^p c_{[\frac{n}{2}]} |x_{(d-1)}|^{2[\frac{n}{2}]} \\
&= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} x_d^{n-2k} c_k |x_{(d-1)}|^{2k},
\end{aligned} \tag{2.39}
$$

onde $p = 1$ se n é par e $p = 0$ se n for ímpar.
Agora vamos encontrar os valores dos coeficientes c_k na última expressão acima. Como $L_{n,d} \in \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$, por (2.32), temos

$$
\begin{aligned}
h_0 &= -\frac{1}{n(n-1)} \Delta_{(d-1)} h_2, \\
h_2 &= -\frac{1}{(n-2)(n-3)} \Delta_{(d-1)} h_4, \\
&\vdots \\
h_{n-p-2} &= -\frac{1}{(p+2)(p+1)} \Delta_{(d-1)} h_{n-p}.
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

Pela equação (2.38),

$$
\begin{aligned}
c|x_{(d-1)}|^0 &= -\frac{1}{n(n-1)} \Delta_{(d-1)} c_1 |x_{(d-1)}|^2, \\
c_1|x_{(d-1)}|^2 &= -\frac{1}{(n-2)(n-3)} \Delta_{(d-1)} c_2 |x_{(d-1)}|^4, \\
&\vdots \\
c_{[\frac{n}{2}]-1}|x_{(d-1)}|^{2[\frac{n}{2}]-2} &= -\frac{1}{(p+2)(p+1)} \Delta_{(d-1)} c_{[\frac{n}{2}]} |x_{(d-1)}|^{2[\frac{n}{2}]}.
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

Então,

$$
c_{k-1}|x_{(d-1)}|^{2k-2} = -\frac{1}{(n-2k+2)(n-2k+1)} \Delta_{(d-1)} c_k |x_{(d-1)}|^{2k}, \quad k = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{2.42}
$$

Agora não é difícil ver que $\Delta_{(d-1)}|x_{(d-1)}|^{2k} = 2k(2k+d-3)|x_{d-1}|^{2k-2}$, o que implica que as equações de (2.42) ficam

$$
c_k = -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2k(2k+d-3)} c_{k-1}, \quad k = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{2.43}
$$

Pela condição (2.36), obtemos $c_0 = 1$. Portanto indutivamente, a equação anterior implica que

$$\begin{aligned}
c_k &= (-1)\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2k(2k+d-3)}(-1)\frac{(n-2(k-1)+2)(n-2(k-1)+1)}{2(k-1)(2(k-1)+d-3)} \\
&\quad \times \ldots (-1)\frac{(n-2+2)(n-2+1)}{2(2+d-3)}1 \\
&= (-1)^k \frac{(n-2k+1)(n-2k+2)(n-2k+3)\ldots(n-1)(n)}{2^k k(k-1)\ldots 1(2k+d-3)(2k+d-5)\ldots(2(1)+d-3)} \\
&= (-1)^k \frac{(n)!}{(n-2k)!}\frac{1}{k!}\frac{1}{4^k}\frac{1}{(k+\frac{d-1}{2}-1)(k+\frac{d-1}{2}-2)\ldots(\frac{d-1}{2})} \\
&= (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!}\frac{1}{k!4^k}\frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(k+\frac{d-1}{2})}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$c_k = \frac{(-1)^k n!}{(n-2k)!k!4^k}\frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(k+\frac{d-1}{2})}, \quad \text{para} \quad k = 0, 1, ..., \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{2.44}$$

Tendo achado todos os coeficientes $\{c_k\}_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}$ temos a unicidade do polinômio harmônico de Legendre, e podemos escrever a equação (2.39) como segue:

$$L_{n,d}(x) = n!\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k \frac{|x_{(d-1)}|^{2k}(x_d)^{n-2k}}{4^k k!(n-2k)!\Gamma(k+\frac{d-1}{2})}, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.45}$$

Definição 2.2.9. Seja $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, definimos o **polinômio de Legendre de grau n associado ao índice d**, por

$$P_n^d(t) := L_{n,d}(\xi), \quad \text{onde} \quad t = e_d \cdot \xi, \quad d \geq 2, \quad n \geq 0, \tag{2.46}$$

ou seja, P_n^d é a restrição do polinômio harmônico de Legendre à esfera unitária.

Pela identidade (2.45), temos

$$P_n^d(t) = n!\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k \frac{(1-t^2)^k t^{n-2k}}{4^k k!(n-2k)!\Gamma(k+\frac{d-1}{2})}, \quad t \in [-1, 1]. \tag{2.47}$$

Vale a pena destacar que o polinômio de Legendre P_n^3 associado ao índice $d = 3$ é o polinômio de Legendre *standard* encontrado em grande parte da literatura de polinômios ortogonais (veja (ATKINSON; HAN, 2012, p. 19)). No decorrer do texto, seguindo (ATKINSON; HAN, 2012; MÜLLER, 1998), chamaremos P_n^d também de polinômios de Legendre.

Observação 2.2.10. Por (2.36), o polinômio de Legendre satisfaz a propriedade

$$P_n^d(1) = 1. \tag{2.48}$$

Observação 2.2.11. Já que $L_{n,d} \in \mathbb{H}_n^d$, escrevendo $x \in \mathbb{R}^d$ como em (2.9), temos

$$L_{n,d}(x) = L_{n,d}(r\xi_{(d)}) = r^n L_{n,d}(\xi_{(d)}) = r^n P_n^d(t). \tag{2.49}$$

2.3 Harmônicos Esféricos $\mathbb{Y}_n^d$

Esta seção é talvez a mais relevante pois apresentamos os espaços harmônicos esféricos, algumas de suas propriedades e o importante Teorema da Adição que nos ajudará a desenvolver nossa teoria.

Definição 2.3.1. O espaço dos polinômios homogêneos harmônicos $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$ restrito à esfera $\mathbb{S}^{d-1}$ é chamado **espaço dos harmônicos esféricos de grau** n **em** d **variáveis** e o denotaremos por $\mathbb{Y}_n^d$. Qualquer função em $\mathbb{Y}_n^d$ será chamada de harmônico esférico de grau n em d variáveis.

Observação 2.3.2. Pela definição, vemos que qualquer harmônico esférico $Y_n \in \mathbb{Y}_n^d$ está relacionado com um harmônico homogêneo $H_n \in \mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$ da seguinte forma: para $x \in \mathbb{R}^d$ com $x = |x|\xi$ e $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$,

$$H_n(x) = H_n(|x|\xi) = |x|^n Y_n(\xi). \tag{2.50}$$

Assim, a dimensão de $\mathbb{Y}_n^d$ é a mesma de $\mathbb{Y}_n(\mathbb{R}^d)$ dada em (2.29).

Definição 2.3.3. Dado $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, dizemos que a função $f : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{C}$ é invariante com relação a $\mathbb{O}^d(\xi)$ se

$$f(A\eta) = f(\eta), \quad \forall A \in \mathbb{O}^d(\xi), \quad \forall \eta \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{2.51}$$

Teorema 2.3.4. Sejam $Y_n \in \mathbb{Y}_n^d$ e $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$. Então Y_n é invariante com relação a $\mathbb{O}^d(\xi)$ se, e somente se

$$Y_n(\eta) = Y_n(\xi) P_n^d(\xi \cdot \eta), \quad \forall \eta \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad d \geq 2, \quad n \geq 0. \tag{2.52}$$

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Consideremos $A_1 \in \mathbb{O}^d$ tal que $\xi = A_1 e_d$, e denotemos

$$\widetilde{Y}_n(\eta) := Y_n(A_1\eta), \quad \eta \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

a) *Afirmamos que $\widetilde{Y}_n$ é invariante com relação a $\mathbb{O}^d(e_d)$, ou seja $\widetilde{Y}_n(A\eta) = \widetilde{Y}_n(\eta)$, para toda $A \in \mathbb{O}^d(e_d)$.*

De fato, dada $A \in \mathbb{O}^d(e_d)$, como Y_n é invariante com relação a $\mathbb{O}^d(\xi)$, e $A_1AA_1^T \in \mathbb{O}^d(\xi)$ temos:

$$\widetilde{Y}_n(A\eta) = Y_n(A_1A\eta) = Y_n(A_1AA_1^T A_1\eta) = Y_n(A_1 n) = \widetilde{Y}_n(\eta).$$

b) *$\widetilde{Y}_n$ cumpre as duas primeiras condições da definição do polinômio harmônico de Legendre* (2.34) *e* (2.35):

1. $\widetilde{Y}_n$ é harmônico pois $\widetilde{Y}_n = Y_n \circ A_1$;

2. Pela afirmação a) $\widetilde{Y}_n$ é invariante com relação a $\mathbb{O}^d(e_d)$.

Então, como no procedimento realizado na Seção 2.2.1, obtemos que $\widetilde{Y}_n$ é da forma:

$$\widetilde{Y}_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} c_k |x_{(d-1)}|^{2k} x_d^{n-2k}, \quad x = (x_1, \ldots, x_d)^T. \tag{2.53}$$

Notemos que $\widetilde{Y}_n(e_d) = c_0$ e segundo (2.43), todos os coeficientes $\{c_k\}_{k=1}^{[n/2]}$ são múltiplos de c_0. Logo a verdadeira aparência de $\widetilde{Y}_n$ é

$$\widetilde{Y}_n(x) = c_0 x_d^n + c_0 b_1 |x_{(d-1)}|^2 x_d^{n-2} + \ldots + c_0 b_{[n/2]} |x_{(d-1)}|^{2[n/2]} x_d^{n-2[n/2]}. \tag{2.54}$$

Por outro lado,

$$L_{n,d}(x) = 1 x_d^n + b_1 |x_{(d-1)}|^2 x_d^{n-2} + \ldots + b_{[n/2]} |x_{(d-1)}|^{2[n/2]} x_d^{n-2[n/2]}. \tag{2.55}$$

Consequentemente,

$$\widetilde{Y}_n(x) = c_0 L_{n,d}(x). \tag{2.56}$$

Como $\widetilde{Y}_n(e_d) = c_0$, segue que:

$$\widetilde{Y}_n(\eta) = \widetilde{Y}_n(e_d) L_{n,d}(\eta) = \widetilde{Y}_n(e_d) P_n^d(\eta \cdot e_d), \quad \eta \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{2.57}$$

Pela definição de $\widetilde{Y}_n$ e a invariância do produto interno (veja (2.23)) com relação as matrizes ortogonais, temos

$$\begin{aligned} Y_n(\eta) &= \widetilde{Y}_n(A_1^T \eta) \\ &= \widetilde{Y}_n(e_d) P_n^d(A_1^T \eta \cdot e_d) \\ &= Y_n(A_1 e_d) P_n^d(\eta \cdot A_1 e_d) \\ &= Y_n(\xi) P_n^d(\eta \cdot \xi). \end{aligned} \tag{2.58}$$

($\Longleftarrow$) Seja $A \in \mathbb{O}^d(\xi)$. Se $Y_n(\eta) = Y_n(\xi) P_n^d(\xi \cdot \eta)$ para todo $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$, então, em particular, para $A\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$ obtemos:

$$\begin{aligned} Y_n(A\eta) &= Y_n(\xi) P_n^d(\xi \cdot A\eta) \\ &= Y_n(\xi) P_n^d(A\xi \cdot A\eta) \\ &= Y_n(\xi) P_n^d(\xi \cdot \eta) \\ &= Y_n(\eta). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Portanto, Y_n é invariante com relação a $\mathbb{O}^d(\xi)$. $\square$

Teorema 2.3.5 (Teorema da Adição)**.** Seja $\{Y_j; 1 \le j \le N_{n,d}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{Y}_n^d$, isto é,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_j(\eta) \overline{Y_k(\eta)} dS^{d-1}(\eta) = \delta_{jk}, \quad 1 \le j,k \le N_{n,d}, \tag{2.60}$$

onde δ_{jk} é a função Delta de Kronecker dada por $\delta_{jj} = 1$ e $\delta_{jk} = 0$ se $i \neq k$. Então,

$$\sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_j(\xi) \overline{Y_j(\eta)} = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} P_n^d(\xi \cdot \eta), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad d \ge 2, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.61}$$

Demonstração. Como $\mathbb{Y}_n^d$ é invariante, para $k = 1, 2, \ldots, N_{n,d}$, temos $Y_k \circ A \in \mathbb{Y}_n^d$ para toda $A \in \mathbb{O}^d$. Logo, para $1 \leq j \leq N_{n,d}$, existem constantes $c_{kj} \in \mathbb{C}$ tais que

$$Y_k(A\xi) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} c_{kj} Y_j(\xi). \tag{2.62}$$

Em virtude da propriedade de invariância do produto interno $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{S}^{d-1}}$ com relação aos elementos de $\mathbb{O}^d$ (veja a Observação 2.1.5), obtemos:

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_j(A\xi)\overline{Y_k(A\xi)}dS^{d-1}(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_j(\eta)\overline{Y_k(\eta)}dS^{d-1}(\eta) = \delta_{jk}. \tag{2.63}$$

Assim, por (2.62) temos

$$\delta_{jk} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\sum_{l=1}^{N_{n,d}} c_{jl} Y_l\right) \overline{\left(\sum_{m=1}^{N_{n,d}} c_{km} Y_m\right)} dS^{d-1} = \sum_{l,m=1}^{N_{n,d}} c_{jl}\overline{c_{km}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_l \overline{Y_m} dS^{d-1} = \sum_{l=1}^{N_{n,d}} c_{jl}\overline{c_{kl}}. \tag{2.64}$$

Então, a matriz $C := (c_{jl})$ é tal que $CC^* = I$, ou seja, a matriz C é unitária. Logo, também vale $C^*C = I$, isto é,

$$\sum_{j=1}^{N_{n,d}} \overline{c_{jl}} c_{jk} = \delta_{lk}. \tag{2.65}$$

Agora vamos considerar a função

$$Y(\xi, \eta) := \sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_j(\xi)\overline{Y_j(\eta)}, \quad \xi, \eta \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{2.66}$$

Para qualquer $A \in \mathbb{O}^d$, se usamos a expressão (2.62) e a propriedade (2.65), temos

$$Y(A\xi, A\eta) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_j(A\xi)\overline{Y_j(A\eta)} = \sum_{j,k,l=1}^{N_{n,d}} c_{jk}\overline{c_{jl}} Y_k(\xi)\overline{Y_l(\eta)} = \sum_{k=1}^{N_{n,d}} Y_k(\xi)\overline{Y_k(\eta)} = Y(\xi, \eta). \tag{2.67}$$

Consequentemente, para ξ fixo, $Y(\xi, \cdot) \in \mathbb{Y}_n^d$ é invariante com relação a $\mathbb{O}^d(\xi)$. Pelo Teorema 2.3.4

$$Y(\xi, \eta) = Y(\xi, \xi) P_n^d(\xi \cdot \eta). \tag{2.68}$$

De forma semelhante temos a igualdade:

$$Y(\xi, \eta) = Y(\eta, \eta) P_n^d(\xi \cdot \eta). \tag{2.69}$$

Assim $Y(\xi, \xi) = Y(\eta, \eta)$ é uma constante em $\mathbb{S}^{d-1}$. Agora vamos encontrar essa constante integrando sobre $\mathbb{S}^{d-1}$ a seguinte igualdade:

$$Y(\xi, \xi) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} |Y_j(\xi)|^2. \tag{2.70}$$

Obtemos por (2.60):

$$Y(\xi, \xi)|\mathbb{S}^{d-1}| = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |Y_j(\xi)|^2 dS^{d-1} = N_{n,d}. \tag{2.71}$$

Portanto, $Y(\xi, \xi) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}$. Substituindo em (2.68) obtemos o resultado desejado. □

Como uma aplicação do Teorema da Adição temos a irredutibilidade dos harmônicos esféricos mostrado no seguinte resultado.

Teorema 2.3.6. Para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$ e qualquer $d \in \mathbb{N}$, o espaço dos harmônicos esféricos $\mathbb{Y}_n^d$ é irredutível.

Demonstração. Vamos provar por contradição. Suponhamos que

$$\mathbb{Y}_n^d = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2, \quad \text{com} \quad \mathbb{V}_1 \neq 0, \mathbb{V}_2 \neq 0, \quad \mathbb{V}_1 \perp \mathbb{V}_2.$$

Escolhemos uma base ortogonal $\left\{Y_1, \ldots, Y_{N_{n,d}}\right\}$ de modo que as N primeiras funções $\{Y_1, \ldots, Y_N\}$ gerem $\mathbb{V}_1$ e o restante das funções $\left\{Y_{N+1}, \ldots, Y_{N_{n,d}}\right\}$ gerem $\mathbb{V}_2$.
Pelo Teorema da Adição 2.3.5, para $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ fixo, existem funções $\eta \longmapsto P_{n,1}^d(\xi \cdot \eta)$ e $\eta \longmapsto P_{n,2}^d(\xi \cdot \eta)$ que pertencem a $\mathbb{V}_1$ e a $\mathbb{V}_2$ respectivamente. Como $\mathbb{V}_1 \perp \mathbb{V}_2$, obtemos

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_{n,1}^d(\xi \cdot \eta)\overline{P_{n,2}^d(\xi \cdot \eta)}dS^{d-1}(\eta) = 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{2.72}$$

a) *Afirmamos que para qualquer $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ fixo , a função $\eta \longmapsto P_{n,1}^d(\xi \cdot \eta)$ é invariante com relação a $\mathbb{O}^d(\xi)$.*
De fato, se $A \in \mathbb{O}^d(\xi)$, temos também $A^T \in \mathbb{O}^d(\xi)$. Então

$$P_{n,1}^d(\xi \cdot A\eta) = P_{n,1}^d(A^T\xi \cdot \eta) = P_{n,1}^d(\xi \cdot \eta). \tag{2.73}$$

Pelo Teorema 2.3.4,

$$P_{n,1}^d(\xi \cdot \eta) = P_{n,1}^d(\xi \cdot \xi)P_n^d(\xi \cdot \eta) = P_n^d(\xi \cdot \eta). \tag{2.74}$$

Semelhantemente $P_{n,2}^d(\xi \cdot \eta) = P_n^d(\xi \cdot \eta)$. Daí, segue que a integral em (2.72) é igual a $\frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}}$, o que é uma contradição. □

CAPÍTULO

3

POLINÔMIOS DE LEGENDRE E DE GEGENBAUER

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar os polinômios de Gegenbauer e algumas de suas propriedades. Na Seção 3.1, definimos e provamos algumas propriedades de um operador projeção sobre os espaços harmônicos, o qual auxiliará obter a ortogonalidade dos espaços harmônicos (de graus distintos) e como consequência dos polinômios de Legendre (de graus distintos). Na Seção 3.2, provamos a Fórmula de Funk-Hecke, a qual pode auxiliar no cálculo de integrais sobre a esfera e também permitirá concluir sobre a ortogonalidade dos polinômios de Legendre. Na Seção 3.3, apresentamos algumas fórmulas que envolvem os polinômios de Legendre, em particular sua derivada. Finalmente na Seção 3.4, definimos e provamos alguns resultados sobre os polinômios de Gegenbauer. A principal referência que utilizamos neste capítulo é (ATKINSON; HAN, 2012).

