

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos
Departamento de Ciências de Computação e Estatística

**RECONSTRUÇÃO E VISUALIZAÇÃO TRIDIMENSIONAL
DE IMAGENS TOMOGRÁFICAS
BASEADA NO USO DE
TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER**

Josiane Maria Bueno

Orientadora: Prof^ª.Dr^ª. Agma Juci Machado Traina

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências: Área - Ciências de Computação e Matemática Computacional.

São Carlos, março de 1995

AGRADECIMENTO ESPECIAL

Ao Prof. Dr. Paulo Estevão Cruvinel, da CNPDIA-EMBRAPA, pela co-orientação, apoio e incentivo à realização deste trabalho.

Agradecimentos

À Deus, pelo amor e pela oportunidade.

A Agma pela orientação, paciência e amizade que cresceu no decorrer deste trabalho e também pelo apoio.

Ao Juca pela amizade, atenção e conselhos nos momentos mais difíceis.

A D. Marlena e ao Sr. José pelo carinho e apoio.

Aos meus irmãos Renata, Ana Claudia e Adriano pelo carinho e incentivo.

Ao Roberto pelo companheirismo.

Às amigas Arlete, Alessandra, Ana Claudia e Ana Laura pelo ombro amigo.

A todos os amigos e colegas do ICMSC, especialmente, José Craveiro, Alexandre, Marcelo, Carlos Lenz, Rose, Flávia, Márcio pelo incentivo e pelos momentos divertidos que passamos juntos.

A todos os professores e funcionários do ICMSC-USP que, de uma maneira ou de outra, colaboraram para o desenvolvimento deste trabalho.

À Capes e ao ICMSC-USP pela bolsa de mestrado concedida.

Resumo

Neste trabalho é apresentado um algoritmo para a reconstrução tridimensional de imagens digitais, o qual foi baseado na combinação de transformada rápida de Fourier com janela de Hamming e o uso de função trilinear para interpolação.

O algoritmo possibilita não somente a geração de mapas tridimensionais da distribuição espacial de spins para tomografia por ressonância magnética (MRT), como também mapas de coeficientes de atenuação para tomógrafos de raio-X ou raio-Gamma.

A técnica de tons de cinza foi utilizada para a visualização das imagens, bem como foi utilizado ferramentas desenvolvidas no ICMSC, as quais possibilitam análises de fatias coronais ou sagitais das imagens reconstruídas.

Resultados mostraram a grande utilidade e eficiência do algoritmo, o qual primeiramente reconstrói as imagens bidimensionalmente para em seguida ser aplicada a interpolação trilinear. Em particular, dados obtidos dos tomógrafos de ressonância magnética do IFSC-USP e do de raio-X e Gamma do CNPDIA-Embrapa, ambos de São Carlos-SP, foram utilizados para avaliação do algoritmo. Adicionalmente, uma comparação com o método de retroprojeção é também apresentado.

O algoritmo foi desenvolvido em linguagem C++ e em ambientes DOS e UNIX.

Abstract

In this work it is presented an algorithm for three-dimensional digital image reconstruction. Such algorithm is based on the combination of both a Fast Fourier Transform method with Hamming Window and the use of a tri-linear interpolation function.

The algorithm allows not only the generation of three-dimensional spatial spin distribution maps for Magnetic Resonance Tomography data but also X and γ -rays linear attenuation coefficient maps for CT scanners.

The gray-level technique was used for image visualization, as well as for tools developed at the ICMSC-USP. It is also possible to analyze coronal or sagittal slices of reconstructed images.

Results demonstrates the usefulness of the algorithm in tree-dimensional image reconstruction by doing first two-dimensional reconstruction and rather after interpolation, i.e., in particular with tomographic data obtained by using the MR scanner from the IFSC-USP and the CT scanner from the CNPDIA-Embrapa, both from São Carlos-SP. Additionally, a comparison with the backprojection method is outlined.

The algorithm was developed in C++ language, and there are two available versions: one under the DOS environment; and the other under the UNIX/Sun environment.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	iii
Lista de Quadros	v
Capítulo 1. Introdução	1
1.1. Considerações Gerais	1
1.2. Motivação	2
1.3. Organização da Dissertação	3
Capítulo 2. Conceitos Gerais	5
2.1. Interpolação	5
2.2. Visualização	9
2.3. Conclusões	15
Capítulo 3. Algoritmos de Reconstrução utilizados em Tomografia Computadorizada	16
3.1. O Modelo Matemático de Reconstrução	16
3.2. Principais Algoritmos utilizados em Tomografia Computadorizada	22
3.2.1. <i>Summation</i>	23
3.2.2. Solução Analítica das Equações	25
3.2.3. Abordagens de Expansão de Séries	26
3.3. Comparação de Algoritmos	29
3.4. Conclusões	32
Capítulo 4. O Algoritmo de Reconstrução com o Uso da Transformada de Fourier	33
4.1. A Transformada de Fourier	33
4.1.1. A Transformada Inversa de Fourier	36
4.1.2. A Transformada Discreta de Fourier	36
4.1.3. A Transformada Rápida de Fourier	38
4.2. O Pseudo-código da FFT	49
4.3. Desenvolvimento do Método para MR	51
4.4. Desenvolvimento do Método para Raio-X	51
4.5. Conclusões	58

Capítulo 5. Resultados	59
5.1. A Implementação dos Algoritmos	60
5.1.1. O Algoritmo de FFT com filtragem de Hamming	60
5.1.2. O Algoritmo de Reconstrução para Ressonância Magnética	63
5.1.3. O Algoritmo de Interpolação Trilinear	65
5.2. O Sistema de Visualização das Imagens	67
5.3. Comparação do Algoritmo de FFT com Filtragem de Hamming com o Método de Retroprojeção Filtrado na Reconstrução para Raio-X	68
5.4. Resultados Experimentais com os Corpos de Prova	73
5.4.1. Primeiro <i>Phantom</i> de Estudo	73
5.4.2. Segundo <i>Phantom</i> de Estudo	81
5.4.3. Terceiro <i>Phantom</i> de Estudo	88
5.4.4. Imagem da Cabeça obtida com o Tomógrafo de Ressonância Magnética	105
5.5. Conclusões	112
Capítulo 6. Conclusões Gerais e Propostas de Pesquisas Futuras	113
Referências Bibliográficas	115
Apêndices	120
Apêndice 1 - Conceitos sobre Ressonância Magnética e Raio-X	120
Apêndice 2 - A História da Tomografia Computadorizada	124
Apêndice 3 - O Número Hounsfield	126
Apêndice 4 - O Tomógrafo de MR e o Tomógrafo de Raio-X	127

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1.	Duas fatias consecutivas e as fatias intermediárias geradas para obter resolução isotrópica	6
Figura 2.2.	Um sistema generalizado de reconstrução por superfícies 3D	8
Figura 2.3.	Representação por <i>voxels</i> de um cubo no espaço-objeto	9
Figura 2.4.	Representação esquemática de transformações de imagens tridimensionais	11
Figura 2.5.	Um cubo representado no espaço de objeto e no espaço de imagem	12
Figura 3.1.	A densidade de um objeto O é projetado em um plano P. O objeto é dividido em fatias, como S, as quais são subdivididas em cilindros, como C	17
Figura 3.2.	Um feixe de <i>photons</i> de raio-X parte de A e incide em B	18
Figura 3.3.	A função $P_{\theta}(t)$ é uma projeção paralela de $f(x,y)$. O sistema de coordenadas representado pelos eixos s e t está rotacionado	19
Figura 3.4.	Tomografia Linear. Obs: os índices 1 e 2 indicam dados referentes aos instantes t_1 e t_2	24
Figura 3.5.	Procedimento de varredura para reconstrução de um plano de um objeto 3D, utilizando o método summation. O plano de varredura pode ser movido verticalmente para reconstrução 3D.	25
Figura 4.1.	Interpretação da Transformada de Fourier	34
Figura 4.2.	Transformada de Fourier de um perfil de onda	35
Figura 4.3.	Representação por grafo da FFT de um vetor com $N=16$	41
Figura 4.4.	Exemplo de operação de reversão de bits para $N=16$	46
Figura 4.5.	Teorema de Fourier. A FT da projeção de $f(x,y)$ $P_{\theta}(t)$ fornece valores de $F(\omega_1, \omega_2)$ na linha BB	52
Figura 4.6.	A projeção filtrada $Q_{\theta}(t)$ contribui da mesma forma para todos os <i>pixels</i> na linha LM que atravessa a imagem	57
Figura 5.1.	Tipos de cortes visuais na visualização das imagens (típicos para cortes de cabeça humana)	67
Figura 5.2.	Amostra utilizada para reconstrução	68
Figura 5.3.	Imagem reconstruída pelo algoritmo da FFT com filtragem de Hamming (<i>josiAt.pac</i>)	69
Figura 5.4.	Imagem reconstruída pelo algoritmo de retroprojeção filtrada (<i>joBkp.img</i>)	70

Figura 5.5.	Histograma e imagem da secção josiAt40.pac	75
Figura 5.6.	Histograma e imagem da secção josiAt60.pac	76
Figura 5.7.	Histograma e imagem da secção original josiAt40.pac	77
Figura 5.8.	Histograma da imagem josiAt5.pac	78
Figura 5.9.	Histograma da imagem josiAt2.pac	78
Figura 5.10.	Histograma da imagem josiAt3.pac	78
Figura 5.11.	Histograma da imagem josiAt4.pac	78
Figura 5.12.	Corte transversal das imagens reconstruídas josiAt	79
Figura 5.13.	Cortes sagitais e coronais das imagens reconstruídas josiAt	80
Figura 5.14.	Segundo <i>phantom</i> de estudo	81
Figura 5.15.	Histograma e imagem reconstruída da secção josiBt1.pac	84
Figura 5.16.	Histograma da imagem josiBt2.pac	85
Figura 5.17.	Histograma da imagem josiBt3.pac	85
Figura 5.18.	Histograma da imagem josiBt4.pac	85
Figura 5.19.	Histograma da imagem josiBt5.pac	85
Figura 5.20.	Imagem e histograma da secção criada por interpolação josiBt40.pac	86
Figura 5.21.	Imagem e histograma da secção criada por interpolação josiBt60.pac	87
Figura 5.22.	Terceiro <i>phantom</i> de estudo	88
Figura 5.23.	Histograma e imagem reconstruída da secção josiCt1.pac	91
Figura 5.24.	Histograma e imagem reconstruída da secção josiCt2.pac	92
Figura 5.25.	Histograma e imagem reconstruída da secção josiCt3.pac	93
Figura 5.26.	Histograma e imagem reconstruída da secção josiCt4.pac	94
Figura 5.27.	Histograma e imagem reconstruída da secção josiCt5.pac	95
Figura 5.28.	Histograma e imagem reconstruída da secção josiCt6.pac	96
Figura 5.29.	Histograma e imagem da secção gerada por interpolação josiCt5n.pac	97
Figura 5.30.	Histograma e imagem da secção gerada por interpolação josiCt8.pac	98
Figura 5.31.	Histograma e imagem da secção gerada por interpolação josiCt30.pac	99
Figura 5.32.	Histograma e imagem da secção gerada por interpolação josiCt32.pac	100
Figura 5.33.	Histograma e imagem da secção gerada por interpolação josiCt55.pac	101
Figura 5.34.	Histograma e imagem da secção gerada por interpolação josiCt62.pac	102
Figura 5.35.	Corte transversal das imagens reconstruídas josiCt	103
Figura 5.36.	Cortes sagitais e coronais das imagens reconstruídas josiCt	104
Figura 5.37.	Histograma e imagem da secção reconstruída agt12.pac	106
Figura 5.38.	Histograma e imagem da secção gerada por interpolação agt13.pac	107
Figura 5.39.	Histograma e imagem da secção gerada por interpolação agt34.pac	108
Figura 5.40.	Histograma e imagem da secção gerada por interpolação agt35.pac	109
Figura 5.41.	Corte transversal das imagens reconstruídas agt	110
Figura 5.42.	Cortes sagitais e coronais das imagens reconstruídas agt	111

APÊNDICES

Figura 1.	Aquisição de dados de uma secção selecionada (a) por emissão de Raio-X. O padrão de exploração é o de translações lineares a incrementos sucessivos (b).	120
Figura 2.	A figura apresenta todos os raios de uma projeção a um determinado ângulo. O raio-soma que está sendo coletado está achuriado.	121
Figura 3.	(a) estado normal; (b) campo magnético forte; (c) excitação; (d) estado excitado.	122
Figura 4.	Diagrama da primeira a quarta gerações de <i>scanners</i> de CT.	128
Figura 5.	Diagrama de um sistema típico de tomografia por ressonância magnética	130

LISTA DE QUADROS

Quadro 4.1.	Pseudo-Código da FFT	50
Quadro 5.1.	Pseudo-Código do algoritmo de reconstrução para raio-X	61
Quadro 5.2.	Pseudo-Código do algoritmo de reconstrução para ressonância magnética	64
Quadro 5.3.	Pseudo-Código do algoritmo de interpolação trilinear	66

1.1. Considerações Gerais

Até a pouco tempo, o processamento de imagens era restrito a sistemas de alto custo. Isto ocorria, principalmente, devido à capacidade das arquiteturas requeridas. Recentemente os novos computadores disponíveis, com grande capacidade de memória e velocidade, bem como a crescente capacidade de interfaceamento, têm diminuído o custo e possibilitado o processamento próximo ao tempo real, conseguindo assim um amplo campo de aplicações.

A Medicina e a Computação Gráfica têm trabalhado juntas para o diagnóstico médico com o uso da reconstrução de imagens da anatomia humana. Muitos instrumentos modernos de imagens médicas são baseados em mini ou microcomputadores digitais, encontrando-se entre eles a tomografia computadorizada (CT), a tomografia por ressonância magnética (MRT), ultrassom (US), a técnica de imagem digital vascular (DVI), a medicina nuclear, e a tomografia por emissão de positron (PET). Estes instrumentos e técnicas têm por objetivo a produção de diagnósticos com fornecimento de informações morfológicas e funcionais. Para o estudo de um único órgão ou região do corpo, utiliza-se em média de 50 a 100 ou mais imagens bidimensionais [Udu91]. Estas imagens são analisadas, em geral, por um radiologista utilizando um filme transparente para copiar a imagem fornecida pelo equipamento.

A MRT oferece informações de alta qualidade sobre estruturas de tecido mais delicado como o coração e o sistema nervoso central. A CT é utilizada em diagnósticos relativos a partes do corpo humano como a cabeça, pescoço e o esqueleto. Pode-se apresentar um órgão ou parte de um corpo em uma imagem tridimensional (3D), empilhando-se fatias bidimensionais (2D) do mesmo [Udu91].

A utilização destas tecnologias ainda não se tornou comum, pois os

procedimentos gráficos utilizados em aplicações médicas, ainda são muito caros. Estes procedimentos envolvem a utilização de muita memória e poder computacional para o tratamento dos dados, principalmente em se tratando de imagens tridimensionais com monitores coloridos, de alta resolução, e processadores vetoriais, entre outros [Mic93].

A tomografia tem se mostrado útil também dentro de outras áreas, como por exemplo, na área agrícola para a medida do conteúdo de água e da densidade de solos.

Os métodos utilizados neste trabalho para a reconstrução de imagens tridimensionais a partir de imagens bidimensionais, poderão ser utilizados tanto com dados obtidos por MRT ou como para os dados obtidos por CT de Raio-X.

1.2. Motivação

No Instituto de Física de São Carlos -USP, foi desenvolvido um tomógrafo que utiliza a técnica de Ressonância Magnética (MRT). O grupo de Computação Gráfica e Processamento de Imagens do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da USP, vem colaborando com o desenvolvimento de *software* para o processamento e visualização das imagens obtidas pelo tomógrafo [Tra91]. Também, em São Carlos, no Centro Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento de Instrumentação Agropecuária (CNPDIA - EMBRAPA) foi desenvolvido um minitomógrafo de raio-X dedicado ao estudo de física dos solos [Cru87][Cru90].

Para a utilização dos dois tomógrafos é muito importante a reconstrução 3D. No caso do tomógrafo por MRT, cuja principal utilização é voltada a diagnósticos clínicos, com o resultado do projeto desenvolvido, é possível oferecer ao médico informações sobre os órgãos internos, como disposição, dimensão, anormalidades, através de imagens bidimensionais que podem ser manipuladas tridimensionalmente. As informações contidas nas imagens seriam, de outra forma, apenas coletadas de forma implícita ou através de um procedimento cirúrgico.

Para o minitomógrafo do CNPDIA, é possível a geração de mapas tridimensionais da água em amostras de solos (ou em meios porosos em geral) e acompanhamento do crescimento de raízes, pela composição de mapas bidimensionais.

Para o desenvolvimento do projeto foi utilizada técnicas de reconstrução baseada em Transformada Rápida de Fourier (FFT), a qual apresenta vantagens quando comparada a outros métodos [Bri88]. Esta técnica apresenta grande desempenho, boa exatidão e baixo tempo computacional, sendo flexível para o uso em computadores dedicados. Com o objetivo de se compor as imagens reconstruídas a partir dos dados obtidos pelo minitomógrafo de raio-X, foi também utilizado o algoritmo da FFT com retroprojeção filtrada utilizando janela de Hamming [Kak86][Bro83]. Resultados comparativos para a reconstrução de imagens de *phantoms* são apresentados neste trabalho.

Para a apresentação das imagens foi utilizada a técnica de tom-de-cinza, bem como, um programa desenvolvido no ICMSC para a apresentação de imagens bidimensionais com tratamento tridimensional, e também um conjunto de ferramentas básicas para a análise quantitativa das imagens geradas através de dados fornecidos pelo aplicativo Origin.

O projeto foi desenvolvido em linguagem C tanto para a plataforma PC para ambiente WINDOWS, com apresentação e manipulação bidimensional, como para SPARC 2 da Sun Microsystems, com tratamento tridimensional, executando sobre UNIX e utilizando bibliotecas do *toolkit* X-View [Hel90].

1.3. Organização da Dissertação

No capítulo 2, deste trabalho, serão apresentados conceitos gerais sobre métodos de interpolação utilizados atualmente para a geração de imagens bidimensionais intermediárias a duas outras imagens bidimensionais obtidas por um tomógrafo, bem como conceitos sobre o processo de visualização necessário para a apresentação de objetos tridimensionais. E também, como é o sistema de visualização tridimensional utilizado no presente trabalho para a apresentação dos resultados obtidos.

No capítulo 3 é feita uma abordagem sobre o modelo matemático de reconstrução e algumas soluções para o problema da reconstrução de imagens bidimensionais: *summation*, solução analítica das equações integrais, abordagens de expansão de séries; além de uma comparação entre os algoritmos mais utilizados.

No capítulo 4, encontra-se a Transformada Rápida de Fourier e seu algoritmo. Neste capítulo serão apresentados, ainda, os métodos de desenvolvimento para reconstrução das imagens bidimensionais a partir dos dados obtidos tanto pelo tomógrafo de ressonância magnética como pelo minitomógrafo de raio-X.

O capítulo 5 apresentará os algoritmos para reconstrução de imagens bidimensionais e o algoritmo de interpolação para a geração de planos intermediários objetivando a composição de um objeto tridimensional. Também são apresentados resultados obtidos pelo sistema desenvolvido e uma análise dos histogramas das imagens geradas por reconstrução e por interpolação utilizando a função Gaussiana.

No capítulo 6 serão apresentadas as conclusões gerais sobre o presente trabalho.

No final desta dissertação, ainda encontram-se quatro apêndices. O apêndice 1 faz uma abordagem geral sobre conceitos em ressonância magnética e raio-X, o apêndice 2 apresenta a história da tomografia computadorizada, o apêndice 3 define o que vem a ser número Hounsfield, e o apêndice 4 apresenta arquiteturas de tomógrafos de Raio-X e de Ressonância Magnética.

A diferença entre imagens bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D) é que a primeira é composta por *pixels* (elementos de imagem) e a segunda por *voxels* (elementos de volume). O *pixel* é representado por quadrículos e o *voxel* por cubóides.

Considerando uma mesma região de apresentação, ou seja uma janela, para duas imagens 2D, se uma delas possui um tamanho 60x60 (*pixels*) e a outra 80x80, a resolução espacial da segunda imagem é melhor pois o tamanho dos *pixels* será menor. Assim, no limite, quanto mais próximo o *pixel* estiver de um ponto, maior será a resolução espacial da imagem. O mesmo se aplica para objetos 3D.

2.1. Interpolação

Uma série de fatias 2D, obtidas tanto em CT quanto em MRT, podem ser "empilhadas" para se obter uma representação 3D do objeto em estudo. Por exemplo, pode-se imaginar que se tenha uma esfera e que dela se obtenha algumas imagens bidimensionais (cortes), ou seja, imagens que conterão círculos de diversos tamanhos. Se estas imagens, forem empilhadas na mesma seqüência e os pontos entre os planos que definem cada imagem forem ligados, obter-se-á um objeto próximo a uma esfera. Quanto maior o número de planos maior será a precisão da forma do objeto, ou seja, mais semelhante ao objeto original o objeto gerado estará.

Por restrições físicas do sistema de aquisição no caso de MRT e também para se diminuir o custo da aquisição das imagens por um tomógrafo de Raio-X, limita-se a quantidade de secções ou fatias obtidas. A distância entre duas secções, obtidas por um tomógrafo, geralmente é maior que a distância entre os pixels consecutivos de uma secção, assim torna-se necessário aplicar algoritmos de interpolação para criar uma visualização 3D mais fiel ao objeto original.

Se a distância entre os planos for próxima da distância entre *pixels*, as imagens poderão ser transformadas em uma representação volumétrica por interpolação

trilinear, ou seja, pode-se aplicar a interpolação linear nas três direções x, y e z. Porém, se a distância entre os planos for muito maior que a distância entre *pixels*, deverá ser estabelecida uma correspondência entre pontos em planos consecutivos antes de se executar a interpolação. É importante ressaltar que a distância entre *pixels*, nada mais é do que a própria dimensão do pixel e que, em se tratando de apresentação volumétrica, utiliza-se *voxels* (elementos de volume), que geralmente são cubóides, no lugar de *pixels* (elementos de imagem).

No caso das imagens obtidas pelo tomógrafo de RM, deve-se colocar que existe uma peculiaridade positiva nas mesmas, pois como as secções são obtidas simultaneamente, não há necessidade de se efetuar o tratamento do registro entre elas. Ou seja, a correspondência entre pontos em planos consecutivos é feita diretamente; dois pontos correspondentes possuem a mesma posição nas imagens respectivas.

A técnica de interpolação mais utilizada é a interpolação linear, por ser a mais econômica em computação. Mas esta técnica necessita de muito mais fatias e produz o "efeito escada" (*aliasing*).

A fim de conseguir resolução isotrópica, ou seja que o *voxel* fique próximo a um cubo, é necessário que um número apropriado de fatias sejam geradas entre a imagem de referência e a imagem destino, conforme ilustra a figura 2.1.

Para gerar as fatias intermediárias, é preciso determinar os pontos da secção

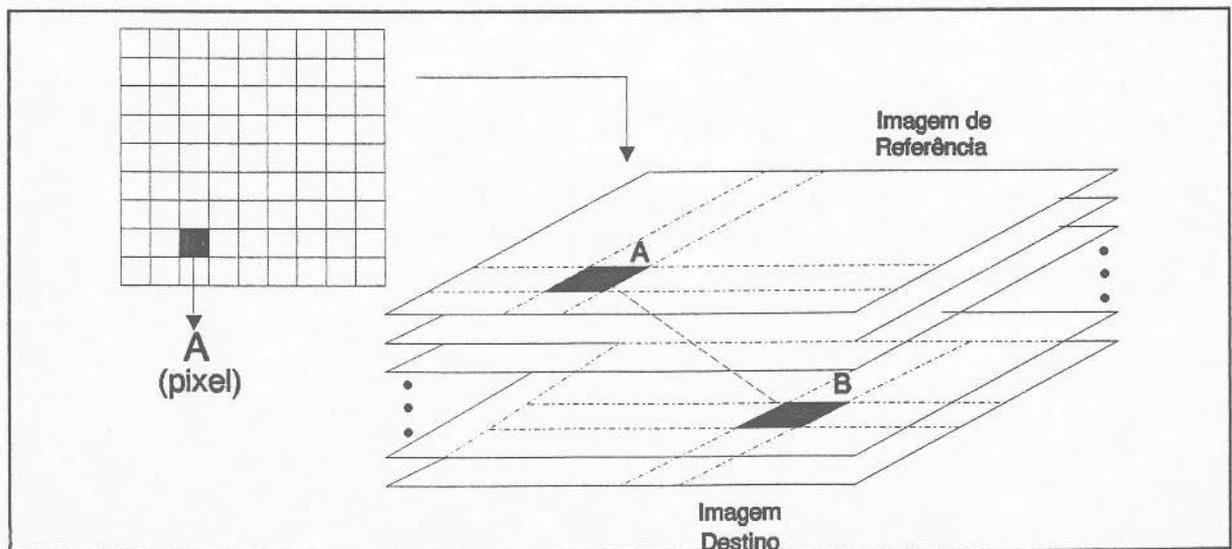


Figura 2.1 Duas fatias consecutivas e as fatias intermediárias geradas para obter resolução isotrópica.

na imagem destino que estão associados a cada ponto da secção na imagem de referência. Supondo que o ponto A, na figura 2.1, que se encontra na imagem de referência está associado ao ponto B na imagem destino, então as intersecções da linha AB com as fatias intermediárias correspondem às posições de pontos que estão associados a AB, ou seja, que se conectam aos pontos A e B. A intensidade do ponto de intersecção é determinada pela interpolação linear das intensidades dos pontos A e B. Se uma secção se contrai ou expande de uma fatia para outra, pode-se conectar um ponto de uma com vários pontos adjacentes da outra fatia. Assim, mais que uma linha pode passar através do mesmo *pixel* em uma fatia intermediária. A intensidade de um *pixel*, que é atravessado por mais de uma linha, é determinada pela média de intensidades obtida em cada linha.

Assim, os *pixels* pertencentes a uma fatia não se conectam necessariamente com os *pixels* logo abaixo deles na próxima fatia. O tecido de um corpo em uma fatia pode, por exemplo, dobrar-se, contrair-se, expandir-se ou desaparecer na fatia seguinte, por isso é importante que as relações entre os *pixels* em fatias consecutivas sejam determinadas antes da geração das fatias intermediárias. Um estudo sobre esta associação entre dois pontos é feita em [Gos92].

A figura 2.2 apresenta um esquema de um protótipo de sistema de reconstrução 3D proposto por Chang, Chen e Ho em [Cha91]. Para a detecção de limites 3D geralmente são definidas três operações específicas 3D para detectar as superfícies de limite. Como estas operações consomem muito tempo, em [Cha91] os autores apresentaram uma alternativa extraindo os contornos 2D, por detecção de bordas, de cada fatia obtida, utilizando o algoritmo de Seitz e Ruesegger [Sei83], e posteriormente aplicando uma técnica de reconstrução de superfície para aproximar os limites 3D de um objeto utilizando, por exemplo, técnicas de triangulação, *splines*, etc. Propuseram ainda, técnicas que aplicam funções 2D de interpolação não-linear entre pares de secções, em especial com o uso da interpolação de Hermite com amostragem em curvatura do contorno do objeto, ou seja, em vez de se utilizar os pontos de contorno detectados pelo algoritmo Seitz e Ruesegger, são selecionados alguns pontos (pontos de amostragem) reduzindo, assim, os dados e conseqüentemente tornando mais fácil o cálculo das transformações geométricas e diminuindo o tempo de processamento. Estes pontos de contornos são candidatos para os pontos de controle de superfícies de Hermite. Para interpolar uma superfície de Hermite, são necessários dois vetores tangentes e um vetor de curvatura para cada ponto de controle. Então, para determinar estes vetores é executado um mapeamento de vizinhança dos pontos

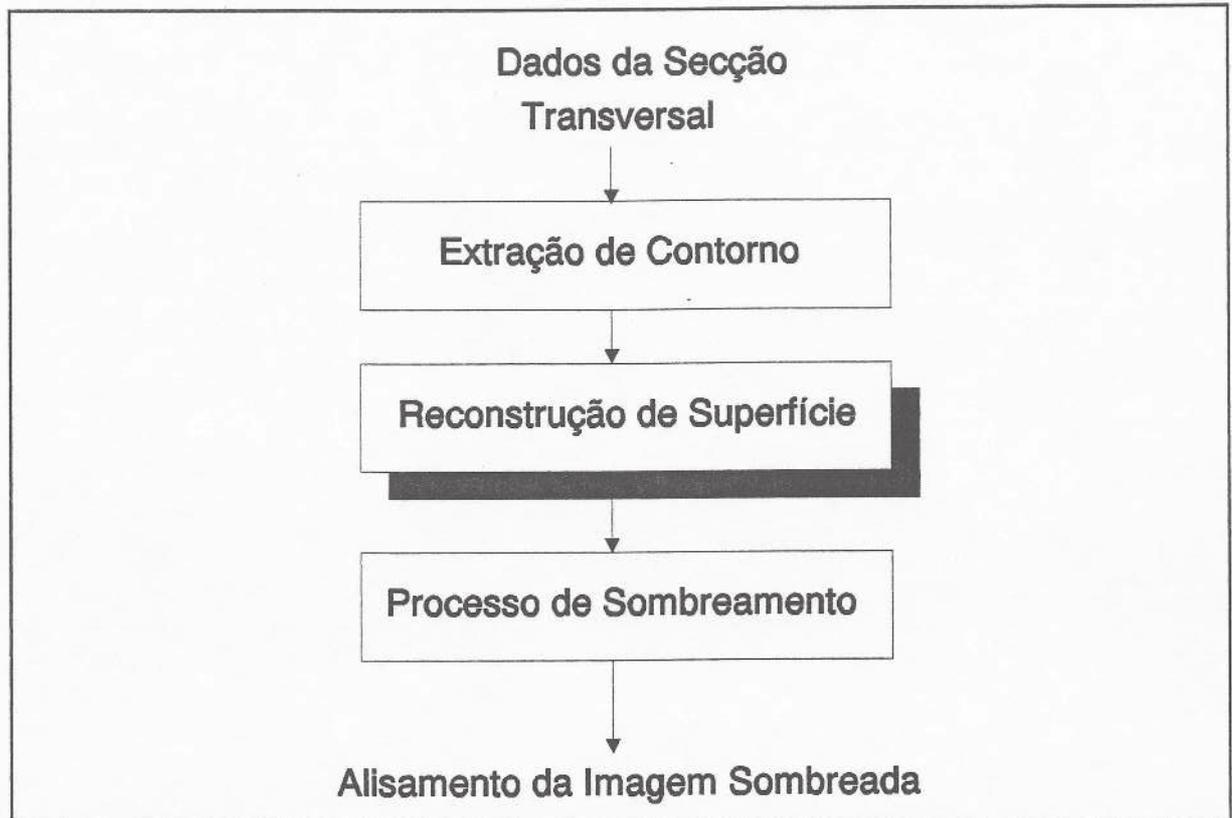


Figura 2.2 Um sistema generalizado de reconstrução por superfícies 3D.

de controle entre os pares de fatias. Uma vez que os pontos de controle e seus respectivos mapeamentos podem ser gerados, as superfícies de Hermite podem ser interpoladas.

Em [Gor69] e [Gil94], os contornos seccionais são representados por *B-splines* uniformes, e então é feita a interpolação entre as fatias por *cardinal splines*. Em [Tel86] os dados de contornos iniciais foram transformados em coeficientes de séries de Fourier e um filtro de Fourier foi aplicado na direção da coordenada *z*.

2.2. Visualização Tridimensional

A visualização de imagens 3D é o processo de transformar de forma rápida e eficiente uma representação de volume ou superfície, onde cada *pixel* possui uma cor, ou nível de cinza, para exibição dos dados em 3D. O processo de visualização cria uma descrição de uma estrutura, ou seja, de uma porção selecionada de um corpo,

ou o volume inteiro, em uma tela de computador [Sty91].

A imagem em 3D apresenta as características morfológicas de um corpo de tal modo que o usuário não precisa reconstruir mentalmente o volume do objeto a partir de suas projeções em 2D. Para isso, tem-se desenvolvido técnicas de visualização para habilitar o usuário a ver partes selecionadas de um objeto em qualquer ângulo e com noção de profundidade.

O processo de visualização em 3D começa com a formação de volume de dados que consiste em empilhar um conjunto de fatias. Cada *pixel* em cada fatia torna-se agora um *voxel* (*volume element*), no volume. Então, uma interpolação é realizada para produzir *voxels* cúbicos, como ilustra a figura 2.3. A interpolação garante que as novas fatias geradas tenham um espaço inter-fatias igual ao tamanho do *pixel*. O *voxel* é representado no espaço do objeto e no espaço da imagem.

Assim o modelo 3D do objeto é representado por uma matriz tridimensional,

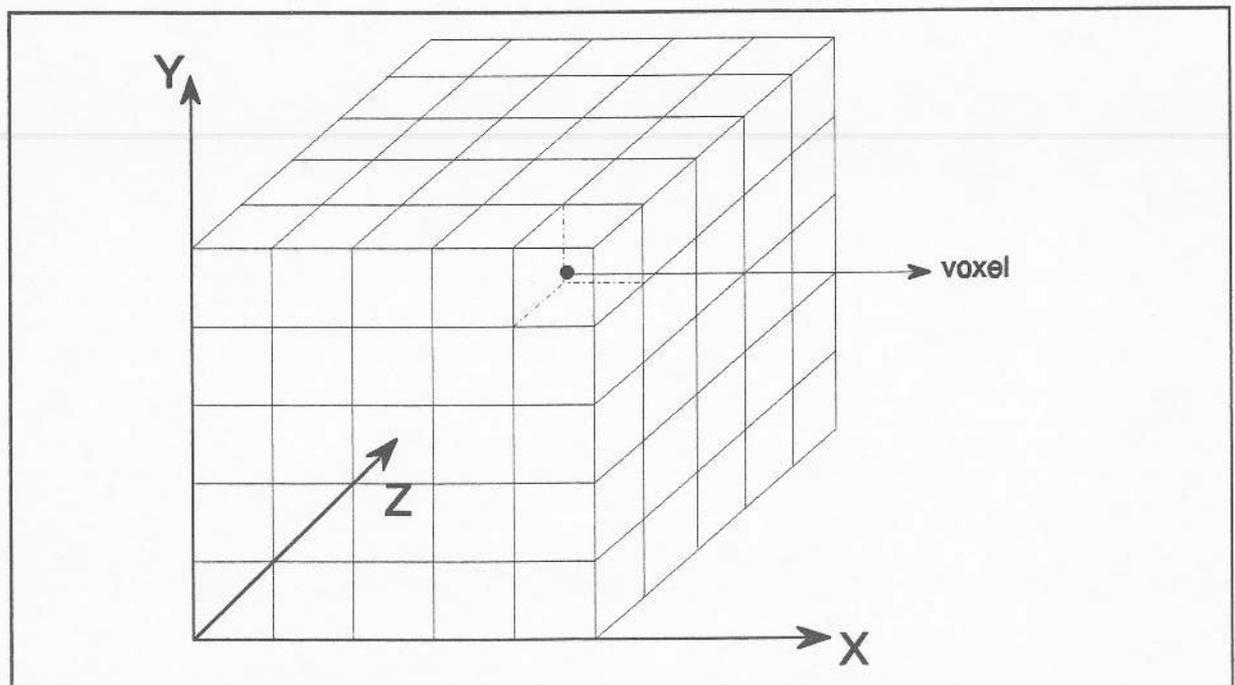


Figura 2.3 Representação por *voxels* de um cubo no espaço-objeto.

onde cada elemento na matriz corresponde a um *voxel* na cena 3D e os índices da matriz correspondem às coordenadas do *voxel*.

O valor de cada *voxel* é baseado em parâmetros físicos, tais como, atenuação de raio-X para CT, ou densidade de próton e mobilidade para MRT.

Em sistemas 3D utiliza-se quatro diferentes sistemas de coordenadas: o sistema de coordenadas do espaço da cena, o sistema de coordenadas do espaço do objeto, o sistema de coordenadas do espaço da imagem e o sistema de coordenadas do espaço de tela ou visualização. A figura 2.4 ilustra uma representação esquemática de transformações de imagens tridimensionais de um sistema de coordenadas para outro [Udu91].

O espaço de cena é aquele onde os dados de imagem estão representados. Por exemplo, se os dados representam um conjunto de fatias tomográficas de um órgão estático, então o espaço de cena é o espaço 3D onde os pontos de imagem com seus valores correspondentes são definidos. Quando se cria um órgão ou sua superfície a partir de intensidades de imagens, tais como informações são representadas no espaço do objeto, que corresponde ao espaço 3D onde os pontos do objeto ou sua superfície são definidos. Quando se rotaciona, escala, ou translada cenas, objetos ou superfícies, estes são representados em outro espaço 3D chamado espaço de imagem. A figura 2.5 ilustra os sistemas de coordenadas no espaço objeto e imagem.

O espaço de visualização é a tela 2D de um dispositivo de exibição. Devido à diferença de dimensionalidade entre o espaço de imagem e o de visualização que apresenta uma dimensão a menos, a informação tem que ser submetida a uma transformação de redução de dimensionalidade que geralmente consiste em projetar o objeto ou superfície na tela do computador. Para compensar a perda de dimensionalidade, existem técnicas que fornecem ilusões de profundidade na imagem apresentada, tais como sombreamento (*shading*), remoção de partes ocultas (*hidden-surface removal*), transparência e a apresentação rápida de imagens sucessivas representando sucessivas projeções do objeto conhecida como animação.

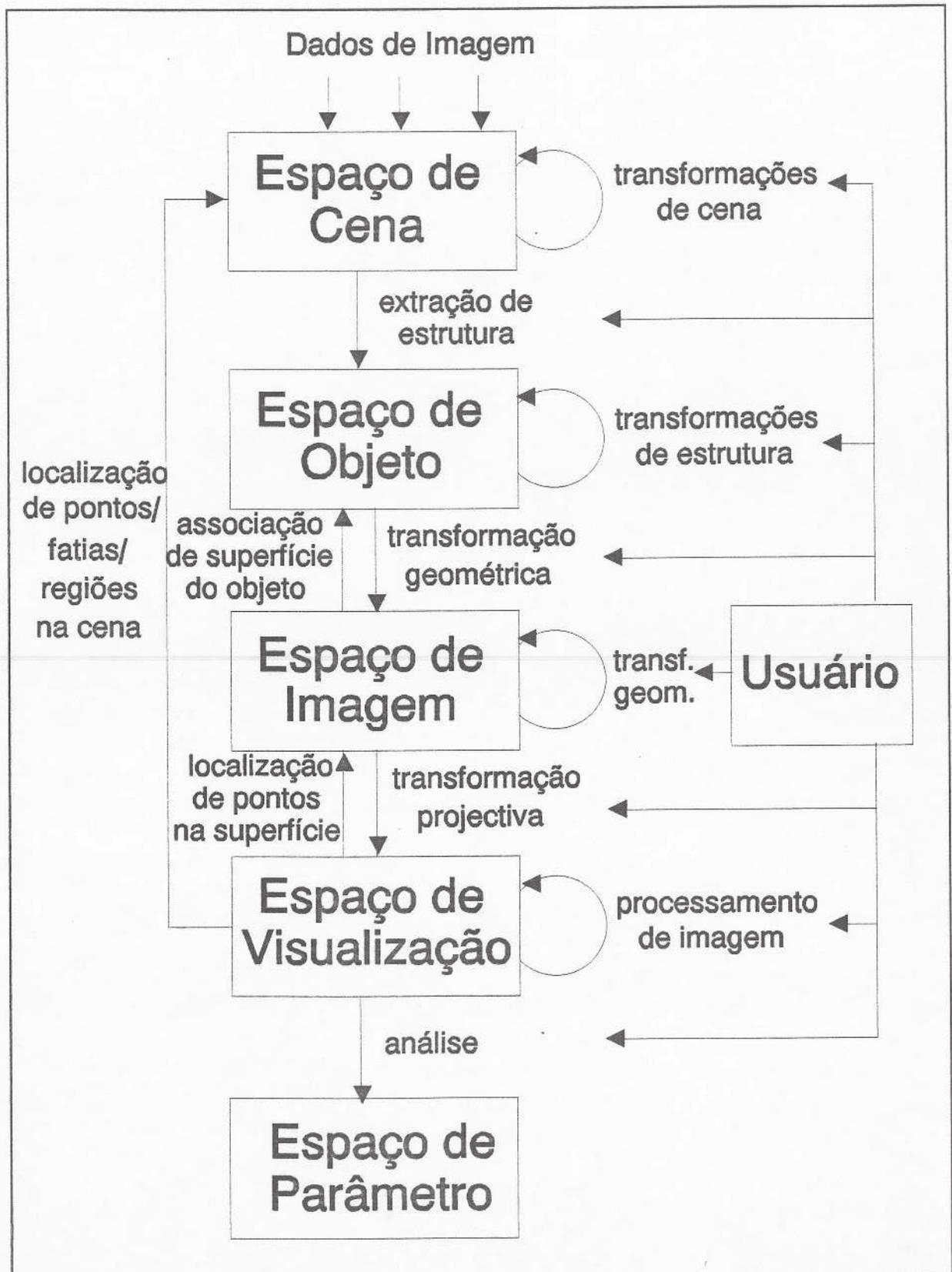


Figura 2.4 Representação esquemática de transformações de imagens tridimensionais.

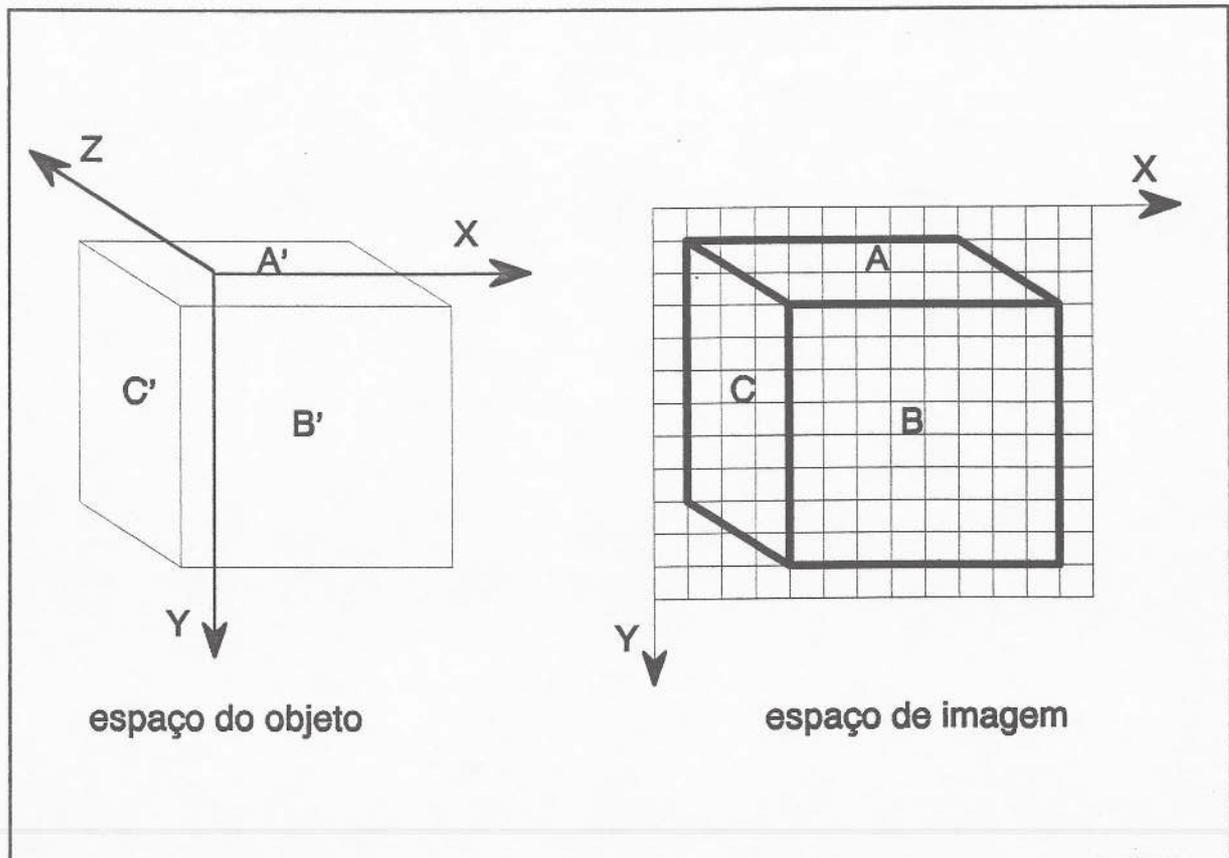


Figura 2.5 Um cubo representado no espaço de objeto e no espaço de imagem.

