
Geração de colunas para o problema de
dimensionamento de lotes com limitações
de capacidade

Tamara Angélica Baldo

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 16 de abril de 2009

Assinatura: _____

Geração de colunas para o problema de dimensionamento de lotes de produção com limitações de capacidade

Tamara Angélica Baldo

Orientador: *Prof. Dr. Marcos Nereu Arenales*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências de Computação e Matemática Computacional.

USP - São Carlos

Abril/2009

*Aos meus pais Denivaldo e Francisca
e à minha irmã Thaísa*

Agradecimentos

É uma tarefa difícil expressar em palavras o quão importante são todos aqueles que colaboraram e me apoiaram, direta e/ou indiretamente, para desenvolvimento deste trabalho. Mas vou tentar!

Vou começar por agradecer àqueles que são de suma importância para mim, não só por me conceder a vida, mas também pelos constantes ensinamentos de amor, de confiança, de companheirismo, enfim por tudo que sou e pelo apoio incondicional em toda minha trajetória, assim, primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais, Denivaldo Baldo e Francisca Pinheiro da Silva Baldo. À minha irmã, Thaísa Aparecida Baldo, que juntamente com meus pais sempre esteve ao meu lado. Resumindo, meus primeiros agradecimentos vão à minha família por todo apoio, compreensão, carinho, atenção, conselho e incentivo durante toda a minha vida e principalmente nestes dois últimos anos aqui em São Carlos.

A Deus por estar sempre ao meu lado.

Ao meu orientador Marcos Nereu Arenales pela paciência, conselhos e constante apoio. À professora Maristela Santos pelo tempo dispendido de atenção, conselho, incentivo, bronca, amizade, enfim por tudo, pois com certeza é uma grande colaboradora deste trabalho.

Aos companheiros do LOT (laboratório de otimização do ICMC - USP, São Carlos): Adriana, Aline, Carla, Claudia, Douglas, Edilaine, Guilherme, Kelly, Lana, Márcio Belo, Márcio Carmona, Mariá, Pedro, Renato, Scheila e Victor, pela parceria desde os momentos de descontração aos de estudo. Em especial, gostaria de agradecer aos meus amigos Victor e Márcio Belo e ao nosso São Paulo Futebol Clube, reunidos e torcendo, sempre acompanhados da chapa.

Ao Rafael Cuenca (Gardenal) e às nossas inúmeras horas estudando Álgebra Linear e Introdução à Otimização, aos vários cafés na cantina com direito a bate-papo, e, ainda, aos momentos de lazer.

À minha amiga e psicóloga particular (brincadeira) Josiane Bocchi (Josi). Poderia passar páginas e páginas escrevendo o quanto a nossa amizade é importante para mim, mas para não ficar enfadonho, não farei.

Aos professores e funcionários do ICMC que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste. Em especial aos professores Franklina e Alysson.

À FAPESP pelo apoio financeiro desde o segundo semestre de 2007 e ao CNPq pela colaboração no primeiro semestre de 2007.

Resumo

O problema de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade (CLSP) consiste em determinar um plano de produção que satisfaça a demanda requerida, respeitando as limitações de capacidade, com o menor custo possível, ou seja, minimizando os custos de produção, estocagem e preparação de máquina. Encontrar uma solução factível para o CLSP, considerando tempo de preparação de máquina, é NP-completo. Nesta dissertação, para a resolução do CLSP, utiliza-se a decomposição de Dantzig-Wolfe e o procedimento de geração de colunas, encontrando bons limitantes inferiores. Duas diferentes estratégias de decomposição são exploradas, decomposição por itens e períodos. Para a obtenção de uma solução inteira para o problema (limitante superior) foram exploradas heurísticas lagrangianas, onde a solução inicial para as heurísticas provém da geração de colunas. Os limitantes obtidos podem ser utilizados em métodos exatos, como por exemplo, em algoritmos do tipo *branch-and-price*. Experimentos computacionais, baseados em exemplares gerados aleatoriamente, foram realizados e os resultados analisados, as variações dos parâmetros das instâncias foram sugeridas na literatura.

Abstract

The Capacitated Lot Sizing Problem (CLSP) consists in determining a production plan such that all demands are met and the total costs of production, inventory and setup are minimized. Since the problem to find a feasible solution to the CLSP with setup times is NP-complete, large problem instances have been solved by heuristic methods. In this dissertation, we are particularly concerned in using the methodology of Dantzig-Wolfe decomposition and column generation to generate good bounds to the CLSP with setup times and costs. Here, we analyse two types of decomposition which are based on items and time periods (lower bound) and some lagrangian-based heuristics (upper bound). Numerical results based on randomly generated instances suggest that highquality lower bounds are obtained by column generation algorithms, such as well as upper bounds by heuristics. These bounds are useful in exact solution methods, such as branch-and-price algorithms.

Sumário

Resumo	i
Abstract	iii
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	4
1.2 Organização da Monografia	5
2 O problema de dimensionamento de lotes	7
2.1 Introdução	7
2.2 Problema de dimensionamento de lotes monoestágio	9
2.3 Problema de dimensionamento de lotes multiestágio	13
3 Métodos de solução	17
3.1 Introdução	17
3.2 Geração de colunas	19
3.2.1 Revisão dos trabalhos de Manne (1958) e Degraeve e Jans (2007)	20
3.2.2 Decomposição por item	24
3.2.3 Decomposição por períodos	26
3.3 Heurísticas lagrangianas	29
3.3.1 O método heurístico de Trigeiro et al. (1989)	30
3.3.2 O método heurístico de Araujo & Arenales (2000)	33
3.4 Uma abordagem combinada	36
3.4.1 Método A	36
3.4.2 Método B	38
4 Experimentos computacionais	41
4.1 Geração de dados	41

4.2	Resultados computacionais	43
4.2.1	Limitante inferior	45
4.2.2	Limitante superior	50
5	Conclusões e Perspectivas Futuras	57

Lista de Figuras

1.1	Hierarquia do PCP.	2
1.2	<i>Caracterização dos Modelos big bucket problems e small bucket problems (adaptada de Suerie & Stadler (2003)).</i>	4
2.1	<i>Dimensionamento de lote representado por fluxos em rede (modelo (2.1) – (2.4)).</i>	10
2.2	<i>Tipos de estrutura dos produtos em modelos multiestágios.</i>	13
4.1	<i>Gráfico de desempenho dos algoritmos para encontrar o limitante inferior.</i>	49
4.2	<i>Gráfico de desempenho dos algoritmos HA, HB, HC e HD.</i>	53
4.3	<i>Gráfico de desempenho dos algoritmos HE, HF, HG e HH.</i>	54
4.4	<i>Gráfico de desempenho dos algoritmos para encontrar o limitante superior.</i>	54

Lista de Tabelas

3.1	Método A: limitantes inferiores	37
3.2	Método A: limitantes superiores	38
3.3	Método B: limitante inferior	39
3.4	Método B: limitantes superiores	39
4.1	Intervalos considerados para a geração dos dados.	42
4.2	Geração dos dados para as classes de problemas.	43
4.3	Métodos implementados para encontrar limitantes inferiores.	45
4.4	Tempo médio de execução de cada algoritmo para encontrar o limitante inferior (capacidade normal).	47
4.5	Tempo médio de execução de cada algoritmo para encontrar o limitante inferior (capacidade apertada).	48
4.6	GAP médio, tempo médio e total de exemplares factíveis encontrados por V1, V2 e V3.	50
4.7	Métodos implementados para encontrar o limitante superior.	50
4.8	Tempo médio de execução de cada heurística para encontrar o limitante superior (capacidade normal).	51
4.9	Tempo médio de execução de cada heurística para encontrar o limitante superior (capacidade apertada).	52
4.10	GAP médio, tempo médio e total de exemplares factíveis encontrados por HA, HB, HC, HD, HE, HF, HG, HH, HT e HS.	55
4.11	GAP e número de exemplares factíveis encontrados por V1 e HC.	56

Introdução

Nas últimas décadas, o aumento no consumo de produtos industrializados acarretou no crescimento do volume da produção e, conseqüentemente, gerou a necessidade de um bom gerenciamento do processo produtivo (conversão de matérias primas em produtos finais).

O planejamento e o controle da produção (PCP) tem o intuito de garantir o processo produtivo eficiente e que produza bens e serviços conforme requeridos pelos consumidores (Slack et al., 2002). O PCP teve seus primeiros passos advindos, principalmente, da indústria automobilística, mais precisamente com a reorganização da indústria de Henry Ford para fabricação do automóvel Modelo T, em 1908.

O planejamento pode ser decomposto em três níveis (veja Figura 1.1):

- **Estratégico (longo prazo):** responsável pela definição dos objetivos mais gerais da empresa e está sob responsabilidade da alta direção. As decisões tomadas neste nível envolvem altos investimentos e estão relacionadas com as decisões estratégicas da empresa (onde abrir uma nova loja, sugestão de novo *layout* da indústria, entre outros);
- **Tático (médio prazo):** está relacionado com a utilização efetiva de recursos existentes, com o objetivo de cumprir as metas determinadas no planejamento estratégico. Decisões típicas deste nível incluem contratação de recursos humanos, planejamento da produção na semana ou mês, aquisição de estoques, manutenção de máquina, definição dos meios de distribuição e seleção dos transportes alternativos;
- **Operacional (curto prazo):** está relacionado ao dia-a-dia da produção. Tem como objetivo definir as prioridades de produção do nível anterior, normalmente diárias ou emergenciais,

respeitando as limitações (mão-de-obra, capacidade de material, tempo, máquinas, entre outras).

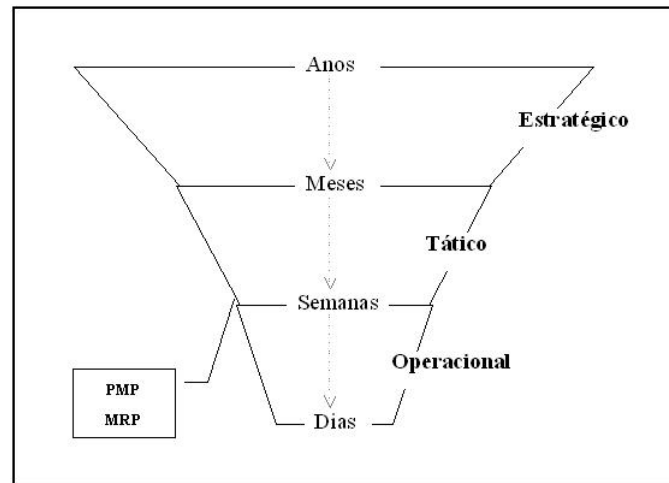


Figura 1.1: Hierarquia do PCP.

O plano mestre de produção (PMP) ou simplificado plano de produção, marca a transição entre o nível tático e o operacional, em que se estabelece a quantidade de produtos finais a serem produzidos em cada período, o início/fim de cada lote, a seqüência de fabricação dos lotes e a quantidade de recurso necessária para a produção. O plano das necessidades de materiais (MRP) (sigla do inglês *material resource planning*), está intimamente vinculado ao PMP, pois é responsável por descrever a estrutura do produto, a produção ou aquisição, para satisfazer a demanda sobre um tempo médio do horizonte de tempo de forma a satisfazer o PMP. Assim, com as informações provindas do PMP, o MRP fornece um planejamento sincronizado da produção dos itens finais e de seus componentes, informando a quantidade específica a ser produzida (ou comprada) em cada período de tempo ao longo do horizonte de planejamento, de forma a atender a demanda prevista em cada período. Entretanto, existem limitações na abordagem tradicional de um sistema MRP. Estas limitações estão relacionadas com a utilização da capacidade e com os custos envolvidos. Um sistema MRP pode utilizar módulos para verificar se um plano de produção está satisfazendo as capacidades disponíveis. Porém, estes módulos apenas informam que os recursos disponíveis estão excedidos, devendo assim ser feito um remanejamento de parte da produção ou adicionar mais capacidade para se ajustar ao plano. Além disto, os planos de produção fornecidos pelos sistemas MRP não são projetados com o objetivo de alocar os recursos eficientemente no sentido de obter um plano com o menor custo possível, ou seja, não são considerados os custos envolvidos na produção, no estoque e na preparação das máquinas (Shapiro, 1993; Santos, 2000).

O problema de dimensionamento de lotes (*lot sizing*) com limitações de capacidade tenta superar as limitações de um sistema MRP. Em outras palavras, seu objetivo é determinar um plano de produção de forma a minimizar os custos envolvidos, sujeito a um conjunto de restrições que

incluem as limitações dos recursos disponíveis. Os custos envolvidos podem ser os custos de produção, estoque e de preparação das máquinas. O custo de preparação é um custo fixo que deve ser considerado quando houver a decisão de produzir um determinado lote de um item, em uma determinada máquina, num determinado período. Para levar em conta os recursos, supõe-se que estes são consumidos na produção e preparação das máquinas, podendo ser renováveis ou não.

O tempo em que a produção irá acontecer, ou seja, o horizonte de planejamento, pode ser finito ou infinito. No horizonte de tempo finito há limitações de tempo para produção e, normalmente, a demanda é dinâmica (varia com o tempo); enquanto que o horizonte de planejamento infinito não possui limite de tempo e ainda possui demanda estacionária (fixa). O horizonte de planejamento pode ser dividido em intervalos de tempo menores, chamados períodos. De acordo com estes períodos, os problemas podem ser classificados em duas categorias:

- *big bucket problems*: cujos períodos de tempo são longos e pode produzir múltiplos itens a cada período;
- *small bucket problems*: os períodos de tempo são curtos e podem produzir um (ou no máximo dois) tipo de item a cada período. Normalmente apresentam uma preparação de máquina por período. A seqüência em que os produtos serão produzidos são claramente definidos, assim como o seqüenciamento de máquinas necessário para que a produção de um determinado item ocorra.

A Figura 1.2 ilustra um sistema produtivo com períodos de tempo de produção longos (*big bucket problem*) e curtos (*small bucket problem*). Na figura, o eixo y ilustra a capacidade consumida para a produção dos itens em cada período e o eixo x , os períodos do horizonte de planejamento (Suerie & Stadler, 2003). Assim, observe que para o sistema *big bucket problem*, os períodos são mais longos (eixo x dividido em apenas 5 períodos) e há produção de vários itens a cada período (eixo y). No sistema *small bucket problem* os períodos são curtos (eixo x dividido em 10 períodos) e há produção de no máximo dois tipos de itens a cada período.

Dependendo da estrutura dos itens demandados, a produção pode acontecer em um único estágio (monoestágio) ou em vários estágios (multiestágio). Na produção monoestágio, a demanda é classificada como independente, pois cada item produzido é um item final que suprirá a demanda, ou seja, os itens não dependem da produção de nenhum componente (peça) intermediário. Na produção multiestágio, um item final é composto por vários componentes intermediários, portanto, a produção de um item final depende da fabricação de seus componentes. Cada peça intermediária pode possuir ou não demanda dependente.

Em um sistema de produção, os recursos disponíveis podem ser utilizados para a produção dos itens, mas também consumidas para as preparações das máquinas. Quando não existem limitações dos recursos, o problema monoestágio com vários itens pode ser visto como vários subproblemas com um único item. Já no problema multiestágio esta decomposição por itens não é possível. Uma maneira elegante de se obter esta decomposição para o caso multiestágio é reformular o problema em termos de estoque de escalão.

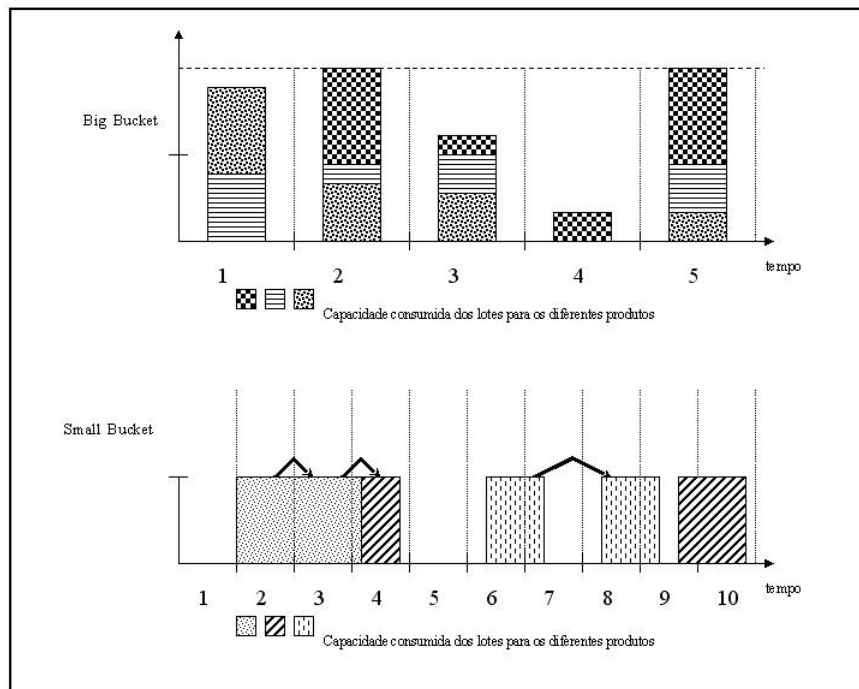


Figura 1.2: Caracterização dos Modelos big bucket problems e small bucket problems (adaptada de Suerie & Stadler (2003)).

1.1 Objetivos

O problema de dimensionamento de lotes com limitações de capacidade é um problema de programação inteiro misto. Esta classe de problema é difícil de ser resolvida na otimalidade ou próxima da otimalidade. Assim, a possibilidade de utilizar métodos heurísticos e de (re)formular tal problema pode reduzir drasticamente o caminho para se chegar a uma solução de boa qualidade. Um exemplo de reformulação é a decomposição de Dantzig-Wolfe (Dantzig & Wolfe, 1960, 1961). Vários autores utilizam a técnica de decomposição de Dantzig-Wolfe para resolução do problema em questão, dentre eles pode-se citar Jans & Degraeve (2004), Pimentel et al. (2006) e Degraeve & Jans (2007).

Na literatura, métodos exatos e métodos heurísticos são encontrados para a resolução do problema de dimensionamento de lotes com restrição de capacidade. Dentre os métodos exatos, pode-se citar os trabalhos de Pimentel et al. (2006) e de Degraeve & Jans (2007), os quais propõem algoritmos do tipo *branch-and-price*. Dentre os métodos heurísticos destacamos os trabalhos de Trigeiro et al. (1989) e Araujo & Arenales (2000).

Pimentel et al. (2006) propõem dois tipos de decomposição baseados no princípio de Dantzig-Wolfe: a decomposição por item e a decomposição por período. Estes problemas reformulados são resolvidos por meio da técnica de geração de colunas. A geração de colunas não garante que a solução encontrada seja inteira, portanto, um procedimento do tipo *branch-and-price* é proposto para obter a solução exata. Degraeve & Jans (2007) propõem uma nova reformulação da decom-

posição por item e também a resolveram usando a técnica de geração de colunas e o *branch-and-price* para obter soluções inteiras.

Trigeiro et al. (1989) propõem um algoritmo heurístico, baseado na relaxação lagrangiana. Araujo & Arenales (2000) consideram o procedimento de Trigeiro et al. (1989) e fazem melhorias, obtendo resultados ligeiramente melhores que Trigeiro et al. (1989) sob determinadas condições.

A proposta desta dissertação consiste em reescrever o problema de dimensionamento de lotes de produção monoestágio com restrições de capacidade por meio do método de decomposição de Dantzig-Wolfe por itens e por períodos, aplicar a geração de colunas ao problema decomposto e utilizar procedimentos heurísticos para obter uma solução inteira durante e/ou no fim do processo de geração de colunas. Além disso, pode-se analisar os limitantes obtidos pela decomposição por itens e por período, como feito por Degraeve & Jans (2007) e Pimentel (2005) que utilizam outros procedimentos para obtenção de uma solução inteira factível, podendo assim, obter bons limitantes.

1.2 Organização da Monografia

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

No Capítulo 2 são apresentados modelos matemáticos para problemas de dimensionamento de lotes (monoestágio e multiestágio) e alguns trabalhos relacionados.

No Capítulo 3 são abordados alguns métodos de solução para o problema de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade e, também, encontra-se as nossas propostas de métodos para obter limitantes e soluções factíveis.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos na resolução do problema utilizando a nova proposta e a comparação com alguns métodos da literatura.

A conclusão do trabalho e algumas perspectivas futuras estão presentes no Capítulo 5.

O problema de dimensionamento de lotes

2.1 Introdução

O problema de dimensionamento de lotes consiste em planejar a quantidade de itens a ser produzida em cada período ao longo de um horizonte de tempo finito, de modo a atender uma certa demanda, respeitando-se capacidades, e otimizando uma função objetivo (por exemplo, minimizar custos). Os custos envolvidos podem ser os custos de produção, estoque e de preparação de máquina (*setup cost*). Os itens a serem produzidos podem dividir recursos comuns, sendo estes recursos, na maioria das vezes escassos (capacidade limitada). Considera-se que os recursos são consumidos para produção e para preparação das máquinas (*setup time*). A consideração dos custos e tempos de preparação faz com que o problema seja formulado como um problema de programação inteira mista de difícil resolução.

Quando os custos de preparações das máquinas são irrelevantes (baixos se comparados com os custos de produção e estoque) e os tempos das preparações são desprezíveis quando comparados ao tempo de produção, o problema é modelado como um programa linear e pode ser considerado de fácil resolução.