3.1 Operador Projeção sobre $\mathbb{Y}_n^d$ e Ortogonalidade dos Polinômios de Legendre

Nesta seção apresentaremos o operador projeção que nos permitirá concluir que espaços harmônicos esféricos de graus distintos são ortogonais entre si e como uma consequência obteremos a ortogonalidade dos polinômios de Legendre.

Consideremos o clássico problema de encontrar a melhor aproximação em $\mathbb{Y}_n^d$ para uma função $f \in L^2(\mathbb{S}^{d-1})$:

$$\inf\left\{\|f-Y\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}; \quad Y \in \mathbb{Y}_n^d\right\}. \tag{3.1}$$

Em termos da base ortonormal $\{Y_j; 1 \leq j \leq N_{n,d}\}$ de $\mathbb{Y}_n^d$ a solução deste problema é:

$$\mathscr{P}_{n,d}f(\xi) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} (f,Y_j)_{\mathbb{S}_{d-1}} Y_j(\xi). \tag{3.2}$$

Esta é a *projeção de f sobre* $\mathbb{Y}_n^d$ e está bem definida para $f \in L^1(\mathbb{S}^{d-1})$. A desvantagem de usar esta fórmula é a exigência de conhecer explicitamente uma base ortonormal de $\mathbb{Y}_n^d$. Mas podemos evitar tal problema aplicando o Teorema da Adição 2.3.5 para reescrever o lado direito de (3.2) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{n,d} f(\xi) &= \sum_{j=1}^{N_{n,d}} (f, Y_j)_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_j(\xi) \\
&= \sum_{j=1}^{N_{n,d}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\eta) \overline{Y_j(\eta)} dS^{d-1}(\eta) Y_j(\xi) \\
&= \sum_{j=1}^{N_{n,d}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\eta) Y_j(\xi) \overline{Y_j(\eta)} dS^{d-1}(\eta) \\
&= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sum_{j=1}^{N_{n,d}} f(\eta) Y_j(\xi) \overline{Y_j(\eta)} dS^{d-1}(\eta) \\
&= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\eta) \sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_j(\xi) \overline{Y_j(\eta)} dS^{d-1}(\eta) \\
&= \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\eta) P_n^d(\xi \cdot \eta) dS^{d-1}(\eta).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Então, naturalmente temos a definição:

Definição 3.1.1. A **projeção** de $f \in L^1(\mathbb{S}^{d-1})$ sobre $\mathbb{Y}_n^d$ é dada por

$$\mathscr{P}_{n,d} f(\xi) := \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\xi \cdot \eta) f(\eta) dS^{d-1}(\eta), \quad \xi \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{3.4}$$

O operador $\mathscr{P}_{n,d}$ é obviamente linear:

$$\mathscr{P}_{n,d}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathscr{P}_{n,d} f + \beta \mathscr{P}_{n,d} g, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall f, g \in L^1(\mathbb{S}^{d-1}). \tag{3.5}$$

Proposição 3.1.2. O operador projeção $\mathscr{P}_{n,d}$ e uma transformação ortogonal comutam, isto é,

$$\mathscr{P}_{n,d} f_A = (\mathscr{P}_{n,d} f)_A, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{S}^{d-1}), \quad \forall A \in \mathbb{O}^d. \tag{3.6}$$

Demonstração. Dada $A \in \mathbb{O}^d$, temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{n,d} f_A(\xi) = \mathscr{P}_{n,d}(f \circ A)(\xi) &= \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\xi \cdot \eta) f(A\eta) dS^{d-1}(\eta) \\
&= \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(A\xi \cdot A\eta) f(A\eta) dS^{d-1}(\eta) \\
&= \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(A\xi \cdot \zeta) f(\zeta) dS^{d-1}(\zeta) \\
&= \left(\mathscr{P}_{n,d} f\right)(A\xi) = (\mathscr{P}_{n,d} f)_A(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{S}^{d-1}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

□

Uma útil consequência da Proposição 3.1.2 é o seguinte resultado.

Corolário 3.1.3. Se $\mathbb{V}$ é um espaço invariante, então $\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V} := \left\{\mathscr{P}_{n,d}f : f \in \mathbb{V}\right\}$ é um subespaço invariante de $\mathbb{Y}_n^d$.

Demonstração. Como $(\mathscr{P}_{n,d}f)\circ A = \mathscr{P}_{n,d}(f\circ A)$ e $f\circ A \in \mathbb{V}$ para toda $A \in \mathbb{O}^d$, temos que $(\mathscr{P}_{n,d}f)\circ A \in \mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V}$. □

No que segue vamos assumir que $\mathbb{V}$ é um subespaço de $C(\mathbb{S}^{d-1})$ equipado com o produto interno $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{S}^{d-1}}$.

Observação 3.1.4. Como $\mathbb{Y}_n^d$ é irredutível (veja o Teorema 2.3.6), se $\mathbb{V}$ é um espaço invariante, então ou $\mathbb{V}$ é ortogonal ao espaço $\mathbb{Y}_n^d$ ou $\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V} = \mathbb{Y}_n^d$. De fato,
a) *Afirmamos que* $\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V} = 0$ *ou* $\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V} = \mathbb{Y}_n^d$.
De fato, sabemos que $\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V}$ é um subespaço invariante de $\mathbb{Y}_n^d$. Suponhamos que $\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V}$ é um subespaço não trivial de $\mathbb{Y}_n^d$. Então, temos que

$$\mathbb{Y}_n^d = \mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V} + (\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V})^{\perp}, \tag{3.8}$$

onde $(\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V})^{\perp}$ é um subespaço invariante não trivial de $\mathbb{Y}_n^d$. Para verificar isso, seja $g \in (\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V})^{\perp}$. Devemos provar que $(g\circ A, f)_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0$, para toda $f \in \mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V}$ e $A \in \mathbb{O}^d$. Dado arbitrário $A \in \mathbb{O}^d$, temos

$$(g\circ A, f)_{\mathbb{S}^{d-1}} = (g\circ AA^T, f\circ A^T)_{\mathbb{S}^{d-1}} = (g, f\circ A^T)_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0. \tag{3.9}$$

Assim $g\circ A \in (\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V})^{\perp}$, o que implica $(\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V})^{\perp}$ é invariante. Mas isso é absurdo, pois $\mathbb{Y}_n^d$ é irredutível. Então a única coisa que pode acontecer é que: ou $\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V} = 0$ ou $\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V} = \mathbb{Y}_n^d$.
b) *No caso que* $\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V} = 0$ *temos que* $\mathbb{V}$ *é ortogonal a* $\mathbb{Y}_n^d$.
Suponha que $\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V} = 0$, e sejam $\{V_j\}_{j\in M}$ uma base ortogonal de $\mathbb{V}$ e $\{Y_k; 1 \le k \le N_{n,d}\}$ uma base ortogonal de $\mathbb{Y}_n^d$. Para $j \in M$

$$\mathscr{P}_{n,d}V_j = \sum_{k=1}^{N_{n,d}} (V_j, Y_k)_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_k = 0, \tag{3.10}$$

isto é, $(V_j, Y_k)_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0$, para $j \in M$ e $1 \le k \le N_{n,d}$. Portanto $\mathbb{V} \perp \mathbb{Y}_n^d$.

Teorema 3.1.5. Se $\mathbb{V}$ é um subespaço primitivo de $C(\mathbb{S}^{d-1})$, então ou $\mathbb{V} \perp \mathbb{Y}_n^d$ ou $\mathscr{P}_{n,d}$ é uma bijeção de $\mathbb{V}$ a $\mathbb{Y}_n^d$ e neste último caso $\mathbb{V} = \mathbb{Y}_n^d$.

Demonstração. Como $\mathbb{V}$ é primitivo, temos que $\mathbb{V}$ é invariante. Pela Observação 3.1.4 temos que ou $\mathbb{V} \perp \mathbb{Y}_n^d$ ou $\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V} = \mathbb{Y}_n^d$, isto é, $\mathscr{P}_{n,d}$ é sobrejetora. Portanto para provar o resultado falta mostrar que no caso de $\mathscr{P}_{n,d}$ ser sobrejetora, então tem-se que $\mathscr{P}_{n,d}$ é injetora e que $\mathbb{V} \subset \mathbb{Y}_n^d$. Suponhamos então que $\mathbb{V} \not\subset \mathbb{Y}_n^d$ e $\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V} = \mathbb{Y}_n^d$.

a) *Afirmamos que $\mathscr{P}_{n,d}$ é injetora.*
De fato, seja $\{Y_k; 1 \leq k \leq N_{n,d}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{Y}_n^d$. Temos

$$\begin{aligned} ker\mathscr{P}_{n,d} &= \{f \in \mathbb{V}; \mathscr{P}_{n,d} f = 0\} \\ &= \{f \in \mathbb{V}; \sum_{k=1}^{N_{n,d}} (f, Y_k)_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_k = 0\} \\ &= \{f \in \mathbb{V}; (f, Y_k)_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0, 1 \leq k \leq N_{n,d}\} \\ &= \{0\}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

pois $\mathbb{V} \not\perp \mathbb{Y}_n^d$. Portanto $\mathscr{P}_{n,d}$ é uma bijeção, e sendo assim $\mathbb{V}$ e $\mathbb{Y}_n^d$ têm a mesma dimensão $N_{n,d} = \dim(\mathbb{Y}_n^d)$. Seja $\{V_j; 1 \leq j \leq N_{n,d}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{V}$. Como $\mathbb{V}$ é invariante, para qualquer $A \in \mathbb{O}^d$ podemos escrever

$$V_j(A\xi) = \sum_{k=1}^{N_{n,d}} c_{jk} V_k(\xi), \quad c_{jk} \in \mathbb{C}. \tag{3.12}$$

Observe que (c_{jk}) é uma matriz unitária, conforme feito na prova do Teorema da Adição 2.3.5. Por outro lado, considere a função

$$V(\xi, \eta) := \sum_{j=1}^{N_{n,d}} V_j(\xi) \overline{V_j(\eta)}. \tag{3.13}$$

Novamente como na prova do Teorema da Adição 2.3.5 temos

$$V(A\xi, A\eta) = V(\xi, \eta), \quad \forall A \in \mathbb{O}^d. \tag{3.14}$$

Agora, dados $\xi, \eta \in \mathbb{S}^{d-1}$, podemos achar $A \in \mathbb{O}^d$ tal que

$$A\xi = e_d, \quad A\eta = te_d + (1-t^2)^{1/2} e_{d-1}, \quad \text{com} \quad t = \xi \cdot \eta. \tag{3.15}$$

Então, $V(\xi, \eta) = V(A\xi, A\eta) = V(e_d, te_d + (1-t^2)^{1/2} e_{d-1})$ é uma função de $t = \xi \cdot \eta$.
Isto significa, que $V(\xi, \eta) = V(\eta, \xi)$, e consequentemente:

$$\overline{V(\xi, \eta)} = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} \overline{V_j(\xi)} V_j(\eta) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} V_j(\eta) \overline{V_j(\xi)} = V(\eta, \xi) = V(\xi, \eta). \tag{3.16}$$

Agora vamos definir a função F_d por

$$F_d(t) = V(e_d, te_d + (1-t^2)^{1/2} e_{d-1}), \quad t \in [-1, 1]. \tag{3.17}$$

b) *Afirmamos que para ξ fixo, a aplicação $\eta \longmapsto \overline{F_d(\xi \cdot \eta)}$ é uma função em $\mathbb{V}$.*
De fato,

$$\overline{F_d(\xi \cdot \eta)} = \overline{V(e_d, A\eta)} = \overline{\sum_{j=1}^{N_{n,d}} V_j(e_d) \overline{V_j(A\eta)}} = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} \overline{V_j(e_d)} V_j(A\eta). \tag{3.18}$$

Então, $\eta \longmapsto \overline{F_d(\xi \cdot \eta)} \in \mathbb{V}$.

c) *Afirmamos que para ζ fixo, a aplicação $\eta \longmapsto P_n^d(\zeta \cdot \eta)$ é uma função em $\mathbb{Y}_n^d$.*

De fato, basta observar que

$$P_n^d(\xi \cdot \eta) = P_n^d(e_d \cdot A\eta) = L_{n,d}(A\eta) = Y_{n,d}(A\eta).$$

Logo, $\eta \longmapsto P_n^d(\zeta \cdot \eta) \in \mathbb{Y}_n^d$.

Agora considere a função

$$\phi(\xi,\zeta) := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \overline{F_d(\xi \cdot \eta)} P_n^d(\zeta \cdot \eta) dS^{d-1}(\eta). \tag{3.19}$$

Facilmente vemos que $\phi(A\xi, A\eta) = \phi(\xi,\zeta)$ para toda matriz $A \in \mathbb{O}^d$. Assim, semelhantemente como se deduz que V é uma função que depende somente de $t = \xi \cdot \eta$, temos que $\phi(\xi,\zeta)$ depende somente de $\xi \cdot \zeta$. Isso significa que

$$\phi(\xi,\zeta) = \phi(\zeta,\xi). \tag{3.20}$$

Isto vai ajudar-nos mais adiante.

d) *Para ξ fixo, $\phi(\xi,\cdot)$ é um múltiplo de $\mathscr{P}_{n,d}\left(\overline{F_d(\xi,\cdot)}\right)$.*

De fato,

$$\phi(\xi,\zeta) := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \overline{F_d(\xi \cdot \eta)} P_n^d(\zeta \cdot \eta) dS^{d-1}(\eta) = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}} \mathscr{P}_{n,d}\left(\overline{F_d(\xi \cdot \zeta)}\right). \tag{3.21}$$

e) *Afirmamos que ϕ pertence a $\mathbb{V}$ e $\mathbb{Y}_n^d$.*

De fato, dados $\xi, \eta \in \mathbb{S}^{d-1}$ lembremos que existe $A \in \mathbb{O}^{d-1}$ satisfazendo (3.15). Para $t = \xi \cdot \eta$, temos

$$\overline{F_d(\xi \cdot \eta)} = \overline{V(e_d, te_d + (1-t^2)^{\frac{1}{2}} e_{d-1})} = \overline{V(A\xi, A\eta)} = \overline{V(\xi,\eta)}. \tag{3.22}$$

Por (3.13) e pelo Teorema da Adição 2.3.5, temos

$$\begin{aligned}
\phi(\xi,\zeta) &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \overline{F_d(\xi \cdot \eta)} P_n^d(\zeta \cdot \eta) dS^{d-1}(\eta) \\
&= \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sum_{j=1}^{N_{n,d}} V_j(\xi)\overline{V_j(\eta)} \sum_{k=1}^{N_{n,d}} Y_k(\zeta)\overline{Y_k(\eta)} dS^{d-1}(\eta) \\
&= \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}} \sum_{k,j=1}^{N_{n,d}} V_j(\xi) Y_k(\zeta) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \overline{V_j(\eta)}\ \overline{Y_k(\eta)} dS^{d-1}(\eta) \\
&= \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}} \sum_{k,j=1}^{N_{n,d}} (\overline{V_j}, Y_k)_{\mathbb{S}^{d-1}} V_j(\xi) Y_k(\zeta).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Como $\phi(\xi,\zeta) = \phi(\zeta,\xi)$ temos

$$\phi(\xi,\zeta) = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}} \sum_{k,j=1}^{N_{n,d}} (\overline{V_j}, Y_k)_{\mathbb{S}^{d-1}} V_j(\xi) Y_k(\zeta) = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}} \sum_{k,j=1}^{N_{n,d}} (\overline{V_j}, Y_k)_{\mathbb{S}^{d-1}} V_j(\zeta) Y_k(\xi). \tag{3.24}$$

Se deixarmos fixo ξ, vemos que $\phi(\xi,\cdot)$ é uma função em $\mathbb{Y}_n^d$ e em $\mathbb{V}$.

Agora, vamos usar o fato de que $\overline{V(\xi,\eta)} = V(\xi,\eta) = \sum_{j=1}^{N_{n,d}} V_j(\xi)\overline{V_j(\eta)}$ na equação (3.19) e pelo mesmo procedimento que se fez para obter (3.23), obtemos:

$$\phi(\xi,\zeta) = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}} \sum_{k,j=1}^{N_{n,d}} (V_j,Y_k)_{\mathbb{S}^{d-1}} \overline{V_j(\xi)} Y_k(\zeta), \tag{3.25}$$

f) *Afirmamos que* $\mathbb{Y}_n^d \cap \mathbb{V} \neq 0$.
De fato, da expressão de ϕ em (3.25) e a identidade (3.2), temos que

$$\phi(\xi,\zeta) = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}} \sum_{j=1}^{N_{n,d}} \mathscr{P}_{n,d} V_j(\zeta)\overline{V_j}(\xi). \tag{3.26}$$

Como $\mathscr{P}_{n,d}\mathbb{V} = \mathbb{Y}_n^d$ temos que, para algum $j \in \{1,2,\ldots,N_{n,d}\}$, $\mathscr{P}_{n,d}V_j \neq 0$, e naturalmente $\phi \neq 0$. Portanto, $0 \neq \mathbb{Y}_n^d \cap \mathbb{V}$ é um subespaço não trivial de $\mathbb{Y}_n^d$, mais ainda $\mathbb{Y}_n^d \cap \mathbb{V}$ é invariante.
g) Afirmamos que $\mathbb{Y}_n^d \cap \mathbb{V} = \mathbb{V}$.
De fato, suponhamos que $\mathbb{Y}_n^d \cap \mathbb{V} \neq \mathbb{Y}_n^d$. Então, temos que $(\mathbb{Y}_n^d \cap \mathbb{V})^\perp$ é um subespaço não trivial invariante e

$$\mathbb{Y}_n^d = \mathbb{Y}_n^d \cap \mathbb{V} + (\mathbb{Y}_n^d \cap \mathbb{V})^\perp. \tag{3.27}$$

Assim, $\mathbb{Y}_n^d$ é redutível, o que é um absurdo. Logo, $\mathbb{Y}_n^d \cap \mathbb{V} = \mathbb{Y}_n^d$, e consequentemente $\mathbb{Y}_n^d \subset \mathbb{V}$. Como $\dim \mathbb{Y}_n^d = \dim \mathbb{V}$, segue que $\mathbb{V} = \mathbb{Y}_n^d$. $\square$

Observação 3.1.6. Os espaços harmônicos esféricos $\mathbb{Y}^d$ são completos em $C(\mathbb{S}^{d-1})$ e em $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$, ou seja, combinações lineares dos harmônicos esféricos são densos em $C(\mathbb{S}^d)$ e em $L^2(\mathbb{S}^d)$ (ATKINSON; HAN, 2012, Theorem 2.31 e p.70).