Certas operações são feitas no objeto baseadas na imagem exibida no espaço de visualização, por exemplo, a operação pode ser a apresentação de um determinado órgão ou a média de números CT em uma determinada região. Em sistemas mais sofisticados pode-se efetuar mais de uma operação. Estas operações representam uma transformação do espaço de visualização para o espaço de parâmetro [Udu91].

A maior parte das operações de análise podem ser consideradas como transformações do espaço de cena para o espaço de parâmetro via o espaço de visualização. O propósito da análise é obter informação quantitativa sobre a estrutura na cena. Geralmente, o resultado final é o valor de um parâmetro, tais como o volume de uma cavidade, o diâmetro de um vaso, ou a velocidade instantânea de uma certa característica de um órgão dinâmico.

Segundo os autores em [Sty91], existem 3 modelos de representação de um volume no espaço de objeto, ou seja, a representação de superfície, volumétrica, ou de contorno, sendo que apenas os dois primeiros são de interesse deste trabalho. Utilizando

um destes dois modelos, o objeto de interesse, ou uma parte dele, pode ser representado por superfícies (*surface rendering*) ou por volume (*volume rendering*) [Udu91] [Sty91] [Che91].

Na representação de superfície, a visualização e a análise de dados multidimensionais são baseadas na detecção de bordas, ou limites, do objeto [Udu91]. Este método utiliza primitivas 1D, 2D ou 3D. A representação volumétrica não é baseada na detecção de bordas, mas o objetivo é representar pseudo-superfícies e interfaces de vários tipos de tecido. Este método utiliza primitivas 3D.

A representação de superfície geralmente envolve dois aspectos, ou seja, a formação de superfície da estrutura e o *rendering* ou representação, propriamente dito, da superfície em uma tela 2D. A formação de superfície envolve transformações do espaço de cena para o espaço de objeto. Existem 3 abordagens para a formação de superfície que são denominadas *contouring*, *patching*, e *surface tracking*. No método *contouring* o objetivo é computar o limite da estrutura em cada fatia 2D representando-o como linhas de contorno e tratar o limite 3D da estrutura empilhando estas linhas de contorno. No *patching*, o problema é determinar uma superfície remendando as linhas de contorno de duas fatias sucessivas como elementos de *patching*, geralmente triângulos. Em tais métodos a superfície é determinada construindo-se triângulos entre cada par de contornos sucessivos. Em *surface tracking*, o objetivo é produzir uma superfície como um conjunto de faces dos *voxels* que delimitam a estrutura [Udu91].

O propósito da operação de *rendering* na representação de superfície é criar uma apresentação da estrutura em uma tela de computador, geralmente envolvendo transformações geométricas.

A representação volumétrica de dados de um tomógrafo pode ser dividida em seis passos, segundo os autores em [Ney90], ou seja, formação de volume, classificação ou segmentação, detecção de superfície, rotação, sombreado (*shading*) e projeção. A detecção de superfície e o sombreado são opcionais. Em [Udu91], Udupa define dois aspectos apenas da representação volumétrica, são eles o pré-processamento do volume e o *rendering* propriamente dito. Mas ele afirma, também, que esta divisão é apenas conceitual, geralmente o pré-processamento pode ser feito durante o *rendering*.

O modelo conceitual utilizado na representação volumétrica é tal que o objeto é representado por um bloco colorido cuja cor e grau de transparência são diferentes para cada região distinta do objeto. Para associar uma cor ou grau de transparência a cada *voxel* utiliza-se uma forma de segmentação, ou classificação. Geralmente, considera-se diferentes

cores para cada objeto na cena, e um grau de transparência entre 0% a 100%, baseado no material contido em cada *voxel*. Porém, o método mais simples é o de associar a mesma cor para todos os *voxels*, mas variar o grau de transparência baseado no valor do *voxel*. Este método é utilizado em volumes constituídos por níveis de cinza.

A operação de *rendering* na representação volumétrica tem como objetivo determinar a cor a ser associada a cada *pixel* no espaço de tela para qualquer orientação da cena no espaço de imagem. Para isso, é necessário determinar o conjunto de *voxels* que contribuem para cada *pixel*. Existem duas técnicas usadas para este propósito, ou seja, a projeção de *voxel* e o *ray casting* [Udu91].

Geralmente, a estrutura que se quer apresentar e analisar ocupa somente uma pequena porção da área de cena. Uma operação chamada *Volume of Interest* (VOI) permite criar outra cena, cuja região é um cubóide também, que abrange toda a estrutura de interesse, mas eliminando as estruturas irrelevantes. Assim, há uma minimização do espaço de armazenamento necessário para o processamento da cena.

Devido ao alto custo computacional no tratamento de dados tridimensionais, muitos pesquisadores têm utilizado estruturas de dados alternativas, tais como a *octree* [Fol90] [Män89] [Far88], para reduzir o tempo de acesso aos dados e poupar espaço de armazenamento. A *octree* é uma árvore onde cada nó pode possuir no máximo oito filhos. Cada nó da árvore representa um volume do espaço. Cada nó filho representa um octante dentro do volume do nó pai. Assim, a raiz representa o objeto todo e os nós folhas correspondem aos volumes que são homogêneos, ou seja, representam um volume no espaço de objeto que envolve um conjunto de *voxels* que possuem um mesmo valor. Os nós intermediários representam volumes octantes não-homogêneos, o valor para cada nó é determinado pela média dos valores dos nós filhos tomando-se um certo peso [Sty91].

2.3. Conclusões

Neste capítulo apresentou-se os principais conceitos sobre a visualização de dados tridimensionais. Neste trabalho, optou-se pela representação volumétrica em vez da representação por superfícies. Porém, existem trabalhos, no ICMSC, que estão sendo desenvolvidos utilizando-se a representação por superfícies. É de interesse do grupo de Computação Gráfica e Processamento de Imagens do ICMSC desenvolver um sistema de processamento e visualização de imagens 3D que utilize tanto a técnica de representação por superfícies quanto a técnica de representação volumétrica, a fim de que as características vantajosas de cada representação possam ser utilizadas.

Neste trabalho, preocupou-se em obter sequências de imagens bidimensionais para a montagem de uma matriz tridimensional que representasse o volume de um objeto.

O método utilizado para a geração de planos intermediários foi a interpolação linear, por ser rápido e apresentar resultados satisfatórios. Há, ainda, um trabalho em andamento que faz uma análise mais profunda sobre os métodos de interpolação mais precisos.

O sistema de visualização é bem simples e apresenta imagens bidimensionais embora o tratamento seja tridimensional, ou seja, pode-se obter outras fatias do objeto a qualquer momento uma vez que a matriz tridimensional está na memória. Este sistema foi implementado em ambiente UNIX utilizando-se a linguagem C e o *toolkit X-View* [Goy94].

ALGORITMOS DE RECONSTRUÇÃO UTILIZADOS EM TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA

3

O objetivo da reconstrução de imagens é transformar dados obtidos de um tomógrafo, já na forma digital, de modo que se possa apresentá-los e manipulá-los computacionalmente. Antes de solucionar este problema, é necessário analisá-lo matematicamente.

3.1. O Modelo Matemático de Reconstrução

Fundamentos de Imagens por Raio-X

A tomografia por raio-X consiste em iluminar um objeto a partir de várias direções e para cada direção os campos transmitidos são registrados, como ilustra a figura 3.1. Uma aquisição dos photons de raios-X transmitidos permite calcular a integral de linha do coeficiente de atenuação ao longo de uma linha reta que vai da fonte ao detector. Matematicamente, os dados coletados constituem uma projeção do objeto $f(x,y)$, então o problema é solucionado reconstruindo o objeto a partir das projeções obtidas em diferentes direções. Para maiores detalhes sobre conceitos de raio-X ver apêndice 1 [Kak86].

As projeções obtidas em diferentes direções podem ser transformadas para que se possa exibir a estrutura interior de um objeto.

A meta, então, é reconstruir uma secção, $f(x,y,0)$ de um objeto 3D representado por $f(x,y,z)$. Os dados necessários para reconstruir $f(x,y,0)$ consistem de conjuntos de integrais de linha ao longo de raios que atravessam o objeto.

A linha AB na figura 3.2 ligando a fonte A e o detector no ponto B representa um raio que passa através do objeto. A integração da função do objeto ao longo

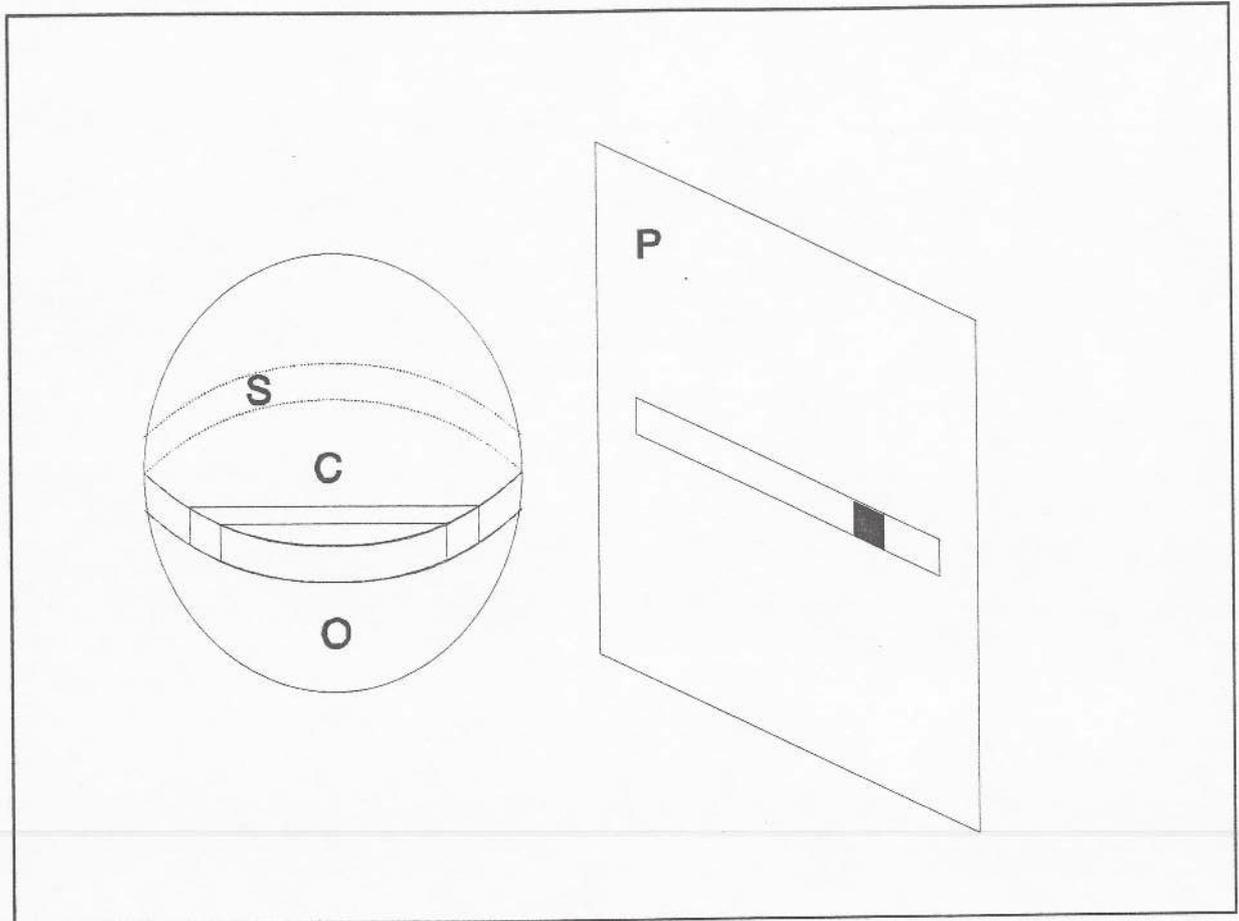


Figura 3.1 A densidade de um objeto O é projetado em um plano P. O objeto é dividido em fatias, como S, as quais são subdivididas em cilindros, como C.

de um raio constitui uma integral de linha. As integrais de linha repetidas ao longo de raios paralelos a AB constituem uma projeção paralela. Na figura 3.2, a fonte e o detector são movidos ao longo das linhas L e L', respectivamente, para construir a projeção paralela. Note que as linhas paralelas L e L' formam um ângulo θ com o eixo X, refletindo na expressão $P_{\theta}(t)$, que é utilizada para representar uma projeção. A variável t representa a posição do detector sobre a linha L.

Registrando projeções para cada θ , $0 < \theta < \pi$, constitui a transformada de Radon do objeto. A partir destes dados, o objeto pode então ser reconstruído pela transformada inversa de Radon [Kak86].

Se uma fonte de raio-X é usada, a integral ao longo da linha AB é equivalente à integral de linha do coeficiente de atenuação do objeto. Assim um algoritmo poderia reconstruir a função do coeficiente de atenuação do objeto.

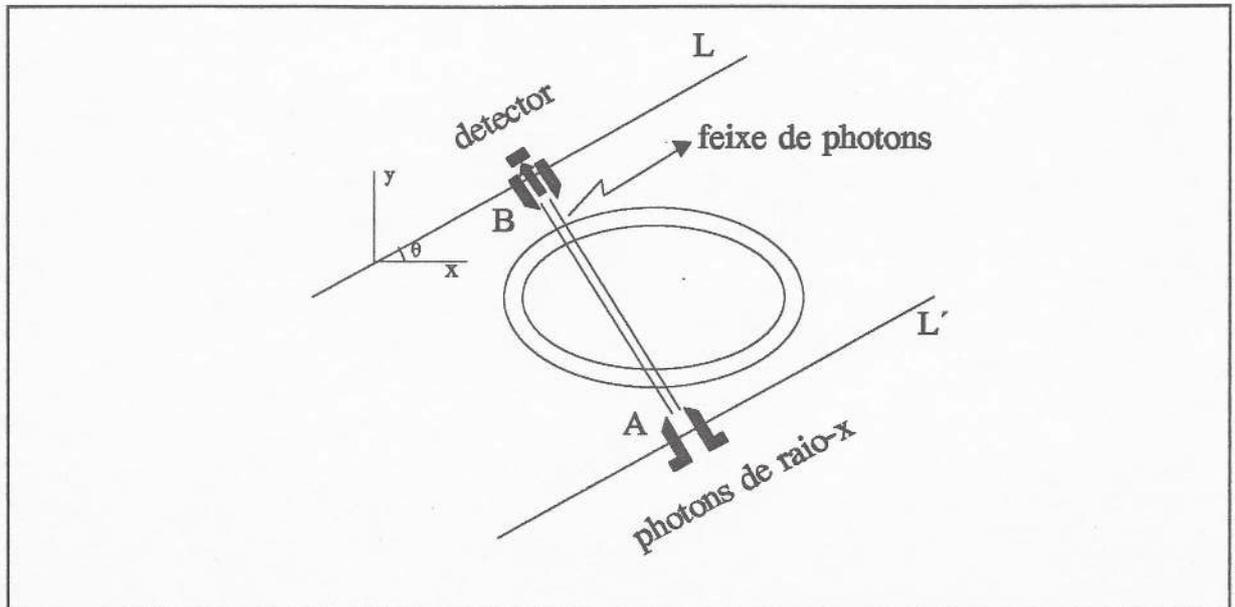


Figura 3.2 Um feixe de photons de raio-X parte de A e incide em B.

Em geral, um raio no plano $z = 0$, tal como o raio AB na figura 3.3, pode ser expresso matematicamente como:

$$t_1 = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (3.1)$$

onde t_1 é a distância perpendicular entre linha e a origem. Com o uso desta equação, a integral se torna

$$\begin{aligned} P_{\theta}(t_1) &= \int_{\text{raio AB}} f(x, y, 0) dx dy \\ &= \int_{-y_m - x_m}^{y_m - x_m} f(x, y, 0) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t_1) dx dy \end{aligned} \quad (3.2)$$

Se o eixo x é rotacionado sobre o eixo z a um ângulo θ , o eixo t é formado e a projeção pode ser escrita simplesmente como

$$P_{\theta}(t_1) = \int_{-s_m}^{s_m} f(t_1, s, 0) ds \quad (3.3)$$

onde $t = x \cos \theta + y \sin \theta$ e $s = -x \sin \theta + y \cos \theta$.

Note que $P_{0i}(t)$ é a projeção paralela a um ângulo (θ_i) . Para valores contínuos de θ , a função $P_{\theta}(t)$ é a transformada de Radon de $f(x, y, 0)$.

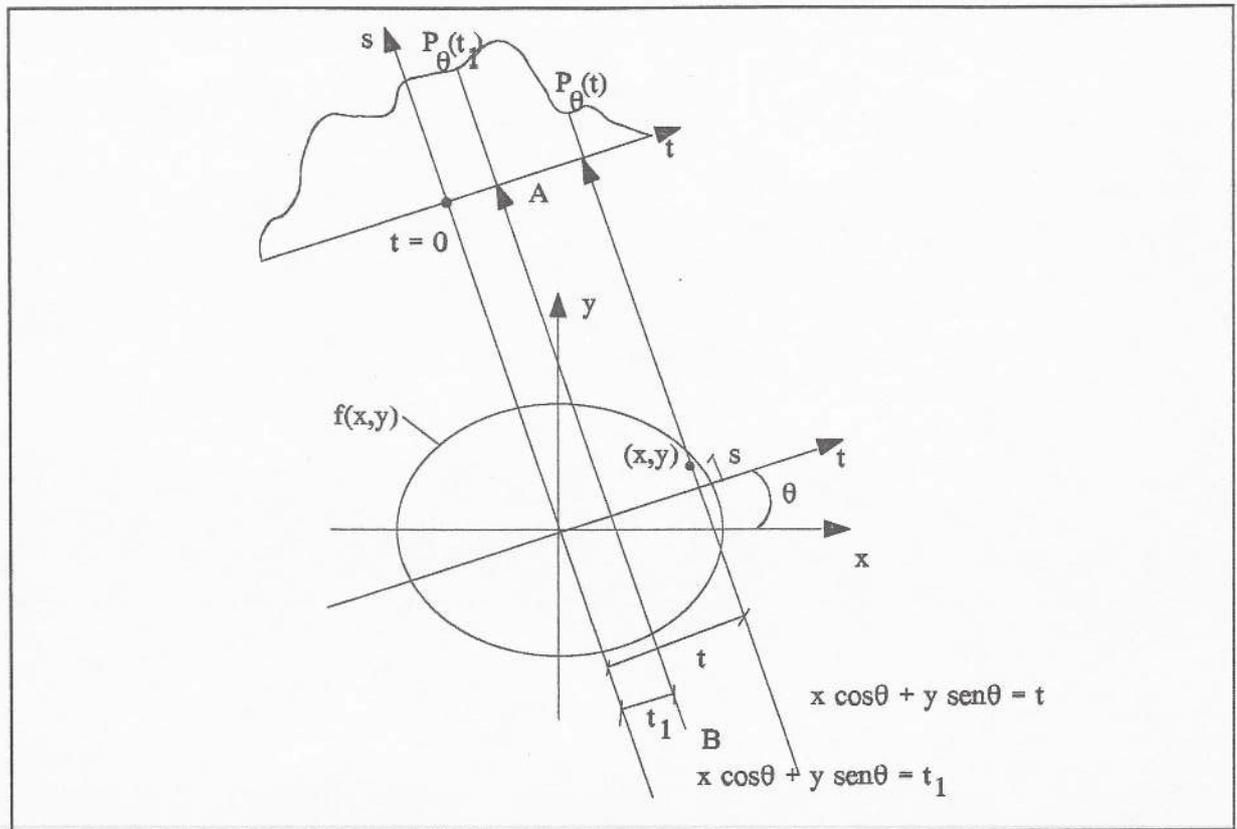


Figura 3.3 A função $P_{\theta}(t)$ é uma projeção paralela de $f(x,y)$. O sistema de coordenadas representado pelos eixos s e t está rotacionado.

Em três dimensões um raio pode ser descrito pela intersecção dos dois planos:

$$t_1 = x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \quad r_1 = -(-x \sin \theta + y \cos \theta) \sin \gamma + z \cos \gamma \quad (3.4)$$

no sistema de coordenadas rotacionado (t,s',r) . Este novo sistema de coordenadas é obtido por duas rotações dos eixos de coordenadas (x,y,z) . A primeira rotação é o mesmo que no caso 2D, ou seja, θ graus sobre o eixo z , resultando nos eixos (t,s,z) . A segunda rotação é de γ graus sobre o novo eixo t , resultando em (t,s',r) . Na forma matricial a rotação é descrita como:

$$\begin{bmatrix} t \\ s \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Uma projeção paralela tridimensional pode, então ser expressa por

$$P_{\theta,\gamma}(t_1, r_1) = \int_{-s_m}^{s_m} f(t_1, s', r_1) ds' \quad (3.6)$$

A projeção resultante está agora em duas dimensões e é obtida integrando-se ao longo das linhas paralelas ao eixo s' . Note que qualquer integral de linha pode ser matematicamente expressa desta maneira.

Fundamentos de Imagens por MR

A seqüência de pulso para aquisição de dados *spin-echo* 2D de uma fatia na direção x, y começa com a aplicação simultânea de um pulso de RF a 90° e um gradiente na direção z , G_z , que resulta na seleção de uma fatia a partir da densidade de *spin* 3D estático do objeto $f(x, y, z)$. As coordenadas x, y, z estão relacionadas com o domínio do espaço. A excitação desta fatia pode ser representada por $s(z)$, e geralmente dependerá do pulso de RF a 90° . Depois da seleção da fatia, um pulso a 180° é aplicado em um tempo $TE/2$, e o *spin-echo* resultante, depois de um tempo TE , é espacialmente codificado nas direções x e y utilizando-se gradientes adicionais, G_x e G_y , respectivamente. A direção x está relacionada com a direção da codificação de frequência, e a direção y está relacionada com a direção de codificação de fase, ou estado. O receptor de RF é acionado durante o gradiente G_x , em um intervalo de tempo dependendo do *spin-echo*, e um sinal de tempo complexo $g(t, G_x)$ é coletado. O gradiente G_y da codificação de fase é habilitado e desabilitado antes do gradiente G_x , e multiplica o objeto $f(x, y, z)$ com uma exponencial linear complexa na direção y [Smi93].

Se não há qualquer movimento do objeto, o sinal complexo detectado pelo

receptor de MR é dado por:

$$g(t, G_y) = \int_{xy} \int_z f(x, y, z) s(z) dz e^{-i\gamma(G_x t x + G_y \tau_y y)} dx dy \quad (3.7)$$

onde γ é a razão giromagnética do elemento em estudo, geralmente o hidrogênio, G_x é a intensidade do gradiente de frequência, G_y é a intensidade do gradiente de codificação de fase, e τ_y é o comprimento de tempo em que G_y é acionado. Este sinal é uma função do tempo t durante o gradiente de frequência, sendo $t=0$ no centro do gradiente, e é parametrizada pelo valor do gradiente de codificação de fase G_y , o qual é incrementado para cada excitação da fatia.

A equação (3.7) pode ser escrita como:

$$g(t, G_y) = \int_z F(\xi, \eta, z) s(z) dz \quad (3.8)$$

onde

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\gamma}{2\pi} G_x t \\ \eta &= \frac{\gamma}{2\pi} G_y \tau_y \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $F(\xi, \eta, z)$ representa um objeto 3D híbrido, a transformada de Fourier de $f(x, y, z)$ relativa somente a x e y .

Na prática, o tempo de leitura (*read-out*) é discretizado em N intervalos de amostragem de comprimento Δt , e o gradiente de codificação de fase é discretizado em N valores, cujo incremento é ΔG_y . Assim, pode-se escrever o sinal discreto na forma:

$$F(m, n) = g(t, G_y) \quad (3.10)$$

sendo

$$\begin{aligned} t &= m \Delta t \\ G_y &= n \Delta G_y \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde

$$-\frac{N}{2} \leq m, n \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (3.12)$$

A reconstrução final $h(p,q)$ é então determinada tomando-se a transformada 2D inversa de Fourier do sinal:

$$h(p,q) = \sum_m \sum_n F(m,n) e^{\frac{2\pi i}{N}(mp+nq)} \quad (3.13)$$

3.2. Principais Algoritmos utilizados em Tomografia Computadorizada

Há diferentes abordagens para o problema de reconstrução, segundo Gordon e Herman [Gor74]:

- Dado um certo número de projeções de um objeto, tenta-se obter tanta informação quanto possível sobre a distribuição de densidade do objeto, no caso de raio-X por exemplo, a partir dos dados disponíveis;
- Dado um nível desejado de resolução, coleta-se dados usando um número suficiente de projeções a fim de garantir que nossa reconstrução esteja acima daquele nível de resolução.

A segunda abordagem nem sempre é apropriada pois pode não ser possível a aquisição do número de projeções desejada. Um exemplo disso é encontrado em microscopia eletrônica, onde o objeto a ser reconstruído é destruído pelo processo de obtenção de projeções. Outros exemplos de limitações físicas e de custo restringem a coleta de dados em relação ao grande número de projeções. Em radiologia, também, pode-se desejar limitar a exposição do paciente ao raio-x.

Para solucionar o problema matemático de reconstrução da segunda abordagem foram desenvolvidos algoritmos. Budinger e Gullberg [Bud74] classificaram os algoritmos de reconstrução tridimensional em treze categorias, ou seja:

- técnicas de *direct matrix*, inversa generalizada e pseudo inversa;
- *summation*, superposição linear ou retroprojeção;
- técnica de reconstrução algébrica (ART);

- ART modificada para eliminação de ruídos;
- técnica de reconstrução iterativa simultânea (SIRT);
- correção de tangente ortogonal;
- técnica iterativa dos mínimos quadrados (ILST);
- *summation* de projeções compensadas;
- *summation* de retroprojeções filtradas, técnica de convolução;
- técnica iterativa da média geométrica;
- retroprojeção filtrada *rho*;
- reconstrução de Fourier;
- *summation* das projeções depois da transformada de Hilbert da derivada da projeção.

Eles forneceram, também, detalhes sobre algumas das principais técnicas. Brooks [Bro75] expõe alguns detalhes também sobre retroprojeção, técnicas de reconstrução analítica e técnicas de reconstrução iterativas. Ele divide as técnicas de reconstrução analítica em retroprojeção filtrada, incluindo convolução, o método de Radon [Cor73], e filtragem de Fourier, e em reconstrução 2D de Fourier, enquanto que as técnicas de reconstrução iterativas ele divide em SIRT, ART e ILST. Em [Hua87], são abordadas as técnicas de retroprojeção, transformada de Fourier e ART. Já Lewitt [Lew83] classificou os algoritmos em duas categorias, ou seja, métodos de transformadas e métodos de expansão de séries, dando ênfase para métodos de transformadas.

Em Gordon e Herman [Gor74] apresenta-se, também, uma classificação alternativa dos algoritmos de reconstrução, ou seja, *summation*, uso de transformada de Fourier, solução analítica das equações integrais, e abordagens de expansão de séries. A seguir, serão abordadas algumas destas técnicas.

3.2.1. *Summation*

Este método é o mais simples. Os raios-soma que passam por um determinado ponto são somados para se obter uma estimativa da densidade no ponto em questão.

Suponhamos uma chapa fotográfica P paralela a secção transversal C do paciente, conforme ilustra a figura 3.4, que se encontra entre a chapa e uma fonte de raio-X.

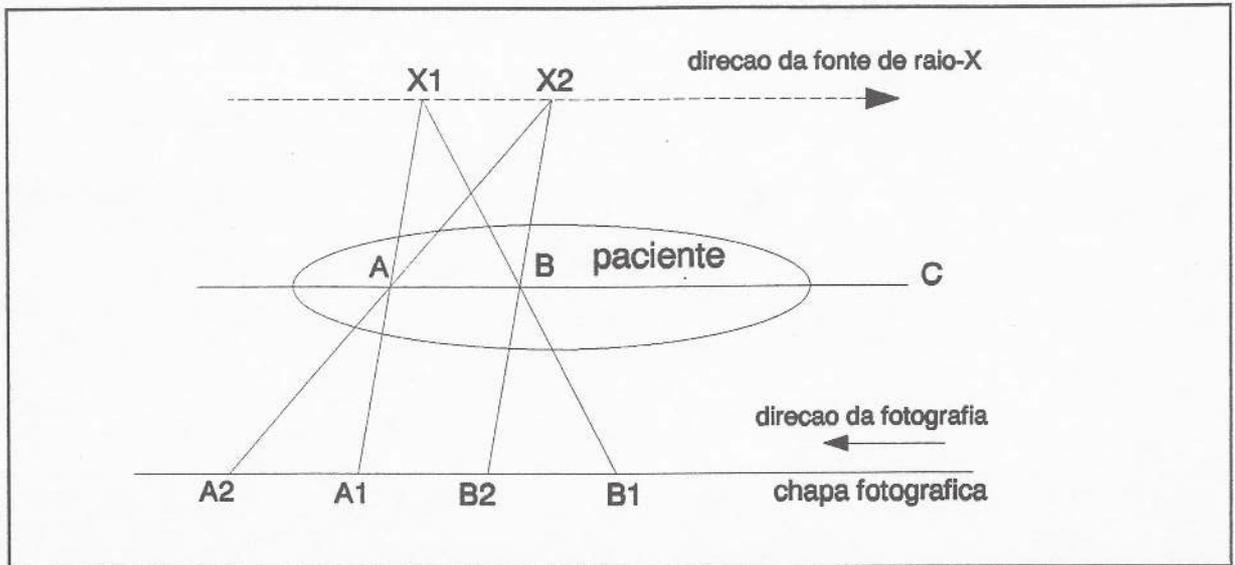


Figura 3.4 Tomografia Linear. Obs: os índices 1 e 2 indicam dados referentes aos instantes t_1 e t_2 .

Movendo a fonte de raio-X a uma determinada velocidade, paralelamente a C e em uma determinada direção, e movendo P a uma determinada velocidade na direção oposta; pode-se garantir que um ponto em C sempre se projeta sobre um mesmo ponto em P, mas um ponto acima ou abaixo de C é projetado em pontos diferentes em P. Assim na chapa fotográfica a distribuição de densidade na seção C se sobressairá, enquanto o resto do corpo ficará indistinto.

A densidade no ponto A do corpo é estimada calculando (integrando) a densidade total ao longo da linha que vai de X_t a A_t enquanto t varia no tempo. Ou seja, para se obter a densidade no ponto A, soma-se as densidades obtidas em A_1, \dots, A_n .

Esta técnica apresentava diferenças nítidas de densidade fora da seção transversal de interesse. Para se evitar isto Kuhl e Edwards propuseram a varredura da seção transversal na qual somente as densidades no plano de interesse contribuíssem para o resultado final, conforme ilustra a figura 3.5.

O objeto é varrido em muitas direções, ou seja em diversos ângulos, mas todas as projeções são feitas em um único plano transversal. As imagens parciais que resultam das várias varreduras podem ser superpostas em um sistema de registro tal que suas relações espaciais sejam preservadas.

A vantagem deste método é que pode ser implementado utilizando-se um

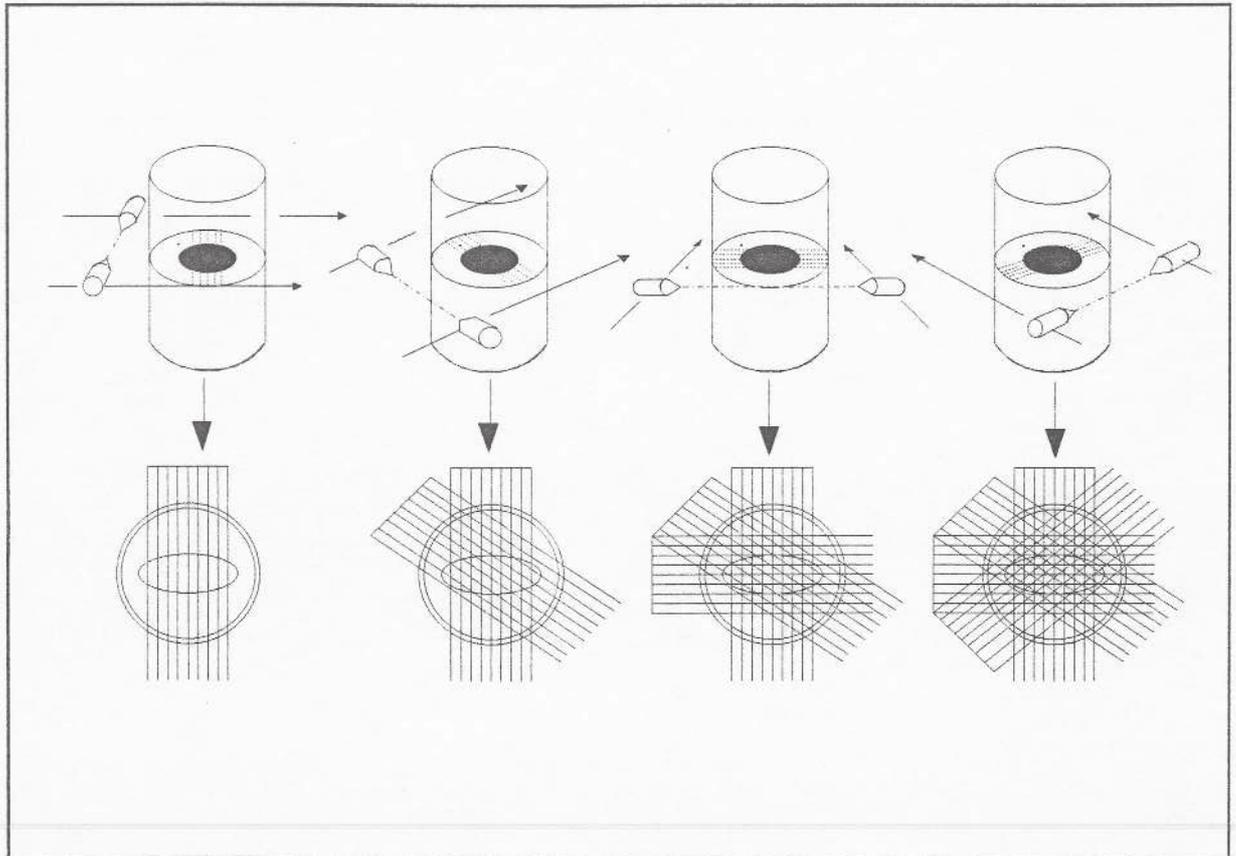


Figura 3.5 Procedimento de varredura para reconstrução de um plano de um objeto 3D, utilizando o método *summation*. O plano de varredura pode ser movido verticalmente para reconstrução 3D.

hardware analógico simples. Porém, a precisão do método *summation* é limitada, a imagem pode ficar borrada (*blurring*). Utilizando-se procedimentos adequados, por exemplo, filtragem, pode-se melhorar o resultado removendo parcialmente estes efeitos.

Bates e Peters (1971), e Smith (1973) propuseram tomar a transformada de Fourier dos resultados do método *summation*, multiplicando-os pela primeira coordenada polar no espaço de Fourier, e tomar a transformada inversa de Fourier para produzir um *rho-filtered layergram*.

3.2.2. Solução Analítica das Equações Integrais

Seja $f(r, \theta)$ a função densidade original (usando coordenadas polares), e seja onde P_θ é a operação de projeção em uma linha de ângulo θ com a horizontal. Uma vez que para obter $g(l, \theta)$ a partir de valores desconhecidos de f envolve uma integração então

$$g(l, \theta) = [P_{\theta} f](l) \quad (3.14)$$

a equação (3.14) é chamada uma equação integral.

A versão idealizada do problema de reconstrução é quando há a disponibilidade de dados de projeção em todas as direções, o que na prática é difícil.

Para resolver este problema Radon provou que se $g(l, \theta)$ é definida pela equação (3.14) para todo θ , então:

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g(l, \theta')}{\partial l} \frac{1}{r \sin(\theta - \theta') - l} dl d\theta' \quad (3.15)$$

Esta fórmula pode ser utilizada para estimar a figura f a partir dos dados de projeção $g(l, \theta)$ sem ter que realizar, necessariamente, transformadas de Fourier. Para calcular a integral da equação (3.15) a um determinado ângulo θ' pode-se tomar a transformada de Fourier da projeção, multiplicando-se por um deslocamento linear, e aplicar a transformada inversa. Porém existem outros métodos para se calcular a integral da equação (3.15), tais como, o método de Bracewell e Riddle (1967), Ramachandran e Lakshminarayanan (1971), entre outros. É importante notar que aproximações diferentes resultarão em estimativas diferentes da estrutura a ser reconstruída. Deve-se levar em conta a natureza matemática dos métodos de reconstrução, pois o resultado final depende das técnicas numéricas escolhidas. Utilizando as mesmas fórmulas e uma técnica diferente para o cálculo, pode-se obter estimativas melhores ou piores para $f(r, \theta)$.

Gordon e Herman [Gor74] apresentaram uma aproximação chamada método da convolução. Este método generalizado permite o uso de projeções espaçadas irregularmente e de comprimentos de raio que variam de projeção para projeção. O método de convolução é um método numérico onde a relação entre a figura e suas projeções é expressa por um conjunto de equações integrais que são resolvidas analiticamente.

3.2.3. Abordagens de Expansão de Séries

Segundo esta abordagem qualquer figura pode ser estimada através de uma combinação de figuras-base pré-determinadas. Os coeficientes desconhecidos nesta

combinação linear são calculados a partir das equações obtidas através das projeções da figura desconhecida expressa como uma combinação linear das projeções das figuras-base.

Suponhamos que se tenha um conjunto de N figuras-base $\{b_i(x,y)\}$ cujas combinações lineares podem fornecer uma aproximação adequada para qualquer figura $f(x,y)$. Assim para qualquer figura $f(x,y)$ existe números reais $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$, tal que

$$f(x,y) \approx \hat{f}(x,y) \equiv \sum_{i=1}^N \rho_i b_i(x,y) \quad (3.16)$$

Se estas figuras se encontram em uma região quadrada pode-se dividir esta região em $N = n^2$ pequenos quadrados idênticos e definir:

$$b_i(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dentro do } i\text{-ésimo quadrado} \\ 0 & \text{outros lugares} \end{cases} \quad (3.17)$$

onde $i = 1, \dots, n^2$.

Seja ρ_i o valor médio de $f(x,y)$ no i -ésimo quadrado, então:

$$\hat{f}(x,y) = \sum_{i=1}^{n^2} \rho_i b_i(x,y) \quad (3.18)$$

é a versão $n \times n$ discretizada da figura f .

Fixadas as bases $\{b_1, \dots, b_N\}$, calcular os N números, $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$, tal que o lado esquerdo da equação (3.18) seja uma aproximação adequada de f .

A expansão de séries é uma abordagem possível para o problema de reconstrução porque a operação de projeção é linear. Seja P_θ o operador de projeção, e que \hat{f} e b_i satisfaça a equação (3.16). Então, para qualquer posição l ao longo da projeção:

$$[P_\theta \hat{f}](l) = \sum_{i=1}^N \rho_i [P_\theta b_i](l) \quad (3.19)$$

Esta é uma equação linear onde os coeficientes ρ_i não são conhecidos.

Se os dados de projeção são coletados a partir de raios de comprimento finito, então usando a equação (3.19) se obtém:

$$\int_{l_1}^{l_2} [P_\theta \hat{f}](l) dl = \sum_{i=1}^N \rho_i \int_{l_1}^{l_2} [P_\theta b_i](l) dl \quad (3.20)$$

Utilizando as equações (3.19) e (3.20) o problema de reconstrução é restringido a solucionar o sistema de equações lineares. Mas mesmo assim a solução não é simples pois o número de ρ_i 's e o número de equações pode ser tão grande que aumentaria o tempo computacional para solucionar as equações; o número de equações pode ainda ser menor que o número de coeficientes desconhecidos, e assim haveria uma infinidade de soluções possíveis mas nem todas com uma aproximação exata da figura original; as equações (3.19) e (3.20) podem ser inconsistentes, isto é, podem não existir uma solução exata, assim seria necessário selecionar os ρ_i 's que apresentam uma boa aproximação. Através de uma escolha cuidadosa das funções-base, pode-se eliminar a necessidade de inversão matricial para resolver o conjunto de equações lineares.

O método de Fourier com um esquema particular de interpolação pode ser considerado um método de expansão de séries.

Considerando o conjunto digitalizado $n \times n$ descrito na equação (3.17), a integral do lado esquerdo da equação (3.20) é aproximada pelas somas de raio, e a do lado direito é a área de intersecção do raio em questão com o i -ésimo quadrado. Em [Gor74] foram considerados dois casos: o caso com peso, no qual calcula-se o lado direito exatamente; e o sem peso, no qual a integral é substituída por 1 se o centro do i -ésimo quadrado encontra-se dentro do raio, ou 0 caso contrário. O caso sem peso apresenta a vantagem de permitir maior velocidade computacional. Em ambos os casos a equação (3.20) pode ser escrita na forma:

$$R_j = \sum_{i=1}^N p_{j,i} \rho_i \quad 1 \leq j \leq M \quad (3.21)$$

onde R_j é a soma de raio do j -ésimo raio, e M é o número total de raios em todas as projeções.

Para resolver o sistema da equação (3.21) pode-se utilizar Técnicas de Reconstrução Algebrica (ART) [Gil94]. Existem dois tipos de algoritmos ART, ou seja, o

aditivo e o aditivo direto. Gordon e Herman notaram que as figuras produzidas sucessivamente pelo algoritmo ART aditivo, inicialmente, vão se aproximando cada vez mais da figura original, mas então pioram progressivamente. Para solucionar este problema pode-se utilizar um método que permita estimar o ponto de parada ótimo independente se o objeto a ser reconstruído é conhecido ou não.

3.3. Comparação de algoritmos

Há dois modos de comparar algoritmos de reconstrução, segundo Herman e Gordon: teoricamente e experimentalmente.

A comparação teórica pode ser uma discussão matemática, ou puramente descritiva, da natureza dos métodos em consideração.

O método experimental de comparação consiste em construir objetos de teste (phantoms) e tomar fisicamente suas projeções ou projetar padrões de teste e tratar suas projeções matematicamente. Em ambos os casos os vários algoritmos são usados sobre os dados de projeção, e as reconstruções são, então, comparadas à original.

Na comparação experimental entre algoritmos, deve-se considerar:

- A diversidade de padrões de teste, para que se considere todos os casos possíveis;
- A diversidade de formas de aquisição das projeções (variação do número de projeções, dos ângulos, etc);
- Variação do nível de ruídos devido a *background*, *quantum fluctuation*, ou erros de níveis de cinza (densidade);
- Erros devido a problemas mecânicos;
- Variação do número de funções-base a serem usadas.

Gordon e Herman afirmam que nenhum algoritmo de reconstrução até então tinha sido testado levando-se em conta todos estes fatores. Assim todo estudo experimental e comparativo poderia ser considerado mais ou menos inadequado.

O critério para a escolha de uma reconstrução depende da aplicação.

Comparações teóricas são difíceis porque não há fundamento matemático comum para algoritmos de reconstrução. O máximo que poderia se conseguir seria uma

estimativa de performance. Uma vez que uma determinada aplicação geralmente trata apenas de um tipo de figura, pode ser que haja um algoritmo que lhe seja adequado, assim avaliações teóricas tornam-se de pouco valor.

Após calcular as reconstruções para vários conjuntos de dados de projeção através dos métodos em questão; a execução de um estudo experimental enfrentaria o problema de se avaliar o sucesso das reconstruções. E não há nenhum padrão para se fazer isto.

Gordon e Herman [Gor74] definiram três classes de métodos para avaliar o desempenho de reconstruções:

- Muitas funções matemáticas foram propostas para medir a diferença entre um padrão de teste e sua reconstrução;
- Tempo e armazenamento computacional: O custo-eficiência de um programa complexo que implementa um algoritmo é altamente dependente da habilidade na utilização de técnicas de construção de software;
- Avaliação visual: Versões contornadas e *halftone* da figura original e sua reconstrução permitem a comparação visual do desempenho relativo de algoritmos.

Herman (1972) comparou um método *summation* com o ART para 4 padrões de teste, 4 conjuntos distintos de projeções, e 18 critérios de desempenho (12 deles relacionados com resolução). O método ART foi o melhor [Her72].

Herman e Rowland (1973) fizeram um estudo comparativo e extensivo dos métodos de convolução, uma versão de ART, e SIRT. Eles usaram 6 padrões de teste com vários conjuntos de projeções e introduziram diferentes tipos de ruído nos dados. Eles concluíram que de uma forma geral o método de convolução é o melhor, devido seu baixo custo. Em casos onde as projeções são obtidas em um pequeno número de ângulos, e onde $m < n/2$ eles consideraram que o método ART é o melhor. E em casos onde os dados de projeção apresentam ruídos brancos com desvio padrão de 10% ou mais, eles aconselham a utilização do método SIRT [Her73].

