Estabilidade para equações diferenciais em medida

Lucas Felipe Rodrigues dos Santos Garcia

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP
Data de Depósito: 28/01/2008
Assinatura:______________________

Estabilidade para equações diferenciais em medida [1]

Lucas Felipe Rodrigues dos Santos Garcia

Orientadora: ***Prof. Dra. Márcia Cristina Anderson Braz Federson***

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática.

USP - São Carlos
Fevereiro de 2008

[1]Este trabalho teve suporte financeiro da CAPES

À todos que me apoiaram.

Agradecimentos

Inicialmente gostaria de agradecer à minha família, de maneira mais especial à minha mãe (Val) que sempre acreditou em mim, à Tia Vilma pelo apoio e carinho, ao meu padrasto Ceará, à minha mais que namorada, amiga, confidente, Renata (Mô), por sempre estar comigo e ter me ajudado em todos os sentidos para que este trabalho fosse realizado, pela confiança, carinho nos momentos ruins e bons, pelas broncas nas horas certas, conselhos, por dividir sua história comigo, por todo seu amor! Amo-te muito! Obrigado por fazer parte da minha vida!

Aos amigos que fiz nessa jornada até aqui e que nunca irei esquecer, Thaís Monis, pelo apoio e ajuda no início da caminhada, aos antigos da sala 4009, em especial ao Pimenta, Juliano, Wescley e Castilho, pelas horas perdidas estudando juntos. Aos novos da sala 4009, Fábio, Marcos, Thaís Jordão e Mendes. À galera da pós pela companhia no cafézinho. Ao Renan, grande camarada, pelas partidas de PS6 e BF2 (ainda devo uma revanche). Aos amigos que fiz em Rio Claro/SP, Fozzy, Pac, Simprão, à velha guarda da casa 5, Mineiro, Véio, Chorão (esse vai longe), Lélis (agregado!), Gordinho (in memorian). Nunca vou esquecer vocês. Aos amigos de infância Mica, Xande, Mila e Lu. À minha orientadora Márcia, pela orientação segura e competente de uma grande profissional, paciência e tardes perdidas me ajudando.

Valeu galera!

Resumo

Neste trabalho, nós investigamos a estabilidade da solução trivial da seguinte Equação Diferencial em Medida (EDM)

$$Dx = f(x,t) + g(x,t)Du, \tag{1}$$

onde $\overline{B}_c = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq c\}$, $f : \overline{B}_c \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $g : \overline{B}_c \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função de variação limitada em $[a,b]$ e contínua à esquerda em $(a,b]$, $f(x,\cdot)$ é Lebesgue integrável em $[a,b]$, $g(x,\cdot)$ é du-integrável em $[a,b]$, $f(0,t) = 0 = g(0,t)$ para todo t e Dx e Du denotam as derivadas distribucionais de x e u no sentido de L. Schwartz.

Nós consideramos as funções f e g num contexto bem geral. Assim, para obtermos nossos resultados, nós provamos a correspondência biunívoca entre as soluções da classe de EDMs (1) em tal contexto e as soluções de certa classe de equação diferencial ordinária generalizada (EDOG). Desta forma, foi possível aplicarmos as técnicas e resultados da teoria das equações diferenciais ordinárias generalizadas, como teoremas do tipo Lyapunov e do tipo Lyapunov inverso, para obtermos os resultados correspondentes para a EDM (1).

Os resultados apresentados neste trabalho sobre estabilidade da solução trivial da EDM (1) são inéditos. Parte deles foram apresentados no 66º Seminário Brasileiro de Análise. Veja [7].

Abstract

In this work, we investigate the stability of the trivial solution of the following Measure Differential Equation (MDE)

$$Dx = f(x,t) + g(x,t)Du, \tag{2}$$

where $\overline{B}_c = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq c\}$, $f : \overline{B}_c \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ and $g : \overline{B}_c \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$, u is a function of bounded variation in $[a,b]$ which is also left continuous on $(a,b]$, $f(x,\cdot)$ is Lebesgue integrable in $[a,b]$ and $g(x,\cdot)$ is du-integrable in $[a,b]$, $f(0,t) = 0 = g(0,t)$ for all t and Dx, Du denote the derivatives of x and u in the sense of distributions of L. Schwartz.

We consider the functions f and g in a general setting. Thus, in order to obtain our results, we prove there is a one-to-one correspondence between the solutions of the MDE (2) in this setting and the solutions of a certain class of generalized ordinary differential equation (GODE). In this manner, it was possible to apply the techniques and results from the teory of GODE's, such as Lyapunov-type and converse Lyapunov-type theorems, to obtain the corresponding results for our MDE (2).

The results presented in this work concerning the stability of the trivial solution of the MDE (2) are new. Some of them were presented at the $66^{\underline{th}}$ Seminário Brasileiro de Análise. See [7].

Sumário

Introdução

Na vida real, diversos processos evolutivos tais como fenômenos biológicos, modelos envolvendo batimentos em medicina, modelos de controle ótimo em economia, sistemas de freqüência modulada e movimentos de mísseis e aeronaves são caracterizados pelo fato de que, em determinados instantes, tais processos podem experimentar mudança repentina de estado ou mudanças em lapsos de tempo tão pequenos que podem ser consideradas instantâneas. Estas perturbações agem na forma de impulsos.

Um problema que surge na orientação do curso de veículos espaciais é escolher controles, que são em parte impulsivos e em parte não-impulsivos, para otimizar a performance relativa a uma certa função de custo. Uma formulação deste tipo de problema pode ser dada por

$$dx(t) = f(t, x(t), u(t))dt + g(t, x(t))\mu(dt) \tag{3}$$

que relaciona a trajetória $x(\cdot)$ com o controle convencional não-impulsivo $u(\cdot)$ e com a medida μ que representa um controle impulsivo. O problema de otimização dos controles impulsivos de (3) foi estudado em [3].

Em [8], os autores estudam o seguinte sistema singular dados por uma equação diferencial em medida (escrevemos abreviadamente EDMs):

$$E_i D x_i = A_i x_i + B_i u_i + \sum_{j=1,\, j\neq i} A_{ij} x_j D w_j, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{4}$$

onde D denota a derivada, no sentido das distribuições de L. Schwartz, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ e $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ representam, respectivamente, o estado local e a entrada de controle, sendo que u_i pode ser descontínuo, E_i e A_i são matrizes constantes $n_i \times m_i$, $w_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ são funções localmente de variação limitada e contínuas à direita, $i, j = 1, 2, \ldots, r$, $\sum_{j=1}^{n} n_j = n$ e $\sum_{j=1}^{n} m_j = n$.

Sistemas singulares como (4) surgem, naturalmente, em diversas áreas das ciências como em circuitos elétricos, dinâmica de reatores nucleares, sistemas de controle, economia multisetorial entre outras. Por isto, a teoria de EDMs para o tratamento destes sistemas é mais adequada do que a teoria clássica das EDOs. Para estas, os impulsos são tratados como condições adicionais às equações, enquanto que as primeiras tratam os impulsos de forma mais apropriada integrando-os às equações. No caso de (4), se w_i for uma função localmente de variação limitada, então Dw_i poderá ser identificada com uma medida de Lebesgue-Stieltjes que atua alterando abruptamente o estado do sistema nos pontos de descontinuidade de w_i. O fato de que as soluções de (4) são descontínuas (pois são funções localmente de variação limitada) traz algumas complicações quando se tenta aplicar as técnicas usuais da teoria de controle, por exemplo.

Mais geralmente, o problema de modelização de controladores robustos para sistemas incertos também atrai interesse de pesquisadores. Em [2], por exemplo, a estabilidade deste tipo de sistema com incertezas e retardos foi investigada. Os autores de [2] consideram a seguinte EDM

$$Dx(t) = [(A + \Delta A)x(t) + (A_1 + \Delta A_1)x(t - r) + Bu(t)]Dw, \tag{5}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ são, respectivamente, o vetor de estado e o vetor de controle, A, A_1, B são matrizes conhecidas e $\Delta A, \Delta A_1$ são matrizes desconhecidas de dimensões apropriadas, r denota o retardo no tempo, o qual é assumido como sendo constante, limitado e desconhecido, Dx e Dw representam as derivadas distribucionais de x e w respectivamente, e $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função localmente de variação limitada e contínua à direita.

Em [1], o autor considera o problema populacional envolvendo uma batalha de 2 grupos de combatentes: a unidade A e a unidade B. Cada unidade escolhe uma estratégia de ataque e contra-ataque com respeito ao inimigo de forma que a batalha dure o menor tempo possível. O controle do tempo de batalha é governado pela presença de uma *função de reforço* cuja construção precisa ser feita de forma a refletir um comportamento impulsivo que naturalmente espera-se que ocorra no campo de batalha.

População não é um fenômeno contínuo. Assim, é mais adequado e natural utilizar-se uma derivada distribucional para formular o problema do que uma derivada ordinária. A escolha da teoria das EDMs é, portanto, bastante adequada para tratar este problema.

Sejam $N_1(t)$ e $N_2(t)$ respectivamente as populações de combatentes das unidades A e B. A taxa (no sentido das distribuições) de decrescimento da população de soldados em função do tempo depende dos seguintes parâmetros: da população de soldados num tal instante, das táticas militares, do nível de sofisticação do equipamento bélico e do reforço das unidades com combatentes e armas. Assim, um modelo militar modelado por uma

EDM é

$$DN_1 = -\alpha N_1 Du_1 + N_2 g_1 \tag{6}$$

$$DN_2 = -\beta N_2 Du_2 + N_1 g_2 \tag{7}$$

para $0 < t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$, $\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$, onde

$$g_1 = g_1(t, \beta, N_1) \qquad \text{e} \qquad g_2 = g_2(t, \alpha, N_2)$$

são tais que

$$g_1, g_2 : J \times \mathbb{R} \times BV(J) \to \mathbb{R}$$

com J um intervalo da reta real e $BV(J)$ o espaço das funções de variação limitada em J. Como funções do tempo em J, g_1 e g_2 são funções de variação limitada e contínuas à direita. Além disso, u é de variação limitada e D denota a derivada distribucional, no sentido de L. Schwartz. As quantidades αN_1 e βN_2 em (6) e (7) são, respectivamente, as taxas de decrescimento populacional de N_1 e N_2 com respeito ao tempo e no sentido das distribuições. As populações decaem de tal modo que elas são proporcionais às relativas populações e α e β são certos multiplicadores militares. Por outro lado, as quantidades $N_1 g_1$ e $N_2 g_2$ são, respectivamente, as estratégias de vitória das unidades A e B e g_1 e g_2 são as funções de reforço das unidades A e B respectivamente. As funções g_1 e g_2 dependem de ambos: as populações de soldados no campo de batalha e do equipamento bélico em tempos fixados t_i, $i = 1, 2, \ldots$. Portanto é razoável considerar este modelo como uma equação diferencial impulsiva e, a fim de envolver as derivadas no sentido das distribuições, são introduzidas as quantidades u_i $i = 1, 2, \ldots$, no modelo. Assim, o uso de derivadas distribucionais é justificado pela natureza impulsiva das populações e, conseqüentemente, as técnicas da teoria de EDMs são apropriadas para a análise do modelo.

Pelo que pudemos observar nos comentários acima, uma das formas de se considerar equações que envolvem impulsos é a formulação dos problemas por EDMs. O principal objetivo do conceito de EDMs é a descrição de sistemas que possuem soluções descontínuas causadas pelo comportamento impulsivo do sistema diferencial. As soluções de uma EDM são funções descontínuas de variação limitada.

As EDMs têm sido investigadas por muitos autores. Um texto fundamental é [15]. Outras referências são, por exemplo, [6], [12], [14], [18], [5] e [20].

Sejam $\overline{B}_c = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq c\}$, $G = \overline{B}_c \times [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, $f : G \to \mathbb{R}^n$ uma função Lebesgue integrável e $g : G \to \mathbb{R}^n$ uma função du-integrável, onde du é a medida gerada por uma função $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ de variação limitada em $[a, b]$ e contínua à direita (esquerda). Uma EDM pode ser escrita formalmente como

$$Dx = f(x,t) + g(x,t)Du, \tag{8}$$

onde Dx e Du denotam as derivadas distribucionais de x e u no sentido de L. Schwartz.

Em [6], os autores mostraram que o conceito de uma solução de (8) com condição inicial $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in [a,b]$, $x_0 \in \overline{B}_c$, é equivalente ao conceito de solução da equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s),s)du(s), \quad t \in [a,b]. \tag{9}$$

Em [15], a existência e unicidade de soluções de (3.1) são apresentadas. Veja, também, [12]. Em [6], [4], [14], [13], [18] e [19] os diversos autores consideram o sistema ordinário

$$\dot{x} = f(x,t), \tag{10}$$

com $f(0,t) = 0$ para todo t de forma que $x = 0$ seja solução de (10) e, então, consideram o sistema (8) como perturbação de (10). Nestes artigos, são investigados resultados envolvendo conceitos distintos de estabilidade tais como equivalência assintótica de soluções ([18]), quase-equi-estabilidade assintótica da solução trivial ([6]) ou estabilidade assintótica e estabilidade uniforme de conjuntos assintoticamente auto-invariantes ([14], [19]). Os resultados de [13], por exemplo, são do tipo Lyapunov inversos, assumido-se que o conjunto assintoticamente auto-invariante $x = 0$ seja estável, em algum sentido, relativamente à equação perturbada (8). Em [14], o autor obtém resultados sobre estabilidade (uniforme e também assintótica exponencial) do conjunto assintoticamente auto-invariante $x = 0$ relativamente ao sistema ordinário (10).

O objetivo desta dissertação é considerar a EDM (8), com $f(0,t) = 0 = g(0,t)$ para todo t, de tal forma que $x = 0$ seja solução da equação, e investigar alguns tipos de estabilidade da solução trivial. Pelo fato de considerarmos condições mais gerais do que as condições usuais de Carathéodory para as funções f e g, usaremos a correspondência entre EDMs e certa classe de equações mais gerais, chamadas de equações diferenciais ordinárias generalizadas (escrevemos EDOGs). Grosseiramente falando, consideraremos a equação (9), correspondente à EDM (8), tomando as integrais no sentido de Perron e de Perron-Stieltjes obtendo, assim, uma equação cuja solução dizemos ser solução de uma EDOG. Note que o espaço das funções integráveis no sentido de Perron-Stieltjes contém propriamente as funções Lebesgue-Stieltjes integráveis e os valores das integrais coincidem, caso ambas existam. Logo, a utilização da correspondência entre EDMs e EDOGs é bastante apropriada, pois podemos aplicar as técnicas e resultados existentes na teoria de

EDOGs para obtermos resultados correspondentes para as EDMs. Em conseqüência da nossa escolha do espaço das EDOGs, os resultados obtidos generalizam os existentes ou são resultados novos.

Em [15], por exemplo, os autores apresentam um resultado sobre existência local e unicidade de solução assumindo que f e g satisfazem condições de Carathéodory e Lipschitz. Em nosso trabalho, obtemos existência local assumindo que as integrais indefinidas destas funções satisfazem condições do tipo Carathéodory e Lipschitz. Portanto, nosso resultado é mais geral.

Com respeito ao estudo da estabilidade da EDM (3.1) ou, mais precisamente, estabilidade da solução trivial da EDM (3.1), introduzimos o conceito de estabilidade variacional e estabilidade variacional assintótica a fim de obtermos teoremas do tipo Lyapunov e do tipo Lyapunov inversos relativamente a estes conceitos.

Podemos dizer, de maneira informal, que a solução trivial de (8) é variacionalmente estável, se a solução trivial de sua perturbada

$$Dx = f(x,t) + g(x,t)Du + p(t), \tag{11}$$

onde a integral indefinida de p tem variação pequena, for estável no sentido usual. Este conceito "novo" de estabilidade foi introduzido para o caso de equações funcionais com retardamento em [11] com o objetivo de obter-se teoremas do tipo Lyapunov inversos para tais equações. Note que o conceito de estabilidade variacional implica no conceito usual de estabilidade da solução $x \equiv 0$ de (8). Note, ainda, que a perturbação p pode ser "grande" em algum sentido e, ainda assim, conseguimos obter a estabilidade da solução trivial de (8), contanto que a variação de sua integral indefinida seja suficientemente pequena.

Em vista dos comentários acima, os resultados que apresentamos neste trabalho sobre estabilidade são novos.

Organizamos a apresentação dos conteúdos desta dissertação como segue. No Capítulo 1, apresentamos a teoria fundamental sobre EDOGs, iniciando com definições básicas e introduzindo a terminologia usada na teoria, apresentando alguns resultados sobre integração de Perron (ou, como chamamos aqui, integração de Kurzweil). No Capítulo 2, apresentamos a parte da teoria das EDOGs sobre estabilidade. No Capítulo 3, consideramos sistemas em medida como a equação (8), apresentamos o contexto com o qual vamos trabalhar e desenvolvemos toda a teoria básica neste contexto. Inclue-se aí a representação integral da EDM (8). Ainda no Capítulo 3, provamos a correspondência entre as EDMs e certa classe de EDOGs e apresentamos um resultado sobre existência local e unicidade de soluções da EDM (8). No Capítulo 4, tratamos da estabilidade para EDMs. Introduzimos o conceito de estabilidade variacional mencionado acima e provamos diversos resultados sobre invariância de estabilidade por perturbações para finalmente estabelecermos os resultados de Lyapunov e Lyapunov inversos. Finalmente, no Capítulo 5, incluímos uma generalização de um teorema apresentado em [15] para o qual foi preciso estabelecermos uma Fórmula da Variação das Constantes.

Capítulo

1

Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas

Neste capítulo, iremos introduzir a teoria básica e necessária de equações diferenciais ordinárias generalizadas (escrevemos, abreviadamente, EDOGs), para, no capítulo seguinte, desenvolvermos os resultados de estabilidade para EDOGs.

A referência básica para a teoria das EDOGs é [16]. Quando acharmos pertinente, vamos incluir as demonstrações dos resultados apresentados.

1.1 A Integral Generalizada de Perron

Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$ com $-\infty < a < b < +\infty$. Um par que consiste (τ, J) de um ponto $\tau \in \mathbb{R}$ e um intervalo compacto $J \subset \mathbb{R}$ é chamado de *intervalo marcado* e τ é a *marca* de J.

Uma coleção finita $\Delta = \{(\tau_j, J_j), j = 1, 2, \ldots, k\}$ de intervalos marcados é chamado um *sistema* em $[a,b]$, se $\tau_j \in J_j \subseteq [a,b]$ para todo $j = 1, 2, \ldots, k$ e $IntJ_i \bigcap IntJ_j \neq \emptyset$ para $j \neq i$, onde $IntJ$ denota o interior de um intervalo J.

Um sistema $\Delta = \{(\tau_j, J_j), j = 1, 2, \ldots, k\}$ de intervalos marcados é chamado *partição* de $[a,b]$, se $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{k} J_j = [a,b]$. Neste caso, utilizamos a notação D ao invés de Δ.

Dada uma função positiva $\delta : [a,b] \to (0, +\infty)$, chamada *calibre* em $[a,b]$, um intervalo marcado (τ, J) com $\tau \in [a,b]$ é dito ser δ*-fino*, se $J \subset]\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau)[$.

Um sistema (em particular, uma partição) $\Delta = \{(\tau_j, J_j), j = 1, 2, \ldots, k\}$ é δ*-fino*, se cada par ponto-intervalo (τ_j, J_j) for δ-fino, para $j = 1, 2, \ldots, k$.

O próximo resultado pode ser encontrado em [16], Lema 1.4 e é muito importante para a definição que o segue.

Lema 1.1 (Cousin - [16], Lema 1.4). *Dado uma função calibre δ em $[a,b]$, existe uma partição δ-fina $D = \{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]), j = 1, 2, \ldots, k\}$ de $[a,b]$.*

Definição 1.2. *Uma função $U : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ é chamada integrável em $[a,b]$, se existir $I \in \mathbb{R}$ tal que dado $\epsilon > 0$, existe uma função calibre δ em $[a,b]$ tal que*

$$|S(U,D) - I| = \left| \sum_{j=1}^{k} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - I \right| < \epsilon \tag{1.1}$$

para toda partição δ-fina

$$D = \{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]), j = 1, 2, \ldots, k\} = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \tau_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\} \tag{1.2}$$

de $[a,b]$, onde usamos a notação $S(U,D) = \sum_{j=1}^{k} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})]$. O elemento $I \in \mathbb{R}$ é chamado a integral generalizada de Perron de U sobre o intervalo $[a,b]$ e será denotado por $\int_a^b DU(\tau,t)$.

Quando $\int_a^b DU(\tau,t)$ existe, definimos $\int_a^b DU(\tau,t) = -\int_b^a DU(\tau,t)$ e $\int_a^b DU(\tau,t) = 0$ se $a = b$.

Observação: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável segundo Riemann e defina $U(\tau,t) = f(\tau)t$ para $\tau, t \in [a,b]$. Então

$$U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1}) = f(\tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1})$$

Logo, considerando a função calibre δ em $[a,b]$ como sendo constante, $\int_a^b DU(\tau,t)$ representa a integral de Riemann da função f em $[a,b]$, pois neste caso, $\int_a^b DU(\tau,t) = \int_a^b D[f(\tau)t] = \int_a^b f(s)ds$. Mais do que isso, se $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ for dada e definirmos $U(\tau,t) = f(\tau)g(t)$ tal que $\tau, t \in [a,b]$, então

$$U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1}) = f(\tau_j)[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})].$$

Logo $\int_a^b DU(\tau,t)$ representa a integral de Riemann-Stieltjes de f com relação à g em

$[a,b]$ se a integral existir e, neste caso, $\displaystyle\int_a^b DU(\tau,t) = \int_a^b D[f(\tau)g(t)] = \int_a^b f(s)dg(s)$.

Analogamente à Definição 1.2, definimos a intergral de Perron generalizada de U a valores em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.3. *Dizemos que uma função $U : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é chamada integrável sobre $[a,b]$, se existir um $I \in \mathbb{R}^n$ tal que dado $\epsilon > 0$, existe uma função calibre δ em $[a,b]$ tal que*

$$\|S(U,D) - I\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - I \right\| < \epsilon \tag{1.3}$$

para toda partição δ-fina $D = \{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]), j = 1, 2, \ldots, k\}$ de $[a,b]$. Aqui $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$.

Denotaremos por $\mathcal{K}([a,b])$ o conjunto de todas as funções U o qual são integráveis sobre $[a,b]$.