Observamos que o Teorema 3.1.5 juntamente com a Observação 3.1.6, permite-nos concluir que $\{\mathbb{Y}_n^d : n \in \mathbb{N}_0\}$ é o único sistema de espaços primitivos em $C(\mathbb{S}^{d-1})$, pois qualquer espaço primitivo não idêntico a algum $\mathbb{Y}_{n_0}^d$ é ortogonal a todos $\mathbb{Y}_n^d$ e portanto é trivial.

Se consideramos o espaço primitivo $\mathbb{V} = \mathbb{Y}_m^d$, segundo o Teorema 3.1.5, temos $\mathbb{Y}_m^d \perp \mathbb{Y}_n^d$ sempre que $m \neq n$. Para guardar este resultado importante escrevemos o seguinte corolário.

Corolário 3.1.7. Se $m \neq n$, então $\mathbb{Y}_n^d \perp \mathbb{Y}_m^d$.

Observamos que a ortogonalidade dos espaços harmônicos esféricos de ordens distintas dada no Corolário 3.1.7 juntamente com o fato destes espaços serem densos em $L^2(\mathbb{S}^d)$ permite obter a seguinte decomposição ortogonal (ATKINSON; HAN, 2012, Theorem 2.38):

$$L^2(\mathbb{S}^d) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{Y}_n^{d+1}.$$

Outra consequência do Corolário 3.1.7 é a ortogonalidade dos polinômios de Legendre de graus distintos: como $\xi \longmapsto P_n^d(\xi\cdot\zeta)$ é uma função em $\mathbb{Y}_n^d$ obtemos

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\xi\cdot\zeta) P_m^d(\xi\cdot\zeta)\, dS^{d-1}(\xi) = 0, \qquad m \neq n. \tag{3.28}$$

Pela fórmula (2.14), temos

$$\int_{\mathbb{S}^{d-2}}\left(\int_{-1}^{1} P_n^d(t)P_m^d(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dt\right)dS^{d-2}(\xi) = |\mathbb{S}^{d-2}|\int_{-1}^{1} P_n^d(t)P_m^d(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dt. \quad (3.29)$$

Assim, para $d \geq 3$,

$$\int_{-1}^{1} P_n^d(t)P_m^d(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dt = 0, \quad m \neq n. \quad (3.30)$$

Observação 3.1.8. Dado que um polinômio p_m de grau m menor que n pode ser expresso como combinação linear de polinômios de Legendre, segue que p_m é ortogonal ao polinômio de Legendre P_n^d, isto é

$$\int_{-1}^{1} p_m(t)P_n^d(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dt = 0, \qquad m < n. \quad (3.31)$$

Até o momento obtivemos que polinômios de Legendre de graus diferentes são ortogonais em $[-1,1]$ em relação à função peso $w(t) = (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}$. Na próxima seção encontraremos o valor da integral em (3.30) quando $n = m$.

3.2 Fórmula de Funk–Hecke

A fórmula de Funk-Hecke é muito útil para resolvermos integrais sobre $\mathbb{S}^{d-1}$. Para começar vamos introduzir o espaço $L^1_{(d-3)/2}(-1,1)$ como segue,

$$L^1_{(d-3)/2}(-1,1) := \left\{ f \text{ mensurável em } (-1,1); \, ||f||_{L^1_{(d-3)/2}(-1,1)} < \infty \right\}, \quad (3.32)$$

com a norma dada por

$$||f||_{L^1_{(d-3)/2}(-1,1)} := \int_{-1}^{1} |f(t)|(1-t^2)^{(d-3)/2}dt. \quad (3.33)$$

Se $f \in C([-1,1])$, então f é mensurável em $(-1,1)$. E como $f \in C([-1,1])$ possui máximo em $[-1,1]$, e a integral $\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}$ sempre é limitada para $d \geq 2$, temos que

$$C([-1,1]) \subset L^1_{(d-3)/2}(-1,1).$$

Dados $f \in L^1_{(d-3)/2}(-1,1)$ e $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, definimos

$$f_\xi(\eta) := f(\xi \cdot \eta), \quad \eta \in \mathbb{S}^{d-1}. \quad (3.34)$$

a) Afirmamos que $\mathscr{P}_{n,d}f_\xi$ é invariante com relação a $\mathbb{O}^d(\xi)$.
De fato, dada $A \in \mathbb{O}^d(\xi)$, pela Proposição 3.1.2, temos

$$\begin{aligned}(\mathscr{P}_{n,d}f_\xi)_A(\eta) &= \mathscr{P}_{n,d}(f_\xi \circ A)(\eta) = (\mathscr{P}_{n,d}f_\xi)(A\eta)\\ &= \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(A\eta\cdot\zeta)f_\xi(\zeta)dS^{d-1}(\zeta)\\ &= \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(A\eta\cdot\zeta)f(\xi\cdot\zeta)dS^{d-1}(\zeta)\\ &= \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\eta\cdot A^T\zeta)f(\xi\cdot A^T\zeta)dS^{d-1}(\zeta) \qquad (3.35)\\ &= \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\eta\cdot A^T\zeta)f_\xi(A^T\zeta)dS^{d-1}(\zeta)\\ &= \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\eta\cdot y)f_\xi(y)dS^{d-1}(y).\\ &= \mathscr{P}_{n,d}f_\xi(\eta).\end{aligned}$$

Isto prova a afirmação.

Como $\mathscr{P}_{n,d}f_\xi \in \mathbb{Y}_n^d$ e a afirmação *a)* é válida, pelo Teorema 2.3.4, temos

$$\mathscr{P}_{n,d}f_\xi(\eta) = (\mathscr{P}_{n,d}f_\xi)(\xi)P_n^d(\xi\cdot\eta) = \lambda_n\frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}P_n^d(\xi\cdot\eta), \quad \forall\eta\in\mathbb{S}^{d-1}, \qquad (3.36)$$

onde

$$\lambda_n = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\xi\cdot\zeta)f(\xi\cdot\zeta)dS^{d-1}(\zeta), \qquad (3.37)$$

isto é, $\mathscr{P}_{n,d}f_\xi$ é múltiplo de $P_n^d(\xi\cdot)$.
Fazendo $\xi = e_d$ na equação (3.37) obtemos:

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(e_d\cdot\zeta)f(e_d\cdot\zeta)dS^{d-1} = \lambda_n. \qquad (3.38)$$

Escrevendo $\zeta = te_d + (1-t^2)^{1/2}\zeta_{(d-1)}$, onde $\zeta_{(d-1)} \in \mathbb{S}^{d-2}$, $t = e_d\cdot\zeta$, e usando a fórmula (2.14) podemos reescrever λ_n em (3.38) como

$$\int_{\mathbb{S}^{d-2}}\int_{-1}^{1} P_n^d(e_d\cdot(te_d+(1-t^2)^{1/2}\zeta_{(d-1)}))f(e_d\cdot(te_d+(1-t^2)^{1/2}\zeta_{(d-1)}))(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dtdS^{d-2}. \qquad (3.39)$$

Logo, é claro que

$$\lambda_n = \int_{\mathbb{S}^{d-2}}\int_{-1}^{1} P_n^d(t)f(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dtdS^{d-2} = |\mathbb{S}^{d-2}|\int_{-1}^{1} P_n^d(t)f(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dt. \qquad (3.40)$$

Aplicando a definição de projeção em (3.36) temos:

$$\lambda_n P_n^d(\xi\cdot\eta) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\eta\cdot\zeta)f(\xi\cdot\zeta)dS^{d-1}(\zeta). \qquad (3.41)$$

Multiplicando a equação (3.41) por $Y_n \in \mathbb{Y}_n^d$ e integrando sobre $\mathbb{S}^{d-1}$ com relação a η, obtemos:

$$\begin{aligned}
\lambda_n \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\xi\cdot\eta)Y_n(\eta)dS^{d-1}(\eta) &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\eta\cdot\xi)f(\xi\cdot\zeta)dS^{d-1}(\zeta)Y_n(\eta)dS^{d-1}(\eta)\\
&= \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\eta\cdot\zeta)f(\xi\cdot\zeta)Y_n(\eta)dS^{d-1}(\zeta)dS^{d-1}(\eta)\\
&= \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\eta\cdot\zeta)f(\xi\cdot\zeta)Y_n(\eta)dS^{d-1}(\eta)dS^{d-1}(\zeta)\\
&= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\xi\cdot\zeta)\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\eta\cdot\zeta)Y_n(\eta)dS^{d-1}(\eta)dS^{d-1}(\zeta).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Como $P_n^d(\eta\cdot\zeta) = P_n^d(\zeta\cdot\eta)$, então

$$\lambda_n \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\xi\cdot\eta)Y_n(\eta)dS^{d-1}(\eta) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\xi\cdot\zeta)\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\zeta\cdot\eta)Y_n(\eta)dS^{d-1}(\eta)dS^{d-1}(\zeta). \tag{3.43}$$

Aplicando o Teorema da Adição 2.3.5,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\zeta\cdot\eta)Y_n(\eta)dS^{d-1}(\eta) &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}}\sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_j(\zeta)\overline{Y_j(\eta)}Y_n(\eta)dS^{d-1}(\eta)\\
&= \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}}\sum_{j=1}^{N_{n,d}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \overline{Y_j(\eta)}Y_n\eta dS^{d-1}(\eta)Y_j(\zeta)\\
&= \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}}\sum_{j=1}^{N_{n,d}}(Y_n,Y_j)_{\mathbb{S}^{d-1}}Y_j(\zeta)\\
&= \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}}Y_n(\zeta).
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\zeta\cdot\eta)Y_n(\eta)dS^{d-1}(\eta) = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}}Y_n(\zeta), \qquad Y_n\in\mathbb{Y}_n^d, \quad \zeta\in\mathbb{S}^{d-1}. \tag{3.45}$$

Aplicando esta fórmula em ambos lados da equação (3.43) temos:

$$\lambda_n Y_n(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\xi\cdot\zeta)Y_n(\zeta)dS^{d-1}(\zeta). \tag{3.46}$$

Da análise feita até aqui temos o seguinte teorema.

Teorema 3.2.1 (Fórmula de Funk-Hecke)**.** Sejam $f\in L^1_{(d-3)/2}(-1,1)$, $\xi\in\mathbb{S}^{d-1}$ e $Y_n\in\mathbb{Y}_n^d$. Então,

$$\lambda_n Y_n(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\xi\cdot\zeta)Y_n(\zeta)dS^{d-1}(\zeta), \tag{3.47}$$

onde a constante λ_n é dada por

$$\lambda_n = |\mathbb{S}^{d-2}|\int_{-1}^{1} P_n^d(t)f(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dt. \tag{3.48}$$

Como para $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$ fixo, $Y_n = P_n^d(\eta \cdot)$ pertence a $\mathbb{Y}_n^d$, pela Fórmula de Funk-Hecke temos:

Corolário 3.2.2. Sejam $f \in L^1_{(d-3)/2}(-1,1)$ e $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$ fixo. Então,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\xi \cdot \zeta) P_n^d(\eta \cdot \zeta) dS^{d-1}(\zeta) = \lambda_n P_n^d(\eta \cdot \xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.49}$$

onde λ_n está dada pela equação (3.48).

Observação 3.2.3. Tomando $f = P_n^d$ em (3.47) obtemos:

$$\lambda_n Y_n(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\xi \cdot \eta) Y_n(\eta) dS^{d-1}(\eta), \tag{3.50}$$

onde a constante λ_n é dada por

$$\lambda_n = |\mathbb{S}^{d-2}| \int_{-1}^{1} [P_n^d(t)]^2 (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt. \tag{3.51}$$

Fazendo $\zeta = \xi$ na equação (3.45) vemos que:

$$\frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}} Y_n(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n^d(\xi \cdot \eta) Y_n(\eta) dS^{d-1}(\eta). \tag{3.52}$$

Das equações (3.50) e (3.52) evidentemente segue $\lambda_n = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_{n,d}}$. Substituindo-se em (3.51) obtemos

$$\int_{-1}^{1} [P_n^d(t)]^2 (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{|\mathbb{S}^{d-2}| N_{n,d}}, \tag{3.53}$$

O que completa os valores da integral na equação (3.30) para o caso $n = m$.

Para $d \geq 3$, introduzimos o produto interno $(\cdot,\cdot)_d$ com relação à função peso $w(t) = (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}$. Sejam $f, g \in L^1_{(d-3)/2}(-1,1)$, o produto interno peso é dado por

$$(f,g)_d := \int_{-1}^{1} f(t) g(t) (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt. \tag{3.54}$$

Dizemos f é ortogonal a g em $[-1,1]$ com relação à função peso w quando:

$$\int_{-1}^{1} f(t) g(t) (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt = 0. \tag{3.55}$$

Uma das vantagens que oferece a ortogonalidade dos espaços $\mathbb{Y}_n^d$ (Corolário 3.1.7) pode ser vista na ortogonalidade dos polinômios de Legendre P_n^d com relação ao produto interno $(\cdot,\cdot)_d$ obtida na equação (3.30). Além disso, o Teorema de Funk-Hecke 3.2.1 fornece informação sobre o valor $(P_n^d, P_m^d)_d$ quando n e m são iguais (equação (3.53)). Assim, não poderíamos deixar de exibir claramente a ortogonalidade dos polinômios de Legendre no seguinte resultado importante.

Proposição 3.2.4. Para $d \geq 3$ fixo, os polinômios de Legendre associados a d são ortogonais em $[-1,1]$ com relação à função peso $w(t) = (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}$, e cumpre com a seguinte relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^{1} P_n^d(t) P_m^d(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{|\mathbb{S}^{d-2}| N_{n,d}} \delta_{nm}, \quad m,n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.56}$$

onde δ_{nm} é a função Delta de Kronecker.

Observação 3.2.5. Usando as fórmulas (2.21) e (3.56) temos

$$\int_{-1}^{1} [P_n^d(t)]^2 (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})}{N_{n,d}\Gamma(\frac{d}{2})}. \tag{3.57}$$

3.3 Algumas Fórmulas e a Derivada de P_n^d

O objetivo desta seção é obter uma expressão para a derivada de um polinômio de Legendre, mas este resultado não é imediato e antes vamos apresentar algumas ferramentas.

Teorema 3.3.1 (Fórmula de Rodrigues)**.** Sejam $d \geq 2$, $n \in \mathbb{N}_0$. O polinômio de Legendre associado a d satisfaz a equação

$$P_n^d(t) = (-1)^n R_{n,d} (1-t^2)^{\frac{3-d}{2}} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (1-t^2)^{n+\frac{d-3}{2}}, \quad t \in [-1,1], \tag{3.58}$$

onde $R_{n,d}$ é chamada constante de Rodrigues dada por:

$$R_{n,d} = \frac{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{2^n \Gamma\left(n + \frac{d-1}{2}\right)}. \tag{3.59}$$

Demonstração. Ver (ATKINSON; HAN, 2012, p.37). □

A fórmula de Rodrigues para o polinômio de Legendre *standard* pode ser recuperada a partir da equação (3.58). Para mais detalhes ver (ATKINSON; HAN, 2012, p.38)

Como uma aplicação da Fórmula de Rodrigues temos um resultado que é útil para resolver integrais que envolvem polinômios de Legendre.

Proposição 3.3.2. Sejam $d \geq 2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Se f é uma função em $C([-1,1])$ com derivadas contínuas até ordem n, então

$$\int_{-1}^{1} f(t) P_n^d(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt = R_{n,d} \int_{-1}^{1} f^{(n)}(t)(1-t^2)^{n+\frac{d-3}{2}} dt, \quad d \geq 3, \tag{3.60}$$

onde a $R_{n,d}$ é a constante de Rodrigues dada em (3.59).