Smith (1973) considerou, como base de comparação, o custo. Ele comparou a técnica de *summation* e o *rho-filtered layergram*, com o uso de Transformadas de Fourier e 2 esquemas diferentes de interpolação, o método de convolução, um método

de expansão usando séries de Fourier e ART. Eles mostraram que se pode usar um método de interpolação simples mas rápido no espaço de Fourier quando se está utilizando transformadas de Fourier, e obter reconstruções que não são piores que aquelas obtidas através de um método de interpolação mais lento [Smi73].

Sweeney (1972) comparou a Síntese de Fourier (ou interpolação linear, segundo Smith (1973)), um método que utiliza transformadas de Fourier com interpolação linear no espaço de Fourier; e restauração plana de frequência. Ele concluiu que a Síntese de Fourier é menos cara que a restauração plana de frequência, mas que apresenta menor qualidade. Ele comparou também estas técnicas com o método baseado na Equação (3.14) e 3 técnicas de expansão de séries. Sweeney achou que o método da Equação (3.14) mostrou ser o melhor, sendo o primeiro em baixo custo e o terceiro em precisão. Os melhores em precisão foram o de expansão de séries e o de restauração plana de frequência, os quais também apresentaram eficiência na utilização de dados de projeção coletados em um número restrito de ângulos. É importante notar que este estudo comparativo foi direcionado a uma aplicação específica: a reconstrução de distribuição de temperatura a partir de medidas interferométricas e holográficas [Swe72].

Ramachandran e Lakshminarayanan compararam o método de convolução e o método de Fourier, usando 2 esquemas diferentes de interpolação. Eles concluíram que o método de convolução parece ser melhor do ponto-de-vista da velocidade e precisão. Embora uma conclusão generalizada seja dificilmente justificada tomando como base um padrão de teste [Ram71].

Lewitt (1983) comparou o método de Fourier e o de convolução-retroprojeção. Ele chegou à conclusão de que o método de Fourier apresenta vantagens com relação a quantidade de cálculos requisitados, as quais se tornam importantes quando a quantidade de dados e o tamanho das matrizes de imagens são consideravelmente grandes. Porém, este método possui algumas fontes de erro se comparado ao método convolução-retroprojeção. Uma técnica de interpolação ineficiente pode afetar seriamente a qualidade da imagem [Lew83].

3.4. Conclusões

Neste capítulo apresentou-se o problema da reconstrução sob o ponto de vista matemático e os principais algoritmos para sua solução.

No presente trabalho foi utilizada a Transformada Rápida de Fourier, por ser um método eficiente e rápido. Na reconstrução dos dados obtidos pelo minitomógrafo de Raio-X, foi utilizado, também o algoritmo da FFT com retroprojeção.

O ALGORITMO DE RECONSTRUÇÃO COM O USO DE TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

4

A popularidade da Transformada de Fourier (FT) é evidenciada pela grande variedade de áreas de aplicações. Entre elas está a engenharia biomédica, tratamento de imagens médicas, processamento de sinais, espectroscopia, análise metalúrgica, análise de sistemas não lineares, análise mecânica, análise geofísica, simulação e síntese musical. O objetivo deste capítulo é fornecer a base para a aplicação da FT em imagens médicas. Para maiores detalhes ver [Bri88].

4.1. A Transformada de Fourier

Uma interpretação simplificada da transformada de Fourier é ilustrada pela figura 4.1. A essência da transformada de Fourier é decompor ou separar o perfil de onda ou *waveform* em uma soma de senoidais de diferentes frequências. Como estas somas senoidais podem ser compostas na forma original então convencionou-se chamar tal aproximação de transformada de Fourier do perfil de onda. A representação típica da transformada de Fourier é um diagrama que mostra a amplitude e a frequência de cada um dos senoidais. No caso da figura 4.1, a FT corresponde as duas senoidais que são somadas para se obter o perfil de onda original.

Matematicamente, esta relação é mostrada por:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.1)$$

onde $h(t)$ é a *waveform* a ser decomposta em uma soma de senoidais (função tempo da

variável), $H(f)$ é a transformada de Fourier de $h(t)$ (função freqüência da variável), e $j = \sqrt{-1}$. Assim t é tempo e f é freqüência. Os símbolos em minúsculo representam uma função do tempo enquanto que os símbolos em maiúsculo representam a FT da função. Se a integral existe para cada valor do parâmetro f , então a Eq.4.1 define $H(f)$, a transformada de Fourier de $h(t)$.

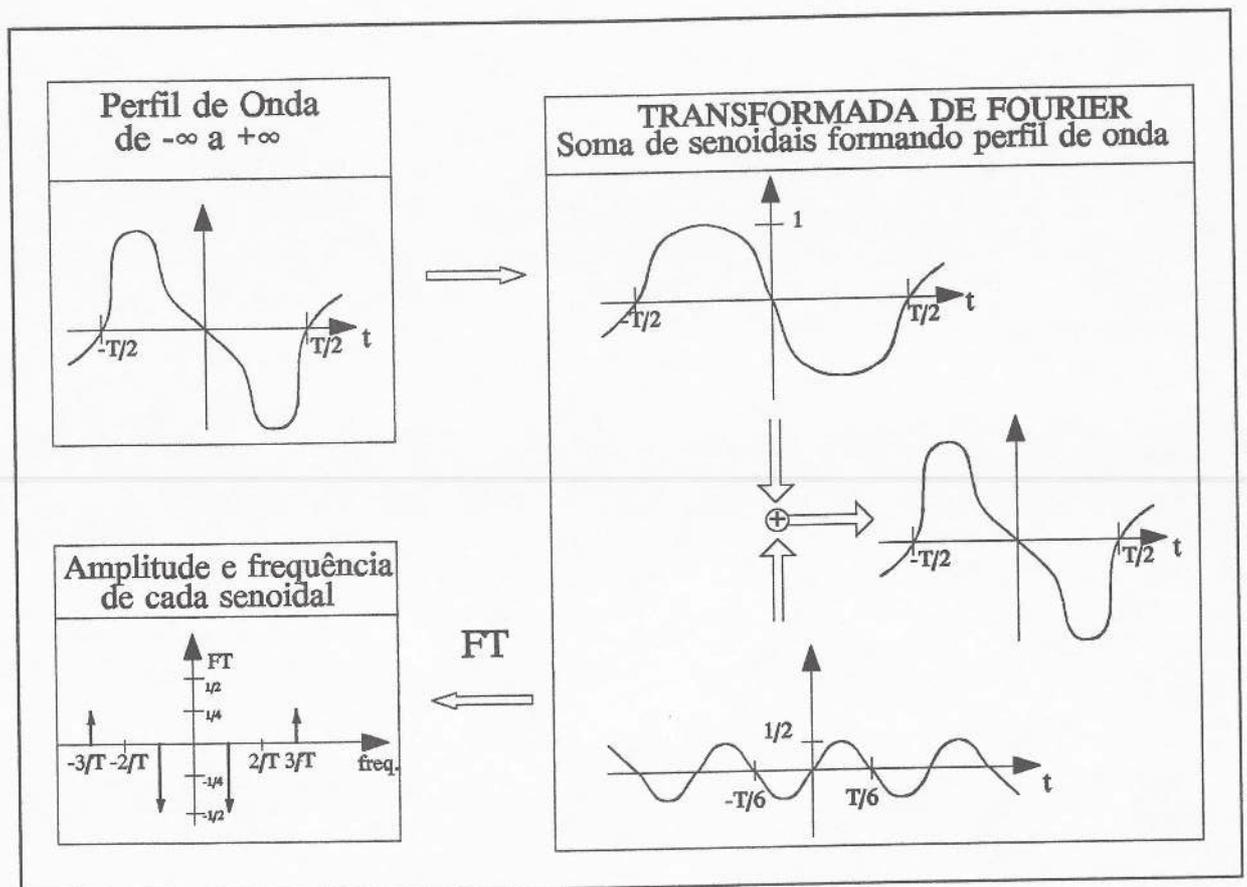


Figura 4.1 Interpretação da Transformada de Fourier

Se o perfil de onda $h(t)$ não for periódico, tal como uma onda quadrada, então a FT será uma função contínua de freqüência, isto é, $h(t)$ é representada pela soma de senoidais de todas as freqüências. Para ilustração considere uma *waveform* de pulso e sua FT, como mostra a figura 4.2. Neste exemplo, a FT indica que as freqüências senoidais se tornam indistinguíveis uma de outra e que para se obter o resultado é necessário considerar todas as freqüências.

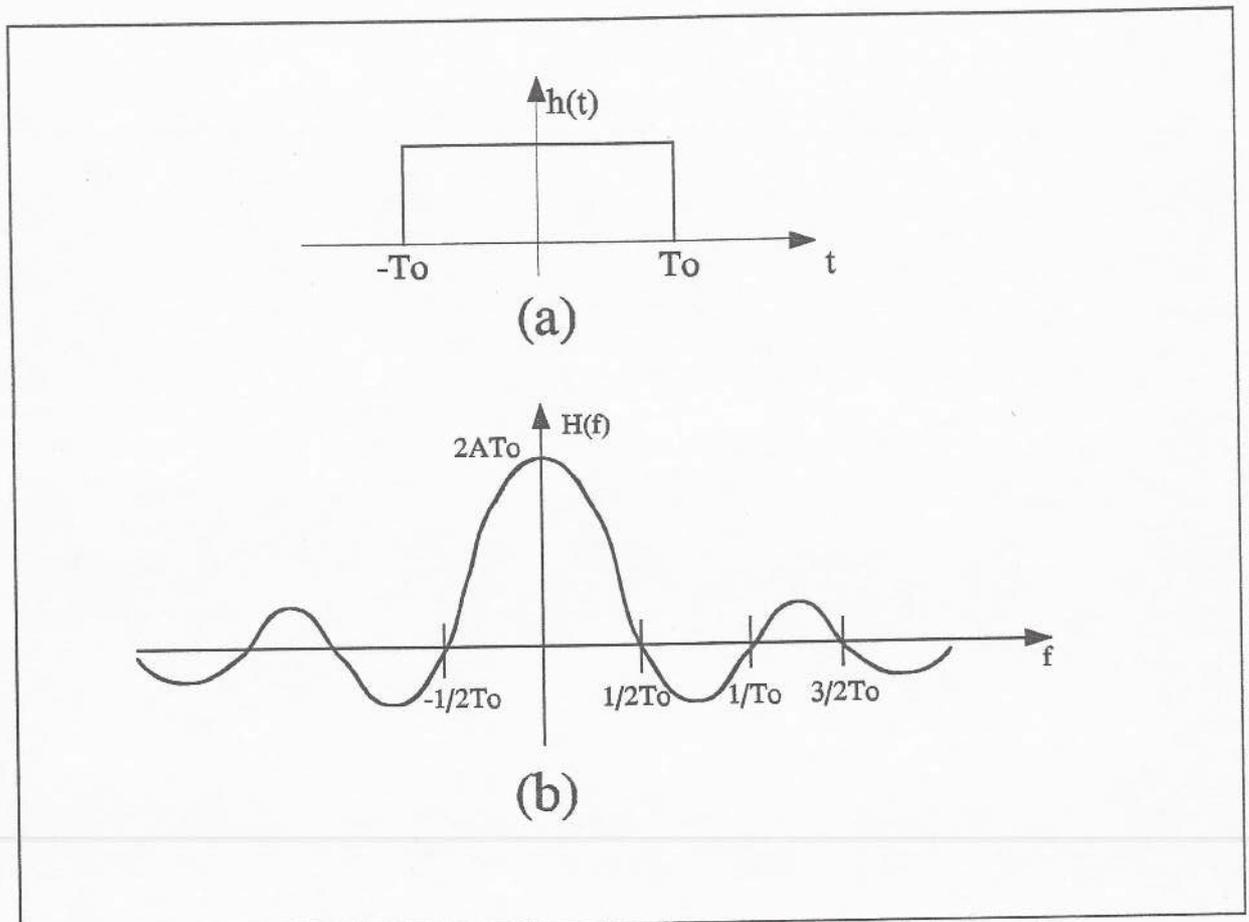


Figura 4.2 Transformada de Fourier de um perfil de onda.

A transformada de Fourier é então uma representação no domínio da frequência de uma função. Ou seja, ela contém a mesma informação que a função original, somente difere na maneira de apresentação.

Em geral, a transformada de Fourier pode ser representada em termos de números complexos:

$$H(f) = R(f) + jI(f) = |H(f)|e^{j\theta(f)} \quad (4.2)$$

onde $R(f)$ é a parte real da FT,

$I(f)$ é a parte imaginária da FT,

$\theta(f)$ é o ângulo de fase da FT e é dado por: $\tan^{-1}[I(f)/R(f)]$.

$|H(f)|$ é a amplitude ou espectro de Fourier de $h(t)$ e é dado por:

$$H(f) = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)} \quad (4.3)$$

4.1.2. A Transformada Inversa de Fourier

A Transformada Inversa de Fourier é definida como:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft} df \quad (4.4)$$

Esta equação permite a determinação de uma função do tempo a partir de sua FT. Se as funções $h(t)$ e $H(f)$ são relacionadas pelas Eqs.4.1 e 4.4, as duas funções são denominadas de o par da FT.

Assim, a inversa da FT é a representação no domínio do tempo de uma função.

4.1.3. A Transformada Discreta de Fourier

Como muitas aplicações que envolvem a transformada de Fourier utilizam um computador para sua implementação, torna-se necessário discretizar a fórmula contínua da FT.

É necessário modificar o par da FT de tal modo que o par possa ser utilizado por um programa computacional. Este par modificado, denominado de Transformada Discreta de Fourier, deve ser tão próximo quanto possível da Transformada contínua de Fourier.

Para determinar a FT de $h(t)$ em termos de técnicas de análise digital, é preciso amostrar $h(t)$ utilizando-se Séries de Fourier [Bri88]. Assim, sendo T o intervalo de amostragem, se a função $h(t)$ é contínua em $t = nT$, para $n = 0, +1, +2, \dots$, então a amostragem de $h(t)$ em tempo igual a T é expressa por:

$$\hat{h}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) \delta(t-nT) \quad (4.5)$$

$\hat{h}(t)$ é denominado o perfil de onda $h(t)$ amostrado com intervalo de amostragem T . A função amostrada $h(t)$ é então uma seqüência infinita de impulsos equidistantes, cuja amplitude é dada pelo valor de $h(t)$ correspondente ao tempo de ocorrência do impulso.

O teorema de amostragem declara que se a FT de uma função $h(t)$ for zero para todas as freqüências maiores que uma certa freqüência f_c , então a função contínua $h(t)$ pode ser unicamente determinada a partir do conhecimento de seus valores amostrados,

como mostra a Eq.4.5, sendo $T = \frac{1}{2f_c}$.

E, $h(t)$ é dado por:

$$h(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) \frac{\sin 2\pi f_c (t-nT)}{\pi(t-nT)} \quad (4.6)$$

É necessário que a FT de $h(t)$ seja zero para freqüências maiores que f_c . A função da freqüência é *band-limited* na freqüência f_c . O termo *band-limited* quer dizer que a FT é zero para $|f| > f_c$. O comprimento de banda de um sinal é o comprimento da banda de freqüência positiva onde a amplitude é diferente de zero. A segunda restrição é que o espaço de amostragem seja $T = \frac{1}{2f_c}$, isto é, as funções de impulso devem ser

separadas por $1/T=2f_c$. Este espaçamento garante que não haja nenhum *aliasing*, que corresponde a uma distorção da FT desejada. Ou seja, se a função $h(t)$ não for *band-limited*, então a amostragem provocará uma distorção, que poderá ser compensada escolhendo-se um T menor.

O teorema de amostragem no domínio da freqüência é análogo ao do tempo. Se a função $h(t)$ é *time-limited*, isto é, $h(t) = 0$ e $|t| > T_c$, então sua FT $H(f)$ pode ser determinada a partir de amostragens equidistantes de $H(f)$. E, $H(f)$ é dado por:

Para que o par da FT possa ser implementado é necessário truncar os valores

$$H(f) = \frac{1}{2T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{n}{2T_c}\right) \frac{\sin[2\pi T_c(f - n/2T_c)]}{\pi(f - n/2T_c)} \quad (4.7)$$

infinitos de $h(t)$ tal que um número finito de pontos, N , seja considerado. A função do tempo original é aproximada por N amostras; e a FT original $H(f)$ é também aproximada por N amostras. Estas N amostras definem o par da DFT e faz uma aproximação do par original da FT. Note que a amostragem no domínio do tempo resulta em uma função periódica do tempo. Assim, a DFT requer que ambas as funções, a da frequência e a do tempo, sejam modificadas tal que elas se tornem funções periódicas. Ou seja, N amostras do tempo e N valores de frequência representam um período das *waveforms* no domínio do tempo e da frequência, respectivamente.

Assim, a representação do par DFT é mostrada por:

$$H\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (4.8)$$

e a inversa

$$h(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H\left(\frac{n}{NT}\right) e^{\frac{j2\pi nk}{N}} \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (4.9)$$

4.1.3. A Transformada Rápida de Fourier

A Transformada Rápida de Fourier é um algoritmo que reduz o tempo computacional a $N \log_2 N$. A FFT tem revolucionado o uso da Transformada Discreta de Fourier. É importante notar que para interpretar os resultados da FFT não precisa se conhecer perfeitamente o algoritmo da FFT, mas sim em compreender a DFT. Pois a FFT é apenas um algoritmo, ou seja, um método particular para a realização de uma série de cálculos computacionais, que pode computar a DFT muito mais rapidamente que qualquer outro algoritmo existente.

O presente trabalho foi baseado no algoritmo apresentado em [Bri88].
Considerando a DFT da Eq.4.8:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.10)$$

onde kT foi substituído por k e n/NT por n para conveniência de notação. Note que a Eq.4.10 descreve a computação de N equações. Por exemplo, se $N = 4$ e se

$$W = e^{-\frac{j2\pi}{N}} \quad (4.11)$$

então a Eq.4.10 pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^0 + x_0(2)W^0 + x_0(3)W^0 \\ X(1) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^1 + x_0(2)W^2 + x_0(3)W^3 \\ X(2) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^2 + x_0(2)W^4 + x_0(3)W^6 \\ X(3) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^3 + x_0(2)W^6 + x_0(3)W^9 \end{aligned} \quad (4.12)$$

A Eq.4.12 pode ser mais facilmente representada na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

ou de forma compacta:

$$X(n) = W^{nk} x_0(k) \quad (4.14)$$

A Eq.4.13 revela que uma vez que W e possivelmente $x_0(k)$ são complexos, então N^2 multiplicações e $(N)(N-1)$ somas de números complexos serão necessárias para realizar o cálculo da matriz. A FFT deve seu sucesso ao fato de que o algoritmo reduz o número de multiplicações e somas necessárias no cálculo da Eq.4.13.

Para ilustrar o algoritmo da FFT, é conveniente escolher o número de pontos de amostragem de $x_0(k)$ de acordo com a relação $N=2^\gamma$, onde γ é um inteiro.

Desenvolvimentos posteriores poderão remover esta restrição. Levando-se em consideração $N=4$ pode-se aplicar a FFT para o cálculo da Eq.4.13.

O primeiro passo envolve reescrever a Eq.4.13 como

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

A matriz da Eq.4.15 foi derivada a partir da Eq.4.13 utilizando-se da relação $W^{nk} = W^{nk \bmod(N)}$. Note que $[nk \bmod(N)]$ é o resto da divisão de nk por N ; assim se $N=4$, $n=2$, e $k=3$, então

$$W^6 = W^2 \quad (4.16)$$

porque

$$\begin{aligned} W^{nk} = W^6 &= \exp\left[\left(\frac{-j2\pi}{4}\right)(6)\right] = \exp[-j3\pi] \\ &= \exp[-j\pi] = \exp\left[\left(\frac{-j2\pi}{4}\right)(2)\right] = W^2 = W^{nk \bmod(N)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

O segundo passo no desenvolvimento é fatorar a matriz quadrada na Eq.4.15 como:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

As duas matrizes desta equação abrangem a matriz quadrada da Eq.4.15 com exceção das linhas 1 e 2 as quais foram trocadas, ou seja os resultados estão "embaralhados".

Então

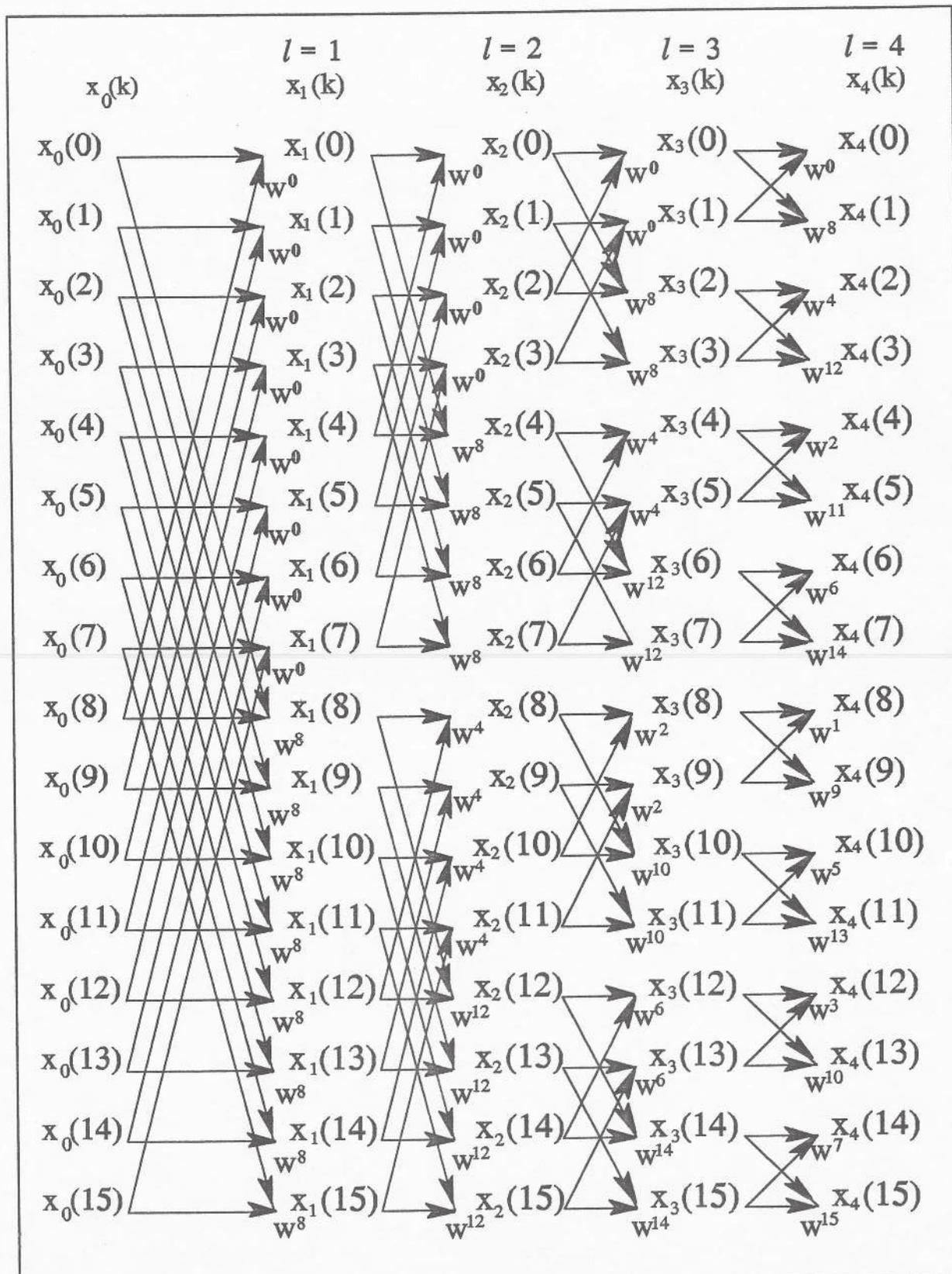


Figura 4.3 Representação por grafo da FFT de um vetor com N=16

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

isto é, o vetor coluna $x_1(k)$ é igual ao produto das duas matrizes no lado direito da Eq.4.18.

O elemento $x_1(0)$ é calculado através de uma multiplicação e de uma adição (W^0 não é reduzido a uma unidade a fim de desenvolver um resultado generalizado).

$$x_1(0) = x_0(0) + W^0 x_0(2) \quad (4.20)$$

O elemento $x_1(1)$ é também determinado por uma multiplicação e uma adição. Somente uma adição é necessária para calcular $x_1(2)$. Isto porque $W^0 = -W^2$; assim:

$$\begin{aligned} x_1(2) &= x_0(0) + W^2 x_0(2) \\ &= x_0(0) - W^0 x_0(2) \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde a multiplicação já foi calculada na determinação de $x_1(0)$ na Eq.4.20. Pela mesma razão, $x_1(3)$ é calculado por uma única adição e nenhuma multiplicação. O vetor intermediário $x_1(k)$ é então determinado por quatro adições e duas multiplicações entre números complexos. Assim:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

O termo $x_2(0)$ é determinado por uma multiplicação e adição:

$$x_2(0) = x_1(0) + W^0 x_1(1) \quad (4.23)$$

O elemento $x_2(1)$ é calculado por uma adição porque $W^0 = -W^2$. Pelo mesmo motivo, $x_2(2)$ é calculado por uma multiplicação e uma adição e $x_2(3)$ por uma única adição.

O cálculo da Eq.4.18 requer um total de quatro multiplicações e oito adições. O cálculo da Eq.4.13 requer 16 multiplicações e 12 adições. Note que o processo de

fatoração introduz zeros nas matrizes e, como resultado, reduz o número de multiplicações necessário.

Para $N = 2^r$, o algoritmo da FFT é simplesmente um procedimento para fatorar uma matriz $N \times N$ em r matrizes (cada $N \times N$), tal que cada uma das matrizes fatoradas tenham a propriedade especial de minimizar o número de multiplicações e adições. Assim o método direto requer N^2 multiplicações e $N(N-1)$ adições.

O procedimento de fatoração produz uma discrepância. Os resultados ficam embaralhados. Este desarranjo é inerente ao processo de fatoração e é um problema de fácil solução.

Para resolver o problema, substitui-se o argumento n por seu equivalente em binário, assim:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} \text{ torna-se } \begin{bmatrix} X(00) \\ X(10) \\ X(01) \\ X(11) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Se os argumentos em binário da Eq.4.24 são espelhados ou revertidos bit a bit, isto é 01 se torna 10 e 10 se torna 01, então

$$\begin{bmatrix} X(00) \\ X(10) \\ X(01) \\ X(11) \end{bmatrix} \text{ torna-se } \begin{bmatrix} X(00) \\ X(01) \\ X(10) \\ X(11) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Assim, os dados são desembaralhados, e é só converter os argumentos novamente para decimais.

Para ilustrar a Eq.4.18 veja a figura 4.3. O vetor $x_0(k)$ foi representado por uma coluna de nós no lado esquerdo do grafo. A segunda coluna é o vetor $x_1(k)$ calculado pela Eq.4.20, e a terceira corresponde ao vetor $x_2(k) = X(n)$, da Eq.4.22. Em geral haverá r vetores onde $N = 2^r$.

Cada nó do grafo possui duas linhas as quais representam os fluxos de transmissão dos nós anteriores. Um caminho traz um valor de um nó anterior, que é multiplicado por W^p , e leva o resultado até o nó no próximo vetor. O fator W^p aparece

próximo à seta que indica o fluxo de transmissão, sua ausência indica que $W^p = 1$. Os resultados levados até um nó pelas linhas são somados.

Considerando o nó $x_1(2)$ da figura 4.3, de acordo com as regras vistas:

$$x_1(2) = x_0(0) + W^2 x_0(2) \quad (4.26)$$

Cada nó do grafo é expresso da mesma forma.

O grafo é então um método para representação dos cálculos necessários para o algoritmo da FFT da Eq.4.18. Cada coluna no grafo corresponde a uma matriz fatorada; γ vetores de N pontos cada são necessários. A utilização desta representação permite descrever facilmente o processo de fatoração matricial para valores grandes de N . Na figura 4.3 foi ilustrado um grafo para $N = 16$.

Em cada vetor na figura 4.3 pode-se encontrar dois nós cujas entradas para o fluxo de transmissão provém dos mesmos nós do vetor anterior. Por exemplo, os nós $x_1(0)$ e $x_1(8)$ são calculados em termos dos nós $x_0(0)$ e $x_0(8)$. Note que os nós $x_0(0)$ e $x_0(8)$ não entram no cálculo de qualquer outro nó. Estes nós são denominados *dual-node pair*.

Assim, devido a independência destes pares de nós de outros, é possível calcular $x_1(0)$ e $x_1(8)$ em termos de $x_0(0)$ e $x_0(8)$ e retornar os resultados para o mesmo espaço de armazenamento ocupados por $x_0(0)$ e $x_0(8)$ anteriormente. Necessidades de armazenamento são então limitadas ao vetor $x_0(k)$ somente.

No vetor $l = 1$, um par de nós $\{x_1(0), x_1(8)\}$, é separado por $k = 8 = N/2^1 = N/2^1$. No vetor $l = 2$, um par de nós $\{x_2(0), x_2(8)\}$, é separado por $k = 4 = N/2^1 = N/2^2$. Similarmente, um par de nós $\{x_3(0), x_3(8)\}$, no vetor $l = 3$ é separado por $k = 2 = N/2^1 = N/2^3$, e no vetor $l = 4$, um par de nós $\{x_3(4), x_3(6)\}$ é separado por $k = 1 = N/2^1 = N/2^4$.

Generalizando estes resultados, nós observamos que o espaçamento entre dois nós no vetor l é dado por $N/2^l$. Assim, se for considerado um determinado nó $x_1(k)$, então seu par respectivo é $x_1(k + N/2^l)$. Esta propriedade permite facilmente identificar um par de nós correspondentes.

O cálculo de um par de nós correspondentes requer somente uma multiplicação complexa. Considerando o nó $x_2(8)$ e seu par $x_2(12)$, como ilustrado na figura 4.3, os resultados que provém do nó $x_1(12)$ são multiplicados por W^4 e W^{12} antes de passarem para os nós $x_2(8)$ e $x_2(12)$. É importante notar que $W^4 = -W^{12}$ e que somente uma multiplicação é necessária pois o mesmo dado $x_1(12)$ será utilizado na multiplicação por estes valores. Em geral, se o fator peso em um nó é W^p , então o fator peso em seu par é

$W^{p+N/2}$. Sendo $W^p = -W^{p+N/2}$, somente uma multiplicação é necessária no cálculo do par correspondente. O cálculo de qualquer par de nós é dado por:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= x_{l-1}(k) + W^p x_{l-1}(k+N/2^l) \\ x_1(k+N/2^l) &= x_{l-1}(k) - W^p x_{l-1}(k+N/2^l) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Geralmente se começa com $k = 0$, percorrendo o vetor, sequencialmente, e calculando os pares da Eq.4.27. Sendo o espaçamento $N/2^l$ entre pares correspondentes, então deve-se "pular" um nó a cada $N/2^l$ nós. Considerando o vetor $l=2$ na figura 4.3, e começando com o nó $k=0$, então o seu par correspondente está localizado em $k = N/2^2 = 4$. Percorrendo o vetor, pode-se notar que o nó correspondente está sempre localizado 4 posições abaixo, até se alcançar o nó 4. Neste ponto, aparece um conjunto de nós que já foram calculados, isto é, estes nós são os pares correspondentes aos nós $k = 0, 1, 2$ e 3 . Assim, é necessário "pular" estes nós, ou seja, ignorar os nós $k = 4, 5, 6$ e 7 e continuar o cálculo com os nós seguintes. Os nós $8, 9, 10$ e 11 seguem a convenção original, a qual indica que seus pares correspondentes estão 4 posições abaixo no vetor. O processo somente será interrompido quando o índice de vetor for maior que $N - 1$.

O valor de p , o qual está relacionado ao peso W , é determinado escrevendo-se o índice k na forma binária com γ bits, deslocando este número binário $\gamma - l$ bits para a direita e preenchendo as posições dos bits no lado esquerdo com zeros, e revertendo a ordem dos bits. Este número invertido em sua forma binária é o termo p .

Considerando o nó $x_3(8)$, $\gamma = 4$, $k = 8$, e $l = 3$, então k em binário é 1000. Desloca-se este número $\gamma - l = 4 - 3 = 1$ lugares para a direita e preenche com zeros os espaços mais a esquerda; o resultado é 0100. Revertida a ordem dos bits para obter 0010 ou o inteiro 2. O valor de p é então 2.

O passo final para calcular a FFT é "desembaralhar" os resultados da Eq.4.25. Para rearranjar o vetor $X(n)$ é preciso escrever n em binário e reverter o número binário. Na figura 4.4 são mostrados os resultados desta operação: os termos $x_4(k)$ e $x_4(i)$ são trocados, onde i é o inteiro obtido revertendo-se os bits do inteiro k .

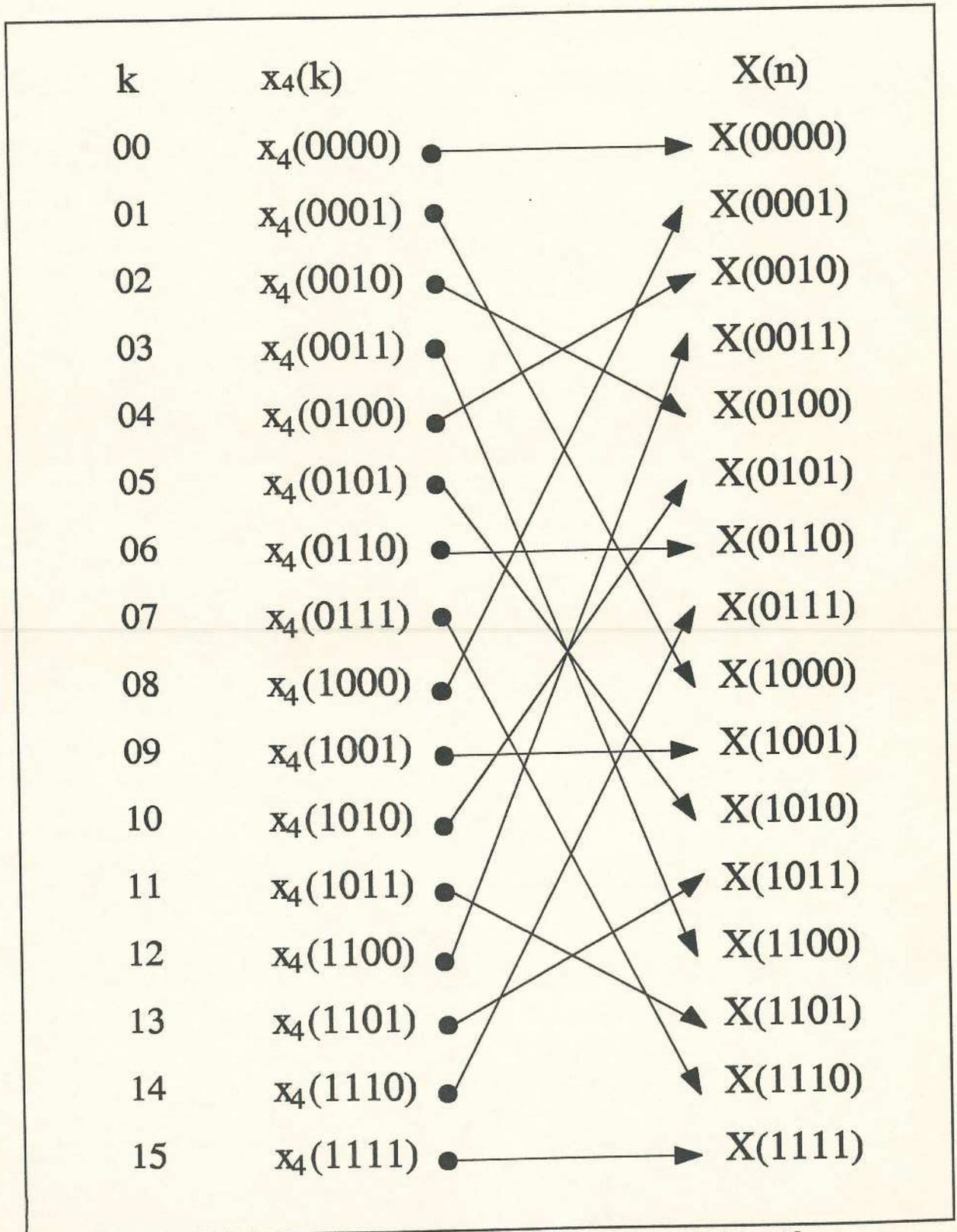


Figura 4.4 Exemplo de operação de reversão de bits para $N = 16$



Note que uma situação semelhante ao conceito de pares correspondentes de nós ocorre. Trocando os $x(k)$ com os $x(i)$ apropriados, eventualmente pode-se encontrar nós que já foram para suas posições corretas. Por exemplo, na figura 4.4, o nó $k = 0$ permanece em sua posição, os nós $k = 1, 2$ e 3 são trocados com os nós $8, 4$ e 12 respectivamente. O próximo nó a ser considerado é o 4 , mas este nó já foi trocado com o nó 2 . Para eliminar esta possibilidade deve-se checar se i (o inteiro que é obtido revertendo os bits de k) é menor que k . Se assim for, isto implica que o nó já foi trocado anteriormente.

Para a reconstrução de imagens, o tema deste trabalho, é necessário expandir o conceito da FFT para duas dimensões, x e y . Assim, matematicamente, um sinal bidimensional é uma função $h(x,y)$ de duas variáveis x e y . A função $h(x,y)$ tem uma FFT bidimensional $H(u,v)$ dada por:

$$H(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (4.28)$$

Análogo ao caso unidimensional, a Eq.4.28 descreve a análise da função $h(x,y)$ bidimensional em componentes da forma $\cos[2\pi(ux+vy)]$ e $\sin[2\pi(ux+vy)]$.

A FFT bidimensional $H(u,v)$ pode ser vista como duas FFT's unidimensionais sucessivas. Reescrevendo a Eq.4.28 como

$$H(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi vy} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) e^{-j2\pi ux} dx \right] dy \quad (4.29)$$

Note que o termo em colchetes é simplesmente a transformada unidimensional de $h(x,y)$ com respeito a x , isto é,

$$Z(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) e^{-j2\pi ux} dx \quad (4.30)$$

A Eq.4.29 pode, então, ser escrita como

$$H(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(u,y) e^{-j2\pi vy} dy \quad (4.31)$$

onde $Z(u,y)$ é substituído pelo termo em colchetes na Eq.4.29. Uma análise da Eq.4.31 revela que $H(u,v)$ é a transformada unidimensional de $Z(u,v)$ com respeito a y . Assim, a

transformada de Fourier bidimensional $H(u,v)$ pode ser interpretada como as duas transformadas de Fourier unidimensionais dadas pelas Eq.4.30 e Eq.4.31.

Um cálculo analítico de uma integral bidimensional pode ser implementado simplesmente determinando-se as duas integrais unidimensionais da Eq.4.30 e Eq.4.31 pelo procedimento já visto sobre FFT. Assim, na forma discreta, estas equações podem ser apresentadas como:

$$H\left(\frac{n}{NT_x}, \frac{m}{MT_y}\right) = \sum_{q=0}^{M-1} \left[\sum_{p=0}^{N-1} h(pT_x, qT_y) e^{-\frac{j2\pi np}{N}} \right] e^{-\frac{j2\pi mq}{M}} \quad (4.32)$$

considerando que a função $h(x,y)$ foi amostrada na direção x com intervalo amostral T_x e amostrada na direção y com intervalo amostral T_y e sendo $n=0,1,\dots,N-1$ e $m=0,1,\dots,M-1$. A função resultante é $h(pT_x, qT_y)$, onde $p=0,1,\dots,N-1$ e $q=0,1,\dots,M-1$.

Note que o termo entre colchetes na Eq.4.32 é simplesmente uma transformada de Fourier discreta unidimensional ao longo do vetor de dados definido pelo parâmetro p . Para calcular o termo em colchetes, é necessário calcular M transformadas unidimensionais: uma para cada q , ao longo do vetor de dados definido por p . Se considerarmos cada um dos resultados da FFT como sendo $Z(n/NT_x, qT_y)$, então a Eq.4.32 pode ser reescrita como:

$$H\left(\frac{n}{NT_x}, \frac{m}{MT_y}\right) = \sum_{q=0}^{M-1} Z\left(\frac{n}{NT_x}, qT_y\right) e^{-\frac{j2\pi mq}{M}} \quad (4.33)$$

A Eq.4.33 é calculada por N DFT's ao longo do vetor de dados definido pelo parâmetro q .

Assim a DFT bidimensional pode ser implementada aplicando-se as DFT's unidimensionais: primeiro para a função $h(pT_x, qT_y)$, onde $p=0,1,\dots,N-1$ para cada p , e, então, em segundo para a função $Z(n/NT_x, qT_y)$, onde $q=0,1,\dots,M-1$ para cada $n=0,1,\dots,N-1$. As Eqs.4.32 e 4.33 devem ser multiplicadas pelo fator de escala $T_x T_y$ para se obter uma equivalência entre as transformadas contínua e discreta.

Em termos de algoritmos, isto implica que para se aplicar a FFT bidimensional a uma matriz de tamanho $N \times M$, basta aplicar a FFT unidimensional para cada linha da matriz, isto é, M transformações de N amostras cada, e depois para cada coluna da matriz, ou seja, N transformações de M amostras cada. Portanto, uma matriz de

tamanho $N \times M$ requer $(N + M)$ FFT's. O algoritmo convencional necessita de $N.M.\log_2(NM)$ iterações.

Como visto anteriormente, a FFT unidimensional precisa ser reorganizada para apresentar os dados adequadamente, o mesmo ocorre com a FFT bidimensional. Note que se a matriz de dados for analisada em termos de quadrantes, o procedimento de reestruturação é simplesmente um deslocamento circular para a direita através de dois quadrantes. Assim, os dados no quadrante I são deslocados para o quadrante III. Para cada vetor real, o quadrante III é uma reflexão positiva do quadrante I, e o quadrante IV é uma reflexão positiva do quadrante II. Para o vetor imaginário, o quadrante III é uma reflexão negativa de I e o quadrante IV é uma reflexão negativa de II.

4.2. O Pseudo-Código da FFT

Utilizando-se do algoritmo descrito nos itens anteriores, pôde-se desenvolver um pseudo-código. O primeiro vetor a ser utilizado para o cálculo da FFT possui $l = 1$ e $k = 0$. Em cada nó k , calcula-se o par de equações descrito na Eq.4.27 até que se alcance uma região de nós que já foram utilizados em algum cálculo anterior. Passa-se por esta região até se encontrar um nó que não tenha sido utilizado e continua-se a operação até o final do vetor. Calcula-se os demais vetores através do mesmo procedimento. No final, desembaralha-se os dados do vetor resultante.

O quadro 4.1 descreve o pseudo-código da FFT.

Entrada: o vetor de entrada $x_0(k)$ é complexo, ou seja, possui parte real e parte imaginária, e é indexado por $k = 0, 1, \dots, N-1$. Se $x_0(k)$ é real, então a parte imaginária deve ser nula. O número de pontos N deve satisfazer a relação $N=2^\gamma$, onde γ é um inteiro diferente de 0.

Refinamento 1.

1. Declaração de variáveis
2. Inicializa variáveis

$N2 = N/2$

para $l = 0$ até $\text{gamma}1$ **faça**

para $i = 0$ até $N2$ **faça**

$m = \text{valor inteiro de } (k / 2^{\text{gamma}1})$

$p = \text{bit-reverso de } m$

3. Calcular $W^p * x(k + N2)$ para achar $T\text{Real}$ e $T\text{Imag}$

$x(k + N2).\text{Real} = x(k).\text{Real} - T\text{Real}$

$x(k + N2).\text{Imag} = x(k).\text{Imag} - T\text{Imag}$

$x(k).\text{Real} = x(k).\text{Real} + T\text{Real}$

$x(k).\text{Imag} = x(k).\text{Imag} + T\text{Imag}$

$k = k + 1$

fim para

$k = k + N2$

se $k \geq N$ **então**

$k = 0$

$\text{gamma}1 = \text{gamma}1 - 1$

$N2 = \text{inteiro de } N2/2$

fim se

fim para

4. Rearranjar vetor utilizando o bit-reverso para achar a posição correta de cada elemento.

fim ref.

Quadro 4.1 Pseudo-Código da FFT

4.3. Desenvolvimento do Método para MRT

Uma vez que os dados do tomógrafo de MR se encontram no domínio da frequência, para reconstruir o objeto em questão é necessário aplicar a transformada rápida de Fourier a fim de transformar os dados para o domínio do espaço. Ou seja, inicialmente se possui uma matriz, onde cada elemento possui sua componente real e imaginária. Assim, considerando-se uma matriz $N \times M$, aplica-se o algoritmo da FFT unidimensional inversa para cada linha, que corresponde a M transformações de N amostras cada. Depois, aplica-se a FFT unidimensional inversa para cada coluna da matriz, que corresponde a N transformações de M amostras cada. Portanto, uma matriz $N \times M$ requer $(N+M)$ FFT's e o total de operações é de $NM \log_2(NM)$.