Teorema 1.4 ([16] - Teor. 1.6). *Uma função $U : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}^n$, $U = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ é integrável se, e somente se, cada componente U_m, $m = 1, 2, \ldots, m$ for integrável no sentido da Definição 1.2.*

Prova: Suponha que a integral $\displaystyle\int_a^b DU(\tau,t) = I = (I_1, I_2, \ldots, I_n)$ existe. Sendo $\displaystyle S(U,D) = \sum_{j=1}^{k} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})]$ e $\displaystyle S(U_m, D) = \sum_{j=1}^{k} [U_m(\tau_j, \alpha_j) - U_m(\tau_j, \alpha_{j-1})]$, escrevemos $(S(U,D))_m = S(U_m, D)$. Assim

$$|S(U_m, D) - I_m| = |(S(U,D))_m - I_m| = |(S(U,D) - I)_m| \leq \|S(U,D) - I\|.$$

Portanto obtemos a existência de $\displaystyle\int_a^b DU_m(\tau,t)$.

Reciprocamente, suponhamos que a integral $\displaystyle\int_a^b DU_m(\tau,t) = I_m$ existe para todo $m = 1, 2, \ldots, n$. Então para qualquer $\epsilon > 0$, existe uma função calibre δ_m em $[a,b]$ tal que para toda partição δ_m-fina D_m de $[a,b]$, temos $|S(U,D))_m - I_m| < \epsilon$. Seja

$$\delta(\tau) \leq \min\{\delta_1(\tau), \delta_2(\tau), \ldots, \delta_n(\tau)\}$$

para $\tau \in [a,b]$. Então toda partição δ-fina D de $[a,b]$ também é δ_m-fina para $m =$

$1, 2, \ldots, n$. Logo

$$\|S(U,D) - I\| = \left(\sum_{m=1}^{n} (S(U_m, D) - I_m)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq (n\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}$$

para toda partição δ-fina D de $[a,b]$.

Consequentemente a integral $\displaystyle\int_a^b DU(\tau,t)$ existe. ■

Teorema 1.5 ([16] - Teor. 1.10). *Se $U \in \mathcal{K}([a,b])$, então para todo $[c,d] \subset [a,b]$, $U \in \mathcal{K}([c,d])$.*

O próximo resultado é conhecido como Lema de Saks-Henstocks e será utilizado para demonstrarmos diversos resultados adiante.

Lema 1.6 (Saks-Henstocks - [16] - Lema 1.13). *Seja $U : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}^n$ integrável sobre $[a,b]$. Dado $\epsilon > 0$, seja δ uma função calibre em $[a,b]$ tal que*

$$\left\|\sum_{j=1}^{k} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - \int_a^b DU(\tau,t)\right\| < \epsilon \tag{1.4}$$

para toda partição δ-fina $D = \{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]), j = 1, 2, \ldots, k\}$ de $[a,b]$. Se

$$a \leq \beta_1 \leq \xi_1 \leq \gamma_1 \leq \beta_2 \leq \xi_2 \leq \gamma_2 \leq \ldots \leq \beta_m \leq \xi_m \leq \gamma_m \leq b$$

representa um sistema δ-fino $\{(\xi_j, [\beta_j, \gamma_j]), j = 1, 2, \ldots, m\}$, isto é,

$$\xi_j \in [\beta_j, \gamma_j] \subset]\xi_j - \delta(\xi_j), \xi_j + \delta(\xi_j)[, j = 1, 2, \ldots, m$$

então

$$\left\|\sum_{j=1}^{m} \left[U(\xi_j, \beta_j) - U(\xi_j, \gamma_j) - \int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau,t)\right]\right\| < \epsilon. \tag{1.5}$$

Prova: Temos $\beta_j \leq \gamma_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, mas sem perda de generalidade, podemos supor que $\beta_j < \gamma_j$ para todo $j = 1, 2, \ldots, m$. Denote $\gamma_0 = a$ e β_{m+1}.

Também temos $\gamma_j \leq \beta_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Mas se $\gamma_j < \beta_{j+1}$ para algum $j = 0, 1, \ldots, m$, como $\displaystyle\int_a^b DU(\tau,t)$ existe, então pelo Teorema 1.5 a integral $\displaystyle\int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau,t)$ existe e, portanto, para qualquer $\eta > 0$, existe uma função calibre δ_j em $[\gamma_j, \beta_{j+1}]$, tal que

$\delta_j(\tau) < \delta(\tau)$, $\tau \in [\gamma_j, \beta_{j+1}]$ e para toda partição δ_j-fina D^j de $[\gamma_j, \beta_{j+1}]$, temos

$$\left\| S(U, D^j) - \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t) \right\| < \frac{\eta}{m+1} \tag{1.6}$$

Se $\gamma_j = \beta_{j+1}$, então teremos $S(U, D^j) = 0$.

Consequentemente, de (1.4), temos

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j, \gamma_j) - U(\xi_j, \beta_j)] + \sum_{j=1}^{m} S(U, D^j) - \int_a^b DU(\tau, t) \right\| < \epsilon,$$

já que $\bigcup_{j=0}^{m} D^j \cup \{(\xi_j, [\beta_j, \gamma_j]), j = 1, 2, \ldots, m\}$ é uma partição δ-fina de $[a, b]$.

Observe que $\displaystyle\int_a^b DU(\tau, t) = \sum_{j=1}^{m} \int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau, t) + \sum_{j=0}^{m} \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t)$.

Logo

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j, \beta_j) - U(\xi_j, \gamma_j) - \int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau, t)] \right\|$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j, \beta_j) - U(\xi_j, \gamma_j)] + \sum_{j=0}^{m} \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t) - \int_a^b DU(\tau, t) \right\|$$

$$\leq \left\| \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j, \beta_j) - U(\xi_j, \gamma_j)] - \int_a^b DU(\tau, t) + \sum_{j=0}^{m} S(U, D^j) \right\|$$

$$+ \sum_{j=0}^{m} \left\| S(U, D^j) - \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t) \right\| < \epsilon + (m+1)\frac{\eta}{m+1} = \epsilon + \eta.$$

Como esta desigualdade vale para todo $\eta > 0$, obtemos (1.5). ∎

O próximo teorema trata da extensão de Cauchy para a integral generalizada de Perron.

Teorema 1.7 ([16] - Teor. 1.14). *Seja $U : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma função integrável em $[a, c]$ tal que para todo $c \in [a, b)$, o limite*

$$\lim_{c \to b-} \left[\int_a^c DU(\tau, t) - U(b, c) + U(b, b) \right] = I$$

existe. Então a função U é integrável em $[a, b]$ *e*

$$\int_a^b DU(\tau, t) = I.$$

Observação: Analogamente, suponhamos que $U : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é integrável em $[c, b]$ e que, para todo $c \in (a, b]$, o limite

$$\lim_{c \to a+} \left[\int_c^b DU(\tau, t) + U(a, c) - U(a, a) \right] = I$$

existe. Então a função U é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b DU(\tau, t) = I.$$

O Teorema 1.7 e a observação que o seguem implicam que a integral de Perron generalizada contém suas integrais "impróprias".

Teorema 1.8 ([16] - Teor. 1.16). *Seja* $U : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *tal que U seja integrável em* $[a, b]$ *e considere* $c \in [a, b]$*. Então*

$$\lim_{s \to c} \left[\int_a^s DU(\tau, t) - U(c, s) + U(c, c) \right] = \int_a^c DU(\tau, t).$$

Prova: Seja $\epsilon > 0$ dado. Como U é integrável em $[a, b]$, existe uma função calibre δ em $[a, b]$ tal que vale

$$\|S(U, D) - I\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - I \right\| < \epsilon$$

para toda partição δ-fina $D = \{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]), j = 1, 2, \ldots, k\}$ de $[a, b]$.

Seja $c \in [a, b]$ qualquer. Se $s \in \,]c - \delta(c), c + \delta(c)[\, \cap [a, b]$, então pelo Lema de Saks-Henstock (Lema 1.6), temos

$$\left\| U(c, s) - U(c, c) - \int_c^s DU(\tau, t) \right\| < \epsilon.$$

Logo

$$\left\| \int_a^s DU(\tau, t) - U(c, s) + U(c, c) - \int_c^s DU(\tau, t) \right\|$$
$$= \left\| \int_c^s DU(\tau, t) - U(c, s) + U(c, c) \right\| < \epsilon,$$

e assim segue o resultado. ■

Teorema 1.9 ([16] - Teor. 1.35). *Seja* $U : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *uma função integrável. Se* $V : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *for integrável e se existir uma função calibre* θ *em* $[a,b]$ *tal que*

$$|t-\tau|\|U(\tau,t)-U(\tau,\tau)\| \leq (t-\tau)(V(\tau,t)-V(\tau,\tau))$$

para todo $t \in]\tau-\theta(\tau), \tau+\theta(\tau)[$, *então vale a desigualdade*

$$\left\| \int_a^b DU(\tau,t) \right\| \leq \int_a^b DV(\tau,t).$$

Prova: Assuma $\epsilon > 0$ dado. Como as integrais $\int_a^b DU(\tau,t)$ e $\int_a^b DV(\tau,t)$ existem, então existe uma função calibre δ em $[a,b]$ com $\delta(s) \leq \theta(s)$ para $s \in [a,b]$ tal que para toda partição δ-fina

$$D = \{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]), j = 1, 2, \dots, k\}$$

de $[a,b]$, temos

$$\| \sum_{j=1}^{k} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - \int_a^b DU(\tau,t) \| < \epsilon \tag{1.7}$$

e

$$| \sum_{j=1}^{k} [V(\tau_j, \alpha_j) - V(\tau_j, \alpha_{j-1})] - \int_a^b DV(\tau,t) | < \epsilon. \tag{1.8}$$

Por hipótese, para cada $i = 1, 2, \dots, k$, temos

$$|\alpha_i - \tau_i|\|U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \tau_i)\| \leq (\alpha_i - \tau)(V(\tau_i, \alpha_i) - V(\tau_i, \tau_i)).$$

Logo

$$\|U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \tau_i)\| \leq V(\tau_i, \alpha_i) - V(\tau_i, \tau_i), \qquad \tau_i < \alpha_i,$$

e

$$\|U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \tau_i)\| \leq V(\tau_i, \tau_i) - V(\tau_i, \alpha_i), \qquad \alpha_i < \tau_i.$$

Consequentemente, para cada $i = 1, 2, \dots, k$, temos

$$\|U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \alpha_{i-1})\| \leq \|U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \tau_i)\| + \|U(\tau_i, \tau_i) - U(\tau_i, \alpha_{i-1})\|$$

$$\leq V(\tau_i, \alpha_i) - V(\tau_i, \tau_i) + V(\tau_i, \tau_i) - V(\tau_i, \alpha_{i-1}) = V(\tau_i, \alpha_i) - V(\tau_i, \alpha_{i-1}).$$

Assim por (1.7) e (1.8), obtemos

$$\left\|\int_a^b DU(\tau,t)\right\| \leq \left\|\sum_{j=1}^{k}[U(\tau_j,\alpha_j)-U(\tau_j,\alpha_{j-1})] - \int_a^b DU(\tau,t)\right\|$$

$$+\|\sum_{j=1}^{k}[U(\tau_j,\alpha_j)-U(\tau_j,\alpha_{j-1})]\| < \epsilon + \sum_{j=1}^{k}[V(\tau_j,\alpha_j)-V(\tau_j,\alpha_{j-1})]$$

$$-\int_a^b DV(\tau,t) + \int_a^b DV(\tau,t) < 2\epsilon + \int_a^b DV(\tau,t).$$

Como ϵ é arbitrário, segue o resultado. ■

1.2 Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas

Seja $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto dado e seja $F : G \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma função definida em cada par $(x,t) \in G$, onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.10. *Uma função $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é chamada uma solução da equação diferencial ordinária generalizada (escrevemos EDOG)*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t) \tag{1.9}$$

no intervalo $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$, se $(x(t),t) \in G$ para todo $t \in [\alpha,\beta]$ e se

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau),t) \tag{1.10}$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha,\beta]$.

Proposição 1.11 ([16] - Prop. 3.6). *Se $x : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ for uma solução da EDOG (1.9) em $[\alpha,\beta]$, então*

$$\lim_{s\to\sigma}[x(s) - F(x(\sigma),s) + F(x(\sigma),\sigma)] = x(\sigma) \tag{1.11}$$

para todo $\sigma \in [\alpha,\beta]$.

Prova: Seja $\sigma \in [\alpha,\beta]$ fixo. Logo, como x é solução da equação (1.9), então

$$x(s) = x(\sigma) + \int_\sigma^s DF(x(\tau),t)$$

e, portanto,

$$x(s) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma) = \int_{\sigma}^{s} DF(x(\tau), t) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma) + x(\sigma),$$

para todo $s \in [\alpha, \beta]$.

Pelo Teorema 1.8, temos

$$\lim_{s \to \sigma} \left[\int_{\sigma}^{s} DF(x(\tau), t) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma) \right] = \int_{\sigma}^{\sigma} DF(x(\tau), t) = 0.$$

Logo

$$\lim_{s \to \sigma} [x(s) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma)]$$

$$= \lim_{s \to \sigma} \left[\int_{\sigma}^{s} DF(x(\tau), t) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma) + x(\sigma) \right] = x(\sigma).$$

■

Agora vamos introduzir uma classe de funções $F : G \to \mathbb{R}^n$ para a qual é possível obtermos informações mais específicas sobre a solução da EDOG $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x, t)$.

Dado $c > 0$, seja $B_c = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < c\}$. Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$ e $G = B_c \times [a, b]$. Assuma, também, que $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função não-decrescente.

Definição 1.12. *Uma função $F : G \to \mathbb{R}^n$ pertence à classe $\mathcal{F}(G, h)$, se*

$$\|F(x, t_2) - F(x, t_1)\| \leq |h(t_2) - h(t_1)| \tag{1.12}$$

para quaisquer $(x, t_1), (x, t_2) \in G$ e

$$\|F(x, t_2) - F(x, t_1) - F(y, t_2) - F(y, t_1)\| \leq \|x - y\| |h(t_2) - h(t_1)| \tag{1.13}$$

para quaisquer $(x, t_1), (x, t_2), (y, t_1), (y, t_2) \in G$.

Lema 1.13 ([16] - Lema 3.9). *Assuma que $F : G \to \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição (1.12). Se $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ e $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ for tal que $(x(t), t) \in G$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$ e se a integral $\int_{\alpha}^{\beta} DF(x(\tau), t)$ existir, então para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$, vale a desigualdade*

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t) \right\| \leq |h(s_2) - h(s_1)|. \tag{1.14}$$

Prova: Usando (1.12) e o fato de h ser não-decrescente, temos

$$|s_2 - s_1| \|F(x, s_2) - F(x, s_1)\| \leq (s_2 - s_1)(h(s_2) - h(s_1))$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$.

Observe agora que, tomando-se $V(\tau, t) = h(t)$, a integral $\displaystyle\int_\alpha^\beta DV(\tau, t) = \int_\alpha^\beta dh(t)$ existe e

$$\int_{s_1}^{s_2} dh(t) = h(s_2) - h(s_1)$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$.

Pelo Teorema 1.9, temos

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t) \right\| \leq \left| \int_{s_1}^{s_2} DV(\tau, t) \right|$$

e, portanto,

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t) \right\| \leq |h(s_2) - h(s_1)|$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$. ■

O próximo resultado segue diretamente do Lema 1.13.

Lema 1.14 ([16] - Lema 3.10). *Assuma que $F : G \to \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição (1.12). Se $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ e $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ for uma solução de (1.9), então vale*

$$\|x(s_1) - x(s_2)\| \leq |h(s_2) - h(s_1)| \tag{1.15}$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$.

Assim, sendo h uma função de variação limitada, segue que uma solução da EDOG (1.9) com F satisfazendo a condição (1.12), também é de variação limitada. Outra consequência do Lema 1.14 é que se tivermos h contínua à esquerda (direita), então a solução da EDOG (1.9) será contínua à esquerda (direita), sendo sua descontinuidade de primeira espécie dada pelo próximo lema.

Lema 1.15 ([16] - Lema 3.12). *Se $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ for uma solução de (1.9) e $F : G \to \mathbb{R}^n$ satisfizer a condição (1.12), então teremos*

$$x(s+) - x(s) = \lim_{\sigma \to s+} x(\sigma) - x(s) = F(x(s), s+) - F(x(s), s) \tag{1.16}$$

para $s \in [\alpha, \beta)$ *e*

$$x(s) - x(s-) = x(s) - \lim_{\sigma \to s-} x(\sigma) = F(x(s), s) - F(x(s), s-) \tag{1.17}$$

para $s \in (\alpha, \beta]$, *onde* $F(x, s+) = \lim_{\sigma \to s+} F(x, \sigma)$ *para* $s \in [\alpha, \beta)$ *e* $F(x, s-) = \lim_{\sigma \to s-} F(x, \sigma)$ *para* $s \in (\alpha, \beta]$.

Os resultados que seguem tratam da existência da integral $\int_\alpha^\beta DF(x(\tau), t)$, onde $F \in \mathcal{F}(G, h)$ e $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

Teorema 1.16 ([16] - Teor. 3.14). *Assuma que* $F \in \mathcal{F}(G, h)$ *é dada e que* $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, *é o limite pontual de uma sequência* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *de funções* $x_k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ *com* $(x(s), s) \in G$, $(x_k(s), s) \in G$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *e todo* $s \in [\alpha, \beta]$. *Assuma, também, que* $\int_\alpha^\beta DF(x_k(\tau), t)$ *existe para todo* $k \in \mathbb{N}$. *Então a integral* $\int_\alpha^\beta DF(x(\tau), t)$ *existe e*

$$\int_\alpha^\beta DF(x(\tau), t) = \lim_{k \to \infty} \int_\alpha^\beta DF(x_k(\tau), t).$$

Definição 1.17. *Uma função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *é chamada de função escada, se existir uma divisão finita* $a = \beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_m = b$ *tal que em todo intervalo aberto* (β_{i-1}, β_i), $i = 1, 2, \ldots, m$ *a função* f *é constante.*

Corolário 1.18 ([16] - Cor. 3.15). *Assuma que* $F \in \mathcal{F}(G, h)$ *é dada e que* $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, *é o limite pontual de uma sequência de funções escada* $\varphi_k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, *com* $(\varphi_k(s), s) \in G$ *e* $(x(s), s) \in G$ *para todo* $s \in [\alpha, \beta]$ *e todo* $k \in \mathbb{N}$. *Então a integral* $\int_\alpha^\beta DF(x(\tau), t)$ *existe.*

Prova: Seja $\varphi_k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções escadas tal que $\varphi_k(s) \to x(s)$, para qualquer $s \in [\alpha, \beta]$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, a integral $\int_\alpha^\beta DF(\varphi_k(\tau), t)$ existe. De fato, como cada φ_k é uma função escada, existe uma divisão

$$\alpha = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n = \beta$$

de $[\alpha, \beta]$ tal que $\varphi_k(s) = c_j \in \mathbb{R}^n$ para $s \in (s_{j-1}, s_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, onde c_j são constantes.

Assuma que $(\varphi_k(s), s) \in G$ para todo $s \in [\alpha, \beta]$.

Para $s_{j-1} < \sigma_1 < \sigma_2 < s_j$, temos

$$\sum_{i=1}^m [F(\varphi_k(\tau_i), \alpha_i) - F(\varphi_k(\tau_i), \alpha_{i-1})] = \sum_{i=1}^m [F(c_j, \alpha_i) - F(c_j, \alpha_{i-1})]$$

$$= F(c_j, \alpha_0) - F(c_j, \alpha_k) = F(c_j, \sigma_2) - F(c_j, \sigma_1),$$

para qualquer partição δ-fina $\{(\tau_i, [\alpha_{i-1}, \alpha_i]), i = 1, 2, \ldots, m\}$ de $[\sigma_1, \sigma_2]$.

Logo, para $s_{j-1} < \sigma_1 < \sigma_2 < s_j$, a integral $\displaystyle\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(\varphi_k(\tau), t)$ existe e vale

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(\varphi_k(\tau), t) = F(c_j, \sigma_2) - F(c_j, \sigma_1).$$

Seja $\sigma_0 \in (s_{j-1}, s_j)$ dado. Então temos

$$\lim_{s \to s_{j-1}+} \left[\int_s^{\sigma_0} DF(\varphi_k(\tau), t) + F(\varphi_k(s_{j-1}), s) - F(\varphi_k(s_{j-1}), s_{j-1}) \right]$$

$$= \lim_{s \to s_{j-1}+} [F(c_j, \sigma_0) - F(c_j, s) + F(\varphi_k(s_{j-1}), s) - F(\varphi_k(s_{j-1}), s_{j-1})]$$

$$= F(c_j, \sigma_0) - F(c_j, s_{j-1}+) + F(\varphi_k(s_{j-1}), s_{j-1}+) - F(\varphi_k(s_{j-1}), s_{j-1}).$$

Consequentemente, pelo Teorema 1.7, a integral $\displaystyle\int_{s_{j-1}}^{\sigma_0} DF(\varphi_k(\tau), t)$ existe e tem valor igual ao limite calculado acima.

Analogamente, podemos mostrar que a integral $\displaystyle\int_{\sigma_0}^{s_j} DF(\varphi_k(\tau), t)$ existe e vale

$$\int_{\sigma_0}^{s_j} DF(\varphi_k(\tau), t) = -F(c_j, \sigma_0) + F(c_j, s_j-) - F(\varphi_k(s_j), s_j-) + F(\varphi_k(s_j), s_j).$$

Portanto,

$$\int_{s_{j-1}}^{s_j} DF(\varphi_k(\tau), t) = \int_{s_{j-1}}^{\sigma_0} DF(\varphi_k(\tau), t) + \int_{\sigma_0}^{s_j} DF(\varphi_k(\tau), t)$$

$$= F(c_j, \sigma_0) - F(c_j, s_{j-1}+) + F(\varphi_k(s_{j-1}), s_{j-1}+) - F(\varphi_k(s_{j-1}), s_{j-1})$$

$$-F(c_j, \sigma_0) + F(c_j, s_j-) - F(\varphi_k(s_j), s_j-) + F(\varphi_k(s_j), s_j) = -F(c_j, s_{j-1}+)$$

$$+F(\varphi_k(s_{j-1}), s_{j-1}+) - F(\varphi_k(s_{j-1}), s_{j-1}) + F(c_j, s_j-) - F(\varphi_k(s_j), s_j-) + F(\varphi_k(s_j), s_j).$$

Logo, para $j = 1, 2, \ldots, n$, a integral $\displaystyle\int_{s_{j-1}}^{s_j} DF(\varphi_k(\tau), t)$ existe.