Demonstração. Pela Fórmula de Rodrigues (3.58), o lado esquerdo de (3.60) é igual a

$$I := (-1)^n R_{n,d} \int_{-1}^{1} f(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^n (1-t^2)^{n+\frac{d-3}{2}} dt. \tag{3.61}$$

Fazendo integração por partes n vezes nessa integral, temos

$$\begin{aligned} I &= (-1)^n R_{n,d} \left[f(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} (1-t^2)^{n+\frac{d-3}{2}} \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f'(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} (1-t^2)^{n+\frac{d-3}{2}} dt \right] \\ &\vdots \\ &= (-1)^n R_{n,d} \left[f(t)(1-t^2)^{n+\frac{d-3}{2}} \Big|_{-1}^{1} + (-1)^n \int_{-1}^{1} f^n(t)(1-t^2)^{n+\frac{d-3}{2}} dt \right] \\ &= R_{n,d} \int_{-1}^{1} f^{(n)}(t)(1-t^2)^{n+\frac{d-3}{2}} dt. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.3. Para $n \in \mathbb{N}_0$ e $d \geq 3$,

$$P_n^d(t) = \frac{|\mathbb{S}^{d-3}|}{|\mathbb{S}^{d-2}|} \int_{-1}^{1} [t + i(1-t^2)^{1/2} s]^n (1-s^2)^{\frac{d-4}{2}} ds, \quad t \in [-1,1]. \tag{3.62}$$

Demonstração. Ver (ATKINSON; HAN, 2012, p.39,40). □

Da fórmula (2.22), temos que P_n^d também pode ser expresso da seguinte forma

$$P_n^d(t) = \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d-2}{2})} \int_{-1}^{1} [t + i(1-t^2)^{1/2} s]^n (1-s^2)^{\frac{d-4}{2}} ds, \quad t \in [-1,1]. \tag{3.63}$$

Proposição 3.3.4. Para $n \geq 1$ e $d \geq 2$, escreva o polinômio de Legendre na forma

$$P_n^d(t) := a_{n,d} t^n + tgm, \tag{3.64}$$

onde tgm denota o termo de grau menor que n. Então, o coeficiente principal $a_{n,d}$ de P_n^d é dado por

$$a_{n,d} = \frac{2^{n-1}\Gamma(d-1)\Gamma(n+\frac{d-2}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(n+d-2)}. \tag{3.65}$$

Demonstração. Como tgm é ortogonal a P_n^d (ver Observação 3.1.8), temos que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} [P_n^d(t)]^2 (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt &= \int_{-1}^{1} (a_{n,d} t^n + t.g.m.) P_n^d(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt \\ &= a_{n,d} \int_{-1}^{1} t^n P_n^d (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Pela equação (3.57) o lado esquerdo de (3.66) é igual a:

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})}{N_{n,d}\Gamma(\frac{d}{2})}. \tag{3.67}$$

Pela Proposição 3.3.2, vemos que o lado direito de (3.66) é igual a:

$$a_{n,d}R_{n,d}n!\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n+\frac{d-3}{2}}dt, \tag{3.68}$$

onde $R_{n,d}$ é a constante de Rodriguez.
Vamos resolver a integral acima fazendo a mudança de variável $s=t^2$. Então, $dt=\frac{1}{2}s^{-\frac{1}{2}}ds$ e

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n+\frac{d-3}{2}}dt=2\int_{0}^{1}(1-t^2)^{n+\frac{d-3}{2}}dt=2\int_{0}^{1}\frac{(1-s)^{n+\frac{d-3}{2}}}{2s^{\frac{1}{2}}}ds\\=\int_{0}^{1}s^{\frac{1}{2}-1}(1-s)^{n+\frac{d-3}{2}}ds=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{d-1}{2})}{\Gamma(n+\frac{d}{2})}.\end{aligned} \tag{3.69}$$

Então, usando (3.67), (3.68) e (3.69), a equação (3.66) torna-se

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})}{N_{n,d}\Gamma(\frac{d}{2})}=a_{n,d}R_{n,d}n!\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{d-1}{2})}{\Gamma(n+\frac{d}{2})}. \tag{3.70}$$

Mas o valor da constante de Rodriguez $R_{n,d}$ é dado em (3.59), logo temos

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})}{N_{n,d}\Gamma(\frac{d}{2})}=a_{n,d}\frac{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(n+\frac{d-1}{2}\right)}n!\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{d-1}{2})}{\Gamma(n+\frac{d}{2})}. \tag{3.71}$$

Fazendo algumas simplificações e substituindo o valor de $N_{n,d}$ dado em (2.29) temos:

$$a_{n,d}=\frac{2^n\Gamma\left(n+\frac{d}{2}\right)(d-2)!}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(2n+d-2)(n+d-3)!}. \tag{3.72}$$

Além disso, por (2.16) e (2.17), temos

$$\Gamma\left(n+\frac{d}{2}\right)=\Gamma\left(n+\frac{d}{2}-1\right)(n+\frac{d}{2}-1),\quad \Gamma(d-1)=(d-2)!,\quad \Gamma(n+d-2)=(n+d-3)!,$$

pois $n+\frac{d}{2}-1>0$, $d-2\in\mathbb{N}_0$ e $n+d-3\in\mathbb{N}_0$. Portanto,

$$a_{n,d}=\frac{2^{n-1}\Gamma(d-1)\Gamma(n+\frac{d-2}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(n+d-2)}. \tag{3.73}$$

□

A Proposição 3.3.4 é uma ferramenta muito útil para obter a derivada de um polinômio de Legendre. Na verdade a derivada de um polinômio de Legendre, pode ser expresso em termos de outro polinômio de Legendre como vemos a seguir.

Proposição 3.3.5. Para $n\geq 1$ e $d\geq 2$,

$$\frac{d}{dt}P_n^d(t)=(P_n^d)'(t)=\frac{n(n+d-2)}{d-1}P_{n-1}^{d+2}(t). \tag{3.74}$$

Demonstração. Uma aplicação da fórmula (3.73) implica que

$$\frac{a_{n,d}}{a_{n-1,d+2}} = \frac{n+d-2}{d-1}. \tag{3.75}$$

Definindo o polinômio

$$P(t) := (d-1)(P_n^d)'(t) - n(n+d-2)P_{n-1}^{d+2}(t), \tag{3.76}$$

devemos demonstrar que $P = 0$.

Note que o polinômio P é de grau menor ou igual a $n-2$, pois o coeficiente principal da primeira parcela é o inverso aditivo do coeficiente principal da segunda parcela.

a) Afirmamos que para $k \leq n-2$, temos $\left((P_n^d)', P_k^{d+2}\right)_{d+2} = 0$.

De fato, integrando por partes,

$$\begin{aligned}
\left((P_n^d)', P_k^{d+2}\right)_{d+2} &= \int_{-1}^{1} (P_n^d)'(t) P_k^{d+2}(t)(1-t)^{\frac{d-1}{2}} dt \\
&= P_k^{d-2}(t)(1-t^2)^{\frac{d-1}{2}} P_n^d(t)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_n^d(t) \frac{d}{dt}\left[P_k^{d+2}(t)(1-t^2)^{\frac{d-1}{2}}\right] dt \\
&= -\int_{-1}^{1} P_n^d(t)\left[(P_k^{d+2})'(t)(1-t^2)^{\frac{d-1}{2}} - P_k^{d+2}(t)(d-1)t(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}\right] dt \\
&= -\int_{-1}^{1} P_n^d(t)\left[(P_k^{d+2})'(t)(1-t^2) - (d-1)P_k^{d+2}(t)t\right](1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt.
\end{aligned}$$

Como a expressão dentro dos colchetes é um polinômio de grau $\leq n-1$, segue pela Observação 3.1.8 que a integral é nula, portanto $\left((P_n^d)', P_k^{d+2}\right)_{d+2} = 0$.

b) Afirmamos que P é ortogonal a todo polinômio de grau $\leq n-2$, isto com relação ao produto interno $(\cdot,\cdot)_{d+2}$.

De fato, primeiramente veja que, para $k \leq n-2$,

$$\left(P, P_k^{d+2}\right)_{d+2} = (d-1)\left((P_n^d)'(t), P_k^{d+2}(t)\right)_{d+2} - n(n+d-2)\left(P_{n-1}^{d+2}(t), P_k^{d+2}(t)\right)_{d+2} = 0. \tag{3.77}$$

Seja P_m um polinômio de grau $\leq n-2$. Como P_m pode ser escrito como combinação linear de polinômios de Legendre de graus menores ou iguais a $n-2$, então $(P, P_m)_{d+2} = 0$.

Assim, o polinômio P é de grau $\leq n-2$ e é ortogonal a todo polinômio de grau $\leq n-2$ com relação ao produto interno peso $(\cdot,\cdot)_{d+2}$. Portanto, P deve ser o polinômio nulo. □

3.4 Polinômios de Gegenbauer

Nesta seção apresentamos os polinômios de Gegenbauer e algumas de suas propriedades, as quais serão amplamente usadas nos Capítulos 4 e 5.

Definição 3.4.1 (Polinômio de Gegenbauer)**.** Para $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, definimos

$$C_n^\lambda(t) := \binom{n+2\lambda-1}{n} \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda)} \int_{-1}^{1} [t + i(1-t^2)s]^n (1-s^2)^{\lambda-1} ds \tag{3.78}$$

como sendo o **polinômio de Gegenbauer de grau n associado ao parâmetro λ.**

Observação 3.4.2. Afirmamos que C_n^λ de fato é um polinômio de grau n. Lembrando do Teorema do binômio de Newton, temos

$$[t+i(1-t^2)s]^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{n-j}(1-t^2)^{j/2}(is)^j. \tag{3.79}$$

Para $j = 2k+1$ temos $\int_{-1}^{1} s^{2k+1}(1-s^2)^{\lambda-1}ds = 0$, pois $s^{2k+1}(1-s^2)^{\lambda-1}$ é um função ímpar. Assim podemos reescrever (3.78) da forma:

$$\begin{aligned} C_n^\lambda(t) &= \binom{n+2\lambda-1}{n} \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda)} \int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{n-j}(1-t^2)^{j/2}(is)^j(1-s^2)^{\lambda-1}ds \\ &= \binom{n+2\lambda-1}{n} \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda)} \sum_{j=0,2,\ldots,p}^{n} \binom{n}{j} t^{n-j}(1-t^2)^{j/2} \int_{-1}^{1} (is)^j(1-s^2)^{\lambda-1}ds \\ &= \binom{n+2\lambda-1}{n} \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda)} \sum_{j=0,2,\ldots,p}^{n} \binom{n}{j} t^{n-j}(1-t^2)^{j/2} i^j \int_{-1}^{1} s^j(1-s^2)^{\lambda-1}ds, \end{aligned} \tag{3.80}$$

onde $p = n-1$ se n é impar ou $p = n$ se n for par. Na verdade temos:

$$C_n^\lambda(t) = \binom{n+2\lambda-1}{n} \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda)} \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} t^{n-2k}(1-t^2)^k(-1)^k \int_{-1}^{1} s^{2k}(1-s^2)^{\lambda-1}ds. \tag{3.81}$$

Note que para $k = 0,1,...,[n/2]$, a expressão $t^{n-2k}(1-t^2)^k$ é um polinômio de grau n, cujo termo de grau n é

$$t^n(-1)^k, \quad k = 0,1,...,[n/2].$$

Logo, o coeficiente de t^n em (3.81) é

$$\binom{n+2\lambda-1}{n} \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda)} \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} \int_{-1}^{1} s^{2k}(1-s^2)^{\lambda-1}ds, \tag{3.82}$$

pois a função $s^{2k}(1-s^2)^{\lambda-1}$ é par não nula, o que implica que a integral acima é positiva. Portanto C_n^λ é um polinômio de grau n.

Mostramos agora um resultado que relaciona os polinômios de Gegenbauer com os polinômios de Legendre.

Corolário 3.4.3. Para $d \geq 3$ e $n \in \mathbb{N}_0$,

$$C_n^{\frac{d-2}{2}}(t) = \binom{n+d-3}{n} P_n^d(t). \tag{3.83}$$

Demonstração. Pela definição de polinômios de Gegenbauer e a identidade (3.63), segue que

$$C_n^{\frac{d-2}{2}}(t) = \binom{n+d-3}{n} \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d-2}{2})} \int_{-1}^{1} [t+i(1-t^2)^{1/2}s]^n(1-s^2)^{\frac{d-4}{2}}ds = \binom{n+d-3}{n} P_n^d(t). \tag{3.84}$$

□

A seguir descrevemos os polinômios de Chebychev de primeiro e segundo tipo. Será útil conhecê-los para posteriormente obter a derivada dos polinômios de Gegenbauer.

Definição 3.4.4. Para $n \in \mathbb{N}_0$, o polinômio de grau n dado por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad \text{ou} \quad T_n(\cos t) = \cos(nt), \tag{3.85}$$

é chamado **polinômio de Chebychev de primeiro tipo**.

Definição 3.4.5. Para $n \in \mathbb{N}_0$, o polinômio de grau n dado por

$$U_n(x) = \frac{\operatorname{sen}((n+1)\arccos x)}{\operatorname{sen}(\arccos x)}, \quad \text{ou} \quad U_n(\cos t) = \frac{\operatorname{sen}((n+1)t)}{\operatorname{sen}(t)}, \tag{3.86}$$

é chamado **polinômio de Chebychev de segundo tipo**.

Não é difícil ver que a derivada de T_n é dada por

$$\frac{dT_n(x)}{dt} = nU_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \tag{3.87}$$

Os polinômios de Chebychev mantém uma relação com os polinômios de Gegenbauer, como vemos a seguir:

$$T_n(x) = \frac{n}{2} C_n^0(x), \quad n \geq 1. \tag{3.88}$$

$$U_n(x) = C_n^1(x), \quad n \geq 1. \tag{3.89}$$

Vale destacar que as fórmulas envolvendo o polinômio de Gegenbauer associado a $\lambda = 0$ devem ser entendidas em termos do limite (SZEGÖ, 1959, p. 80):

$$C_n^0(x) := \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{C_n^\lambda(x)}{\lambda}. \tag{3.90}$$

Como aplicação imediata da derivada de P_n^d e as identidades (3.87), (3.88) e (3.89) temos a derivada de C_n^λ no caso particular em que $\lambda = \frac{d-2}{2}$.

Proposição 3.4.6. Seja $d \geq 2$, e sendo $\lambda = \frac{d-2}{2}$. Então para $n \in \mathbb{N}_0$ temos:

$$\left(C_n^\lambda\right)'(t) = \begin{cases} 2\lambda C_{n-1}^{\lambda+1}(t), & \text{se} \quad \lambda > 0 \\ 2C_{n-1}^1(t), & \text{se} \quad \lambda = 0. \end{cases} \tag{3.91}$$

Demonstração. a) Prova para o caso $\lambda > 0$. Pelas igualdades (3.83) e (3.74)

$$\begin{aligned}
\left(C_n^{\lambda}\right)'(t) = \left(C_n^{\frac{d-2}{2}}\right)'(t) &= \binom{n+d-3}{n}\left(P_n^d\right)'(t)\\
&= \binom{n+d-3}{n}\frac{n(n+d-2)}{d-1}P_{n-1}^{d+2}(t)\\
&= \frac{(n+d-3)!}{n!(d-3)!}\frac{n(n+d-2)}{d-1}P_{n-1}^{d+2}(t)\\
&= \frac{(n-d-2)!(d-2)}{(n-1)!(d-1)(d-2)(d-3)!}P_{n-1}^{d+2}(t)\\
&= (d-2)\frac{(n+d-2)!}{(n-1)!(d-1)!}P_{n-1}^{d+2}(t)\\
&= (d-2)\binom{n+d-2}{n-1}P_{n-1}^{d+2}(t).
\end{aligned}$$

Novamente por (3.83),

$$\left(C_n^{\lambda}\right)'(t) = (d-2)C_{n-1}^{\frac{d}{2}}(t) = 2\lambda C_{n-1}^{\lambda+1}(t). \tag{3.92}$$

b) Prova para o caso $\lambda = 0$ *ou* $d = 2$.
Pelas identidades (3.87), (3.88) e (3.89) temos:

$$\frac{d}{dt}C_n^0(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{2}{n}T_n(x)\right] = \frac{2}{n}\frac{d}{dt}T_n(t) = \frac{2}{n}nU_{n-1}(t) = 2U_{n-1}(t) = 2C_{n-1}^1(t).$$

□

3.4.1 Ortogonalidade dos Polinômios de Gegenbauer

Da ortogonalidade dos polinômios de Legendre e em virtude da relação destes com os polinômios de Gegenbauer se deduz a ortogonalidade dos polinômios de Gegenbauer. No Capítulo 4, veremos que, quando $d \geq 3$, os polinômios de Gegenbaur associados ao índice $(d-2)/2$ estão totalmente relacionados com as funções definidas positivas em $\mathbb{S}^{d-1}$ (Teorema de Schoenberg 4.3.10).

Para $d \geq 3$, $n \neq m$, e considerando (3.83) e (3.56) temos

$$\int_{-1}^{1} C_n^{\frac{d-2}{2}}(t)C_m^{\frac{d-2}{2}}(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dt = \binom{n+d-3}{n}\binom{m+d-3}{m}\int_{-1}^{1} P_n^d(t)P_m^d(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dt = 0. \tag{3.93}$$

Colocando $\lambda = \frac{d-2}{2}$ podemos reescrever a igualdade acima como

$$\int_{-1}^{1} C_n^{\lambda}(t)C_m^{\lambda}(t)(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dt = 0, \quad m \neq n. \tag{3.94}$$

Considerando agora as identidades (3.83) e (3.53), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \left[C_n^{\frac{d-2}{2}}(t)\right]^2 (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt &= \binom{n+d-3}{n}^2 \int_{-1}^{1} \left[P_n^d(t)\right]^2 (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt \\ &= \binom{n+d-3}{n}^2 \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{|\mathbb{S}^{d-2}| N_{n,d}}. \end{aligned} \tag{3.95}$$

Tomando $\lambda = \frac{d-2}{2}$ obtemos

$$\int_{-1}^{1} \left[C_n^{\lambda}(t)\right]^2 (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt = \binom{n+d-3}{n}^2 \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{|\mathbb{S}^{d-2}| N_{n,d}}, \tag{3.96}$$

Em resumo,

$$\int_{-1}^{1} C_n^{\lambda}(t) C_m^{\lambda}(t) (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt = \binom{n+d-3}{n}^2 \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{|\mathbb{S}^{d-2}| N_{n,d}} \delta_{mn}, \tag{3.97}$$

onde δ_{mn} é a função Delta de Kronecker.

Finalizamos este capítulo com as seguintes fórmulas que envolvem os polinômios de Gegenbauer e que serão usadas no Capítulo 5.

- Relação diferencial (veja (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965), fórmula 22.8.2):

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}C_{n-1}^{\lambda}(x) = -(n-1)xC_{n-1}^{\lambda}(x) + (n+2\lambda)C_{n-2}^{\lambda}(x), \quad \lambda > 0, n \geq 2. \tag{3.98}$$

- Relação de recorrência com respeito ao grau n (veja (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965), fórmula 22.7.3):

$$(n+1)C_{n+1}^{\lambda}(x) = (2n+\lambda)C_n^{\lambda}(x) + (n+2\lambda-1)C_{n-1}^{\lambda}(x), \quad \lambda > 0, n \geq 1. \tag{3.99}$$

- Relação de recorrência de três termos (veja (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965), fórmula 22.7.23):

$$(n+\lambda)C_{n+1}^{\lambda-1}(x) = (\lambda-1)[C_{n+1}^{\lambda}(x) - C_{n-1}^{\lambda}(x)], \quad \lambda > 1, n \geq 1. \tag{3.100}$$

CAPÍTULO

4

FUNÇÕES DEFINIDAS POSITIVAS

Neste capítulo apresentamos um estudo sobre matrizes e funções definidas positivas. Na Seção 4.1, expomos a definição e alguns resultados sobre matrizes definidas positivas. Na Seção 4.2, apresentamos o conceito de núcleos definidos positivos o qual está relacionado com o de matrizes definidas positivas. Na Seção 4.3 apresentamos o conceito de funções definidas positivas que por sua vez está relacionado ao de núcleos definidos positivos. Nosso principal objetivo está relacionado com as funções definidas positivas em esferas reais e neste contexto, os principais resultados que usaremos encontram-se em (SCHOENBERG, 1942; XU; CHENEY, 1992; CHEN; MENEGATTO; SUN, 2003). As principais referências para os resultados apresentados neste capítulo são (BERG; CHRISTENSEN; RESSEL, 1984) e (HORN; JOHNSON, 2013).