Não são necessários dois códigos distintos para a FFT e sua inversa. Utiliza-se o mesmo código, mas antes de aplicar a inversa deve-se tomar os conjugados da matriz de dados, ou seja, multiplica-se os componentes imaginários por -1 .

Se houver necessidade pode-se ampliar a matriz resultante aplicando-se uma interpolação. Para isso, sobreposição-se os dados da matriz original em uma matriz nula maior que a primeira, mas em potência de 2 a fim de manter a condição para aplicação do algoritmo da FFT. A interpolação ocorre quando esta matriz ampliada for utilizada para o cálculo da FFT, diretamente [Bri88].

Antes de se apresentar a imagem resultante é necessário aplicar uma rotina para a troca de quadrantes da matriz resultante. Pois, ao se aplicar a FFT há um embaralhamento dos dados, assim é necessário que se troque o primeiro quadrante pelo terceiro e o segundo pelo quarto.

Para visualizar a imagem final é necessário normalizá-la para valores de 0 a 128, atribuindo cores ou níveis de cinza a cada elemento da matriz de acordo com seus valores.

4.4. Desenvolvimento do Método para Tomografia por Raio-X

No algoritmo de reconstrução de imagens utilizando-se dados de um tomógrafo de raio-X é um pouco mais complexo que o de ressonância magnética. Os dados provenientes de um tomógrafo de raio-X representam projeções, enquanto que os de um

tomógrafo de ressonância magnética representam a imagem no domínio da frequência.

O teorema de Fourier da secção é a base de muitas técnicas de reconstrução para a elaboração de algoritmos. Com o uso deste teorema a transformada unidimensional de Fourier de uma função $g(x,y)$ é matematicamente relacionada a sua transformada de Fourier bidimensional. A transformada de Fourier de uma projeção paralela de uma imagem $g(x,y)$ tomada a um ângulo θ é equivalente a uma secção da transformada bidimensional de $g(x,y)$, $G(\omega_1, \omega_2)$, formando um ângulo θ com o eixo ω_1 . Em outras palavras, a transformada de Fourier de $P_\theta(t)$ fornece os valores de $G(\omega_1, \omega_2)$ ao longo da linha BB como mostra a figura 4.5.

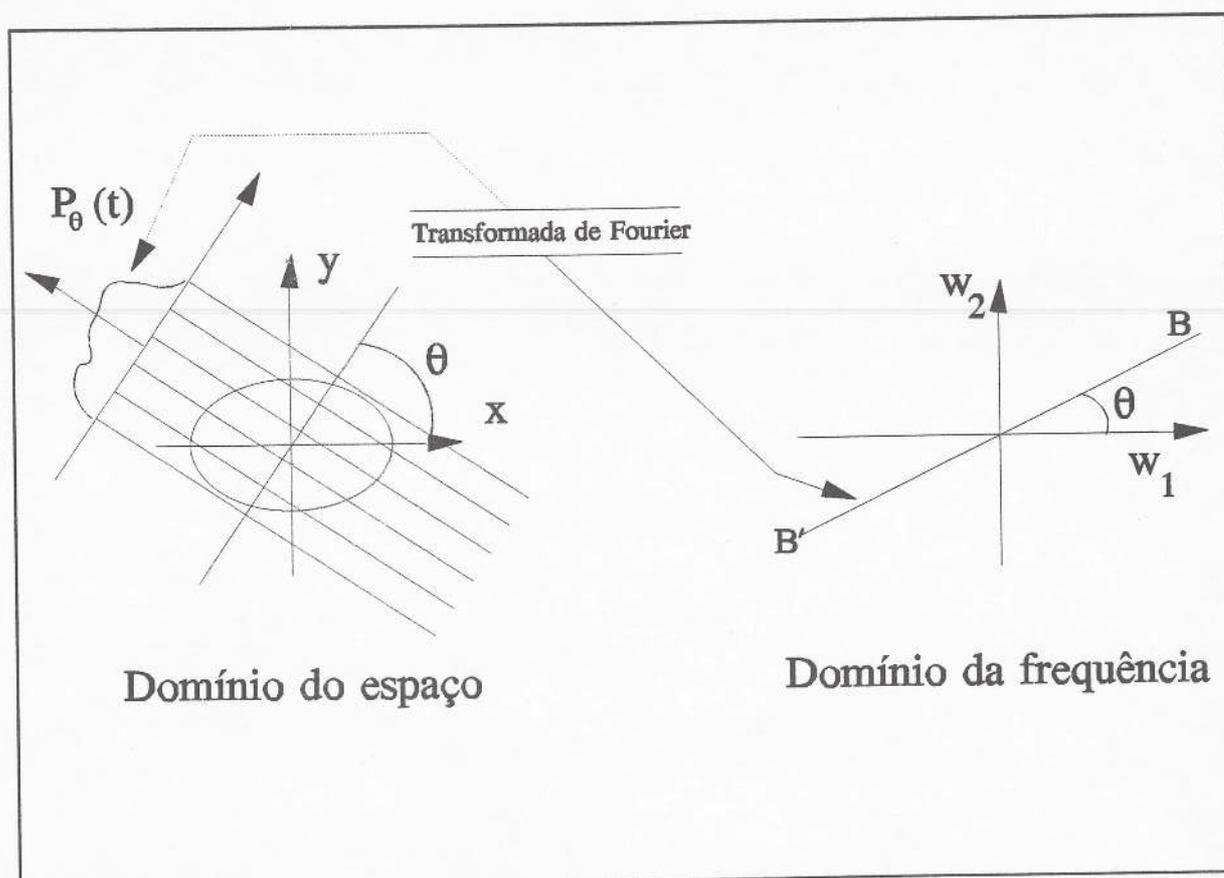


Figura 4.5 Teorema de Fourier. A FT da projeção de $f(x,y)$ $P_\theta(t)$ fornece valores de $F(\omega_1, \omega_2)$ na linha BB.

O teorema mostra que registrando-se muitas projeções a posições diferentes ao redor do objeto, obtém-se a transformada de Fourier do objeto. Uma vez que todas as projeções são obtidas, o objeto pode ser reconstruído pela inversão direta de Fourier.

Geralmente, a reconstrução não é feita desta forma. Algoritmos de retroprojeção filtrada (*filtered-backprojection*) são utilizados para utilizados para reconstrução devido a sua grande precisão e facilidade de implementação. Estes algoritmos derivam do teorema de Fourier.

A transformada de Fourier $G(\omega_1, \omega_2)$ da imagem $g(x, y)$ é dada por

$$G(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy \quad (4.34)$$

e

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega_1, \omega_2) e^{j2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2 \quad (4.35)$$

O algoritmo utilizado neste trabalho baseou-se no método de retroprojeção filtrada para dados de projeção paralela e a transformada rápida de Fourier (FFT) foi utilizada para aumentar a velocidade da filtragem necessária [Kak86].

Utilizando-se as coordenadas polares (ω, θ) no plano ω_1, ω_2 para reescrever a Eq.(4.35), obtém-se

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} G(\omega, \theta) e^{j\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} G(\omega, \theta) e^{j\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta + \\ &\quad \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega, \theta + 180^\circ) e^{j\omega(x \cos(\theta + 180^\circ) + y \sin(\theta + 180^\circ))} \omega d\omega d\theta \end{aligned} \quad (4.36)$$

Utilizando os relações

$$G(\omega, \theta + 180^\circ) = G(-\omega, \theta) \quad e \quad t = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (4.37)$$

na Eq.(4.36), pode-se escrever $g(x, y)$ como

com a ajuda do teorema de Fourier que declara que $G(\omega, \theta) = S_\theta(\omega)$, sendo $S_\theta(\omega)$ a transformada de Fourier da projeção $P_\theta(t)$ e $t = x \cos \theta + y \sin \theta$.

Para mostrar a Eq.(4.38) em sua forma de retroprojeção filtrada, é necessário

$$\begin{aligned}
 g(x,y) &= \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^\infty G(\omega,\theta) |\omega| e^{j\omega t} d\omega \right] d\theta \\
 &= \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^\infty S_\theta(\omega) |\omega| e^{j\omega t} d\omega \right] d\theta
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

separar a equação em duas operações diferentes. A primeira operação é a filtragem dos dados de projeção a cada ângulo θ , como

$$Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^\infty S_\theta(\omega) |\omega| e^{j\omega t} d\omega \tag{4.39}$$

Depois as projeções filtradas são retroprojetadas para se obter a função original do objeto

$$g(x,y) = \int_0^\pi Q_\theta(x \cos\theta + y \sin\theta) d\theta \tag{4.40}$$

A filtragem descrita na Eq.(4.39) deveria ser fisicamente possível se não fosse pelo fato de as projeções serem limitadas em banda por uma frequência máxima de W radianos/segundo. A frequência W é definida como a frequência acima da qual qualquer energia espectral em uma projeção pode ser desconsiderada. Assim, o valor de W limita a frequência de amostragem ω_s como

$$2W \leq \omega_s = 2\pi/\tau \tag{4.41}$$

Se os dados de projeção são amostrados com o intervalo de amostragem τ , os dados amostrados não deverão sofrer muitos erros de *aliasing*. Assim, a Eq.(4.39) pode ser reescrita utilizando-se a função de transferência de filtro, $H(\omega)$, como

$$H(\omega) = \begin{cases} |\omega|, & |\omega| < W \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{4.42}$$

A substituição de $H(\omega)$ na Eq.(4.39) abrange

$$Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^\infty S_\theta(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{4.43}$$

A resposta de impulso do filtro, $h(t)$ é obtida pela transformada inversa de Fourier $H(\omega)$ com o uso da Eq.(4.40):

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\tau^2} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right)}{\frac{\pi t}{\tau}} \right] - \frac{1}{4\tau^2} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right)}{\frac{\pi t}{2\tau}} \right]^2 \quad (4.44)$$

A versão amostrada da resposta de impulso, a qual é necessária para a filtragem digital dos dados de projeção amostrados, é dada por

$$h(n\tau) = \begin{cases} \frac{1}{4\tau^2}; & n=0 \\ 0; & n \text{ par} \\ -\frac{1}{n^2\pi^2\tau^2}; & n \text{ ímpar} \end{cases} \quad (4.45)$$

Utilizando o teorema da convolução, a Eq.(4.43) pode ser escrita como

$$Q_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta}(\xi) h(t-\xi) d\xi \quad (4.46)$$

a qual pode ser implementada como:

$$Q_{\theta}(n\tau) = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n\tau - k\tau) P_{\theta}(k\tau) \quad (4.47)$$

Na atual implementação cada projeção é finita, levando a uma versão truncada da Eq.(4.47)

$$Q_{\theta}(n\tau) = \tau \sum_{k=0}^{N-1} h(n\tau - k\tau) P_{\theta}(k\tau) \quad n=0,1,2,\dots,N-1 \quad (4.48)$$

onde $P_{\theta}(k\tau) = 0$ para $k < 0$ e $k > N-1$. Esta filtragem dos dados de projeção pode ser implementada como uma convolução discreta no domínio do tempo ou como uma multiplicação no domínio da frequência.

Neste trabalho foi utilizado o método no domínio da frequência, o qual é mais rápido que a convolução no domínio do tempo devido ao uso do algoritmo da FFT. Um dos problemas a serem encontrados é a natureza periódica da filtragem no domínio da

freqüência. Observa-se que a convolução no domínio do espaço na Eq.(4.47) não é periódica. Se não for tomadas precauções, sua implementação no domínio da freqüência pode sofrer de interferência interperíodo. Para eliminar este problema associado ao uso da FFT, as seqüências de dados $P_\theta(n\tau)$ e $h(n\tau)$ são preenchidos com zero antes de serem transformados. Se uma projeção de N elementos é preenchida com zero para fazê-la de $2N-1$ elementos, a interferência interperíodo não ocorrerá. Geralmente, preenchimentos adicionais podem se tornar necessários para tornar o comprimento da seqüência uma potência de 2, pois o algoritmo da FFT a ser usado faz esta restrição.

A implementação no domínio da freqüência é expressa por :

$$Q_\theta(n\tau) = \tau \times \text{IFFT}\{\text{FFT}[P_\theta(n\tau) \text{ com PZ}] \times h(n\tau)\} \quad (4.49)$$

onde FFT e IFFT denotam a transformada rápida de Fourier e a inversa da transformada rápida de Fourier, respectivamente, e PZ corresponde ao preenchimento com zero. Reconstruções melhores são geralmente obtidas quando algum método de suavizamento (*smoothing*) é incorporado na Eq.4.48 e Eq.4.49. A multiplicação entre a FFT dos dados de projeções e a FFT do filtro $h(n\tau)$ deve ser feita com o conjugado da FFT do filtro.

No projeto desenvolvido optou-se por se multiplicar o produto das duas FFTs por uma janela de Hamming achada em [Bro83], que pode ser expressa por

$$W_H(n) = 0,54 + 0,46 \cos[2\pi(n - N/2)/N] \quad (4.50)$$

assim a Eq.4.49 pode ser escrita como

$$Q_\theta(n\tau) = \tau \times \text{IFFT}\{\text{FFT}[P_\theta(n\tau) \text{ com PZ}] \times h(n\tau) \times [\text{janela de Hamming}]\} \quad (4.51)$$

O próximo passo no algoritmo de reconstrução é a retroprojeção das projeções filtradas como descrita na Eq.(4.40). A aproximação discreta da Eq.(4.40) é

$$\hat{g}(x,y) = \frac{\pi}{K} \sum_{i=1}^K Q_{\theta_i}(x \cos\theta_i + y \text{sen}\theta_i) \quad (4.52)$$

onde os K ângulo θ_i são os valores discretos de θ para qual $P_\theta(t)$ é conhecida. Pode-se observar que a função $\hat{g}(x,y)$ é somente a versão discreta de $g(x,y)$.

No processo de retroprojeção, para cada ponto (x,y) no plano de reconstrução que se encontra sobre a linha $t = x \cos \theta_i + y \text{sen} \theta_i$ é dado valor de $Q_{\theta_i}(t)$. A soma de tais

valores no ponto (x,y) enquanto i varia de 1 a K constitui o valor reconstruído em (x,y) depois de uma escala de π/K . A figura 4.6 mostra este processo. Note que o valor de $Q_{\theta_i}(t)$ é uma constante na linha LM e cada ponto no plano de reconstrução que se encontra sobre esta linha tem o valor de $Q_{\theta_i}(t)$ somado a seu valor. A soma de todos os valores de $Q_{\theta_i}(t)$ para cada ponto (x,y) multiplicados por π/K resulta na imagem reconstruída.

Quando o valor de t calculado com $(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i)$ não corresponde a qualquer valor de t na função discretizada $Q_{\theta_i}(t)$, aumenta a necessidade de interpolação. Em muitos casos a interpolação linear é o suficiente, mas existe uma técnica melhor que consiste em pré-interpolar a função $Q_{\theta_i}(t)$. A pré-interpolação é feita pelo preenchimento com zero no domínio da frequência antes de se aplicar a inversa da FFT para se obter $Q_{\theta_i}(t)$. Isto implica em somar zeros à seqüência de produtos na Eq.(4.49) antes do passo da IFFT. O resultado é a função $Q_{\theta_i}(t)$ conhecida em um intervalo de amostragem menor dependendo do número de zeros no procedimento de preenchimento. Para a troca de quadrantes da matriz resultante. Pois, ao se aplicar a FFT há um embaralhamento dos dados, assim é necessário que se troque o primeiro quadrante pelo terceiro e o segundo pelo quarto.

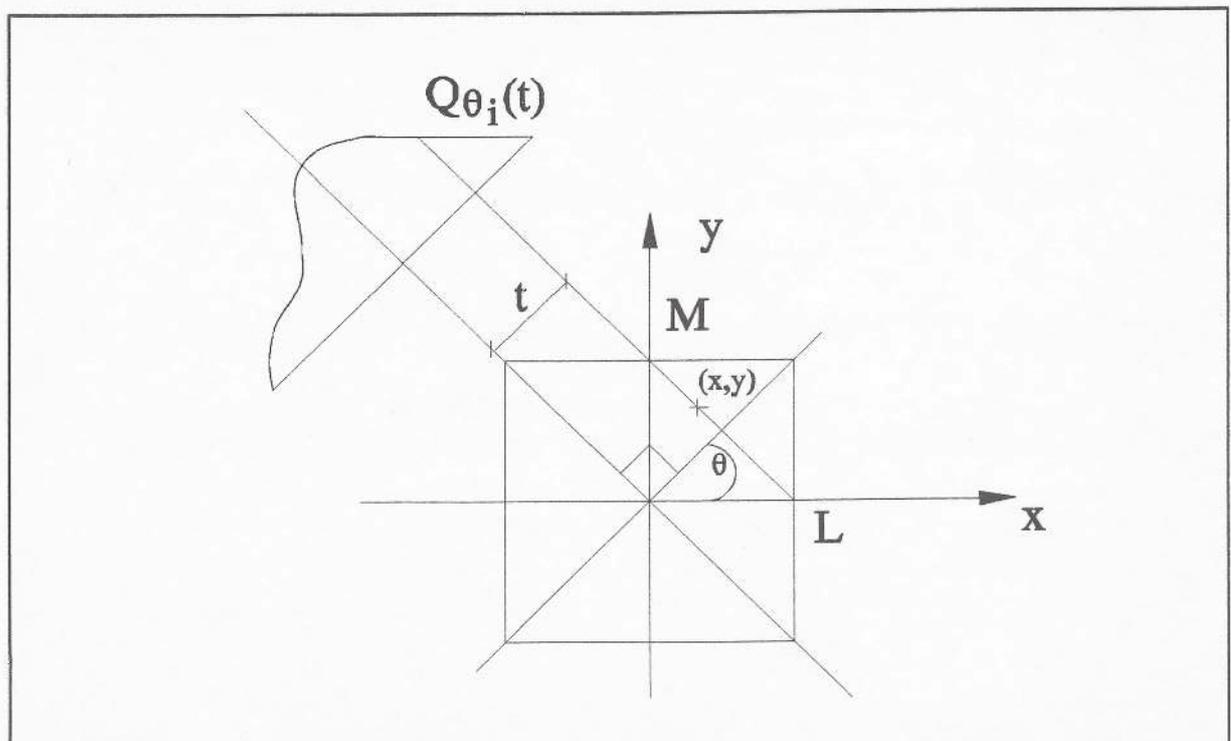


Figura 4.6 A projeção filtrada $Q_{\theta_i}(t)$ contribui da mesma forma para todos os *pixels* na linha LM que atravessa a imagem.

4.5. Conclusões

Neste capítulo apresentou-se o algoritmo da transformada rápida de Fourier e seu desenvolvimento na reconstrução de imagens a partir de dados obtidos por raio-X e por ressonância magnética.

No algoritmo de reconstrução para raio-X optou-se por não se usar o filtro $h(n\tau)$, utilizando apenas a janela de Hamming como filtragem para a imagem. Os resultados obtidos foram satisfatórios.

Quanto ao preenchimento com zero, para se satisfazer a restrição do algoritmo da FFT relacionado ao tamanho da matriz de dados que deve ser em potência de 2, notou-se que para as imagens reconstruídas a partir de dados por ressonância magnética não houve problema algum, pois a FFT é aplicada uma única vez e assim a perda de precisão com a aproximação dos cálculos é insignificante; porém para as imagens reconstruídas a partir de dados por raio-X apresentaram alguns artefatos, que podem ser eliminados utilizando-se filtros adequados.

A FFT é uma ferramenta muito utilizada em processamento de imagens e este trabalho, em especial, é de grande utilidade para o auxílio em diagnósticos médicos e para a análise da dinâmica de solós.

Neste capítulo serão apresentados os resultados e conclusões obtidos no estudo da reconstrução de imagens tridimensionais a partir de imagens bidimensionais. No caso de imagens reconstruídas a partir de dados obtidos por raio-X, o algoritmo de reconstrução bidimensional é baseado na Transformada Rápida de Fourier (FFT) com filtragem de Hamming, para os dados de ressonância magnética utilizou-se apenas a FFT inversa. A reconstrução tridimensional foi realizada através de interpolação trilinear.

O projeto está dividido em três etapas:

- Reconstrução 2D utilizando a FFT inversa para ressonância magnética
- Reconstrução 2D utilizando a FFT com filtragem de Hamming
- Interpolação Trilinear e Visualização em fatias com possibilidades de cortes transversais, coronais ou sagitais.

O algoritmo foi implementado, em fase inicial, em um microcomputador 486 de 8MBytes de RAM, utilizando-se a linguagem C, neste caso tratando os dados bidimensionalmente. Em uma segunda etapa o sistema foi migrado para estação Sun Sparc utilizando o *toolkit* XView para o tratamento tridimensional das imagens [Hel90]. Para a interpolação e visualização foi utilizado um sistema já desenvolvido no ICMSC para a estação Sun Sparc [Goy94].

São, ainda, apresentados neste capítulo o pseudo-código do algoritmo de reconstrução bidimensional para dados de tomógrafos de raio-X e de ressonância magnética. Adicionalmente, aos dados de ressonância magnética são apresentadas secções tomográficas da região da cabeça de um ser humano.

São também apresentadas comparações de reconstruções de imagens entre o método da FFT com filtragem de Hamming e o método de Retroprojeção Filtrada, isto é uma comparação de resultados com *phantoms* para o tomógrafo de raio-X. Os estudos dos resultados foram feitos levando em consideração os histogramas das imagens e os parâmetros χ^2 , desvio padrão e desvio do centro de um modelo gaussiano [Van81].

As análises sobre a operacionalidade e eficiência do algoritmo e do método de interpolação utilizado foram realizadas com resultados tomográficos de *phantoms* em

várias configurações. Assim, foram analisadas imagens de phantoms homogêneos e não homogêneos com elementos cujos coeficientes de atenuação são conhecidos, como também com diferentes condições de simetria.

5.1. A Implementação dos Algoritmos

5.1.1. O Algoritmo de FFT com filtragem de Hamming

A reconstrução baseada na FFT com filtragem de Hamming é feita aplicando-se a FFT aos dados de projeções obtidos em um tomógrafo de raio-X, multiplicando os dados de projeções no domínio da frequência pelos coeficientes de Hamming, calculados para cada raio em uma projeção, ou seja estes coeficientes são associados às colunas da matriz dos dados de projeções transformados [Bro83]. Após esta multiplicação os dados são inversamente transformados, utilizando novamente a FFT, para se obter uma representação da secção no domínio espacial.

Como consequência da aplicação da FFT, o algoritmo deve ser aplicado a matrizes de dados cujo tamanho seja uma potência de 2. O preenchimento com zeros feitos antes do processamento do algoritmo para manter esta condição pode provocar distorções nas imagens.

O quadro 5.1. descreve o pseudo-código utilizado para implementação do método com elementos cujos dados de transmissão direta de raio-X são conhecidos, como também com diferentes condições de simetria.

Entrada: Matriz de dados de projeções $P_{N \times N}$, composta por parte real e imaginária. A parte imaginária, caso não exista, deve ser nula.

Refinamento 1.

1. Declaração de variáveis
2. Inicializa variáveis
3. Lê matriz de projeções
4. Converter dados para coeficientes de atenuação [$\mu = (1/x) \ln(N_0/N)$]
se tamanho da matriz não for em potência de 2 então
 5. Preencher com zeros a volta da matriz até que seu tamanho fique em potência de 2.

fim se

para $i = 0$ até $N-1$ faça

 para $j = 0$ até $N-1$ faça

$X(j) = P(i,j)$

 fim para

6. Calcular a FFT unidimensional para o vetor X (FFT das linhas) retornando valores para ele mesmo.

 para $j = 0$ até $N-1$ faça

$P(i,j) = X(j)$

 fim para

fim para

para $i = 0$ até $N-1$ faça

 para $j = 0$ até $N-1$ faça

$X(j) = P(j,i)$

 fim para

7. Calcular a FFT unidimensional para o vetor X (FFT das colunas)

 para $j = 0$ até $N-1$ faça

$P(j,i) = X(j)$

 fim para

fim para

8. Determinar os valores do filtro $h(n\tau)$

9. Calcular o coeficiente de Hamming $w_H(n\tau)$ segundo Eq. 4.50

para $i = 0$ até $N-1$ faça

 para $j = 0$ até $N-1$ faça

$X(j) = w_H(j) \cdot P(i,j) \cdot h(j)$

 fim para

10. Calcular a FFT unidimensional inversa (das linhas) para o vetor $X(j)$

Quadro 5.1 Pseudo-código do algoritmo de reconstrução para raio- X .

```

        para j = 0 até N-1 faça
            Q(i,j) = X(j)
        fim para
    fim para
    para i = 0 até N-1 faça
        para j = 0 até N-1 faça
            X(j) = Q(j,i)
        fim para
        11. Calcular a FFT unidimensional inversa (das colunas) para o
        vetor X
        para j = 0 até N-1 faça
            Q(j,i) = X(j)
        fim para
    fim para
    para i = 0 até N-1 faça
        12. Calcular a posição da linha em coordenadas cartesianas (x)
        para j = 0 até N-1 faça
            13. Calcular a posição da coluna em coordenadas
            cartesianas (y)
            para k = 0 até N-1 faça
                theta = k. $\pi$ /(N-1)
                t = x cos(theta) + y sen(theta)
                soma = soma + Q(theta,t)
            fim para
            R(i,j) = soma
        fim para
    fim para
    14. Normalizar matriz-resultante R(i,j) para valores de 0 a 127 (tons de cinza)
fim Ref. 1

```

Quadro 5.1 (cont.) Pseudo-código do algoritmo de reconstrução para raio-X.

A matriz-resultante representa a matriz imagem mas com dados não normalizados, ou seja, não convertidos em tons de cinza. Para o cálculo da matriz-resultante foram utilizados N ângulos de projeções, sendo N o número de linhas da matriz de dados transformada.

5.1.2. O Algoritmo de Reconstrução para Ressonância Magnética

Para a reconstrução dos dados do tomógrafo de ressonância magnética é necessário aplicar a mesma rotina de cálculo da FFT unidimensional para as linhas e colunas da matriz de distribuição espacial de spins. Uma vez que os dados do tomógrafo de ressonância magnética já se encontram no domínio da frequência ou domínio de Fourier, basta aplicar a FFT apenas uma única vez, utilizando os conjugados dos dados originais, ou seja, multiplicando a parte imaginária por -1 . Assim é feita a FFT inversa dos dados originais possibilitando obter-se a imagem no domínio do tempo.

Caso a matriz de dados não apresente tamanho em potência de 2, é feito também o preenchimento com zeros. Neste caso não há distorções da imagem, pois os dados gerados com o tomógrafo de ressonância magnética representam uma distribuição espacial de spins no domínio da frequência. Uma abordagem completa sobre os conceitos fundamentais sobre tomografia com MR pode ser encontrada em [Bic94].

O quadro 5.2 mostra o pseudo-código para o algoritmo de reconstrução para ressonância magnética.

Entrada: Matriz de dados complexos (parte real e imaginária).

Refinamento 1.

1. Declaração de variáveis

2. Inicialização de variáveis

3. Ler matriz de distribuição espacial de spins

se tamanho da matriz não for em potência de 2 então

4. Preencher com zeros a volta da matriz até que seu tamanho fique em potência de 2.

fim se

para $i = 0$ até $N-1$ faça

para $j = 0$ até $N-1$ faça

$X(j) = P(i,j)$

{Multiplicar a parte imaginária por -1 (conjugado)}

fim para

5. Calcular a FFT unidimensional para o vetor X

para $j = 0$ até $N-1$ faça

$P(i,j) = X(j)$

{Multiplicar a parte imaginária por -1 (conjugado)}

fim para

fim para

para $i = 0$ até $N-1$ faça

para $j = 0$ até $N-1$ faça

$X(j) = P(j,i)$

{Multiplicar a parte imaginária por -1 (conjugado)}

fim para

6. Calcular a FFT unidimensional para o vetor X

para $j = 0$ até $N-1$ faça

$P(j,i) = X(j)$

{Multiplicar a parte imaginária por -1 (conjugado)}

fim para

fim para

7. Atribuir à matriz-resultante o módulo da FFT, $SQRT(R^2 + I^2)$

8. Normalizar matriz para intervalo de 0 a 127

fim Ref 1.

5.1.3. O Algoritmo de Interpolação Trilinear

Após a reconstrução de diversas secções de um objeto, o algoritmo de interpolação trilinear é utilizado para criar novas secções entre planos originais consecutivos. A interpolação é feita calculando-se a média aritmética entre intensidades de duas secções consecutivas.

O algoritmo implementado distribui as secções originais entre 64 níveis de profundidade, mantendo a mesma distância entre elas. A interpolação preenche todas as lacunas, independente do número de secções originais. Portanto, o número de secções geradas corresponde a 64 menos o número de secções originais. Estas secções geradas são distribuídas igualmente entre as secções originais, ou seja o número de secções a serem geradas por interpolação corresponde ao número de secções que faltam para preencher a matriz dividido pelo número de secções originais menos 1. Caso esta divisão não resulte em um número inteiro, então o resto da divisão deve ser distribuído entre os primeiros pares consecutivos de secções originais. Realizados estes cálculos, teremos então as posições em que as secções originais serão colocadas dentro da matriz tridimensional.

Após a transferência das secções originais para as suas respectivas posições, começam a ser realizadas as interpolações. Assim, a secção gerada sempre deve ser a secção que se encontra entre as duas que a geraram.

A interpolação trilinear não apresenta um resultado satisfatório quando o número de secções gerados por interpolação é muito maior que as secções originais. Como a interpolação trilinear realiza uma aproximação do que poderia existir entre duas fatias, o objeto não apresenta uma forma muito precisa, tendo uma aparência distorcida. Isto ocorre devido ao fato da resolução obtida (256x256x64 - largura, altura e profundidade) do volume alcançado, estar muito aquém da resolução isotrópica (256x256x256 elementos). O quadro 5.3 mostra o pseudo-código do algoritmo de interpolação.

Entrada: Matrizes de dados das diversas secções planares reconstruídas

Refinamento 1.

1. Declarar variáveis

2. Inicializar variáveis

3. Ler as secções originais

para cada secção original **faça**

4. Determinar a posição de cada secção original dentro da matriz tridimensional

fim para

5. Colocar as secções em suas respectivas posições

para cada 2 secções originais **faça**

6. Interpolar (secção1, secção2)

fim para

7. Visualizar primeira secção

fim Ref 1.

Refinamento 1.6. { Interpolar (s1,s2)}

1. Achar a secção do meio

se não existir fatia do meio **então**

2. Retornar para a chamada da rotina

fim se

para cada linha da nova matriz (secção) a ser gerada **faça**

para cada coluna da nova matriz (secção) a ser gerada **faça**

3. Calcular a média aritmética entre s1 e s2

fim para

fim para

Interpolar (s1, secção gerada)

Interpolar (secção gerada, s2)

fim Ref. 1.6.

5.2. O Sistema de Visualização das Imagens

O sistema de visualização implementado, até o momento, executa a leitura dos cortes gerados pelo tomógrafo, a sua interpolação trilinear e a visualização dos cortes transversais, coronais e sagitais do objeto. A visualização dos cortes é realizada diretamente, não se levando em conta sombra e transparência, ou seja, os valores da matriz tridimensional representa até 128 tons de cinza.

Realizada a interpolação, a matriz tridimensional está completa. Com esta matriz pode-se visualizar os cortes transversais, coronais e sagitais do objeto. Tais cortes podem ser vistos na figura 5.1.

Inicialmente é apresentada a primeira secção original em uma única janela. Para cada um dos cortes é aberta uma janela de visualização e o sistema permite seleccionar o nível da secção dentro da matriz tridimensional que se deseja visualizar.

O sistema também fornece um histograma do objeto todo.

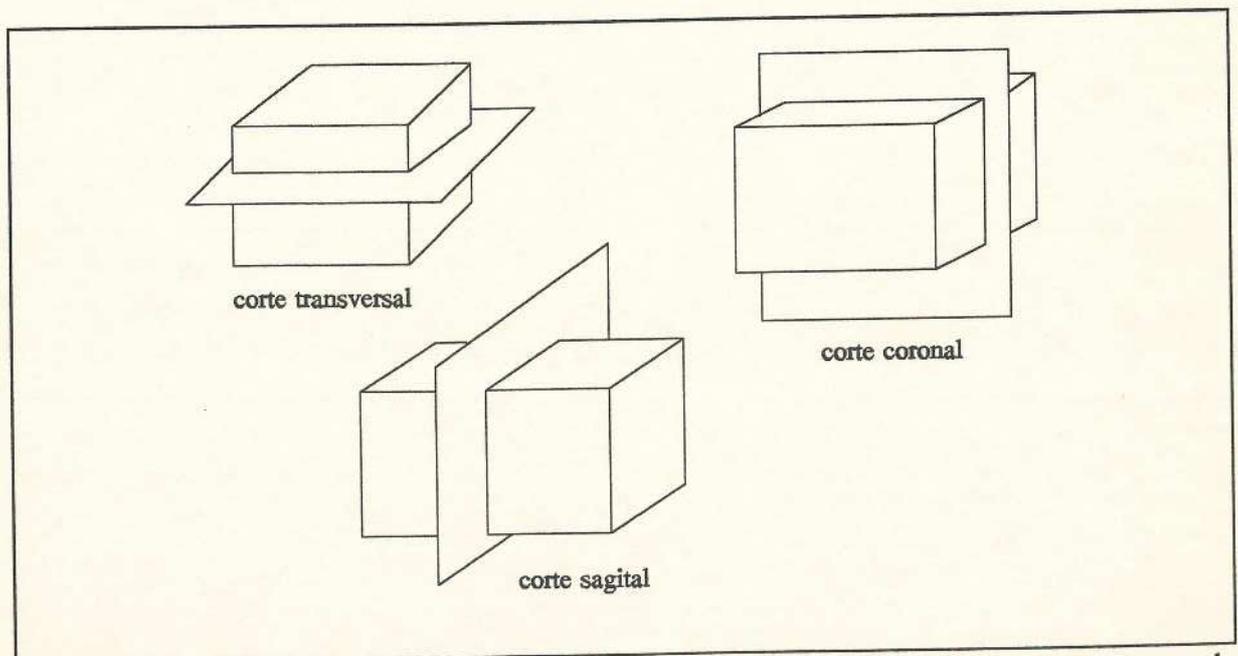


Figura 5.1 Tipos de cortes visuais na visualização das imagens (típicos para cortes de cabeça humana).

5.3. Comparação do Algoritmo de FFT com Filtragem de Hamming com o Método de Retroprojeção Filtrado na Reconstrução Bidimensional para Raio-X.

A seguir apresenta-se a reconstrução de uma imagem do phantom homogêneo de nylon, utilizando os algoritmos de retroprojeção filtrada [Cru89] e de FFT com filtragem de Hamming. A figura 5.3. apresenta uma imagem gerada pelo primeiro algoritmo e a figura 5.4 pelo segundo algoritmo.

Também é feita uma comparação das duas imagens através dos parâmetros obtidos pela curva Gaussiana das duas imagens utilizando a tabela 5.1.

O *phantom* utilizado para a comparação dos métodos de reconstrução é apresentado na figura 5.3.

A seguir são apresentados os dados da tomografia em estudo:

- Translação total = 6 cm
- Passo Linear = 0,1 cm
- Rotação Total = 180°
- Passo de rotação = 3°
- Contagem do feixe de fótons em feixe livre = 10.000 fótons
- Tempo de incidência de raio-X em cada passo linear = 10 seg.
- Energia utilizada na tomografia = 60 KeV.

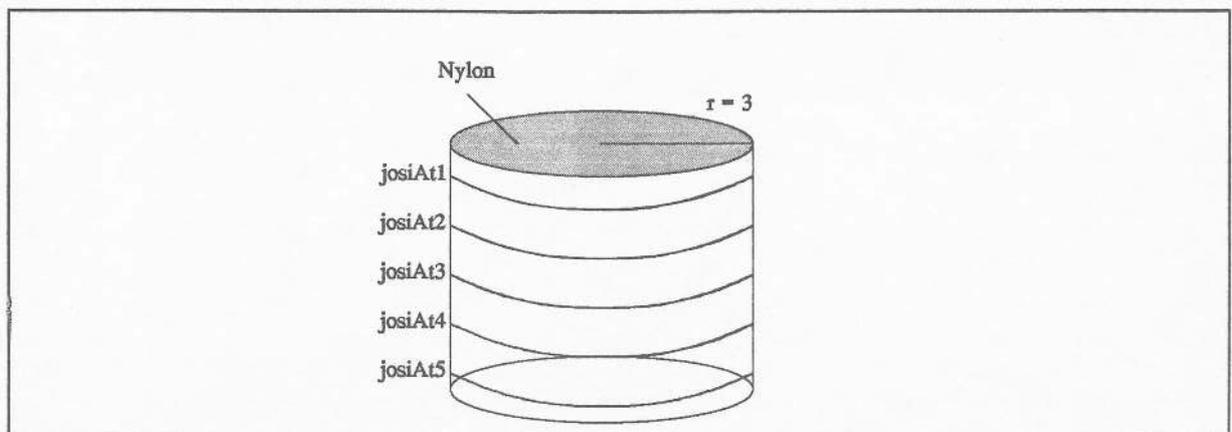


Figura 5.2 Amostra utilizada para reconstrução.

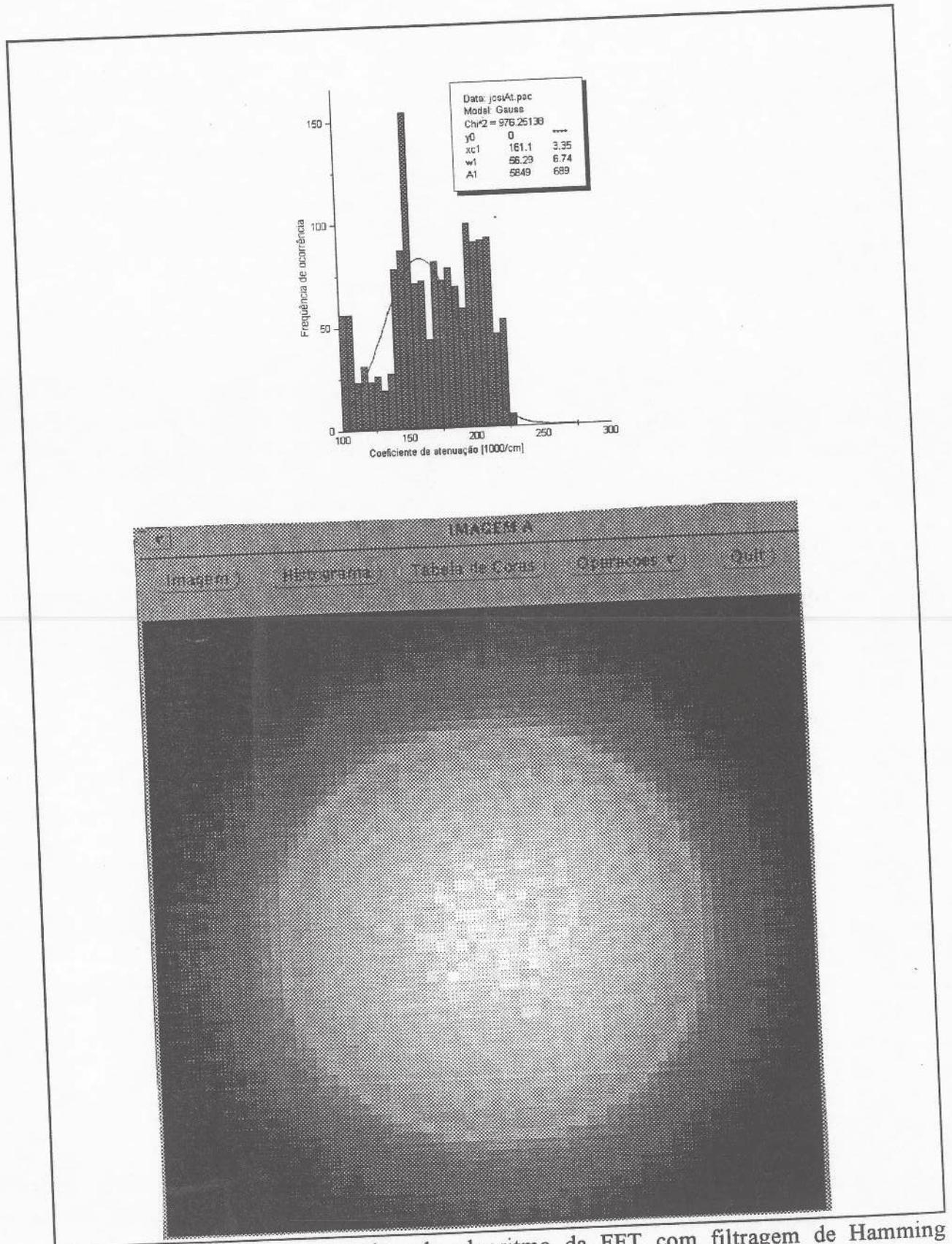


Figura 5.3 Imagem reconstruída pelo algoritmo da FFT com filtragem de Hamming (josiAt.pac).

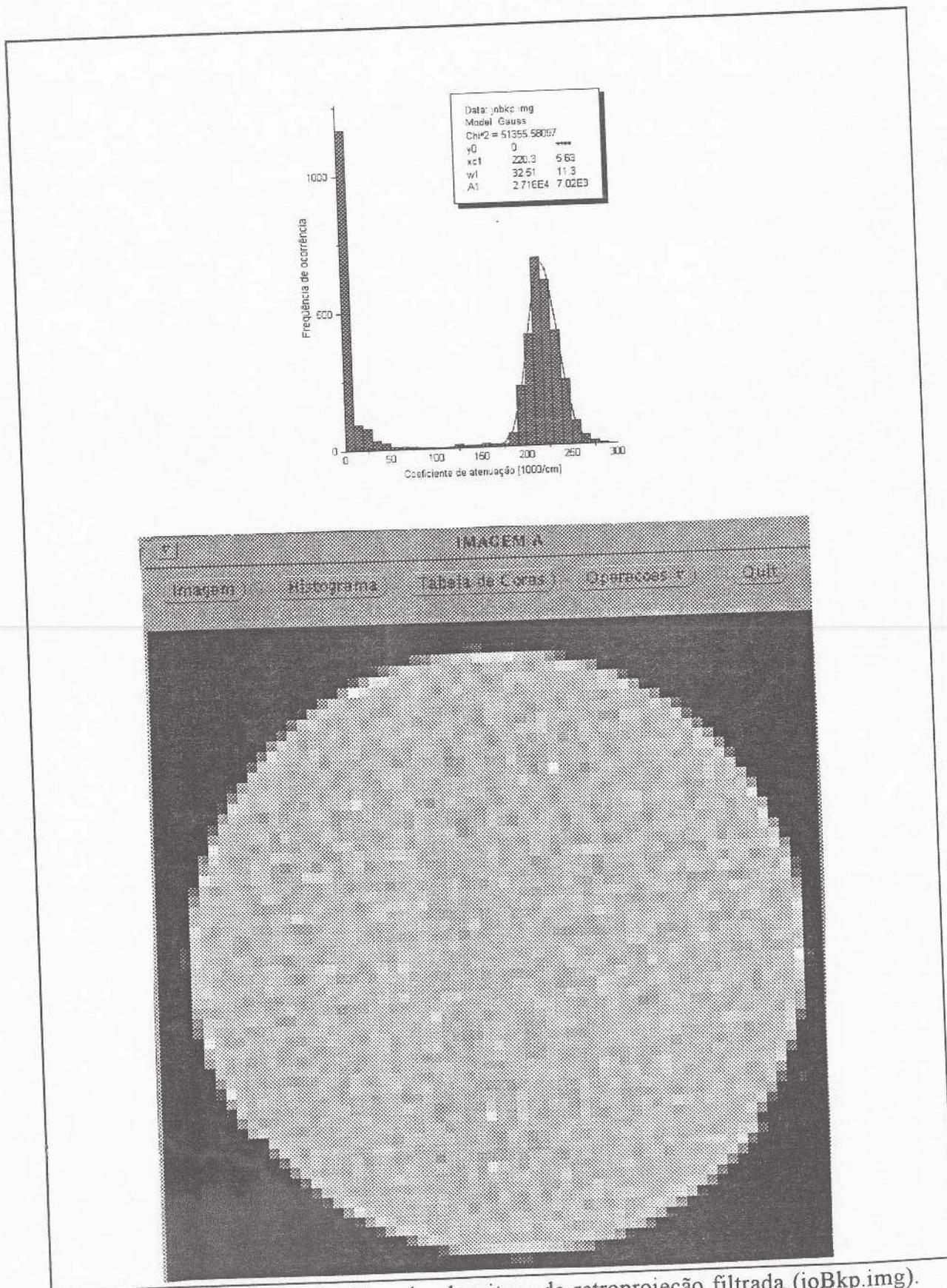


Figura 5.4 Imagem reconstruída pelo algoritmo de retroprojeção filtrada (jobkp.img).