Assim obtemos a existência da integral $\displaystyle\int_\alpha^\beta DF(\varphi_k(\tau), t)$ com

$$\int_\alpha^\beta DF(\varphi_k(\tau), t) = \sum_{j=1}^{n} [F(c_j, s_j-) - F(c_j, s_{j-1}+)]$$

$$+\sum_{j=1}^{n}[F(\varphi_k(s_{j-1}), s_{j-1}+) - F(\varphi_k(s_{j-1}), s_{j-1}) - F(\varphi_k(s_j), s_j-) + F(\varphi_k(s_j), s_j)].$$

Logo pelo Teorema 1.16, o resultado segue. ■

1.3 Existência e Unicidade de Solução de EDOGs

Vamos considerar a EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t), \tag{1.18}$$

para o caso onde $F : G \to \mathbb{R}^n$ pertence à classe $\mathcal{F}(G,h)$, com $c > 0$ dado, $B_c = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq c\}$, $G = B_c \times (a,b)$, $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$ e $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função não-decrescente e contínua à esquerda.

Uma solução de (1.18) é uma função de variação limitada, a qual, no nosso caso, também é contínua à esquerda pelo Lema 1.14, e tem descontinuidade de primeira espécie dada pelo Lema 1.15. Assim, se para algum $t_0 \in (a,b)$, o valor da solução x de (1.18) for $x(t_0) = \widetilde{x}$, então o limite à direita no ponto t_0 satisfará

$$x(t_0+) = x(t_0) + F(x(t_0), t_0+) - F(x(t_0), t_0) = \widetilde{x} + F(\widetilde{x}, t_0+) - F(\widetilde{x}, t_0).$$

Pela possibilidade de ocorrer descontinuidade de uma solução, pode acontecer que para algum $\widetilde{x} \in B_c$, isto é, para algum $(\widetilde{x}, t_0) \in G$, o valor

$$\widetilde{x}+ = \widetilde{x} + F(\widetilde{x}, t_0+) - F(\widetilde{x}, t_0)$$

não pertença a B_c.

Portanto, para provar o teorema de existência local de uma solução de (1.18), satisfazendo a condição inicial $x(t_0) = \widetilde{x}$, fazemos a seguinte hipótese natural

$$\widetilde{x}+ = \widetilde{x} + F(\widetilde{x}, t_0+) - F(\widetilde{x}, t_0) \in B_c.$$

Usaremos, para o espaço de funções de variação limitada no intervalo $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$, a usual norma dada por

$$\|x\|_{BV} = \|x(\alpha)\| + \operatorname{var}_\alpha^\beta x,$$

onde $\operatorname{var}_\alpha^\beta x = \sup_\pi \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x(t_i) - x(t_{i-1})\| \right\}$ para qualquer partição $\pi : \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ de $[\alpha,\beta]$.

Apresentamos, então, o teorema sobre existência local e unicidade de solução de (1.18).

Teorema 1.19 ([10] -Teor. 2.15). *Seja $F : G \to \mathbb{R}^n$, onde $G = B_c \times (a, b)$, $B_c = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < c\}$, $c > 0$, $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$, tal que $F \in \mathcal{F}(G, h)$, onde h é contínua à esquerda e não-decrescente em $[a, b]$. Seja $(\widetilde{x}, t_0) \in G$ tal que*

$$\widetilde{x}- = \widetilde{x} + F(\widetilde{x}, t_0-) - F(\widetilde{x}, t_0) \in B_c.$$

Então existe $\Delta > 0$, tal que no intervalo $[t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$ existe uma única solução $x : [t_0 - \Delta, t_0 + \Delta] \to \mathbb{R}^n$ da EDOG $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x, t)$.

Prova: Seja t_0 um ponto de continuidade da função h. Como $\widetilde{x} \in B_c$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\widetilde{x}, \epsilon) \subset B_c$. Sendo h contínua em t_0, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\Delta > 0$ tal que $|t-t_0| < \Delta$ implica $|h(t)-h(t_0)| < \epsilon$. Logo se $x \in \mathbb{R}^n$ for tal que $\|x-\widetilde{x}\| \leq |h(t)-h(t_0)| < \epsilon$, então $x \in B_c$.

Assuma $\Delta > 0$ tal que $[t_0 - \Delta, t_0 + \Delta] \subset (a, b)$, $h(t_0 + \Delta) - h(t_0 - \Delta) < \dfrac{1}{2}$ e $\|x - \widetilde{x}\| \leq |h(t) - h(t_0)|$ implica que $x \in B_c$.

Seja $\mathcal{A}$ o conjunto das funções $z : [t_0 - \Delta, t_0 + \Delta] \to \mathbb{R}^n$ tais que $z \in BV_{[t_0-\Delta,t_0+\Delta]}$ e $\|z(t) - \widetilde{x}\| \leq |h(t) - h(t_0)|$ para $t \in [t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$.

Observe que $\mathcal{A}$ é fechado. De fato, seja $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, uma sequência tal que $z_n \to z$. Como

$$\|z_n - z\|_{BV[t_0-\Delta,t_0+\Delta]} = \|z_n(t_0) - z(t_0)\| + \mathrm{var}_{t_0-\Delta}^{t_0+\Delta}(z_n - z),$$

então para qualquer $t \in [t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$, temos $\|z_n(t) - z(t)\| \leq \|z_n - z\|_{BV}$, o que implica que $z_n \to z$ uniformemente.

Logo, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|z(t) - \widetilde{x}\| \leq \|z(t) - z_n(t)\| + \|z_n(t) - \widetilde{x}\| \leq \epsilon + |h(t) - h(t_0)|.$$

Assim $\|z(t) - \widetilde{x}\| \leq |h(t) - h(t_0)|$ para qualquer $t \in [t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$ e, portanto, $z \in \mathcal{A}$, o que implica que $\mathcal{A}$ é fechado.

Para $s \in [t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$ e $z \in \mathcal{A}$, defina

$$Tz(s) = \widetilde{x} + \int_{t_0}^{s} DF(z(\tau), t).$$

Observe que $\displaystyle\int_{t_0}^{s} DF(z(\tau), t)$ existe, pois z é de variação limitada e $F \in \mathcal{F}(G, h)$ (veja o Corolário 1.18). Então pelo Lema 1.13,

$$\|Tz(s) - \widetilde{x}\| = \| \int_{t_0}^{s} DF(z(\tau), t)\| \leq |h(s) - h(t_0)|.$$

Logo $Tz \in \mathcal{A}$, ou seja, T aplica $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$. Tomemos $t_0 - \Delta \leq s_1 < s_2 \leq t_0 + \Delta$ e $z_1, z_2 \in \mathcal{A}$. Então,

$$\|Tz_2(s_2) - Tz_1(s_2) - [Tz_2(s_1) - Tz_1(s_1)]\| = \| \int_{t_0}^{s_2} D[F(z_2(\tau), t) - F(z_1(\tau), t)]$$

$$- \int_{t_0}^{s_1} D[F(z_2(\tau), t) - F(z_1(\tau), t)]\| = \| \int_{s_1}^{s_2} D[F(z_2(\tau), t) - F(z_1(\tau), t)]\|$$

$$\leq \| \int_{s_1}^{s_2} D[F(z_2(\tau), t) - F(z_1(\tau), t)] - \sum_{i=1}^{n} [F(z_2(\tau_i), \alpha_i) - F(z_1(\tau_i), \alpha_i) - F(z_2(\tau_i), \alpha_{i-1})$$

$$+ F(z_1(\tau_i), \alpha_{i-1})] + \sum_{i=1}^{n} [F(z_2(\tau_i), \alpha_i) - F(z_1(\tau_i), \alpha_i) - F(z_2(\tau_i), \alpha_{i-1}) + F(z_1(\tau_i), \alpha_{i-1})]\|$$

$$\leq \| \sum_{i=1}^{n} [F(z_2(\tau_i), \alpha_i) - F(z_1(\tau_i), \alpha_i) - F(z_2(\tau_i), \alpha_{i-1}) + F(z_1(\tau_i), \alpha_{i-1})]\| + \epsilon$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \|[F(z_2(\tau_i), \alpha_i) - F(z_1(\tau_i), \alpha_i) - F(z_2(\tau_i), \alpha_{i-1}) + F(z_1(\tau_i), \alpha_{i-1})]\| + \epsilon$$

$$\stackrel{Def 1.12}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \|z_2(\tau_i) - z_1(\tau_i)\| |h(\alpha_i) - h(\alpha_{i-1})| + \epsilon$$

$$\leq \sup_{\tau \in [s_1, s_2]} \|z_2(\tau) - z_1(\tau)\| \left(\sum_{i=1}^{n} (h(\alpha_i) - h(\alpha_{i-1})) \right) + \epsilon$$

$$\leq \sup_{\tau \in [t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]} \|z_2(\tau) - z_1(\tau)\| \left(\sum_{i=1}^{n} (h(\alpha_i) - h(\alpha_{i-1})) \right) + \epsilon,$$

para qualquer partição δ-fina $\{(\tau_i, [\alpha_{i-1}, \alpha_i]), i = 1, 2, \ldots, m\}$ de $[s_1, s_2]$.

Mas

$$\sup_{\tau \in [t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]} \|z_2(\tau) - z_1(\tau)\| \left(\sum_{i=1}^{n} (h(\alpha_i) - h(\alpha_{i-1})) \right)$$

$$= \sup_{\tau \in [t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]} \|z_2(\tau) - z_1(\tau)\| (h(s_2) - h(s_1)).$$

Logo

$$\|Tz_2(s_2) - Tz_1(s_2) - [Tz_2(s_1) - Tz_1(s_1)]\| \leq \sup_{\tau \in [t_0-\Delta, t_0+\Delta]} \|z_2(\tau) - z_1(\tau)\|(h(s_2) - h(s_1)).$$

Assim

$$\mathrm{var}_{t_0-\Delta}^{t_0+\Delta}(Tz_2 - Tz_1) \leq \sup_{\tau \in [t_0-\Delta, t_0+\Delta]} \|z_2(\tau) - z_1(\tau)\|(h(s_2) - h(s_1)).$$

Observe que

$$\sup_{\tau \in [t_0-\Delta, t_0+\Delta]} \|z_2(\tau) - z_1(\tau)\| \leq \mathrm{var}_{t_0-\Delta}^{t_0+\Delta}(z_2 - z_1).$$

Consequentemente

$$\mathrm{var}_{t_0-\Delta}^{t_0+\Delta}(Tz_2 - Tz_1) \leq \mathrm{var}_{t_0-\Delta}^{t_0+\Delta}(z_2 - z_1)(h(s_2) - h(s_1))$$

$$\leq \mathrm{var}_{t_0-\Delta}^{t_0+\Delta}(z_2 - z_1)[(h(t_0+\Delta) - h(s_2)) + (h(s_2) - h(s_1)) + (h(s_1) - h(t_0-\Delta))]$$

$$= \mathrm{var}_{t_0-\Delta}^{t_0+\Delta}(z_2 - z_1)(h(t_0+\Delta) - h(t_0-\Delta)),$$

pois como h é não-decrescente, então para $t_0 - \Delta \leq s_1 < s_2 \leq t_0 + \Delta$, teremos $h(t_0 + \Delta) - h(s_2) \geq 0$ e $h(s_1) - h(t_0 - \Delta) \geq 0$.

É fácil ver que se $z_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2$, então $z_i(t_0) = \widetilde{x}$, em virtude da desigualdade na definição de $\mathcal{A}$. Também vale $T(z_i(t_0)) = \widetilde{x}$.

Logo

$$\mathrm{var}_{t_0-\Delta}^{t_0+\Delta}(Tz_2 - Tz_1) \leq \mathrm{var}_{t_0-\Delta}^{t_0+\Delta}(z_2 - z_1)(h(t_0+\Delta) - h(t_0-\Delta)),$$

o que implica que

$$\|Tz_2 - Tz_1\|_{BV[t_0-\Delta, t_0+\Delta]} \leq \|z_2 - z_1\|_{BV[t_0-\Delta, t_0+\Delta]}(h(t_0+\Delta) - h(t_0-\Delta))$$

$$< \frac{1}{2}\|z_2 - z_1\|_{BV[t_0-\Delta, t_0+\Delta]}.$$

Portanto T é uma contração e o resultado segue pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Agora, consideremos t_0 um ponto de descontínuidade de h. Defina

$$\widetilde{h}(t) = \begin{cases} h(t), & \text{se } t < t_0; \\ h(t) - (h(t_0+) - h(t_0)), & \text{se } t \geq t_0. \end{cases}$$

Então a função $\widetilde{h}$ é contínua em t_0, não-decrescente e contínua à esquerda.

Definindo-se

$$\widetilde{F}(x,t) = \begin{cases} F(x,t), & \text{se } t < t_0; \\ F(x,t) - (F(\widetilde{x}, t_0+) - F(\widetilde{x}, t_0)), & \text{se } t \geq t_0. \end{cases}$$

temos $\widetilde{F} \in \mathcal{F}(G, \widetilde{h})$ e, assim, analogamente ao que fizemos acima, existe uma solução z de $\dfrac{dz}{d\tau} = D\widetilde{F}(z(\tau), t)$ com $z(t_0) = \widetilde{x}+$. Agora, tomando-se

$$x(t) = \begin{cases} x_0, & \text{se } t = t_0; \\ z(t), & \text{se } t > t_0, \end{cases}$$

então x é solução de $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$ com $x(t_0) = \widetilde{x}$. ■

Capítulo

2

Estabilidade Variacional para EDOGs

Neste capítulo, apresentaremos a teoria básica sobre estabilidade para EDOGs. Os resultados que discutiremos foram extraídos de [16] (veja também [17]).

2.1 Conceitos de Estabilidade

Novamente, assuma $c > 0$ dado e $B_c = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < c\}$. Assuma, também, que $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função não-decrescente e contínua à esquerda e que $F : B_c \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ pertence à classe $\mathcal{F}(B_c \times [0, \infty), h)$.

Além dessas hipóteses, assuma que

$$F(0, t_2) - F(0, t_1) = 0, \qquad \text{para todo } t_1, t_2 \geq 0. \tag{2.1}$$

Esta última hipótese implica que

$$\int_{s_1}^{s_2} DF(0, t) = F(0, s_2) - F(0, s_1) = 0, \qquad s_1, s_2 \in [0, \infty)$$

e, portanto, a função x dada por $x(s) = 0$ para $s \geq 0$ é uma solução da EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t) \tag{2.2}$$

no semi-eixo positivo $[0, \infty)$.

Nas condições acima, vamos apresentar, agora, alguns conceitos de estabilidade da solução trivial $x(s) = 0$, $s \in [0, \infty)$, da equação $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x, t)$. Estes conceitos foram introduzidos por Š. Schwabik em [17] e eles são motivados no fato de que as soluções da EDOG $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$ são de variação limitada e, por isto, é natural "medirmos" a distância entre duas soluções pela norma da variação.

Definição 2.1. *A solução $x \equiv 0$ de (2.2) é chamada variacionalmente estável, se para qualquer $\epsilon > 0$, existir um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $y : [t_0, t_1] \to B_c$, $0 \leq t_0 < t_1 < \infty$, for uma função de variação limitada em $[t_0, t_1]$, contínua à esquerda em $(t_0, t_1]$ com*

$$\|y(t_0)\| < \delta$$

e

$$\mathrm{var}_{t_0}^{t_1}\left(y(s) - \int_{t_0}^{s} DF(y(\tau), t)\right) < \delta,$$

então teremos

$$\|y(t)\| < \epsilon, \qquad \text{para } t \in [t_0, t_1].$$

Definição 2.2. *A solução $x \equiv 0$ de (2.2) é chamada variacionalmente atratora, se existir $\delta_0 > 0$ e para qualquer $\epsilon > 0$, existirem $T = T(\epsilon) \geq 0$ e $\gamma = \gamma(\epsilon)$ tais que se $y : [t_0, t_1] \to B_c$, $0 \leq t_0 < t_1 < \infty$, for uma função de variação limitada em $[t_0, t_1]$, contínua à esquerda em $(t_0, t_1]$, com*

$$\|y(t_0)\| < \delta_0$$

e

$$\mathrm{var}_{t_0}^{t_1}\left(y(s) - \int_{t_0}^{s} DF(y(\tau), t)\right) < \gamma,$$

então teremos

$$\|y(t)\| < \epsilon, \qquad \text{para } t \in [t_0, t_1] \cap [t_0 + T(\epsilon), \infty).$$

Definição 2.3. *A solução $x \equiv 0$ de (2.2) é chamada variacionalmente-assintoticamente estável, se ela for variacionalmente estável e variacionalmente atratora.*

Agora, vamos considerar a equação perturbada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[F(x,t) + P(t)], \tag{2.3}$$

onde $P : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua à esquerda e localmente de variação limitada em $[0, \infty)$. Informalmente falando, vamos caminhar no sentido de mostrar que os conceitos estabilidade variacional e estabilidade variacionalmente assintótica da solução trivial dados acima, são "invariantes" por perturbações cuja variação é pequena.

Observe que

$$\|F(x,t_2) + P(t_2) - F(x,t_1) - P(t_1)\| \leq \|F(x,t_2) - F(x,t_1)\| + \|P(t_2) - P(t_1)\|$$

$$\leq |h(t_2) - h(t_2)| + \operatorname{var}_{t_1}^{t_2} P = |h(t_2) - h(t_2) + \operatorname{var}_{t_1}^{t_2} P|$$

$$= |h(t_2) - h(t_2) + \operatorname{var}_0^{t_2} P - \operatorname{var}_0^{t_1} P| = |h(t_2) + \operatorname{var}_0^{t_2} P - (h(t_1) + \operatorname{var}_0^{t_1} P)|$$

para $x \in B_c$ e $t_1, t_2 \in [0, \infty)$. Logo,

$$\|F(x,t_2) + P(t_2) - F(x,t_1) - P(t_1) - F(y,t_2) - P(t_2) - F(y,t_1) + P(t_1)\|$$

$$= \|F(x,t_2) - F(x,t_1) - F(y,t_2) - F(y,t_1)\| \leq \|x-y\| |h(t_2) - h(t_1)|$$

$$= \|x-y\| |h(t_2) - h(t_1) + \operatorname{var}_{t_1}^{t_2} P|$$

$$= \|x-y\| |h(t_2) + \operatorname{var}_0^{t_2} P - (h(t_1) + \operatorname{var}_0^{t_1} P)|.$$

Assim, provamos que $F(x,t) + P(t)$ pertence à classe $\mathcal{F}(B_c \times [0,\infty), \widetilde{h})$, onde $\widetilde{h}(t) = h(t) + \operatorname{var}_0^t P$.

Observe que todos os resultados obtidos anteriormente, como por exemplo a existência local de solução, valem para a equação (2.3).

A seguir, definimos estabilidade da solução trivial de (2.2) por perturbação e, na sequência, estabilidade assintótico por perturbação.

Definição 2.4. *A solução $x \equiv 0$ de (2.2) é chamada estável em relação a perturbações, se para qualquer $\epsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que se*

$$\|y(t_0)\| < \delta$$

e

$$\operatorname{var}_{t_0}^{t_1} P < \delta$$

então teremos

$$\|y(t, t_0, y_0)\| < \epsilon, \qquad \text{para } t \in [t_0, t_1],$$

onde $y(t, t_0, y_0)$ é uma solução de (2.3) com $y(t, t_0, y_0) = y_0$.

Definição 2.5. *A solução $x \equiv 0$ de (2.2) é chamada atratora em relação a perturbações, se existir $\delta_0 > 0$ e para qualquer $\epsilon > 0$, existirem $T = T(\epsilon) > 0$ e $\gamma = \gamma(\epsilon)$ tais que*

$$\|y(t_0, t_0, y_0)\| < \delta_0$$

e

$$\operatorname{var}_{t_0}^{t_1} P < \gamma,$$

então teremos

$$\|y(t,t_0,y_0)\| < \epsilon, \qquad \textit{para } t \in [t_0,t_1] \cap [t_0+T(\epsilon),\infty),$$

onde $y(t,t_0,y_0)$ *é uma solução de (2.3) com* $y(t,t_0,y_0) = y_0$.

Definição 2.6. *A solução* $x \equiv 0$ *de (2.2) é chamada assintoticamente estável em relação a perturbações, se ela for estável e atratora em relação a perturbações.*

Teorema 2.7 ([16] - Teor. 10.8). *A solução* $x \equiv 0$ *de (2.2) será variacionalmente estável se, e somente se, ela for estável em relação a perturbações.*

A solução $x \equiv 0$ *de (2.2) será variacionalmente atratora se, e somente se, ela for atratora em relação a perturbações.*

Prova: Assuma que $x \equiv 0$ é variacionalmente estável. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ dado pela Definição 2.1.

Assuma que $y_0 \in \mathbb{R}^n$, com $\|y_0\| < \delta$, $\operatorname{var}_{t_0}^{t_1} P < \delta$ e que $y(t) = y(t,t_0,y_0)$ é uma solução de (2.3) em $[t_0,t_1]$.

Para quaisquer $s_1, s_2 \in [t_0,t_1]$, temos

$$y(s_2) - y(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} D[F(y(\tau),t) + P(t)] = \int_{s_1}^{s_2} DF(y(\tau),t) + [P(s_2) - P(s_1)],$$

ou seja,

$$y(s_2) - \int_{t_0}^{s_2} DF(y(\tau),t) - y(s_1) + \int_{t_0}^{s_1} DF(y(\tau),t) = P(s_2) - P(s_1)$$

para $s_1, s_2 \in [t_0,t_1]$. Logo

$$\operatorname{var}_{t_0}^{t_1}\left(y(s) - \int_{t_0}^{s} DF(y(\tau),t)\right) = \operatorname{var}_{t_0}^{t_1} P(s) < \delta.$$

Então, como $x \equiv 0$ é variacionalmente estável, temos

$$\|y(t,t_0,y_0)\| = \|y(t)\| < \epsilon, \qquad \text{para } t \in [t_0,t_1],$$

e, portanto, $x \equiv 0$ é estável em relação a perturbações.

Suponha, agora, que $x \equiv 0$ é estável em relação a perturbações. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ dado pela Definição 2.4.

Seja $y : [t_0,t_1] \to B_c$, $0 \le t_0 < t_1 < \infty$, uma função de variação limitada em $[t_0,t_1]$, contínua à esquerda em $(t_0, t_1]$ com

$$\|y(t_0)\| < \delta$$

e

$$\operatorname{var}_{t_0}^{t_1}\left(y(s) - \int_{t_0}^{s} DF(y(\tau), t)\right) < \delta.$$

Para $s_1, s_2 \in [t_0, t_1]$, como $\displaystyle\int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t) = \int_{t_0}^{s_2} DF(x(\tau), t) - \int_{t_0}^{s_1} DF(x(\tau), t)$, temos

$$y(s_2) - y(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t) + y(s_2) - \int_{t_0}^{s_2} DF(x(\tau), t) - y(s_1) + \int_{t_0}^{s_1} DF(x(\tau), t).$$

Fazendo $P(s) = y(s) - \displaystyle\int_{t_0}^{s} DF(y(\tau), t)$ para $s \in [t_0, t_1]$, observamos pelo Lema 1.13 que a função P é de variação limitada em $[t_0, t_1]$, contínua à esquerda e vale

$$y(s_2) - y(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t) + P(s_2) - P(s_1),$$

ou seja, y é solução da equação perturbada $\dfrac{dx}{d\tau} = D[F(x, t) + P(t)]$.