4.1 Matrizes Definidas Positivas

Definição 4.1.1. Uma matriz $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{n} \in M_n(\mathbb{C})$ é chamada **definida positiva** se para cada conjunto $\{c_1, ..., c_n\} \subseteq \mathbb{C}$,

$$c^*Ac = \sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j} c_k a_{jk} \geq 0, \tag{4.1}$$

onde $c = (c_1, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{C}^n$ e $c^* = (\overline{c_1}, \ldots, \overline{c_n})$. Se $c^*Ac > 0$ para todo $c \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, a matriz A é chamada **estritamente definida positiva**.

A soma dupla na equação (4.1) é também chamada por alguns autores de forma quadrática.

Definição 4.1.2. Uma matriz $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{n} \in M_n(\mathbb{C})$ é **Hermitiana** se $A = A^*$, isto é,

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}}, \quad 1 \leq j,k \leq n.$$

Claramente os elementos da diagonal principal de uma matriz Hermitiana são reais. Um exemplo de matriz Hermitiana bem simples é o que segue:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2-i \\ 1+i & 2 & 3+2i \\ 2+i & 3-2i & 3 \end{pmatrix}$$

Observação 4.1.3. Toda matriz $A \in M_2(\mathbb{C})$ definida positiva é hermitiana, isto é, se $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ é definida positiva, então $b = \overline{c}$, e $a, d \in \mathbb{R}$. De fato, considerando $(1,0)^T \in \mathbb{C}^2$ e $(0,1)^T \in \mathbb{C}^2$ temos:

$$0 \leq \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a; \quad 0 \leq \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = d,$$

o que implica $a, d \in \mathbb{R}$.
Agora vamos considerar $(1,1)^T \in \mathbb{C}^2$. Assim,

$$0 \leq \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a + b + c + d, \tag{4.2}$$

o que implica que

$$Im(b) = -Im(c). \tag{4.3}$$

Por outra parte, considerando $(1,i)^T \in \mathbb{C}^2$ temos,

$$0 \leq \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = a - ib + ic + d, \tag{4.4}$$

o que implica que

$$Re(b) = Re(c). \tag{4.5}$$

Logo, (4.3) e (4.5) implicam $b = \overline{c}$.

Lema 4.1.4. A matriz hermitiana $\begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ b & d \end{pmatrix}$ é definida positiva se, e somente se $a \geq 0$, $d \geq 0$ e $\det \begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ b & d \end{pmatrix} \geq 0$.

Demonstração. Como a matriz é Hermitiana, pela Observação 4.1.3 é claro que $a \geq 0$ e $d \geq 0$. Se $a = 0$ e $d > 0$, então $\det\left(\begin{smallmatrix} a & \overline{b} \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \geq 0$ se, e somente se $b = 0$, e $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ é definida positiva. Os casos em que $a > 0, b = 0$ ou $a = 0, d = 0$ segue de forma semelhante. Resta o caso em que $a, d > 0$. Tome $z, w \in \mathbb{C}$ e temos,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w} \\ \overline{z} \end{pmatrix} &= \overline{w}wa + \overline{w}zb + \overline{z}w\overline{b} + \overline{z}zd \\ &= |w|^2 a + |z|^2 d + \overline{w}zb + \overline{z}w\overline{b}. \end{aligned}$$

Somando convenientemente $\frac{1}{a}|b|^2|z|^2$ e o seu inverso aditivo no lado direito da igualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{w} \\ \overline{z} \end{pmatrix} &= a|w|^2 + w\overline{z}\overline{b} + bz\overline{w} + \frac{1}{a}|b|^2|z|^2 + |z|^2 d - \frac{1}{a}|b|^2|z|^2 \\
&= a\left(|w|^2 + \frac{w}{a}\overline{z}\overline{b} + \frac{1}{a}bz\overline{w} + \frac{1}{a^2}|b|^2|z|^2) + \frac{|z|^2}{a}(ad - |b|^2\right) \\
&= a\left(w + \frac{b}{a}z\right)\overline{\left(w + \frac{b}{a}z\right)} + \frac{|z|^2}{a}\left(ad - |b|^2\right) \\
&= a\left|w + \frac{b}{a}z\right|^2 + \frac{|z|^2}{a}\left(ad - |b|^2\right).
\end{aligned}$$

Portanto, a matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & \overline{b} \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ é definida positiva se, e somente se, $(ad - |b|^2) \geq 0$, ou seja $\det\left(\begin{smallmatrix} a & \overline{b} \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \geq 0$. □

Vimos até agora algumas propriedades interessantes para matrizes de ordem 2. Na verdade essas propriedades valem para matrizes de ordem $n \geq 2$ como mostra a proposição abaixo.

Proposição 4.1.5. Seja $n \geq 2$. Qualquer matriz $A = (a_{jk}) \in M_n(\mathbb{C})$ positiva definida, satisfaz as seguintes propriedades:
(i) A é uma matriz hermitiana, ou seja $a_{jk} = \overline{a_{kj}}$ para $1 \leq j,k \leq n$.
(ii) Os elementos da diagonal de A são todos não negativos.
(iii) As matrizes $\overline{A} = (\overline{a_{jk}})^n_{j,k=1}, A^T$ e A^* são positivas definidas também.
(iv) $|a_{jk}|^2 \leq a_{jj}a_{kk}$ para $1 \leq j,k \leq n$.
(v) $A \in M_n(\mathbb{R})$ é positiva definida se, e somente se, A for simétrica, e $\sum_{j,k=1}^n d_j d_k a_{jk} \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\{d_1,...,d_n\} \subseteq \mathbb{R}$.

Demonstração. Prova de (i). Sejam $x = e_j + e_k$ e $y = e_j + ie_k$ onde $j,k \in \{1,2,...,n\}$. É verdade que

$$0 \leq x^*Ax = \begin{pmatrix} a_{j1} + a_{k1} & \dots & a_{jn} + a_{kn} \end{pmatrix} x = a_{jj} + a_{kj} + a_{jk} + a_{kk}. \tag{4.6}$$

Então, $a_{kj} + a_{jk}$, é um número real sempre que $Im(a_{kj}) = -Im(a_{jk})$. Também

$$0 \leq y^*Ay = a_{jj} - ia_{kj} + ia_{jk} + a_{kk}. \tag{4.7}$$

Logo, $-ia_{kj} + ia_{jk}$ deve ser um número real implicando $Re(a_{kj}) = Re(a_{jk})$. Portanto, $a_{jk} = \overline{a_{kj}}$.
Prova de (ii). Como A é positiva definida, tem-se $0 \leq e_j^*Ae_j = a_{jj}$, para todo $j \in \{1,...,n\}$.
Prova de (iii). Seja $c = (c_1,...,c_n)^T \in \mathbb{C}^n$ e defina $d = \overline{c}$. Temos:

$$c^*\overline{A}c = \sum_{j,k=1}^n \overline{c_j}c_k\,\overline{a_{jk}} = \sum_{j,k=1}^n d_j\overline{d_k}a_{kj} = d^*Ad \geq 0. \tag{4.8}$$

Os outros casos seguem de maneira análoga.
Prova de (iv). A prova segue como a do Lema 4.1.4.

Prova de (v). A suficiência é imediata, então vamos lidar com a necessidade. Sejam $n \in \mathbb{N}$, e $\{c_1, ..., c_n\} \subseteq \mathbb{C}$. Suponha que $c_j = a_j + ib_j$ para $j = 1, ..., n$ então,

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j} c_k a_{jk} &= \sum_{j,k=1}^{n} [(a_j a_k + b_j b_k) + i(a_j b_k - a_k b_j)] a_{jk} \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} (a_j a_k + b_j b_k) a_{jk} + i \sum_{j,k=1}^{n} (a_j b_k - a_k b_j) a_{jk}.\end{aligned}$$

A primeira parcela do lado direito da expressão acima é não negativa por hipótese. A segunda parcela é nula, pois A é simétrica. □

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ é positiva definida se, e somente se A for hermitiana, e seus autovalores são todos maiores ou iguais a zero. A seguir indicamos um esboço da demonstração sem muitos detalhes por não ser o foco principal deste trabalho.

Teorema 4.1.6. Se A é uma matriz Hermitiana em $M_n(\mathbb{C})$, tem-se:
(i) A tem n autovalores reais;
(ii) Se em adição A é definida positiva, então, cada autovalor é não negativo.

Demonstração. Prova de (i): É sabido que matrizes em $M_n(\mathbb{C})$ têm pelo menos n autovalores. O restante da prova pode-se ver em (HORN; JOHNSON, 2013, Observação 1.2.4; Teorema 4.1.1).
Prova de (ii): Seja λ um autovalor de A, então $Av = \lambda v$ para algum $v \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$. Multiplicando essa equação por v^* temos:

$$0 \leq v^* A v = \lambda \|v\|^2, \tag{4.9}$$

implicando $\lambda \geq 0$. □

O resultado a seguir fornece uma descomposição para matrizes Hermitianas.

Teorema 4.1.7. Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ é Hermitiana, se e somente se, existe uma matriz unitária $U \in M_n(\mathbb{C})$ e uma matriz diagonal $D \in M_n(\mathbb{C})$, cujas entradas são os autovalores de A (incluindo multiplicidades) tais que $A = U^* D U$.

Demonstração. Veja (HORN; JOHNSON, 2013, Teorema 4.1.5). □

O Teorema 4.1.7 apresenta informação bastante útil quanto às entradas da matriz diagonal. Adicionalmente, em virtude do Teorema 4.1.6, essas entradas são não negativas sempre que A for definida positiva.

O próximo resultado mostra que toda matriz definida positiva pode ser escrita como uma matriz Gram.

Teorema 4.1.8. Seja $A = (a_{jk})_{j,k=1}^n \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz definida positiva . Então, existem $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}^n$ tais que

$$a_{jk} = x_k \cdot x_j = x_j^* x_k, \quad 1 \leq j,k \leq n. \tag{4.10}$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}^n$, a matriz $(x_k \cdot x_j)_{j,k=1}^n \in M_n(\mathbb{C})$ é definida positiva.

Demonstração. Pela Proposição 4.1.5 se A é definida positiva, então A é Hermitiana, e pelo Teorema 4.1.7 temos

$$A = U^* DU, \tag{4.11}$$

onde $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ é uma matriz diagonal cujas entrada $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são números reais não negativos, e U é uma matriz unitária. Então, $D = NN$, onde $N = diag(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n}) \in M_n(\mathbb{C})$. Assim,

$$A = U^* DU = U^* NNU = [NU]^*[NU]. \tag{4.12}$$

Escrevendo $x_j \in \mathbb{C}^n$ como a j-ésima coluna de NU, para $j = 1, ..., n$, temos

$$A = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \end{pmatrix} = (x_j^* x_k)_{j,k=1}^n = (x_k \cdot x_j)_{j,k=1}^n, \tag{4.13}$$

o que mostra a primeira parte do teorema.
Se $A = (x_k \cdot x_j)_{j,k=1}^n \in M_n(\mathbb{C})$, onde $x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}^n$, então a matriz A é definida positiva pois dado $\{c_1, ..., c_n\} \subseteq \mathbb{C}^n$, segue que

$$\begin{aligned} c^* A c &= \sum_{j,k=1}^n \overline{c_j} c_k (x_k \cdot x_j) = \sum_{j,k=1}^n (c_k x_k \cdot c_j x_j) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n c_k x_k \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n c_j x_j \right) = \left| \sum_{j=1}^n c_j x_j \right|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ podemos proceder como na prova anterior. A diferença é que $x_1, ..., x_n$ serão elementos de $\mathbb{R}^n$. □

Definição 4.1.9. Sejam $A = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ e $B = (b_{jk})_{j,k=1}^n$ matrizes em $M_n(\mathbb{C})$. O **produto de Hadamard (ou Schur)** de A e B é a matriz $A \odot B \in M_n(\mathbb{C})$ definida por

$$A \odot B = (a_{jk} b_{jk})_{j,k=1}^n. \tag{4.15}$$

O seguinte resultado mostra que produto Hadamard de matrizes definidas positivas é definida positiva. Este resultado é colocado aqui para verificar depois na Seção 4.2, que o produto de núcleos definidos positivos é de novo um núcleo definido positivo.

Proposição 4.1.10. Sejam $A = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ e $B = (b_{jk})_{j,k=1}^n$ matrizes positivas definidas em $M_n(\mathbb{C})$. Então, $A \odot B$ é positiva definida.

Demonstração. Temos que mostrar que dado $\{c_1, \ldots, c_n\} \subset \mathbb{C}$,

$$\sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j} c_k a_{jk} b_{jk} \geq 0. \tag{4.16}$$

De fato, como A é definida positiva, pelo Teorema 4.1.8, existem $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}^n$, tais que

$$a_{jk} = x_k \cdot x_j = x_j^* x_k, \quad 0 \leq j,k \leq n. \tag{4.17}$$

Escrevendo $x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)^T \in \mathbb{C}^n$, a equação (4.17) se torna na verdade em

$$a_{jk} = \begin{pmatrix} \overline{x_j^1} & \ldots & \overline{x_j^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k^1 \\ \vdots \\ x_k^n \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^{n} \overline{x_j^p} x_k^p. \tag{4.18}$$

Substituindo (4.18) em (4.16) e usando o fato que B é definida positiva temos

$$c^* A \odot B c = \sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j} c_k \sum_{p=1}^{n} \overline{x_j^p} x_k^p b_{jk} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j} c_k \overline{x_j^p} x_k^p b_{jk} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{n} \left(\overline{c_j x_j^p}\right) \left(c_k x_k^p\right) b_{jk} \geq 0, \tag{4.19}$$

o que queríamos mostrar. □

4.2 Núcleos Definidos Positivos

Nesta seção apresentamos os núcleos definidos positivos e descrevemos algumas de suas propriedades. O estudo deles está baseado quase integralmente no conceito de matriz definida positiva e suas propriedades. Dito conceito também é importante para definir funções definidas positivas.

Seja X um conjunto qualquer não vazio. Para os fins deste trabalho, um **núcleo** em X nada mais é do que uma função a valores complexos definida no produto cartesiano $X \times X$,

$$\varphi : X \times X \to \mathbb{C}, \quad (x,y) \mapsto \varphi(x,y). \tag{4.20}$$

Definição 4.2.1. Dizemos que $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ é um **núcleo definido positivo em** X se para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ a matriz

$$A = (\varphi(x_j, x_k))_{j,k=1}^n =: \begin{pmatrix} \varphi(x_1,x_1) & \ldots & \varphi(x_1,x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(x_n,x_1) & \ldots & \varphi(x_n,x_n) \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

é definida positiva. Se A for estritamente definida positiva, o núcleo φ é chamado de **estritamente definido positivo em** X.

Definição 4.2.2. Se X for finito, digamos $X = \{x_1, ..., x_n\}$, então φ é um núcleo definido positivo em X se, e somente se a matriz

$$(\varphi(x_j, x_k))_{j,k=1}^{n}$$

é definida positiva.

Exemplo 4.2.3. O núcleo $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ é definido positivo em X se, e somente se para todo subconjunto finito $X_0 \subseteq X$ a restrição $\varphi|_{X_0 \times X_0}$ é um núcleo definido positivo em X_0.

De fato, suponhamos que $X_0 = \{x_1, ..., x_m\} \subseteq X$. Como φ é um núcleo definido positivo em X, temos em particular

$$\sum_{j,k=1}^{m} \overline{c_j} c_k \varphi(x_j, x_k) \geq 0. \tag{4.22}$$

Inversamente, sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X_n = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$. Já que $\varphi|_{X_n \times X_n}$ é um núcleo definido positivo em X_n temos

$$\sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j} c_k \varphi(x_j, x_k) = \sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j} c_k \varphi|_{X_n \times X_n}(x_j, x_k) \geq 0. \tag{4.23}$$

Observação 4.2.4. Nas definições acima é suficiente considerar elementos $x_1, ..., x_n \in X$ mutuamente distintos.
De fato, se $\{x_1, ..., x_n\}$ são arbitrários e $\{x_{\alpha 1}, ..., x_{\alpha p}\}$ é o subconjunto de todos os elementos mutuamente distintos de $\{x_1, ..., x_n\}$, então

$$\sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j} c_k \varphi(x_j, x_k) = \sum_{j,k=1}^{p} \overline{d_j} d_k \varphi(x_{\alpha j}, x_{\alpha k}) \tag{4.24}$$

onde

$$d_k = \sum_{\{i : x_i = x_{\alpha k}\}} c_i, \quad k = 1, ..., p.$$

O seguinte resultado é uma consequência natural da Proposição 4.1.5, pelo que omitimos a prova.

Corolário 4.2.5. Se $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ é um núcleo definido positivo em X, então cumpre-se:
(i) φ é Hermitiano (ou seja $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ para todo $x, y \in X$).
(ii) φ é não negativo na diagonal $\{(x, x); x \in X\}$, isto é, $\varphi(x, x) \geq 0$ para todo $x \in X$.
(iii) $\overline{\varphi}$ é um núcleo definido positivo em X.
(iv) $|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x)\varphi(y, y)$, para todo $x, y \in X$ (Propriedade de dominância da diagonal).
(v) $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$ é um núcleo definido positivo em X se, e somente se, φ é simétrico e $\sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k \varphi(x_j, x_k) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}, \{a_1, ..., a_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$.

A seguinte proposição apresenta propriedades de fechamento em relação aos núcleos positivos definidos, que será usada frequentemente neste trabalho.

Proposição 4.2.6. Sejam φ_1, $\varphi_2 : X \times X \to \mathbb{C}$ núcleos definidos positivos em X, e $a, b \geq 0$. Então as seguintes propriedades são satisfeitas:
(i) $a\varphi_1 + b\varphi_2$ é um núcleo definido positivo em X.
(ii) $\varphi_1\varphi_2$ é um núcleo definido positivo em X.
(iii) O limite pontual de uma sequência de núcleos definidos positivos em X é definido positivo em X.
(iv) O núcleo constante $(x,y) \longmapsto C$ é definido positivo em X, se e somente se $C \geq 0$.