Após a apresentação da imagem e seus histogramas é feita uma comparação dos métodos de reconstrução utilizando-se a função Gaussiana da tabela 5.1 como parâmetro de comparação. A função Gaussiana é apresentada em [Hel81] pela seguinte expressão:

$$f(x) = \frac{A_1}{w_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-xc_1)^2}{2w_1^2}} + y_0 \quad (5.1)$$

Para o entendimento da tabela faz-se necessário a descrição do significado dos ítems das colunas que são utilizados como valores de comparação: Chi², Centro da Gaussiana (xc1), Desvio padrão (w1) e uma constante A1, onde:

- Chi² - O valor desse parâmetro indica a diferença entre o valor da curva Gaussiana e o valor real do gráfico de barras (histograma) da imagem.
- Centro da Gaussiana - O centro da Gaussiana indica o valor médio dos coeficientes de atenuação da imagem.
- Desvio padrão - O desvio padrão indica o desvio médio do centro da Gaussiana.
- A1 - Constante da função Gaussiana utilizada para cálculo dos parâmetros acima.

Para a comparação dos algoritmos aplicados ao mesmo *phantom* em estudo, foi estabelecido uma calibração nos resultados obtidos com o algoritmo da FFT com filtragem de Hamming, levando-se em conta o coeficiente de atenuação linear do nylon a 60 KeV que é igual a 0,213 cm⁻¹.

IMAGEM	CHI ²	xc1	w1	A1
josiAt.pac	976.25	161.1±3.35	56.29±6.74	586.49±689
joBkp.img	51355.58	220.3±5.63	32.51±11.3	2.716E4±7.02E3

Tabela 5.1 - Tabela de comparação entre a imagem josiAt.pac utilizando FFT e joBkp.img utilizando o algoritmo de retroprojeção.

Analisando-se os histogramas das figuras 5.3 e 5.4, verifica-se para o histograma da figura 5.4 uma maior ocorrência dos coeficientes de atenuação em torno de 220.3 (1000/cm), que é o centro da Gaussiana para a imagem joBkp.img, como é mostrado na tabela 5.1, enquanto que para o histograma da figura 5.3 também há uma maior ocorrência em torno do coeficiente normalizado igual a 161.1 (1000/cm), que é o centro da Gaussiana para a imagem josiAt.pac. Entretanto, há um pequeno valor de ocorrência para os valores dos coeficientes na figura 5.4 na faixa de 25 a 170 devido ao efeito de borda da imagem, os quais acarretam um valor maior para os parâmetros χ^2 . O mesmo não ocorre com a imagem josiAt.pac que possui um valor pequeno de χ^2 , pois há uma melhor distribuição dos valores. Entretanto, há uma maior concentração de coeficientes entre 170 a 270 na imagem joBkp.img, o que fornece um desvio padrão menor em relação a curva Gaussiana. Na imagem josiAt.pac, pode-se notar uma maior concentração dos valores dos coeficientes em torno do centro da Gaussiana, o que produz uma distribuição mais homogênea.

5.4. Resultados Experimentais com os Corpos de Prova

5.4.1. Primeiro Phantom de Estudo

O primeiro phantom utilizado para o estudo da reconstrução tridimensional da imagem foi um phantom homogêneo de nylon, sobre o qual foram feitas cinco tomografias por raio-X (josiAt1, josiAt2, josiAt3, josiAt4, josiAt5) como mostra a figura 5.2.

Os dados da tomografia em estudo são os mesmos do item 5.3, pois é o mesmo phantom e a mesma tomografia, só que nestas amostras o coeficiente de atenuação está normalizado para níveis de cinza.

Estas tomografias foram reconstruídas através do método da FFT com filtragem de Hamming, gerando as imagens josiAt1, josiAt2, josiAt3, josiAt4, josiAt5 que foram usadas para a interpolação e reconstrução da imagem tridimensional.

Ao total foram criadas 59 imagens interpoladas entre as imagens originais. Entre josiAt1 e josiAt2, entre josiAt2 e josiAt3 e entre josiAt3 e josiAt4 foram criadas 15 imagens e entre josiAt4 e josiAt5, 14.

Para representar as imagens interpoladas, nas figuras 5.5 e 5.6 aparecem as imagens josiAt40 e josiAt60 e seus histogramas. A primeira está entre as imagens originais josiAt3 e josiAt4 e a segunda entre as imagens originais josiAt4 e josiAt5. Na figura 5.7 encontra-se a imagem da primeira secção original josiAt1.pac e seu histograma. As demais fatias são idênticas a ela como pode-se notar nos histogramas das figuras 5.8, 5.9, 5.11, 5.12.

Utilizando-se das informações obtidas através da curva de Gauss dos histogramas, foi então construída a tabela de dados a seguir.

IMAGEM	Chi ²	Centro Gauss. (xc1)	Desvio Padrão (w1)	A1
josiAt1.pac	5403.83	21.28±1.49	17.99±3.24	1.001E4±1.78E3
josiAt2.pac	5403.83	21.28±1.49	17.99±3.24	1.001E4±1.78E3
josiAt3.pac	5403.83	21.28±1.49	17.99±3.24	1.001E4±1.78E3
josiAt40.pac	5395.42	21.27±1.49	18,01±3.24	1.002E4±1.78E3
josiAt4.pac	5403.83	21.28±1.49	17.99±3.24	1.001E4±1.78E3
josiAt60.pac	5395.42	21.27±1.49	18.01±3.24	1.002E4±1.78E3
josiAt5.pac	5403.83	21.28±1.49	17.99±3.24	1.001E4±1.78E3

Tabela 5.2 - Tabela das imagens josiAt1 a josiAt5 juntamente com os planos criados na interpolação (josiAt40.pac e josiAt60.pac).

Observando-se a tabela 5.2 das imagens reconstruídas com o algoritmo da FFT com filtragem de Hamming e das imagens obtidas na interpolação, verifica-se uma aproximação de valores em todos os parâmetros de comparação. Essa igualdade pode ser observada através das imagens e seus histogramas como ilustra a figura 5.5 e 5.6.

Através dos resultados pode-se afirmar que o resultado obtido na interpolação é considerado satisfatório, uma vez que as alterações ocorridas nas imagens interpoladas foram muito pequenas. Este fato já era esperado, uma vez que o objeto em estudo é simétrico e homogêneo.

Pode-se afirmar que qualquer que seja o número de fatias criadas entre cada plano na interpolação o resultado obtido seria satisfatório já que todas as imagens teriam o mesmo resultado, independente do número de planos interpolados.

Nas figuras 5.12 e 5.13 são apresentados os cortes transversais, coronais e sagitais do *phantom* analisado.

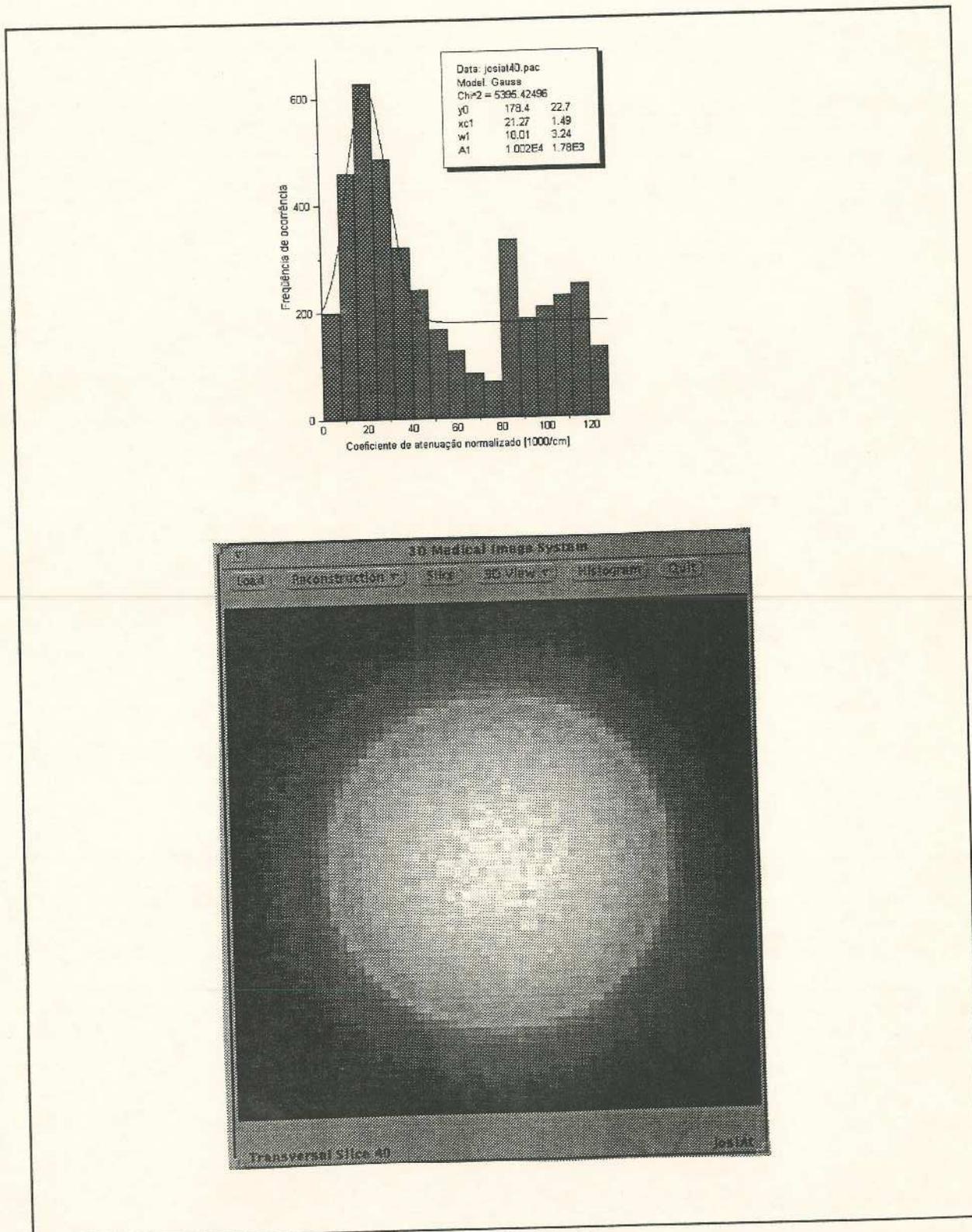


Figura 5.5 Histograma e imagem da secção josiAt40.pac

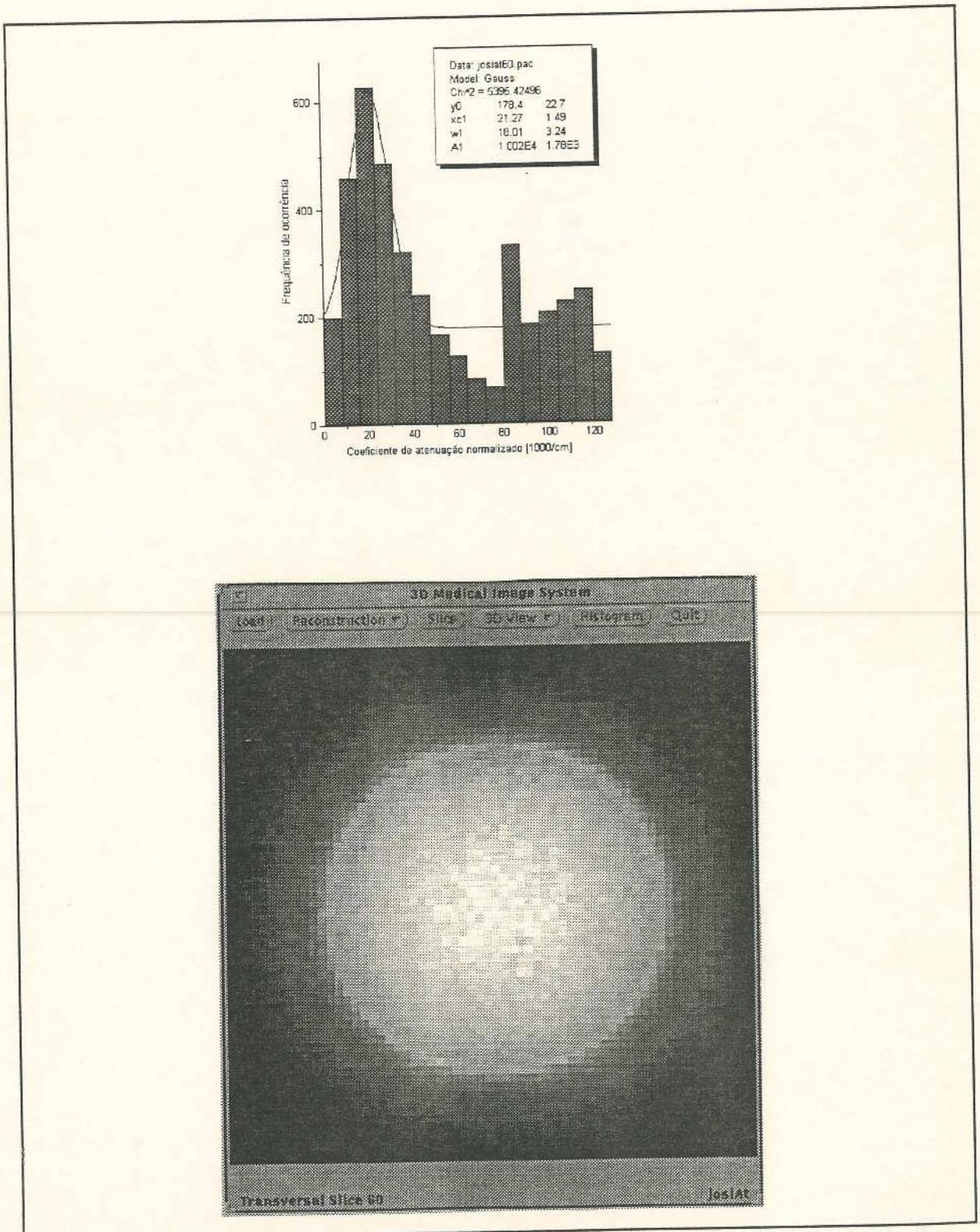


Figura 5.6 Imagem e histograma da secção josiAt60.pac

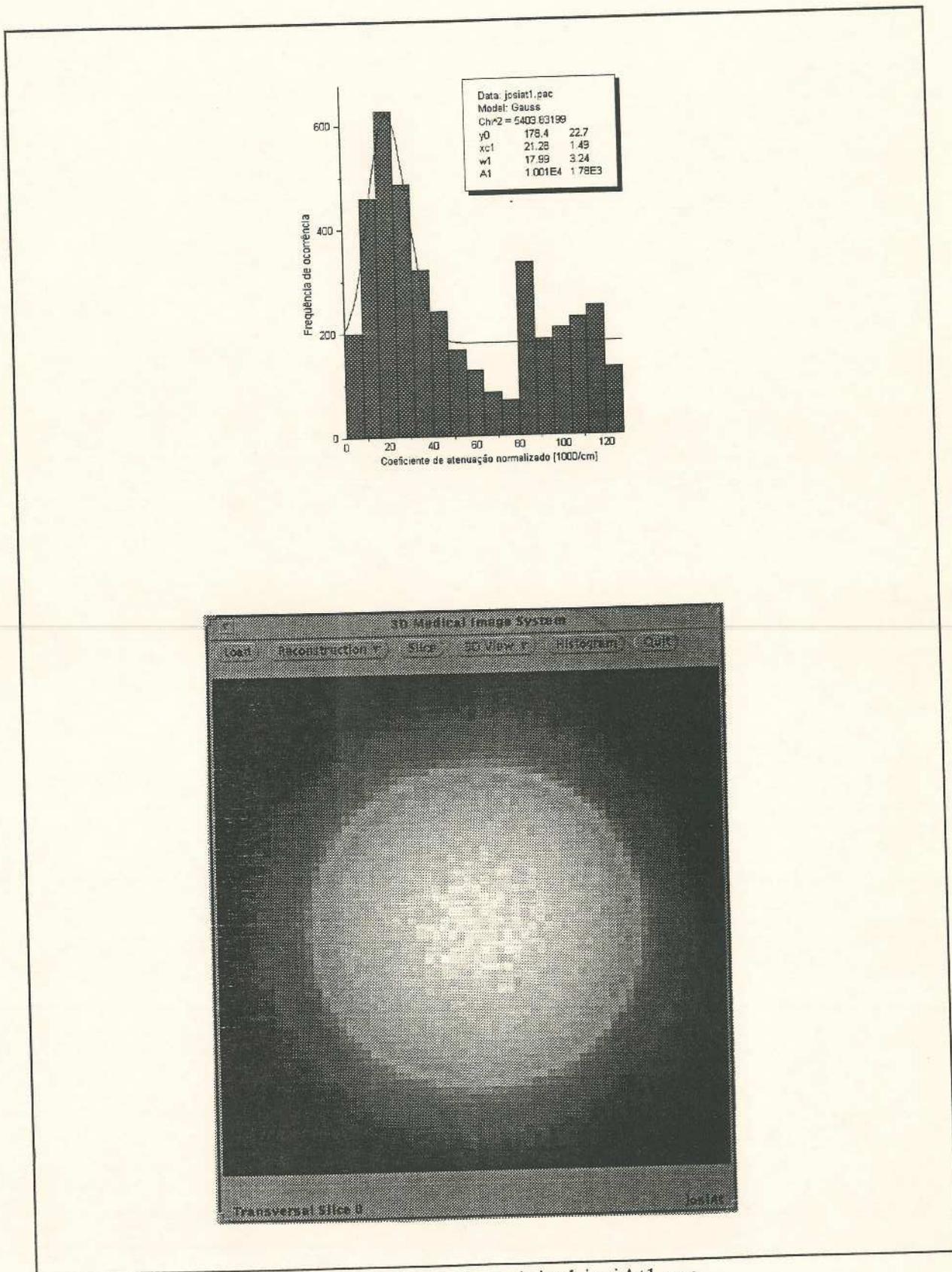


Figura 5.7 Histograma e imagem da secção original josiAt1.pac

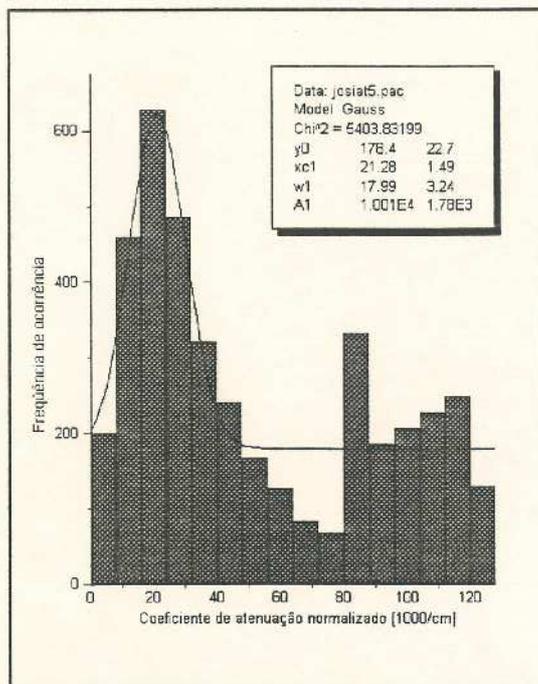


Figura 5.8 Histograma da imagem josiAt5.pac

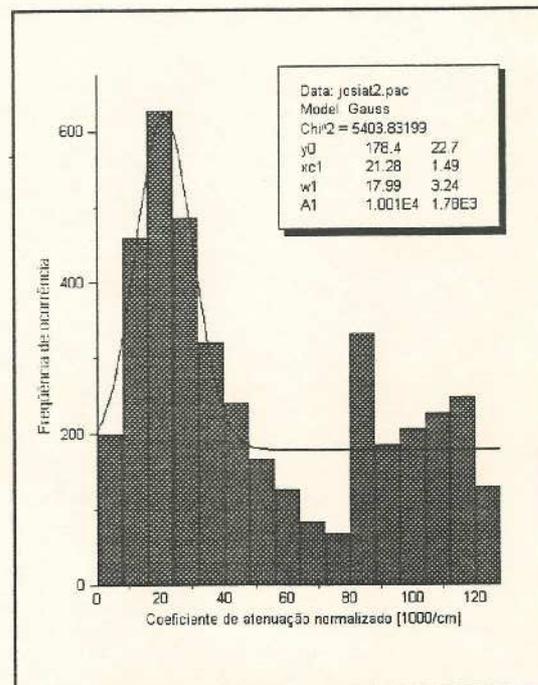


Figura 5.9 Histograma da imagem josiAt2.pac

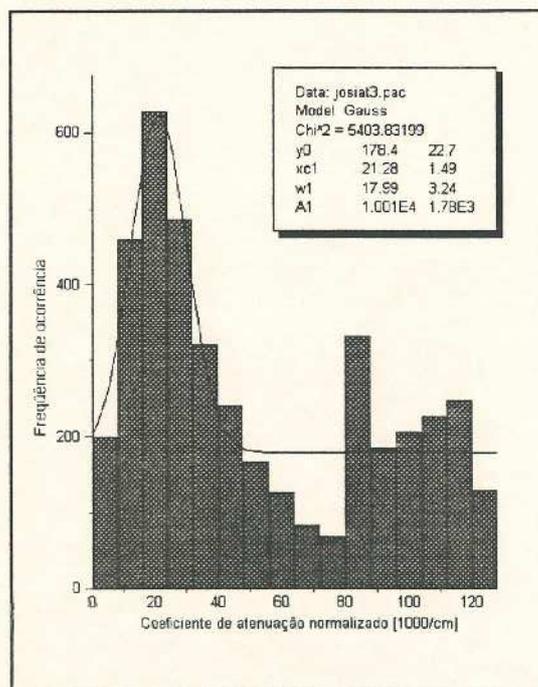


Figura 5.10 Histograma da imagem josiAt3.pac

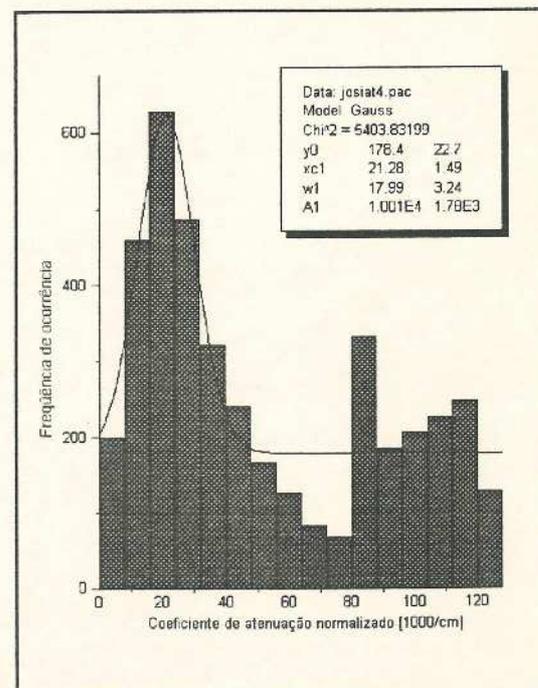


Figura 5.11 Histograma da imagem josiAt4.pac

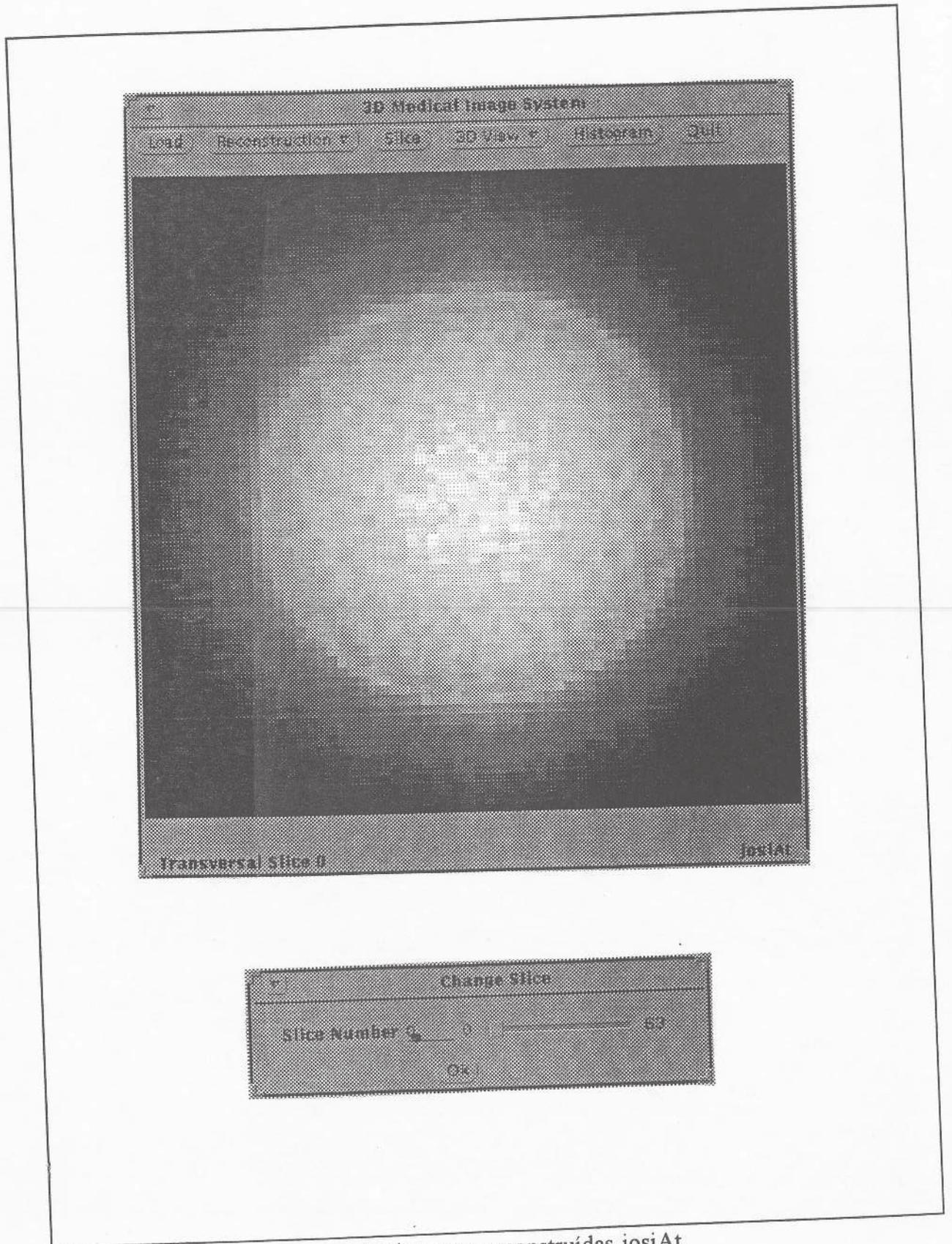


Figura 5.12 Corte transversal das imagens reconstruídas josiAt.

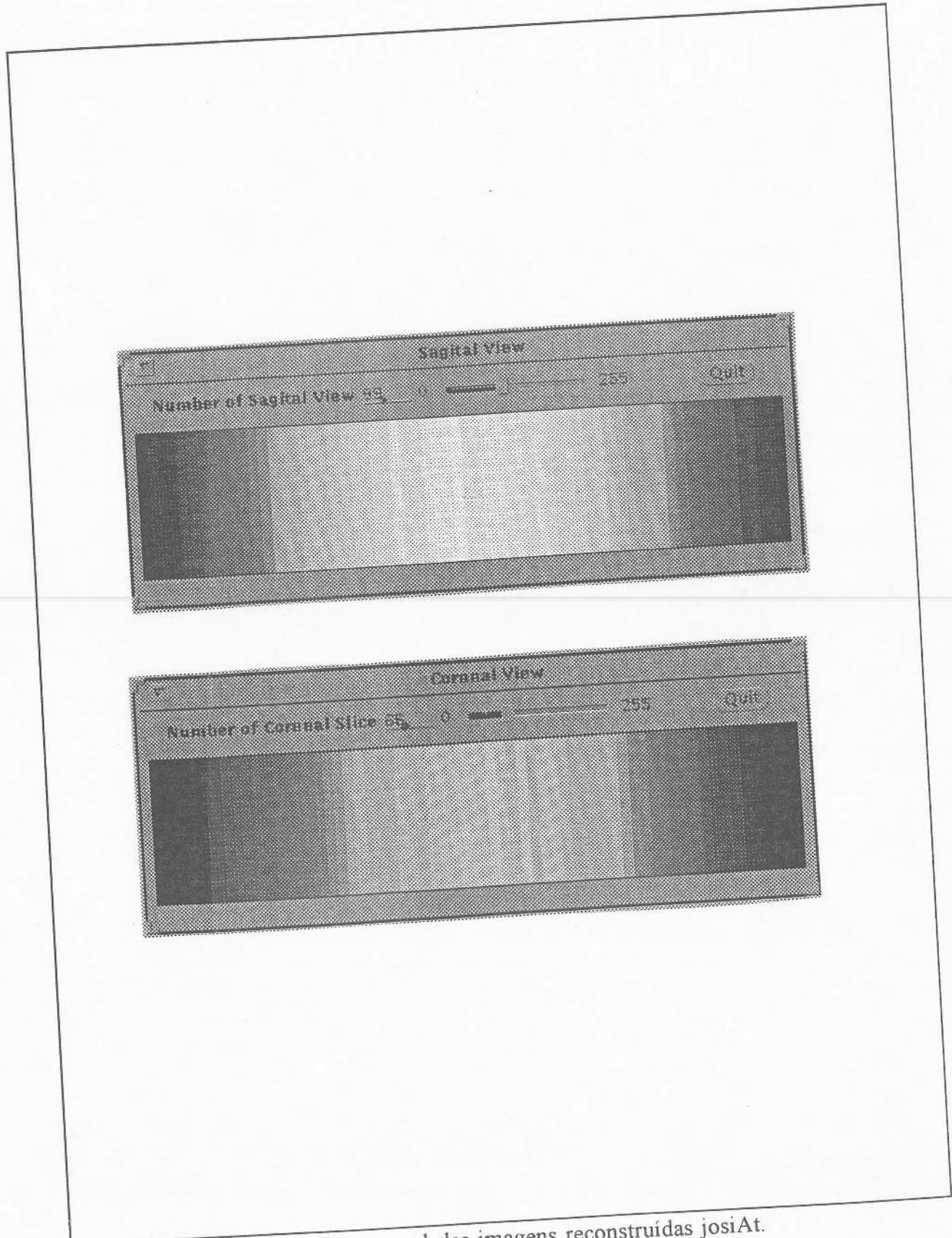


Figura 5.13 Cortes sagital e coronal das imagens reconstruídas josiAt.

5.4.2. Segundo Phantom de Estudo

Como segundo *phantom* de estudo para reconstrução 3D da imagem foi utilizado um phantom simétrico e não homogêneo, figura 5.14, onde os materiais contidos no phantom são: Alumínio(Al), Cálcio (Ca) e o Silício (Si).

A seguir são apresentados os dados da tomografia em estudo:

- Translação total = 6 cm
- Passo Linear = 0,1 cm
- Rotação Total = 180°
- Passo de rotação = 3°
- Contagem do feixe de fótons em feixe livre = 10.000 fótons
- Tempo de incidência de raio-X em cada passo linear = 10 seg.
- Energia utilizada na tomografia = 60 KeV.

Neste phantom foram realizadas cinco tomografias (josiBt1, josiBt2, josiBt3, josiBt4, josiBt5). A imagem dessas tomografias foram reconstruídas utilizando-se do algoritmo da FFT com filtragem de Hamming, gerando as imagens josiBt1.pac, josiBt2.pac, josiBt3.pac, josiBt4.pac, josiBt5.pac. Essas cinco imagens foram utilizadas para a realização da interpolação e ao todo foram criadas 59 fatias seguindo a distribuição dada no item 5.4.1.

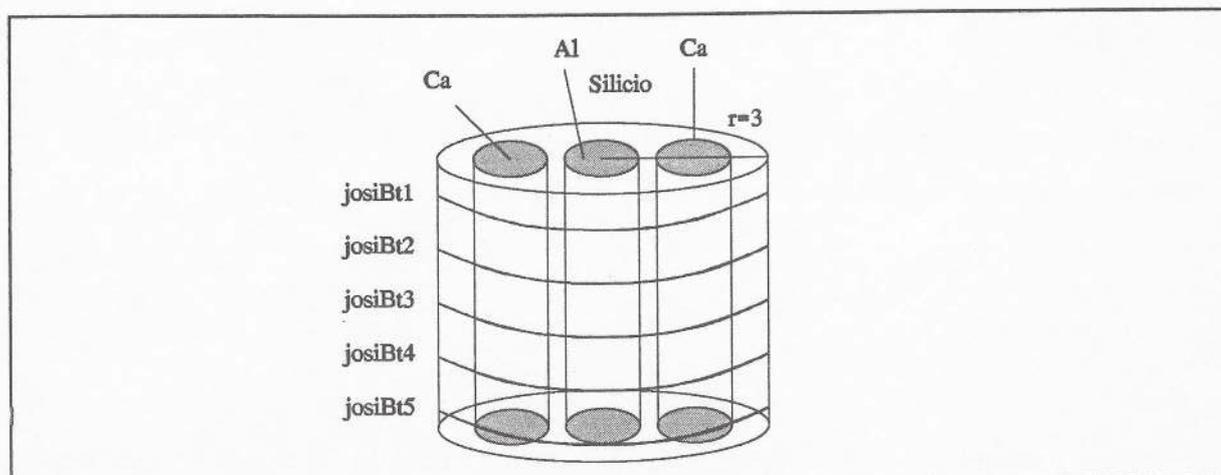


Figura 5.14 Segundo *phantom* de estudo.

Na figura 5.15 é apresentada a imagem e o histograma de josiBt1.pac. As demais imagens bidimensionais da reconstrução do segundo phantom são idênticas a ela como pode se notar nos histogramas das figuras 5.16 a 5.19.

As fatias criadas na interpolação são as seguintes: josiBt40.pac e josiBt60.pac nas mesmas posições que as do primeiro phantom. Estas imagens e seus histogramas são apresentadas nas figuras 5.20 e 5.21.

A tabela 5.3 fornece os parâmetros da função de Gauss sobre cada imagem da reconstrução tri-dimensional para que possa ser feita uma análise dos resultados obtidos.

IMAGEM	Chi ²	Centro Gauss. (xc1)	Desvio Padrão (w1)	A1
josiBt1.pac	30868.25	18.57±2.54	23.00±5.63	2.227E4±4.34E3
josiBt2.pac	30868.25	18.57±2.54	23.00±5.63	2.227E4±4.34E3
josiBt3.pac	30868.25	18.57±2.54	23.00±5.63	2.227E4±4.34E3
josiBt40.pac	30868.25	18.57±2.54	23.00±5.63	2.227E4±4.34E3
josiBt4.pac	30868.25	18.57±2.54	23.00±5.63	2.227E4±4.34E3
josiBt60.pac	30850.56	18.56±2.54	23.02±5.63	2.229E4±4.35E3
josiBt5.pac	30868.25	18.57±2.54	23.00±5.63	2.227E4±4.34E3

Tabela 5.3 - Tabela de estatísticas das imagens josiBt1.pac a josiBt5.pac e dos planos gerados na interpolação josiBt40.pac e josiBt60.pac.

Observando-se as figuras 5.20 e 5.21, através de uma análise do histograma nota-se que quantitativamente houve uma pequena alteração nas imagens geradas na interpolação e através da análise das imagens verifica-se também que não houve alteração qualitativa nas imagens geradas na interpolação.

Como pode ser observado na tabela 5.3, os parâmetros da curva Gaussiana de todas as imagens são equivalentes, o que leva a concluir que houve uma preservação dos coeficientes de atenuação em cada pixel das imagens. Essa preservação se deve ao fato do phantom utilizado ser simétrico e os planos das imagens utilizadas na interpolação estarem alinhados, bem como, e principalmente, devido a eficiência do algoritmo de reconstrução e de interpolação.

Nas figuras 5.22 e 5.23 são apresentados os 3 tipos de cortes das imagens
josiBt.

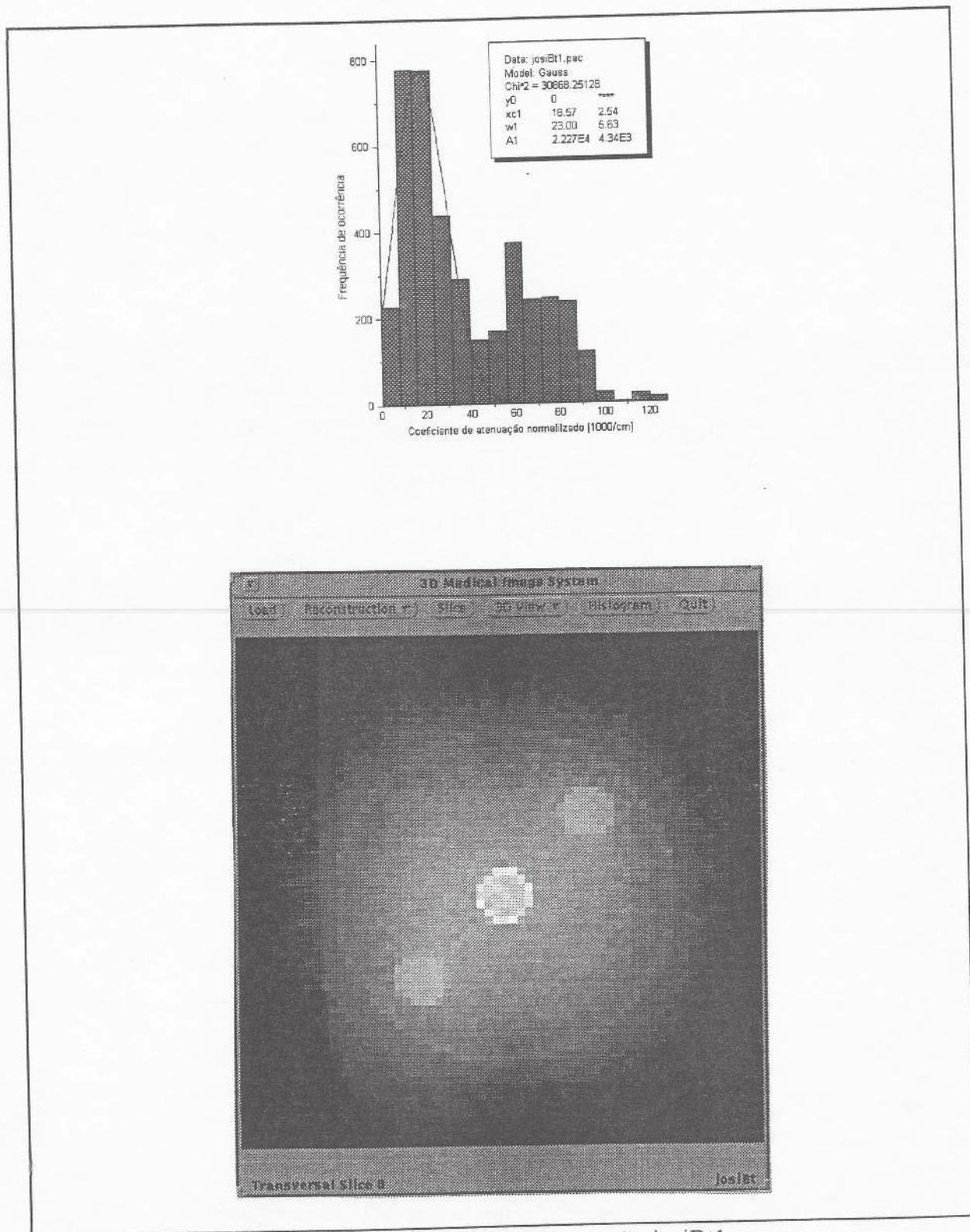


Figura 5.15 Histograma e imagem reconstruída da secção josiBt1.pac

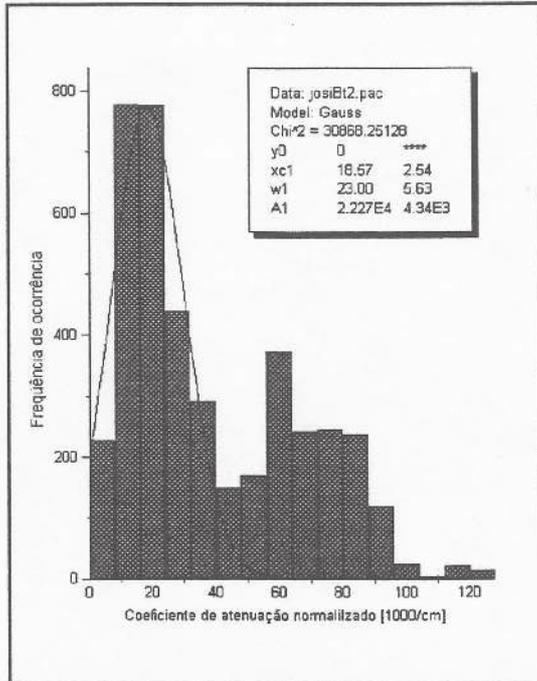


Figura 5.16 Histograma da imagem josiBt2.pac

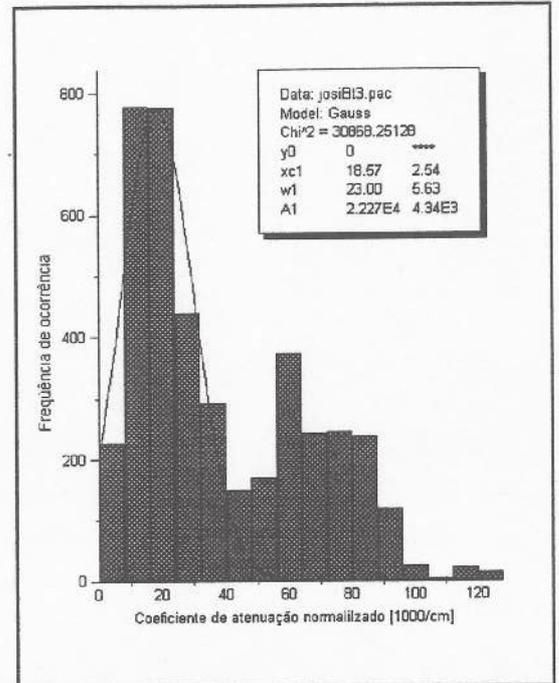


Figura 5.17 Histograma da imagem josiBt3.pac

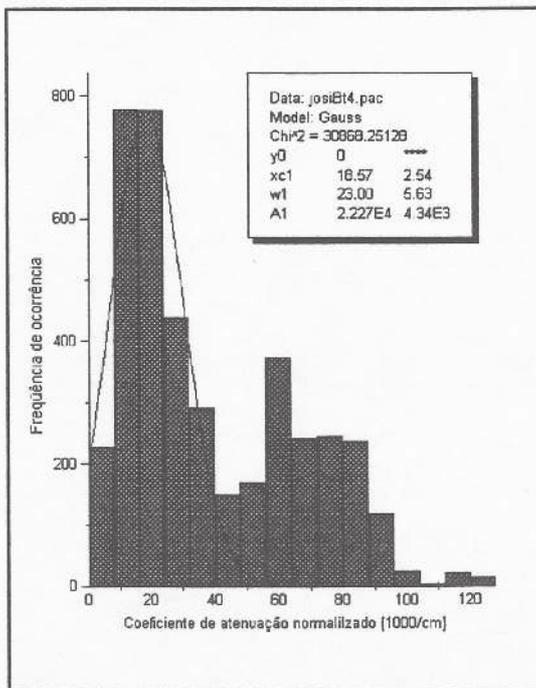


Figura 5.18 Histograma da imagem josiBt4.pac

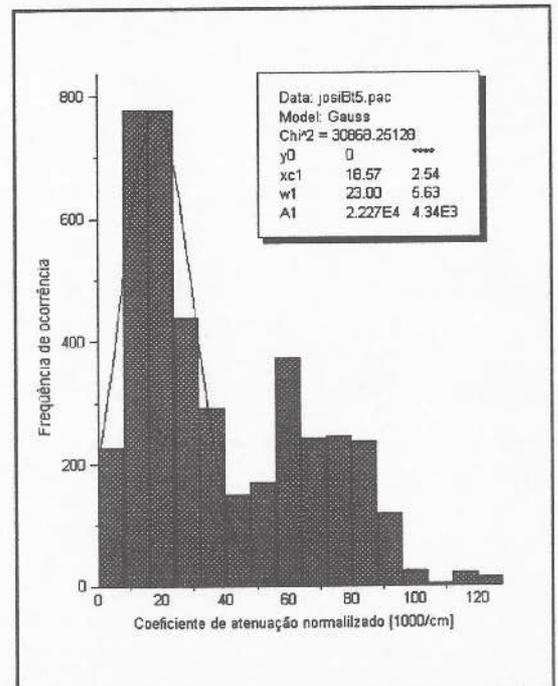


Figura 5.19 Histograma da imagem josiBt5.pac

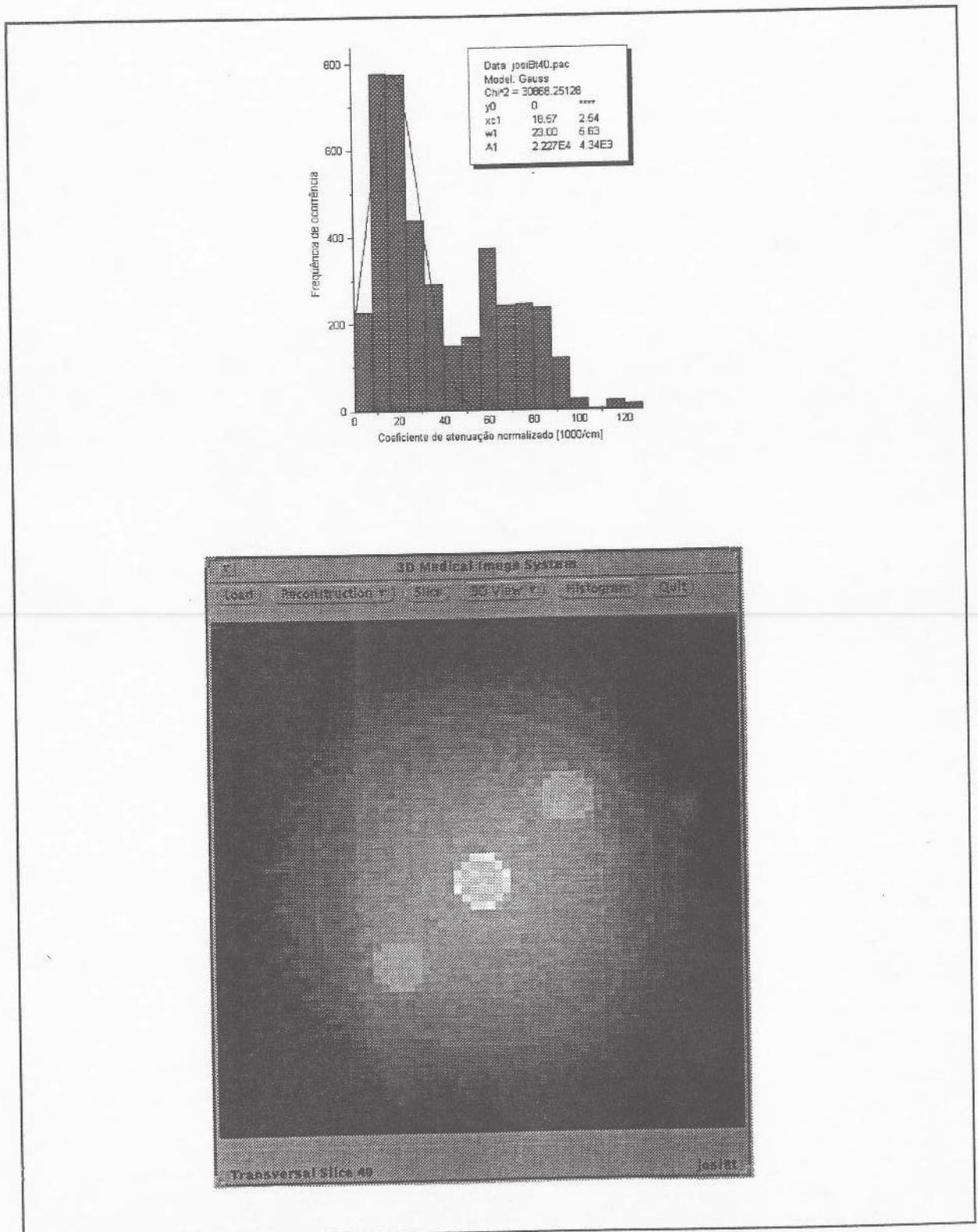


Figura 5.20 Imagem e histograma da secção criada por interpolação josiBt40.pac.