Um estudo fundamental sobre modelos de dimensionamento de lotes é o trabalho (clássico) de Wagner & Whitin (1958). Neste trabalho os autores consideram a produção de um único item e assumem o horizonte de planejamento finito dividido em vários períodos discretos. Além disso, consideram os custos de estoque, preparação e o preço de venda do item. Os custos de produção

e de compra são constantes para todos os períodos e apenas os custos de estoque podem variar, sendo a demanda determinística e dinâmica.

Para os modelos abordados neste trabalho, considere o horizonte de planejamento finito e, ainda, os dados:

- n : número total de itens finais a serem produzidos;
- T : número total de períodos do horizonte de planejamento;
- d_{it} : quantidade demandada do item i no período t ;
- a_{it} : quantidade de recursos necessários para produzir um item i no período t ;
- C_t : quantidade de recursos disponíveis no período t ;
- b_{it} : quantidade de recursos necessários para a preparação para a produção do item i no período t ;
- q_{it} : custo da preparação para produção do item i no período t ;
- c_{it} : custo de produzir uma unidade do item i no período t ;
- h_{it} : custo de estocagem de uma unidade do item i no final do período t ;
- f_i : penalidade para utilização do estoque inicial de uma unidade do item i .

Sendo as variáveis:

- v_i : quantidade de estoque inicial de itens i ;
- x_{it} : quantidade do item i produzida no período t ;
- I_{it} : quantidade estocada do item i no final do período t ;
- $y_{it} : \begin{cases} 1 & \text{se o item } i \text{ é produzido no período } t, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Nas próximas seções encontram-se os modelos matemáticos para problemas de dimensionamento de lotes monoestágio e multiestágio.

2.2 Problema de dimensionamento de lotes monoestágio

Em um sistema de produção monoestágio, os itens a serem produzidos são independentes, isto é, a produção de um determinado item não depende da produção prévia de outro item e, portanto, se não houver restrições de capacidade, as decisões de dimensionamento de lotes podem ser tomadas item a item em cada período de tempo. O período de tempo considerado para o problema pode ser semanas ou meses (*big bucket problem*).

O problema com um único item, sem limitações de capacidade, pode ser resolvido otimamente por meio do algoritmo de programação dinâmica desenvolvido por Wagner & Whitin (1958), para o qual vários métodos heurísticos foram desenvolvidos, como, por exemplo, heurística do custo unitário mínimo, que obtém soluções de boa qualidade. Cabe salientar que, apesar de sua simplicidade, este problema é de grande importância, visto que muitos problemas complexos podem ser relaxados tendo como resultado vários subproblemas mais simples, iguais a este.

Quando são considerados vários itens ((2.1)-(2.4)), sem restrições de capacidade, tem-se a extensão do problema anterior (também denotado na literatura de modelo de Wagner-Whitin), o qual pode ser resolvido otimamente aplicando o algoritmo de Wagner & Whitin (1958), para cada item separadamente. Deste modo, ao considerar o problema monoestágio sem limitações de capacidade podemos decompô-lo em n subproblemas independentes e resolvê-los otimamente.

Um modelo para a produção de itens, monoestágio, sem limitações de capacidade, é dado:

Minimizar

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (q_{it}y_{it} + h_{it}I_{it} + c_{it}x_{it}) \quad (2.1)$$

Sujeito a:

$$I_{it} = I_{i,t-1} + x_{it} - d_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (2.2)$$

$$x_{it} \leq \left(\sum_{j=t}^T d_{ij} \right) y_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (2.3)$$

$$x_{it} \geq 0; I_{it} \geq 0; y_{it} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (2.4)$$

O objetivo deste problema é minimizar o custo de preparação, de estocagem e de produção, dado por (2.1). Em (2.2) estão as equações de balanço de estoque para cada item que garantem que as quantidades estocadas em cada período devem ser iguais às quantidades em estoque do período anterior, adicionadas às produções no período e subtraídas às demandas para o referido período. As inequações (2.3) asseguram que se houver produção ($x_{it} > 0$), então, $y_{it} = 1$. As restrições (2.4) forçam a não negatividade das variáveis x e I e, y binário. A não negatividade de I com as restrições (2.2) garantem que as demandas são atendidas sem atraso. Este problema sempre

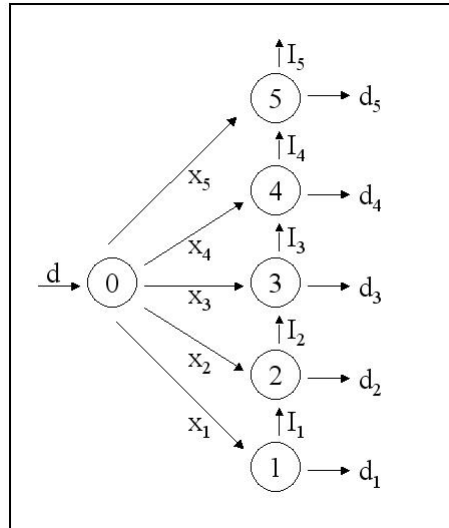


Figura 2.1: Dimensionamento de lote representado por fluxos em rede (modelo (2.1) – (2.4)).

tem solução, independentemente do estoque inicial, como, por exemplo, a solução lote-por-lote ($x_{it} = d_{it}$, $t = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, n$).

O problema anterior pode ser ilustrado conforme a Figura 2.1. Esta figura mostra uma rede para um único item e 5 períodos. O fluxo sobre cada arco $(0, t)$ corresponde à variável x_t (produção no período t) e tem associado um custo no fluxo de c_t . Se a variável $x_t > 0$, então haverá um custo fixo q_t associado. O fluxo sobre o arco $(t, t + 1)$ corresponde à variável de estoque I_t e tem custos unitários de fluxo h_t (Degraeve & Jans, 2007). Os arcos de saída de cada nó correspondem às demandas d_t de cada período. Uma boa revisão sobre o problema de dimensionamento de lotes monoestágio, especialmente para um único item, pode ser encontrada em Brahimi et al. (2006).

Ao analisarem tal problema (com $n = 1$ e custos constantes), Wagner & Whitin (1958) mostram um teorema (que ficou conhecido como propriedade de Wagner-Whitin), que guiou os autores a apresentarem um algoritmo de programação dinâmica para resolver o problema em $O(T^2)$.

Em 1958, Manne propôs uma formulação eficiente para o problema de múltiplos itens com restrição de capacidade apresentada a seguir:

Minimizar

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (q_{it}y_{it} + h_{it}I_{it} + c_{it}x_{it}) \quad (2.5)$$

Sujeito a:

$$I_{it} = I_{i,t-1} + x_{it} - d_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (2.6)$$

$$\sum_{i=1}^n (b_{it}y_{it} + a_{it}x_{it}) \leq C_t \quad t = 1, \dots, T \quad (2.7)$$

$$x_{it} \leq \min \left\{ \frac{C_t - b_{it}}{a_{it}}, \sum_{j=t}^T d_{ij} \right\} y_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (2.8)$$

$$x_{it} \geq 0; I_{it} \geq 0; y_{it} \in \{0, 1\} \quad (2.9)$$

As restrições (2.7) são acrescentadas ao modelo anterior e garantem que o recurso disponível no período seja respeitado. Em (2.8), $\min \left\{ \frac{C_t - b_{it}}{a_{it}}, \sum_{j=t}^T d_{ij} \right\}$ poderia ser substituído por M , sendo $M > 0$ um número grande. Entretanto, o limitante superior para o lote foi apertado pois a produção (x) será no máximo o total da demanda do período corrente até o final do horizonte de planejamento ou utilizará toda a capacidade disponível no período.

Alguns autores, para evitar o problema de não factibilidade durante o procedimento de resolução do problema, consideram a possibilidade de um estoque inicial. Para isso, acrescentam a variável de estoque inicial (v_i) às restrições (2.6) e, ainda, o termo $\sum_{i=1}^n f_i v_i$ à função objetivo, em que f_i possui um valor muito grande, assim v_i terá valor diferente de zero apenas quando o problema original não tiver solução factível.

Florian et al. (1980) mostraram que quando o tempo de preparação de máquina é considerado, encontrar a solução ótima para o problema, com um único item, é *NP-hard*. Bitran & Yanasse (1982) ressaltam vários casos de problemas com um único item que podem ser resolvidos em tempo polinomial, entretanto ao adicionar o segundo item o problema é *NP-hard*. E, em Maes et al. (1991), quando considerado limitações de recursos, o problema é NP-completo. Por isso, os procedimentos de resolução para o problema de dimensionamento de lotes com limitações de capacidade são, na grande maioria, heurísticos.

Nos trabalhos seguintes encontram-se procedimentos heurísticos de resolução para problema de dimensionamento de lotes monoestágio com múltiplos itens e com limitações de capacidade: Trigeiro et al. (1989), Araujo & Arenales (2000), Diaby et al. (1992), Toledo (1998) e Suerie & Stadler (2003).

O método heurístico proposto por Trigeiro et al. (1989), mesmo após décadas, ainda é muito estudado e utilizado para a resolução do problema em questão devido à sua eficiência, rapidez e, de certa forma, simplicidade. Araujo (1999) e Araujo & Arenales (2000) propuseram uma pequena modificação no método proposto por Trigeiro et al. (1989).

Tonaki & Toledo (2008) abordam o problema de dimensionamento de lotes com limitações de capacidade aplicado a fundições de pequeno porte, um estudo de caso numa empresa do interior do estado de São Paulo, buscando um plano de produção de ligas metálicas e peças com o menor custo,

atendendo a demanda dos itens sem exceder a capacidade do forno. Este trabalho decompõe o modelo proposto por Araujo et al. (2008) em dois subproblemas menores: um para a produção das ligas metálicas e um para a produção dos itens (peças metálicas). Os subproblemas são resolvidos utilizando heurísticas lagrangianas.

Toledo & Armentano (2006) consideram um problema com várias máquinas, relaxam as restrições de capacidade e propõem uma heurística para a resolução do problema relaxado. A solução inicial é obtida por meio da minimização do problema lagrangiano, normalmente infactível, realiza-se deslocamento da produção entre períodos e máquinas na tentativa de factibilizá-la, pois deslocam a produção que excede a capacidade, procurando soluções factíveis que minimizam o custo.

Dentre os métodos exatos para o problema monoestágio, podemos citar Diaby et al. (1992), Chung et al. (1994) e Toledo (1998), os quais propõem algoritmos do tipo *branch-and-bound*. Métodos exatos do tipo *branch-and-price* para o problema foram propostos por Pimentel et al. (2006) e Degraeve & Jans (2007).

Os problemas de programação inteiro misto de grandes dimensões são, em geral, difíceis de serem resolvidos na otimalidade ou próximo da otimalidade. A possibilidade de (re)formular tais problemas pode “reduzir” drasticamente o caminho para se chegar à uma solução. Infelizmente, alguns destes avanços ou sofisticadas reformulações não são genéricas, no sentido que elas dependem de uma estrutura específica no problema para sua aplicabilidade. Em outras palavras, a identificação da estrutura no planejamento da produção é importante durante a construção do modelo, especificamente para usar técnicas de reformulação (Pochet & Wolsey, 2006).

A decomposição de Dantzig & Wolfe (1960) consiste em reescrever as variáveis do problema como combinação convexa de pontos extremos (e raios extremos, se existirem) de um subconjunto do conjunto de restrições do problema original.

Pimentel (2005) trata em sua dissertação de mestrado do problema de lotes de produção de múltiplos itens com restrições de capacidade considerando tempo e custo de preparação, utilizando a decomposição de Dantzig & Wolfe (1960) e a geração de colunas. Algumas idéias do trabalho de Pimentel (2005) foram baseados no trabalho de Jans (2002), porém, consideram outra decomposição não abordada em Jans (2002). Em Jans (2002) e Degraeve & Jans (2007) apresentam um algoritmo *branch-and-price* e discutem a formulação proposta por Manne (1958).

O algoritmo *branch-and-price* consiste no algoritmo *branch-and-bound*, onde é resolvido um problema linear a cada nó por meio de geração de colunas. A utilização dos métodos do tipo *branch-and-bound* combinado com geração de colunas é relativamente recente e revisões podem ser encontradas em Barnhart et al. (1998) e Lübbeck & Desrosiers (2005).

A seguir apresentamos uma modelagem para o problema multiestágio e discutimos alguns trabalhos relacionados.

2.3 Problema de dimensionamento de lotes multiestágio

O problema de dimensionamento de lotes multiestágio ocorre quando um item final possui itens predecessores, que também devem ser programados para produção ou compra. Os itens finais possuem suas próprias demandas, chamadas demandas independentes, enquanto que os itens predecessores possuem demanda dependente (utilizados como componentes de outros itens) e demanda independente.

A dependência entre os itens são facilmente visualizadas utilizando a estrutura de produto. Estas estruturas de produto são usualmente classificadas como em Pochet & Wolsey (2006) (veja a Figura 2.2):

- serial: todos itens possuem apenas um sucessor e um predecessor;
- montagem: um item pode ter mais de um predecessor mas um único sucessor;
- estrutura geral: número indefinido de sucessores e predecessores para todos os itens.

A estrutura do processo de produção multiestágio pode ser representada por um grafo orientado $G(V,E)$, em que os nós V representam o conjunto de itens e, os arcos E representam as relações entre eles. O arco (i, j) existe quando o item j depende da produção do item i , ou seja, j é um sucessor imediato do item i e $i > j$ (na estrutura do produto os itens são numerados de 1 a n , de itens finais a matérias primas).

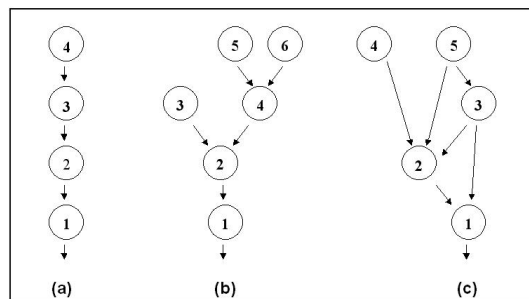


Figura 2.2: Tipos de estrutura dos produtos em modelos multiestágios.

Para a apresentação do modelo matemático, considere os seguintes dados adicionais:

- p_{ij} : número de itens i necessários para a produção do item j ;
- S_i : conjunto de sucessores imediatos do item i ;

O modelo matemático:

Minimizar

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (q_{it}y_{it} + h_{it}I_{it} + c_{it}x_{it}) \quad (2.10)$$

Sujeito a:

$$I_{it} = I_{i,t-1} + x_{it} - \sum_{j \in S_i} (p_{ij} x_{jt}) - d_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (2.11)$$

$$\sum_i^n (b_{it} y_{it} + a_{it} x_{it}) \leq C_t \quad t = 1, \dots, T \quad (2.12)$$

$$x_{it} \leq \min \left\{ \frac{C_t - b_{it}}{a_{it}}, \sum_{j=t}^T d_{ij} \right\} y_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (2.13)$$

$$x_{it} \geq 0; I_{it} \geq 0; y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (2.14)$$

Este problema é semelhante ao problema (2.5)-(2.9), diferindo-se apenas em (2.11), pois há a inclusão da produção dos itens intermediários.

Existem vários trabalhos sobre técnicas de resolução para o problema de dimensionamento de lotes multiestágio considerando variações na estrutura do produto e/ou na limitação de capacidade. Dentre as muitas pesquisas que envolvem este problema, destacamos as seguintes: Billington et al. (1986), Billington et al. (1995), Maes & Wassenhove (1991), Berretta (1997), Clark & Armentano (1995), Afentakis et al. (1984), França et al. (1997) e Santos (2000).

Billington et al. (1983) fazem uma breve revisão bibliográfica para o problema multiestágio e apresentam abordagens de como um método pode reduzir o tamanho do problema sem perder otimalidade. Um método *branch-and-bound* com heurísticas é proposto resolvendo o problema em apenas um estágio (considerando limitações de capacidade, custo e tempo de preparação). Uma heurística lagrangiana é utilizada para resolver o problema de dimensionamento de lotes, utilizando um procedimento de factibilização, quando a restrição de capacidade não é satisfeita.

Billington et al. (1986) apresentam um método heurístico baseado na relaxação lagrangiana para problemas de dimensionamento de lotes multiestágio que possui um gargalo para a produção. Um gargalo é um centro de trabalho que limita a produção para um sistema. O método heurístico tem duas fases de soluções, o dual e o primal. Na fase dual do procedimento, os custos implícitos de preparação e produção são determinados baseados no seqüenciamento. A fase primal será repetida com estes novos custos até encontrar uma boa solução. A solução do procedimento é primeiro testada em dois casos especiais: no problema com e sem limitações de capacidade e no problema monoestágio com múltiplos itens. Os resultados mostram que as soluções dos procedimentos podem fornecer soluções melhores que algumas heurísticas designadas especialmente para os problemas conhecidos para a época. Os resultados obtidos para o problema com um gargalo indicam que boas soluções factíveis são encontradas.

Em Afentakis et al. (1984) o problema de dimensionamento de lotes sem limitações de capacidade é reformulado em termos de estoque de escalão, o que simplificou sua decomposição por itens. Neste trabalho foi desenvolvido um algoritmo *branch-and-bound*, em que os limitantes são gerados pela resolução do problema lagrangiano.

Em Clark & Armentano (1995) é apresentada uma heurística para a resolução do problema multiestágio com a capacidade para produção e preparação limitada e *lead times* não nulos (*lead time* é o tempo decorrido entre o instante em que se formaliza uma solicitação e o instante em que o que foi solicitado se torna disponível). O modelo considerado foi formulado utilizando o conceito de estoque de escalão. A heurística consiste na aplicação seqüencial do algoritmo de Wagner-Whitin (Wagner & Whitin, 1958) ao problema sem restrições de capacidade e, em seguida, executa-se transferências de uma certa quantidade de produção entre períodos com o objetivo de obter a factibilidade. Em França et al. (1997) é desenvolvida uma heurística baseada na apresentada em Clark & Armentano (1995) para o problema com os *lead times* nulos. A heurística é composta por quatro procedimentos, solução inicial, factibilização, alteração e melhoria. Os testes executados mostraram que os resultados obtidos em Clark & Armentano (1995) foram melhorados.

Tempelmeier & Derstroff (1996) apresentam um procedimento baseado na relaxação lagrangiana das restrições de capacidade e de balanço de estoque. O problema considerado neste trabalho difere de Billington et al. (1986), pois consideraram restrições de capacidade em todas operações (níveis). Com a relaxação destas restrições, se obtém um problema decomponível por item, o qual pode ser resolvido eficientemente por um algoritmo de programação dinâmica, para obtenção de um limitante inferior para o problema. O procedimento para obtenção de uma solução factível parte de uma solução inicial, a qual é factível para as restrições de balanço de estoques, executando transferências de produção dos recursos com sobrecarga, em determinados períodos. Como o subproblema tornou-se excessivamente relaxado, Tempelmeier & Derstroff (1996) adicionava uma restrição. Santos (2000) mostrou que este procedimento é equivalente à tradicional relaxação lagrangiana, aplicada ao problema reformulado por estoque de escalão.

Métodos de solução

3.1 Introdução

O problema de dimensionamento de lotes, tratado nesta dissertação, considera restrições de capacidade, tempo e custo de preparação de máquina e horizonte de planejamento finito com períodos discretos. A demanda para cada item é conhecida ao longo do horizonte de planejamento. Para a produção de cada item utiliza-se os mesmos recursos renováveis. Estes recursos possuem capacidade finita em cada período, lembrando que as máquinas precisam ser preparadas antes do início da produção. Para o detalhamento dos métodos de solução, a modelagem matemática é novamente apresentada:

Minimizar

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (q_{it}y_{it} + h_{it}I_{it} + c_{it}x_{it}) \quad (3.1)$$

Sujeito a:

$$I_{it} = I_{i,t-1} + x_{it} - d_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^n (b_{it}y_{it} + a_{it}x_{it}) \leq C_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3.3)$$

$$x_{it} \leq \min \left\{ \frac{C_t - b_{it}}{a_{it}}, \sum_{j=t}^T d_{ij} \right\} y_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (3.4)$$

$$x_{it} \geq 0; I_{it} \geq 0; y_{it} \in \{0, 1\} \quad (3.5)$$

Os trabalhos pioneiros relativos a métodos de resolução para (3.1)-(3.5) atribui-se a Manne (1958), Dzielinski & Gomory (1965) e Ladson & Terjung (1971). Pela dificuldade de resolução exata e, ainda, de extrema importância no nível tático do PCP (como também na resolução de problemas mais complexos), o problema de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade tem sido objeto de estudo de muitos autores. Devido à dificuldade de resolução do problema original, vários trabalhos utilizam reformulação ou ainda técnicas de relaxação, e heurísticas com o intuito de encontrar uma solução de boa qualidade em um tempo computacional razoável.

Em 1958, com o trabalho proposto por Manne, surgem as primeiras propostas de decomposição para o problema e esta decomposição foi popularizada por Dantzig & Wolfe (1960) para problemas de otimização linear de grande porte.

A decomposição proposta por Dantzig & Wolfe (1960), conhecida na literatura como decomposição de Dantzig-Wolfe, consiste em reformular o problema linear de grande dimensão, representando as variáveis como combinação convexa de pontos e raios extremos de um subconjunto de restrições. Assim, parte das restrições são trabalhadas em subproblemas e cria-se um problema equivalente, reduzindo-se consideravelmente o número de restrições e, conseqüentemente, diminuindo o tamanho da matriz básica.