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\{c_1,...,c_n\} \subset \mathbb{C}$ e $\{x_1,...,x_n\} \subset X$.
Prova de (i). Pelo fato de $a,b \geq 0$ e φ_1, φ_2 serem núcleos definidos positivos em X, temos:

$$\sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j}c_k \left[a\varphi_1(x_j,x_k) + b\varphi_2(x_j,x_k)\right] = a \sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j}c_k\varphi_1(x_j,x_k) + b \sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j}c_k\varphi_2(x_j,x_k) \geq 0. \quad (4.25)$$

Prova de (ii). Temos que provar que $\sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k}\varphi_1(x_j,x_k)\varphi_2(x_j,x_k) \geq 0$. Isto é equivalente a mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ a matriz

$$(\varphi_1(x_j,x_k))_{j,k=1}^{n} \odot (\varphi_2(x_j,x_k))_{j,k=1}^{n} \quad (4.26)$$

é definida positiva, o que segue da Proposição 4.1.10.
Prova de (iii). Seja $(\varphi_N)_{N=1}^{\infty}$ uma sequência de núcleos definidos positivos em X, tal que $\lim_{N\to\infty} \varphi_N = \varphi$. Note que:

$$a_N := \sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j}c_k\varphi_N(x_j,x_k) \geq 0, \quad \forall N \geq 1. \quad (4.27)$$

Como $(\varphi_N)_{N=1}^{\infty}$ converge pontualmente para φ temos,

$$\lim_{N\to\infty} a_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j}c_k\varphi_N(x_j,x_k) = \sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j}c_k \lim_{N\to\infty} \varphi_N(x_j,x_k) = \sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j}c_k\varphi(x_j,x_k) =: a, \quad (4.28)$$

isto é, a sequência não negativa $(a_N)_{N=1}^{\infty}$ é convergente. Portanto, $a = \lim_{N\to\infty} a_N \geq 0$.
Prova de (iv). Note que $\sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k}C = C|\sum_{j=1}^{n} c_j|^2 \geq 0$ se, e somente se $C \geq 0$. □

Exemplo 4.2.7. Se $f : X \to \mathbb{C}$ é uma função arbitrária, então $\varphi(x,y) := f(x)\overline{f(y)}$ é um núcleo definido positivo em X. De fato, dado $n \in \mathbb{N}$, $\{c_1,...,c_n\} \subseteq \mathbb{C}$, $\{x_1,...,x_n\} \subseteq X$, temos:

$$\sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j}c_k\varphi(x_j,x_k) = \sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j}c_kf(x_j)\overline{f(x_k)} = \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j}f(x_j) \sum_{k=1}^{n} c_k\overline{f(x_k)} = \left|\sum_{j=1}^{n} c_j\overline{f(x_j)}\right|^2 \geq 0. \quad (4.29)$$

Exemplo 4.2.8. O núcleo $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $\varphi(x,y) := \cos(x-y)$ é um núcleo definido positivo em $\mathbb{R}$, pois podemos reescrevê-lo como soma de núcleos definidos positivos em $\mathbb{R}$ da forma do exemplo anterior.

Definição 4.2.9. Uma função $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é dita ser **de base radial** se depende somente da distância entre a entrada e algum ponto fixo C chamado centro, isto é, se existir função univariante escalar não negativa $g:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ tal que,

$$f(x) = g(\|x-C\|), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{4.30}$$

No caso em que C é a origem, $f(x) = g(\|x\|)$ e f é chamada de **função radial**.

Definição 4.2.10. A função $\varphi:\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ é chamada de **núcleo de base radial** se,

$$\varphi(x,y) = f(x-y), \quad x,y \in \mathbb{R}^d, \tag{4.31}$$

onde f é uma **função de base radial**. Se a função f é radial φ é chamado de **núcleo radial**.

Muitos dos trabalhos sobre núcleos definidos positivos na teoria da aproximação se concentram nos chamados **núcleos de base radial**. Em outros campos, como teoria da probabilidade e estatística, esses núcleos de grande importância são chamados de **isotrópicos**. Tais núcleos são rotacionalmente (e também translacionalmente) invariantes, isto é, suas curvas de nível (ou mais geralmente hiper-superfícies de nível) são círculos (hiperesferas) e podem ser expressos em termos de uma função univariante escalar não negativa $g:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, ou seja,

$$\varphi(x,y) = g(\|x-y\|), \quad x,y \in \mathbb{R}^d. \tag{4.32}$$

Um típico exemplo de um núcleo radial (ou isotrópico) é o núcleo de multivariável Gaussiano

$$\varphi(x,y) := g(\|x-y\|) = e^{-\varepsilon^2\|x-y\|^2}, \quad x,y \in \mathbb{R}^d, \quad g(t) = e^{-\varepsilon^2 t^2}. \tag{4.33}$$

Outro domínio X de grande importância é a esfera unitária $\mathbb{S}^2$ em $\mathbb{R}^3$ cujas funções definidas positivas em $\mathbb{S}^2$ resultam ser de grande utilidade para muitas aplicações geofísicas. Neste caso, o análogo de um núcleo radial é dado por um assim chamado *núcleo zonal* que pode ser escrito em termos de uma função univariante escalar, como vemos na seguinte definição.

Destacamos que a partir deste momento consideraremos a esfera $\mathbb{S}^d$ no espaço Euclideano $(d+1)$-dimensional. Alertamos que alguns resultados do Capítulo 3 que foram enunciados para $d \geq 3$ serão utilizados daqui por diante para $d \geq 2$, o que está em conformidade devido à diferença da dimensão da esfera considerada em ambos lugares.

Definição 4.2.11. Seja $d \in \mathbb{N}$. O núcleo $\varphi:\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$ é chamado de **núcleo zonal** se existir uma função univariante escalar, $g:[-1,1] \to \mathbb{R}$, tal que

$$\varphi(x,y) = g(x \cdot y). \tag{4.34}$$

A função g é chamada **função zonal** ou **parte isotrópica** de φ.

Observação 4.2.12. A analogia com a formulação radial é fornecida pelo fato de podermos considerar a **distância geodésica** θ em $\mathbb{S}^d$, isto é, a distância mais curta ao longo de um "arco circular", entre dois pontos $x,y \in \mathbb{S}^d$, que é dada por $\theta(x,y) = \arccos(x \cdot y)$. Em poucas palavras o chamado núcleo zonal poderia ser visto como um núcleo radial: podemos reescrever a equação (4.34) da forma

$$\varphi(x,y) = \widetilde{g}(\theta(x,y)), \qquad \widetilde{g} = g \circ \cos, \quad \widetilde{g} : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \tag{4.35}$$

onde a função $\widetilde{g}$ é uma função univariante escalar não negativa.

Definição 4.2.13. Sejam $d \in \mathbb{N}$ e $\varphi : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{C}$ um núcleo. O núcleo φ é **isotrópico**, ou rotacionalmente invariante, se para cada matriz ortogonal $A \in \mathbb{O}^{d+1}$ a seguinte igualdade se satisfaz:

$$\varphi(Ax,Ay) = \varphi(x,y). \tag{4.36}$$

Lema 4.2.14. Sejam $d \in \mathbb{N}$ e $\varphi : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{C}$ um núcleo isotrópico, então existe uma função $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi(x,y) = f(x \cdot y)$ para todo $x,y \in \mathbb{S}^d$. Além disso o núcleo φ é contínuo se, e somente se f é contínua.

Demonstração. Defina $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ dada por $f(t) = \varphi((1,0,...,0),(t,\sqrt{1-t^2},0,...,0))$. Tome $x,y \in \mathbb{S}^d$ e seja $t = x \cdot y \in [-1,1]$. Existe $A \in \mathbb{O}^{d+1}$ tal que

$$Ax = (1,0,...,0)^T \quad \text{e} \quad Ay = (t,\sqrt{1-t^2},0,...,0)^T. \tag{4.37}$$

Como φ é isotrópico,

$$\varphi(x,y) = \varphi(Ax,Ay) = f(x \cdot y). \tag{4.38}$$

O que mostra a primeira parte do lema.
Se f é contínua, a igualdade (4.38) implicará que φ é contínua. Se φ é contínua, claramente a função f, que é a composição da função contínua $t \mapsto ((1,0,...,0),(t,\sqrt{1-t^2},0,...,0))$ e φ, também é contínua. $\square$

O lema acima diz que todo núcleo isotrópico é zonal, e claramente todo núcleo zonal é isotrópico, portanto as duas definições anteriores são equivalentes.

4.3 Funções Definidas Positivas

Nesta seção definimos funções definidas positivas em dois contextos: na reta real $\mathbb{R}$ e na esfera $\mathbb{S}^d$, $d \geq 2$, relacionando tal conceito com o de núcleos definidos positivos em X para os particulares casos $X = \mathbb{R}, \mathbb{S}^d$. Apresentamos exemplos e destacamos o caso $X = \mathbb{S}^d$, o qual é de interesse para o objetivo principal deste trabalho.

M. Mathias, em 1923 (MATHIAS, 1923), foi o primeiro em definir e estudar a propriedades de funções positivas definidas na reta.

Definição 4.3.1. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é dita ser **definida positiva em** $\mathbb{R}$ se para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ e $\{c_1, ..., c_n\} \subseteq \mathbb{C}$, vale:

$$\sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j} c_k f(x_j - x_k) \geq 0, \tag{4.39}$$

equivalentemente, se o núcleo $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dado por $\varphi(x,y) := f(x-y)$ é definido positivo em $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.3.2. Considere I um subconjunto qualquer de $\mathbb{R}$. A função característica χ_I, isto é,

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in I, \\ 0, & x \notin I \end{cases} \tag{4.40}$$

é definida positiva em $\mathbb{R}$.

Nosso interesse está no estudo de funções definidas em $\mathbb{S}^d$. O Capítulo 5 será dedicado a apresentar um método que permite construir funções contínuas definidas positivas neste contexto.

No que segue, consideramos sempre $d \geq 2$, pois o caso $d = 1$ deve ser analisado de forma independente em parte do estudo realizado no Capítulo 5 e por demandar ainda mais ferramentas não o incluiremos em nosso trabalho.

Definição 4.3.3. Uma função $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ é **definida positiva em** $\mathbb{S}^d$ se o núcleo $\varphi : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$, dado por:

$$\varphi(x,y) := g(\theta(x,y)), \tag{4.41}$$

é definido positivo, equivalentemente se para todo $n \in \mathbb{N}$, $\{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{S}^d$, a matriz

$$\big(g(\theta(x_j, x_k))\big)_{j,k=1}^{n} \tag{4.42}$$

é definida positiva. Se o núcleo φ é estritamente definido positivo em $\mathbb{S}^d$, a função g é chamada de **estritamente definida positiva** $\mathbb{S}^d$.

Alternativamente, podemos considerar as funções definidas positivas em $\mathbb{S}^d$ definidas no intervalo $[-1, 1]$ como descrevemos na próxima definição. Na literatura os autores consideram a forma mais conveniente nas suas redações.

Definição 4.3.4. Uma função $f : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ é **definida positiva em** $\mathbb{S}^d$ se o núcleo $\varphi : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{C}$, dado por:

$$\varphi(x,y) := f(\cos(\theta(x,y))) = f(x \cdot y) \tag{4.43}$$

é definido positivo em $\mathbb{S}^d$.

Um conjunto importante de funções a ser considerado é o das funções contínuas. Mas é claro que não todas as funções contínuas em $[-1, 1]$ são definidas positivas em $\mathbb{S}^d$. Alguns exemplos que listamos abaixo ilustram muito bem isso.

Exemplo 4.3.5. Seja $X=\mathbb{R}$ ou $X=\mathbb{S}^d$, a função constante $f=-1$ não é positiva definida em X pois, $\sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k}(-1) = -|\sum_{j=1}^{n} c_j| < 0$, para todo $c=(c_1,...,c_n)^T \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$, $\{x_1,...,x_n\}\subset X$.

Exemplo 4.3.6. A função f dada por $f(t)=-t$ não é definida positiva em $\mathbb{S}^d$. De fato, para todo $n\in\mathbb{N}$, $c=(c_1,...,c_n)^T\in\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ e $\{x_1,...,x_n\}\subset\mathbb{S}^d$, com $x_j=(x_j^1,x_j^2...,x_j^{d+1})^T$ para $j=1,...,n$, temos

$$\sum_{j,k=1}^{n}\overline{c_j}c_k f(x_j\cdot x_k) = \sum_{j,k=1}^{n}\overline{c_j}c_k(-(x_j\cdot x_k)) = -\sum_{j,k=1}^{n}\overline{c_j}c_k\sum_{p=1}^{d+1}x_j^p x_k^p = -\sum_{p=1}^{d+1}\left|\sum_{k=1}^{n}c_k x_k^p\right| < 0. \tag{4.44}$$

Exemplo 4.3.7. Uma função muito interessante resulta ser o polinômio de Legendre por ser ela definida positiva em $\mathbb{S}^d$. De fato pelo Teorema da Adição 2.3.5 temos,

$$P_n^d(x\cdot y) = \frac{N_{n,d}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\sum_{j=1}^{N_{n,d}} Y_j(x)\overline{Y_j(y)}, \quad x,y\in\mathbb{S}^d. \tag{4.45}$$

Pelo Exemplo 4.2.7 o núcleo $\varphi_j(x,y) := Y_j(x)\overline{Y_j(y)}$ é definido positivo em $\mathbb{S}^d$ para $1\le j\le N_{n,d}$. Como $P_n^d(x\cdot y)$ é múltiplo positivo de soma finita de núcleos positivos definidos em $\mathbb{S}^d$, a propriedade *(i)* da Proposição 4.2.6, diz que o núcleo em (4.45) é definido positivo em $\mathbb{S}^d$ e portanto P_n^d é uma função definida positiva em $\mathbb{S}^d$.

Exemplo 4.3.8. Uma consequência quase obvia do exemplo anterior, é que os polinômios de Gebengauer são também funções definidas positivas em $\mathbb{S}^d$: a igualdade (3.83) nos fornece que para $d\ge 3$ e $\lambda=\frac{d-2}{2}$, o polinômio de Gegenbauer C_n^λ é múltiplo por um fator positivo de P_n^d.

Proposição 4.3.9. Sejam $a,b\ge 0$ e $f,g:[-1,1]\to\mathbb{C}$ funções definidas positivas em $\mathbb{S}^d$. Então as seguintes propriedades são satisfeitas:
(i) $f(1)\ge 0$,
(ii) $|f(t)|\le f(1)$, para todo $t\in[-1,1]$.
(iii) $af+bg$ é uma função definida positiva em $\mathbb{S}^d$.
(iv) fg é uma função definida positiva em $\mathbb{S}^d$.
(v) O limite pontual de uma sequência de funções definidas positivas em $\mathbb{S}^d$ é definida positiva em $\mathbb{S}^d$.
(vi) A função constante igual a C é definida positiva em $\mathbb{S}^d$, se e somente se $C\ge 0$.

Demonstração. Consideremos o núcleo $\varphi:\mathbb{S}^d\times\mathbb{S}^d\to\mathbb{C}$ dado por $\varphi(x,y)=f(x\cdot y)$ onde $x,y\in\mathbb{S}^d$.
Prova de (i). Segundo o item *(ii)* do Corolário 4.2.5 temos: $\varphi(x,x)=f(x\cdot x)=f(1)\ge 0$ para todo $x\in\mathbb{S}^d$.
Prova de (ii). Pelo item *(iv)* do Corolário 4.2.5, sabemos que $|\varphi(x,y)|^2\le\varphi(x,x)\varphi(y,y)$. Logo para $t=x\cdot y\in[-1,1]$ temos

$$|f(t)|^2 = |f(x\cdot y)|^2 \le f(x\cdot x)f(y\cdot y) = f(1)^2. \tag{4.46}$$

Portanto $|f(t)| \leq f(1)$ para todo $t \in [-1,1]$.
Os items *(iii)*, *(iv)*, *(v)*, *(vi)* são implicações imediatas da Proposição 4.2.6. □

Segundo o Lema 4.2.14 caraterizar núcleos contínuos zonais definidos positivos (estritamente positivos) em $\mathbb{S}^d$ é equivalente caraterizar o conjunto das funções zonais contínuas $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ que definem tais núcleos. Foi Schoenberg (SCHOENBERG, 1942) quem caracterizou a classe de funções contínuas zonais definidas positivas em $\mathbb{S}^d$. Seu resultado é expresso em termos dos polinômios de Gegenbauer $C_n^{\frac{d-1}{2}}$ como segue.

Teorema 4.3.10 (Teorema de Schoenberg)**.** Sejam $d \geq 2$ e $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ contínua. Então, f é definida positiva em $\mathbb{S}^d$ se, e somente se f tem uma expansão em série de polinômios de Gegenbauer da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{\lambda}(x), \tag{4.47}$$

onde $\lambda = (d-1)/2$, $a_n \geq 0$ para $n \geq 0$, e cuja série converge para $x=1$. Além disso, os coeficientes a_n são dados por

$$a_n = k_{n,d}\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_n^{\lambda}(x)dx, \tag{4.48}$$

onde

$$k_{n,d} = \frac{1}{\int_{-1}^{1}[C_n^{\lambda}(x)]^2(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx} = \frac{n!(d-3)!(2n+d-1)}{(n+d-2)!}\frac{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}.$$

Os coeficientes a_n na série de Gegenbauer de f na equação (4.47) claramente dependem da função f e da dimensão d da esfera e são usualmente chamados **coeficientes d-Schoenberg de f**.

Destacamos que, embora não seja utilizado neste trabalho, o Teorema de Schoenberg é também válido para o caso $d=1$.

Pelas propriedades de fechamento *(i)* e *(iii)* da Proposição 4.2.6, é fácil ver que uma função da forma (4.47) é definida positiva em $\mathbb{S}^d$. A demonstração da recíproca é mais elaborada, e nos desviaria do nosso objetivo principal, portanto não a incluiremos neste trabalho.