Como, por hipótese, $x \equiv 0$ é estável em relação a perturbações, temos

$$\|y(t)\| = \|y(t, t_0, y_0)\| < \epsilon, \qquad \text{para } t \in [t_0, t_1].$$

Logo $x \equiv 0$ é variacionalmente estável.

A segunda equivalência segue analogamente. ■

Como consequência deste teorema podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 2.8 ([16] - Teor. 10.9). *A solução trivial $x \equiv 0$ de $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x, t)$ será variacionalmente-assintoticamente estável se, e somente se, ela for assintoticamente estável em relação a perturbações.*

A proposição seguinte será utilizada como resultado auxiliar mais adiante.

Proposição 2.9 ([16] - Prop. 10.11). *Assuma que $-\infty < a < b < \infty$ e que $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas à esquerda em $(a, b]$. Se para qualquer $\sigma \in [a, b]$ existir $\delta(\sigma) > 0$ tal que para todo $\eta \in (0, \delta(\sigma))$ a desigualdade*

$$f(\sigma + \eta) - f(\sigma) \leq g(\sigma + \eta) - g(\sigma)$$

vale, então teremos
$$f(s) - f(a) \leq g(s) - g(a)$$
para todo $s \in [a, b]$.

Prova: Seja

$$M = \{s \in [a, b]; f(\sigma) - f(a) \leq g(\sigma) - g(a), \sigma \in [a, s]\}$$

e $S = \sup M$. Como
$$f(a + \eta) - f(a) \leq g(a + \eta) + g(a)$$
para qualquer $\eta \in (0, \delta(a))$, onde $\delta(a) > 0$, o conjunto M é não vazio, $S > a$ e

$$f(s) - f(a) \leq g(s) - g(a)$$

para qualquer $s < S$. Como f e g são contínuas à esquerda, temos

$$\lim_{s \to S-} (f(s) - f(a)) \leq \lim_{s \to S-} (g(s) - g(a)),$$

ou seja,
$$f(S) - f(a) \leq g(S) - g(a).$$

Suponha, por absurdo, que $S < b$. Então por hipótese, temos

$$f(S + \eta) - f(S) \leq g(S + \eta) - g(S),$$

para $\eta \in (0, \delta(S))$ e $\delta(S) > 0$.

Assim
$$f(S + \eta) - f(a) = f(S + \eta) - f(S) + f(S) - f(a)$$
$$\leq g(S + \eta) - g(S) + g(S) - g(a) = g(S + \eta) - g(a).$$

Isto implica que $S + \eta \in M$ para $\eta \in (0, \delta(S))$, ou seja, $\sup M > S$, o que é uma contradição. Logo $S = b$ e $M = [a, b]$. ∎

Lema 2.10 ([16] - Lema 10.12, [9] - Lema 3.1). *Suponha que* $V : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é tal que para todo* $x \in \mathbb{R}^n$, *a função* $V(\cdot, x) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *é contínua à esquerda em* $(0, \infty)$. *Assuma que*
$$|V(t, x) - V(t, y)| \leq K\|x - y\| \tag{2.4}$$
para $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, \infty)$ *e* $K > 0$ *uma constante. Assuma que existe uma função real*

$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que para toda solução $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ da EDOG $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$ em $[\alpha, \beta] \subset [0, \infty)$, temos

$$\limsup_{\eta \to 0+} \frac{V(t+\eta, x(t+\eta)) - V(t, x(t))}{\eta} \leq \phi(x(t)) \tag{2.5}$$

para $t \in [\alpha, \beta]$. Se $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, $0 \leq t_0 < t_1 < \infty$, for contínua à esquerda em $(t_0, t_1]$ e de variação limitada em $[t_0, t_1]$, então vale a desigualdade

$$V(t_1, y(t_1)) - V(t_0, y(t_0)) \leq K \ \mathrm{var}_{t_0}^{t_1} \left(y(s) - \int_{t_0}^{s} DF(y(\tau), t) \right) + M(t_1 - t_0), \tag{2.6}$$

onde $M = \displaystyle\sup_{t \in [t_0, t_1]} \phi(y(t))$.

Prova: Seja $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ tal que y é de variação limitada em $[t_0, t_1]$ e contínua à esquerda em $(t_0, t_1]$. Suponha que $(y(t), t) \in G$, para qualquer $s \in [t_0, t_1]$. Como $F \in \mathcal{F}(G, h)$, pelo Corolário 1.18, a integral $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} DF(y(\tau), t)$ existe.

Seja $\sigma \in [t_0, t_1]$. Pelo Teorema de Existência e Unicidade (Teorema 1.19), a EDOG $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$ admite uma solução local, digamos $x : [\sigma, \sigma + \eta_1(\sigma)] \to \mathbb{R}^n$ em $[\sigma, \sigma+\eta_1(\sigma)]$, $\eta_1(\sigma) > 0$.

Portanto a integral $\displaystyle\int_{\sigma}^{\sigma+\eta_1(\sigma)} DF(x(\tau), t)$ existe para qualquer $\sigma \in [t_0, t_1]$.

Assim, dado $\sigma \in [t_0, t_1]$, seja $[\sigma, \sigma + \beta(\sigma)]$ o intervalo máximo da existência de x começando em σ. Então $\beta(\sigma) \geq \eta_1(\sigma) > 0$ e, para qualquer $\eta_2(\sigma) \in [\eta_1(\sigma), \beta(\sigma)]$, a integral $\displaystyle\int_{\sigma}^{\sigma+\eta_2(\sigma)} DF(x(\tau), t)$ existe. Logo $\displaystyle\int_{\sigma}^{\sigma+\eta_2(\sigma)} D[F(y(\tau), t) - F(x(\tau), t)]$ existe. Portanto para qualquer $\epsilon > 0$, existe uma função calibre δ de $[\sigma, \sigma+\eta_2(\sigma)]$ correspondente ao ϵ da definição da última integral.

Suponha que a solução $x : [\sigma, \sigma + \eta_1(\sigma)] \to \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição inicial $x(\sigma) = y(\sigma)$.

Por hipótese, $|V(t,x) - V(t,y)| \leq K\|x - y\|$. Então

$$\begin{aligned} V(\sigma+\eta, y(\sigma+\eta)) - V(\sigma+\eta, x(\sigma+\eta)) &\leq K\|y(\sigma+\eta) - x(\sigma+\eta)\| \\ &= K\|y(\sigma+\eta) - y(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DF(x(\tau), t)\| \end{aligned}$$

para $0 \leq \eta \leq \eta_1(\sigma)$.

Assim,

$$V(\sigma+\eta, y(\sigma+\eta)) - V(\sigma, y(\sigma)) = V(\sigma+\eta, y(\sigma+\eta)) - V(\sigma+\eta, x(\sigma+\eta))$$

$$+V(\sigma+\eta, x(\sigma+\eta)) - V(\sigma, x(\sigma)) \leq K\|y(\sigma+\eta) - y(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DF(x(\tau),t)\|$$

$$+V(\sigma+\eta, x(\sigma+\eta)) - V(\sigma, x(\sigma)) \leq K\|y(\sigma+\eta) - y(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DF(x(\tau),t)\| + \eta\phi(x(t))$$

$$\leq K\|y(\sigma+\eta) - y(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DF(x(\tau),t)\| + \eta M.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
V(\sigma+\eta, y(\sigma+\eta)) - V(\sigma, y(\sigma)) &\leq K\|y(\sigma+\eta) - y(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DF(y(\tau),t) \\
&+ \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DF(y(\tau),t) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DF(x(\tau),t)\| + \eta M \\
&\leq K\|y(\sigma+\eta) - y(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DF(y(\tau),t)\| \\
&+K\|\int_{\sigma}^{\sigma+\eta} D[F(y(\tau),t) - F(x(\tau),t)]\| + \eta M.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Utilizando o Lema de Saks-Henstock (Lema 1.5) e os fatos de que $F \in \mathcal{F}(G,h)$ e h é contínua à esquerda, então para $\epsilon > 0$ dado, temos

$$\left\|\int_{\sigma}^{\sigma+\eta} D[F(y(\tau),t) - F(x(\tau),t)]\right\|$$

$$\leq \left\|\int_{\sigma}^{\sigma+\eta} D[F(y(\tau),t) - F(x(\tau),t)]\right.$$

$$\left. - \left(F(y(\sigma),\sigma+\eta) - F(y(\sigma),\sigma) - F(x(\sigma),\sigma+\eta) + F(x(\sigma),\sigma)\right)\right\|$$

$$+\|F(y(\sigma),\sigma+\eta) - F(y(\sigma),\sigma) - F(x(\sigma),\sigma+\eta) + F(x(\sigma),\sigma)\|$$

$$\leq \frac{\eta\epsilon}{K} + \|y(\sigma) - x(\sigma)\|(h(\sigma+\eta) - h(\sigma)) = \frac{\eta\epsilon}{K},$$

pois $y(\sigma) = x(\sigma)$. Assim,

$$V(\sigma+\eta, y(\sigma+\eta)) - V(\sigma, y(\sigma)) \leq K\|y(\sigma+\eta) - y(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DF(y(\tau),t)\| + \eta\epsilon + \eta M.$$

Para $s \in [t_0, t_1]$, defina

$$P(s) = y(s) + \int_{t_0}^{s} DF(y(s),t).$$

Como y é de variação limitada em $[t_0, t_1]$ e $F \in \mathcal{F}(G,h)$, então pelo Lema 1.13 a integral

$\int_{t_0}^{t_1} DF(y(\tau), t)$ existe e $\left\| \int_{t_0}^{t_1} DF(y(\tau), t) \right\| \leq |h(s_2) - h(s_1)|$. Logo P é de variação limitada em $[t_0, t_1]$.

Observe que

$$\left\| y(\sigma + \eta) - y(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DF(y(\tau), t) \right\|$$

$$= \left\| y(\sigma + \eta) - \int_{t_0}^{\sigma+\eta} DF(y(\tau), t) - y(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DF(y(\tau), t) \right\|$$

$$= \|P(\sigma + \eta) - P(\sigma)\| \leq \mathrm{var}_{\sigma}^{\sigma+\eta}(P).$$

Logo, de (2.7), temos

$$V(\sigma + \eta, y(\sigma + \eta)) - V(\sigma, y(\sigma)) \leq K \, \mathrm{var}_{\sigma}^{\sigma+\eta}(P) + \eta M + \eta\epsilon$$

$$= K(\mathrm{var}_{t_0}^{\sigma+\eta}(P) - \mathrm{var}_{t_0}^{\sigma}(P)) + \eta M + \eta\epsilon,$$

para $0 \leq \eta \leq \eta_1(\sigma) < \delta(\sigma)$.

Observe, também, que a função $V(t, x(t)) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ é contínua à esquerda em $(t_0, t_1]$. Logo, pela Proposição 2.9, temos

$$V(t_1, y(t_1)) - V(t_0, y(t_0)) \leq K(\mathrm{var}_{t_0}^{t_1}(P) - \mathrm{var}_{t_0}^{t_0}(P)) + (t_1 - t_0)M + (t_1 - t_0)\epsilon.$$

E, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, o resultado segue. ■

2.2 Teoremas do Tipo Lyapunov

Teorema 2.11 ([16] - Teor. 10.13). *Assuma que* $V : [0, \infty) \times \overline{B_a} \to \mathbb{R}$, $0 < a < c$, $\overline{B_a} = \{y \in \mathbb{R}^n, \|y\| \leq a\}$ *é tal que para todo* $x \in \overline{B_a}$, *a função* $V(\cdot, x)$ *é contínua à esquerda. Assuma ainda que existe uma função real contínua e crescente* $b : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $b(\rho) = 0$ *se, e somente se,* $\rho = 0$, *e além disso, para quaisquer* $t \in [0, \infty)$ *e* $x, y \in \overline{B_a}$ *valem*

$$V(t, x) \geq b(\|x\|); \tag{2.8}$$

$$V(t, 0) = 0; \tag{2.9}$$

$$|V(t, x) - V(t, y)| \leq K\|x - y\|, \ K > 0 \text{ constante.} \tag{2.10}$$

Se a função $V(t, x(t))$ *for não-crescente ao longo de toda solução* $x(t)$ *da EDOG* $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x, t)$, *então sua solução trivial* $x \equiv 0$ *será variacionalmente estável.*

Prova: Como $V(t, x(t))$ é não-crescente sempre que $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ for uma solução de $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x, t)$ em $[\alpha, \beta] \subset [0, \infty)$, então

$$\limsup_{\eta \to 0+} \frac{V(t+\eta, x(t+\eta)) - V(t, x(t))}{\eta} \leq 0, \qquad \text{para } t \in [\alpha, \beta].$$

Seja $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ de variação limitada em $[t_0, t_1]$ e contínua à esquerda em $(t_0, t_1]$. Tomando-se $\phi \equiv 0$, pelo Lema 2.10, temos

$$V(t, y(t)) \leq V(t_0, y(t_0)) + K \operatorname{var}_{t_0}^{t} \left(y(s) - \int_{t_0}^{s} DF(y(\tau), t) \right) \qquad \text{para } t \in [t_0, t_1].$$

Como b é crescente e $b(\rho) = 0$ se, e somente se, $\rho = 0$, então para $\epsilon > 0$ dado, temos $b(\epsilon) > 0$.

Seja $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $2K\delta(\epsilon) < b(\epsilon)$ e suponhamos que

$$\|y(t_0)\| < \delta(\epsilon)$$

e que

$$\operatorname{var}_{t_0}^{t_1} \left(y(s) - \int_{t_0}^{s} DF(y(\tau), t) \right) < \delta(\epsilon).$$

Então temos

$$\operatorname{var}_{t_0}^{t} \left(y(s) - \int_{t_0}^{s} DF(y(\tau), t) \right) < \delta(\epsilon), \qquad \text{para } t \in [t_0, t_1].$$

Logo

$$V(t, y(t)) \leq V(t_0, y(t_0)) + K\delta(\epsilon).$$

Observe que, como $V(t, 0) = 0$ e $|V(t, x) - V(t, y)| \leq K\|x - y\|$ para $x, y \in \overline{B_a}$ e $K > 0$ é uma constante, então temos

$$V(t_0, y(t_0)) \leq \|V(t_0, y(t_0))\| = \|V(t_0, y(t_0)) - V(t_0, 0)\|$$

$$\leq K\|y(t_0) - 0\| = K\|y(t_0)\| \leq K\delta(\epsilon).$$

Logo

$$V(t, y(t)) \leq 2K\delta(\epsilon) < b(\epsilon), \qquad \text{para } t \in [t_0, t_1].$$

Agora, suponhamos por absurdo que existe $\widetilde{t} \in [t_0, t_1]$ tal que $\|y(\widetilde{t})\| \geq \epsilon$. Então, usando (2.8) e o fato de b ser crescente, temos

$$V(\widetilde{t}, y(\widetilde{t})) \geq b(\|y(\widetilde{t})\|) \geq b(\epsilon),$$

o que é absurdo.

Logo $\|y(t)\| < \epsilon$ para $t \in [t_0, t_1]$ e, portanto, a solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$ é variacionalmente estável. ■

Teorema 2.12 ([16] - Teor. 10.14). *Seja* $V : [0,\infty) \times \overline{B_a} \to \mathbb{R}$*,* $0 < a < c$*,* $\overline{B_a} = \{y \in \mathbb{R}^n, \|y\| \leq a\}$ *tal que para todo* $x \in \overline{B_a}$*, a função* $V(\cdot, x)$ *é contínua à esquerda. Assuma, ainda, que existe uma função real contínua e crescente* $b : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $b(\rho) = 0$ *se, e somente se,* $\rho = 0$*, e além disso, para quaisquer* $t \in [0,\infty)$ *e* $x, y \in \overline{B_a}$ *valem*

$$V(t,x) \geq b(\|x\|); \tag{2.11}$$

$$V(t,0) = 0; \tag{2.12}$$

$$|V(t,x) - V(t,y)| \leq K\|x - y\|,\ K > 0 \ \textit{constante}. \tag{2.13}$$

Se para toda solução $x : [t_0, t_1] \to \overline{B_a}$*,* $[t_0, t_1] \subset [0,\infty)$ *de (2.2) valer a desigualdade*

$$\dot{V}(t, x(t)) = \limsup_{\eta \to 0+} \frac{V(t+\eta, x(t+\eta)) - V(t, x(t))}{\eta} \leq -\Phi(x(t)), \qquad t \in [t_0, t_1] \tag{2.14}$$

onde $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é contínua, com* $\Phi(0) = 0$ *e* $\Phi(x) > 0$ *para* $x \neq 0$*, então a solução trivial* $x \equiv 0$ *de (2.2) será variacionalmente-assintoticamente estável.*

Prova: De (4.12), observamos que a função $V(t, x(t))$ é não-crescente ao longo de toda solução de (2.2). Portanto pelo Teorema (2.11), a solução trivial $x \equiv 0$ é variacionalmente estável. Logo, basta mostrarmos que $x \equiv 0$ é variacionalmente atratora.

Da estabilidade variacional da solução solução $x \equiv 0$ de (2.2), temos

(I) para qualquer $a > 0$, existe $\delta_0 = \delta_0(a)$, $\delta_0 \in (0, a)$ tal que se $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ for de variação limitada em $[t_0, t_1]$, contínua à esquerda em $(t_0, t_1]$, $0 \leq t_0 < t_1 < \infty$, e ainda $\|y(t_0)\| < \delta_0$ e

$$\operatorname{var}_{t_0}^{t_1}\left[y(s) - \int_{t_0}^{s} DF(y(\tau), t)\right] < \delta_0,$$

então $\|y(t)\| < a$ para qualquer $t \in [t_0, t_1]$.

(II) para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon)$, $\delta \in (0, \epsilon)$ tal que se $y : [t_2, t_3] \to \mathbb{R}^n$ for de variação limitada em $[t_2, t_3]$, contínua à esquerda em $(t_2, t_3]$, $0 \leq t_0 < t_1 < \infty$, $\|y(t_0)\| < \delta$ e

$$\mathrm{var}_{t_2}^{t_3}\left[y(s) - \int_{t_2}^{s} DF(y(\tau), t)\right] < \delta,$$

então $\|y(t)\| < \epsilon$ para qualquer $t \in [t_2, t_3]$.

Defina $\gamma(\epsilon) = \min\{\delta_0, \delta\} < \epsilon$ e também

$$T(\epsilon) = \min\left\{t_1 - t_0, -K\frac{\delta_0 + \gamma(\epsilon)}{N}\right\} > 0,$$

onde $N = \sup\{-\Phi(x), \gamma(x) \leq \|x\| < \epsilon\} = -\inf\{\Phi(x), \gamma(x) \leq \|x\| < \epsilon\} < 0$.

Assuma que $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ é de variação limitada em $[t_0, t_1]$ e contínua à esquerda em $(t_0, t_1]$ tal que $\|y(t_0)\| < \delta_0$ e

$$\mathrm{var}_{t_0}^{t_1}\left[y(s) - \int_{t_0}^{s} DF(y(\tau), t)\right] < \gamma(\epsilon) \leq \delta_0.$$

Queremos provar que $\|y(t)\| < \epsilon$, onde $t \in [t_0, t_1] \cap [t_0 + T(\epsilon), \infty)$ e $t_0 \geq 0$.

Mostremos que existe um $t^* \in [t_0, t_0 + T(\epsilon)]$ tal que $\|y(t^*)\| < \gamma(\epsilon) \leq \delta$. Para isso, suponhamos que

$$\|y(s)\| \geq \gamma(\epsilon), \qquad \text{para qualquer } s \in [t_0, t_0 + T(\epsilon)].$$

Pelo Lema 2.10, temos

$$\begin{aligned} V(t_0 + T(\epsilon), y(t_0 + T(\epsilon))) &\leq V(t_0, y(t_0)) \\ &+K\,\mathrm{var}_{t_0}^{t_0+T(\epsilon)}\left(y(s) - \int_{t_0}^{s} DF(y(\tau), t)\right) + N(t_0 + T(\epsilon) - t_0) \\ &= V(t_0, y(t_0)) + K\,\mathrm{var}_{t_0}^{t_0+T(\epsilon)}\left(y(s) - \int_{t_0}^{s} DF(y(\tau), t)\right) + N(T(\epsilon)). \end{aligned}$$

Assim como no Teorema 2.11, temos

$$\begin{aligned} V(t_0, y(t_0)) &\leq \|V(t_0, y(t_0))\| = \|V(t_0, y(t_0)) - V(t_0, 0)\| \\ &\leq K\|y(t_0) - 0\| = K\|y(t_0)\| \leq K\delta_0. \end{aligned}$$

Logo

$$V(t_0 + T(\epsilon), y(t_0 + T(\epsilon))) < K\delta_0 + K\gamma(\epsilon) + N\left(-K\frac{\delta_0 + \gamma(\epsilon)}{N}\right) = 0. \tag{2.15}$$

Por outro lado, como $V(t,x) \geq b(\|x\|)$ para todo $(t,x) \in [0,\infty) \times \overline{B_a}$, temos

$$V(t_0 + T(\epsilon), y(t_0 + T(\epsilon))) \geq b(\|y(t_0 + T(\epsilon)\|) \geq b(\|\gamma(\epsilon)\|) > 0,$$

o que contradiz (2.15).

Logo existe um $t^* \in [t_0, t_0 + T(\epsilon)]$ tal que $\|y(t^*)\| < \gamma(\epsilon) \leq \delta$, donde segue que $\|y(t)\| < \epsilon$ para $t \in [t^*, t_1]$, pois (II) vale para $t^* = t_2$ e $t_1 = t_3$. Consequentemente $\|y(t)\| < \epsilon$ para $t > t_0 + T(\epsilon)$, pois $t^* \in [t_0, t_0 + T(\epsilon)]$.

Portanto a solução trivial $x \equiv 0$ de (2.2) também é variacionalmente atratora e, assim, variacionalmente-assimptoticamente estável. ■

2.3 Teoremas do Tipo Lyapunov Inversos

O objetivo desta seção é mostrar que a estabilidade variacional e a estabilidade variacionalmente assintótica implicam, respectivamente, a existência de funcionais de Lyapunov com as propriedades descritas nos Teoremas 2.11 e 2.12.