Para problemas de dimensionamento de lotes com limitações de capacidade, Manne (1958) foi o pioneiro a tratar as restrições de capacidade (3.3) como sendo de acoplamento responsáveis pela complexidade de tal problema e, que se ignoradas, o problema pode ser visto como vários problemas de dimensionamento de lotes para um único item sem restrição de capacidade. Dzielinski & Gomory (1965) consideraram o problema decomposto por Manne (1958) com algumas modificações e aplicaram o algoritmo de programação dinâmica proposto por Wagner & Whitin (1958) para a sua resolução. Desde então, há autores que citam que o modelo proposto por Manne (1958) pode ser considerado como o problema mestre da decomposição de Dantzig & Wolfe (1960) aplicado a problemas de dimensionamento de lotes com limitações de capacidade, sendo as restrições de capacidade as de acoplamento. Jans (2002) e Degraeve & Jans (2007) mostram que esta afirmação não é totalmente verdade, propondo uma nova reformulação para o problema.

Em Degraeve & Jans (2007) encontra-se um estudo mostrando que a abordagem de decomposição proposta por Manne (1958) apresenta algumas falhas e que não exploram toda a região de factibilidade do problema original e, com isso, propuseram uma nova reformulação em que, agora, incluem todos os pontos da região de factibilidade, revisado na próxima seção.

Analisando as restrições (3.2)-(3.5), o subconjunto formado por (3.2), (3.4) e (3.5) pode ser considerado simples. Assim, considerando-se todas as possíveis soluções deste subconjunto, o problema pode ser reformulado, reescrevendo as variáveis como combinação convexa destas soluções e substituindo-as nas restrições (3.3). O problema reformulado é chamado de problema mestre. Esta é uma aplicação comum na literatura de Dantzig-Wolfe para a resolução do problema de dimensionamento de lotes de produção com limitações de capacidade (Pimentel et al., 2006; Degraeve & Jans, 2007).

Pimentel et al. (2006) utilizam, também, uma outra decomposição em que consideram as possíveis soluções do subconjunto (3.3)-(3.5), isto é, um problema de mochila para cada período t ($t = 1, \dots, T$). As restrições de balanço de estoque (3.2) definem o problema mestre.

A utilização da decomposição de Dantzig & Wolfe (1960), seja por item ou por período, para a reformulação do problema de dimensionamento de lotes com limitações de capacidade e resolução utilizando a geração de colunas, não garante que a solução encontrada seja ótima (resolve uma relaxação do problema original), o que justificaria a utilização de um procedimento heurístico para aproximar a solução encontrada na geração de colunas a uma solução inteira factível para o problema, ou ainda, a utilização do método *branch-and-price* para a obtenção da solução inteira.

Para a resolução do problema (3.1)-(3.5) existe, na literatura, vários procedimentos heurísticos, dos quais destacamos as heurísticas lagrangianas, que, normalmente, dualizam as restrições de capacidade. Trabalhos que utilizam a relaxação lagrangiana são os de Trigeiro et al. (1989), Araujo (1999), Araujo & Arenales (2000), entre outros. Os autores estudaram o problema (3.1)-(3.5), onde relaxaram as restrições de capacidade (3.3) e resolveram o problema utilizando heurísticas lagrangianas. Os trabalhos de Trigeiro et al. (1989) e Araujo & Arenales (2000) são revisados nas próximas seções.

3.2 Geração de colunas

A decomposição de Dantzig-Wolfe utilizada conjuntamente com a geração de colunas é considerada uma combinação de sucesso para resolução de problemas lineares e de programação inteira. Para um mesmo problema, há várias possibilidades de decomposição que podem ser aplicadas. As diferentes decomposições podem influenciar no desempenho do algoritmo de geração de colunas.

Quando reescrevemos o problema utilizando os princípios da decomposição de Dantzig-Wolfe, o número de pontos extremos de um problema pode ser consideravelmente grande e conseqüentemente a enumeração de todos estes pontos extremos é inviável computacionalmente. Na prática, para o problema de dimensionamento de lotes, vários planos de produção têm variáveis associadas nulas numa solução ótima, fazendo-se desnecessárias no problema mestre.

O principal objetivo da geração de colunas é resolver o problema decomposto sem que seja necessário a enumeração explícita de todos os pontos extremos (soluções dos subproblemas). Portanto, a idéia principal da geração de colunas é considerar um conjunto restrito destes pontos extremos o qual definirá o problema mestre restrito e avaliar se existem outros pontos extremos que não estão presentes no problema mestre e que podem melhorar o valor da função objetivo. Esta verificação de inclusão de novos pontos extremos é realizada por meio da resolução de subproblema(s) e, se a solução do subproblema for atrativa, esta será inserida ao problema mestre.

O algoritmo de geração de colunas para o problema de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade, utilizando a decomposição de Dantzig-Wolfe, independente do tipo de decomposição, pode ser descrito como:

Algoritmo - Geração de Colunas

- Passo 1. **[passo inicial]** Fornecer planos de produção factíveis (colunas iniciais) ao problema mestre.
- Passo 2. **[problema mestre]** Resolver o problema mestre e atualizar as variáveis duais que serão utilizadas na resolução dos subproblemas.
- Passo 3. **[subproblema (s)]** Resolver cada um dos subproblemas, ou melhor, encontrar novos planos de produção com custo relativo negativo.
- Passo 4. **[teste de parada]** Caso não encontre colunas com custo relativo negativo, pare a execução do algoritmo (solução ótima encontrada). Se forem inseridas novas colunas, volte ao Passo 2.
-

As próximas seções descrevem duas possibilidades de decomposição para o problema de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade. A primeira decomposição refere-se aos trabalhos de Manne (1958), Degraeve & Jans (2007) e Pimentel et al. (2006), sendo conhecida como decomposição por itens. A segunda decomposição é abordada em Pimentel et al. (2006) e Pimentel (2005), conhecida como decomposição por períodos.

3.2.1 Revisão dos trabalhos de Manne (1958) e Degraeve e Jans (2007)

Em 1958, Manne propôs uma reformulação para o problema de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade, análogo à decomposição proposta por Dantzig & Wolfe (1960, 1961). Manne (1958) tentou explicitar em sua decomposição todas as possibilidades de preparação de máquina, ou seja, a programação da máquina. Porém, em Degraeve & Jans (2007) mostra-se que Manne (1958) não consegue explicitar todas as programações de máquina, e com isso, não obtêm uma aproximação semelhante ao problema original, assim como proposto por Dantzig & Wolfe (1960).

Para melhor compreensão da proposta de Manne (1958) e as das alterações de Degraeve & Jans (2007), considere a notação mais compacta referente ao item i ($i = 1, \dots, n$):

$$\begin{aligned}x_i &= (x_{i1}, \dots, x_{iT})^t \\I_i &= (v_i, I_{i1}, \dots, I_{iT})^t \\y_i &= (y_{i1}, \dots, y_{iT})^t\end{aligned}$$

sendo v_i a quantidade de estoque inicial para o item i .

A consideração do estoque inicial v_i evita a infactibilidades do problema, que podem ser vistos como variáveis artificiais (Vanderbeck, 1998).

Seja X^i ($i = 1, \dots, n$) definido como segue:

$$X^i = \left\{ (x_i, I_i, y_i) \left| \begin{array}{l} v_i + x_{i1} = d_{i1} + I_{i1} \\ I_{i,t-1} + x_{it} = d_{it} + I_{it}; t = 2, \dots, T \\ x_{it} \leq \min \left\{ \frac{c_t - b_{it}}{a_{it}}, \sum_{j=t}^T d_{ij} \right\} y_{it}; t = 1, \dots, T \\ y_{it} \in \{0, 1\}, x_{it} \geq 0; t = 1, \dots, T \\ v_i \geq 0, I_{iT} = 0, \\ I_{it} \geq 0; t = 1, \dots, T - 1 \end{array} \right. \right\} \quad (3.6)$$

O conjunto dos planos de produção dominantes usados por Manne (1958) para descrever o problema inteiro misto de dimensionamento de lotes monoestágio de produção é menor que o conjunto dos pontos extremos do polítopo do problema original. Seja $Q^i = \{y_i = (y_{i1}, \dots, y_{iT}) | y_{it} \in \{0, 1\}, t = 1, \dots, T\}$, uma programação factível das preparações ao longo dos períodos para um determinado item i e, ainda, y_{it}^w assume valor 1 se houver preparação de máquina para produção do item i no período t na programação w e 0, caso contrário. Se $y_{it} = 0$ ($\forall t$) $\Rightarrow v_i = \sum_{t=1}^T d_{it}$, $x_{it} = 0$, $I_{it} = I_{i,t-1} - d_{it}$; entretanto, se $y_{it} = 1$ ($\forall t$), tem-se uma solução lote-por-lote. Portanto, existem 2^T soluções factíveis para cada item (veja Manne (1958)), exatamente um plano de produção dominante correspondente para cada programação de máquina. Um plano de produção dominante respeita a propriedade em que para cada período, a demanda será produzida no período se existir preparação de máquina, caso contrário, a demanda será produzida em algum período precedente mais próximo que tenha preparação. Ou seja, o plano de produção que satisfaz a propriedade de Wagner-Whitin (Wagner & Whitin, 1958):

$$I_{i,t-1}x_{it} = 0 \quad (i = 1, \dots, n \text{ e } t = 1, \dots, T).$$

Manne (1958) considera apenas planos de produção dominantes, sendo que, para cada programação existe apenas um plano de produção dominante. O plano de produção de Wagner-Whitin de acordo com a programação de máquina w , ou simplesmente, plano de produção w para o item i , é definido pela quantidade de produção x_{it}^w :

$$\begin{aligned} x_{it}^w &= 0 \quad (\text{se } y_{it}^w = 0) \text{ ou} \\ x_{it}^w &= \sum_t^j d_{it} \quad (\text{se } y_{it}^w = 1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

para algum j , $t \leq j \leq T$ ($t = 1, \dots, T$), tal que $y_{ik}^w = 0$ ($k = 1, \dots, j$) e $y_{ij+1}^w = 1$

A seguir, em alguns passos pode-se reescrever o problema original (3.1)-(3.5) utilizando a decomposição de Dantzig-Wolfe e, no primeiro passo, o problema é reescrito utilizando as definições

gerais da decomposição de Dantzig-Wolfe. O segundo passo, aborda a decomposição proposta por Manne (1958). Os demais passos apresentam a reformulação proposta por Degraeve & Jans (2007):

• **Passo 1:**

Seja (x_i^k, I_i^k, y_i^k) o k -ésimo ponto extremo de $\text{conv}(X^i)$ e seja P^i o conjunto de todos os pontos extremos de $\text{conv}(X^i)$. Para cada ponto extremo k de $\text{conv}(X^i)$, define-se uma nova variável z_i^k . A aplicação (correta) dos princípios da decomposição de Dantzig-Wolfe requer substituição das variáveis originais pela combinação convexa dos pontos extremos da subestrutura na função objetivo (3.1) e nas restrições de acoplamento (3.3). Este novo problema resultante das substituições e, ainda, acrescido da restrição de convexidade ($\sum_{k \in P^i} z_i^k = 1$; $i = 1, \dots, n$) denomina-se problema mestre. Fazendo as substituições tem-se a seguinte reformulação:

Minimizar

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{|P^i|} \left[\sum_{t=1}^T (f_i v_i + q_{it} y_{it}^k + h_{it} I_{it}^k + c_{it} x_{it}^k) z_i^k \right] \quad (3.8)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{|P^i|} z_i^k = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{|P^i|} (b_{it} y_{it}^k + a_{it} x_{it}^k) z_i^k \leq C_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3.10)$$

$$z_i^k \geq 0, \quad k = 1, k = 2, \dots, k = |P^i|; i = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

Onde,

$$y_{it} = \sum_{k=1}^{|P^i|} y_{it}^k z_i^k \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (3.12)$$

$$x_{it} = \sum_{k=1}^{|P^i|} x_{it}^k z_i^k \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (3.13)$$

$$I_{it} = \sum_{k=1}^{|P^i|} I_{it}^k z_i^k \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (3.14)$$

- **Passo 2:** No passo anterior definiu-se P^i como o conjunto dos pontos extremos de $\text{conv}(X^i)$, ou seja, P^i é o conjunto que contém todas as soluções factíveis de X^i e satisfaz a propriedade de Wagner-Whitin. Neste passo descreve-se o conjunto P^i e mostra-se que este é muito

maior que os 2^T pontos extremos dos planos dominantes de Manne (1958). Esta descrição é feita por meio de duas proposições. As demonstrações das proposições a seguir podem ser encontradas em Degraeve & Jans (2007). (Descrição alternativa do conjunto de pontos)

Proposição 1: $P^i = \{(x_i, I_i, y_i) | (x_i, I_i, y_i) \in X^i; I_{i,t-1}x_{it} = 0, t = 1, \dots, T\}$, ou seja, P^i consiste de todas as soluções factíveis de X^i que também satisfazem a propriedade de Wagner & Whitin (1958).

Proposição 2: $|P^i| = 3^T$.

Há três possibilidades de combinações das variáveis de produção e de preparação para cada um dos T períodos: $y_{it} = 0$ e $x_{it} = 0$, $y_{it} = 1$ e $x_{it} = 0$, $y_{it} = 1$ e $x_{it} > 0$, onde $t = 1, \dots, T$. Assim, combinando as restrições de X^i e as condições de Wagner-Whitin resultam num total de 3^T pontos extremos.

Para reformular o problema utilizando a proposição acima, define-se para cada programação $y_i^w \in Q^i$ o subconjunto Q^{iw} , dado por $Q^{iw} = \{y_i = (y_{i1}, \dots, y_{iT}) | y_{it} \leq y_{it}^w, t = 1, \dots, T; y_{it} \in \{0, 1\}\}$ apenas se existir preparação de máquina na programação w de um período específico (é uma preparação possível, mas não necessária). Se existem s possibilidades de preparação na programação w , então Q^{iw} contém 2^s programações de preparação de máquina (Se $y_{it}^w = 1$ então y_{it} pode assumir valor 0 ou 1). Para cada programação $y_i^u \in Q^{iw}$, as quantidades de planos de produção dominantes x_{it}^u é unicamente definidas (veja (3.7)).

A programação w pode ser combinada com algum plano de produção de Wagner-Whitin $x_i^u | y_i^u \in Q^{iw}$ para formar um ponto extremo. Ao se combinar cada programação com os planos de produção de Wagner-Whitin pode-se definir:

$$P^i = Q^i \cup Q^{iw}.$$

- **Passo 3:** Para reformular o modelo utilizando a decomposição de Dantzig-Wolfe basta reescrever o modelo (3.8)-(3.11) e, também, reformular as equações (3.12) e (3.13) usando a definição do conjunto P^i em função de Q^i e Q^{iw} :

$$\sum_{p=1}^{|P^i|} z_i^k = \sum_{w=1}^{|Q^i|} \sum_{u=1}^{|Q^{iw}|} z_i^{wu}$$

Em que z_i^{wu} refere-se ao ponto extremo formado pela programação $y_i^w \in Q^i$ e o plano de produção dominante de Wagner-Whitin associado com o seqüenciamento $y_i^u \in Q^{iw}$. Desta forma, Degraeve & Jans (2007) reescrevem o problema de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade utilizando z_i^{wu} , ou seja, incluindo os planos de produção não considerados por Manne (1958).

Utilizando os princípios explicitados nesta seção, define-se a decomposição por item e na seqüência, encontra-se a decomposição por período.

3.2.2 Decomposição por item

Na decomposição por item, as restrições de capacidade (3.3) são consideradas as de acoplamento e alocadas ao problema mestre. As demais restrições, formam subproblemas independentes, que correspondem a um problema de dimensionamento de lotes sem restrição de capacidade. Portanto, os pontos extremos, definidos pelos subproblemas, são os planos de produção por itens, que indicam quando e qual a quantidade que cada item será produzido.

Para a decomposição por item, considere novamente os parâmetros e a seguinte variável de decisão:

PARÂMETROS:

- K_i : número de planos de produção referentes ao item i ($K = |P^1| = |P^2| = \dots = |P^n|$);
- $y_{it}^k = \begin{cases} 1 & \text{caso exista preparação do item } i \text{ no plano de produção } k \text{ no período } t, \\ 0 & \text{caso contrário } (i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K_i). \end{cases}$
- x_{it}^k : quantidade produzida do item i no período t no plano de produção k ($i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K_i$);
- I_{it}^k : quantidade em estoque do item i no final do período t no plano de produção k ($i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K_i$).

VARIÁVEL DE DECISÃO:

- z_i^k : peso do plano de produção k para o item i ($i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K_i$);.

Assim, o problema mestre e o subproblema serão, respectivamente:

\implies *Problema Mestre (restrito):*

Minimizar

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{K_i} \left[\sum_{t=1}^T (q_{it} y_{it}^k + c_{it} x_{it}^k + h_{it} I_{it}^k) z_i^k \right] \quad (3.15)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{K_i} z_i^k = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.16)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{K_i} (b_{it} y_{it}^k + a_{it} x_{it}^k) z_i^k \leq C_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3.17)$$

$$z_i^k \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K_i \quad (3.18)$$

Como já explicitado anteriormente, a função objetivo do problema mestre tem por finalidade minimizar a soma dos custos totais, sendo que as variáveis z_i^k representam a proporção da demanda do item i satisfeita por meio do plano de produção k . As restrições (3.16), conjuntamente com (3.18), são as de convexidade. Para cada item existe uma restrição de convexidade, forçando a escolha de uma combinação destes planos de produção. E, (3.18) garante que as variáveis de decisão sejam não negativas. As restrições (3.17) forçam que a combinação de planos de produção escolhida respeite a capacidade disponível em cada período.

Com a resolução do problema mestre, é possível ter a solução correspondente ao problema original (3.1)-(3.5), por meio das igualdades:

$$x_{it} = \sum_{k=1}^{K_i} x_{it}^k z_i^k \quad (3.19)$$

$$y_{it} = \sum_{k=1}^{K_i} y_{it}^k z_i^k \quad (3.20)$$

Utilizando os resultados de (3.19) e (3.20) obtém-se facilmente I_{it} .

Nesta decomposição cada subproblema está associado ao problema de dimensionamento de lote com capacidade ilimitada e tem-se n subproblemas a serem resolvidos.

Considerando π_i como as variáveis duais associadas aos itens referentes a cada restrição (3.16) e μ_t variáveis duais associadas a restrição de capacidade (3.17), onde $i = 1, \dots, n$ e $t = 1, \dots, T$, temos, o subproblema para cada item i dado por:

⇒ *Subproblema para o item i :*

Minimizar

$$\sum_{t=1}^T c_{it} x_{it} + \sum_{t=1}^T q_{it} y_{it} + \sum_{t=1}^T h_{it} I_{it} - \sum_{t=1}^T (b_{it} y_{it}) \mu_t - \sum_{t=1}^T (a_{it} x_{it}) \mu_t - \pi_i \quad (3.21)$$

Sujeito a:

$$I_{i,t-1} + x_{it} = d_{it} + I_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad (3.22)$$

$$x_{it} \leq \min \left\{ \frac{c_{it} - b_{it}}{a_{it}}, \sum_{j=t}^T d_{ij} \right\} y_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad (3.23)$$

$$I_{it} \geq 0 \quad t = 1, \dots, T - 1 \quad (3.24)$$

$$x_{it} \geq 0 \quad t = 1, \dots, T \quad (3.25)$$

$$y_{it} \in \{0, 1\} \quad t = 1, \dots, T \quad (3.26)$$

A função objetivo do subproblema procura o plano de produção que possui o menor custo relativo. As demais restrições são semelhantes as do problema (3.1)-(3.5).

Os subproblemas gerados são independentes entre si, sendo cada um deles um problema de dimensionamento de lotes para a produção de um único item sem limitações de capacidade. Os subproblemas descrevem planos de produção por itens, definindo para cada item quando e quanto será produzido. Ao decidir pela produção de um determinado item no período t ($t = 1, \dots, T$), este será produzido de forma a satisfazer os demais períodos (lembre-se que não há, neste “novo” problema, as restrições de capacidade). As restrições de capacidades são representadas pelos custos duais.

Considere x_{it}^* , y_{it}^* e I_{it}^* a solução ótima do subproblema para o item i . Desta maneira, se o custo relativo satisfizer:

$$\sum_{t=1}^T q_{it}y_{it}^* + \sum_{t=1}^T c_{it}x_{it}^* + \sum_{t=1}^T h_{it}I_{it}^* - \sum_{t=1}^T (b_{it}y_{it}^*)\mu_t - \sum_{t=1}^T (a_{it}x_{it}^*)\mu_t - \pi_i < 0 \quad (3.27)$$

esta fornece uma coluna candidata a ser inserida ao problema mestre. Em cada iteração do método de geração de colunas podem ser adicionadas até n novas colunas. O processo termina quando não houver mais colunas atrativas a serem inseridas no problema mestre.

A estratégia utilizada por Pimentel (2005) para obter um problema mestre restrito válido é incluir nas restrições de convexidade, referente ao problema mestre restrito da decomposição por item, variáveis artificiais (v_i , $i = 1, \dots, n$) relativas a cada item. Estas variáveis artificiais evitam que o problema seja infactível, pois significam um estoque inicial. Acrescenta-se também à função objetivo do problema mestre o termo $\sum_{i=1}^n f_i v_i$, com f_i sendo um valor elevado.