Observação 4.3.11. Pelo item *(ii)* da Proposição 4.3.9 e Exemplo 4.3.8, temos que

$$|C_n^{\lambda}(x)| \leq C_n^{\lambda}(1), \quad x \in [-1,1]. \tag{4.49}$$

Denotaremos por $\mathscr{C}_n^{\lambda}$ o polinômio de Gegenbauer normalizado, ou seja, $\mathscr{C}_n^{\lambda}(x) = \frac{C_n^{\lambda}(x)}{C_n^{\lambda}(1)}$, para qualquer $x \in [-1,1]$. É evidente que $|\mathscr{C}_n^{\lambda}(x)| \leq 1$ para qualquer $x \in [-1,1]$. Note que podemos escrever a série (4.47) usando polinômios de Gegenbauer normalizados:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \mathscr{C}_n^{\lambda}(x), \tag{4.50}$$

onde os coeficientes $b_n = a_n C_n^{\lambda}(1) \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lembremos do importante critério para convergência uniforme.

Teorema 4.3.12 (Teste M de Weierstrass)**.** Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções reais ou complexas definidas em um conjunto A, e M_n uma sequência de números reais não negativos tais que:
(i) $|f_n(x)| \leq M_n$, $n \geq 1$, $x \in A$,
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$.
Então, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em A.

Observação 4.3.13. A série para f dada na equação (4.47) converge para $x = 1$ se, e somente se ela converge uniformemente em $[-1,1]$. É claro que a convergência em $x = 1$ da serie (4.47) é equivalente a dizer que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$. Por outro lado $|b_n \mathscr{C}_n^{\lambda}(x)| = b_n |\mathscr{C}_n^{\lambda}(x)| \leq b_n$ para todo $x \in [-1,1]$. Logo pelo Teste M de Weierstrass, a série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \mathscr{C}_n^{\lambda}(x)$ é absoluta e uniformemente convergente em $[-1,1]$.

No Capítulo 5 utilizaremos as funções definidas positivas e estritamente definidas positivas em $\mathbb{S}^d$ e portanto consideramos os seguintes conjuntos:

$$
\begin{aligned}
pd(\mathbb{S}^d) &:= \{g \in C([0,\pi]); \text{o núcleo } \varphi(x,y) = g(\theta(x,y)) \text{ é definido positivo}\}; \\
spd(\mathbb{S}^d) &:= \{g \in C([0,\pi]); \text{o núcleo } \varphi(x,y) = g(\theta(x,y)) \text{ é estritamente definido positivo}\}; \\
PD(\mathbb{S}^d) &:= \left\{ f \in C([-1,1]); f \circ \cos \in pd(\mathbb{S}^d) \right\} \\
&= \{ f \in C([-1,1]); \text{o núcleo } \varphi(x,y) = f(x \cdot y) \text{ é definido positivo}\}; \\
SPD(\mathbb{S}^d) &:= \left\{ f \in C([-1,1]); f \circ \cos \in spd(\mathbb{S}^d) \right\}; \\
&= \{ f \in C([-1,1]); \text{o núcleo } \varphi(x,y) = f(x \cdot y) \text{ é estritamente definido positivo}\},
\end{aligned}
$$

onde então $PD(\mathbb{S}^d)$ denota o conjunto das funções contínuas definidas positivas em $\mathbb{S}^d$ caracterizadas por Schoenberg e $SPD(\mathbb{S}^d)$ denota o conjunto das funções contínuas estritamente definidas positivas em $\mathbb{S}^d$. Alguns autores chamam os conjuntos acima de cones, pelo que consideramos apropriado apresentar a seguinte definição.

Definição 4.3.14. Um conjunto S de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$ é um **cone** se para cada $x \in S$ e positivo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha x \in S$.

Assim, se considerarmos V como o espaço das funções a valores reais sobre o corpo $\mathbb{R}$, as propriedades de fechamento na Proposição 4.2.6 indicam que $PD(\mathbb{S}^d)$ é um cone de V.

A classe de funções estritamente definidas positivas em $\mathbb{S}^d$ traz soluções únicas para muitos problemas aplicados, como por exemplo problemas de interpolação conforme exposto no Capítulo 1. Tendo em vista sua importância, muitos autores buscaram caracterizar tal classe (veja por exemplo, (RON; SUN, 1996; SCHREINER, 1997; CHENEY; SUN, 1998) e referências contidas neles). A seguir destacamos dois importantes destes resultados, sendo que um deles fornece a total caracterização das funções estritamente definidas positivas em $\mathbb{S}^d$, $d \geq 2$. Não apresentaremos suas demonstrações por não ser novamente o foco principal deste trabalho.

Tendo presente que uma função $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ contínua definida positiva em $\mathbb{S}^d$ ($f \in PD(\mathbb{S}^d)$) está caraterizada por Schoenberg no Teorema 4.3.10, Xu e Cheney adicionaram uma condição à necessidade para f ser estritamente positiva definida em $\mathbb{S}^d$ ($f \in SPD(\mathbb{S}^d)$). O resultado encontra-se no artigo (XU; CHENEY, 1992, Corollary):

Teorema 4.3.15. Para $d \geq 2$ a função contínua $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ é estritamente positiva definida em $\mathbb{S}^d$ ($f \in SPD(\mathbb{S}^d)$) se todos os coeficientes d-Schoenberg a_n de f na equação (4.47) são positivos.

Mais tarde Chen, Mengatto e Sun em (CHEN; MENEGATTO; SUN, 2003, Theorem 3) mostraram uma condição necessária e suficiente, além das condições do Teorema 4.3.10, para f ser uma função estritamente definida positiva em $\mathbb{S}^d$ ($f \in SPD(\mathbb{S}^d)$). O resultado é o seguinte teorema.

Teorema 4.3.16. Para $d \geq 2$, a função $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ contínua é estritamente definida positiva em $\mathbb{S}^d$ ($f \in SPD(\mathbb{S}^d)$) se, e somente se, infinitos coeficientes d-Schoenberg a_n de f na equação (4.47) de índices pares e infinitos de índices ímpares são positivos.

Se denotamos por $PD(\mathbb{S}^d)_{CMS}$, o conjunto de funções definidas positivas em $\mathbb{S}^d$ que satisfazem as condições de Chen, Menegatto e Sun; e por $PD(\mathbb{S}^d)_{CX}$ o conjunto de funções não negativas, definidas positivas em $\mathbb{S}^d$ que satisfazem as condições de Cheney e Xu, então claramente cumpre-se as seguintes relações:

$$PD(\mathbb{S}^d)_{CX} \subset SPD(\mathbb{S}^d) = PD(\mathbb{S}^d)_{CMS} \subset PD(\mathbb{S}^d), \quad \text{quando} \quad d \geq 2. \tag{4.51}$$

CAPÍTULO

5

OPERADORES DE MONTÉE E DESCENTE NA ESFERA

Neste capítulo apresentamos uma forma de construir funções definidas positivas em esferas reais a partir de já conhecidas funções definidas positivas. Esse método foi obtido por Beatson e zu Castell em (BEATSON; CASTELL, 2017). Especificamente, dada uma função contínua f (estritamente) definida positiva em $\mathbb{S}^d$, quando certos operadores integrais e diferenciais, chamados de Montée e Descente, são aplicados a f, obtém-se novas funções (estritamente) definidas positivas porém nas esferas $\mathbb{S}^{d-2}$ e $\mathbb{S}^{d+2}$, respectivamente. Tal fenômeno tem sido descrito na literatura como “caminhadas sobre as dimensões de passo dois". O resultado sobre o operador Montée está provado no Teorema 5.1.3 enquanto o Teorema 5.1.7 refere-se ao operador Descente.

5.1 Operadores Montée e Descente na esfera

Definição 5.1.1 (Operador Descente)**.** Seja f uma função absolutamente contínua em $[-1,1]$. O **operador Descente** D é dado por

$$(Df) = f'(x), \qquad x \in [-1,1].$$

Definição 5.1.2 (Operador Montée)**.** Seja f uma função integrável em $[-1,1]$. O **operador Montée** I é dado por

$$(If) = \int_{-1}^{x} f(u)du.$$

No que segue será útil definir um índice auxiliar μ_λ por

$$\mu_\lambda = \begin{cases} \lambda, & \text{se} \quad \lambda > 0 \\ 1, & \text{se} \quad \lambda = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

e então a equação (3.91) assume a forma mais abreviada:

$$DC_n^\lambda = 2\mu_\lambda C_{n-1}^{\lambda+1}. \quad \lambda \geq 0. \tag{5.2}$$

Assim, como $D\left(\frac{1}{2\mu_\lambda}C_n^\lambda\right) = C_{n-1}^{\lambda+1}$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$IC_{n-1}^{\lambda+1} = \frac{1}{2\mu_\lambda}(C_n^\lambda - C_n^\lambda(-1)). \tag{5.3}$$

O seguinte teorema mostra que o operador Montée I aplica funções definidas positivas em $\mathbb{S}^{d+2}$ em funções definidas positivas em $\mathbb{S}^d$. Inversamente, o operador Descente D aplica funções definidas positivas em $\mathbb{S}^d$ em funções definidas positivas em $\mathbb{S}^{d-2}$.

No que segue de nosso estudo λ sempre é positivo, portanto somente lidamos com o caso $\mu_\lambda = \lambda$. O fato de tais operadores preservarem a propriedade de positividade definida alterando em dois a dimensão da esfera tem sido descrito na literatura como “caminhadas sobre as dimensões de passo dois".

Teorema 5.1.3. Seja d um inteiro maior ou igual a 2.

1. a) Se $f \in PD(\mathbb{S}^{d+2})$ então existe uma constante C tal que $C + If \in PD(\mathbb{S}^d)$.
   b) Se $f \in SPD(\mathbb{S}^{d+2})$ então existe uma constante C tal que $C + If \in SPD(\mathbb{S}^d)$.
   c) Se, em adição, f é não negativa, então a constante C nas partes a) e b) pode ser escolhida como zero.

2. Se $f \in PD(\mathbb{S}^{d+2})_{CX}$, então $If \in PD(\mathbb{S}^d)_{CX}$.

Demonstração. Prova de 1. a): Como $f \in PD(\mathbb{S}^{d+2})$, segue do Teorema de Schoenberg 4.3.10 que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{\lambda+1}(x), \tag{5.4}$$

onde $\lambda = \frac{(d-1)}{2}$, $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a série converge uniformemente.
Aplicando o operador de Montée (5.3) a f e trocando a ordem da integral com a série, temos:

$$If(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n IC_n^{\lambda+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n I\mathscr{C}_n^{\lambda+1}(x), \tag{5.5}$$

onde $b_n = a_n C_n^{\lambda+1}(1) \geq 0$, para $n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ e $\mathscr{C}_n^{\lambda+1}$ são os polinômios de Gegenbauer normalizados.
(i) Afirmamos que a série em (5.5) *é absoluta e uniformemente convergente.*

De fato, aplicando o operador Montée, da fórmula (5.3), temos,

$$\begin{aligned} If(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n I\mathscr{C}_n^{\lambda+1}(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n I\left(\frac{C_n^{\lambda+1}(x)}{C_n^{\lambda+1}(1)}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{C_n^{\lambda+1}(1)} \frac{1}{2\mu_\lambda}(C_{n+1}^{\lambda}(x) - C_{n+1}^{\lambda}(-1)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{C_n^{\lambda+1}(1)} \frac{C_{n+1}^{\lambda}(1)}{2\mu_\lambda}\left(\frac{C_{n+1}^{\lambda}(x) - C_{n+1}^{\lambda}(-1))}{C_{n+1}^{\lambda}(1)}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{C_n^{\lambda+1}(1)} \frac{C_{n+1}^{\lambda}(1)}{2\mu_\lambda}(\mathscr{C}_{n+1}^{\lambda}(x) - (-1)^{n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n k_n(\mathscr{C}_{n+1}^{\lambda}(x) - (-1)^{n+1}), \end{aligned} \tag{5.6}$$

onde

$$k_n := \frac{C_{n+1}^{\lambda}(1)}{C_n^{\lambda+1}(1)2\mu_\lambda}$$

satisfaz $0 \leq k_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato,

$$k_n = \frac{C_{n+1}^{\lambda}(1)}{C_n^{\lambda+1}(1)2\mu_\lambda} = \frac{\binom{n+2\lambda}{n+1}}{\binom{n+2\lambda+1}{n}2\mu_\lambda} = \frac{\frac{(n+2\lambda)!}{(n+1)!(2\lambda-1)!}}{\frac{(n+2\lambda+1)!2\mu_\lambda}{n!(2\lambda+1)!}} = \frac{2\lambda(2\lambda+1)}{(n+1)(n+2\lambda+1)2\mu_\lambda}.$$

Como $\mu_\lambda = \lambda$,

$$k_n = \frac{(2\lambda+1)}{(n+1)(n+2\lambda+1)}, \tag{5.7}$$

o que implica $0 \leq k_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Note que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$|b_n k_n(\mathscr{C}_{n+1}^{\lambda}(x) - (-1)^{n+1})| \leq b_n k_n |(\mathscr{C}_{n+1}^{\lambda}(x) - (-1)^{n+1})| \leq b_n k_n(|(\mathscr{C}_{n+1}^{\lambda}(x)|+1) \leq b_n k_n 2 \leq 2b_n.$$

Como $2\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, pelo Teste M de Weierstrass, a série em (5.5) é absoluta e uniformemente convergente.
Prova-se de forma semelhante que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n k_n \mathscr{C}_{n+1}^{\lambda}(x)$ converge absoluta e uniformemente em $[-1,1]$ e que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n k_n \mathscr{C}_{n+1}^{\lambda}(-1) < \infty$.
Escolhendo $C = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \mathscr{C}_{n+1}^{\lambda}(-1)$, temos

$$If(x) + C = \sum_{n=0}^{\infty} b_n k_n \mathscr{C}_{n+1}^{\lambda}(x). \tag{5.8}$$

Definindo $d_0 = 0$, $d_{n+1} = b_n k_n$ para $n \geq 0$, e substituindo estes valores em (5.8), obtemos

$$If(x) + C = d_0 \mathscr{C}_0^{\lambda}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \mathscr{C}_n^{\lambda}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \mathscr{C}_n^{\lambda}(x), \tag{5.9}$$

a qual é uma expansão de Gegenbauer com $d_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, que converge em $x = 1$. Portanto, pelo Teorema de Schoenberg 4.3.10, $If + C \in PD(\mathbb{S}^d)$.

Prova de 1. b): Como $f \in SPD(\mathbb{S}^{d+2})$, pelo item *1. a)*, temos $If + C \in PD(\mathbb{S}^d)$. Como $SPD(\mathbb{S}^{d+2}) = PD(\mathbb{S}^{d+2})_{CMS}$, segue que a série em (5.4) tem infinitos coeficientes com índices pares e infinitos com índices ímpares positivos. Logo, a série (5.9) para $If + C$ também tem infinitos coeficientes com índices pares e infinitos com índices ímpares positivos. Portanto, $If + C \in SPD(\mathbb{S}^d)$.

Prova de 1. c): Primeiramente vamos assumir que $f \in PD(\mathbb{S}^{d+2})$. A não negatividade de f em $[-1,1]$ implica a não negatividade de If em $[-1,1]$, e sabemos que:

$$If(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n k_n \mathscr{C}_{n+1}^{\lambda}(x) - \sum_{n=0}^{\infty} b_n k_n \mathscr{C}_{n+1}^{\lambda}(-1). \tag{5.10}$$

Definindo $d_0 = -\sum_{n=0}^{\infty} b_n k_n \mathscr{C}_{n+1}^{\lambda}(-1)$ e $d_{n+1} = b_n k_n$ para $n \geq 0$, reescrevemos (5.10) da forma

$$If(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \mathscr{C}_n^{\lambda}(x). \tag{5.11}$$

Como foi demonstrado no item $a)$, If é uma série absoluta e uniformemente convergente em $[-1,1]$. Portanto, converge em $x = 1$. Logo basta provar que d_0 é não negativo, para afirmar que todos os coeficientes da expansão de Gegenbauer são não negativos, e concluir que $If \in PD(\mathbb{S}^d)$. De fato, multiplicando a equação (5.11) por $\mathscr{C}_0^{\lambda}(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ e integrando no intervalo $[-1,1]$ temos:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} If(x)\mathscr{C}_0^{\lambda}(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx &= \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \mathscr{C}_n^{\lambda}(x)\mathscr{C}_0^{\lambda}(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} d_n \int_{-1}^{1} \mathscr{C}_n^{\lambda}(x)\mathscr{C}_0^{\lambda}(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx.
\end{aligned}$$

Como os polinômios de Gegenbauer normalizados $\mathscr{C}_n^{\lambda}$ são ortonormais com relação à função peso $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ (ver (3.97), (2.48) e (3.83)) e $\mathscr{C}_0^{\lambda}(x) = 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} If(x)\mathscr{C}_0^{\lambda}(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx &= d_0 \int_{-1}^{1} C_0^{\lambda}(x)^2(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx \\
&= d_0 \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado a integral $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ é positiva, e como If é não negativa em $[-1,1]$, segue que a integral $\int_{-1}^{1} If(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx$ é não negativa. Assim, podemos deduzir que d_0 é não negativo. Portanto, $d_n \geq 0$ para $n \geq 0$ e $If \in PD(\mathbb{S}^d)$.
Se assumimos que $f \in SPD(\mathbb{S}^{d+2})$, de igual raciocínio como acima $If = \sum_{n=0}^{\infty} d_n C_n^{\lambda} \in PD(\mathbb{S}^d)$ cujas série tem infinitos coeficientes de índices pares e infinitos de índices ímpares positivos.

Prova de 2. Lembremos que $PD(\mathbb{S}^{d+2})_{CX}$ é o cone de funções não negativas em $PD(\mathbb{S}^{d+2})$ que têm todos seus coeficientes $(d+2)$-Schoenberg positivos. Se assumirmos que

$f \in PD(\mathbb{S}^{d+2})_{CX}$, por (4.51), temos que $f \in SPD(\mathbb{S}^{d+2})$. O argumento de $1.a)$ mostra que $If(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \mathscr{C}_n^{\lambda}(x)$ converge absoluta e uniformemente em $[-1,1]$. Por outro lado, argumentos similares aos usados em $1.b)$ mostram que os coeficientes d_n são positivos com $n \geq 1$. A positividade da constante d_0 segue da prova $1.c)$. Como If é não negativa em $[-1,1]$, concluímos que $If \in PD(\mathbb{S}^d)_{CX}$. $\square$

O seguinte lema mostra que os coeficientes da série de Gegenbauer para a derivada f' de f podem ser calculados a partir dos coeficientes da série de Gegenbauer para f. Utilizaremos este resultado para demonstrarmos o teorema sobre o operador Descente.