Definição 2.13. *Assuma que $-\infty < a < b < \infty$ e $G : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Para uma divisão dada*

$$D : a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k = b$$

do intervalo $[a,b]$ e para qualquer $\lambda \geq 0$, defina

$$v_\lambda(G,D) = \sum_{j=1}^{k} e^{-\lambda(b-\alpha_{j-1})}|G(\alpha_j) - G(\alpha_{j-1})|$$

e

$$e_\lambda \operatorname{var}_a^b G = \sup_D v_\lambda(G,D),$$

onde o supremo é tomado sobre toda divisão finita D do intervalo $[a,b]$. O número $e_\lambda \operatorname{var}_a^b G$ é chamado de e_λ-variação da função G sobre o intervalo $[a,b]$.

Lema 2.14 ([16] - Lema 10.16). *Sejam $-\infty < a < b < \infty$ e $G : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Então dado $\lambda \geq 0$, vale*

$$e^{-\lambda(b-a)} \operatorname{var}_a^b G \leq e_\lambda \operatorname{var}_a^b G \leq \operatorname{var}_a^b G. \tag{2.16}$$

Para $a \leq c \leq b$, temos a identidade

$$e_\lambda \operatorname{var}_a^b G = e^{-\lambda(b-c)} e_\lambda \operatorname{var}_a^c G + e_\lambda \operatorname{var}_c^b G. \tag{2.17}$$

Prova: Para $\lambda \geq 0$ e qualquer divisão D de $[a,b]$, temos

$$0 \leq \lambda(b-\alpha_{j-1}) \leq \lambda(b-a),$$

o que implica que

$$e^{-\lambda(b-a)} \leq e^{-\lambda(b-\alpha_{j-1})} \leq e^0 = 1,$$

para $j = 1, 2, \ldots, k$.

$$e^{-\lambda(b-a)} \leq e^{-\lambda(b-\alpha_{j-1})} \leq e^0 = 1,$$

Assim

$$e^{-\lambda(b-a)}|G(\alpha_j) - G(\alpha_{j-1})| \leq e^{-\lambda(b-\alpha_{j-1})}|G(\alpha_j) - G(\alpha_{j-1})| \leq |G(\alpha_j) - G(\alpha_{j-1})|$$

e, consequentemente,

$$\sum_{j=1}^{k} e^{-\lambda(b-a)}|G(\alpha_j) - G(\alpha_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^{k} e^{-\lambda(b-\alpha_{j-1})}|G(\alpha_j) - G(\alpha_{j-1})|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} |G(\alpha_j) - G(\alpha_{j-1})|.$$

Portanto

$$e^{-\lambda(b-a)} \operatorname{var}_a^b G \leq e_\lambda \operatorname{var}_a^b G \leq \operatorname{var}_a^b G.$$

Para provarmos a identidade (2.17), consideremos a seguinte divisão D de $[a,b]$:

$$D : a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{l-1} < \alpha_l = c < \alpha_{l+1} < \ldots < \alpha_k = b.$$

Então

$$v_\lambda(G, D) = \sum_{j=1}^{k} e^{-\lambda(b-\alpha_{j-1})}|G(\alpha_j) - G(\alpha_{j-1})|$$

$$= \sum_{j=1}^{l} e^{-\lambda(b-\alpha_{j-1})}|G(\alpha_j) - G(\alpha_{j-1})| + \sum_{j=l+1}^{k} e^{-\lambda(b-\alpha_{j-1})}|G(\alpha_j) - G(\alpha_{j-1})|.$$

Como $e^{-\lambda(b-\alpha_{j-1})} = e^{-\lambda(b-c)} + e^{-\lambda(c-\alpha_{j-1})}$, temos

$$v_\lambda(G, D) = e^{-\lambda(b-c)} \sum_{j=1}^{l} e^{-\lambda(c-\alpha_{j-1})}|G(\alpha_j) - G(\alpha_{j-1})|$$

$$+\sum_{j=l+1}^{k} e^{-\lambda(b-\alpha_{j-1})}|G(\alpha_j)-G(\alpha_{j-1})| = e^{-\lambda(b-c)}v_\lambda(G,D_1)+v_\lambda(G,D_2),$$

onde $D_1 : a=\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_{l-1}<\alpha_l=c$ e $D_2 : c=\alpha_l<\alpha_{l+1}<\ldots<\alpha_k=b$ são, respectivamente, divisões de $[a,c]$ e $[c,b]$.

Portanto

$$e_\lambda \operatorname{var}_a^b G = e^{-\lambda(b-c)}e_\lambda \operatorname{var}_a^c G + e_\lambda \operatorname{var}_c^b G$$

e a prova está completa. ■

Dados $a>0$, $t>0$ e $x\in B_a$, seja $A_a(t,x)$ o conjunto de todas as funções $\varphi : [0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ que são localmente de variação limitada e contínuas à esquerda em $(0,\infty)$, com $\varphi(0)=0$, $\varphi(t)=x$ e $\sup\limits_{s\in[0,t]}\|\varphi(s)\|<a$.

Mais que isso, para $\lambda\geq 0$, $s\geq 0$ e $x\in B_a$, defina

$$V_\lambda(s,x)=\begin{cases}\inf\limits_{\varphi\in A_a(s,x)}\left\{e_\lambda \operatorname{var}_0^s\left(\varphi(\sigma)-\displaystyle\int_0^\sigma DF(\varphi(\tau),t)\right)\right\}, & \text{se } s>0;\\ \|x\|, \quad \text{se } s=0.\end{cases} \tag{2.18}$$

Como $\varphi\in A_a(s,x)$, observe que a integral $\displaystyle\int_0^\sigma DF(\varphi(\tau),t)$ é uma função de variação limitada na variável σ e, consequentemente, a função $\varphi(\sigma)-\displaystyle\int_0^\sigma DF(\varphi(\tau),t)$ é de variação limitada em $[0,s]$. Assim a e_λ-variação desta função é finita.

Observe, também, que a função $\varphi\equiv 0$ pertence à classe $A_a(s,0)$ e, portanto, $V_\lambda(s,0)=0$ para quaisquer $s\geq 0$ e $\lambda\geq 0$.

Como $e_\lambda \operatorname{var}_0^s\left(\varphi(\sigma)-\displaystyle\int_0^\sigma DF(\varphi(\tau),t)\right)\geq 0$ para todo $\varphi\in A_a(s,x)$, então pela definição de $V_\lambda(s,x)$, temos $V_\lambda(s,x)\geq 0$ para quaisquer $s\geq 0$ e $x\in\mathbb{R}^n$.

Lema 2.15 ([16] - Lema 10.18). *Para $x,y\in B_a$, $s\in[0,\infty)$ e $\lambda\geq 0$, vale a desigualdade*

$$|V_\lambda(s,x)-V_\lambda(s,y)|\leq\|x-y\|. \tag{2.19}$$

Prova: Primeiramente suponhamos $s=0$. Então

$$|V_\lambda(0,x)-V_\lambda(0,y)|=|\|x\|-\|y\||\leq\|x-y\|.$$

Suponhamos, agora, que $s>0$. Seja $\varphi\in A_a(s,x)$ e consideremos $0<\eta<s$.

Defina

$$\varphi_\eta(\sigma) = \begin{cases} \varphi(\sigma), & \text{se } \sigma \in [0, s-\eta]; \\ \varphi(s-\eta) + \dfrac{1}{\eta}(y - \varphi(s-\eta))(\sigma - (s-\eta)), & \text{se } \sigma \in [s-\eta, s]. \end{cases} \tag{2.20}$$

Observe que $\varphi_\eta \in A_a(s,y)$. Logo

$$V_\lambda(s,y) \leq e_\lambda \operatorname{var}_0^s \left(\varphi_\eta(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi_\eta(\tau), t) \right)$$

$$= e^{-\lambda\eta} e_\lambda \operatorname{var}_0^{s-\eta} \left(\varphi_\eta(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi_\eta(\tau), t) \right) + e_\lambda \operatorname{var}_{s-\eta}^s \left(\varphi_\eta(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi_\eta(\tau), t) \right)$$

$$\leq e^{-\lambda\eta} e_\lambda \operatorname{var}_0^{s-\eta} \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right) + \operatorname{var}_{s-\eta}^s \varphi_\eta + \operatorname{var}_{s-\eta}^s \left(\int_0^\sigma DF(\varphi_\eta(\tau), t) \right)$$

$$\leq e^{-\lambda\eta} e_\lambda \operatorname{var}_0^{s-\eta} \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right) + \|\varphi(s) - \varphi(s-\eta)\| + (h(s) - h(s-\eta)).$$

Como

$$e^{-\lambda\eta} e_\lambda \operatorname{var}_0^{s-\eta} \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right)$$

$$= e_\lambda \operatorname{var}_0^s \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right) - e_\lambda \operatorname{var}_{s-\eta}^s \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right)$$

$$\leq e_\lambda \operatorname{var}_0^s \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right),$$

temos

$$V_\lambda(s,y) \leq e_\lambda \operatorname{var}_0^s \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right) + \|\varphi(s) - \varphi(s-\eta)\| + (h(s) - h(s-\eta)).$$

Pela definição de $V_\lambda(s,x)$ e fazendo $\eta \to 0+$, temos

$$V_\lambda(s,y) \leq V_\lambda(s,x) + \|y - x\|.$$

De maneira análoga, concluímos que $V_\lambda(s,x) \leq V_\lambda(s,y) + \|x - y\|$ e assim segue o resultado. ∎

Como $V_\lambda(s,0) = 0$ para todo $s \geq 0$, segue como consequência direta do lema anterior (Lema 2.15) que

$$0 \leq V_\lambda(s,x) = |V_\lambda(s,x) - V_\lambda(s,0)| \leq \|x\|.$$

Lema 2.16 ([16] - Lema 10.20). *Para $y \in B_a$, $s, r \in [0, \infty)$ e $\lambda \geq 0$ vale a desigualdade*

$$|V_\lambda(r, y) - V_\lambda(s, y)| \leq (1 - e^{-\lambda|r-s|})a + |h(r) - h(s)|. \tag{2.21}$$

Prova: Primeiramente, consideremos o caso $0 < s \leq r$.

Seja $\varphi \in A_a(r, y)$ dado. Então pelo Lema 2.14, temos

$$\begin{aligned}
&e_\lambda \operatorname{var}_0^r \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right) \\
&= e^{-\lambda(r-s)} e_\lambda \operatorname{var}_0^s \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right) + e_\lambda \operatorname{var}_s^r \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right) \\
&\geq e^{-\lambda(r-s)} V_\lambda(s, \varphi(s)) + e_\lambda \operatorname{var}_s^r \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right) \\
&\geq e^{-\lambda(r-s)} V_\lambda(s, \varphi(s)) + e^{-\lambda(r-s)} \operatorname{var}_s^r \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right) \\
&= e^{-\lambda(r-s)} \left[V_\lambda(s, \varphi(s)) + \operatorname{var}_s^r \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right) \right] \\
&\geq e^{-\lambda(r-s)} \left[V_\lambda(s, \varphi(s)) + \operatorname{var}_s^r \varphi - \operatorname{var}_s^r \left(\int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right) \right] \\
&\geq e^{-\lambda(r-s)} \left[V_\lambda(s, \varphi(s)) + \|y - \varphi(s)\| + (h(s) - h(r)) \right].
\end{aligned}$$

Do Lema 2.15, temos

$$V_\lambda(s, \varphi(s)) + \|y - \varphi(s)\| \geq V_\lambda(s, y).$$

Assim

$$\begin{aligned}
&e^{-\lambda(r-s)} \left[V_\lambda(s, \varphi(s)) + \|y - \varphi(s)\| + (h(s) - h(r)) \right] \\
&\geq e^{-\lambda(r-s)} \left[V_\lambda(s, y) + (h(s) - h(r)) \right].
\end{aligned}$$

Tomando-se o ínfimo sobre $\varphi \in A_a(r, y)$, obtemos

$$V_\lambda(r, y) \geq e^{-\lambda(r-s)} \left[V_\lambda(s, y) + (h(s) - h(r)) \right] \geq e^{-\lambda(r-s)} V_\lambda(s, y) + (h(s) - h(r)). \tag{2.22}$$

Agora, seja $\varphi \in A_a(s, y)$ arbitrário e defina

$$\varphi^*(\sigma) = \begin{cases} \varphi(\sigma), & \text{para } \sigma \in [0, s]; \\ y, & \text{para } \sigma \in [s, r]. \end{cases}$$

Observe que $\varphi^* \in A_a(r,y)$ e $\varphi^*(s) = \varphi(s) = y$. Logo,

$$V_\lambda(r,y) \leq e_\lambda \operatorname{var}_0^r \left(\varphi^*(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi^*(\tau),t) \right)$$

$$= e^{-\lambda(r-s)} e_\lambda \operatorname{var}_0^s \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau),t) \right) + e_\lambda \operatorname{var}_s^r \left(\varphi^*(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi^*(\tau),t) \right)$$

$$\leq e^{-\lambda(r-s)} e_\lambda \operatorname{var}_0^s \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau),t) \right) + \operatorname{var}_s^r \varphi^*(\sigma) + \operatorname{var}_s^r \left(\int_0^\sigma DF(\varphi^*(\tau),t) \right)$$

$$\leq e^{-\lambda(r-s)} e_\lambda \operatorname{var}_0^s \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau),t) \right) + h(r) - h(s).$$

Consequentemente, temos

$$V_\lambda(r,y) \leq e^{-\lambda(r-s)} V_\lambda(s,y) + h(r) - h(s),$$

que, juntamente com (2.22), nos dá

$$|V_\lambda(r,y) - e^{-\lambda(r-s)} V_\lambda(s,y)| \leq h(r) - h(s).$$

Logo,

$$|V_\lambda(r,y) - V_\lambda(s,y)| \leq |V_\lambda(r,y) - e^{-\lambda(r-s)} V_\lambda(s,y) - (V_\lambda(s,y) - e^{-\lambda(r-s)} V_\lambda(s,y))|$$

$$\leq |V_\lambda(r,y) - e^{-\lambda(r-s)} V_\lambda(s,y)| + |V_\lambda(s,y) - e^{-\lambda(r-s)} V_\lambda(s,y)|$$

$$= |V_\lambda(r,y) - e^{-\lambda(r-s)} V_\lambda(s,y)| + |1 - e^{-\lambda(r-s)}||V_\lambda(s,y)|$$

$$\leq h(r) - h(s) + |1 - e^{-\lambda(r-s)}||y| \leq h(r) - h(s) + (1 - e^{-\lambda(r-s)})a.$$

Considere, agora, o caso em que $s = 0$ e $r > 0$. Então

$$V_\lambda(r,y) - V_\lambda(s,y) = V_\lambda(r,y) - V_\lambda(0,y) = V_\lambda(r,y) - \|y\| \leq 0,$$

pois $V_\lambda(r,y) \leq \|y\|$.

Assuma $\varphi \in A_a(r,y)$ dado. Então

$$e_\lambda \operatorname{var}_0^r \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau),t) \right)$$

$$\geq e_\lambda \operatorname{var}_0^r \varphi(\sigma) - e_\lambda \operatorname{var}_0^r \left(\int_0^\sigma DF(\varphi(\tau),t) \right) \geq e^{-\lambda r} \operatorname{var}_0^r \varphi(\sigma) - \operatorname{var}_0^r \left(\int_0^\sigma DF(\varphi(\tau),t) \right)$$

$$\geq e^{-\lambda r}|\varphi(r)-\varphi(0)|-(h(r)-h(0))=e^{-\lambda r}\|y\|-(h(r)-h(0)).$$

Consequentemente

$$V_\lambda(r,y)\geq e^{-\lambda r}\|y\|-(h(r)-h(0))$$

e, assim,

$$V_\lambda(r,y)-V_\lambda(0,y)=V_\lambda(r,y)-\|y\|$$

$$\geq e^{-\lambda r}\|y\|-(h(r)-h(0))-\|y\|=(e^{-\lambda r}-1)\|y\|-(h(r)-h(0))$$

$$=-(1-e^{-\lambda r})\|y\|-|h(r)-h(0)|\geq -(1-e^{-\lambda r})a-|h(r)-h(0)|.$$

Logo

$$-(1-e^{-\lambda r})a-|h(r)-h(0)|\leq V_\lambda(r,y)-V_\lambda(0,y)\leq 0\leq (1-e^{-\lambda r})a+|h(r)-h(0)|.$$

O caso $r=s=0$ é imediato. ■

O resultado seguinte segue imediatamente dos Lemas 2.15 e 2.16.

Corolário 2.17 ([16] - Corol. 10.21). *Para $x,y\in B_a$, $r,s\in[0,\infty)$ e $\lambda\geq 0$, vale a desigualdade*

$$|V_\lambda(s,x)-V_\lambda(r,y)|\leq \|x-y\|(1-e^{-\lambda|r-s|})a+|h(r)-h(s)|.$$

Agora, discutiremos o comportamento do funcional $V_\lambda(t,x)$ definido por (2.18) ao longo da solução da equação diferencial ordinária generalizada

$$\frac{dx}{d\tau}=DF(x,t), \tag{2.23}$$

onde assumimos as hipóteses feitas no começo do capítulo sobre a função $F(x,t)$, isto é, $F:B_c\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ pertence à classe $\mathcal{F}(B_c\times[0,\infty),h)$, onde $h:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ é uma função não-decrescente e contínua à esquerda em $(0,\infty)$ e

$$F(0,t_2)-F(0,t_1)=0,\qquad \text{para todo } t_1,t_2\geq 0. \tag{2.24}$$

Lema 2.18 ([16] - Lema 10.22). *Se $\psi:[s,s+\eta(s)]\to\mathbb{R}^n$ for uma solução da EDOG (2.23), onde $s\geq 0$ e $\eta(s)>0$, então para todo $\lambda\geq 0$, vale a desigualdade*

$$\limsup_{\eta\to 0+}\frac{V_\lambda(s+\eta,\psi(s+\eta))-V_\lambda(s,\psi(s))}{\eta}\leq -\lambda V_\lambda(s,\psi(s)). \tag{2.25}$$

Prova: Sejam $s\in[0,\infty)$ e $x\in\mathbb{R}^n$. Escolha $a>0$ tal que $\|x\|+(h(s+1)-h(s))<a$.

Assuma $\varphi \in A_a(s,x)$ dado e seja $\psi : [s, s+\eta(s)] \to \mathbb{R}^n$ uma solução da EDOG (2.23) com a condição inicial $\psi(s) = x$, onde $0 < \eta(s) < 1$. Como $F : B_c \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ pertence à classe $\mathcal{F}(B_c \times [0,\infty), h)$, a existência de tal solução é garantida pelo Teorema 1.19.

Para $0 < \eta < \eta(s)$, defina

$$\varphi_\eta(\sigma) = \begin{cases} \varphi(\sigma), & \text{para } \sigma \in [0,s]; \\ \psi(\sigma), & \text{para } \sigma \in [s, s+\eta]. \end{cases}$$

Observe que $\varphi(s) = \psi(s) = \varphi_\eta(s) = x$ e $\varphi_\eta \in A_a(s+\eta, \psi(s+\eta))$, pois ψ é contínua à esquerda e

$$\begin{aligned} \|\psi(\sigma)\| = \|x - \int_s^\sigma DF(\psi(\tau),t)\| &\leq \|x\| + (h(\sigma) - h(s)) \\ &\leq \|x\| + (h(s+1) - h(s)) < a, \end{aligned}$$

onde $\sigma \in [s, s+\eta]$.

Por outro lado,

$$V_\lambda(s+\eta, \psi(s+\eta)) \leq e_\lambda \operatorname{var}_0^{s+\eta}\left(\varphi_\eta(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi_\eta(\tau),t)\right)$$

$$= e^{-\lambda\eta} e_\lambda \operatorname{var}_0^{s}\left(\varphi_\eta(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi_\eta(\tau),t)\right) + e_\lambda \operatorname{var}_s^{s+\eta}\left(\varphi_\eta(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi_\eta(\tau),t)\right)$$

$$= e^{-\lambda\eta} e_\lambda \operatorname{var}_0^{s}\left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau),t)\right)$$

$$+ e_\lambda \operatorname{var}_s^{s+\eta}\left(\psi(\sigma) - \int_0^s DF(\psi(\tau),t) - \int_s^\sigma DF(\psi(\tau),t)\right).$$

Como $\psi(\sigma) = \psi(s) + \displaystyle\int_s^\sigma DF(\psi(\tau),t)$ para $\sigma \in [s, s+\eta]$, temos

$$V_\lambda(s+\eta, \psi(s+\eta)) \leq e^{-\lambda\eta} e_\lambda \operatorname{var}_0^{s}\left(\varphi_\eta(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi_\eta(\tau),t)\right)$$

$$+ e_\lambda \operatorname{var}_s^{s+\eta}\left(\psi(s) - \int_0^s DF(\psi(\tau),t)\right) = e^{-\lambda\eta} e_\lambda \operatorname{var}_0^{s}\left(\varphi_\eta(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi_\eta(\tau),t)\right).$$

Tomando-se o ínfimo de todas as $\varphi \in A_a(s,x)$, obtemos

$$V_\lambda(s+\eta, \psi(s+\eta)) \leq e^{-\lambda\eta} V_\lambda(s,x) = e^{-\lambda\eta} V_\lambda(s, \psi(s)).$$

Consequentemente,

$$V_\lambda(s+\eta,\psi(s+\eta)) - V_\lambda(s,\psi(s)) \leq (e^{-\lambda\eta}-1)V_\lambda(s,\psi(s))$$

e

$$\frac{V_\lambda(s+\eta,\psi(s+\eta)) - V_\lambda(s,\psi(s))}{\eta} \leq \left(\frac{e^{-\lambda\eta}-1}{\eta}\right)V_\lambda(s,\psi(s))$$

para todo $0 < \eta < \eta(s)$.