Uma outra estratégia, também encontrada em Pimentel (2005), é associar uma variável artificial (u_t , $t = 1, \dots, T$) para cada período. Altera-se a função objetivo acrescentando o termo $\sum_{t=1}^T f_t u_t$, sendo f_t é um valor extremamente grande. Estas variáveis tem por objetivo factibilizar o problema e podem ser vistas como um acréscimo de capacidade a cada período, permitindo, assim, seleccionar qualquer combinação dos planos de produção.

3.2.3 Decomposição por períodos

A decomposição por períodos é uma outra maneira de reformular o problema de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade utilizando o princípio da decomposição de Dantzig-Wolfe, sendo que cada subproblema está associado a um período do horizonte de planejamento. Esta decomposição foi estudada em Diaby et al. (1992), em que o problema foi relaxado utilizando a técnica de relaxação lagrangiana e resolvido por meio do método do subgradiente. Pimentel

(2005) e Pimentel et al. (2006) foram os primeiros trabalhos a abordarem a decomposição do problema deste modo, utilizando o princípio da decomposição de Dantzig-Wolfe e resolvendo por meio do método de geração de colunas.

Na decomposição por período as restrições de balanço de estoque são alocadas ao problema mestre. O subproblema resultante tem várias restrições independentes entre si, por períodos. Assim, os pontos extremos representam planos de produção a cada período, ou seja, o número de subproblemas está vinculado ao número total de períodos.

Para a decomposição por período, considere os novos parâmetros e variáveis:

PARÂMETROS:

- K_t : número de planos de produção referentes ao período t ($K = |P^1| = |P^2| = \dots = |P^T|$);
- $y_{it}^k = \begin{cases} 1 & \text{caso exista preparação do item } i \text{ no plano de produção } k \text{ no período } t, \\ 0 & \text{caso contrário } (i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K_t); \end{cases}$
- x_{it}^k : quantidade produzida do item i no período t no plano de produção k ($i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K_t$).

VARIÁVEL DE DECISÃO:

- z_t^k : peso do plano de produção k para o período t ($t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K_t$).

\implies *Problema Mestre (restrito)*:

Minimizar

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T h_{it} I_{it} + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^{K_t} \left[\left(\sum_{i=1}^n q_{it} y_{it}^k + c_{it} x_{it}^k \right) z_t^k \right] \quad (3.28)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{K_t} z_t^k \leq 1, \quad t = 1, \dots, T; \quad (3.29)$$

$$I_{i,t-1} + \sum_{k=1}^{K_t} x_{it}^k z_t^k = d_{it} + I_{it}; \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (3.30)$$

$$I_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T - 1 \quad (3.31)$$

$$z_t^k \geq 0 \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, n \quad (3.32)$$

A função objetivo do problema mestre tem por finalidade minimizar a soma dos custos totais, sendo que as variáveis z_t^k representam a proporção da demanda para o período t no plano de produção k . As restrições (3.29), conjuntamente com (3.32), são as de convexidade. Para cada período

existe uma restrição de convexidade, forçando a escolha de uma combinação destes planos de produção. Para esta decomposição, pode-se reescrever as restrições (3.29) como uma desigualdade (\leq) devido ao espaço das soluções factíveis referentes ao subproblema incluir a origem, excluindo assim a permissividade de não produzir em determinado período. E, (3.31) e (3.32) garantem que as variáveis de decisão sejam não negativas. As restrições (3.30) e (3.31) forçam que a combinação de planos de produção escolhida atenda a demanda.

Para obter a solução do problema original, deve-se utilizar:

$$x_{it} = \sum_{k=1}^{K_t} x_{it}^k z_t^k \quad (3.33)$$

$$y_{it} = \sum_{k=1}^{K_t} y_{it}^k z_t^k \quad (3.34)$$

Considerando os π_t ($t = 1, \dots, T$) como as variáveis duais associadas aos períodos referentes as restrições de convexidade (3.29) e μ_{it} ($i = 1, \dots, n$ e $t = 1, \dots, T$) as variáveis duais associadas ao conjunto de restrições de balanço de estoque (3.30). Pode-se escrever o subproblema para o período t como:

\implies *Subproblema para o período t :*

Minimizar

$$\sum_{i=1}^n c_{it} x_{it} + \sum_{i=1}^n q_{it} y_{it} - \sum_{i=1}^n x_{it} \mu_{it} - \pi_t \quad (3.35)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n a_{it} x_{it} + \sum_{i=1}^n b_{it} y_{it} \leq C_t \quad (3.36)$$

$$x_{it} \leq \min \left\{ \frac{C_t - b_{it}}{a_{it}}, \sum_{j=t}^T d_{ij} \right\} y_{it} \quad i = 1, \dots, n; \quad (3.37)$$

$$x_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; \quad (3.38)$$

$$y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n; \quad (3.39)$$

A função objetivo do subproblema procura o melhor plano de produção (o de menor custo) associado ao período t . As demais restrições tem papel semelhante as do problema original (problema (3.1)-(3.5)), mas agora relativas ao subproblema.

Na decomposição por período, o problema mestre possui um número exponencial de variáveis, o que justifica a utilização da geração de colunas para a resolução do mesmo.

Como já citado anteriormente, o problema mestre restrito deve ser um problema válido. Portanto, Pimentel (2005) adicionou um conjunto de variáveis artificiais às restrições de balanço de estoque para o primeiro período do horizonte de planejamento. Para cada uma dessas restrições adicionou-se a variável v_i ($i = 1, \dots, n$) que representam o estoque inicial presente no início do primeiro período, portanto, acrescenta-se v_i as restrições (3.30). E, ainda, acrescenta-se na função objetivo o termo $\sum_{i=1}^n v_i f_i$, sendo f_i um valor extremamente grande. Qualquer solução obtida que contenha alguma variável artificial será pior que a solução ótima, desde que o problema seja factível.

3.3 Heurísticas lagrangianas

As heurísticas lagrangianas abordadas nesta seção baseiam-se na resolução do problema relaxado, em que as restrições de capacidade são alocadas à função objetivo atribuindo uma penalidade.

O algoritmo geral para os procedimentos que são descritos a seguir pode ser definido como:

Algoritmo - Heurística Lagrangiana

- Passo 1. **[passo inicial]** Atribuir valores iniciais aos multiplicadores lagrangianos e inicializar $cont = 0$.
- Passo 2. **[passo primal]** Resolver os subproblemas utilizando o algoritmo de Wagner & Whitin (1958) (os subproblemas foram obtidos por meio da relaxação das restrições de capacidade do problema original).
- Passo 3. **[heurística de factibilização]** Testar se a solução obtida no Passo 2 é factível, caso não seja, tentar factibilizá-la utilizando um procedimento de transferência de produção entre períodos. Armazenar a melhor solução factível. Caso encontre uma solução factível e a função objetivo primal seja igual a função objetivo dual, pare, uma solução ótima foi encontrada.
- Passo 4. **[passo dual]** Atualizar os multiplicadores duais utilizando o método de otimização do subgradiente. Fazer $cont = cont + 1$.
- Passo 5. **[teste de parada]** Caso $cont < IT$ volte ao Passo 2. Se não pare, e retorne a melhor solução factível.
-

Com IT sendo um valor pré-estabelecido, que designa o número máximo de iterações.

A seguir, aborda-se dois procedimentos que utilizam heurísticas lagrangianas para o problema de dimensionamento de lotes.

3.3.1 O método heurístico de Trigeiro et al. (1989)

Trigeiro et al. (1989) apresentam um procedimento heurístico para resolver o problema de dimensionamento de lotes de produção monoestágio com tempo e custo de preparação de máquina (problema (3.1)-(3.5)). Os autores propõem a relaxação das restrições de capacidade (3.3) utilizando a técnica de relaxação lagrangiana. Dados os valores iniciais aos multiplicadores lagrangianos (λ_t) e utilizando a técnica de relaxação lagrangiana aplicada às restrições de capacidade, o problema resultante será:

Minimizar

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T c_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T h_{it}I_{it} + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T q_{it}y_{it} + \sum_{t=1}^T \lambda_t \left(\sum_{i=1}^n a_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^n b_{it}y_{it} - C_t \right) \quad (3.40)$$

Sujeito a:

$$I_{i,t-1} + x_{it} = d_{it} + I_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (3.41)$$

$$x_{it} \leq \min \left\{ \frac{C_t - b_{it}}{a_{it}}, \sum_{j=t}^T d_{ij} \right\} y_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 2, \dots, T \quad (3.42)$$

$$x_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (3.43)$$

$$y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \quad (3.44)$$

Após a aplicação da relaxação lagrangiana não há mais restrições de capacidade, ou seja, não há mais restrições que interligam os itens, então, obtém-se n subproblemas (um para cada item). Portanto, pode-se resolver este problema item a item por meio do algoritmo de programação dinâmica proposto por Wagner & Whitin (1958). A solução obtida provavelmente não é factível para o problema original.

A execução do Passo 3 (heurística de factibilização) tenta factibilizar a solução obtida no Passo 2, caso esta não seja factível. A essência da heurística de factibilização é tentar fazer pequenos ajustes nos lotes de produção para adequá-los a capacidade disponível a cada período. Este procedimento pode ser subdividido em quatro etapas (progressivas e regressivas no horizonte de planejamento) e, por fim, uma fase de melhoria é aplicada. Se após a execução destas quatro etapas iniciais ainda existir violações de capacidade, o procedimento de transferência é abandonado e as variáveis lagrangianas atualizadas e um novo problema lagrangiano é resolvido. As etapas que subdividem o Passo 3, referente ao procedimento de transferência, são:

- **1ª etapa regressiva:** a partir do fim do horizonte de planejamento, prossegue-se em direção aos períodos anteriores buscando capacidades violadas. Caso seja encontrado um período

com a limitação de capacidade não foi respeitada, cada item com produção positiva é avaliado de forma a encontrar o item mais adequado para ter sua produção remanejada. O item remanejado é o que possui menor custo unitário de violação eliminada, ou seja, menor custo unitário para cada item que violar a capacidade e puder ser transferido a outro período. Se o item i de um determinado período t necessitar ser transferido, deve-se fazer algumas considerações:

- Se a violação proporcionada pelo tamanho do lote referente ao item i em t for menor que a violação total do período t , ou seja, $a_{it}x_{it} + b_{it}y_{it} < \sum_{l=1}^n (a_{lt}x_{lt} + b_{lt}y_{lt}) - C_t$, então:
 - * O lote de produção do item i no período t é integralmente transferido para o período $t - j$ (com $j \geq 1$), sendo $t - j$ o período anterior mais próximo de t que houve produção para o item i ($y_{i,t-j} = 1$).
- Ou, se a violação do tamanho do lote do item i for maior (ou igual) que a violação total do período t , ou seja, $a_{it}x_{it} + b_{it}y_{it} \geq \sum_{l=1}^n (a_{lt}x_{lt} + b_{lt}y_{lt}) - C_t$, pode-se proceder de duas formas:
 - * Transfere-se apenas a quantidade da produção do item do tipo i para o período $t - j$ (com $j \geq 1$) suficiente para eliminar a violação de capacidade em t , sendo $t - j$ o período anterior mais próximo de t que houve produção do item i ;
 - * Ou, o lote é integralmente transferido para o período $t - j$ (com $j \geq 1$), sendo $t - j$ o período anterior mais próximo de t que houve produção do item i . Esta opção será escolhida apenas se não houver violação de capacidade do período $t - j$ após a transferência.

Após a transferência do lote do item i para outro período, verifica-se se a capacidade do período t está sendo respeitada, em caso negativo, outro item é escolhido para ser transferido.

Ao término da execução desta etapa, todos os períodos, exceto o primeiro, estão com a capacidade adequada. O primeiro período pode ou não satisfazer a restrição de capacidade.

- **1ª etapa progressiva:** esta etapa analisa o começo do horizonte de planejamento e prossegue em direção aos períodos posteriores. Ao encontrar um período com a capacidade acumulada (3.45) violada, o período imediatamente posterior a ele é o receptor da produção excedente e a quantidade a ser transferida é o estoque I_{it} . Os itens candidatos à transferência são:
 - Aqueles que o algoritmo de Wagner & Whitin (1958) agrupou;
 - Ou, os que a etapa regressiva transferiu de período.

A execução desta etapa termina quando as violações acumuladas forem eliminadas para todos os períodos, em outras palavras, quando forem satisfeitas as inequações (3.45):

$$\sum_{j=1}^t \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^n b_{ij}y_{ij} \right) \leq \sum_{j=1}^t C_j, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.45)$$

Observe que pode não haver a eliminação da violação de capacidade em todos os períodos, pois pode haver um período j , com:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^n b_{ij}y_{ij} > C_j, \quad 1 \leq j \leq t \quad (t = 1, \dots, T) \quad (3.46)$$

- **2ª etapa regressiva:** semelhante a 1ª etapa regressiva, diferindo apenas seu estado inicial que é determinado pelo resultado das duas etapas anteriores.
- **2ª etapa progressiva:** além de eliminar a violação acumulada, semelhante a 1ª etapa progressiva, o período continua sendo avaliado até que toda violação de capacidade seja eliminada.
- **Arranjo final ou procedimento de melhoria:** a solução factível provinda dos passos anteriores passa por uma tentativa de melhoria. A análise de melhoria é feita período a período começando do final do horizonte de planejamento em direção ao início. Os períodos atingidos serão aqueles que não tiverem sua capacidade total utilizada, ou seja, $\sum_{i=1}^n a_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^n b_{it}y_{it} < C_t$, ($t = 1, \dots, T$). Portanto, considere o período t cuja capacidade não está sendo completamente aproveitada, selecione todos os itens que são produzidos neste período e que satisfaça $I_{i,t-1}x_{it} \neq 0$, ou seja, os itens que possuem estoque positivo no período anterior e também são produzidos no período corrente. Escolhe-se um destes itens. O item escolhido terá sua produção acrescida em t e decrementada no período $t - j$, sendo $t - j$ ($j \geq 1$) o período mais próximo de t em que houve produção daquele item, assim os período de $t - j$ até $t - 1$ (inclusive) têm seus estoques deste item nulos.

O Passo 4, do algoritmo Heurística Lagrangiana, é o responsável pela atualização dos multiplicadores lagrangianos utilizando o método de otimização do subgradiente (Camerini et al., 1975).

Araujo (1999) e Araujo & Arenales (2000) estudaram o método apresentado por Trigeiro et al. (1989) e propuseram melhorias na heurística de factibilização. Abordar-se-á na próxima seção o trabalho dos autores.

3.3.2 O método heurístico de Araujo & Arenales (2000)

Araujo (1999) e Araujo & Arenales (2000) estudaram o método apresentado por Trigeiro et al. (1989) e observaram alguns pontos frágeis na heurística de factibilização (Passo 3 da Heurística Lagrangiana), mais precisamente, na fase de melhoria do algoritmo de factibilização e, sobre estas observações, propuseram algumas melhorias. Basicamente, todos os passos do algoritmos de Araujo & Arenales (2000) utilizam os passos de Trigeiro et al. (1989), diferindo apenas no Passo 3. Portanto, nesta seção será descrito somente a heurística de factibilização conforme proposta por Araujo & Arenales (2000).

Ambos os trabalhos (Trigeiro et al., 1989; Araujo & Arenales, 2000) aplicam uma heurística de factibilização que é composta por cinco etapas, sendo as quatro etapas iniciais formadas por dois procedimentos regressivos e dois procedimentos progressivos, conforme a seção anterior. Caso seja encontrada uma solução factível nas etapas progressivas e regressivas, há o quinto e último passo, chamado de arranjo final, que é aplicado com o intuito de melhorar a solução encontrada. Este último passo difere do trabalho de Trigeiro et al. (1989).

Para proporem a nova proposta de arranjo final para a heurística lagrangiana de Trigeiro et al. (1989), Araujo & Arenales (2000) fizeram algumas observações:

- Trigeiro et al. (1989) procuram satisfazer a propriedade $I_{i,t-1}x_{it} = 0$ (onde $i = 1, \dots, n$ e $t = 1, \dots, T$). Portanto, supondo que num determinado período t a capacidade não esteja sendo utilizada completamente, existe um item i' com $I_{i',t-1}x_{i't} \neq 0$, então o valor $I_{i',t-1}$ é acrescido na produção deste item em t e decrementada no período $t - j$ ($j \geq 1$), com $t - j$ o período mais próximo de t que houve produção do item i' ($y_{i',t-j} = 1$), diminuindo os custos de estocagem do item i' .

Entretanto, $I_{i,t-1}x_{it} = 0$ é a propriedade de otimalidade para o problema de um único item sem restrições de capacidade. Mas, o problema em questão é um problema de vários itens com limitações de capacidade, de modo que a propriedade referida deixa de ser uma propriedade de otimalidade (Araujo, 1999).

- Trigeiro et al. (1989) consideram em seu trabalho um custo unitário de produção fixo e o problema em questão possui custos de produção variáveis. Assim, o procedimento de melhoria proposto por Trigeiro et al. (1989) pode piorar a solução encontrada (Araujo, 1999). Entretanto, se o custo de produção for fixo, a solução nunca será piorada, pois irá reduzir o custo de estocagem com a transferência de parte da produção do período $t - j$ ($j \geq 1$) para o período t . Há a possibilidade, ainda, de ocorrer a transferência da produção integral do lote de um item i , podendo diminuir, também, o custo de preparação de máquina.
- A última observação feita por Araujo & Arenales (2000) baseia-se no Teorema de Geoffrion (1974):

Teorema (Geoffrion, 1974): Dada uma solução do problema lagrangiano, esta solução é ótima para o problema original se, e somente se:

1. A solução é ótima para o problema lagrangiano;
2. A solução é factível para o problema original;
3. A solução satisfaz as condições de folgas complementares.

Em Trigeiro et al. (1989) as duas primeiras condições anteriores são levadas em consideração. O arranjo final proposto pelos autores tentam satisfazer apenas as duas primeiras considerações, procurando soluções factíveis próximas ao valor ótimo do problema relaxado (Trigeiro et al., 1989).

Após as observações feitas por Araujo (1999) e Araujo & Arenales (2000), citadas anteriormente, estas levaram os autores a proporem um arranjo final, diferente do trabalho de Trigeiro et al. (1989), tentando satisfazer as três propriedades do teorema de Geoffrion (1974). Este novo arranjo final consiste em dois passos: um regressivo e outro progressivo no tempo. Para facilitar a compreensão, veja a seguir a descrição da heurística de transferência (Passo 3 da Heurística Lagrangiana) proposta por Araujo & Arenales (2000):

- **1ª etapa progressiva, 1ª etapa regressiva, 2ª etapa progressiva, 2ª etapa regressiva:** semelhantes a Trigeiro et al. (1989);
- **Arranjo Final ou Procedimento de Melhoria (Araujo & Arenales, 2000):** Este passo é executado apenas se os passos anteriores fornecem uma solução factível. O procedimento baseia-se em duas etapas:
 - **Etapa regressiva:** O procedimento regressivo, presente no procedimento de melhoria de Araujo & Arenales (2000), tem início no fim do horizonte de planejamento em direção ao início. Se em um período a capacidade não foi totalmente aproveitada, o multiplicador lagrangiano terá valor maior que zero (não satisfazendo a propriedade das folgas complementares, ou seja, $\lambda_t [\sum_{i=1}^n a_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^n b_{it}y_{it} - C_t] < 0$ com $\lambda_t > 0$) é forçada a transferência da produção para este período até que toda a capacidade seja consumida sem ser ultrapassada (mantendo a factibilidade da solução). Inicialmente procura-se um período t' , anterior ao período corrente t , com valor do multiplicador lagrangiano sendo zero, analisa-se os itens produzidos no período e avalia-se qual item tem menor custo (produção, preparação de máquina, estoque e custos lagrangianos) para ser transferido, por fim a transferência ocorre se a função objetivo resultante de uma possível transferência é menor que a função objetivo corrente. Ao escolher o item a ser transferido do período t' para t , a quantidade transferida deste item é o menor valor entre:

- * a quantidade total produzida do item no período t' ;
- * a menor quantidade em estoque entre t' até $t - 1$ (inclusive);
- * a quantidade de itens necessárias para preencher a capacidade ociosa.

Se após a transferência ainda houver um sub-aproveitamento da capacidade no período t , outro item é avaliado para a transferência. Repete-se o processo até que não haja mais capacidade ociosa.

- **Etapa progressiva:** a análise tem início no primeiro período e percorre período-a-período até o final do horizonte de planejamento. Se num determinado período t ocorre $(\sum_i^n a_{it}x_{it} + b_{it}y_{it}) - C_t < 0$, ou seja, existe capacidade ociosa e o valor do multiplicador lagrangiano para este período for positivo ($\lambda_t > 0$), este período não satisfaz a última condição do teorema de Geoffrion (1974) (condição das folgas complementares). Com o intuito de satisfazer esta condição, busca-se produção para ser acrescida neste período.

A produção que será inserida em t é procurada nos períodos posteriores a t , sendo escolhido o período t' ($t' - t > 0$) cujo multiplicador lagrangiano tem valor nulo. Definido o período que “cede” produção, verifica-se qual item é produzido no período t' que possui a menor soma dos custos de produção, preparação, estocagem e custos lagrangianos, chamamos este item de i' . Assim, a transferência da produção do item i' do período t' para o período t ocorre se o valor da função objetivo for melhorado com a transferência da produção, caso contrário, a produção não é transferida.