Lema 5.1.4. Seja f uma função absolutamente contínua em $[-1,1]$. Se f e f' têm séries de Gegenbauer na forma

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{\lambda} \qquad \text{e} \quad f' = \sum_{n=0}^{\infty} b_n C_n^{\lambda+1}, \quad (\lambda \geq 0)$$

então, $b_{n-1} = 2\mu_\lambda a_n$, para $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Multiplicando ambos os lados de $f' = \sum_{n=0}^{\infty} b_n C_n^{\lambda+1}$ por $C_{n-1}^{\lambda+1}(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}$ e integrando em $[-1,1]$, obtemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{b_{n-1}} := \int_{-1}^{1} f'(x) C_{n-1}^{\lambda+1}(x)(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} dx &= \int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{\infty} b_j C_j^{\lambda+1}(x) C_{n-1}^{\lambda+1}(x)(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} dx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-1}^{1} b_j C_j^{\lambda+1}(x) C_{n-1}^{\lambda+1}(x)(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} dx
\end{aligned}$$

Pela ortogonolidade dos polinômios de Gegenbauer (3.97),

$$\begin{aligned}
\widetilde{b_{n-1}} &= \int_{-1}^{1} b_{n-1} [C_{n-1}^{\lambda+1}(x)]^2 (1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} dx \\
&= b_{n-1} \int_{-1}^{1} [C_{n-1}^{\lambda+1}(x)]^2 (1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} dx \\
&= b_{n-1} h_{n-1}^{\lambda+1},
\end{aligned} \tag{5.12}$$

onde

$$h_{n-1}^{\lambda+1} = \int_{-1}^{1} [C_{n-1}^{\lambda+1}(x)]^2 (1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} dx.$$

Por outro lado, usando integração por partes temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{b_{n-1}} &= \int_{-1}^{1} f'(x) C_{n-1}^{\lambda+1}(x)(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} dx \\
&= C_{n-1}^{\lambda+1}(x)(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} f(x)|_{-1}^{1} \\
&\quad - \int_{-1}^{1} f(x) \left\{ \frac{d}{dx} C_{n-1}^{\lambda+1} (1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} + C_{n-1}^{\lambda+1}(x) \frac{d}{dx}(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} \right\} dx \\
&= -\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{d}{dx} C_{n-1}^{\lambda+1}(1-x^2) - C_{n-1}^{\lambda+1}(x)(2\lambda+1)x \right\} dx \\
&= \int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \left\{ C_{n-1}^{\lambda+1}(x)(2\lambda+1)x - (1-x^2)\frac{d}{dx} C_{n-1}^{\lambda+1}(x) \right\} dx.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Aplicando a fórmula (3.98), a expressão entre colchetes torna-se

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{\lambda+1}(x)(2\lambda+1)x-(1-x^2)\frac{d}{dx}C_{n-1}^{\lambda+1}(x) = & \\ &= C_{n-1}^{\lambda+1}(x)(2\lambda+1)x-[-(n-1)xC_{n-1}^{\lambda+1}(x)+(n+2\lambda)C_{n-2}^{\lambda+1}] \\ &= (2\lambda+n)(xC_{n-1}^{\lambda+1}(x)-C_{n-2}^{\lambda+1}(x)). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Uma combinação das fórmulas (3.99) e (3.100), mostra que

$$xC_{n-1}^{\lambda+1}(x)-C_{n-2}^{\lambda+1}(x)=\frac{n}{2\lambda}C_n^{\lambda}, \quad \lambda>0. \tag{5.15}$$

Usando as equações (5.14) e (5.15), podemos reescrever (5.13) na forma

$$\widetilde{b_{n-1}}=\frac{n(2\lambda+n)}{2\lambda}\int_{-1}^{1}f(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}C_n^{\lambda}(x)dx. \tag{5.16}$$

Por (4.48) e (3.96) temos que

$$\widetilde{b_{n-1}}=\frac{n(2\lambda+n)}{2\lambda}h_n^{\lambda}a_n, \tag{5.17}$$

visto que

$$a_n=\frac{\int_{-1}^{1}f(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}C_n^{\lambda}(x)dx}{\int_{-1}^{1}[C_n^{\lambda}(x)]^2(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx}.$$

Pelas equações (5.17) e (5.12),

$$b_{n-1}h_{n-1}^{\lambda+1}=\widetilde{b_{n-1}}=\frac{n(2\lambda+n)}{2\lambda}h_n^{\lambda}a_n. \tag{5.18}$$

Agora vamos obter uma expressão para b_{n-1} usando a fórmula (3.96) respectivamente para as constantes h_n^{λ} e $h_{n-1}^{\lambda+1}$. Temos,

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= \frac{n(2\lambda+n)h_n^{\lambda}a_n}{2\lambda h_{n-1}^{\lambda+1}} \\ &= \frac{\frac{\pi\Gamma(n+2\lambda)}{2^{2\lambda-1}n!(n+\lambda)\Gamma^2(\lambda)}}{\frac{\pi\Gamma(n-1+2(\lambda+1))}{2^{2(\lambda+1)-1}(n-1)!(n-1+\lambda+1)\Gamma^2(\lambda+1)}}\frac{n(2\lambda+n)}{2\lambda}a_n \\ &= \frac{2^{2\lambda+1}(n-1)!\Gamma(n+2\lambda)\Gamma^2(\lambda+1)}{2^{2\lambda-1}n!\Gamma(n+2\lambda+1)\Gamma^2(\lambda)}\frac{n(2\lambda+n)}{2\lambda}a_n \\ &= \frac{2^2\Gamma(n+2\lambda)[\lambda\Gamma(\lambda)]^2}{n\Gamma^2(\lambda)(n+2\lambda)\Gamma(n+2\lambda)}\frac{n(2\lambda+n)}{2\lambda}a_n \\ &= 2\lambda a_n. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Assim, $b_{n-1}=2\lambda a_n$, para $\lambda>0$ e $n\in\mathbb{N}$.

Agora vejamos o caso em que $\lambda = 0$. É claro que a_n depende de λ e então vamos denotar a_n^0 quando $\lambda = 0$. Pela equação (5.19) temos

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= 2 \lim_{\lambda \to 0^+} \lambda a_n \\ &= 2 \lim_{\lambda \to 0^+} \lambda \frac{\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} C_n^\lambda(x) dx}{\int_{-1}^{1} [C_n^\lambda(x)]^2 (1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} dx} \\ &= 2 \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} C_n^\lambda(x)/\lambda dx}{\int_{-1}^{1} [C_n^\lambda(x)/\lambda]^2 (1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} dx}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Por (3.90), segue que

$$b_{n-1} = 2 \frac{\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} C_n^0(x) dx}{\int_{-1}^{1} [C_n^0(x)]^2 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx} = 2a_n^0. \tag{5.21}$$

□

Na demosntração de nosso último resultado utilizaremos o conceito de somabilidade de Abel, que definimos a seguir.

Definição 5.1.5. A série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é **Abel somável** se a série

$$f(r) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n. \tag{5.22}$$

é convergente para todo $r \in (-1,1)$. Se $f(r)$ converge para algum limite L quando $r \to 1^-$, dizemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é Abel convergente para L.

O seguinte lema também será usado.

Lema 5.1.6. (SZEGÖ, 1959, Theorem 9.1.3) A série de Gegenbauer (como no Lema 5.1.4) de uma função contínua g em $[-1,1]$ é Abel somável em $x = 1$. Se os termos da série são não negativos, então sua soma é $g(1)$.

Finalmente podemos provar o teorema para o operador Descente.

Teorema 5.1.7. Suponhamos que $f \in PD(\mathbb{S}^d)$, $d \geq 2$, e que $f' \in C([-1,1])$. Então,
(i) $D(f) \in PD(\mathbb{S}^{d+2})$.
(ii) Se além disso, $f \in SPD(\mathbb{S}^d)$ então $D(f) \in SPD(\mathbb{S}^{d+2})$.

Demonstração. Prova de (i).
a) Afirmamos que f' possui uma representação em série de Gegenbauer e converge uniformemente em $[-1,1]$.
De fato, como f' é contínua ela possui uma representação em série de Gegenbauer da forma $f' = \sum_{n=0}^{\infty} b_n C_n^{\lambda+1}$.

Alem disso f' é de Lipschitz portanto é uma função absolutamente continua em $[-1,1]$.
Dado que

$$f=\sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{\lambda} \qquad \text{e} \quad f'=\sum_{n=0}^{\infty} b_n C_n^{\lambda+1}, \quad (\lambda>0).$$

Pelo Lema 5.1.4 temos $b_{n-1}=2\lambda a_n$, para $n\in\mathbb{N}$, ou seja todos os coeficientes b_n da série de Gegenbauer de f' são não negativos.
Assim, o Lema 5.1.6 diz que f' é Abel somável em $x=1$. Como seus termos são não negativos, então sua soma é $f'(1)$.
Lembremos da propriedade *ii)* da Proposição 4.3.9 que implica $|b_n C_n^{\lambda+1}(x)|\le b_n C_n^{\lambda+1}(1)$, para todo $x\in[-1,1]$ e todo $n\in\mathbb{N}_0$. E como $f'(1)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n C_n^{\lambda+1}(1)<\infty$, pelo M-Teste de Weierstrass 4.3.12, f' converge uniformemente em $[-1,1]$.
b) Afirmamos que $Df=f'$.
Note que $F_n=\sum_{j=0}^{n} a_j C_j^{\lambda}$ derivável em $[-1,1]$, $F_n(1)$ converge para $f(1)$, e $F_n'=\sum_{j=0}^{n} b_j C_j^{\lambda+1}$ converge uniformemente em $[-1,1]$ para f'(derivada termo a termo). Logo por um conhecido resultado de cálculo $Df=f'$.
Finalmente as afirmações *a)* e *b)* nós proveem a utilizar o critério de Schoenberg 4.3.10 para concluir que $Df\in PD(\mathbb{S}^{d+2})$.

Prova de (ii). Assumindo $f\in SPD(\mathbb{S}^d)$, pelo item *(i)*, temos $Df\in PD(\mathbb{S}^{d+2})$. Pelo Teorema 4.3.16, existem infinitos coeficientes a_n com índices pares e infinitos com índices ímpares positivos. Como, pelo Lema 5.1.4, os coeficientes b_n têm o mesmo sinal dos coeficientes a_n, segue que a série de Df tem infintos coeficientes com índices pares e infinitos com índices ímpares positivos. Portanto, novamente pelo Teorema 4.3.16, $Df\in PD(\mathbb{S}^{d+2})_{CMS}=SPD(\mathbb{S}^{d+2})$.

□

Finalizamos nosso trabalhando observando que Beatson e zu Castell também estudaram operadores integrais $I_{\pm}^{\lambda}$ e diferenciais $D_{\pm}^{\lambda}$ de ordem fracionária que quando aplicados em funções definidas positivas e estritamente definidas positivas em esferas reais ainda mantém tais propriedades alterando dessa vez a dimensão da esfera de passo um. (veja (BEATSON; CASTELL, 2016, p.4)). O conteúdo de nosso trabalho não contém todas as ferramentas para o desenvolvimento dos resultados em relação a estes operadores. Então deixamos para um estudo há muito aguardado para o futuro, onde poderemos, por exemplo, investigar o comportamento de operadores similares a $I_{\pm}^{\lambda}$ e $D_{\pm}^{\lambda}$ para o caso em que forem consideradas funções definidas positivas no produto $\mathbb{S}^d\times\mathbb{R}^k$ ou no produto de esferas $\mathbb{S}^d\times\mathbb{S}^k$, $d,k\ge 1$.

REFERÊNCIAS

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions**. Mineola: Dover Publications, 1965. Citado na página 54.

ATKINSON, K.; HAN, W. **Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere: An Introduction**. New York: Springer, 2012. Citado nas páginas 21, 23, 24, 26, 27, 31, 37, 42, 47 e 48.

BACHOC, F.; PORCU, E.; BEVILACQUA, M.; FURRER, R.; T., F. Asymptotically equivalent prediction in multivariate geostatistics. **Bernoulli**, p. arXiv:2007.14684, 2020. Citado na página 18.

BEATSON, R.; CASTELL, W. Z. One-step recurrences for stationary random fiels on the sphere. **SIGMA Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications**, v. 12, n. 043, p. 19, 2016. Citado na página 78.

____. Dimension hopping and families of strictly positive definite zonal basis functions on spheres. **Journal of Approximation Theory**, v. 221, p. 22–37, 2017. Citado nas páginas 19 e 71.

BERG, C. Stieltjes-Pick-Bernstein-Schoenberg and their connection to complete monotonicity. **Positive Definite Functions: From Schoenberg to Space-Time challenges**, p. 15–45, 2008. Disponível em: <http://www.math.ku.dk/~berg/manus/castellon.pdf>. Citado na página 17.

BERG, C.; CHRISTENSEN, J. P. R.; RESSEL, P. **Harmonic Analysis on Semigroups: Theory of Positive Definite and Related Functions**. New York: Springer, 1984. Citado nas páginas 17 e 55.

BINGHAM, N. H.; SYMONS, T. L. Probability, Statistics and Planet Earth, I: Geotemporal covariances. **Methodology (arXiv:1706.02972)**, 2017. Citado na página 18.

BOCHNER, S. Monotone Funktionen, Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse. **Math. Ann.**, v. 108, n. 1, p. 378–410, 1933. ISSN 0025-5831. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01452844>. Citado na página 17.

CHEN, D.; MENEGATTO, V. A.; SUN, X. A necessary and sufficient condition for strictly positive definite functions on spheres. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 131, n. 9, p. 2733–2740 (electronic), 2003. ISSN 0002-9939. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-03-06730-3>. Citado nas páginas 17, 55 e 69.

CHENEY, E. W. Approximation using positive definite functions. In: **Approximation Theory VIII, Vol. 1 (College Station, TX, 1995)**. [S.l.]: World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995, (Ser. Approx. Decompos., v. 6). p. 145–168. Citado na página 18.

CHENEY, E. W.; SUN, X. Interpolation on spheres by positive definite functions. In: **Approximation Theory**. New York: Dekker, 1998, (Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., v. 212). p. 141–156. Citado na página 68.

DALEY, D. J.; PORCU, E. Dimension walks and Schoenberg spectral measures. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 142, n. 5, p. 1813–1824, 2014. ISSN 0002-9939. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-2014-11894-6>. Citado na página 18.

DU, J.; MA, C.; LI, Y. Isotropic variogram matrix functions on spheres. **Math. Geosci.**, v. 45, n. 3, p. 341–357, 2013. ISSN 1874-8961. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s11004-013-9441-x>. Citado na página 18.

EMERY, X.; ARROYO, D.; MERY, N. Twenty-two families of multivariate covariance kernels on spheres, with their spectral representations and sufficient validity conditions. **Stochastic Environmental Research and Risk Assessment**, Springer, 2021. Citado na página 18.

FASSHAUER, G. E. Positive definite kernels: Past, present and future. In: **Proceedings of the Workshop on Kernel Functions and Meshless Methods**. Gotingen: Dolomites Research Notes on Approximation, 2011. v. 4, p. 21–63. Citado na página 17.

FASSHAUER, G. E.; SCHUMAKER, L. L. Scattered data fitting on the sphere. In: **Mathematical methods for curves and surfaces, II (Lillehammer, 1997)**. Nashville, TN: Vanderbilt Univ. Press, 1998, (Innov. Appl. Math.). p. 117–166. Citado na página 18.

FREEDEN, W.; MICHEL, V.; NUTZ, H. Satellite-to-satellite tracking and satellite gravity gradiometry (advanced techniques for high-resolution geopotential field determination). **Journal of Engineering Mathematics**, v. 43, n. 1, p. 19–56, 2002. ISSN 0022-0833. Disponível em: <https://doi.org/10.1023/A:1016577524288>. Citado na página 18.

HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. **Matrix Analysis**. New York: Cambridge University Press, 2013. Citado nas páginas 55 e 58.

LIGHT, W. A.; CHENEY, E. W. Interpolation by periodic radial basis functions. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 168, n. 1, p. 111–130, 1992. ISSN 0022-247X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X(92)90193-H>. Citado na página 18.

MATHIAS, M. Über positive Fourier-Integrale. **Math. Z.**, v. 16, n. 1, p. 103–125, 1923. ISSN 0025-5874. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01175675>. Citado na página 64.

MÜLLER, C. **Analysis of spherical symmetries in Euclidean spaces**. New York: Springer-Verlag, 1998. v. 129. viii+223 p. (Applied Mathematical Sciences, v. 129). ISBN 0-387-94949-6. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0581-4>. Citado na página 31.

NARCOWICH, F. J. Recent developments in approximation via positive definite functions. In: **Approximation theory IX, Vol. 2 (Nashville, TN, 1998)**. Nashville, TN: Vanderbilt Univ. Press, 1998, (Innov. Appl. Math.). p. 221–242. Citado na página 17.

PORCU, E.; BEVILACQUA, M.; GENTON, M. G. Spatio-Temporal Covariance and Cross-Covariance Functions of the Great Circle Distance on a Sphere. **J. Amer. Statist. Assoc.**, v. 111, n. 514, p. 888–898, 2016. ISSN 0162-1459. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1080/01621459.2015.1072541>. Citado na página 18.

RON, A.; SUN, X. Strictly positive definite functions on spheres in Euclidean spaces. **Math. Comp.**, v. 65, n. 216, p. 1513–1530, 1996. ISSN 0025-5718. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-96-00780-6>. Citado na página 68.

SASVÁRI, Z. **Positive definite and definitizable functions**. [S.l.]: Akademie Verlag, Berlin, 1994. v. 2. 208 p. (Mathematical Topics, v. 2). ISBN 3-05-501446-4. Citado na página 17.

SCHOENBERG, I. J. Positive definite functions on spheres. **Duke Math. J.**, v. 9, p. 96–109, 1942. Citado nas páginas 17, 55 e 67.

SCHREINER, M. On a new condition for strictly positive definite functions on spheres. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 125, n. 2, p. 531–539, 1997. ISSN 0002-9939. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-97-03634-4>. Citado na página 68.

SZEGÖ, G. **Orthogonal polynomials**. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1959. ix+421 p. (American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 23. Revised ed). Citado nas páginas 52 e 77.

XU, Y.; CHENEY, E. W. Strictly positive definite functions on spheres. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 116, n. 4, p. 977–981, 1992. ISSN 0002-9939. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2307/2159477>. Citado nas páginas 55 e 69.

ÍNDICE REMISSIVO