Como $\limsup\limits_{\eta\to 0+} \dfrac{e^{-\lambda\eta}-1}{\eta} = -\lambda$, segue imediatamente que

$$\limsup_{\eta\to 0+} \frac{V_\lambda(s+\eta,\psi(s+\eta)) - V_\lambda(s,\psi(s))}{\eta} \leq -\lambda V_\lambda(s,\psi(s)),$$

o que completa a demonstração. ■

Teorema 2.19 ([16] - Teor. 10.23). *Se a solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG (2.23) for variacionalmente estável, então para todo $0 < a < c$ existirá um funcional $V : [0,\infty) \times B_a \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:*

(1) *existe uma função real contínua e crescente $b : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $b(\rho) = 0$ se, e somente se, $\rho = 0$ e $V(t,x) \geq b(\|x\|)$ para todo $(t,x) \in [0,\infty) \times B_a$;*

(2) $V(t,0) = 0$, *para todo $t \in [0,\infty)$;*

(3) $|V(t,x) - V(t,y)| \leq \|x-y\|$ *para $x,y \in B_a$, $t \in [0,\infty)$;*

(4) *a função $V(\cdot,x)$ é contínua à esquerda e localmente de variação limitada em $[0,\infty)$;*

(5) *a função V é não-crescente ao longo de toda solução $x(t)$ da EDOG (2.23).*

Prova: O candidato para o funcional V é a função $V_0(s,x)$ definido por (2.18) para $\lambda = 0$, isto é, tomamos $V(s,x) = V_0(s,x)$. A propriedade **(2)** é consequência direta da definição de V. A propriedade **(3)** é consequência do Lema 2.15. A continuidade à esquerda de $V(\cdot,x)$ é consequência, também, da definição de V e segue do Corolário 2.10 que V é localmente de variação limitada. Pelo Lema 2.18, segue que, para toda solução da EDOG (2.23) e para quaisquer $x,y \in B_a$ e $t \in [0,\infty)$, temos

$$\limsup_{\eta\to 0+} \frac{V_0(s+\eta,\psi(s+\eta)) - V_0(s,\psi(s))}{\eta} \leq -\lambda V_0(s,\psi(s)) = -0V_0(s,\psi(s)) = 0,$$

e, portanto, vale a propriedade **(5)**.

Nos resta mostrar a propriedade **(1)**. Este será exatamente o ponto onde usaremos o fato da solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG (2.23) ser variacionalmete estável.

Suponhamos que não acontece **(1)**, isto é, existem $\epsilon > 0$, $0 < \epsilon < a$, e uma sequência de pares (t_k, x_k), $k = 1, 2, \ldots$ tais que $\epsilon \leq \|x_k\| < a$, $t_k \to \infty$ quando $k \to \infty$ e $V(t_k, x_k) \to 0$ quando $k \to \infty$.

Como a solução trivial da EDOG (2.23) é estável em relação a perturbações (veja Teorema 2.7), seja $\delta(\epsilon) > 0$ referente à Definição 2.4. Assuma que $k_0 \in \mathbb{N}$ é tal que para $k > k_0$, temos $V(t_k, x_k) < \delta(\epsilon)$. Logo existe $\varphi_k \in A_a(t_k, x_k)$ tal que

$$\operatorname{var}_0^{t_k}\left(\varphi_k(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi_k(\tau), t)\right) < \delta(\epsilon).$$

Definindo

$$P_k(\sigma) = \begin{cases} \varphi_k(\sigma) - \displaystyle\int_0^\sigma DF(\varphi_k(\tau), t), & \text{para } \sigma \in [0, t_k], \\ x_k - \displaystyle\int_0^{t_k} DF(\varphi_k(\tau), t), & \text{para } \sigma \in [t_k, \infty], \end{cases}$$

observamos que P_k é contínua à esquerda e

$$\operatorname{var}_0^\infty P_k = \operatorname{var}_0^{t_k}\left(\varphi_k(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi_k(\tau), t)\right) < \delta(\epsilon).$$

Para $\sigma \in [0, t]$, temos

$$\begin{aligned} \varphi_k(\sigma) &= \int_0^\sigma DF(\varphi_k(\tau), t) + \varphi_k(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi_k(\tau), t) \\ &= \int_0^\sigma DF(\varphi_k(\tau), t) + P_k(\sigma) - P_k(0) \\ &= \varphi_k(0) + \int_0^\sigma D[F(\varphi_k(\tau), t) + P_k(t)], \end{aligned}$$

pois $\varphi_k(0) = 0$. Consequentemente φ_k é solução da equação perturbada

$$\frac{dy}{d\tau} = D[F(y, t) + P_k(t)]$$

e, portanto, pela estabilidade variacional da solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG (2.23), temos $\|\varphi_k(s)\| < \epsilon$ para todo $s \in [0, t_k]$ e, consequentemente, $\|\varphi_k(t_k)\| = \|x_k\| < \epsilon$ contradizendo, assim, nossa hipótese. Portanto vale **(1)**. ∎

Teorema 2.20 ([16] - Teor. 10.24). *Se a solução trivial da EDOG (2.23) for variacionalmente assintoticamente estável, então para todo* $0 < a < c$ *existirá um funcional* $U : [0, \infty) \times B_a \to \mathbb{R}$ *satisfazendo as seguintes condições:*

(1) *existe uma função real contínua e crescente* $b : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $b(\rho) = 0$ *se, e somente se,* $\rho = 0$ *e* $U(t, x) \geq b(\|x\|)$ *para todo* $(t, x) \in [0, \infty) \times B_a$*;*

(2) $U(t, 0) = 0$*, para todo* $t \in [0, \infty)$*;*

(3) $|U(t, x) - U(t, y)| \leq \|x - y\|$*para* $x, y \in B_a$*,* $t \in [0, \infty)$*;*

(4) *a função* $U(\cdot, x)$ *é contínua à esquerda e* $U(\cdot, x)$ *é localmente de variação limitada em* $[0, \infty)$*;*

(5) *para toda solução* $x(s)$ *da EDOG* $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x, t)$ *definida para* $s \geq t$*, onde* $x(t) = z \in B_a$*, vale a relação*

$$\dot{U}(t, x(t)) = \limsup_{\eta \to 0+} \frac{U(t + \eta, x(t + \eta)) - U(t, z))}{\eta} \leq -U(t, z). \tag{2.26}$$

Prova: Para $x \in B_a$, $s \geq 0$, o candidato para a função U é o funcional $V_1(s, x)$ definido por (2.18) para $\lambda = 1$, isto é, tomamos $U(s, x) = V_1(s, x)$. Assim como na demonstração do teorema anterior, podemos ver que as afirmativas **(2)**, **(3)**, **(4)** e **(5)** valem. Resta-nos mostrar **(1)**.

Como a solução trivial $x \equiv 0$ é variacionalmente atratora, pelo Teorema 2.7 ela é atratora em relação a perturbação. Assim existe $\delta_0 > 0$ e para qualquer $\epsilon > 0$, existem $T = T(\epsilon) \geq 0$ e $\gamma = \gamma(\epsilon) > 0$ tais que se $\|y(t_0)\| < \delta_0$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ e $P \in BV([t_0, t_1])$ for uma função de variação limitada em $[t_0, t_1]$, contínua à esquerda em $(t_0, t_1]$ e tal que $\operatorname{var}_{t_0}^{t_1} P < \gamma(\epsilon)$, então teremos

$$\|y(t, t_0, y_0)\| < \epsilon$$

para todo $t \in [t_0, t_1] \cap [t_0 + T(\epsilon), \infty)$ e $t_0 \geq 0$, onde $y(t, t_0, y_0)$ é uma solução de

$$\frac{dx}{d\tau} = D[F(x, t) + P(t)]$$

com $y(t_0, t_0, y_0) = y_0$.

Assuma que a afirmativa **(1)** não vale. Então existem $\epsilon > 0$, $0 < \epsilon < a = \delta_0$, e uma sequência de pares (t_k, x_k), $k = 1, 2, \ldots$ tais que $\epsilon \leq \|x_k\| < a$, $t_k \to \infty$ quando $k \to \infty$ e $U(t_k, x_k) \to 0$ quando $k \to \infty$.

Vamos considerar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$, vale $t_k > T(\epsilon) + 1$ e

$$U(t_k, x_k) < \gamma(\epsilon) e^{-(T(\epsilon)+1)}.$$

Logo, existe $\varphi \in A_a(t_k, x_k)$ tal que

$$e_1 \operatorname{var}_0^{t_k} \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right) < \gamma(\epsilon) e^{-(T(\epsilon)+1)}.$$

Defina $t_0 = t_k - (T(\epsilon) + 1)$. Então $t_0 > 0$, pois $t_k > T(\epsilon) + 1$ e também $t_k = t_0 + T(\epsilon) + 1 > t_0 + T(\epsilon)$. Além disso,

$$e_1 \operatorname{var}_{t_0}^{t_k} \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right) < e_1 \operatorname{var}_0^{t_k} \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right) < \gamma(\epsilon) e^{-(T(\epsilon)+1)},$$

e, pelo Lema 2.14, temos

$$\begin{aligned} &e^{-(T(\epsilon)+1)} \operatorname{var}_{t_0}^{t_k} \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right) \\ &= e^{-(t_k - t_0)} \operatorname{var}_{t_0}^{t_k} \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right) < \gamma(\epsilon) e^{-(T(\epsilon)+1)} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\operatorname{var}_{t_0}^{t_k} \left(\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \right) < \gamma(\epsilon). \tag{2.27}$$

Para $\sigma \in [t_0, t_k]$, definimos

$$P(\sigma) = \varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t).$$

Observe que P é contínua à esquerda e, pela desigualdade (2.27), temos

$$\operatorname{var}_{t_0}^{t_k} P < \gamma(\epsilon).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) &= \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) + \varphi(\sigma) - \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) \\ &= \int_0^\sigma DF(\varphi(\tau), t) + P(\sigma), \end{aligned}$$

e, também,

$$\varphi(s) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^s DF(\varphi(\tau), t) + P(s) - P(t_0)$$

$$= \int_{t_0}^{s} D[F(\varphi(\tau), t) + P(t)],$$

o que significa que a função $\varphi : [t_0, t_k] \to \mathbb{R}^n$ é uma solução da equação

$$\frac{dx}{d\tau} = D[F(x,t) + P(t)]$$

com $\|\varphi(t_0)\| \leq a = \delta_0$, pois $\varphi \in A_a(t_k, x_k)$. Pelo fato da solução trivial $x \equiv 0$ de (2.23) ser atratora em relação a perturbações, a desigualdade $\|\varphi(t_0)\| < \epsilon$ vale para todo $t > t_0 + T(\epsilon)$. Isto também é válido para $t = t_k > t_0 + T(\epsilon)$, isto é, $\|\varphi(t_k)\| = \|x_k\| < \epsilon$ e isto contradiz nossa hopótese de que $\|x_k\| \geq \epsilon$. Logo vale a afirmativa **(1)**. ■

Capítulo

3

Equações Diferenciais em Medida

Em [12] e [15], os autores demonstraram os teoremas de existência local e de unicidade de soluções para a EDM $Dx = f(x,t) + g(x,t)Du$ sob certas condições. Neste capítulo, vamos considerar condições mais gerais e obter resultados de existência local e unicidade de soluções para a EDM acima. Faremos isto relacionando, de maneira biunívoca, soluções da EDM com soluções de um espaço apropriado de EDOGs.

3.1 Representação Integral

Consideremos

$$\overline{B}_c = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq c\}$$

e

$$G = \overline{B}_c \times [a,b], -\infty < a < b < +\infty$$

Sejam $f : \overline{B}_c \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $g : \overline{B}_c \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ funções, $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função de variação limitada em $[a,b]$ e contínua à esquerda em $(a,b]$ tais que, para cada $x \in B_c$, $f(x,\cdot)$ é Lebesgue integrável em $[a,b]$ e $g(x,\cdot)$ é du-integrável em $[a,b]$, onde du é a medida de Lebesgue-Stieltjes gerada pela função u.

Uma equação diferencial em medida (EDM) pode ser escrita formalmente como, por exemplo,

$$Dx = f(x,t) + g(x,t)Du, \tag{3.1}$$

onde Dx e Du denotam as derivadas distribucionais de x e u no sentido de L. Schwartz.

Definição 3.1. *Uma função $x : [\alpha,\beta] \subseteq [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é solução da equação diferencial em medida (3.1) por (x_0,t_0) em $[\alpha,\beta]$, se x for uma função contínua à esquerda e de variação* *limitada tal que* $x(t_0) = x_0$ *e a derivada distribucional de* x *satisfizer a equação (3.1) em* $]t_0, \tau[$ *para todo* $\tau \in [\alpha, \beta]$.

Teorema 3.2 (Representação Integral, [12] - Teor. 2.3, [15] - Teor. 2.3). *Uma função* $x : [\alpha, \beta] \subseteq [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *será uma solução da EDM (3.1) por* (x_0, t_0) *em* $[\alpha, \beta]$ *e* $x_0 = x(t_0)$ *se, e somente se,* $x : [\alpha, \beta] \subseteq [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *satisfizer a equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s), s)du(s), \tag{3.2}$$

para $t \in [\alpha, \beta]$, *onde* du *denotará a medida de Lebesgue-Stieltjes gerada por* u.

Em outras palavras, a função $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$, é uma solução da EDM (3.1) se, e somente se, $(x(s), s) \in \overline{B}_c \times [a, b]$ para $s \in [\alpha, \beta]$ e

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} f(x(s), s)ds + \int_{s_1}^{s_2} g(x(s), s)du(s),$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$.

3.2 Correspondência entre EDOGs e EDMs

Suponhamos, agora, que $f : \overline{B}_c \times [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $g : \overline{B}_c \times [a, b] \to \mathbb{R}^n$ são funções que satisfazem as seguintes condições:

- Para cada $x \in B_c$,

$$f(x, .) \text{ é Lebesgue integrável em } [a, b], \tag{3.3}$$

  e

$$g(x, .)\ du\text{-integrável em } [a, b], \tag{3.4}$$

  onde du é a medida de Lebesgue-Stieltjes gerada pela função u.

- Existe uma função Lebesgue mensurável $m_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $c_1, c_2 \in [a, b]$, $\displaystyle\int_{c_1}^{c_2} m_1(s)ds < \infty$ e

$$\| \int_{c_1}^{c_2} f(x, s)ds \| \leq \int_{c_1}^{c_2} m_1(s)ds \tag{3.5}$$

  para $(x, s) \in \overline{B}_c \times [a, b]$.

- Existe uma função du-mensurável $m_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $c_1, c_2 \in [a,b]$, $\int_{c_1}^{c_2} m_2(s)du(s) < \infty$ e
$$\| \int_{c_1}^{c_2} g(x,s)du(s)\| \leq \int_{c_1}^{c_2} m_2(s)du(s) \tag{3.6}$$
para $(x,s) \in \overline{B}_c \times [a,b]$.

- Existe uma função Lebesgue mensurável $l_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $c_1, c_2 \in [a,b]$, $\int_{c_1}^{c_2} l_1(s)ds < \infty$ e
$$\| \int_{c_1}^{c_2} f(x,s)ds - \int_{c_1}^{c_2} f(y,s)ds\| \leq \int_{c_1}^{c_2} l_1(s)\|x-y\|ds \tag{3.7}$$
para $(x,s),(y,s) \in \overline{B}_c \times [a,b]$.

- Existe uma função du-mensurável $l_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $c_1, c_2 \in [a,b]$, $\int_{c_1}^{c_2} l_2(s)du < \infty$ e
$$\| \int_{c_1}^{c_2} g(x,s)du(s) - \int_{c_1}^{c_2} g(y,s)du(s)\| \leq \int_{c_1}^{c_2} l_2(s)\|x-y\|du(s) \tag{3.8}$$
para $(x,s),(y,s) \in \overline{B}_c \times [a,b]$.

Observação: Sejam μ uma medida regular e $g : \overline{B}_c \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ uma função satisfazendo as seguintes condições usuais:

- $g(x,\cdot)$ é μ-mensurável em $[a,b]$, para cada $x \in B_c$;
- Existe uma função μ-mensurável $m : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $c_1, c_2 \in [a,b]$, $\int_{c_1}^{c_2} m(s)d\mu < \infty$ e $\|g(x,s)\| \leq m(s)$;
- Existe uma função μ-mensurável $l : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $c_1, c_2 \in [a,b]$, $\int_{c_1}^{c_2} l(s)d\mu < \infty$ e $\|g(x,s) - g(y,s)\| \leq l(s)\|x-y\|$.

Neste caso, dizemos que a função $g : \overline{B}_c \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ pertence à classe $\mathcal{C}(G,\mu)$. Assim, temos
$$\| \int_{c_0}^{c_2} g(x,s)d\mu - \int_{c_0}^{c_1} g(x,s)d\mu\| = \| \int_{c_1}^{c_2} g(x,s)d\mu\|$$

$$\leq \int_{c_1}^{c_2} \|g(x,s)\| d\mu \leq \int_{c_1}^{c_2} m(s) d\mu$$

para $c_0, c_1, c_2 \in [a,b]$, $(x,s) \in \overline{B}_c \times [a,b]$, e

$$\| \int_{c_0}^{c_2} g(x,s)d\mu - \int_{c_0}^{c_1} g(x,s)d\mu - \int_{c_0}^{c_2} g(y,s)d\mu + \int_{c_0}^{c_1} g(y,s)d\mu \|$$

$$= \| \int_{c_1}^{c_2} g(x,s) - g(y,x)d\mu \| \leq \int_{c_1}^{c_2} \|g(x,s) - g(y,s)\| d\mu$$

$$\leq \int_{c_1}^{c_2} l(s)\|x-y\| d\mu = \|x-y\| \int_{c_1}^{c_2} l(s) d\mu$$

para $c_0, c_1, c_2 \in [a,b]$, $(x,s), (y,s) \in \overline{B}_c \times [a,b]$. Logo $g \in \mathcal{C}(G,\mu)$ satisfaz as condições (3.6) e (3.8) e, em particular, se consirerarmos $f \in \mathcal{C}(G,m)$, onde m é a medida de Lebesgue, então f satisfaz as condições (3.5) e (3.7). Portanto as condições que vamos assumir sobre as funções f e g são mais gerais que as usualmente consideradas.

Proposição 3.3 ([16] - Prop. 5.11). *Seja $g : \overline{B}_c \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições (3.4), (3.6) e (3.8). Então para*

$$G(x,t) = \int_{t_0}^{t} g(x,s)du(s), \tag{3.9}$$

com $x \in \overline{B}_c$ e $t, t_0 \in [a,b]$, existe uma função não-decrescente $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\|G(x,t_2) - G(x,t_1)\| \leq |h(t_2) - h(t_1)| \tag{3.10}$$

e

$$\|G(x,t_2) - G(x,t_1) - (G(y,t_2) - G(y,(t_1))\| \leq \|x-y\| |h(t_2) - h(t_1)| \tag{3.11}$$

para $t_1, t_2 \in [a,b]$ e $x, y \in \overline{B}_c$.

Logo, como consequência direta da Proposição 3.3, então $G(x,t)$ definido como em (3.9) pertence à classe $\mathcal{F}(\overline{B}_c \times [a,b], h)$. Considerando (3.9), a proposição seguinte diz que $\int_{\alpha}^{\beta} DG(x(\tau),t) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x(s),s)du(s)$ para $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$.

Proposição 3.4 ([16] - Prop. 5.12). *Sejam $g : \overline{B}_c \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições (3.4), (3.6) e (3.8) e $G : \overline{B}_c \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $G(x,t) = \int_{t_0}^{t} g(x,s)du(s)$, onde $x \in \overline{B}_c$ e $t, t_0 \in [a,b]$. Se $x : [\alpha,\beta] \to \overline{B}_c$, $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$, for o limite pontual de uma sequência de funções escada, então a integral generalizada de Perron $\int_{\alpha}^{\beta} DG(x(\tau),t)$ e a* *integral de Lebesgue-Stieltjes* $\int_\alpha^\beta g(x(s),s)du(s)$ *existirão e terão o mesmo valor.*

Prova: Pela Proposição 3.3, temos $G \in \mathcal{F}(\overline{B}_c \times [a,b], h)$. Seja $\varphi_k : [\alpha,\beta] \to \overline{B}_c$, $k = 1,2,\ldots$, uma sequência de funções escada tal que $\varphi_k(s) \to x(s)$, quando $k \to \infty$, para todo $s \in [\alpha,\beta]$. Logo, existe uma divisão

$$\alpha = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n = \beta$$

de $[\alpha,\beta]$ tal que $\varphi_k(s) = c_j \in \mathbb{R}^n$, para $s \in (s_{j-1}, s_j)$, $j = 1,2,\ldots,n$, onde c_j são constantes.

Como no Corolário 1.18, temos para $s_{j-1} < \sigma_1 < \sigma_2 < s_j$, a integral $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DG(\varphi_k(\tau),t)$ existe e vale

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DG(\varphi_k(\tau),t) = G(c_j,\sigma_2) - G(c_j,\sigma_1).$$

Mas, por outro lado,

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} g(\varphi_k(s),s)du(s) = \int_{[\sigma_1,\sigma_2)} g(c_j,s)du(s)$$

$$= \int_{[t_0,\sigma_2)} g(c_j,s)du(s) - \int_{[t_0,\sigma_1)} g(c_j,s)du(s) = G(c_j,\sigma_2) - G(c_j,\sigma_1).$$

Logo, a integral $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} g(\varphi_k(s),s)du(s)$ existe e vale

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DG(\varphi_k(\tau),t) = G(c_j,\sigma_2) - G(c_j,\sigma_1) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} g(\varphi_k(s),s)du(s)$$

para $s_{j-1} < \sigma_1 < \sigma_2 < s_j$.