Ao escolher um item i' no período t' , a quantidade a ser transferida é dada pelo

$$\min\{x_{i't'}, valor\} \text{ em que, } valor = \begin{cases} \frac{C_t - \sum_{i=1}^n (a_{it}x_{it} + b_{it}y_{it})}{a_{i't}}, & \text{se } y_{i't} = 1 \\ \frac{C_t - b_{i't} - \sum_{i=1}^n (a_{it}x_{it} + b_{it}y_{it})}{a_{i't}}, & \text{se } y_{i't} = 0 \end{cases}$$

Se a transferência de um item não for suficiente para eliminar a folga de capacidade do período t , um outro item é escolhido por meio da repetição desta etapa.

Araujo & Arenales (2000) obtiveram bons resultados para o problema de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade considerando custo de produção variável ao longo do horizonte de planejamento.

Apresentamos a seguir uma proposta para a resolução do problema de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade.

3.4 Uma abordagem combinada

Como pode-se observar, o problema de dimensionamento de lotes com restrição de capacidade considerando tempo e custo de preparação de máquina é difícil de ser resolvido na otimalidade. Devido a sua importância e complexidade, este foi o alvo de estudos desta dissertação.

Foram propostos dois métodos para a obtenção dos limitantes, denominadas Método A e Método B. O Método A considera o problema decomposto por itens, enquanto o Método B utiliza a decomposição por período. Ambos os métodos utilizam heurísticas lagrangianas para factibilizar a solução obtida, tem-se, portanto os limitantes superiores. Os métodos podem ser descritos como no algoritmo geral a seguir e as próximas seções descreverão cada passo deste algoritmo:

Algoritmo - Abordagem Combinada

- Passo 1. **[decomposição do problema]** Reformular o problema utilizando a decomposição de Dantzig-Wolfe.
- Passo 2. **[limitante inferior]** Resolver o problema reformulado por geração de colunas.
- Passo 3. **[limitante superior]** A solução obtida na geração de colunas é utilizada para inicializar as heurísticas lagrangianas. Retorne a solução obtida pela heurística lagrangiana.
-

3.4.1 Método A

O Método A tem por objetivo obter os limitantes inferiores resolvendo a geração de colunas que utiliza a decomposição de Dantzig-Wolfe por itens. As soluções obtidas após a geração de colunas podem não ser inteiras, assim, estas são utilizadas para dar início a um procedimento heurístico para obter os limitantes superiores, ou seja, as soluções factíveis. Foram testadas algumas estratégias diferentes durante o processo de geração de colunas. Na geração de colunas, o problema mestre é resolvido utilizando o CPLEX 11.0. E, para a resolução dos subproblemas o algoritmo de Wagner-Whitin foi implementado segundo as modificações de Evans (1985).

Limitante inferior

Para a obtenção do limitante inferior foram utilizadas duas estratégias denominadas por: Versão1 (V1) e Versão2 (V2). Em ambas estratégias, o problema mestre foi resolvido utilizando o solver CPLEX 11.0 e os subproblemas resolvidos pelo algoritmo de Wagner & Whitin (1958). Na estratégia V2, foi utilizada, também, a heurística de factibilização baseada em Trigeiro et al. (1989) durante o processo de geração de colunas. Esta heurística foi executada a cada 5 iterações do processo e as colunas encontradas foram inseridas ao problema mestre. Este

procedimento de inserção de colunas factíveis foi chamado de “mesclagem de colunas”. A Tabela 3.1 ilustra de maneira resumida os procedimentos V1 e V2.

Tabela 3.1: Método A: limitantes inferiores

Limitante Inferior	Decomposição por Itens			
	Versão	Problema Mestre	Subproblemas	Mesclagem de Colunas
	V1	CPLEX 11.0	algoritmo de Wagner & Whitin (1958)	Não
V2	CPLEX 11.0	algoritmo de Wagner & Whitin (1958)	Sim	

Limitante superior

Para obter as soluções factíveis, foram testadas várias estratégias. Em todas, utilizou-se a solução resultante da aplicação do método de geração de colunas para dar início a execução das heurísticas lagrangianas:

- Heurística A (HA): A solução obtida pelos subproblemas na última iteração da geração de colunas do procedimento V1 é utilizada para inicializar a heurística de Trigeiro et al. (1989), executada por 20 iterações;
- Heurística B (HB): A solução obtida pelos subproblemas na última iteração da geração de colunas do procedimento V1 é utilizada para inicializar a heurística de Araujo & Arenales (2000), executada por 20 iterações;
- Heurística C (HC): Recupera-se os valores de x_{it} e I_{it} , utilizando as equações (3.19) e (3.20), após o término de V1. Faça $y_{it} = 1$ quando $x_{it} > 0$ e $y_{it} = 0$ quando $x_{it} = 0$. Estes valores são utilizados para inicializar a heurística de Trigeiro et al. (1989), esta heurística é executada por 20 iterações;
- Heurística D (HD): Recupera-se os valores de x_{it} e I_{it} , utilizando as equações (3.19) e (3.20), após o término de V1. Faça $y_{it} = 1$ quando $x_{it} > 0$ e $y_{it} = 0$ quando $x_{it} = 0$. Estes valores são utilizados para inicializar a heurística de Araujo & Arenales (2000), esta heurística é executada por 20 iterações;
- Heurística E (HE): A solução obtida pelos subproblemas na última iteração da geração de colunas do procedimento V2 é utilizada para inicializar a heurística de Trigeiro et al. (1989), executada por 20 iterações;
- Heurística F (HF): A solução obtida pelos subproblemas na última iteração da geração de colunas do procedimento V2 é utilizada para inicializar a heurística de Araujo & Arenales (2000), executada por 20 iterações;
- Heurística G (HG): Recupera-se os valores de x_{it} e I_{it} , utilizando as equações (3.19) e (3.20), após o término de V2. Faça $y_{it} = 1$ quando $x_{it} > 0$ e $y_{it} = 0$ quando $x_{it} = 0$. Estes valores

são utilizados para inicializar a heurística de Trigeiro et al. (1989), esta heurística é executada por 20 iterações;

- Heurística H (HH): Recupera-se os valores de x_{it} e I_{it} , utilizando as equações (3.19) e (3.20), após o término de V2. Faça $y_{it} = 1$ quando $x_{it} > 0$ e $y_{it} = 0$ quando $x_{it} = 0$. Estes valores são utilizados para inicializar a heurística de Araujo & Arenales (2000), esta heurística é executada por 20 iterações;

A Tabela 3.2 apresenta um resumo de como foi elaborada cada uma das heurísticas utilizadas para encontrar o limitante superior para o problema.

Tabela 3.2: Método A: limitantes superiores

Heurística		Decomposição por Itens					
		Geração de Colunas				Factibilização	
		V1 _A *	V1 _B **	V2 _A *	V2 _B **	Trigeiro et al. (1989)	Araujo & Arenales (2000)
Limitante Superior	HA	X				X	
	HB	X					X
	HC		X			X	
	HD		X				X
	HE			X		X	
	HF			X			X
	HG				X	X	
	HH				X		X

V1_A* e V2_A* - solução da última iteração dos subproblemas de V1 e V2, respectivamente.

V1_B** e V2_B** - recuperação dos valores x e I ao final de V1 e V2, respectivamente.

3.4.2 Método B

O Método B obtém os limitantes inferiores resolvendo a geração de colunas que utiliza a decomposição de Dantzig-Wolfe por períodos. As soluções obtidas após a geração de colunas podem não ser inteiras, assim, estas são utilizadas para dar início a um procedimento heurístico para obter os limitantes superiores, ou seja, as soluções factíveis. Na geração de colunas, o problema mestre é resolvido utilizando o CPLEX 11.0.

Limitante inferior

Para a obtenção do limitante inferior foi utilizado o método de geração de colunas para o problema decomposto por períodos, este procedimento foi chamado de Versão3 (V3). O problema mestre e os subproblemas foram resolvidos com o auxílio do *solver* CPLEX 11.0.

A Tabela 3.3 apresenta um resumo de como foi encontrado o limitante inferior no Método B.

Limitante superior

As soluções factíveis foram obtidas de duas maneiras diferentes. Em ambas, utilizou-se a solução inicial resultante da aplicação do método de geração de colunas para dar início a execução das heurísticas lagrangianas:

Tabela 3.3: Método B: limitante inferior

Limitante Inferior	Decomposição por Períodos		
	Versão	Problema Mestre	Subproblemas
	V3	CPLEX 11.0	CPLEX 11.0

- Heurística T (HT): Recupera-se os valores de x_{it} e I_{it} , utilizando a equação (3.33), após o término da geração de colunas. Faça $y_{it} = 1$ quando $x_{it} > 0$ e $y_{it} = 0$ quando $x_{it} = 0$. Estes valores são utilizados para inicializar a heurística de Trigeiro et al. (1989), executada por 20 iterações;
- Heurística S (HS): Recupera-se os valores de x_{it} e I_{it} , utilizando a equação (3.33), após o término da geração de colunas. Faça $y_{it} = 1$ quando $x_{it} > 0$ e $y_{it} = 0$ quando $x_{it} = 0$. Estes valores são utilizados para inicializar a heurística de Araujo & Arenales (2000), executada por 20 iterações;

A Tabela 3.4 apresenta um resumo de como foi encontrado o limitante superior para o problema no Método B.

Tabela 3.4: Método B: limitantes superiores

	Heurística	Decomposição por Períodos		
		Geração de Colunas	Factibilização	
			Trigeiro et al. (1989)	Araujo & Arenales (2000)
Limitante Superior	HT	X	X	
	HS	X		X

Experimentos computacionais

Este capítulo tem por objetivo avaliar e comparar os métodos apresentados no Capítulo 3. Para comparar o desempenho de cada um dos métodos, utilizou-se os critérios: tempo de execução, GAP e quantidade de soluções factíveis encontradas. Os testes computacionais foram realizados em um conjunto de classes de problemas definidos em Araujo & Arenales (2000), em que os custos de produção, tempo e custo de preparação de máquina e recursos disponíveis são variados.

Na implementação dos métodos foi utilizada a linguagem de programação C++ e o *software* comercial CPLEX 11.0 (*Concert*).

4.1 Geração de dados

Os dados utilizados para os testes computacionais foram gerados aleatoriamente segundo uma distribuição de probabilidade uniforme. Os intervalos utilizados para a geração de dados foram baseados nos trabalhos de Araujo & Arenales (2000) conforme a Tabela 4.1.

A capacidade foi gerada considerando uma produção do tipo lote-por-lote ($x_{it} = d_{it}$), ou seja:

$$Cap_t = \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n (a_{it}d_{it} + b_{it}y_{it})}{T},$$

em que $y_{it} = 1$ se $d_{it} \neq 0$ e, $y_{it} = 0$, caso contrário.

Os intervalos para geração de dados utilizados em Araujo & Arenales (2000), e neste trabalho, são baseados em Trigeiro et al. (1989), com ligeiras modificações, como por exemplo, o custo unitário de produção.

Tabela 4.1: Intervalos considerados para a geração dos dados.

Parâmetros	Variações
n (número de itens)	6 12 24
T (número de períodos)	15 30
Custo Unitário de Produção (c_{it})	0 [10, 30]
Custo de Preparação (q_{it})	[100, 500] [200, 1000]
Custo de estocagem (h_{it})	[1, 5]
Tempo unitário para produção (a_{it})	1
Tempo de preparação (b_{it})	[10, 50] [30, 150]
Demanda (d_{it}) - OBS: 25% das demandas dos 4 primeiros períodos são zero	[0, 180]
Capacidade (C_t , apertada e normal, respectivamente)	$Cap_t / 1,1$ $Cap_t / 1,0$

Os parâmetros n , T , c_{it} , q_{it} e b_{it} da Tabela 4.1 são combinados conforme descreve a Tabela 4.2. Os demais parâmetros, que não há diversificação, mantêm-se como descrito na Tabela 4.1. Para cada Classe(n,T) foram gerados 10 exemplares. A análise dos resultados baseiam-se apenas nos exemplares factíveis.

Os testes computacionais foram realizados em um computador com a seguinte configuração: Processador Intel Core 2 Duo CPU 2.33GHz, memória RAM: 3G. Para cada Classe(n,T), da Tabela 4.2, foram realizados testes com a capacidade normal e apertada (Tabela 4.1).

Tabela 4.2: Geração dos dados para as classes de problemas.

Classe	c_{it}	q_{it}	b_{it}	Classe(n, T)	n	T
C1	[0,0]	[200,1000]	[30,150]	C1(6,15)	6	15
				C1(6,30)	6	30
				C1(12,15)	12	15
				C1(12,30)	12	30
				C1(24,15)	24	15
				C1(24,30)	24	30
C2	[0,0]	[200,1000]	[10,50]	C2(6,15)	6	15
				C2(6,30)	6	30
				C2(12,15)	12	15
				C2(12,30)	12	30
				C2(24,15)	24	15
				C2(24,30)	24	30
C3	[0,0]	[100,500]	[30,150]	C3(6,15)	6	15
				C3(6,30)	6	30
				C3(12,15)	12	15
				C3(12,30)	12	30
				C3(24,15)	24	15
				C3(24,30)	24	30
C4	[0,0]	[100,500]	[10,50]	C4(6,15)	6	15
				C4(6,30)	6	30
				C4(12,15)	12	15
				C4(12,30)	12	30
				C4(24,15)	24	15
				C4(24,30)	24	30
C5	[10,30]	[200,1000]	[30,150]	C5(6,15)	6	15
				C5(6,30)	6	30
				C5(12,15)	12	15
				C5(12,30)	12	30
				C5(24,15)	24	15
				C5(24,30)	24	30
C6	[10,30]	[200,1000]	[10,50]	C6(6,15)	6	15
				C6(6,30)	6	30
				C6(12,15)	12	15
				C6(12,30)	12	30
				C6(24,15)	24	15
				C6(24,30)	24	30
C7	[10,30]	[100,500]	[30,150]	C7(6,15)	6	15
				C7(6,30)	6	30
				C7(12,15)	12	15
				C7(12,30)	12	30
				C7(24,15)	24	15
				C7(24,30)	24	30
C8	[10,30]	[100,500]	[10,50]	C8(6,15)	6	15
				C8(6,30)	6	30
				C8(12,15)	12	15
				C8(12,30)	12	30
				C8(24,15)	24	15
				C8(24,30)	24	30

4.2 Resultados computacionais

O desempenho de cada um dos métodos citados no Capítulo 3 foi comparado segundo os critérios: tempo de execução, GAP (definido por (4.1)) e quantidade de soluções factíveis encontradas. Os testes computacionais foram realizados no conjunto de classes de problemas definidos na Tabela 4.2.

O GAP é definido pela fórmula:

$$GAP = \left[\frac{\text{PROCEDIMENTO} - \text{CPLEX_Inteiro}}{\text{CPLEX_Inteiro}} \right] \times 100 \quad (4.1)$$

em que PROCEDIMENTO é o valor da função objetivo do método avaliado e CPLEX_Inteiro é a melhor solução inteira encontrada pelo CPLEX 11.0, com o tempo de execução limitado em 1800 segundos.

Devido à grande quantidade de classes de problemas e métodos testados, a comparação de todos os métodos é feita por etapas. Os resultados são apresentados de acordo com os limitantes inferiores e superiores. Para facilitar a apresentação dos resultados, as heurísticas lagrangianas de Trigeiro et al. (1989) e Araujo & Arenales (2000) foram chamadas de HL1 e HL2, respectivamente. Estas heurísticas foram executadas limitadas a 200 iterações.

A comparação dos resultados referentes aos GAP's obtidos por cada um dos procedimentos é apresentado por meio de gráficos (Dolan & Moré, 2002). Para a interpretação do gráfico, considere \mathcal{P} o conjunto de instâncias testadas, ou seja, todos os problemas da Tabela 4.2, lembrando que para cada Classe(n,T) foram gerados 10 exemplares. O total de exemplares factíveis gerados foi de 809. Considere ainda \mathcal{S} o conjunto dos algoritmos testados e que serão comparados. O critério de comparação é o GAP. Portanto, definimos por:

$$t_{p,s} = \text{GAP obtido pelo algoritmo } s \text{ ao resolver o problema } p. \quad (4.2)$$

A razão de desempenho é dada por:

$$r_{p,s} = \frac{t_{p,s}}{\min \{t_{p,s'} : s' \in \mathcal{S}\}}. \quad (4.3)$$

Ou seja, o desempenho do algoritmo s para resolver o problema p será comparado com o algoritmo de melhor desempenho que resolveu o problema p , ou ainda, o algoritmo de \mathcal{S} que obteve melhor GAP ao resolver o problema p . Um parâmetro r_M , com $r_M \geq r_{p,s}$ para todo $p \in \mathcal{P}$ e todo $s \in \mathcal{S}$, é escolhido e atribui-se a todo algoritmo que falhar, ou seja, o algoritmo s que não conseguir encontrar uma solução para o exemplar p tem razão de desempenho r_M .

Considere, ainda, $n_p = |\mathcal{P}|$. Define-se:

$$\rho_s(\tau) = \frac{1}{n_p} |p \in \mathcal{P} : r_{p,s} \leq \tau| \quad (4.4)$$

Sendo $\rho_s(\tau)$ a probabilidade do algoritmo $s \in \mathcal{S}$ com a razão de desempenho $r_{p,s}$ estar dentro do fator $\tau > 0$. A função ρ_s é a função de distribuição acumulada da razão de desempenho.

O lado direito da equação 4.4 pode ser escrito como:

$$P(r_{p,s} \leq \tau : 1 \leq s \leq n_S) \quad (4.5)$$

Quando o valor de r_M é muito elevado ($r_M \gg 1$), normalmente, utiliza-se a escala logarítmica para facilitar a visualização.

Após estas definições, vamos a interpretação do gráfico. O eixo y representa a fração de exemplares resolvidos e o eixo x é dado por $\rho(\tau)$. Assim, tem-se que quanto mais distante da origem estiver a curva no eixo y e ainda o eixo x com $\rho(1)$, maior o número de exemplares resolvidos com o melhor desempenho, ou seja, com melhores GAP's. Se a curva, no eixo y , encontrar o patamar 1, significa que todos os exemplares foram resolvidos. Se $\rho(\tau)$, para $\tau \mapsto r_M$, analisado conjuntamente com o eixo y , tem-se o número total de exemplares que o algoritmo s conseguiu resolver.

Portanto, a análise relativa ao GAP será realizada por meio de interpretação do gráfico de Dolan & Moré (2002) que utiliza a representação logarítmica devido ao valor de r_M . E, a análise do tempo de execução de cada algoritmo, será feita por meio de tabelas, onde estas apresentam o tempo médio de execução de cada algoritmo para cada classe de problema e o número de exemplares factíveis encontrados.

4.2.1 Limitante inferior

Esta seção aborda os resultados obtidos pelos algoritmos de geração de colunas apresentados no capítulo anterior, e ainda, os resultados obtidos pela relaxação linear do problema, comparando-os.

Os procedimentos propostos neste trabalho para obtenção dos limitantes inferiores baseiam-se na decomposição de Dantzig-Wolfe aplicado conjuntamente com o algoritmo de geração de colunas, como descrito no Capítulo 3. Um resumo dos procedimentos pode ser visto na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Métodos implementados para encontrar limitantes inferiores.

Versão	GC* por Itens	GC* por Períodos	Mesclagem de Colunas**
V1	X		
V2	X		X
V3		X	

* Geração de Colunas

** Inclusão de colunas factíveis durante o processo de geração de colunas.

As Tabelas 4.4 e 4.5 referem-se ao tempo médio (em segundos) de execução dos algoritmos e a quantidade de exemplares factíveis encontrados por cada um dos métodos num limite de tempo de no máximo 1800 segundos. A tabela deve ser interpretada: o primeiro número é referente ao tempo (em segundos) e em “()” a quantidade de exemplares factíveis. Como pode ser observado, ambas as gerações de colunas do Método A (decomposição por itens) são mais rápidas que a do Método B (decomposição por períodos). E, ainda, observe que o algoritmo V3 não conseguiu encontrar um limitante para muitos exemplares no tempo de execução pré-estabelecido (1800 segundos). Esta

observação também é reportada em Pimentel et al. (2006). É indiscutível a superioridade, com relação ao tempo de execução, do Método A (V1 e V2). Observe ainda que os algoritmos V1 e V2 também são mais rápidos do que a resolução da relaxação linear do problema. Os resultados referentes a relaxação linear encontram-se na coluna “Linear”. O tempo de execução do modelo original no CPLEX foi limitado a 1800 segundos, e o resultado do tempo de execução do CPLEX está na coluna “Inteiro”. Portanto, a execução dos algoritmos, V1 e V2 são mais rápidas que as demais.

Tabela 4.4: Tempo médio de execução de cada algoritmo para encontrar o limitante inferior (capacidade normal).