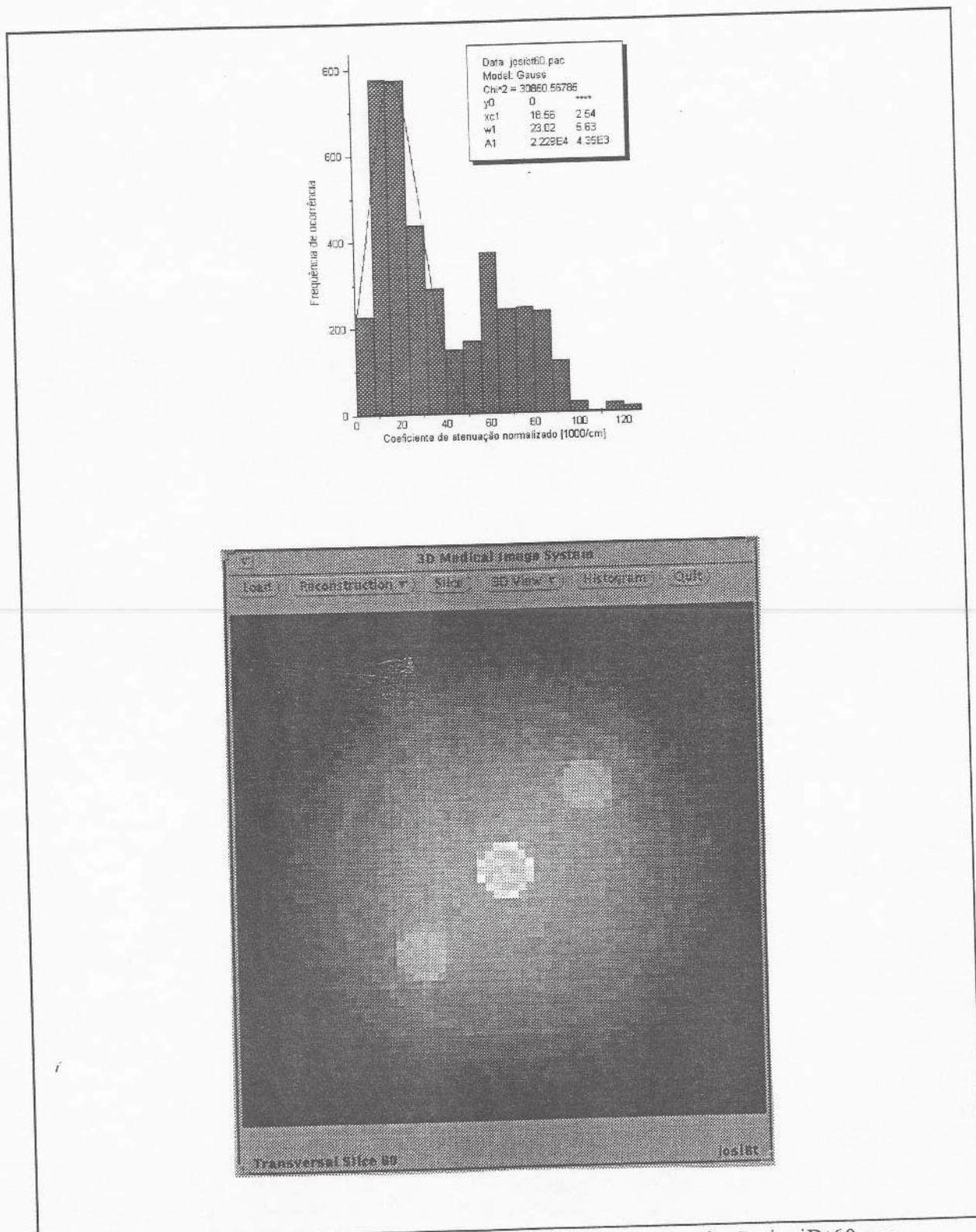


Figura 5.21 Imagem e histograma da secção criada por interpolação josi60.pac

5.4.3. Terceiro Phantom de Estudo

O phantom utilizado no estudo da reconstrução tri-dimensional do objeto representado na figura 5.22, foi um phantom assimétrico e não homogêneo, contendo três tipos de componentes: Alumínio(Al), Cálcio(Ca) e o Silício (Si).

Foram realizadas seis tomografias (josiCt1, josiCt2, josiCt3, josiCt4, josiCt5, josiCt6).

A seguir são apresentados os dados da tomografia em estudo:

- Translação total = 6 cm
- Passo Linear = 0,1 cm
- Rotação Total = 180°
- Passo de rotação = 3°
- Contagem do feixe de fótons em feixe livre = 10.000 fótons
- Tempo de incidência de raio-X em cada passo linear = 10 seg.
- Energia utilizada na tomografia = 60 KeV.

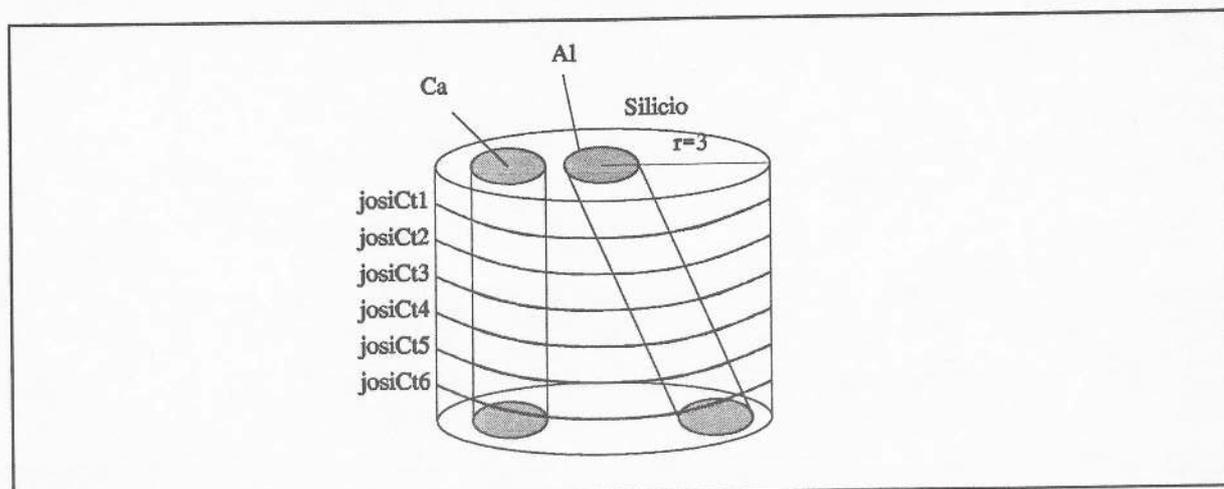


Figura 5.22 Terceiro phantom de estudo.

Após a reconstrução de cada imagem, foi feita uma interpolação dessas imagens para serem criados novos planos entre cada imagem, onde a imagem tridimensional resultante é composta por 64 planos, sendo portanto 58 imagens interpoladas, 12 entre josiCt1 e josiCt2, entre josiCt2 e josiCt3, entre josiCt3 e josiCt4, 11 entre josiCt4 e josiCt5 e entre josiCt5 e josiCt6.

As figuras 5.22, 5.23, 5.24, 5.25, 5.26, 5.27 ilustram as imagens reconstruídas e seus histogramas com a curva de Gauss e as figuras 5.28, 5.29, 5.30, 5.31, 5.32, 5.33 e 5.34 as imagens geradas por interpolação.

Para efeito de comparação das imagens obtidas na reconstrução utilizando o método da FFT com filtragem de Hamming e as imagens geradas utilizando-se o algoritmo de interpolação foi organizada a tabela 5.4.

IMAGEM	Chi ²	Centro Gauss. (xc1)	Desvio Padrão (w1)	A1
josiCt1.pac	29005.63	16.03±2.73	24.96±6.21	2.362E4±4.7E3
josiCt5n.pac	28360.09	15.83±2.78	25.39±6.35	2.385E4±4.79E3
josiCt8.pac	28685.49	16.12±2.79	25.36±6.36	2.362E4±4.75E3
josiCt2.pac	29192.57	17.09±3.15	26.87±7.17	2.404E4±5.09E3
josiCt3.pac	28343.14	17.42±3.13	27.12±7.12	2.397E4±4.99E3
josiCt30.pac	28366.50	16.69±3.51	28.90±7.96	2.506E4±5.52E3
josiCt32.pac	28394.16	16.73±3.47	28.64±7.86	2.491E4±5.46E3
josiCt4.pac	28818.06	16.81±3.41	28.28±7.74	2.478E4±5.41E3
josiCt5.pac	29333.06	17.68±3.20	27.34±7.29	2.394E4±5.07E3
josiCt55.pac	29877.60	17.48±3.24	27.26±7.37	2.393E4±5.14E3
josiCt62.pac	30694.88	17.52±3.19	26.70±7.25	2.362E4±5.08E3
josiCt6.pac	30577.23	18.16±3.08	26.43±6.97	2.336E4±4.09E3

Tabela 5.4 - Tabela de estatísticas das imagens josiCt1 a josiCt6 juntamente com as imagens geradas na interpolação josiCt5n.pac, josiCt8.pac, josiCt30.pac, josiCt32.pac, josiCt55.pac, josiCt62.pac.

Observando-se a tabela, foi verificado que o centro da curva Gaussiana possui uma variação pequena, em torno de 16.5. Neste caso o desvio padrão também sofreu uma pequena variação. Isto ocorreu devido ao fato do phantom não ser homogêneo e não

ser simétrico. Logo era de se esperar alguma variação nos dados quantitativos e qualitativos da imagem, o que pode ser visto nos histogramas e imagens apresentados..

Analisando o valor do parâmetro χ^2 , observa-se uma certa variação entre os valores das imagens reconstruídas e dos valores das imagens interpoladas. Este fato ocorre devido a não simetria e não homogeneidade do phantom, pois os pontos de cada imagem tomados como ponto de interpolação possuem valores distintos, acarretando um valor de coeficiente intermediário a eles no ponto gerado na interpolação.

Nas figuras 5.35 e 5.36 são apresentados os 3 cortes das imagens josiCt.

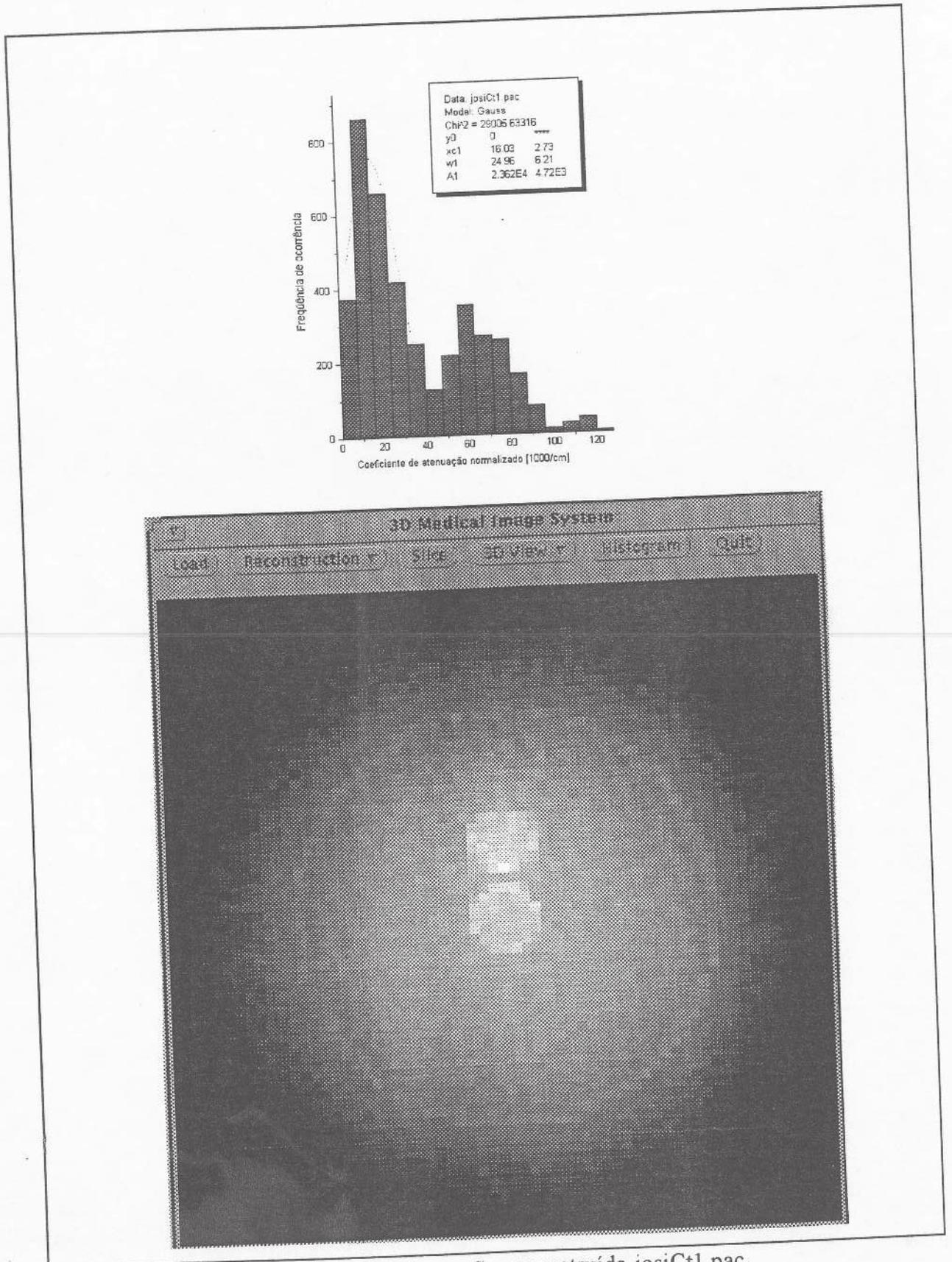


Figura 5.23 Imagem e histograma da secção reconstruída josiCt1.pac

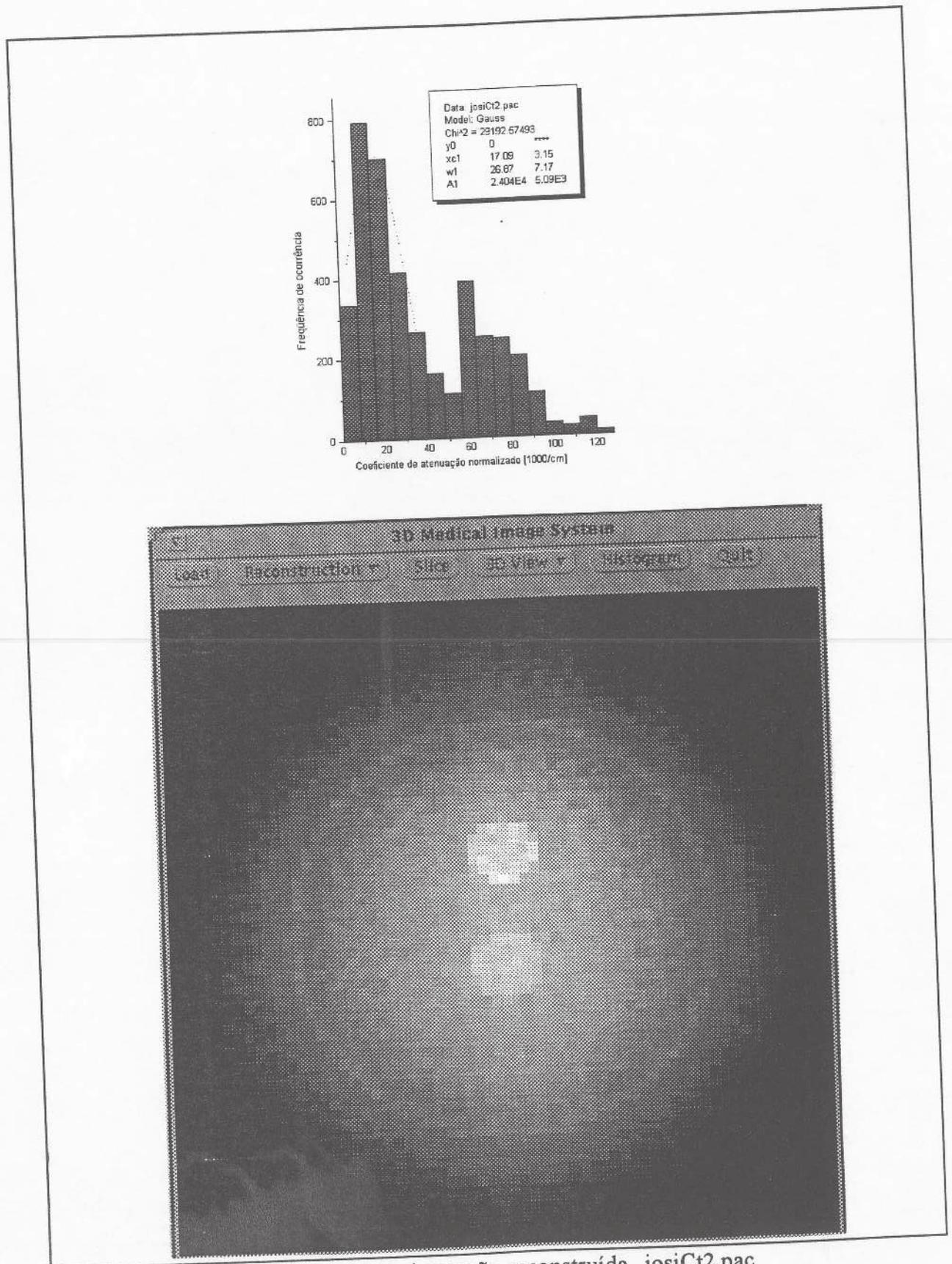


Figura 5.24 Imagem e histograma da seção reconstruída josiCt2.pac

Resultados

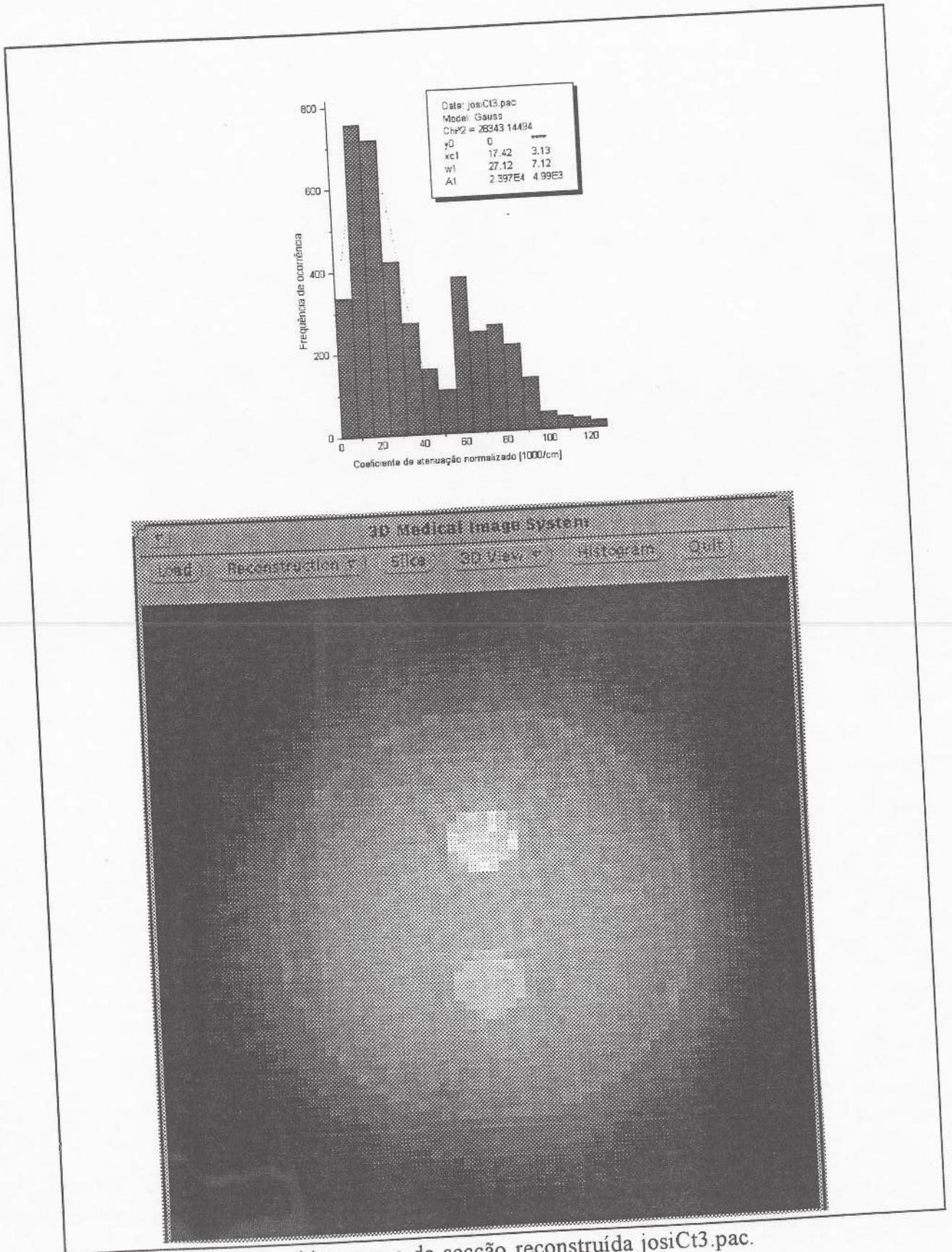


Figura 5.25 Imagem e histograma da secção reconstruída josiCt3.pac.

Resultados

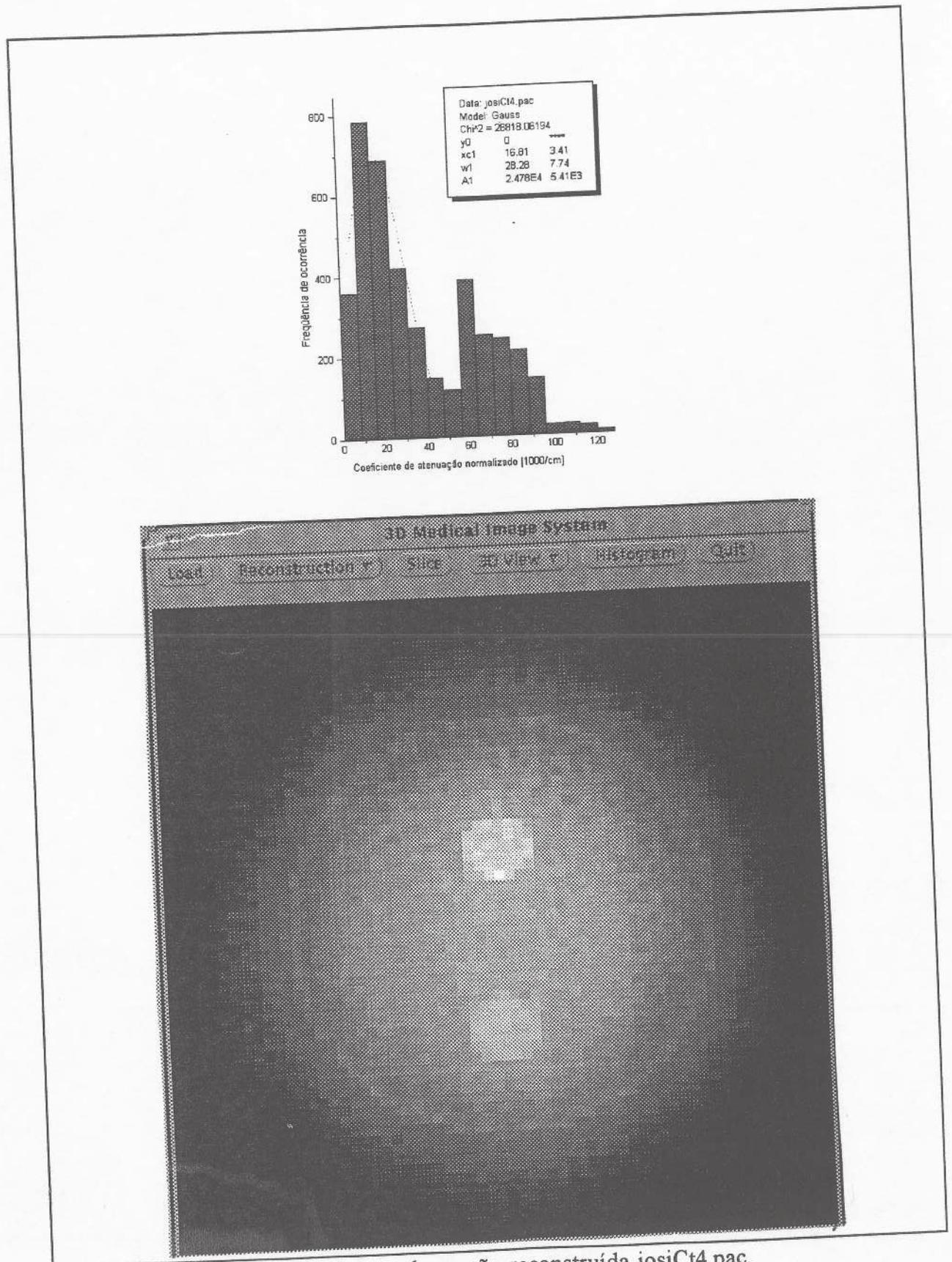


Figura 5.26 Imagem e histograma da secção reconstruída josiCt4.pac.

Resultados

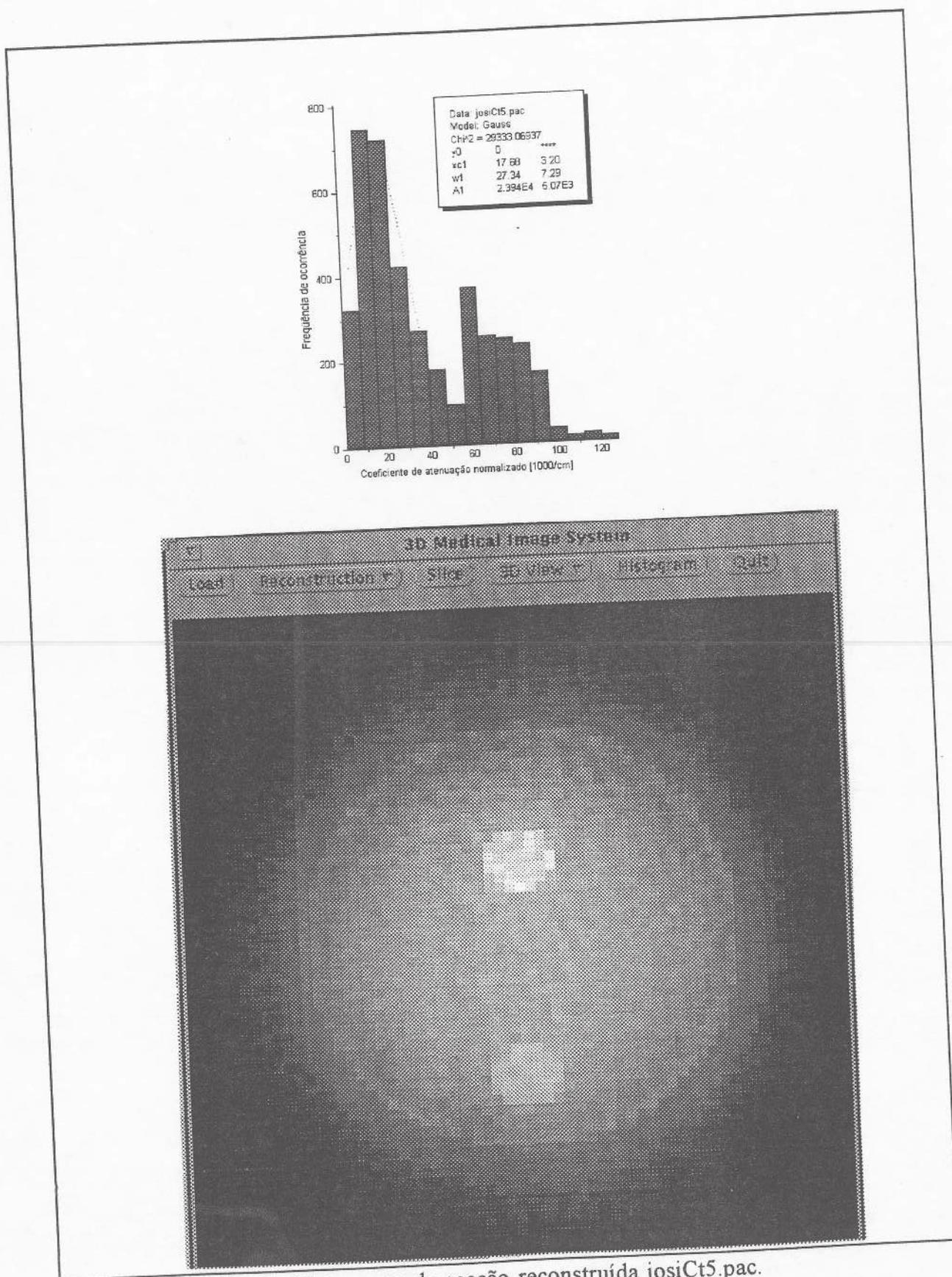


Figura 5.27 Imagem e histograma da seção reconstruída josiCt5.pac.

Resultados

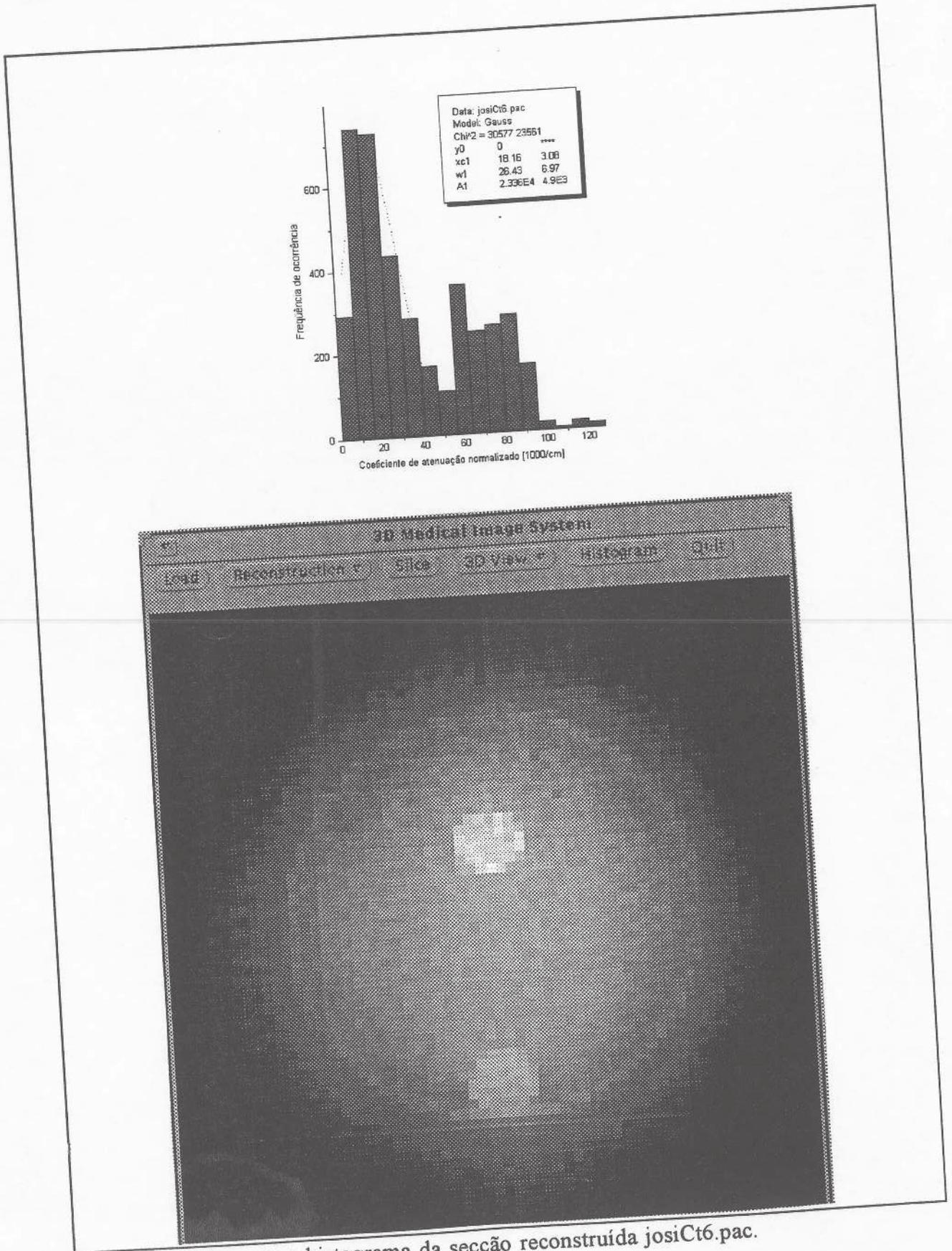


Figura 5.28 Imagem e histograma da secção reconstruída josiCt6.pac.

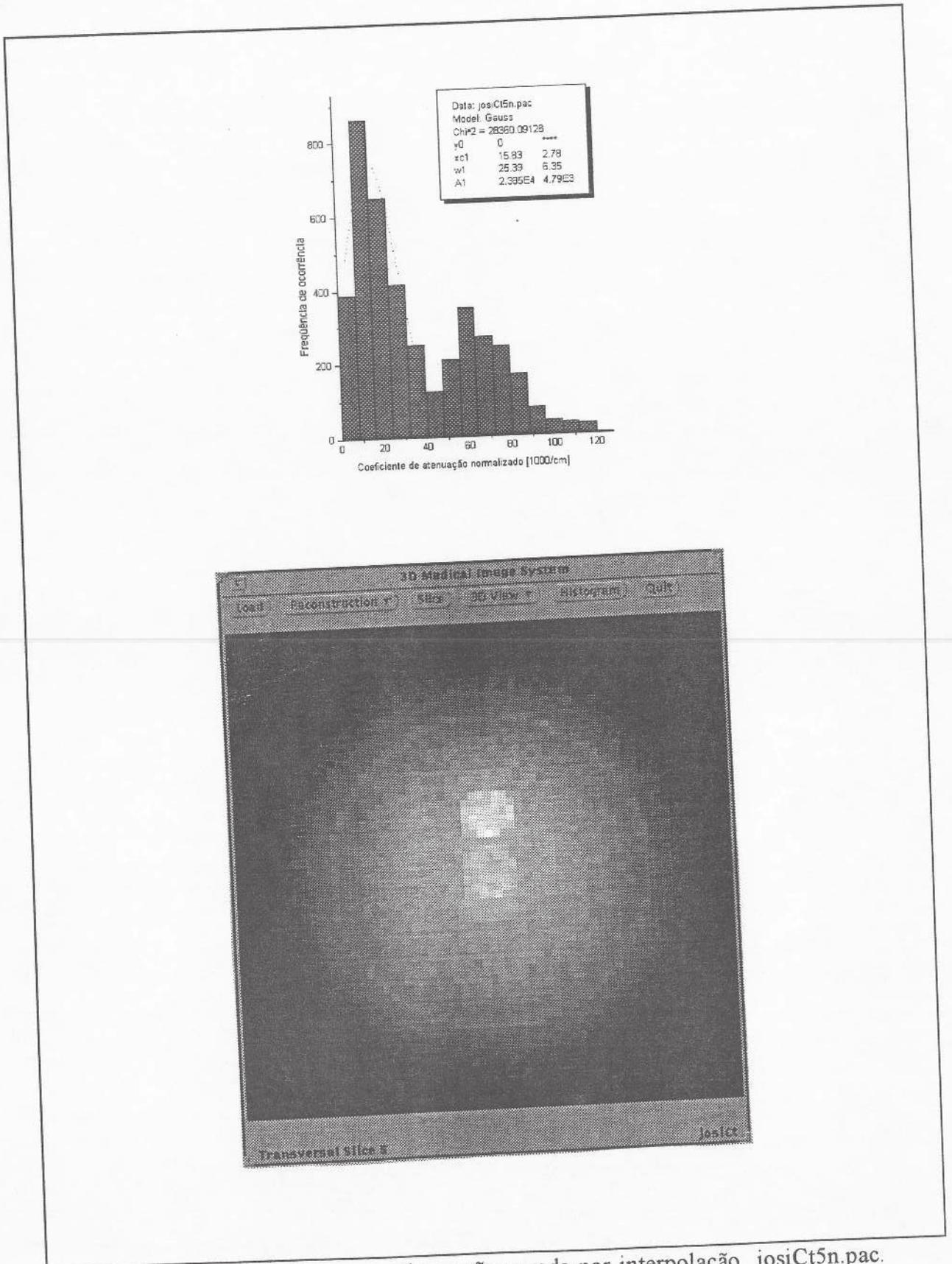


Figura 5.29 Imagem e histograma da secção gerada por interpolação josiCt5n.pac.

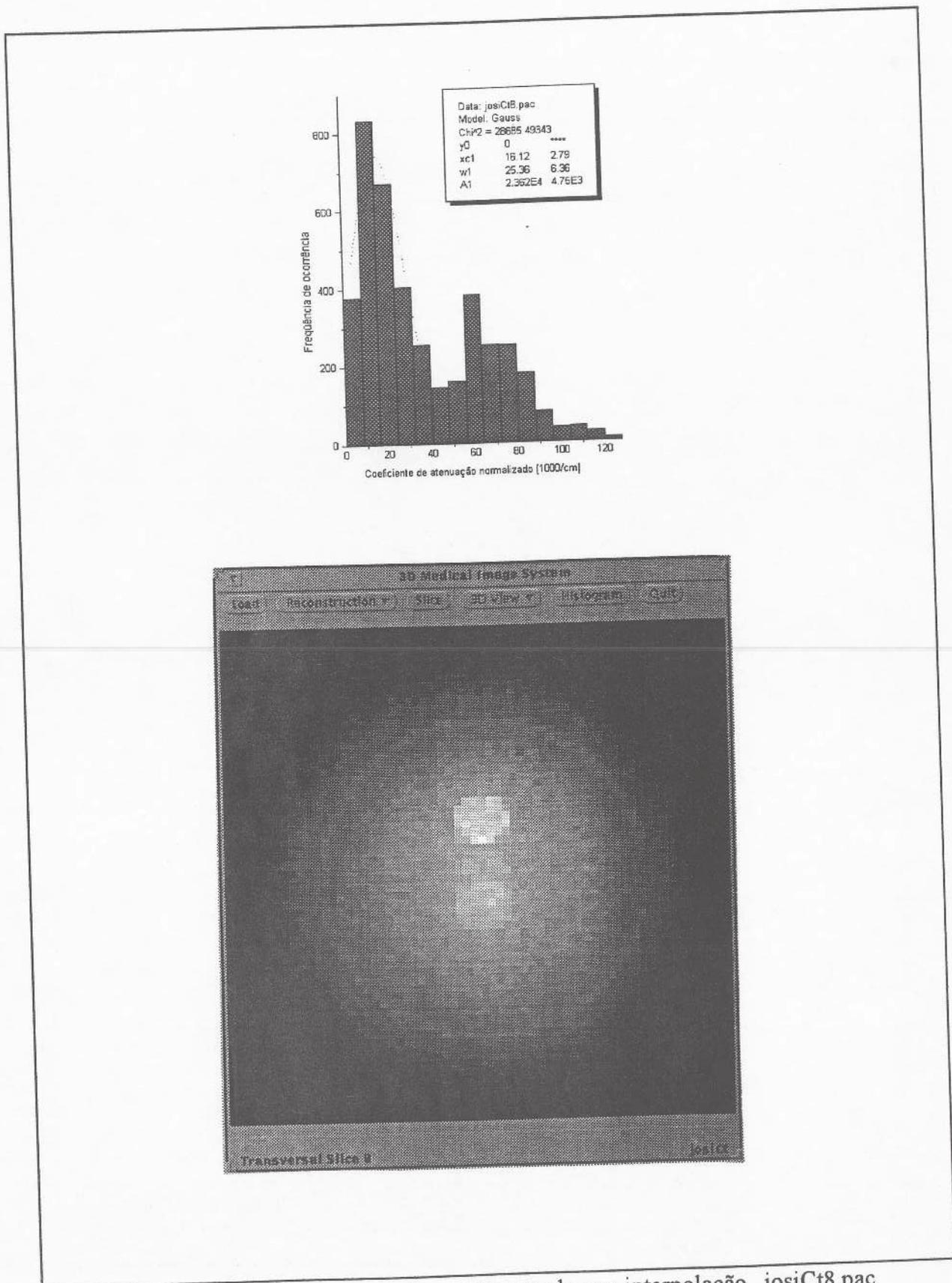


Figura 5.30 Imagem e histograma da secção gerada por interpolação josiCt8.pac.