Dado $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, seja $\sigma_0 \in (s_{j-1}, s_j)$. Novamente, de modo análogo ao Corolário 1.18, a integral $\int_{s_{j-1}}^{\sigma_0} DG(\varphi_k(\tau),t)$ existe e

$$\int_{s_{j-1}}^{\sigma_0} DG(\varphi_k(\tau),t) = G(c_j,\sigma_0) - \lim_{t\to s_{j-1}+} G(c_j,t) + \lim_{t\to s_{j-1}+} G(\varphi_k(s_{j-1}),t) - G(\varphi_k(s_{j-1}),s_{j-1}).$$

Mas, por outro lado,

$$G(c_j,\sigma_0) - \lim_{t\to s_{j-1}+} G(c_j,t) + \lim_{t\to s_{j-1}+} G(\varphi_k(s_{j-1}),t) - G(\varphi_k(s_{j-1}),s_{j-1})$$

$$= \int_{[t_0,\sigma_0)} g(c_j,s)du(s) - \lim_{t\to s_{j-1}+} \int_{[t_0,t)} g(c_j,s)du(s) + \lim_{t\to s_{j-1}+} \int_{[t_0,t)} g(\varphi_k(s_{j-1}),s)du(s)$$

$$
\begin{aligned}
-\int_{[t_0,s_{j-1})} g(\varphi_k(s_{j-1}),s)du(s) &= \int_{[t_0,\sigma_0)} g(c_j,s)du(s) - \int_{[t_0,\sigma_0)} g(c_j,s)du(s) \\
&- \lim_{t\to s_{j-1}+} \int_{[\sigma_0,t)} g(c_j,s)du(s) + \int_{[t_0,s_{j-1})} g(\varphi_k(s_{j-1}),s)du(s) \\
&+ \lim_{t\to s_{j-1}+} \int_{[s_{j-1},t)} g(\varphi_k(s_{j-1}),s)du(s) - \int_{[t_0,s_{j-1})} g(\varphi_k(s_{j-1}),s)du(s) \\
&= - \lim_{t\to s_{j-1}+} \int_{[\sigma_0,t)} g(c_j,s)du(s) + \lim_{t\to s_{j-1}+} \int_{[s_{j-1},t)} g(\varphi_k(s_{j-1}),s)du(s) \\
&= \lim_{t\to s_{j-1}+} \int_{[t,\sigma_0)} g(c_j,s)du(s) + \lim_{t\to s_{j-1}+} \int_{[s_{j-1},t)} g(\varphi_k(s_{j-1}),s)du(s) \\
&= \int_{[s_{j-1},\sigma_0)} g(\varphi_k(s),s)du(s).
\end{aligned}
$$

Portanto, a integral $\displaystyle\int_{s_{j-1}}^{\sigma_0} g(\varphi_k(s),s)du(s)$ existe e vale

$$
\int_{s_{j-1}}^{\sigma_0} g(\varphi_k(s),s)du(s) = \int_{s_{j-1}}^{\sigma_0} DG(\varphi_k(\tau),t).
$$

Novamente pelo Corolário 1.18, dado $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, para $\sigma_0 \in (s_{j-1},s_j)$, a integral $\displaystyle\int_{\sigma_0}^{s_j} DG(\varphi_k(\tau),t)$ existe e vale

$$
\int_{\sigma_0}^{s_j} DG(\varphi_k(\tau),t) = -G(c_j,\sigma_0) + \lim_{t\to s_j-} G(c_j,t) - \lim_{t\to s_j-} G(\varphi_k(s_j),t) + G(\varphi_k(s_j),s_j).
$$

Por outro lado,

$$
-G(c_j,\sigma_0) + \lim_{t\to s_j-} G(c_j,t) - \lim_{t\to s_j-} G(\varphi_k(s_j),t) + G(\varphi_k(s_j),s_j)
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{[t_0,\sigma_0)} g(c_j,s)du(s) + \lim_{t\to s_j-} \int_{[t_0,t)} g(c_j,s)du(s) - \lim_{t\to s_j-} \int_{[t_0,t)} g(\varphi_k(s_j),s)du(s) \\
&\quad + \int_{[t_0,s_j)} g(\varphi_k(s_j),s)du(s) = -\int_{[t_0,\sigma_0)} g(c_j,s)du(s) + \int_{[t_0,\sigma_0)} g(c_j,s)du(s) \\
&+ \lim_{t\to s_j-} \int_{[\sigma_0,t)} g(c_j,s)du(s) - \int_{[t_0,s_j)} g(\varphi_k(s_j),s)du(s) - \lim_{t\to s_j-} \int_{[s_j,t)} g(\varphi_k(s_j),s)du(s) \\
&+ \int_{[t_0,s_j)} g(\varphi_k(s_j),s)du(s) = \lim_{t\to s_j-} \int_{[\sigma_0,t)} g(c_j,s)du(s) - \lim_{t\to s_j-} \int_{[s_j,t)} g(\varphi_k(s_j),s)du(s)
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{t \to s_j -} \int_{[\sigma_0, t)} g(c_j, s) du(s) + \lim_{t \to s_j -} \int_{[t, s_j)} g(\varphi_k(s_j), s) du(s) = \int_{(\sigma_0, s_j]} g(\varphi_k(s), s) du(s).$$

Portanto a integral $\displaystyle\int_{\sigma_0}^{s_j} g(\varphi_k(s), s) du(s)$ existe e vale

$$\int_{\sigma_0}^{s_j} g(\varphi_k(s), s) du(s) = \int_{\sigma_0}^{s_j} DG(\varphi_k(\tau), t).$$

Observe, agora, que $G(\cdot, s)$ é contínua para qualquer $s \in [a, b]$, pois de (3.8) temos

$$\|G(x,t) - G(y,t)\| = \| \int_{t_0}^{t} g(x,s) du(s) - \int_{t_0}^{t} g(y,s) du(s) \| \leq \|x - y\| \int_{t_0}^{t} l_2(s) du(s).$$

Logo $\lim\limits_{k \to \infty} G(\varphi_k(s), s) = G(x(s), s)$ e, portanto,

$$\lim_{k \to \infty} \int_{t_0}^{t} g(\varphi_k(s), s) du(s) = \int_{t_0}^{t} g(x(s), s) du(s).$$

Por outro lado, pelo Teorema 1.16, temos $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} DG(x(\tau), t) = \lim_{k \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} DG(\varphi_k(\tau), t)$. Portanto

$$\int_{\alpha}^{\beta} DG(x(\tau), t) = \lim_{k \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} DG(\varphi_k(\tau), t)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi_k(s), s) du(s) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x(s), s) du(s),$$

e a prova está terminada. ■

Para $x \in \overline{B}_c$ e $t, t_0 \in [a, b]$, defina

$$F_1(x,t) = \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) ds \tag{3.12}$$

e

$$F_2(x,t) = \int_{t_0}^{t} g(x(s), s) du(s) \tag{3.13}$$

Logo, pela Proposição 3.3, existem h_1 e h_2 tal que $F_1 \in \mathcal{F}(\overline{B}_c \times [a,b], h_1)$ e $F_2 \in \mathcal{F}(\overline{B}_c \times [a,b], h_2)$, onde para F_1 tomamos $u(t) = t$.

Considerando

$$F(x,t) = F_1(x,t) + F_2(x,t) \tag{3.14}$$

temos $F \in \mathcal{F}(G, h)$, onde $h = h_1 + h_2$ satisfaz as condições da Definição 1.12.

3.3 Existência Local e Unicidade de Solução

Iniciamos esta seção com um teorema crucial para os resultados importantes deste trabalho. Tal teorema relaciona, de maneira biunívoca, as soluções da EDM $Dx = f(x,t) + g(x,t)Du$ com as soluções da EDOG $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$, onde F é dada por (3.14).

Teorema 3.5 ([16] - Teor. 5.17). *Uma função $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, $[\alpha, \beta] \subseteq [a,b]$, é uma solução da EDM*

$$Dx = f(x,t) + g(x,t)Du \tag{3.15}$$

em $[\alpha, \beta]$ se, e somente se, x for solução da EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t) \tag{3.16}$$

em $[\alpha, \beta]$ com a função F dada por (3.14).

Prova: Seja $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ uma solução da EDM (3.15), ou seja, para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$,

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} f(x(s), s)ds + \int_{s_1}^{s_2} g(x(s), s)du(s).$$

Assim toda solução da EDM (3.15) é de variação limitada. Logo $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ é o limite pontual de uma sequência de funções escada.

Para $F(x,t) = F_1(x,t) + F_2(x,t)$, onde

$$F_1(x,t) = \int_{t_0}^{t} f(x,s)ds \quad \text{e} \quad F_2(x,t) = \int_{t_0}^{t} g(x,s)du(s),$$

segue da discussão na seção anterior que $F \in \mathcal{F}(\overline{B}_c \times [a,b], h)$, onde $h = h_1 + h_2$ satisfaz as condições da Definição 1.12.

Pela Proposição 3.4, as integrais

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x(s), s)ds, \ \int_{\alpha}^{\beta} g(x(s), s)du(s), \ \int_{\alpha}^{\beta} DF_1(x(\tau), t) \text{ e } \int_{\alpha}^{\beta} DF_2(x(\tau), t)$$

existem e

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x(s), s)ds = \int_{\alpha}^{\beta} DF_1(x(\tau), t),$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x(s), s)du(s) = \int_{\alpha}^{\beta} DF_2(x(\tau), t).$$

Logo, para qualquer solução $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ da EDM (3.15) e quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$, temos

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} f(x(s), s)ds + \int_{s_1}^{s_2} g(x(s), s)du(s)$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} DF_1(x(\tau), t) + \int_{s_1}^{s_2} DF_2(x(\tau), t) = \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t).$$

Portanto $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ é solução da EDOG $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x, t)$ em $[\alpha, \beta]$.

Reciprocamente, seja $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ solução da EDOG $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x, t)$, onde $F(x, t) = F_1(x, t) + F_2(x, t)$ e F_1, F_2 são dadas por (3.12) e (3.13) respectivamente.

Como $F \in \mathcal{F}(\overline{B}_c \times [a, b], h)$, então $\|x(s_2) - x(s_1)\| \leq |h(s_2) - h(s_1)|$ e x é de variação limitada (veja Lema (1.14)). Logo $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ é o limite pontual de uma sequência de funções escada.

Fazendo novamente uso da Proposição 3.4, temos

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t) = \int_{s_1}^{s_2} DF_1(x(\tau), t) + \int_{s_1}^{s_2} DF_2(x(\tau), t)$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} f(x(s), s)ds + \int_{s_1}^{s_2} g(x(s), s)du(s),$$

e, portanto, $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ é solução da EDM (3.15). ∎

A seguir, daremos um exemplo, encontrado em [16], que relaciona uma certa EDM com sua EDOG correspondente de acordo com o teorema anterior.

Exemplo 3.6. *Considere a EDM*

$$Dx = 2(t + 1)^{-1}xDu, \qquad t \in [0, 2] \tag{3.17}$$

onde $u(t) = t$ para $t \in [0, 1]$ e $u(t) = t - 1$ para $t \in (1, 2]$. Vamos definir

$$F(x, t) = \int_0^t 2(s + 1)^{-1}xdu(s).$$

Então

$$F(x, t) = A(t)x,$$

onde

$$A(t) = \int_0^t 2(s + 1)^{-1}du(s) = \int_0^t 2(s + 1)^{-1}ds = 2\ln(t + 1)$$

para $t \in [0,1]$ *e*

$$A(t) = \int_0^1 2(s+1)^{-1}ds + \int_1^t 2(s+1)^{-1}du(s) =$$

$$2\ln 2 + 2\frac{1}{2}(u(1+) - u(1)) + \int_1^t 2(s+1)^{-1}ds = -1 + 2\ln(t+1)$$

para $t \in (1,2]$.

A EDOG associada a EDM (3.17) *tem a forma*

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x].$$

Se considerarmos o problema de valor inicial $x(0) = 0$ *para esta equação, então*

$$x(t) = 0 \text{ para } t \in [0,1],$$

$$x(1+) - x(1) = x(1)[A(1+) - A(1)] = -x(1),$$

isto é, $x(1+) = 0$, *e para* $t \in (1,2]$, *obtemos*

$$x(t) = x(1) + \int_1^t x(\tau)dA(\tau) = 2\int_1^t x(\tau)d\ln(1+\tau) = 2\int_1^t x(\tau)(1+\tau)^{-1}d\tau.$$

Portanto para $t \in (1,2]$ *a função* x *é solução do PVI*

$$\dot{y} = 2(1+t)^{-1}y, \qquad y(1) = 0$$

e $x(t) = y(t) = 0$ *para* $t > 1$. *A situação é diferente quando consideramos o PVI* $x(2) = 0$ *para esta equação.*

Como no caso anterior, temos

$$x(t) = 0 \text{ para } t \in [0,1],$$

pois para $t \in (1,2]$

$$x(t) = \int_2^t x(\tau)dA(\tau) = -2\int_t^2 x(\tau)(1+\tau)^{-1}d\tau.$$

Além disso, $x(1+) = 0$ *e*

$$0 = x(1+) = x(1) + x(1)[A(1+) - A(1)] = x(1) - x(1).$$

Isto significa que $x(1+) = 0$ *para todo possível valor de* $x(1) \in \mathbb{R}$*, e portanto, toda função* $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ *para o qual vale*

$$x(t) = x(1) - 2\int_1^t x(\tau)(1+\tau)^{-1}d\tau,$$

é solução da equação. Consequentemente

$$\dot{x}(t) = 2(t+1)^{-1}x(t), \qquad x(1) = c,\ c \in \mathbb{R}$$

e, portanto,

$$x(t) = \frac{(t+1)^2}{4}c, \qquad t \in [0,1]$$

onde $c \in \mathbb{R}$ *é arbitrário.*

Como consequência direta do Teorema 3.5 sobre a correspondência das soluções da EDM (3.15) e da EDOG (3.16), obtemos o resultado seguinte.

Teorema 3.7 (Existência local). *Sejam* f *e* g *satisfazendo as condições (3.3), (3.5), (3.7) e (3.4), (3.6), (3.8) respectivamente. Então existe* $\Delta > 0$ *tal que no intervalo* $[t_0, t_0 + \Delta]$ *existe uma única solução* $x : [t_0, t_0 + \Delta] \to \mathbb{R}^n$ *da EDM (3.15) satisfazendo a condição inicial* $x(t_0) = x_0$*.*

Prova: Suponhamos que f e g satisfazem as condições (3.3), (3.5), (3.7) e (3.4), (3.6), (3.8) respectivamente. Definindo $F(x,t) = \int_{t_0}^t f(x,t)ds + \int_{t_0}^t g(x,t)du(s)$, temos pela Proposição 3.3, $F \in \mathcal{F}(\overline{B}_c \times [a,b], h)$, para alguma $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ não-decrescente. Devido ao fato de u ser contínua à esquerda, h também será contínua à esquerda. Logo, pelo Teorema 1.19 sobre existência e unicidade de solução para EDOGs, existem $\Delta > 0$ e uma única solução para a EDOG $\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$ em $[x_0, x_0+\Delta]$ com $x(t_0) = x_0$. Portanto pelo Teorema 3.5 existe uma única solução para a EDM $Dx = f(x,t) + g(x,t)Du$ com $x(t_0) = x_0$. ■

Capítulo 4

Estabilidade para EDMs

Considere a EDM

$$Dx = f(x,t) + g(x,t)Du, \tag{4.1}$$

e também a EDM com perturbação

$$Dx = f(x,t) + g(x,t)Du + p(t), \tag{4.2}$$

onde f e g satisfazem as condições (3.3), (3.5), (3.7) e (3.4), (3.6), (3.8) respectivamente e $p : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ Lebesgue integrável e de variação limitada em $[t_0, t_1]$. Suponha também que $f(0,t) = 0 = g(0,t)$ para todo $t \in [a,b]$.

A seguir, vamos introduzir o conceito de estabilidade variacional para a solução trivial de (4.1), baseando-nos nas idéias de [11].

Definição 4.1. *Dizemos que a solução trivial $x \equiv 0$ de (4.1) é variacionalmente estável se para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que se*

$$\mathrm{var}_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right) < \delta,$$

$$\|y(t_0)\| < \delta,$$

então

$$\|y(t)\| < \epsilon, \qquad \text{para } t \in [t_0, t_1],$$

onde $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ é uma solução de (4.2) com $y(t_0) = y_0$, ou seja, y satisfaz a equação integral

$$x(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s), s)du(s) + \int_{t_0}^{t} p(s)ds,$$

para $t \in [t_0, t_1]$.

Observação: Observe que estabilidade variacional da solução trivial $x \equiv 0$ de (4.1) implica na estabilidade usual de $x \equiv 0$.

O teorema a seguir diz que os conceitos de estabilidade variacional da solução trivial da EDM (4.1) e da EDOG (4.3) abaixo, onde F é dado por (4.4), são equivalentes.

Teorema 4.2. *A solução trivial $x \equiv 0$ da EDM (4.1) é variacionalmente estável se, e somente se, a solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t), \tag{4.3}$$

onde

$$F(x,t) = \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s),s)du(s) \tag{4.4}$$

for variacionalmente estável.

Prova: Suponha que a solução trivial $x \equiv 0$ da EDM (4.1) é variacionalmente estável. Para mostar que a solução trivial da EDOG (4.3) é variacionalmente estável, mostremos que ela é estável em relação a pertubações.

Para $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ dado pela Definição 4.1. Seja $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ uma solução da equação perturbada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[F(x,t) + P(t)], \tag{4.5}$$

tal que $\|y(t_0)\| < \delta$ e $\operatorname{var}_{t_0}^{t_1} P < \delta$, onde $P(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} p(s)ds$.

Sendo y uma solução de (4.5), então y é de variação limitada em $[t_0, t_1]$. Observe que, de maneira análoga à demonstração do Teorema 3.5, pela Proposição 3.4, temos

$$y(s_2) - y(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(y(\tau),t) + P(s_2) - P(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(y(\tau),t) + \int_{s_1}^{s_2} p(s)ds$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} f(y(s),s)ds + \int_{s_1}^{s_2} g(y(s),s)du(s) + \int_{s_1}^{s_2} p(s)ds,$$

ou seja, y é solução da EDM com perturbação (4.2).

Então como a solução trivial $x \equiv 0$ da EDM (4.1) é variacionalmente estável e, portanto,

$$\|y(t,t_0,y_0)\| = \|y(t)\| < \epsilon, \qquad \text{para } t \in [t_0, t_1].$$

Logo, a solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG (4.3) é estável em relação a perturbações, o que implica, pelo Teorema 2.7, que a solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG (4.3) é variacionalmente estável.

Reciprocamente, suponhamos que a solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG (4.3) seja variacionalmente estável, o que implica que a solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG (4.3) é estável em relação a perturbações.

Seja, então, $\epsilon > 0$ dado e consideremos $\delta > 0$ dado pela Definição 2.4. Seja $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ solução da EDM perturbada (4.2) tal que

$$\mathrm{var}_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right) < \delta$$

e

$$\|y(t_0)\| < \delta.$$

Sendo y uma solução da EDM com perturbação (4.2), então y é solução da EDOG com perturbação (4.5), implicando que

$$\|y(t)\| < \epsilon, \qquad \text{para } t \in [t_0, t_1].$$

Logo a solução trivial $x \equiv 0$ da EDM (4.1) é variacionalmente estável. ■

Introduzimos, também, o conceito de solução trivial variacionalmente atratora para a EDM (4.1).

Definição 4.3. *Dizemos que a solução trivial $x \equiv 0$ de (4.1) é variacionalmente atratora, se existir $\delta_0 > 0$ e para qualquer $\epsilon > 0$, existirem $T = T(\epsilon)$ e $\rho = \rho(\epsilon) > 0$ tais que, se*

$$\mathrm{var}_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right) < \rho$$

e

$$\|y(t_0)\| < \delta_0,$$

então

$$\|y(t)\| < \epsilon, \qquad \textit{para } t \in [t_0, t_1] \cap [t_0 + T(\epsilon), \infty),$$

onde $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ é uma solução de (4.2) com a condição inicial $y(t_0) = y_0$, ou seja, y satisfaz a equação integral

$$x(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s), s)du(s) + \int_{t_0}^{t} p(s)ds,$$

para $t \in [t_0, t_1]$.

Teorema 4.4. *A solução trivial $x \equiv 0$ da EDM (4.1) é variacionalmente atratora se, e somente se, a solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG (4.3) for variacionalmente atratora.*

Prova: Suponha que a solução trivial $x \equiv 0$ da EDM (4.1) é variacionalmente atratora. Para mostrar que a solução trivial da EDOG (4.3) é variacionalmente atratora, mostremos que ela é atratora em relação a pertubações.

Pela Definição 4.3, existe $\delta_0 > 0$ e para $\epsilon > 0$, sejam $T \geq 0$ e $\rho > 0$. Seja $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ solução da EDOG perturbada (4.5).

Como anteriormente, temos

$$y(s_2) - y(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(y(\tau), t) + P(s_2) - P(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(y(\tau), t) + \int_{s_1}^{s_2} p(s)ds$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} f(y(s), s)ds + \int_{s_1}^{s_2} g(y(s), s)du(s) + \int_{s_1}^{s_2} p(s)ds,$$

ou seja, y é solução da EDM com perturbação (4.2).

Como a solução trivial $x \equiv 0$ da EDM (4.1) é variacionalmente atratora, temos também

$$\|y(t, t_0, y_0)\| = \|y(t)\| < \epsilon, \qquad \text{para } t \in [t_0, t_1] \cap [t_0 + T(\epsilon), \infty),$$

e, portanto, a solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG (4.3) é atratora em relação a perturbações, o que implica, pelo Teorema 2.7, que a solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG (4.3) é variacionalmente estável.

Reciprocamente, suponha que a solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG (4.3) seja variacionalmente atratora, o que implica que a solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG (4.3) é atratora em relação a perturbações.

Pela Definição 2.2, existe $\delta_0 > 0$ e para $\epsilon > 0$, sejam $T \geq 0$ e $\rho > 0$. Seja $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ uma solução da EDOG perturbada (4.5) tal que

$$\mathrm{var}_{t_0}^{t_1} P < \delta_0,$$

e

$$\|y(t_0)\| < \rho,$$

onde $P(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} p(s)ds$.

Sendo y solução da EDOG com perturbação (4.5), então y é solução da EDM com perturbação (4.2), o que implica que

$$\|y(t)\| < \epsilon, \qquad \text{para } t \in [t_0, t_1] \cap [t_0 + T(\epsilon), \infty).$$

Logo a solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG (4.3) é variacionalmente estável. ∎

Definição 4.5. *Dizemos que a solução trivial $x \equiv 0$ de (4.1) é variacionalmente assintoticamente estável, se ela for variacionalmente estável e variacionalmente atratora.*

Como consequência direta dos Teoremas 4.2 e 4.4, podemos enunciar o resultado seguinte.

Teorema 4.6. *A solução trivial $x \equiv 0$ da EDM (4.1) é variacionalmente assintoticamente estável se, e somente se, a solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG (4.3) for variacionalmente assintoticamente estável.*

4.1 Teoremas do Tipo Lyapunov e do Tipo Lyapunov Inversos

Utilizando os resultados da seção anterior e o Teorema 3.5, conseguimos resultados análogos aos Teoremas 2.11, 2.12, 2.19 e 2.20, mas para a EDM (4.1).

Apresentamos, inicialmente, os teoremas do tipo Lyapunov para EDM (4.1) que tratam de condições suficientes para a estabilidade variacional e estabilidade variacionalmente assintótica da solução trivial. Tais condições envolvem a existência de um funcional de Lyapunov $V : [0,\infty) \times \overline{B_a} \to \mathbb{R}$.

Teorema 4.7. *Assuma que $V : [0,\infty) \times \overline{B_a} \to \mathbb{R}$, $0 < a < c$, $\overline{B_a} = \{y \in \mathbb{R}^n, \|y\| \leq a\}$ é tal que para todo $x \in \overline{B_a}$, a função $V(\cdot, x)$ é contínua à esquerda. Assuma ainda que existe uma função real contínua e crescente $b : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $b(\rho) = 0$ se, e somente se, $\rho = 0$, e além disso, para quaisquer $t \in [0,\infty)$ e $x, y \in \overline{B_a}$, valem*

$$V(t,x) \geq b(\|x\|), \tag{4.6}$$

$$V(t,0) = 0 \tag{4.7}$$

e

$$|V(t,x) - V(t,y)| \leq K\|x - y\|,\ K > 0 \text{ constante.} \tag{4.8}$$

Se a função $V(t, x(t))$ for não-crescente ao longo de cada solução $x(t)$ da EDM $Dx = f(x,t) + g(x,t)Du$, então sua solução trivial $x \equiv 0$ será variacionalmente estável.