Classe	Inteiro	Linear	V1	V2	V3
C1(6,15)	0.23(9)	0.09(9)	0.01(9)	0.01(9)	7.20(9)
C1(6,30)	1.62(9)	0.10(9)	0.02(9)	0.02(9)	16.32(9)
C1(12,15)	0.25(10)	0.09(10)	0.01(10)	0.01(10)	6.46(10)
C1(12,30)	2.06(10)	0.10(10)	0.01(10)	0.02(10)	46.49(10)
C1(24,15)	0.52(10)	0.10(10)	0.01(10)	0.02(10)	123.32(10)
C1(24,30)	1.75(10)	0.11(10)	0.02(10)	0.02(10)	341.53(10)
C2(6,15)	1.59(8)	0.08(8)	0.01(8)	0.01(8)	4.66(8)
C2(6,30)	164.08(8)	0.09(8)	0.02(8)	0.03(8)	12.48(8)
C2(12,15)	1.74(9)	0.09(9)	0.01(9)	0.02(9)	6.78(9)
C2(12,30)	645.12(9)	0.09(9)	0.02(9)	0.03(9)	42.13(9)
C2(24,15)	7.48(10)	0.09(10)	0.02(10)	0.02(10)	130.09(10)
C2(24,30)	150.63(10)	0.11(10)	0.03(10)	0.04(10)	594.57(10)
C3(6,15)	0.29(9)	0.08(9)	0.01(9)	0.00(9)	2.40(9)
C3(6,30)	2.51(9)	0.08(9)	0.01(9)	0.02(9)	7.65(9)
C3(12,15)	0.26(9)	0.09(9)	0.01(9)	0.01(9)	5.37(9)
C3(12,30)	1.42(10)	0.09(10)	0.01(10)	0.02(10)	43.46(10)
C3(24,15)	0.32(10)	0.09(10)	0.01(10)	0.01(10)	92.36(10)
C3(24,30)	0.81(10)	0.10(10)	0.02(10)	0.02(10)	207.42(10)
C4(6,15)	0.60(6)	0.08(6)	0.00(6)	0.01(6)	0.61(6)
C4(6,30)	98.28(8)	0.08(8)	0.02(8)	0.03(8)	2.57(8)
C4(12,15)	1.03(9)	0.08(9)	0.01(9)	0.01(9)	7.28(9)
C4(12,30)	248.35(10)	0.09(10)	0.02(10)	0.04(10)	48.23(10)
C4(24,15)	4.80(10)	0.09(10)	0.01(10)	0.01(10)	241.17(9)
C4(24,30)	214.57(10)	0.09(10)	0.03(10)	0.04(10)	195.55(9)
C5(6,15)	0.17(10)	0.15(10)	0.02(10)	0.03(10)	5.05(10)
C5(6,30)	0.60(8)	0.15(8)	0.02(8)	0.03(8)	11.88(8)
C5(12,15)	0.22(10)	0.15(10)	0.02(10)	0.03(10)	29.86(10)
C5(12,30)	0.51(10)	0.16(10)	0.02(10)	0.03(10)	63.16(10)
C5(24,15)	0.27(10)	0.16(10)	0.02(10)	0.03(10)	142.47(10)
C5(24,30)	0.93(10)	0.17(10)	0.03(10)	0.03(10)	64.51(10)
C6(6,15)	0.60(8)	0.14(8)	0.02(8)	0.03(8)	3.63(8)
C6(6,30)	59.03(7)	0.14(7)	0.03(7)	0.04(7)	7.96(7)
C6(12,15)	1.39(10)	0.15(10)	0.02(10)	0.03(10)	3.72(10)
C6(12,30)	40.82(10)	0.15(10)	0.03(10)	0.04(10)	26.12(10)
C6(24,15)	3.48(10)	0.15(10)	0.03(10)	0.03(10)	40.49(10)
C6(24,30)	40.39(10)	0.16(10)	0.04(10)	0.04(10)	55.54(9)
C7(6,15)	0.12(10)	0.14(10)	0.02(10)	0.02(10)	2.08(10)
C7(6,30)	0.47(9)	0.14(9)	0.02(9)	0.03(9)	5.85(9)
C7(12,15)	0.15(10)	0.14(10)	0.02(10)	0.02(10)	4.13(10)
C7(12,30)	0.60(10)	0.15(10)	0.02(10)	0.02(10)	30.13(10)
C7(24,15)	0.21(10)	0.15(10)	0.02(10)	0.02(10)	68.30(10)
C7(24,30)	0.65(10)	0.17(10)	0.02(10)	0.03(10)	99.08(10)
C8(6,15)	0.45(8)	0.10(8)	0.01(8)	0.02(8)	0.48(8)
C8(6,30)	2.27(8)	0.10(8)	0.02(8)	0.03(8)	2.48(8)
C8(12,15)	0.46(9)	0.10(9)	0.01(9)	0.02(9)	4.27(9)
C8(12,30)	5.24(10)	0.10(10)	0.03(10)	0.03(10)	14.53(10)
C8(24,15)	1.13(10)	0.10(10)	0.02(10)	0.02(10)	282.26(10)
C8(24,30)	9.50(10)	0.14(10)	0.04(10)	0.05(10)	222.94(7)

Tabela 4.5: Tempo médio de execução de cada algoritmo para encontrar o limitante inferior (capacidade apertada).

Classe	Inteiro	Linear	V1	V2	V3
C1(6,30)	23.36(5)	0.17(5)	0.04(5)	0.05(5)	4.93(5)
C1(12,15)	0.56(9)	0.17(9)	0.03(9)	0.04(9)	4.68(9)
C1(12,30)	9.60(9)	0.17(9)	0.04(9)	0.06(9)	28.70(9)
C1(24,15)	0.78(10)	0.17(10)	0.04(10)	0.05(10)	86.31(10)
C1(24,30)	7.15(10)	0.19(10)	0.04(10)	0.05(10)	315.64(10)
C2(6,15)	34.33(5)	0.16(5)	0.04(5)	0.04(5)	2.38(5)
C2(6,30)	1881.52(5)	0.16(5)	0.06(5)	0.08(5)	5.58(5)
C2(12,15)	478.23(6)	0.16(6)	0.04(6)	0.05(6)	8.56(6)
C2(12,30)	1836.70(8)	0.17(8)	0.06(8)	0.08(8)	9.67(8)
C2(24,15)	1846.27(10)	0.17(10)	0.05(10)	0.06(10)	345.23(10)
C2(24,30)	1752.54(9)	0.18(9)	0.08(9)	0.13(9)	657.93(9)
C3(6,15)	0.90(4)	0.16(4)	0.03(4)	0.04(4)	0.65(4)
C3(6,30)	105.80(8)	0.16(8)	0.04(8)	0.05(8)	1.98(8)
C3(12,15)	0.47(8)	0.16(8)	0.03(8)	0.04(7)	28.40(8)
C3(12,30)	11.59(10)	0.17(10)	0.03(10)	0.05(10)	87.55(10)
C3(24,15)	1.39(10)	0.16(10)	0.03(10)	0.05(10)	419.11(10)
C3(24,30)	6.68(10)	0.18(10)	0.04(10)	0.05(10)	260.98(10)
C4(6,15)	4.21(4)	0.15(4)	0.03(4)	0.03(4)	0.55(4)
C4(6,30)	1880.46(2)	0.16(2)	0.07(2)	0.13(2)	1.81(2)
C4(12,15)	332.26(8)	0.15(8)	0.03(8)	0.04(8)	6.59(8)
C4(12,30)	1793.62(5)	0.17(5)	0.08(5)	0.12(5)	34.90(5)
C4(24,15)	1848.52(10)	0.16(10)	0.04(10)	0.06(10)	292.82(10)
C4(24,30)	1793.81(10)	0.18(10)	0.10(10)	0.15(10)	408.80(10)
C5(6,15)	0.27(5)	0.18(5)	0.04(5)	0.06(5)	2.93(5)
C5(6,30)	3.02(4)	0.19(4)	0.05(4)	0.07(4)	6.41(4)
C5(12,15)	0.20(9)	0.19(9)	0.04(9)	0.05(9)	24.32(9)
C5(12,30)	3.77(10)	0.19(10)	0.05(10)	0.06(10)	62.81(10)
C5(24,15)	0.68(10)	0.19(10)	0.05(10)	0.06(10)	48.83(10)
C5(24,30)	3.92(10)	0.21(10)	0.05(10)	0.07(10)	134.46(10)
C6(6,15)	11.18(2)	0.19(2)	0.04(2)	0.06(2)	3.20(2)
C6(6,30)	727.88(3)	0.18(3)	0.06(3)	0.08(3)	5.12(3)
C6(12,15)	53.99(9)	0.18(9)	0.05(9)	0.06(9)	3.63(9)
C6(12,30)	1805.89(8)	0.19(8)	0.07(8)	0.09(8)	19.55(8)
C6(24,15)	495.54(9)	0.19(9)	0.05(9)	0.07(9)	16.94(8)
C6(24,30)	1723.64(10)	0.21(10)	0.09(10)	0.13(10)	128.74(9)
C7(6,15)	0.08(7)	0.18(7)	0.04(7)	0.05(7)	1.70(7)
C7(6,30)	0.96(6)	0.18(6)	0.04(6)	0.06(6)	4.32(6)
C7(12,15)	0.23(9)	0.18(9)	0.04(9)	0.05(9)	18.75(9)
C7(12,30)	1.71(10)	0.18(10)	0.04(10)	0.05(10)	37.40(9)
C7(24,15)	0.21(8)	0.18(8)	0.04(8)	0.05(8)	51.48(4)
C7(24,30)	3.67(10)	0.20(10)	0.05(10)	0.06(10)	62.14(8)
C8(6,15)	123.16(7)	0.17(7)	0.04(7)	0.05(7)	0.66(7)
C8(6,30)	98.93(6)	0.18(6)	0.06(6)	0.08(6)	2.14(6)
C8(12,15)	28.36(3)	0.17(3)	0.04(3)	0.06(3)	2.45(3)
C8(12,30)	965.73(9)	0.18(9)	0.07(9)	0.09(9)	17.17(9)
C8(24,15)	560.96(8)	0.18(8)	0.05(8)	0.07(8)	26.85(6)
C8(24,30)	1382.32(8)	0.19(8)	0.08(8)	0.13(8)	143.99(7)

O gráfico da Figura 4.1, compara os GAP's obtidos pelos algoritmos V1, V2, V3 e a resolução da relaxação linear por meio do CPLEX.

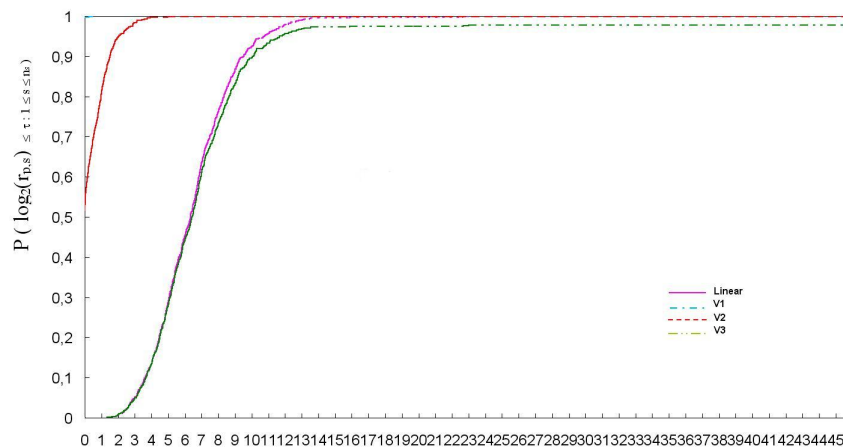


Figura 4.1: Gráfico de desempenho dos algoritmos para encontrar o limitante inferior.

Como podemos ver no gráfico da Figura 4.1, o algoritmo V1 obteve os melhores desempenhos, ou seja, empatou com outros algoritmos ou obteve os melhores GAP's para quase 100% dos exemplares. Observe a curva que descreve o desempenho da relaxação linear do problema, descrita no gráfico pela curva "Linear". Veja que, o CPLEX conseguiu resolver todos os exemplares no tempo pré-estabelecido, entretanto, não conseguiu obter o bom desempenho de V1. O algoritmo V3 obteve desempenho similar a resolução da relaxação linear do problema, entretanto, não conseguiu resolver todos os problemas, portanto, dentre V3 e a relaxação linear, tem-se que a relaxação linear apresenta melhor desempenho. Para a curva que representa V2, tem-se que este algoritmo obteve melhor desempenho que V3 e a relaxação linear, empatando ou obtendo os melhores melhores GAP's para aproximadamente 55% dos exemplares, porém, não conseguiu obter maior número de melhores limitantes quanto V1. Portanto, podemos dizer que para os problemas e algoritmos avaliados, V1 é o que apresenta melhor desempenho.

Uma observação a ser acrescentada é que os algoritmos V1, V2 e V3 demoram muito para concluir que um problema não é factível. Muitas vezes gastam os 1800 segundos sem que tenham obtida tal informação, ou seja, param a execução por terem ultrapassado o limite de tempo pré-estabelecido. Uma outra observação a ser feita, é relativa ao tempo computacional dos exemplares cuja capacidade é apertada, pois o tempo de execução dos algoritmos para estes problemas é maior do que para os exemplares com capacidade normal.

Na Tabela 4.6 está apresentada a média do tempo de execução, do GAP e o número total de exemplares factíveis. Como já constatado, V1 e V2 são rápidas e V1 apresenta o melhor GAP médio. Ambas conseguiram encontrar todos os limitantes inferiores. Entretanto, V3 além de possuir o pior GAP e tempo médio de execução, também não conseguiu encontrar um limitante inferior para todos os exemplares factíveis no tempo pré-estabelecido.

Tabela 4.6: GAP médio, tempo médio e total de exemplares factíveis encontrados por V1, V2 e V3.

	Inteiro	Linear	V1	V2	V3
GAP	-	40.68%	0.71%	1.11%	42.63%
Tempo	460.07	0.14	0.03	0.04	75.19
Total de exemplares	809	809	809	809	791

4.2.2 Limitante superior

Esta seção aborda os resultados obtidos pelos algoritmos apresentados no capítulo anterior e os comparam. Os resultados do Método A (HA, HB, HC, HD, HE, HF, HG e HH, veja Tabela 4.7), são muito melhores que o Método B (HT e HS, veja Tabela 4.7) pois apresentam melhores GAP's e tempos de execução. Devido ao grande número de heurísticas, a análise do GAP será feita em etapas. Primeiramente será analisada as heurísticas HA, HB, HC e HD (utilizam a solução da geração de colunas por itens), destacando a melhor dentre estas. Depois, analisaremos as heurísticas HD, HE, HF e HG (utilizam a solução da geração de colunas por itens, com mesclagem de colunas factíveis), destacando a melhor dentre estas. Em seguida, as melhores serão comparadas com as heurísticas HT e HS (utilizam a solução da geração de colunas por períodos), conjuntamente com HL1 e HL2 (Trigeiro et al. (1989) e Araujo & Arenales (2000), respectivamente), destacando a que obteve o melhor desempenho. A análise do tempo de execução das heurísticas são apresentadas nas Tabelas 4.8 e 4.9, comparando-as com o tempo que o CPLEX levou para encontrar a solução inteira, lembrando que a execução do CPLEX foi limitada a 1800 segundos.

Tabela 4.7: Métodos implementados para encontrar o limitante superior.

Heurística	Solução Inicial					Factibilização	
	V1 _A *	V1 _B **	V2 _A *	V2 _B **	V3	Trigeiro et al. (1989)	Araujo & Arenales (2000)
HA	X					X	
HB	X						X
HC		X				X	
HD		X					X
HE			X			X	
HF			X				X
HG				X		X	
HH				X			X
HT					X	X	
HS					X		X

V1_A* e V2_A* - solução da última iteração dos subproblemas de V1 e V2, respectivamente.

V1_B** e V2_B** - recuperação dos valores x e I ao final de V1 e V2, respectivamente.

Ao observarmos as Tabelas 4.8 e 4.9 nota-se que as heurísticas HL1 e HL2 encontraram maior número de exemplares factíveis em um tempo computacional baixo. Entretanto, as heurísticas lagrangianas referentes ao Método A, apresentam tempo computacional muito melhor que HL1 e HL2. As heurísticas do Método A são em torno de 100% mais rápidas que HL1 e HL2. As heurísticas do Método B são bem mais lentas que as demais e, ainda, encontraram um número

menor de exemplares factíveis, isso ocorre principalmente por utilizarem a solução inicial vinda da geração de colunas por períodos (V3), ou seja, se V3 não obter a solução, não há execução de HT e HS.

Tabela 4.8: Tempo médio de execução de cada heurística para encontrar o limitante superior (capacidade normal).