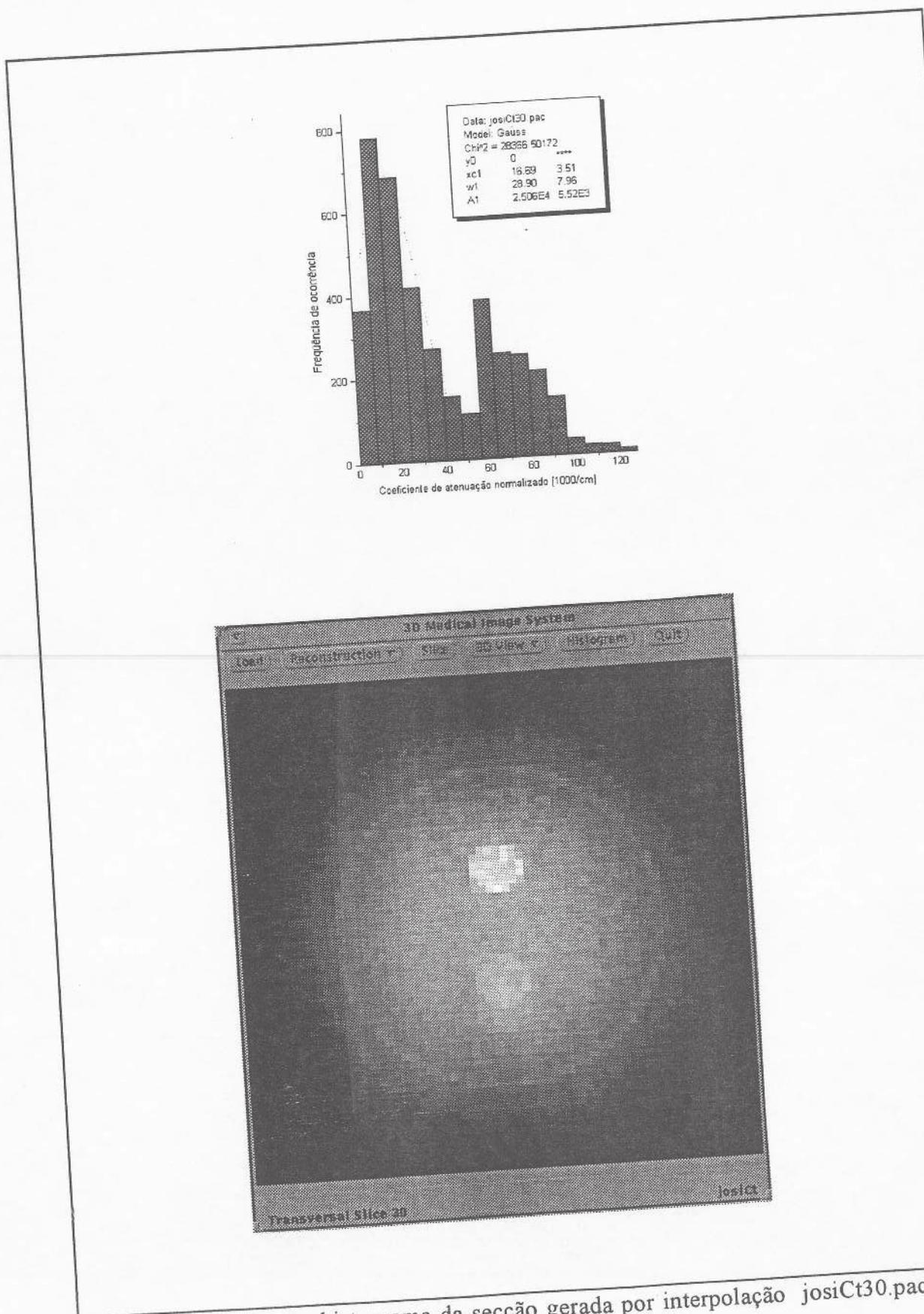


Figura 5.31 Imagem e histograma da secção gerada por interpolação josiCt30.pac.

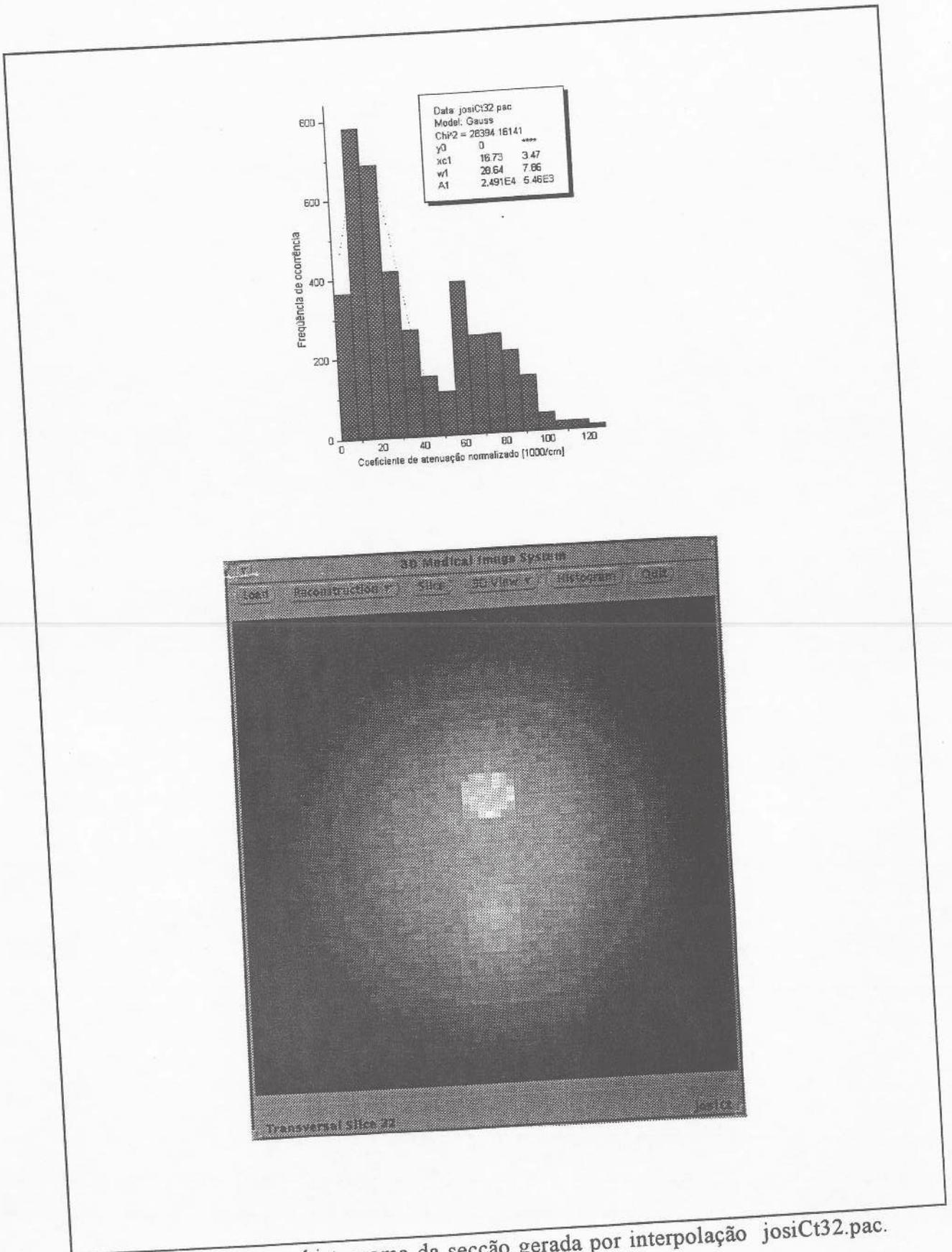


Figura 5.32 Imagem e histograma da secção gerada por interpolação josiCt32.pac.

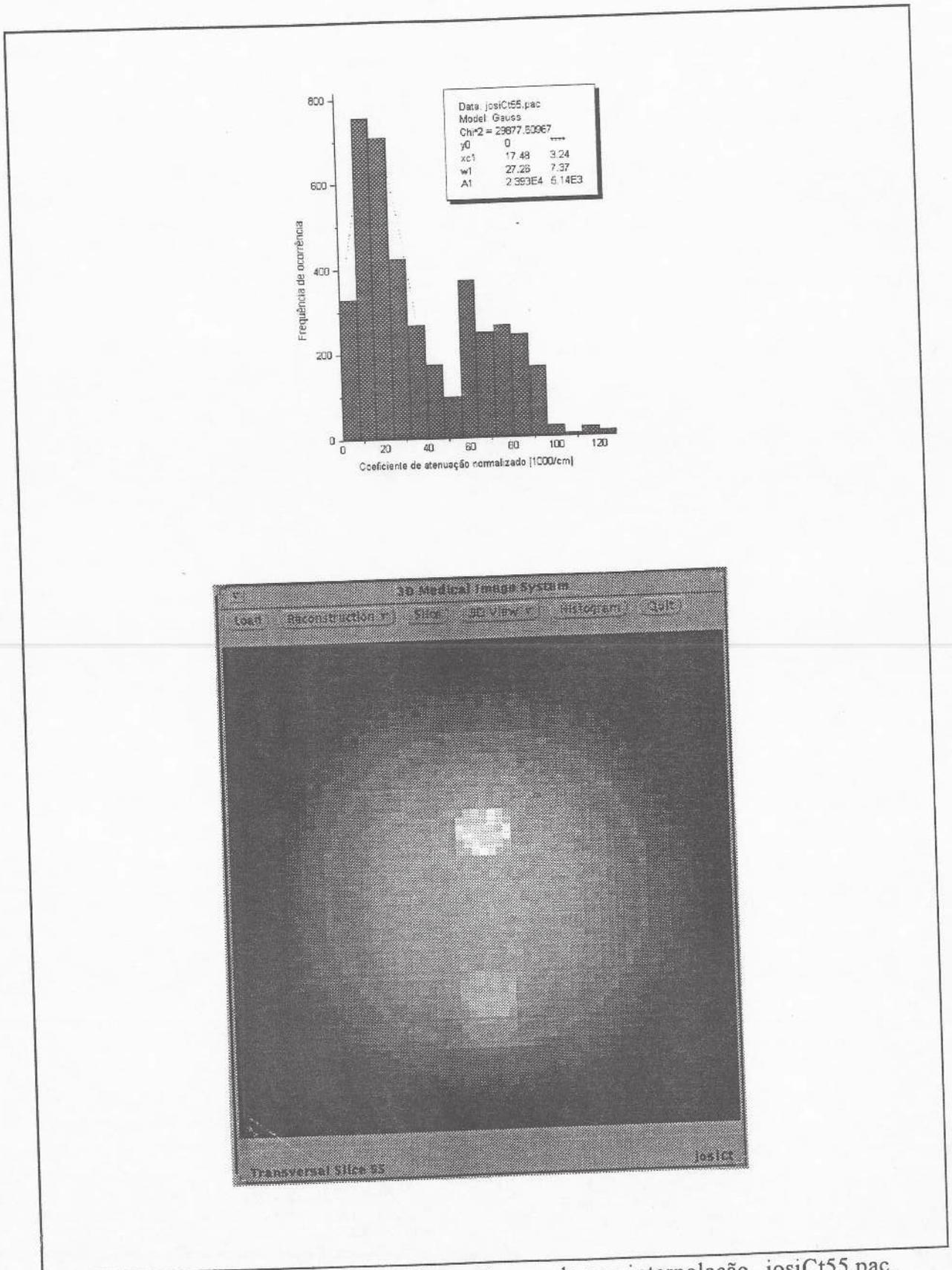


Figura 5.33 Imagem e histograma da secção gerada por interpolação josiCt55.pac.

Resultados

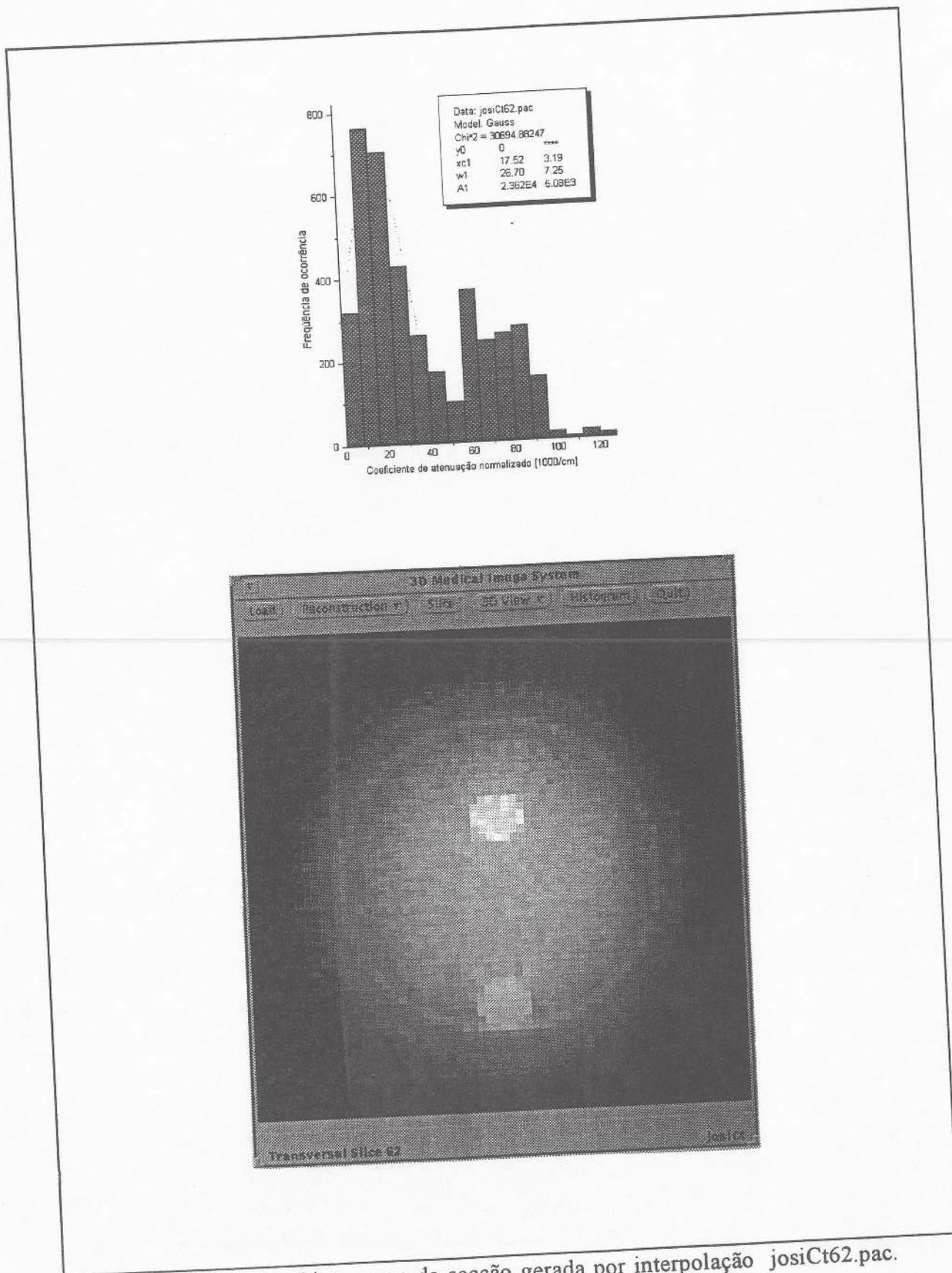


Figura 5.34 Imagem e histograma da seção gerada por interpolação josiCt62.pac.

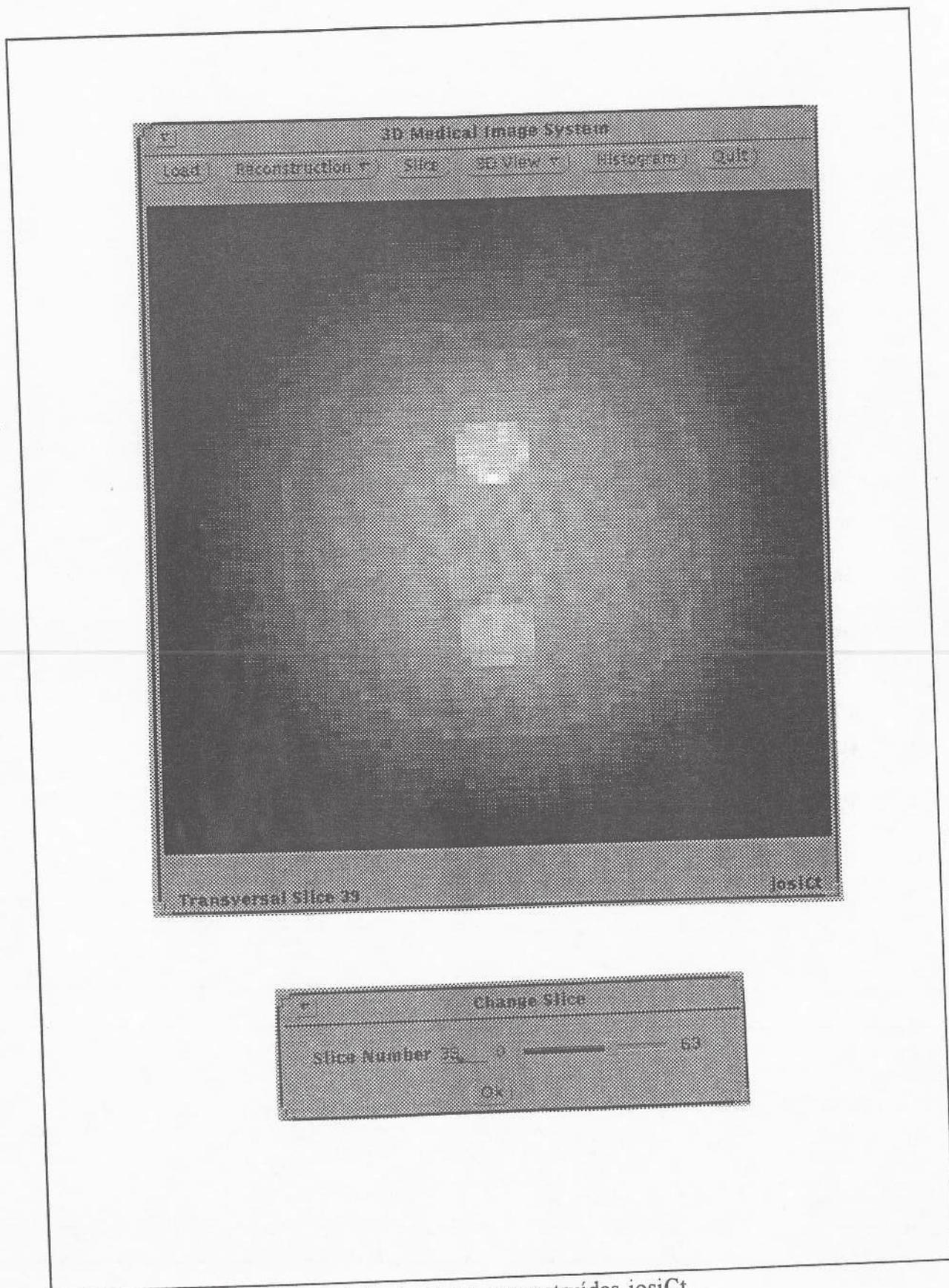


Figura 5.35 Corte transversal das imagens reconstruídas josiCt.

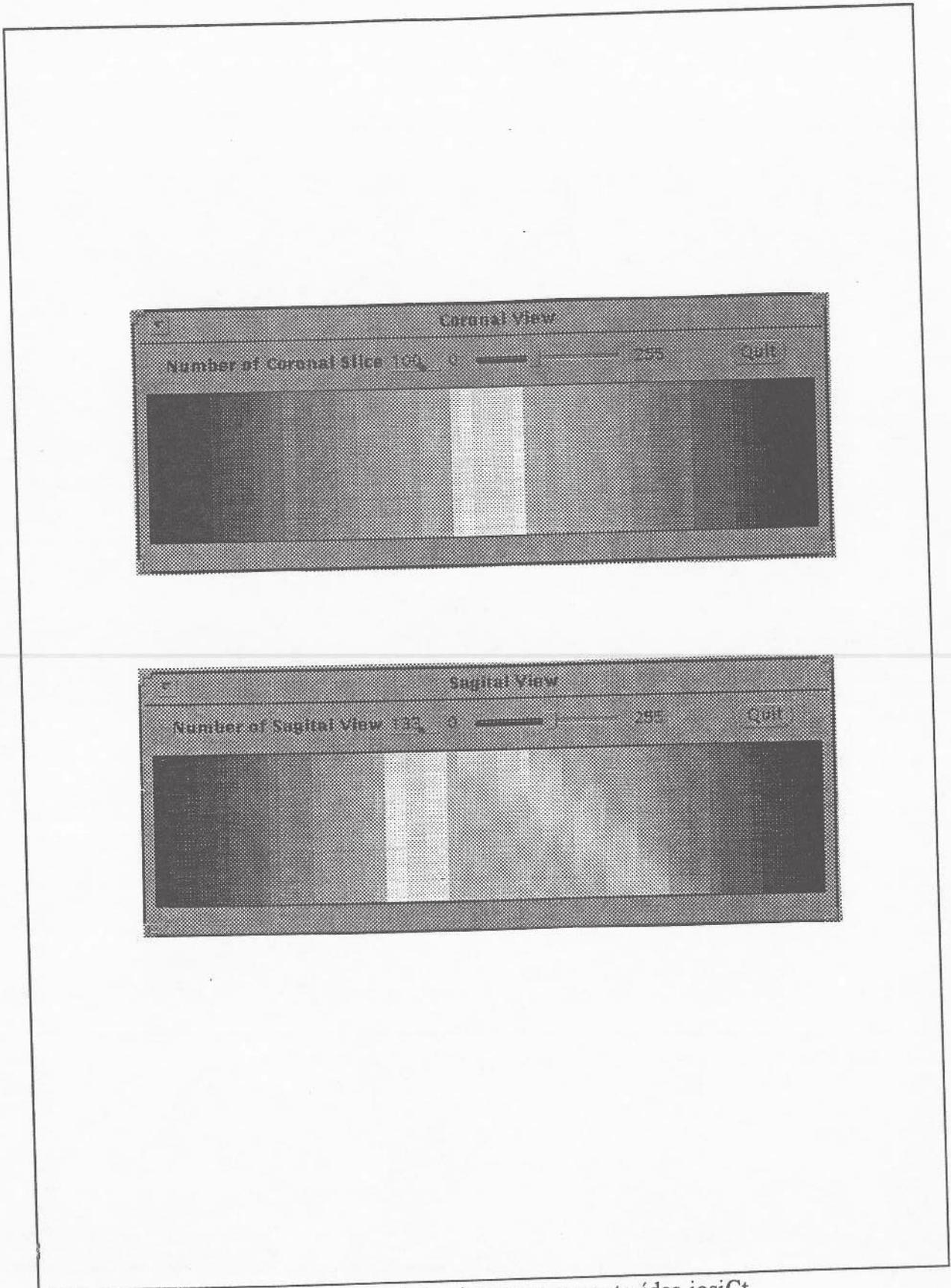


Figura 5.36 Cortes sagital e coronal das imagens reconstruídas josiCt.

5.4.4. Imagem da Cabeça obtida com o Tomógrafo de Ressonância Magnética

Neste experimento foram utilizadas 22 imagens obtidas pelo tomógrafo de ressonância magnética do IFSC. Elas representam cortes transversais de uma cabeça humana.

Foram geradas 42 imagens por interpolação, intercalando as 2 imagens geradas em cada dupla de imagens originais. As figuras 5.37, 5.38, 5.39, 5.40 apresentam respectivamente as imagens agt12. e agt13 que são duas das imagens originais, e agt34.pac e agt35.pac as imagens geradas por interpolação entre as imagens originais apresentadas.

A tabela 5.5 apresenta os parâmetros da curva de Gauss dos histogramas.

IMAGEM	Chi ²	Centro Gauss. (xc1)	Desvio Padrão (w1)	A1
agt12.pac	4.5756E6	55.41±6.79	29.73±13.6	1.518E5±5.47E4
agt34.pac	4.5839E6	58.14±7.84	30.63±15.7	1.504E5±5.73E4
agt35.pac	4.4711E6	52.35±9.62	37.16±19.3	1.707E5±6.07E4
agt13.pac	4.6445E6	64.13±5.25	24.53±10.6	1.273E5±4.78E4

Tabela 5.5 - Tabela de comparação de estatísticas entre duas imagens originais e duas interpoladas entre as originais (agt34.pac e agt35.pac).

Observando-se a tabela 5.5, pode-se verificar que todos os parâmetros sofreram uma certa variação. Isto se deve ao fato de que as imagens apresentadas não são homogêneas e nem simétricas. Mesmo assim a variação do Chi² foi pequena indicando que há uma certa homogeneidade na distribuição espacial de spins em algumas regiões de interpolação das imagens.

As imagens apresentaram uma qualidade muito boa.

Nas figuras 5.41 e 5.42 são apresentadas as imagens agt reconstruídas tridimensionalmente. As imagens são apresentadas nos três tipos de cortes.

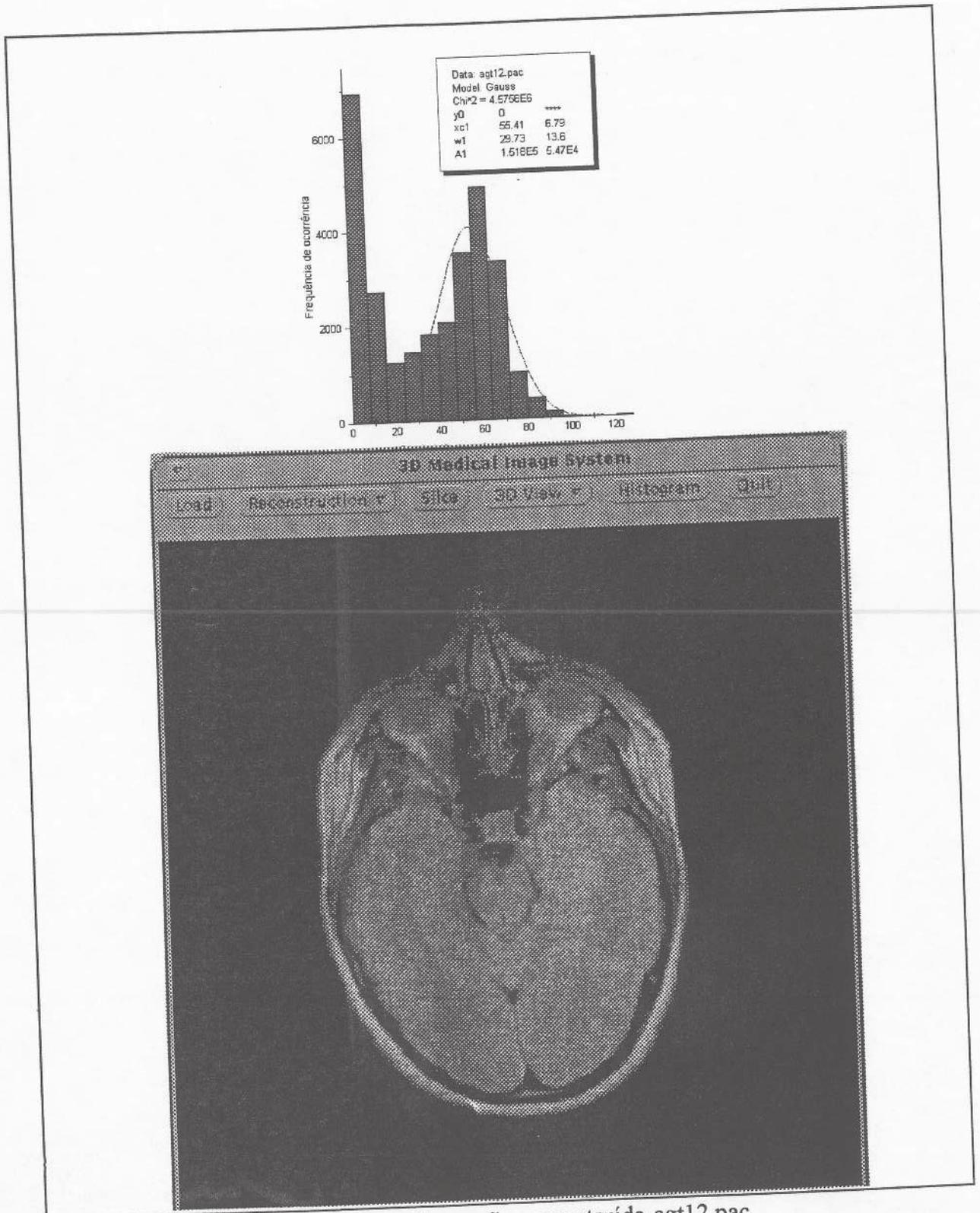


Figura 5.37 Imagem e histograma da secção reconstruída agt12.pac

Resultados

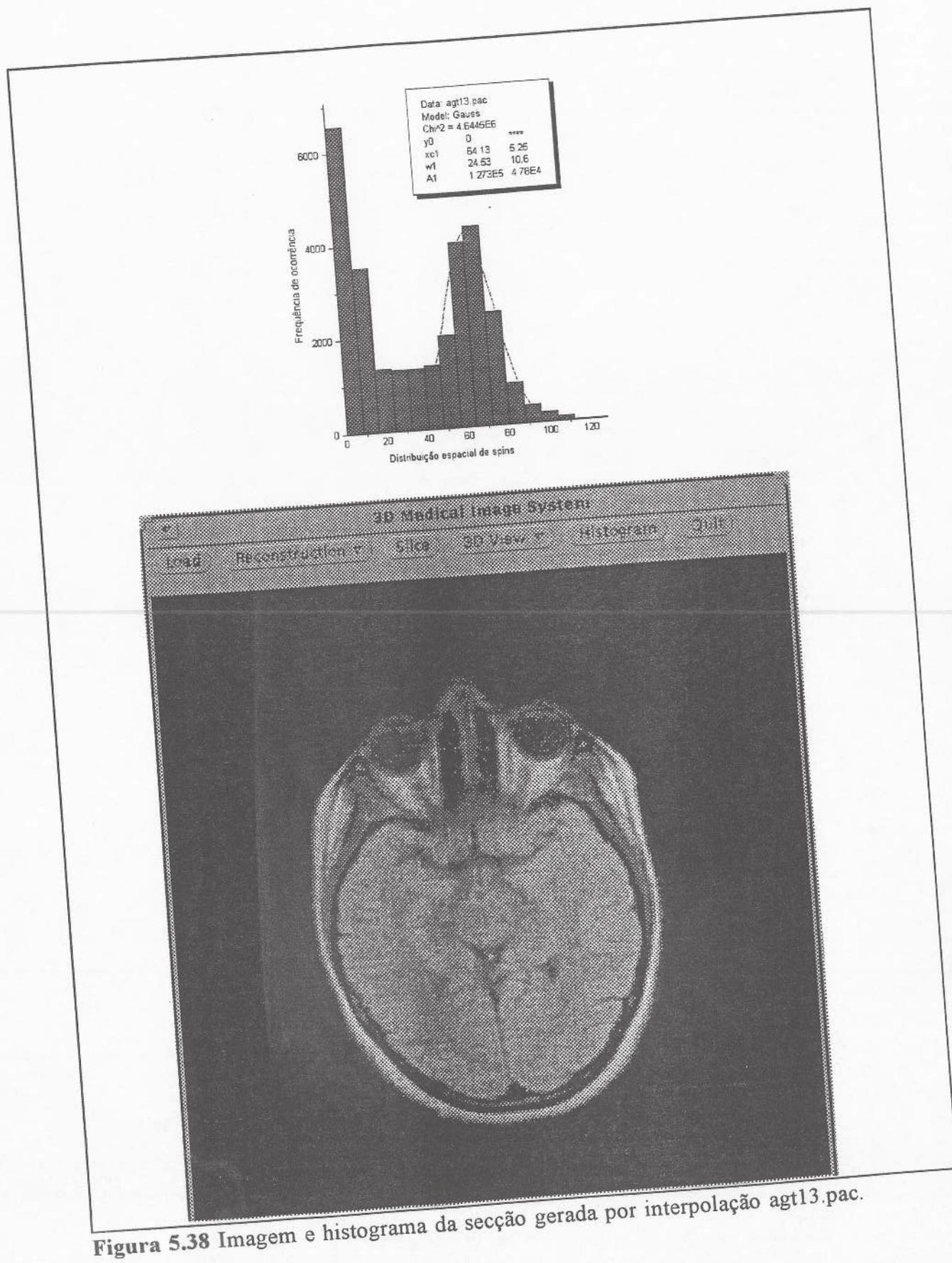


Figura 5.38 Imagem e histograma da secção gerada por interpolação agt13.pac.

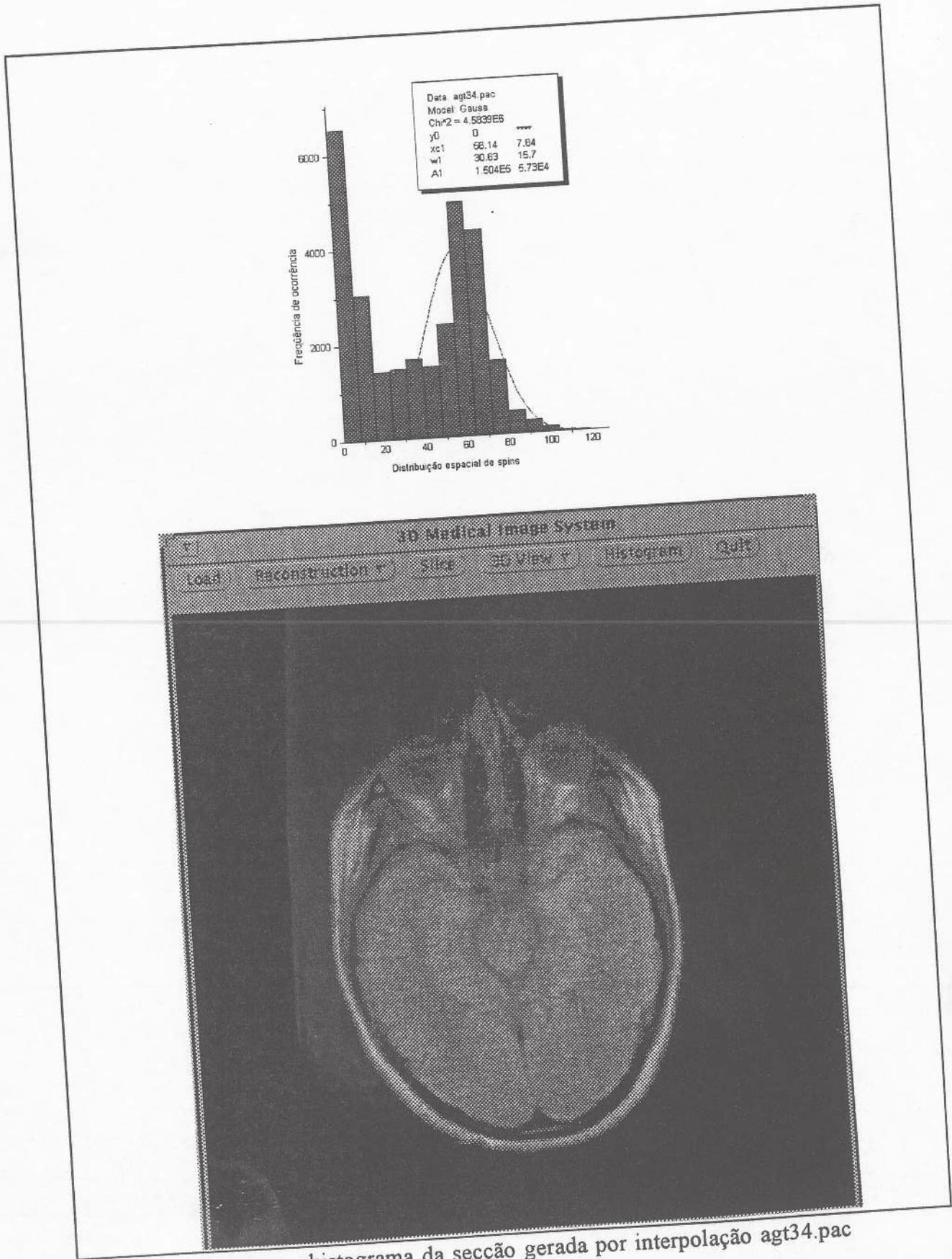


Figura 5.39 Imagem e histograma da secção gerada por interpolação agt34.pac

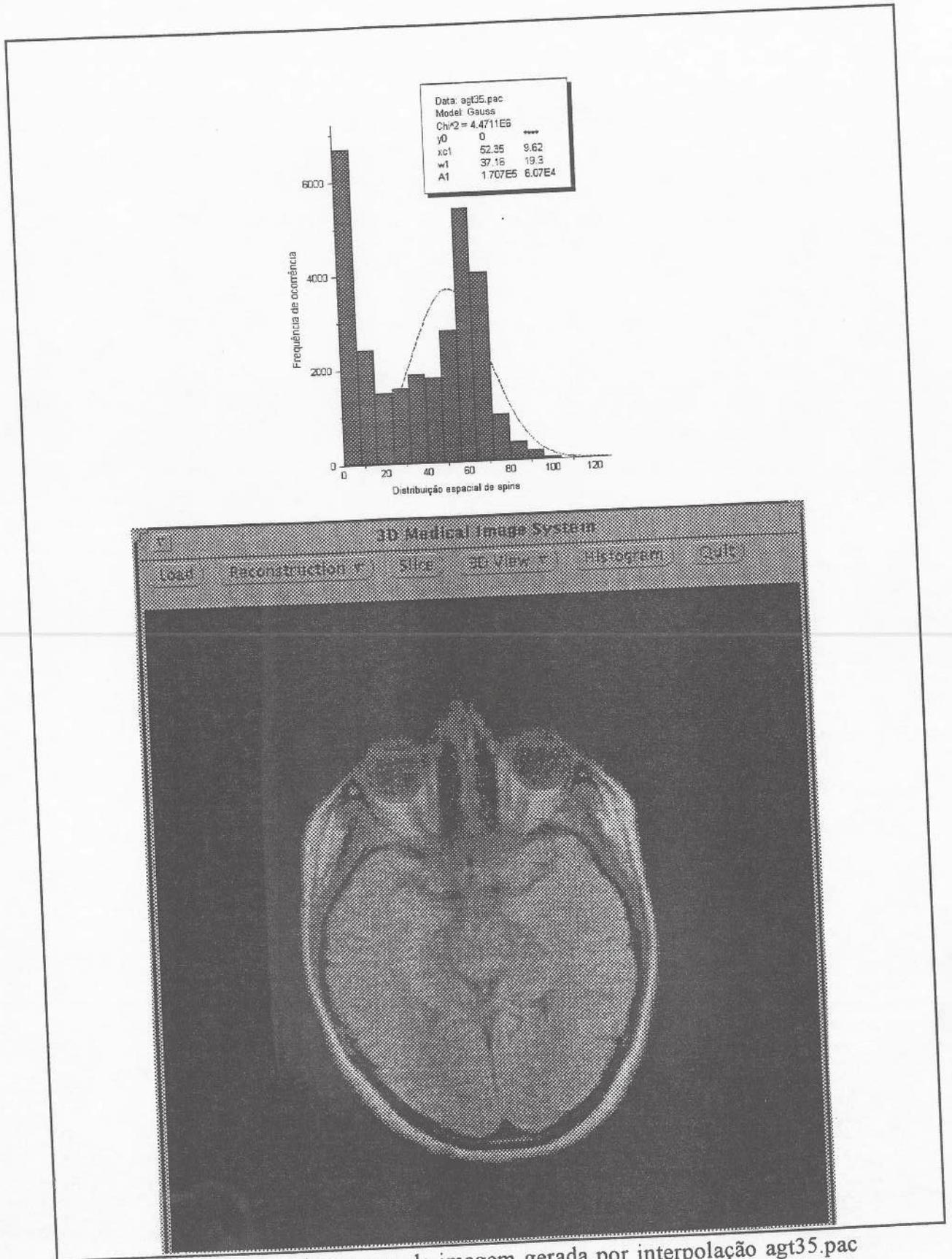


Figura 5.40 Imagem e histograma da imagem gerada por interpolação agt35.pac

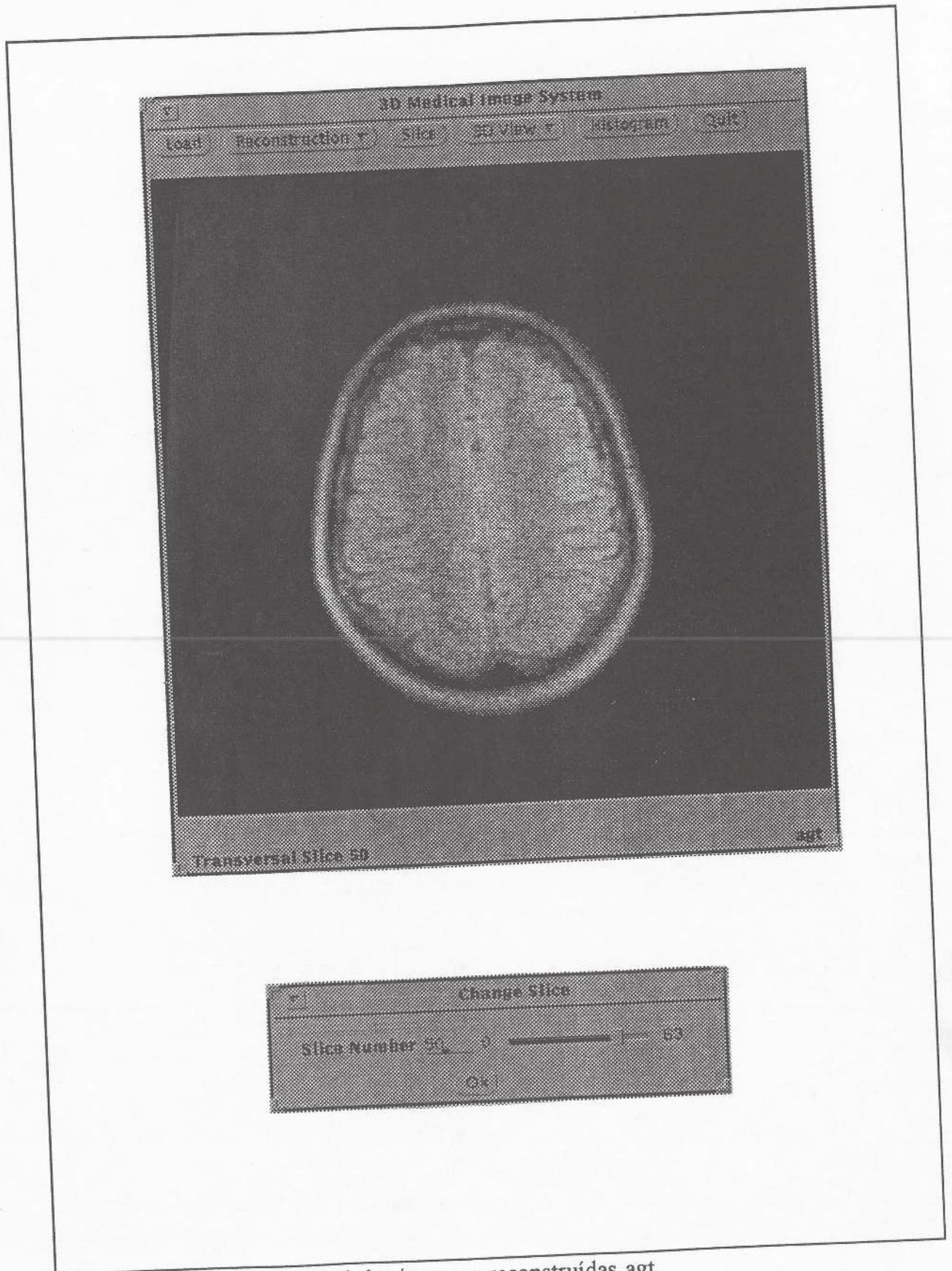


Figura 5.41 Corte transversal das imagens reconstruídas agt.