Prova: Sejam V como na hipótese e $x(t)$ uma solução da EDM $Dx = f(x,t) + g(x,t)Du$. Então, pelo Teorema 3.5, $x(t)$ é solução da EDOG $\dfrac{dx}{d\tau} = F(x,t)$, onde $F(x,t) =$

$\int_{t_0}^{t} f(x(s),s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s),s)du(s)$. Logo, pelo Teorema 2.11, a solução $x \equiv 0$ da EDOG $\frac{dx}{d\tau} = F(x,t)$ é variacionalmente estável e, daí, o resultado segue pelo Teorema 4.2. ■

Analogamente à demonstração do Teorema 4.7, podemos demonstrar o próximo resultado aplicando os Teoremas 2.12 e 4.6.

Teorema 4.8. *Seja $V : [0,\infty) \times \overline{B_a} \to \mathbb{R}$, $0 < a < c$, $\overline{B_a} = \{y \in \mathbb{R}^n, \|y\| \leq a\}$ tal que para todo $x \in \overline{B_a}$, a função $V(\cdot, x)$ é contínua à esquerda. Assuma ainda que existe uma função real contínua e crescente $b : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $b(\rho) = 0$ se, e somente se, $\rho = 0$, e além disso, para quaisquer $t \in [0,\infty)$ e $x, y \in \overline{B_a}$, valem*

$$V(t,x) \geq b(\|x\|), \tag{4.9}$$

$$V(t,0) = 0 \tag{4.10}$$

e

$$|V(t,x) - V(t,y)| \leq K\|x-y\|,\ K > 0 \text{ constante.} \tag{4.11}$$

Se para toda solução $x : [t_0, t_1] \to \overline{B_a}$, $[t_0, t_1] \subset [0,\infty)$ de (4.1) valer a desigualdade

$$\dot{V}(t,x(t)) = \limsup_{\eta \to 0+} \frac{V(t+\eta, x(t+\eta)) - V(t,x(t))}{\eta} \leq -\Phi(x(t)), \qquad t \in [t_0, t_1] \tag{4.12}$$

onde $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua, com $\Phi(0) = 0$, $\Phi(x) > 0$ para $x \neq 0$, então a solução trivial $x \equiv 0$ de (4.1) será variacionalmente-assimptoticamente estável.

Agora, apresentaremos os teoremas do tipo Lyapunov inversos. Estes teoremas tratam de estabelecer as "recíprocas" dos teoremas anteriores (Teoremas 4.7 e 4.8).

Teorema 4.9. *Se a solução trivial $x \equiv 0$ da EDM (4.1) for variacionalmente estável, então para todo $0 < a < c$ existe um funcional $V : [0,\infty) \times B_a \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:*

(1) *existe uma função real contínua e crescente $b : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $b(\rho) = 0$ se, e somente se, $\rho = 0$ e $V(t,x) \geq b(\|x\|)$ para todo par $(t,x) \in [0,\infty) \times B_a$;*

(2) *$V(t,0) = 0$, para todo $t \in [0,\infty)$;*

(3) *$|V(t,x) - V(t,y)| \leq \|x-y\|$ para $x, y \in B_a$, $t \in [0,\infty)$;*

(4) *a função $V(\cdot, x)$ é contínua à esquerda e localmente de variação limitada em $[0,\infty)$;*

(5) *a função V é não-crescente ao longo de cada solução $x(t)$ da EDM (4.1).*

Prova: Suponhamos que a solução trivial $x \equiv 0$ da EDM (4.1) é variacionalmente estável. Então, pelo Teorema 4.2, a solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$, onde $F(x,t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x(s),s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s),s)du(s)$ também é variacionalmente estável. Portanto pelos Teoremas 2.19 e 3.5, existe um funcional $V : [0,\infty) \times B_a \to \mathbb{R}$ satisfazendo as propriedades de (1) a (5). ■

Analogamente, podemos demonstrar o próximo resultado aplicando os Teoremas 4.6, 2.20 e 3.5.

Teorema 4.10. *Se a solução trivial da EDM (4.1) for variacionalmente assintoticamente estável, então para todo $0 < a < c$ existirá uma função $U : [0,\infty) \times B_a \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:*

(1) *existe uma função real contínua e crescente $b : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $b(\rho) = 0$ se, e somente se, $\rho = 0$ e $U(t,x) \geq b(\|x\|)$ para todo par $(t,x) \in [0,\infty) \times B_a$;*

(2) $U(t,0) = 0$, *para todo $t \in [0,\infty)$;*

(3) $|U(t,x) - U(t,y)| \leq \|x - y\|$, *para $x, y \in B_a$, $t \in [0,\infty)$;*

(4) *a função $U(\cdot,x)$ é contínua à esquerda e $U(\cdot,x)$ é localmente de variação limitada em $[0,\infty)$;*

(5) *para toda solução $x(s)$ da EDM (4.1) definida para $s \geq t$, onde $x(t) = z \in B_a$, vale a relação*

$$\dot{U}(t,x(t)) = \limsup_{\eta \to 0+} \frac{U(t+\eta, x(t+\eta)) - U(t,z))}{\eta} \leq -U(t,z). \tag{4.13}$$

Capítulo 5

Um Caso Especial

No capítulo anterior, estabelecemos condições suficientes para a estabilidade variacional da solução trivial $x \equiv 0$ da EDM (4.1), através de um funcional de Lyapunov. Neste capítulo, sendo $A(t)$ uma matriz $n \times n$, contínua em $[0, \infty)$ e $p : [t_0, t_1] \subseteq [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ Lebesgue integrável e de variação limitada, provamos que, sob certas condições, dada uma solução da equação

$$\dot{x} = A(t) + p(t) \tag{5.1}$$

que é estável no sentido usual, então existirá um solução da equação

$$Dy = A(t)y + g(y,t)Du + h(y,t)Du + p(t) \tag{5.2}$$

que também será estável no sentido usual.

A fim de obtermos tais resultados, estabelecemos uma fórmula da variação das constantes para a solução da equação $Dy = A(t)y + g(y,t)Du + p(t)$ em relação à solução da equação (5.1) e, mais geralmente, da solução de (5.2) em relação à solução de (5.1). Também utilizamos o Princípio de Seleção de Helly e o Teorema do ponto fixo de Krasnoselskii.

Isto quer dizer que, se consideramos o caso particular da EDM $Dx = f(x,t) + g(x,t)Du + h(y,t)Du$ em que $f(x,t) = A(t)x$, sob a hipótese adicional de que a variação da integral indefinida $\displaystyle\int_{t_0}^{t} p(s)ds$ é pequena, segue da definição de estabilidade variacional que, dada uma solução da equação

$$\dot{x} = A(t)x,$$

que é variacionalmente estável, existirá uma solução da equação

$$Dy = A(t)y + g(y,t)Du + h(y,t)Du$$

que também é variacionalmete estável.

Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, g, h definidas em $[0,\infty) \times B_a$ com valores em $\mathbb{R}^n$, $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua à esquerda em $(0,\infty)$ e de variação limitada em $[0,\infty)$ e $p : [t_0, t_1] \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ Lebesgue integrável e de variação limitada.

Considere as seguintes equações:

$$\dot{z} = A(t)z \tag{5.3}$$

$$\dot{x} = A(t)x + p(t) \tag{5.4}$$

$$Dy = A(t)y + g(y,t)Du + p(t) \tag{5.5}$$

$$Dy = A(t)y + g(y,t)Du + h(y,t)Du + p(t) \tag{5.6}$$

Teorema 5.1 (Fórmula da Variação das Constantes). *Se $y : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ é tal que $y(t_0) = x_0$ e*

$$y(t) = x(t) + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)g(y(s), s)du(s),$$

onde $x(t)$ é solução de (5.4), passando por (x_0, t_0) em $[\alpha, \beta]$ e $X(t)$ é a matriz fundamental de (5.3), então y é solução de (5.5).

Prova: Primeiramente observe que, sendo $x(t)$ solução de (5.4), então

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)p(s)ds.$$

Sabemos também que y será uma solução de (5.5) se, e somente se, y satisfizer a seguinte equação integral

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)y(s)ds + \int_{t_0}^{t} g(y(s), s)du(s) + \int_{t_0}^{t} p(s)ds.$$

Observe que

$$\int_{t_0}^{t} A(s)y(s)ds = \int_{t_0}^{t} A(s)\left\{x(s) + \int_{t_0}^{s} X(s)X^{-1}(k)g(y(k),k)du(k)\right\} ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} A(s)\left\{x(s)\right\} ds + \int_{t_0}^{t} A(s)\left\{\int_{t_0}^{s} X(s)X^{-1}(k)g(y(k),k)du(k)\right\} ds.$$

Porém

$$\int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds = \int_{t_0}^{t} A(s)\left\{X(s)X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{s} X(s)X^{-1}(k)p(k)dk\right\} ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} A(s)\left\{X(s)X^{-1}(t_0)x_0\right\} ds + \int_{t_0}^{t} A(s)\left\{\int_{t_0}^{s} X(s)X^{-1}(k)p(k)dk\right\} ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} A(s)\left\{X(s)X^{-1}(t_0)x_0\right\} ds + \int_{t_0}^{t} A(s)X(s)\left\{\int_{t_0}^{s} X^{-1}(k)p(k)dk\right\} ds.$$

Tem-se também que

$$A(s)X(s)X^{-1}(t_0) = A(s)X(s,t_0) = \frac{d}{ds}X(s,t_0) = \frac{d}{ds}(X(s)X^{-1}(t_0)).$$

Logo

$$\int_{t_0}^{t} A(s)\left\{X(s)X^{-1}(t_0)x_0\right\} ds = \int_{t_0}^{t} d(X(s)X^{-1}(t_0))x_0 = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 - x_0.$$

Definindo $Y(s) = \displaystyle\int_{t_0}^{s} X^{-1}(k)p(k)dk$, temos

$$\int_{t_0}^{t} A(s)X(s)Y(s)ds = \int_{t_0}^{t} dX(s)Y(s) = X(t)Y(t) - X(t_0)Y(t_0) - \int_{t_0}^{t} X(s)dY(s).$$

Como $Y(t_0) = 0$ e $\displaystyle\int_{t_0}^{t} X(s)dY(s) = \int_{t_0}^{t} p(s)ds$, chegamos

$$\int_{t_0}^{t} A(s)X(s)Y(s)ds = X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)p(s)ds - \int_{t_0}^{t} p(s)ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)p(s)ds - \int_{t_0}^{t} p(s)ds.$$

Portanto

$$\int_{t_0}^{t} A(s)\left\{x(s)\right\} ds = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 - x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)p(s)ds - \int_{t_0}^{t} p(s)ds.$$

De maneira análoga mostra-se que

$$\int_{t_0}^{t} A(s)\left\{\int_{t_0}^{s} X(s)X^{-1}(k)g(y(k),k)du(k)\right\} ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)g(y(s),s)du(s) - \int_{t_0}^{t} g(y(s),s)du(s).$$

Assim

$$x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)y(s)ds + \int_{t_0}^{t} g(y(s),s)du(s) + \int_{t_0}^{t} p(s)ds$$

$$= x_0 + X(t)X^{-1}(t_0)x_0 - x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)p(s)ds - \int_{t_0}^{t} p(s)ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)g(y(s),s)du(s) - \int_{t_0}^{t} g(y(s),s)du(s) + \int_{t_0}^{t} g(y(s),s)du(s) + \int_{t_0}^{t} p(s)ds$$

$$= X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)p(s)ds + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)g(y(s),s)du(s)$$

$$= x(t) + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)g(y(s),s)du(s) = y(t).$$

■

Mais geralmente, vale o seguinte resultado cuja prova segue analogamente à prova do Teorema 5.1.

Teorema 5.2. *Se $y : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ é tal que $y(t_0) = x_0$ e*

$$y(t) = x(t) + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)g(y(s),s)du(s) + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)h(y(s),s)du(s),$$

onde $x(t)$ é solução de (5.4), passando por (x_0,t_0) em $[\alpha,\beta]$ e $X(t)$ é a matriz fundamental de (5.3), então y é solução de (5.6).

Observação: Se considerarmos $f(x,t) = A(t)x+p(t)$ tal que f e g satisfazem as condições (3.3), (3.5), (3.7) e (3.4), (3.6) e (3.8) respectivamente, então pela unicidade da solução da EDM $Dx = f(x,t) + g(x,t)Du$, concluímos que toda solução de (5.5) é da forma

$$y(t) = x(t) + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)g(y(s),s)du(s),$$

onde $x(t)$ é solução de (5.4), passando por (x_0, t_0) em $[\alpha, \beta]$ e $X(t)$ é a matriz fundamental de (5.3).

Considere as seguintes hipóteses adicionais para nossa próxima discussão.

(H_1) para $t \in [\alpha, \beta]$ fixo, $X(t)X^{-1}(s)$ é integrável em relação a u e

$$\sup_{t\geq t_0}\sup_{\pi}\left[\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_{t_0}^{\alpha_{i-1}}|X(\alpha_i)-X(\alpha_{i-1})||X^{-1}(s)|dv_u(s)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i}|X(\alpha_i)X^{-1}(s)|dv_u(s)\right\}\right]\leq a_0<\infty,$$

onde $\pi : t_0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = t$ é uma partição de $[t_0, t]$.

(H_2) $z \to g(z, t)$ é uma aplicação contínua de $BV([\alpha, \beta])$ em $BV([\alpha, \beta])$ e $z_k \to z$ pontualmente quando $k \to \infty$ implica $g(z_k(t), t) \to g(z(t), t)$ uniformemente em $t \in [\alpha, \beta]$.

O resultado seguinte generaliza o Teorema 3.3 de [15].

Teorema 5.3. *Considere as equações* (5.4) *e* (5.6) *e as hipóteses* (H_1) *e* (H_2)*. Assuma também que*

(i) *$g(z, t)$, $h(z, t)$ são integráveis em relação a u e $g(0, t) \equiv 0 \equiv h(0, t)$;*

(ii) *para cada $\gamma > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que*

$$|g(z, t)| \leq \gamma |z|$$

uniformemente em $t \geq t_0$, sempre que $|z| \leq \delta$;

(iii) *para cada $\xi > 0$, existe um $\eta > 0$ tal que*

$$|h(z_1, t) - h(z_2, t)| \leq \xi |z_1 - z_2|$$

uniformemente em $t \geq t_0$, sempre que $|z_1| \leq \eta$ e $|z_2| \leq \eta$.

Se $x \in BV([\alpha, \beta])$ for uma solução de (5.4), então existirá $\epsilon_0 > 0$ com a seguinte propriedade: para qualquer ϵ tal que $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, existe um $\delta_0 > 0$ correspondente tal que, sempre que $\|x\|_{BV} \leq \delta_0$, existe pelo menos uma solução $z(t)$ de (5.6) tal que $z \in BV([\alpha, \beta])$ e $\|z\|_{BV} \leq \epsilon$.

Prova: Dado a_0 da hipótese (H_1), fixe um $\xi > 0$ tal que $\xi a_0 < 1$ e escolha um $\eta > 0$ tal que se $|z_1| \leq \eta$, $|z_2| \leq \eta$, então $|h(z_1, t) - h(z_2, t)| \leq \xi |z_1 - z_2|$ uniformemente em t.

Seja $\gamma = \dfrac{(1-\xi a_0)}{2a_0}$. Para este γ, seja um $\gamma > 0$ tal que vale (ii). Seja $\epsilon_0 = \min\{\eta, \delta\}$. Para qualquer $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, defina

$$S(\epsilon) = \{z \in BV([\alpha, \beta]); \|z\|_{BV} \leq \epsilon\}.$$

Observe que $S(\epsilon)$ é um subconjunto fechado e convexo de $BV([\alpha, \beta])$ em relação a norma $\|\cdot\|_{BV}$. Defina operadores P e Q em $S(\epsilon)$ por

$$(Pz)(t) = x(t) + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)g(z(s), s)du(s), \tag{5.7}$$

$$(Qz)(t) = \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)h(z(s), s)du(s). \tag{5.8}$$

Para $z_1, z_2 \in S(\epsilon)$, temos

$$\begin{aligned}\|Pz_1 + Qz_2\|_{BV} \leq \|x\|_{BV} + \sup_{t\geq t_0}\sup_{\pi}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\bigg(\int_{t_0}^{t}|X(t_i) - X(t_{i-1})||X^{-1}(s)|\gamma|z_1(s)|dv_u(s)\\
+ \int_{t_{i-1}}^{t_i}|X(t_i)X^{-1}(s)|\gamma|z_1(s)|dv_u(s)\bigg)\Bigg]\\
+ \sup_{t\geq t_0}\sup_{\pi}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\bigg(\int_{t_0}^{t}|X(t_i) - X(t_{i-1})||X^{-1}(s)|\gamma|z_2(s)|dv_u(s)\\
+ \int_{t_{i-1}}^{t_i}|X(t_i)X^{-1}(s)|\gamma|z_2(s)|dv_u(s)\bigg)\Bigg] \leq \delta_0 + \gamma\epsilon a_0 + \xi\epsilon a_0 < \epsilon,\end{aligned}$$

sempre que $\delta_0 < \left(\dfrac{\epsilon}{2}\right)(1-\xi a_0)$. Isto mostra que $Pz_1 + Qz_2 \in S(\epsilon)$ para todo $z_1, z_2 \in S(\epsilon)$.

Como

$$\|Qz_1 - Qz_2\|_{BV} \leq \xi a_0 \|z_1 - z_2\|_{BV}$$

junto com o fato de que $\xi a_0 < 1$, concluímos que Q é uma contração em $S(\epsilon)$.

Mostremos, agora, que P é completamente contínua. Para isso, considere uma sequência $\{z_k\}$ em $S(\epsilon)$. Então $\{z_k\}$ é uniformemente limitado e de variação limitada uniforme. Pelo Princípio da Seleção de Helly, existe uma subsequência $\{z_{k_j}\}$ a qual converge pontualmente para algum $z^* \in S(\epsilon)$.

Consequentemente, temos

$$\|Pz_{k_j} - Pz^*\|_{BV} = \|\int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)(g(z_{k_j}(s), s) - g(z^*(s), s))du(s)\|_{BV}$$

$$\leq \sup_{t\geq t_0}\sup_{\pi}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{t}|X(t_i)-X(t_{i-1})||X^{-1}(s)||g(z_{k_j}(s),s)-g(z^*(s),s)|dv_u(s)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{t_{i-1}}^{t_i}|X(t_i)X^{-1}(s)||g(z_{k_j}(s),s)-g(z^*(s),s)|dv_u(s)\right)\right]$$
$$\leq \sup_{s\in[t_0,\infty)}|g(z_{k_j}(s),s)-g(z^*(s),s)|a_0 \to 0 \text{ quando } j\to\infty.$$

Assim P aplica subconjuntos limitados de $S(\epsilon)$ em subconjuntos relativamente compactos. Logo P é completamente contínua. Uma simples aplicação do Teorema do ponto fico de Krasnoselskii nos dá a conclusão desejada. ■

Corolário 5.4. *Nas condições do Teorema 5.3, se a solução trivial de* (5.3) *for variacionalmente estável, então a solução trivial de* (5.6) *também será variacionalmente estável.*

Referências Bibliográficas

[1] B. Oyediran, On military model for impulsive reinforcement functions using exclusion and marginalization techniques. Nonlinear Anal. 35 (1999), no. 8, Ser. B: Real World Applications, 947-958.

[2] Dong Yue and Shifan Xu, Robust control of uncertain measure differential systems withdelay: Riccati-like approach, IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, 1997. 'Computational Cybernetics and Simulation'., 5 (1997), 4332-4336.

[3] G. N. Silva and R. B. Vintere, Optimal impulsive control problems with state constraints, Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control, San Antonio, Texas, 4 (1993), 3811-3812.

[4] Guan, Zhi Hong; Liu, Yong Qing The stability properties of nonlinear measure large scale systems with impulse effect. (English summary) Comput. Math. Appl. 28 (1994), no. 9, 89-99.

[5] J. Persson, Fundamental theorems for linear measure differential equations. *Math. Scand.* 62(1), (1988), 19-43.

[6] K. P. C. Das; J.R.R. Sharma, Existence and stability of measure differential equations. *Czechoslovak Math. J.* 22(97), (1972), 145-158.

[7] L. Garcia, Teoremas do Tipo Lyapunov para equações diferenciais em medida, Atas do 66º Seminário Nacional de Análise (2007).

[8] Liu, Yong Qing; Guan, Zhi Hong; Wen, Xiang Cai, The application of auxiliary simultaneous equations to the problem in the stabilizations of singular and impulsive large scale systems. (English summary) IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl. 42 (1995), no. 1, 46-51.

[9] M. Federson, S. Schwabik, A new approach to impulsive retarded differential equations: stability results, pré-print.

[10] M. Federson, S. Schwabik, Generalized ODEs approach to impulsive retarded functional differential equations, *Differential and Integral Equations.*, 19(11), (2006), 1201-1234.

[11] M. Federson; Š. Schwabik, Stability for retarded functional differential equations, Ukrainian Math J., aceito.

[12] M. Frasson, *Sistemas Impulsivos do Ponto de Vista das Equações Diferenciais em Medida*, Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, 2000.

[13] S. Leela, Asymptotically self invariant sets and perturbed systems. Ann. Mat. Appl. (4) 92 (1972), 85-93.

[14] S. Leela, Stability of measure differential equations. *Pacific J. Math.* 55, (1974), 489-498.

[15] S.G. Pandit, S.G. Deo, *Differential Systems Involving Impulses.* Lecture Notes in Mathematics, 954. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

[16] Š. Schwabik, *Generalized Ordinary Differential Equations*, World Scientific, Series in Real Anal., vol. 5, 1992.

[17] Š. Schwabik, Variational stability for generalized ordinary differential equations, *Časopis Pěst. Mat.* 109(4), (1984), 389-420.

[18] S.G. Pandit; S.G. Deo, Stability and asymptotic equivalence of measure differential equations. *Nonlinear Anal.* 3(5), (1979), 647-655.

[19] V. Sree Hari Rao, Asymptotically self-invariant sets and stability of measure differential equations. Nonlinear Anal. 2 (1978), no. 4, 483-489.

[20] W.W. Schmaedeke, Optimal control theory for nonlinear vector differential equations containing measures. *J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control* 3 (1965), 231-280.