Classe	Inteiro	HL1	HL2	HA	HB	HC	HD	HE	HF	HG	HH	HT	HS
C1(6,15)	0.23(9)	0.02(9)	0.02(9)	0.01(9)	0.01(9)	0.02(9)	0.02(9)	0.02(9)	0.02(9)	0.02(9)	0.02(9)	7.20(9)	7.20(9)
C1(6,30)	1.62(9)	0.08(9)	0.08(9)	0.04(9)	0.04(9)	0.06(9)	0.06(9)	0.04(9)	0.04(9)	0.06(9)	0.06(9)	16.34(9)	16.34(9)
C1(12,15)	0.25(10)	0.03(10)	0.03(10)	0.02(9)	0.02(9)	0.03(9)	0.03(9)	0.02(9)	0.02(9)	0.03(8)	0.03(8)	6.47(10)	6.47(10)
C1(12,30)	2.06(10)	0.13(10)	0.13(10)	0.04(10)	0.04(10)	0.07(10)	0.07(10)	0.05(10)	0.05(10)	0.08(10)	0.08(10)	46.53(10)	46.53(10)
C1(24,15)	0.52(10)	0.05(9)	0.05(9)	0.03(4)	0.03(4)	0.04(3)	0.04(3)	0.03(4)	0.03(4)	0.05(3)	0.05(3)	133.97(9)	133.97(9)
C1(24,30)	1.75(10)	0.22(10)	0.22(10)	0.06(8)	0.06(8)	0.11(6)	0.11(6)	0.07(8)	0.07(8)	0.12(7)	0.12(7)	341.57(10)	341.57(10)
C1(6,15)	1.59(8)	0.03(8)	0.03(8)	0.02(8)	0.02(8)	0.02(8)	0.02(8)	0.02(8)	0.02(8)	0.02(8)	0.02(8)	4.67(8)	4.67(8)
C2(6,30)	164.08(8)	0.11(8)	0.11(8)	0.05(8)	0.05(8)	0.09(8)	0.09(8)	0.06(8)	0.06(8)	0.10(8)	0.10(8)	12.51(8)	12.51(8)
C2(12,15)	1.74(9)	0.04(9)	0.04(9)	0.02(9)	0.02(9)	0.03(9)	0.03(9)	0.02(9)	0.02(9)	0.03(9)	0.03(9)	6.79(9)	6.79(9)
C2(12,30)	645.12(9)	0.20(9)	0.20(9)	0.08(9)	0.08(9)	0.14(9)	0.14(9)	0.09(9)	0.09(9)	0.15(9)	0.15(9)	42.19(9)	42.19(9)
C2(24,15)	7.48(10)	0.09(10)	0.09(10)	0.04(10)	0.04(10)	0.05(10)	0.05(10)	0.04(10)	0.04(10)	0.06(10)	0.06(10)	130.11(10)	130.11(10)
C2(24,30)	150.63(10)	0.40(10)	0.40(10)	0.13(10)	0.13(10)	0.23(10)	0.23(10)	0.14(10)	0.14(10)	0.24(10)	0.24(10)	594.69(10)	594.69(10)
C3(6,15)	0.29(9)	0.02(9)	0.02(9)	0.01(9)	0.01(9)	0.02(9)	0.02(9)	0.01(9)	0.01(9)	0.02(9)	0.02(9)	2.41(9)	2.41(9)
C3(6,30)	2.51(9)	0.08(9)	0.08(9)	0.04(9)	0.04(9)	0.07(9)	0.07(9)	0.04(9)	0.04(9)	0.07(9)	0.07(9)	7.68(9)	7.68(9)
C3(12,15)	0.26(9)	0.04(9)	0.04(9)	0.02(7)	0.02(7)	0.03(7)	0.03(7)	0.02(7)	0.02(7)	0.02(7)	0.02(7)	5.38(9)	5.38(9)
C3(12,30)	1.42(10)	0.18(10)	0.18(10)	0.06(10)	0.06(10)	0.10(10)	0.10(10)	0.06(10)	0.06(10)	0.10(10)	0.10(10)	43.50(10)	43.50(10)
C3(24,15)	0.32(10)	0.07(10)	0.07(10)	0.03(6)	0.03(6)	0.04(5)	0.04(5)	0.03(6)	0.03(6)	0.04(5)	0.04(5)	92.37(10)	92.37(10)
C3(24,30)	0.81(10)	0.43(9)	0.43(9)	0.08(7)	0.08(7)	0.14(7)	0.14(7)	0.08(7)	0.08(7)	0.14(7)	0.14(7)	224.89(9)	224.89(9)
C4(6,15)	0.60(6)	0.02(6)	0.02(6)	0.01(6)	0.01(6)	0.01(6)	0.01(6)	0.01(6)	0.01(6)	0.02(6)	0.02(6)	0.61(6)	0.61(6)
C4(6,30)	98.28(8)	0.14(8)	0.14(8)	0.07(8)	0.07(8)	0.12(8)	0.12(8)	0.07(8)	0.07(8)	0.12(8)	0.12(8)	2.62(8)	2.62(8)
C4(12,15)	1.03(9)	0.05(9)	0.05(9)	0.02(9)	0.02(9)	0.03(9)	0.03(9)	0.02(9)	0.02(9)	0.03(9)	0.03(9)	7.29(9)	7.29(9)
C4(12,30)	248.35(10)	0.23(10)	0.23(10)	0.10(10)	0.10(10)	0.19(10)	0.19(10)	0.12(10)	0.12(10)	0.22(10)	0.22(10)	48.31(10)	48.31(10)
C4(24,15)	4.80(10)	0.10(10)	0.10(10)	0.03(10)	0.03(10)	0.06(10)	0.06(10)	0.04(10)	0.04(10)	0.06(10)	0.06(10)	241.20(9)	241.20(9)
C4(24,30)	214.57(10)	0.49(10)	0.49(10)	0.16(10)	0.16(10)	0.30(10)	0.30(10)	0.17(10)	0.17(10)	0.31(10)	0.31(10)	195.70(9)	195.70(9)
C5(6,15)	0.17(10)	0.02(10)	0.02(10)	0.03(10)	0.03(10)	0.03(10)	0.03(10)	0.03(10)	0.03(10)	0.04(10)	0.04(10)	5.06(10)	5.06(10)
C5(6,30)	0.60(8)	0.05(8)	0.05(8)	0.04(8)	0.04(8)	0.06(8)	0.06(8)	0.04(8)	0.04(8)	0.06(8)	0.06(8)	11.90(8)	11.90(8)
C5(12,15)	0.22(10)	0.03(10)	0.03(10)	0.03(9)	0.03(9)	0.04(8)	0.04(8)	0.03(9)	0.03(9)	0.04(8)	0.04(8)	29.86(10)	29.86(10)
C5(12,30)	0.51(10)	0.09(10)	0.09(10)	0.05(10)	0.05(10)	0.07(10)	0.07(10)	0.06(10)	0.06(10)	0.08(9)	0.08(9)	63.18(10)	63.18(10)
C5(24,15)	0.27(10)	0.05(10)	0.05(10)	0.04(8)	0.04(8)	0.05(5)	0.05(5)	0.04(8)	0.04(8)	0.06(6)	0.06(6)	142.48(10)	142.48(10)
C5(24,30)	0.93(10)	0.14(10)	0.14(10)	0.07(7)	0.07(7)	0.11(6)	0.11(6)	0.08(7)	0.08(7)	0.12(7)	0.12(7)	64.55(10)	64.55(10)
C6(6,15)	0.60(8)	0.02(8)	0.02(8)	0.03(8)	0.03(8)	0.04(8)	0.04(8)	0.03(8)	0.03(8)	0.04(8)	0.04(8)	3.63(8)	3.63(8)
C6(6,30)	59.03(7)	0.10(7)	0.10(7)	0.06(7)	0.06(7)	0.09(7)	0.09(7)	0.07(7)	0.07(7)	0.10(7)	0.10(7)	7.98(7)	7.98(7)
C6(12,15)	1.39(10)	0.04(10)	0.04(10)	0.03(10)	0.03(10)	0.05(10)	0.05(10)	0.04(10)	0.04(10)	0.05(10)	0.05(10)	3.74(10)	3.74(10)
C6(12,30)	40.82(10)	0.15(10)	0.15(10)	0.07(10)	0.07(10)	0.11(10)	0.11(10)	0.08(10)	0.08(10)	0.13(10)	0.13(10)	26.16(10)	26.16(10)
C6(24,15)	3.48(10)	0.09(10)	0.09(10)	0.05(10)	0.05(10)	0.07(10)	0.07(10)	0.05(10)	0.05(10)	0.07(10)	0.07(10)	40.51(10)	40.51(10)
C6(24,30)	40.39(10)	0.33(10)	0.33(10)	0.11(10)	0.11(10)	0.20(10)	0.20(10)	0.12(10)	0.12(10)	0.20(10)	0.20(10)	55.63(9)	55.63(9)
C7(6,15)	0.12(10)	0.02(10)	0.02(10)	0.02(9)	0.02(9)	0.02(10)	0.02(10)	0.02(9)	0.02(9)	0.03(10)	0.03(10)	2.09(10)	2.09(10)
C7(6,30)	0.47(9)	0.06(9)	0.06(9)	0.04(9)	0.04(9)	0.06(9)	0.06(9)	0.04(9)	0.04(9)	0.06(9)	0.06(9)	5.86(9)	5.86(9)
C7(12,15)	0.15(10)	0.03(10)	0.03(10)	0.02(10)	0.02(10)	0.03(10)	0.03(10)	0.02(10)	0.02(10)	0.03(10)	0.03(10)	4.13(10)	4.13(10)
C7(12,30)	0.60(10)	0.08(10)	0.08(10)	0.05(10)	0.05(10)	0.07(9)	0.07(9)	0.05(10)	0.05(10)	0.08(10)	0.08(10)	30.15(10)	30.15(10)
C7(24,15)	0.21(10)	0.05(10)	0.05(10)	0.03(9)	0.03(9)	0.05(7)	0.05(7)	0.04(9)	0.04(9)	0.06(7)	0.06(7)	68.32(10)	68.32(10)
C7(24,30)	0.65(10)	0.15(10)	0.15(10)	0.07(9)	0.07(9)	0.13(8)	0.13(8)	0.08(9)	0.08(9)	0.13(8)	0.13(8)	99.12(10)	99.12(10)
C8(6,15)	0.45(8)	0.02(8)	0.02(8)	0.02(8)	0.02(8)	0.03(8)	0.03(8)	0.02(8)	0.02(8)	0.03(8)	0.03(8)	0.49(8)	0.49(8)
C8(6,30)	2.27(8)	0.09(8)	0.09(8)	0.05(8)	0.05(8)	0.08(8)	0.08(8)	0.06(8)	0.06(8)	0.09(8)	0.09(8)	2.50(8)	2.50(8)
C8(12,15)	0.46(9)	0.04(9)	0.04(9)	0.03(9)	0.03(9)	0.04(9)	0.04(9)	0.03(9)	0.03(9)	0.05(9)	0.05(9)	4.28(9)	4.28(9)
C8(12,30)	5.24(10)	0.15(10)	0.15(10)	0.07(10)	0.07(10)	0.11(10)	0.11(10)	0.08(10)	0.08(10)	0.13(10)	0.13(10)	14.57(10)	14.57(10)
C8(24,15)	1.13(10)	0.08(10)	0.08(10)	0.04(10)	0.04(10)	0.06(10)	0.06(10)	0.04(10)	0.04(10)	0.06(9)	0.06(9)	282.27(10)	282.27(10)
C8(24,30)	9.50(10)	0.32(10)	0.32(10)	0.11(10)	0.11(10)	0.20(10)	0.20(10)	0.13(10)	0.13(10)	0.20(10)	0.20(10)	223.04(7)	223.04(7)

Tabela 4.9: Tempo médio de execução de cada heurística para encontrar o limitante superior (capacidade apertada).

Classe	Inteiro	HL1	HL2	HA	HB	HC	HD	HE	HF	HG	HH	HT	HS
C1(6,30)	23.36(5)	0.08(4)	0.08(4)	0.07(4)	0.07(4)	0.10(4)	0.10(4)	0.08(4)	0.08(4)	0.11(4)	0.11(4)	4.80(4)	4.80(4)
C1(12,15)	0.56(9)	0.04(9)	0.04(9)	0.04(8)	0.04(8)	0.05(7)	0.05(7)	0.05(8)	0.05(8)	0.06(7)	0.06(7)	4.69(9)	4.69(9)
C1(12,30)	9.60(9)	0.14(9)	0.14(9)	0.09(9)	0.09(9)	0.12(9)	0.12(9)	0.10(9)	0.10(9)	0.14(9)	0.14(9)	28.76(9)	28.76(9)
C1(24,15)	0.78(10)	0.07(10)	0.07(10)	0.05(9)	0.05(9)	0.07(9)	0.07(9)	0.06(9)	0.06(9)	0.08(9)	0.08(9)	86.33(10)	86.33(10)
C1(24,30)	7.15(10)	0.30(10)	0.30(10)	0.11(9)	0.11(9)	0.17(9)	0.17(9)	0.11(9)	0.11(9)	0.17(9)	0.17(9)	315.72(10)	315.72(10)
C2(6,15)	34.33(5)	0.03(4)	0.03(4)	0.04(4)	0.04(4)	0.05(4)	0.05(4)	0.05(4)	0.05(4)	0.06(4)	0.06(4)	2.40(4)	2.40(4)
C2(6,30)	1881.52(5)	0.15(4)	0.15(4)	0.11(3)	0.11(3)	0.17(3)	0.17(3)	0.13(3)	0.13(3)	0.19(4)	0.19(4)	5.83(4)	5.83(4)
C2(12,15)	478.23(6)	0.07(6)	0.07(6)	0.06(5)	0.06(5)	0.08(4)	0.08(4)	0.06(5)	0.06(5)	0.09(4)	0.09(4)	9.25(5)	9.25(5)
C2(12,30)	1836.70(8)	0.30(8)	0.30(8)	0.14(6)	0.14(6)	0.24(7)	0.24(7)	0.20(7)	0.20(7)	0.33(8)	0.33(8)	9.89(7)	9.89(7)
C2(24,15)	1846.27(10)	0.16(9)	0.16(9)	0.07(9)	0.07(9)	0.11(9)	0.11(9)	0.11(9)	0.11(9)	0.15(9)	0.15(9)	271.26(9)	271.26(9)
C2(24,30)	1752.54(9)	0.61(7)	0.61(7)	0.27(7)	0.27(7)	0.47(7)	0.47(7)	0.32(7)	0.32(7)	0.53(7)	0.53(7)	676.01(7)	676.01(7)
C3(6,15)	0.90(4)	0.02(4)	0.02(4)	0.03(4)	0.03(4)	0.04(4)	0.04(4)	0.04(4)	0.04(4)	0.05(4)	0.05(4)	0.66(4)	0.66(4)
C3(6,30)	105.80(8)	0.09(8)	0.09(8)	0.07(8)	0.07(8)	0.10(8)	0.10(8)	0.09(8)	0.09(8)	0.12(8)	0.12(8)	2.01(8)	2.01(8)
C3(12,15)	0.47(8)	0.04(8)	0.04(8)	0.04(7)	0.04(7)	0.04(7)	0.04(7)	0.05(7)	0.05(7)	0.06(7)	0.06(7)	28.41(8)	28.41(8)
C3(12,30)	11.59(10)	0.18(10)	0.18(10)	0.09(10)	0.09(10)	0.14(10)	0.14(10)	0.11(10)	0.11(10)	0.16(10)	0.16(10)	87.61(10)	87.61(10)
C3(24,15)	1.39(10)	0.09(10)	0.09(10)	0.05(10)	0.05(10)	0.07(10)	0.07(10)	0.07(10)	0.07(10)	0.08(10)	0.08(10)	419.14(10)	419.14(10)
C3(24,30)	6.68(10)	0.43(10)	0.43(10)	0.12(10)	0.12(10)	0.20(10)	0.20(10)	0.13(10)	0.13(10)	0.21(10)	0.21(10)	261.10(10)	261.10(10)
C4(6,15)	4.21(4)	0.04(4)	0.04(4)	0.04(3)	0.04(3)	0.05(3)	0.05(3)	0.04(2)	0.04(2)	0.04(2)	0.04(2)	0.51(3)	0.51(3)
C4(6,30)	1880.46(2)	0.18(1)	0.18(1)	0.13(1)	0.13(1)	-0)	-0)	0.19(1)	0.19(1)	0.26(1)	0.26(1)	1.80(1)	1.80(1)
C4(12,15)	332.26(8)	0.07(8)	0.07(8)	0.06(8)	0.06(8)	0.07(7)	0.07(7)	0.06(8)	0.06(8)	0.09(7)	0.09(7)	6.61(8)	6.61(8)
C4(12,30)	1793.62(5)	0.36(5)	0.36(5)	0.19(2)	0.19(2)	0.36(4)	0.36(4)	0.24(3)	0.24(3)	0.38(3)	0.38(3)	34.66(3)	34.66(3)
C4(24,15)	1848.52(10)	0.14(9)	0.14(9)	0.07(9)	0.07(9)	0.11(9)	0.11(9)	0.09(9)	0.09(9)	0.12(9)	0.12(9)	281.91(9)	281.91(9)
C4(24,30)	1793.81(10)	0.68(10)	0.68(10)	0.34(10)	0.34(10)	0.62(10)	0.62(10)	0.45(10)	0.45(10)	0.75(10)	0.75(10)	409.11(10)	409.11(10)
C5(6,15)	0.27(5)	0.03(5)	0.03(5)	0.05(5)	0.05(5)	0.06(5)	0.06(5)	0.07(5)	0.07(5)	0.07(5)	0.07(5)	2.94(5)	2.94(5)
C5(6,30)	3.02(4)	0.07(4)	0.07(4)	0.07(4)	0.07(4)	0.08(4)	0.08(4)	0.09(4)	0.09(4)	0.11(4)	0.11(4)	6.43(4)	6.43(4)
C5(12,15)	0.20(9)	0.04(9)	0.04(9)	0.05(9)	0.05(9)	0.06(9)	0.06(9)	0.06(9)	0.06(9)	0.07(9)	0.07(9)	24.33(9)	24.33(9)
C5(12,30)	3.77(10)	0.12(10)	0.12(10)	0.08(10)	0.08(10)	0.11(10)	0.11(10)	0.09(10)	0.09(10)	0.13(10)	0.13(10)	62.84(10)	62.84(10)
C5(24,15)	0.68(10)	0.06(10)	0.06(10)	0.06(10)	0.06(10)	0.08(10)	0.08(10)	0.08(10)	0.08(10)	0.09(10)	0.09(10)	48.85(10)	48.85(10)
C5(24,30)	3.92(10)	0.21(10)	0.21(10)	0.10(10)	0.10(10)	0.15(9)	0.15(9)	0.11(10)	0.11(10)	0.16(10)	0.16(10)	134.51(10)	134.51(10)
C6(6,15)	11.18(2)	0.04(2)	0.04(2)	0.06(1)	0.06(1)	0.08(1)	0.08(1)	0.08(2)	0.08(2)	-0)	-0)	2.67(1)	2.67(1)
C6(6,30)	727.88(3)	0.15(2)	0.15(2)	0.11(2)	0.11(2)	0.16(2)	0.16(2)	0.14(2)	0.14(2)	0.19(2)	0.19(2)	5.09(2)	5.09(2)
C6(12,15)	53.99(9)	0.07(9)	0.07(9)	0.08(8)	0.08(8)	0.11(7)	0.11(7)	0.10(8)	0.10(8)	0.13(8)	0.13(8)	3.65(9)	3.65(9)
C6(12,30)	1805.89(8)	0.31(8)	0.31(8)	0.14(6)	0.14(6)	0.25(6)	0.25(6)	0.17(6)	0.17(6)	0.28(7)	0.28(7)	17.90(6)	17.90(6)
C6(24,15)	495.54(9)	0.16(9)	0.16(9)	0.12(9)	0.12(9)	0.21(9)	0.21(9)	0.16(9)	0.16(9)	0.23(8)	0.23(8)	16.99(8)	16.99(8)
C6(24,30)	1723.64(10)	0.66(10)	0.66(10)	0.24(8)	0.24(8)	0.33(7)	0.33(7)	0.36(9)	0.36(9)	0.41(7)	0.41(7)	131.83(7)	131.83(7)
C7(6,15)	0.08(7)	0.02(7)	0.02(7)	0.05(7)	0.05(7)	0.05(7)	0.05(7)	0.06(7)	0.06(7)	0.07(7)	0.07(7)	1.71(7)	1.71(7)
C7(6,30)	0.96(6)	0.07(6)	0.07(6)	0.06(6)	0.06(6)	0.10(6)	0.10(6)	0.08(6)	0.08(6)	0.11(6)	0.11(6)	4.34(6)	4.34(6)
C7(12,15)	0.23(9)	0.03(9)	0.03(9)	0.05(9)	0.05(9)	0.06(9)	0.06(9)	0.06(9)	0.06(9)	0.07(9)	0.07(9)	18.75(9)	18.75(9)
C7(12,30)	1.71(10)	0.10(10)	0.10(10)	0.08(10)	0.08(10)	0.11(10)	0.11(10)	0.09(10)	0.09(10)	0.12(10)	0.12(10)	31.42(10)	31.42(10)
C7(24,15)	0.21(8)	0.06(8)	0.06(8)	0.06(8)	0.06(8)	0.07(8)	0.07(8)	0.07(8)	0.07(8)	0.09(8)	0.09(8)	42.53(8)	42.53(8)
C7(24,30)	3.67(10)	0.20(10)	0.20(10)	0.11(10)	0.11(10)	0.17(10)	0.17(10)	0.12(10)	0.12(10)	0.19(10)	0.19(10)	71.02(10)	71.02(10)
C8(6,15)	123.16(7)	0.04(5)	0.04(5)	0.05(4)	0.05(4)	0.07(3)	0.07(3)	0.06(5)	0.06(5)	0.08(3)	0.08(3)	0.48(3)	0.48(3)
C8(6,30)	98.93(6)	0.16(5)	0.16(5)	0.12(5)	0.12(5)	0.19(4)	0.19(4)	0.15(5)	0.15(5)	0.21(5)	0.21(5)	2.13(5)	2.13(5)
C8(12,15)	28.36(3)	0.07(2)	0.07(2)	0.08(2)	0.08(2)	0.10(1)	0.10(1)	0.08(2)	0.08(2)	0.13(2)	0.13(2)	2.27(2)	2.27(2)
C8(12,30)	965.73(9)	0.26(7)	0.26(7)	0.14(7)	0.14(7)	0.22(7)	0.22(7)	0.17(7)	0.17(7)	0.27(7)	0.27(7)	13.93(7)	13.93(7)
C8(24,15)	560.96(8)	0.18(8)	0.18(8)	0.11(6)	0.11(6)	0.19(6)	0.19(6)	0.14(7)	0.14(7)	0.21(6)	0.21(6)	28.12(5)	28.12(5)
C8(24,30)	1382.32(8)	0.68(8)	0.68(8)	0.33(7)	0.33(7)	0.60(7)	0.60(7)	0.44(7)	0.44(7)	0.54(5)	0.54(5)	153.09(6)	153.09(6)

A análise do GAP será feita por meio de gráficos e será em etapas. Primeiramente, HA, HB, HC e HD são comparadas pelo gráfico da Figura 4.2. As heurísticas HA e HB encontraram o mesmo número de exemplares factíveis, no total pouco menos de 90%, entretanto, HA obteve o melhor GAP, ou empatando com outros algoritmos, para menos de 65% dos exemplares, enquanto HB, 50%. A heurística HC encontra o melhor GAP, ou empatando com outros algoritmos, para

quase 80% dos exemplares, e no total, encontra soluções factíveis para aproximadamente 85% dos problemas testados. A heurística HD é que apresenta os piores desempenhos, pois é a que menos encontra os melhores GAP's, conjuntamente com HB, e também encontra aproximadamente 85% de soluções factíveis para os problemas. Dentre estas heurísticas, HC pode ser considerada como uma heurística que possui um bom desempenho devido ao grande número de exemplares que encontrou o melhor GAP.

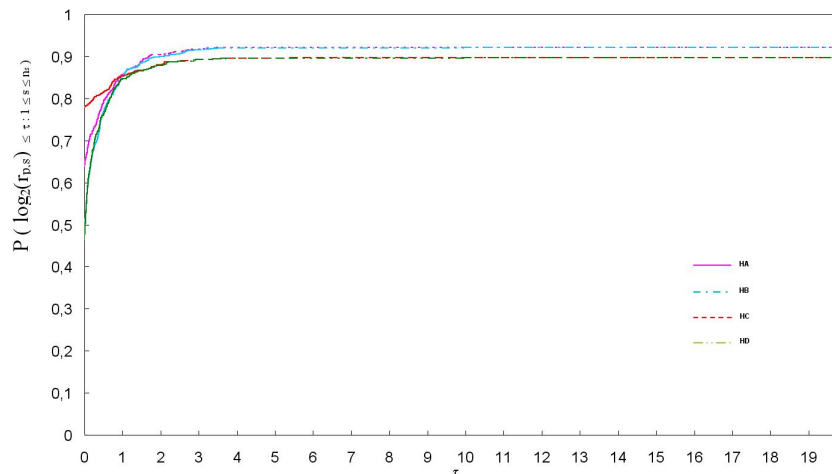


Figura 4.2: Gráfico de desempenho dos algoritmos HA, HB, HC e HD.

Analisando, agora, o desempenho de HE, HF, HG e HH, por meio do gráfico apresentado na Figura 4.3 tem-se que HE e HF são as que conseguem encontrar um maior número de soluções factíveis. Entretanto, não são as melhores com relação a encontrar as melhores soluções (os melhores GAP's), pois conseguem encontrar, ou empatar, para aproximadamente 60% e menos de 50%, respectivamente. HG encontra os melhores (ou empatam) GAP's para 80% dos exemplares. A heurística HH é a que apresenta o pior desempenho. Dentre as heurísticas analisadas, HG é considerada uma boa heurística, tendo obtido o melhor desempenho devido a grande quantidade de exemplares com os melhores GAP's que ela conseguiu encontrar, embora não seja a que conseguiu resolver o maior número de exemplares.

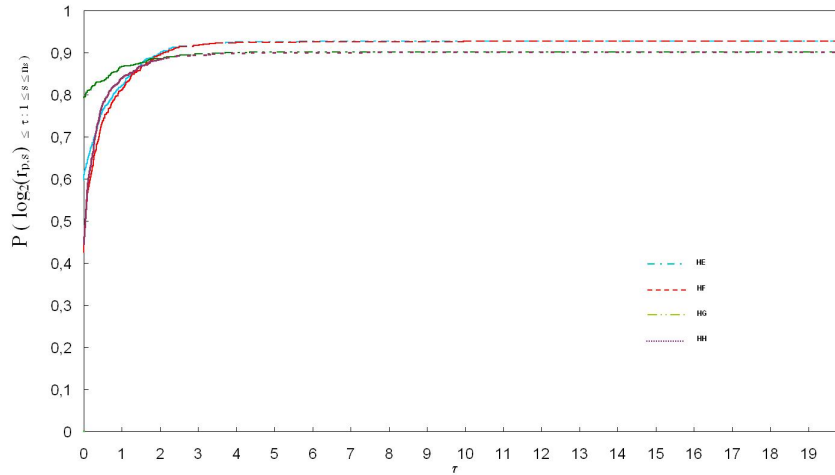


Figura 4.3: Gráfico de desempenho dos algoritmos HE, HF, HG e HH.

Depois de termos selecionado duas boas heurísticas do Método A (HC e HG), vamos compará-las com as heurísticas do Método B e com HL1 e HL2. Analisando o gráfico da Figura 4.4, tem-se que HT e HS apresentaram os piores desempenhos, com relação aos melhores GAP's. HL1 e HL2 encontram o maior número de exemplares factíveis (pouco mais de 90%), entretanto, encontraram menos de 20% dos melhores GAP's. As heurísticas HC e HG encontram o mesmo número de soluções factíveis para os exemplares testados (aproximadamente 90%), mas HC ganhou em números de exemplares onde o melhor GAP foi obtido (quase 50%). Portanto, a melhor heurística, considerando a análise do GAP é HC. Lembrando que, HC é a heurística que utiliza a solução inicial de V1 (geração de colunas por itens) onde os x_{it} tem seus valores recuperados, pois estavam escritos como combinação convexa de pontos extremos, os $y_{it} = 0$ se $x_{it} = 0$ ou $y_{it} = 1$ se $x_{it} > 0$. Esta solução é utilizada para inicializar o procedimento lagrangiano de Trigeiro et al. (1989) que é executado por 20 iterações.

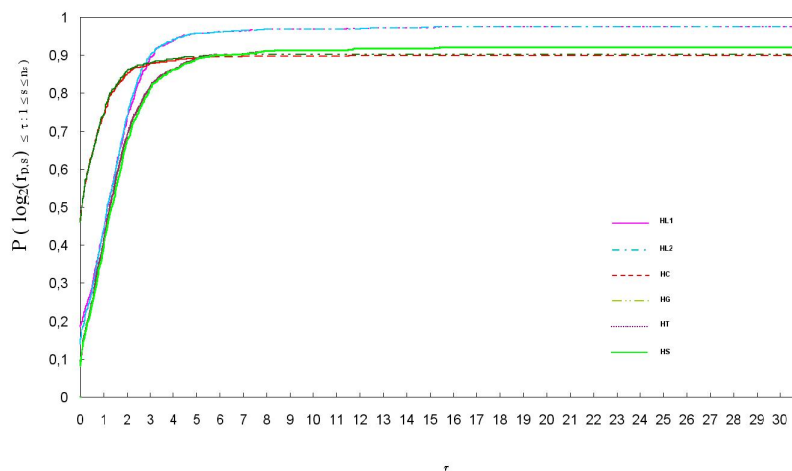


Figura 4.4: Gráfico de desempenho dos algoritmos para encontrar o limitante superior.

Na Tabela 4.10 está apresentada a média do tempo de execução, do GAP e o número total de exemplares factíveis. Como já observado anteriormente, as heurísticas são rápidas e dentre as heurísticas HA, HB, HC e HD, a heurística HC obteve o melhor GAP médio, entretanto não obteve o maior número de soluções factíveis. Temos que as heurísticas HE, HF, HG e HH são rápidas e HG foi a que obteve o melhor GAP médio, dentre estas. Porém, ao compararmos todas as heurísticas (inclusive HT, HS, HL1 e HL2) temos que HC foi a que obteve o melhor GAP médio.

Tabela 4.10: GAP médio, tempo médio e total de exemplares factíveis encontrados por HA, HB, HC, HD, HE, HF, HG, HH, HT e HS.

	Inteiro	HL1	HL2	HA	HB	HC	HD	HE	HF	HG	HH	HT	HS
GAP	-	3.20%	3.37%	2.59%	2.72%	2.15%	2.34%	3.16%	3.29%	2.37%	2.59%	3.53%	3.63%
Tempo	460.07	0.14	0.14	0.07	0.07	0.11	0.11	0.08	0.08	0.12	0.12	74.83	74.83
Total de exemplares	809	792	792	745	745	726	726	750	750	729	729	753	753

Após tantas comparações, apresentamos a Tabela 4.11 dos GAP's médio dos algoritmos que obtiveram melhores limitantes.

Tabela 4.11: GAP e número de exemplares factíveis encontrados por V1 e HC.

Capacidade Normal			Capacidade Apertada		
Classe(n,T)	V1	HC	Classe(n,T)	V1	HC
C1(6,15)	1.54%(9)	2.31%(9)	C1(6,30)	1.91%(5)	2.93%(4)
C1(6,30)	0.71%(9)	2.04%(9)	C1(12,15)	0.57%(9)	1.70%(7)
C1(12,15)	0.29%(10)	0.52%(9)	C1(12,30)	0.37%(9)	0.95%(9)
C1(12,30)	0.17%(10)	0.41%(10)	C1(24,15)	0.18%(10)	0.35%(9)
C1(24,15)	0.04%(10)	0.13%(3)	C1(24,30)	0.07%(10)	0.24%(9)
C1(24,30)	0.03%(10)	0.11%(6)	C2(6,15)	4.82%(5)	10.02%(4)
C2(6,15)	2.70%(8)	5.74%(8)	C2(6,30)	5.02%(5)	12.56%(3)
C2(6,30)	2.34%(8)	8.73%(8)	C2(12,15)	1.92%(6)	7.31%(4)
C2(12,15)	0.48%(9)	1.73%(9)	C2(12,30)	1.61%(8)	7.20%(7)
C2(12,30)	0.57%(9)	2.27%(9)	C2(24,15)	0.75%(10)	2.14%(9)
C2(24,15)	0.19%(10)	0.57%(10)	C2(24,30)	0.71%(9)	2.11%(7)
C2(24,30)	0.14%(10)	0.45%(10)	C3(6,15)	2.89%(4)	4.08%(4)
C3(6,15)	1.59%(9)	2.41%(9)	C3(6,30)	2.38%(8)	4.67%(8)
C3(6,30)	1.25%(9)	2.65%(9)	C3(12,15)	0.50%(8)	2.44%(7)
C3(12,15)	0.33%(9)	0.48%(7)	C3(12,30)	0.44%(10)	1.06%(10)
C3(12,30)	0.19%(10)	0.33%(10)	C3(24,15)	0.15%(10)	0.31%(10)
C3(24,15)	0.03%(10)	0.05%(5)	C3(24,30)	0.08%(10)	0.19%(10)
C3(24,30)	0.02%(10)	0.04%(7)	C4(6,15)	4.76%(4)	8.00%(3)
C4(6,15)	2.19%(6)	3.48%(6)	C4(6,30)	6.62%(2)	-%(0)
C4(6,30)	2.50%(8)	6.88%(8)	C4(12,15)	2.45%(8)	5.46%(7)
C4(12,15)	0.75%(9)	1.88%(9)	C4(12,30)	2.09%(5)	8.44%(4)
C4(12,30)	0.72%(10)	2.91%(10)	C4(24,15)	0.78%(10)	2.84%(9)
C4(24,15)	0.21%(10)	0.51%(10)	C4(24,30)	0.71%(10)	3.14%(10)
C4(24,30)	0.18%(10)	0.55%(10)	C5(6,15)	1.47%(5)	5.36%(5)
C5(6,15)	1.03%(10)	1.96%(10)	C5(6,30)	0.64%(4)	1.86%(4)
C5(6,30)	0.36%(8)	1.16%(8)	C5(12,15)	0.33%(9)	1.54%(9)
C5(12,15)	0.17%(10)	1.01%(8)	C5(12,30)	0.19%(10)	0.60%(10)
C5(12,30)	0.08%(10)	0.28%(10)	C5(24,15)	0.08%(10)	0.41%(10)
C5(24,15)	0.04%(10)	0.41%(5)	C5(24,30)	0.05%(10)	0.29%(9)
C5(24,30)	0.02%(10)	0.08%(6)	C6(6,15)	2.74%(2)	6.83%(1)
C6(6,15)	1.43%(8)	5.51%(8)	C6(6,30)	2.70%(3)	10.01%(2)
C6(6,30)	1.21%(7)	2.57%(7)	C6(12,15)	1.15%(9)	7.67%(7)
C6(12,15)	0.40%(10)	1.39%(10)	C6(12,30)	0.63%(8)	4.55%(6)
C6(12,30)	0.30%(10)	0.93%(10)	C6(24,15)	0.34%(9)	5.43%(9)
C6(24,15)	0.12%(10)	0.64%(10)	C6(24,30)	0.28%(10)	0.90%(7)
C6(24,30)	0.08%(10)	0.33%(10)	C7(6,15)	1.21%(7)	4.48%(7)
C7(6,15)	0.48%(10)	1.17%(10)	C7(6,30)	0.64%(6)	2.09%(6)
C7(6,30)	0.38%(9)	1.35%(9)	C7(12,15)	0.22%(9)	1.41%(9)
C7(12,15)	0.10%(10)	0.73%(10)	C7(12,30)	0.13%(10)	0.37%(10)
C7(12,30)	0.08%(10)	0.16%(9)	C7(24,15)	0.05%(8)	0.27%(8)
C7(24,15)	0.03%(10)	0.33%(7)	C7(24,30)	0.04%(10)	0.27%(10)
C7(24,30)	0.02%(10)	0.20%(8)	C8(6,15)	2.31%(7)	8.21%(3)
C8(6,15)	0.80%(8)	1.39%(8)	C8(6,30)	1.56%(6)	6.77%(4)
C8(6,30)	0.72%(8)	1.41%(8)	C8(12,15)	1.26%(3)	10.37%(1)
C8(12,15)	0.26%(9)	0.92%(9)	C8(12,30)	0.84%(9)	4.50%(7)
C8(12,30)	0.20%(10)	0.62%(10)	C8(24,15)	0.31%(8)	5.97%(6)
C8(24,15)	0.08%(10)	0.32%(10)	C8(24,30)	0.16%(8)	7.93%(7)
C8(24,30)	0.06%(10)	0.26%(10)			

Conclusões e Perspectivas Futuras

O objetivo deste trabalho foi o estudo de várias técnicas de resolução do problema de dimensionamento de lotes com restrição de capacidade considerando tempo e custo de preparação de máquina. Uma ênfase especial foi dada à obtenção de bons limitantes inferiores, os quais podem ser utilizados em outros algoritmos, como por exemplo, em algoritmos do tipo *branch-and-price*.

Duas estratégias de decomposição de Dantzig-Wolfe, por item e por período, foram estudadas e comparadas entre si. Os testes computacionais realizados revelam que os limitantes inferiores da resolução da decomposição por itens bem superior que por períodos. Dentre os critérios utilizados para avaliação, o algoritmo V1 (decomposição por itens, sem adição de colunas alternativas durante a geração de colunas) obteve melhor desempenho que os demais algoritmos.

Os limitantes superiores foram obtidos pelas heurísticas HA, HB, HC, HD, HE, HF, HG e HH, que utilizam as soluções iniciais provindas dos algoritmos V1 ou V2, e ainda as heurísticas HT e HS de V3 sendo comparadas tanto entre si e com Trigeiro et al. (1989) e Araujo & Arenales (2000). As heurísticas HT e HS, não obtiveram o bom desempenho que as demais heurísticas conseguiram. Dentre todas as heurísticas comparadas, de acordo com os critérios utilizados, temos que a heurística HC (solução inicial de V1 utilizada para inicializar o procedimento de Trigeiro et al. (1989)) foi a que obteve um bom desempenho.

Como propostas de trabalhos futuros, podemos realizar melhoria nos algoritmos, como:

- Inserir colunas, durante o processo de geração de colunas, provindas da utilização de alguma meta-heurística.
- Tentar integrar ambas as decomposições, itens e períodos, utilizando a decomposição de Dantzig-Wolfe múltipla (Alvelos, 2005).

- Para obter a solução inteira, a partir da solução fracionada da relaxação do problema, testar outros algoritmos, até mesmo meta-heurísticas.

Uma outra abordagem para o problema seria:

- Utilizar a formulação apresentada por Eppen & Martin (1987), onde os autores reescrevem o problema em questão utilizando fluxo em rede. Decompor este problema utilizando Dantzig-Wolfe, assim como em Jans & Degraeve (2004), e inserir colunas factíveis durante o processo de geração de colunas;
- Testar os métodos apresentados nesta dissertação em algum problema prático.

Referências Bibliográficas

- AFENTAKIS, P.; GAVISH, B.; KARMAKAR, U. Computationally efficient optimal solutions to the lot-sizing problem in multistage assembly systems. *Management Science*, v. 30, n. 2, p. 222–239, 1984.
- ALVELOS, F. P. P. C. *Branch-and-price and multicommodity flows*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia - Universidade do Minho, Portugal, 2005.
- ARAUJO, A. S.; ARENALES, M.; CLARK, A. R. Lot-sizing and furnace scheduling in small foundries. *Computers & Operations Research*, v. 35, p. 915–932, 2008.
- ARAUJO, S. A. *Estudos de problemas de dimensionamento de lotes monoestágio com restrição de capacidade*. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo - USP, Brasil, 1999.
- ARAUJO, S. A.; ARENALES, M. N. Problema de dimensionamento de lotes monoestágio com restrição de capacidade: modelagem, métodos de resolução e resultados computacionais. *Pesquisa Operacional*, v. 20, n. 2, p. 287–306, 2000.
- BARNHART, C.; JOHNSON, E. L.; NEMHAUSER, G. L.; SAVELSBERGH, M. W. P.; VANCE, P. H. Branch and price: column generation for solving huge integer problems. *Operations Research*, v. 11, n. 3, p. 316–329, 1998.
- BERRETTA, R. E. *Heurísticas para otimização do planejamento da produção em sistemas mrp*. Tese de Doutorado, FEEC- UNICAMP, Brasil, 1997.
- BILLINGTON, P. J.; BLACKBURN, J.; MAES, J.; MILLEN, R.; WASSENHOVE, L. N. V. Multi-item lotsizing capacitated multi-stage serial systems. *Multi-Item Lotsizing Capacitated Multi-Stage Serial Systems*, v. 26, n. 2, p. 12–18, 1995.
- BILLINGTON, P. J.; MCCLAIN, J. O.; THOMAS, L. J. Mathematical programming approaches to capacity mrp systems: review, formulation and problem reduction. *Management Science*, v. 29, n. 10, p. 1126–1141, 1983.

- BILLINGTON, P. J.; MCCLAIN, J. O.; THOMAS, L. J. Mathematical programming approaches to capacity mrp systems: review, formulation and problem reduction. *Management Science*, v. 32, n. 8, p. 989–1006, 1986.
- BITRAN, R. G.; YANASSE, H. H. Computational complexity of the capacitated lot size problem. *Management Science*, v. 28, n. 3, p. 1174–1186, 1982.
- BRAHIMI, N.; DAUZERE-PERES, S.; NAJID, N. M.; NORDI, A. Single item lot sizing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 168, p. 1–16, 2006.
- CAMERINI, P. M.; FRATTA, L.; MAFFIOLI, F. On improving relaxation methods by modified gradient techniques. *Mathematical Programming Study*, v. 3, p. 26–34, 1975.
- CHUNG, C. S.; FLYNN, J.; LIN, C. H. M. An effective algorithm for capacitated single item lot size problem. *European Journal Of Operational Research*, v. 46, p. 38–47, 1994.
- CLARK, A. R.; ARMENTANO, V. A. A. Heuristic resource-capacitated multi-stage lot-sizing problem with lead times. *Journal of the Operational Research Society*, v. 46, n. 10, p. 1208–1222, 1995.
- DANTZIG, G. B.; WOLFE, P. Decomposition principle for linear programs. *Operations Research*, v. 8, p. 101–111, 1960.
- DANTZIG, G. B.; WOLFE, P. The decomposition algorithm for linear programs. *Econometria*, v. 29, n. 4, p. 767–778, 1961.
- DEGRAEVE, Z.; JANS, R. A new Dantzig-Wolfe reformulation and branch-and-price algorithm for the lot sizing problem with setup times. *Operations Research*, v. 55, n. 5, p. 909–920, 2007.
- DIABY, M.; BAHL, H.; KARWAN, M. H.; ZIONT, S. Capacitated lot-sizing and scheduling by lagrangean relaxation. *European Journal Of Operational Research*, v. 59, p. 444–458, 1992.
- DOLAN, E. D.; MORÉ, J. J. Benchmarking optimization software with performances profiles. *Mathematical Programming*, v. 91, p. 201–213, 2002.
- DZIELINSKI, B. P.; GOMORY, R. E. Optimal programming of lot sizes, inventory and labor allocations. *Management Science*, v. 11, n. 9, p. 874–890, 1965.
- EPPEN, G. D.; MARTIN, R. K. Solving multi-item capacitated lot-sizing problems using variable redefinition. *Operations Research*, v. 35, n. 6, p. 832–848, 1987.
- EVANS, J. R. An efficient implementation of the wagner-whitin algorithm for dynamic lot-sizing. *Journal of Operational Management*, v. 5, p. 229–235, 1985.
- FLORIAN, M.; LENSTRA, J. K.; KAN, A. H. G. R. Deterministic production planning algorithms and complexity. *Management Science*, v. 26, n. 7, p. 669–679, 1980.

- FRANÇA, P. M.; ARMENTANO, V. A.; BERRETTA, R. E.; CLARK, A. R. A heuristic method for lot-sizing in multi-stage systems. *Computers and Operations Research*, v. 24, n. 9, p. 861–874, 1997.
- GEOFFRION, A. M. Lagrangean relaxation for integer programming. *Mathematical Programming Study*, v. 2, p. 849–859, 1974.
- JANS, R. *Capacitated lot sizing problems: New applications, formulations and algorithms*. Tese de Doutorado, Faculdade Economische en Toegepaste Economische Wetenschappen - Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 2002.
- JANS, R.; DEGRAEVE, Z. Improved lower bounds for capacitated lot sizing problem with setup time. *Operation Research Letters*, v. 32, p. 185–195, 2004.
- LADSON, L. S.; TERJUNG, R. C. An efficient algorithm for multi-item scheduling. *European Journal Of Operational Research*, v. 19, n. 4, p. 946–969, 1971.
- LÜBBECK, M. E.; DESROSIERS, J. Selected topics in column generation. *Operations Research*, v. 53, n. 6, p. 1007–1023, 2005.
- MAES, J.; MCCLAIN, J. O.; WASSENHOVE, L. N. V. Multilevel capacitated lotsizing complexity and LP based heuristic. *European Journal Of Operational Research*, v. 53, p. 131–148, 1991.
- MAES, J.; WASSENHOVE, L. N. V. Capacitated dynamic lotsizingheuristics for serial systems. *International Journal of Production Research*, v. 29, n. 6, p. 1235–1249, 1991.
- MANNE, A. S. Programming of economic lot sizes. *Management Science*, v. 4, n. 2, p. 115–135, 1958.
- PIMENTEL, C.; ALVELOS, F. P.; CARVALHO, M. V. Algoritmos de partição e geração de colunas para o dimensionamento de lotes de produção. *Investigação Operacional*, v. 26, p. 129–146, 2006.
- PIMENTEL, C. M. O. *Algoritmos de partição e geração de colunas para dimensionamento de lotes de produção*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia - Universidade do Minho, Portugal, 2005.
- POCHET, Y.; WOLSEY, L. A. *Production planning by mixed integer programming*. Editora Springer Series Operations Research and Financial Engineering, 2006.
- SANTOS, M. O. *Dimensionamento de lotes em máquinas paralelas com restrições de capacidade em sistemas multiestágios*. Tese de Doutorado, ICMC-USP, Brasil, 2000.

- SHAPIRO, J. F. Mathematical programming models and methods for production planning and scheduling. *Logistic of Production and Inventory, Handbooks in Operations Research and Management Science, Amsterdam North Holland*, v. 4, 1993.
- SLACK, N.; CHAMBERS, S.; JOHSTON, R. *Administração da produção*. Editora Atlas, 2002.
- SUERIE, C.; STADLER, H. The capacitated lot-sizing problem with linked lot sizes. *Management Science*, v. 49, n. 8, p. 1039–1054, 2003.
- TEMPELMEIER, H.; DERSTROFF, M. A lagrangean-based heuristic for dynamic multilevel multiitem constrained lotsizing with setup times. *Management Science*, v. 42, n. 5, p. 738–757, 1996.
- TOLEDO, F. M. B. *Dimensionamento de lotes em máquinas paralelas*. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Brasil, 1998.
- TOLEDO, F. M. B.; ARMENTANO, V. A. A lagrangean-based heuristic for the capacitated lot-sizing problem in parallel machines. *European Journal of Operational Research*, v. 175, p. 1070 – 1083, 2006.
- TONAKI, V.; TOLEDO, F. M. B. An approach to solve the lot sizing and scheduling problem in market-driven foundries. *Journal of Operational Research Society*, p. aceito para publicação, 2008.
- TRIGEIRO, W. W.; THOMAS, J.; MCCLAIN, J. O. Capacitated lot sizing with setup times. *Management Science*, v. 35, n. 3, p. 353–366, 1989.
- VANDERBECK, F. Lot-sizing with start-up time. *Management Science*, v. 44, n. 10, p. 1409–1425, 1998.
- WAGNER, H. M.; WHITIN, T. M. Dinamic version of the economic lot size model. *Management Science*, v. 5, n. 1, p. 89–96, 1958.