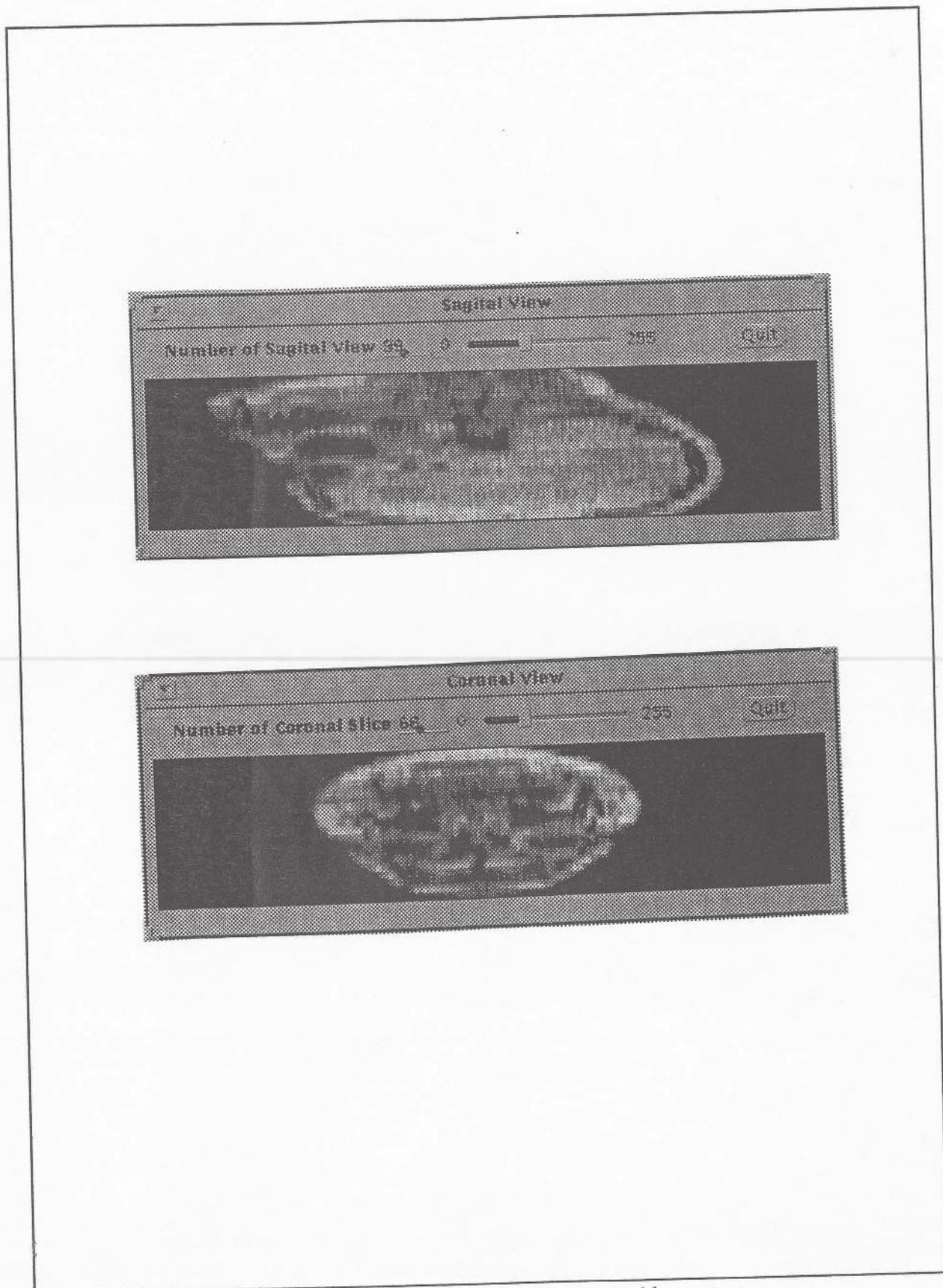


Figura 5.42 Cortes sagital e coronal das imagens reconstruídas agt.

5.5. Conclusões

Analisando-se os dados obtidos no estudo comparativo de reconstrução com FFT utilizando janela de Hamming e o algoritmo de Retroprojeção Filtrada para o primeiro *phantom*, verificou-se que para o parâmetro χ^2 o algoritmo da FFT utilizando janela de Hamming apresenta uma distribuição mais homogênea dos coeficientes em torno da curva de Gauss. Entretanto o algoritmo de retroprojeção produz menos artefatos de imagem. As imagens interpoladas se mantiveram fiéis às características das imagens originais. O mesmo ocorre com os resultados do segundo *phantom*.

Os resultados obtidos no terceiro *phantom* apresentaram alguns artefatos e as imagens interpoladas não ficaram muito nítidas. Nos cortes pode-se notar que há um efeito escada que distorce a imagem tridimensional. Isto se deve ao fato de que o número de secções originais é muito pequeno em comparação ao número de secções geradas por interpolação.

No último experimento, os resultados foram excelentes em termos de reconstrução bidimensional. Na interpolação houve um "achatamento" das secções devido ao fato de que o tamanho máximo de matriz tridimensional que se consegue trabalhar é de $256 \times 256 \times 64$.

De uma forma geral o algoritmo de reconstrução utilizando a FFT mostrou-se eficiente para os objetivos propostos.

CONCLUSÕES GERAIS E PROPOSTAS DE FUTURAS PESQUISAS

6

O sistema de reconstrução desenvolvido é de grande utilidade para a análise de imagens tomográficas tanto para tomógrafos de ressonância magnética quanto para raio-X. Na USP, onde se encontra o tomógrafo de ressonância magnética, o sistema será utilizado para auxiliar em diagnósticos médicos. Na EMBRAPA o sistema será utilizado para estudos na área de física de solos.

Este trabalho possibilitou um estudo da transformada rápida de Fourier, que é uma ferramenta muito poderosa em processamento de imagens abrindo perspectivas para trabalhos futuros, conforme sugerido mais adiante. A implementação de um algoritmo eficiente de FFT pode ser considerado como o núcleo do sistema, juntamente com os módulos de filtragem com retroprojeção e interpolação.

O sistema foi implementado, inicialmente em linguagem C utilizando um PC 386 com monitor superVGA. Esta versão tem a restrição de trabalhar somente com matrizes pequenas. Levando em consideração a condição para aplicação do algoritmo de Fourier de que a matriz de dados deve ser potência de 2, o tamanho máximo que se conseguiu trabalhar foi de 64x64 utilizando 16 tons de cinza.

Em uma segunda etapa, o sistema foi migrado para uma estação Sparc da Sun Microsystems e utilizando o toolkit XView para construção da interface. Utilizando esta plataforma foi possível trabalhar com matrizes de dados 256x256 com 128 tons de cinza, melhorando consideravelmente a qualidade da imagem.

O sistema se divide em dois módulos, um para reconstrução de imagens obtidas por ressonância magnética e o outro para reconstrução de imagens obtidas por raio-X. Ambos os módulos utilizam a mesma rotina que calcula a Transformada Rápida de Fourier.

Depois o sistema de reconstrução foi integrado ao sistema de visualização em desenvolvimento no ICMSC. O sistema de visualização apresenta algumas limitações pois não possibilita o tratamento de imagens tridimensionais "quadradas", ou seja com

mesma largura, altura e profundidade. O tamanho máximo que se consegue trabalhar é de 256x256x64. Quando o número de secções interpoladas é muito maior que o número de secções reconstruídas a imagem fica um pouco "achatada", pois se perde um pouco em resolução. O problema poderia ser solucionado utilizando-se uma estrutura de dados mais compacta para armazenamento de dados em vez de uma matriz tridimensional, por exemplo uma *octree*. Mesmo assim, ainda poderia haver problemas com o número de secções fornecidas pelos tomógrafos, uma vez que o processo é demorado e o custo é alto.

As imagens reconstruídas pelo algoritmo de retroprojeção filtrada utilizando a transformada rápida de Fourier ainda apresenta artefatos, embora tenha se utilizado a janela de Hamming como filtro. Tais artefatos poderão ser eliminados com o uso de outros filtros aplicados às projeções.

O trabalho poderá ter continuidade em pesquisas futuras, tais como:

- estudos de filtros para melhoramento de imagens;
- desenvolvimento de ferramentas para visualização tridimensional de imagens, com possibilidades de rotação translação e escalonamento e, inclusive, perspectiva.
- desenvolvimento de algoritmo para segmentação e reconhecimento de tipos de tecidos.

Atualmente, estão sendo pesquisadas técnicas de reconstrução baseadas em superfícies além de técnicas de apresentação de imagens tridimensionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Bic94] Bicegli, C.I.: "Espectômetro para a Transferência de Polarização Eletrônica do Núcleo (Efeito Overhauser)", *tese de doutorado*, IFSC-USP, 1994.
- [Boc21] Bocage, E.M.: Patent nº 536464, Paris, França, 1921. Apud Massiot, J.: "History of Tomography", *Medicina Mundi*, vol.19, nº3, pp. 106-105, 1974. Lavaljea, M.; Fishgol, H.: "Nuclear-Medicine and Electrology: History of Tomography", *Journal de Radiologie*, vol.56, nº 8/9, pp.547-549,1975.
- [Bra56] Bracewell,R.N.: "Strip Integration in Radioastronomy", *Australian Journal of Physics*, vol.9, pp. 198-127, 1956.
- [Bro75] Brooks, R.A.; Chiro, G.D.: "Theory of Image Reconstruction in Computed Tomography", *Radiology*, vol.117, pp.561-572, dezembro, 1975.
- [Bri88] Brigham, E.O.: "The Fast Fourier Transform", Prentice Hall, 1988.
- [Bro83] Brook, D.; Wynne, R.J.: "Signal Processing - Principles and Applications", pp.170, 239, 1983.
- [Cha90] Chang, L.W.; Chen, H.W.; Ho, J.R.: "A Nonlinear Interpolation Technique for Reconstruction of 3D Medical Images", *CVGIP: Graph.Mod.Imag.Proc.*, vol. 53, nº4, pp.382-391, 1991.
- [Che89] Chen, L.S.; Sontag, M.R.: "Representation, Display, and Manipulation of 3D Digital Scenes and Their Medical Applications", *Comp.Vision, Graph, and Image Proc.*, vol.48, pp. 190-216, 1989.
- [Cho82] Cho, Z.H.; Kim, H.S.; Song, H.B.; Cumming, J.: "Fourier Transform Nuclear Magnetic Resonance Tomographic Imaging", *Proc. of the IEEE*, vol.70, nº 10, outubro, 1982.
- [Cor64] Cormack, A.M.: "Representation of a function by its line integrals with some radiological applications - II", *Journal of Applied Physics*, vol. 35, pp.2908-2913, 1964.
- [Cor73] Cormack, A.M.: "Reconstruction of Densities from their Projections, Projections, with Applications in Radiological Physics", *Phys. Med. Biol.*, vol.18, nº 2, pp. 195-207, 1973.

- [Cru87] Cruvinel, P.E.: "Mini-Tomógrafo de Raio-X e Raio-Gama Computadorizado para Aplicações Multidisciplinares", Tese de doutorado, UNICAMP, Campinas-SP, 1987.
- [Cru89] Cruvinel, P.E.: "MTACCOM versão 2.0 - Uma ferramenta para controle e aquisição de dados de um minitomógrafo de Raio-X e Raio-Gama para aplicações multidisciplinares.", Reunião anual da SBPC, 41 Fortaleza, Ceará, 1989. *Ciência e Cultura* (41-7):76, 1989. Suplemento-Resumo ref. 2.17-A.B.1.
- [Cru90] Cruvinel, P.E.; Cesareo, R.; Crestana, S.; Mascarenhas, S.: "X- and γ -Rays Computerized Minitomograph Scanner for Soil Science", *IEEE Trans. Instr. Meas.*, vol. 39, nº 5, outubro, 1990.
- [Daw87] Dawson, B.M.: "Introduction to Image Processing Algorithms", *Byte*, pp. 169-186, março, 1987.
- [Dre90] Drebin, R. A.: "Volumetric Rendering of Computed Tomography Data: Principles and Techniques", *IEEE Comp. Graph. & Applic.*, março, 1990.
- [Far88] Farin, G.: "Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design", Academic Press, 1988.
- [Fol90] Foley, J.C.; Dam, S.K.; Van Dam, S.K.; Hughes, J.F.: "Principles of Interactive Computer Graphics", Addison-Wesley, segunda edição, 1990.
- [Gaa72] Gaarder, N.T.; Herman, G.T.: "Algorithms for Reproducing Objects from their X-Rays", *Computer Graphics and Image Processing*, nº 1, pp.97-106, 1972.
- [Gil94] Ribeiro, G.C.: "Desenvolvimento de um algoritmo para a reconstrução tridimensional de imagens de um minitomógrafo baseado no Método de Reconstrução Algébrica Modificado e interpolação Spline", dissertação de mestrado, UFScar, 1994
- [Gor69] Gordon, W.J.: "Spline-blended Surface Intepolation through Curve Networks", *J. Math. Mech.* vol. 18, nº 10, 1969.
- [Gos92] Goshtasby, A.; Turner, D.A.; Ackerman, L.V.: "Matching of Tomography Slices for Interpolation", *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol.11, nº 4, dezembro, 1992.
- [Gou71] Gouraud, H.: "Computer Display of Curved Surfaces", Dept. de Ciên. Comput., Universidade de Utah, UTEC-CSC-71-113, junho, 1971.

- [Goy94] Goya, R.; Traina, A.J.M.: "Reconstrução Tridimensional de Imagens Médicas", Anais do 2º Simpósio de Iniciação Científica do ICMSC-USP, São Carlos, 1994.
- [Hel80] Helgason, S.: "The Radon Transform", Progress in Mathematics, 1980.
- [Hel81] Vanin, V.R.; Helene, O.A.M.: "Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental", Edit.Edgard Blücher Ltda., 1981.
- [Hel94] Heller, D.: "XView Programming Manual", O'Reilly & Associates, Inc., vol.7, 1994.
- [Her73] Herman, G.T.; Rowland, S.: "Three Methods for Reconstructing Objects from X-rays: A Comparative Study", Comput. Graphics Image Process., vol. 2, pp. 151-178, 1973.
- [Hin77] Hinshaw, W.S.; Bottomley, P. A.; Holland, G. N.: "Radiographic Thin-Section Image of the Human Wrist by NMR", Nature, vol. 270, n° 5637, dezembro, 1977.
- [Hou72] Hounsfield, G.N.: "A Method of and Apparatus for Examination of a Body by Radiation such as X- or γ -Radiation", 1972, British patent n° 1283915, London. Issued to EMI Ltd. Application filed Aug., 1968.
- [Hua87] Huang, H.K.: "Elements of Digital Radiology - A Professional Handbook and Guide", Prentice Hall, 1987.
- [Hun88] Hunt, P.K.; Engler, P.; Bajsarowicz, C.: "Computed Tomography as a Core Analysis Tool: Applications, Instruments Evaluation, and Image Improvement Techniques", J. Petroleum Tech., pp. 1203-1210, setembro, 1988.
- [Kak86] Kak, A.C.; Roberts, B.A.: "Reconstruction from Projections: Applications in Computerized Tomography", Handbook of Pattern Recognition and Image Processing, cap.27, 1986.
- [Lew83] Lewitt, R.m.: "Reconstruction Algorithms: Transforms Methods", Proceedings of the IEEE, vol. 71, n° 3, pp. 390-408, março, 1983.
- [Lin89] Lin, W.C.; Chen, S.Y.; Chen, C.T.: "A New Surface Interpolation Technique for Reconstructing 3D Objects from Serial Cross-Sections", Comp.Vision, Graph, and Image Proc., n° 48, pp. 124-143, 1989.
- [Lui82] Luiten, A.L.: "Introdução à Ressonância Nuclear Magnética", Ciência & Técnica, n° 3, pp. 82-55, 1982.

- [Man82] Mansfield, P.; Morris, P. G.: "NMR Imaging in Biomedicine", Academic Press, 1982.
- [Män89] Mäntylä, M.: "An Introduction to Solid Modeling", Computer Science Press, 1989.
- [Mic93] Rhodes, M.L.: "Computer Graphics in Medicine", IEEE Comp. Graph. Aplic., pp.49, novembro, 1993.
- [Ney90] Ney, D.R.; Fishman, E.K.; Magid, D.; Drebin, R.A.: "Volumetric Rendering of Computed Tomography Data: Principles and Techniques", IEEE Computer Graphics & Applications, pp. 24-32, março, 1990.
- [Pan85] Panepucci, H.; Donoso, J.P.; Tannús, A.; Beckman, N.; Bonagamba, T.: "Tomografia por Ressonância Magnética Nuclear - Novas Imagens do Corpo", Ciência Hoje, vol. 4, nº 20, pp. 46-56, set/out, 1985.
- [Ram71] Ramachandran, G.N.; Lakshminarayanan, A.V.: "Three-dimensional Reconstruction from Radiographs and Electron Micrographs: Applications of Convolutions instead of Fourier Transforms", Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 68, nº 9, pp. 2236, 2240, 1971.
- [Ros68] De Rosier, D.J.; Klug, A.: "Reconstruction of Three-dimensional Structures from Electron Micrographs", Nature, vol.217, pp.130-134, 1968.
- [San84] Santaló, L.A.: "As Secções Indiscretas: Geometria Integral, Estereologia e Tomografia Computadorizada", Ciência Hoje, vol.2, nº 15, pp.28-29, nov/dez, 1984.
- [Sei83] Seitz, P.; Riegsegger, P.: "Fast contour detection algorithm for high precision quantitative CT", IEEE Trans. Med. Imaging, MI-2, nº 3, pp. 136-141, 1983.
- [She74] Shepp, L.A.; Logan, B.F.: "The Fourier Reconstruction of a Head Section", IEEE Trans. Nucl. Sci., vol. NS-21, pp. 21-43, junho 1974.
- [Smi93] Smith, W.E.; Riek, J.K.; Tekalp, A. M.: "Reconstruction of a Three-Dimensional Volume from a Motion-Corrupted Two-Dimensional Data Set in Magnetic Resonance Imaging", Lecture Notes in Computer Science, vol. 687, pp. 293-306, 1993.
- [Smi73] Smith, P.R.; Peters, T.M.; Bates, R.H.T.: "Image Reconstruction from Finite Numbers of Projections", J.Phys.A: Math., Nucl., Gen., vol. 6, pp. 361-382, 1973.

- [Sri81] Shihari, S.N.: "Representation of Three-Dimensional Digital Images", *Computing Surveys*, vol. 13, n° 4, pp. 399-424, dezembro, 1981.
- [Sty91] Stytz, M.R.; Frieder, G.; Frieder, O.: "Three-Dimensional Medical Imaging: Algorithms and Computer Systems", *ACM Computing Surveys*, vol. 23, n° 4, dezembro, 1991.
- [Swe72] Sweeney, D.W.; Vest, C.M.: "Reconstruction of Three-Dimensional Refractive Index Fields from Multidirectional Interferometry", *Appl. Opt.*, vol 11, n°1, pp. 205-207, 1972.
- [Tel86] Telo, R.; Mann, R.W.; Rowell, D.: "Scheme for 3D Reconstruction of Surfaces Form CT and MRI Images of the Human Body", *IEEE Int. Conference. on Syst., Man and Cyb.*, pp. 216-219, 1986.
- [Tra91] Traina, A.J.M: "Estudo e Implementação de Software Dedicado para um Sistema de Visualização de Imagens", Tese de doutorado, USP-IFSC, 1991.
- [Udu91] Udupa, J.K.; Herman, G.T.: "3D Imaging in Medicine", CRC Press, 1991.

APÊNDICES

Apêndice 1 - Conceitos gerais sobre Ressonância Magnética e Raio-X

Antes de definir o conceito de CT, é importante ressaltar que a MRT utiliza o mesmo conceito do Raio-X quanto aos algoritmos e métodos para a reconstrução da imagem, ou seja, produz seqüências de fatias que representam uma aproximação discreta de funções relacionadas, como por exemplo, à anatomia e fisiologia do corpo humano. Nas referências encontradas, a CT geralmente é relacionada ao raio-X, devido a CT ter sido uma evolução da tomografia por raio-X [Hun88] [Udu91] [Mic93] [Bro75].

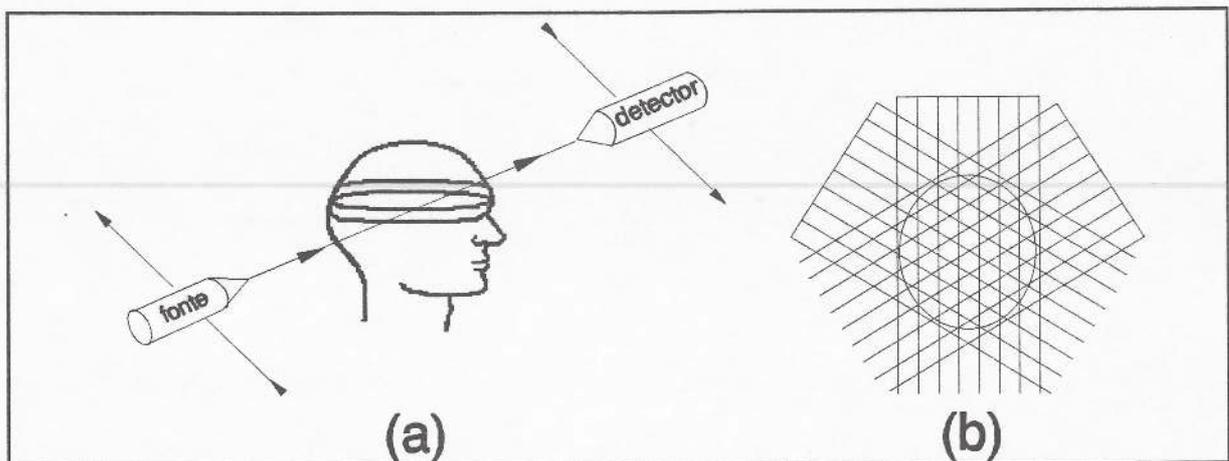


Figura 1 Aquisição de dados de uma seção selecionada (a) por emissão de Raio-X. O padrão de exploração é o de translações lineares a incrementos sucessivos (b).

A CT é uma tecnologia que permite produzir uma imagem da estrutura interna de uma seção selecionada. Esta seção é, então, representada por uma matriz de coeficientes de atenuação de raio-X, no caso de Tomografia por Raio-X como ilustra a figura 1(a) [Bro75], ou por uma matriz de densidades locais de núcleos atômicos, no caso de MRT [Pan85]. Assim pode-se obter a projeção 2D de uma determinada seção plana de um objeto 3D.

Em tomografia por raio-X, um feixe paralelo de raio-X penetra em uma pequena área da seção selecionada. Alguns *photons* de raio-X são absorvidos, enquanto outros continuam a atravessar a seção e são detectados pelo detector. A absorção depende

da soma dos coeficientes de atenuação dos tecidos que são atravessados pelo raio. Estes coeficientes de atenuação estão relacionados com a densidade dos tecidos da secção.

Segundo Gordon e Herman [Gor74], define-se raio como um conjunto de fluxos de *photons* que vão de uma fonte para uma região pequena de uma determinada chapa fotográfica (ou um detector), conforme mostra a figura 2. Raio-soma é a estimativa da densidade total do objeto contido em um raio. É importante observar que mesmo a parte compreendida por um raio pode possuir diferentes densidades e que o raio-soma nada mais é que a soma dessas densidades. Um conjunto completo de raios-soma a um ângulo dado é uma projeção 1D do objeto. E a partir de um conjunto de projeções 1D obtidas em diversos ângulos de rotação, como ilustra a figura 1(b), pode-se construir o plano da secção desejada, ou seja, sua projeção 2D.

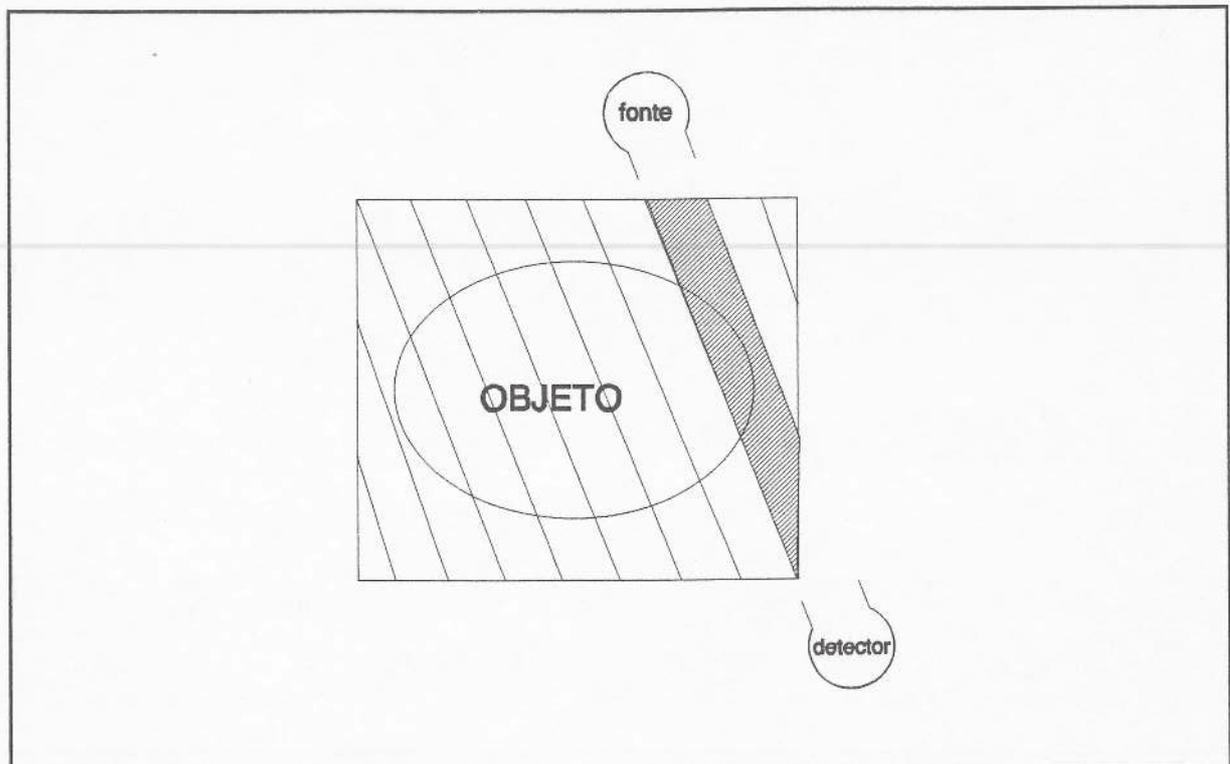


Figura 2: A figura apresenta todos os raios de uma projeção a um determinado ângulo. O raio-soma que está sendo coletado está achuriado.

Já o processo de MRT consiste em perturbar o equilíbrio magnético de um plano selecionado do objeto em estudo, utilizando-se uma série de pulsos de radiofrequência (RF), e em observar quanto tempo leva para que a amostra volte a seu estado normal [Tra91] [Lui82], conforme ilustra a figura 3. Na figura 3(a) a orientação dos núcleos é

aleatória, em (b) os núcleos estão em equilíbrio e alinhados com o campo e em (c) os eixos dos núcleos assumem um ângulo cada vez maior em relação ao campo magnético.

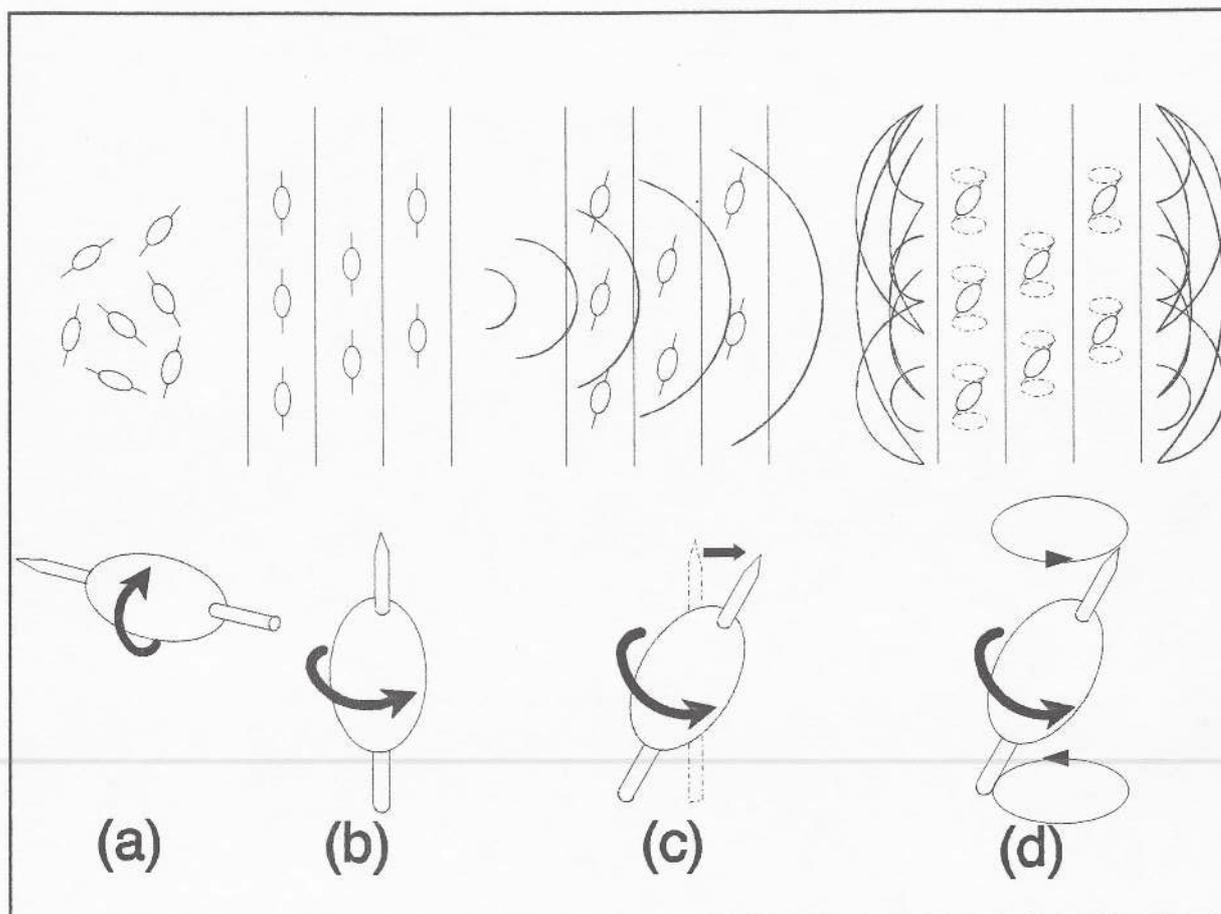


Figura 3 (a) estado normal; (b) campo magnético forte; (c) excitação; (d) estado excitado.

Em resposta ao pulso de RF, os núcleos da amostra entram em precessão em torno da direção do campo e emitem sinais de ressonância magnética, conforme ilustra a figura 3(d). Geralmente estes sinais são emitidos pelos núcleos dos átomos de hidrogênio das moléculas de água do interior da célula ou dos fluidos corpóreos naturais. Assim, uma imagem, neste caso, representaria a distribuição de água do objeto em estudo.

As componentes de frequência destes sinais podem ser analisadas através de técnicas matemáticas como a Transformada de Fourier (FT). A FT define um espectro de frequências que corresponde a uma representação 1D direta da distribuição espacial da densidade de prótons existente nas amostras. Como não é possível criar um campo magnético que tome valores diferentes em cada ponto de um plano ou volume, então é necessário aplicar sucessivamente gradientes de campo ao longo de diferentes direções, para que se obtenha uma codificação completa da distribuição de prótons na área que se deseja

analisar.

A MRT difere do raio-X por apresentar dados no domínio da frequência, em vez de dados no domínio do espaço como acontece com a tomografia por raio-X.

A imagem final consistirá de uma matriz de elementos de imagem (*pixels*), os quais são resultado da rotina de reconstrução matemática. Cada valor na matriz, ou seja, cada *pixel* corresponderá a um nível de cinza.

A resolução espacial da imagem dependerá das dimensões do *pixel*. Aumentando-se a resolução algorítmica e diminuindo o tamanho do *pixel*, a resolução ficará cada vez mais precisa até chegar a um ponto. Isto é, o tamanho do *pixel* pode ser diminuído para um valor tal que nada será obtido por uma diminuição adicional.

O resultado fornecido por um algoritmo de reconstrução depende, também, do objeto, dos mecanismos de aquisição de dados e do método de reconstrução de imagem. É importante observar que cada plano poderá ser reconstruído independentemente dos outros. E estes planos podem ser "empilhados", dentro de um certo critério, para recuperar a estrutura 3D. Pode-se, também, fazer reconstruções de projeções a ângulos espaciais, o que é muito comum em tomografia. Porém considerando custos relativos ao tempo e armazenamento de reconstruções feitas em computadores, fazer reconstruções 3D a partir de uma série de projeções 2D é uma opção mais atraente.

Em radiologia geralmente é possível obter um grande número de projeções, mas em outros campos, como microscopia eletrônica por exemplo, o número de projeções pode ser, obrigatoriamente, restrito. Mesmo na radiologia o número de projeções pode ter que ser pequeno para reduzir a dose de raio-X sobre o paciente ou pode ocorrer uma degradação das imagens devido, também, ao fato de o objeto de interesse apresentar movimento devido, como por exemplo, à sístole e diástole do coração.

A dificuldade matemática e computacional do problema de reconstrução é aumentada pelo fato dos dados de projeção apresentarem ruído, ou mesmo conterem erros sistemáticos como, por exemplo, erros no ajuste de direções das projeções ou no posicionamento dos raios.

Apêndice 2 - História da Tomografia Computadorizada

A história da tomografia teve início com a invenção dos raios-X pelo

alemão Wilheml Roentgem, que tornou possível a visualização da anatomia interna do ser humano sem a necessidade de cirurgias. Devido a esta descoberta recebeu o prêmio Nobel em 1901.

As radiografias convencionais são obtidas com um fecho de radiação e apresentam em um filme radiográfico uma vista longitudinal do corpo em estudo. Com a ajuda do raio-X, os médicos radiologistas reconstruíam mentalmente modelos das imagens do corpo do paciente para entender sua forma e o relacionamento espacial entre órgãos e regiões de processos patológicos.

Em 1777, George Louis Leclerc, Conde de Buffon, publicou no volume IV do suplemento *A História Natural* o artigo "Essai d'Arithmetique Morale" no qual se encontra a origem das Probabilidades Geométricas, as quais foram posteriormente convertidas em Geometria Integral ou Geometria Estocástica [San84]. Em 1812, Pierre Simon Laplace generalizou o problema da agulha de Buffon e observou a possibilidade de usar o cálculo de probabilidades para retificar curvas ou quadrar superfícies. Por outro lado, a limitação de tais métodos de Buffon e Laplace estava em definir uma medida para conjuntos de posições da agulha ou da curva a qual permitisse calcular a probabilidade de uma ou de outra ocupar uma determinada posição no plano. W. Blaschke, em 1936, possibilitou uma alternativa buscando a solução para tais medidas. Verificou ser possível calcular experimentalmente uma função G , ou seja $F(G)$ [San84]. Em 1917, J. Radon foi o primeiro a encontrar uma fórmula para calcular $f(x,y,z)$ a partir de $F(G)$, fórmula esta que ficou conhecida como Transformada de Radon [Hel80]. Bocage, em 1921, introduziu a tomografia convencional ou plano focal usando transmissão de Raios-X [Boc21]. Em 1956, Bracewell desenvolveu a técnica de reconstrução numérica de imagens para o uso em radioastronomia [Bra56]. Em 1963, o físico A. M. Cormack resolveu alguns problemas do resultado teórico apresentado por Radon e proporcionou uma decisiva contribuição nas bases matemáticas da tomografia reconstitutiva buscando a determinação quantitativa com um número finito de retas G , na variabilidade da função coeficiente de atenuação a partir de medidas externas e assim, nascia a Tomografia Computadorizada [Cor64]. Em 1968, De Rosier e Klug sugeriram a reconstrução tridimensional usando o método da Transformada de Fourier em Microscopia Eletrônica [Ros68]. Dez anos após o trabalho de Cormack, em 1973, o engenheiro G.N. Hounsfield desenvolveu o primeiro tomógrafo médico comercial [Hou72].

Devido a importância desses trabalhos, em 1961 realizou-se em Feldberg,

Alemanha, uma reunião de especialistas de várias áreas de formação, os quais fundaram a Sociedade Internacional de Estereologia, a qual foi definida por um conjunto de ferramentas para a exploração do espaço tridimensional a partir do conhecimento de secções bidimensionais. A Estereologia é análoga à Tomografia Computadorizada, a qual reconstrói secções de um corpo tridimensional a partir de suas projeções bidimensionais.

Nos sistemas tradicionais de CT, as imagens são formadas por fatias bidimensionais, calculadas a partir de uma reconstrução das projeções fornecidas pelo equipamento de aquisição, e apresentadas em um plano qualquer do espaço tridimensional.

A tomografia por ressonância magnética nuclear (RMN) é baseada nas propriedades magnéticas naturais dos núcleos atômicos. Ela não emprega radiação ionizante e, apesar de não exigir o uso de meios de contraste, gera imagens que diferenciam claramente cada tipo de tecido mole [Pan85].

As bases experimentais da espectroscopia por ressonância magnética foram estabelecidas há quase 40 anos por F. Bloch e E.M. Purcell. No entanto, seu potencial no que diz respeito à identificação e caracterização de tecidos só começou a delinear-se em 1971, quando se observou que haviam diferenças sistemáticas nas propriedades de relaxação nuclear dos tecidos normais, necrosados e tumorais.

P.C. Lauterbur foi o pioneiro no desenvolvimento das técnicas de imagens por RMN. Ele divulgou, em 1973, um método de geração de uma imagem bidimensional que mostrava a densidade de prótons e a distribuição dos tempos de relaxação spin-rede de uma amostra que consistia em dois pequenos tubos cheios d'água. Nos anos seguintes, grupos liderados por P. Mansfield [Man82], W.S. Hinshaw [Hin77], J.M.S. Hutchison, R.R. Ernst e Z.H. Cho [Cho82] desenvolveram técnicas alternativas para gerar essas imagens, capazes de ajudar tanto em diagnósticos médicos como no estudo das reações bioquímicas que ocorrem a nível celular.

Atualmente, há um grande número de pesquisas na área de MRT, cujas aplicações são muito promissoras [Pan85].

Apêndice 3 - O Número Hounsfield

A CT produz uma imagem da estrutura interna de uma secção transversal de um corpo através da reconstrução de uma matriz de coeficientes de atenuação de raio-X.

Esta imagem é representada por uma matriz $n \times n$ de *pixels* (elementos de imagem) [Hun88]. A atenuação de N_0 *photons* de raio-X, que passam por um único *pixel* o qual possui um coeficiente de atenuação linear μ , reduz o número de *photons* transmitidos a N de acordo com a lei de Beer:

$$N = N_0 e^{-\mu x} \quad (1)$$

onde x é a dimensão do *pixel* na direção dos raios-X. Os parâmetros de material, que determinam o coeficiente de atenuação linear de um *pixel*, incluem sua densidade ρ e seu coeficiente de atenuação de massa μ_m :

$$\mu = \mu_m \rho \quad (2)$$

O coeficiente de atenuação de massa, por sua vez, depende do número atômico do material e da energia do feixe ou raio. Assim a composição e densidade do material em um *pixel* determinará seu coeficiente de atenuação linear. Uma convenção em imagens médicas estabelece a normalização do coeficiente de absorção linear medido em relação ao da água:

$$N_{CT} = \frac{\mu_{mat} - \mu_{\text{água}}}{\mu_{\text{água}}} \cdot 1000 \quad (3)$$

O N_{CT} é conhecido como o valor *Hounsfield*. Por definição a água possui $N_{CT} = 0$ e o ar $N_{CT} = -1000$.

Apêndice 4 - O Tomógrafo de MR e o Tomógrafo de Raio-X

Segundo Huang [Hua87], o *scanner* de um tomógrafo de raio-X consiste de um tubo de raio-X, de um sistema de detecção, e de um dispositivo que controle a posição relativa do tubo de raio-X e do sistema de detecção. O módulo de exploração corresponde ao procedimento de coletar projeções de um seção transversal do corpo.

O primeiro *scanner* de tomografia computadorizada utilizava um único feixe fino de raio-X como fonte de energia. Devido a necessidade de alta precisão do sistema, precisava-se aproximadamente de 4 minutos e meio para a coleta dos dados necessários para realizar a reconstrução da imagem. Durante este tempo havia muitos fatores que atuavam contra o sistema, um exemplo disto o movimento por parte do paciente. Estes

movimentos podiam ser movimentos físicos ou fisiológicos como a batida do coração. Assim a imagem reconstruída possuía certos artefatos que degradavam sua qualidade. Para superar este problema foi necessário diminuir o tempo de exploração. Assim, as gerações de *scanners* têm evoluído devido a esta necessidade. Existem 4 modos de exploração que representam a evolução da tecnologia de tomografia computadorizada por raio-X [Hun88]. A figura 4 ilustra as 4 gerações de tomógrafos de Raio-X.

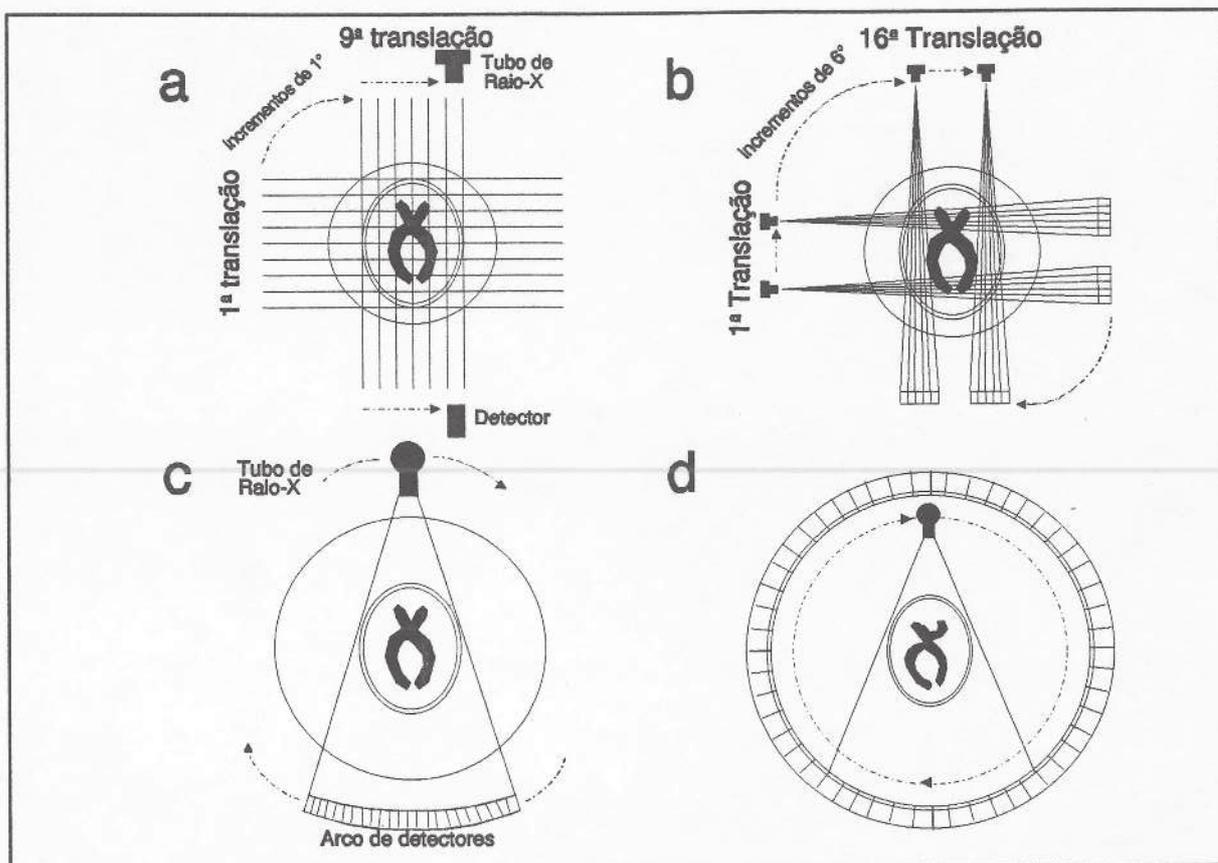


Figura 4 Diagrama das 1ª a 4ª gerações de "scanners" de CT

Os *scanners* de primeira geração usam uma única fonte de raio-X e um detector para cada fatia conforme ilustra a figura 4a. Depois de uma translação linear do tubo de raio-X e do detector, durante a qual obtém-se as leituras dos dados, o tubo e o detector são rotacionados 1° e outra varredura linear é realizada. O processo é repetido até 180° e leva de 6 a 7 minutos.

As unidades de segunda geração são parecidas com as da primeira exceto pela presença de 3 a 52 detectores, conforme ilustra a figura 4b. Como mais dados são

coletados por translação, os incrementos angulares de rotação, entre translações, podem ser maiores. Reduzindo o número de translações, o tempo de exploração diminui para a faixa de 2 minutos a 15 segundos.

Os *scanners* de terceira geração fornecem detectores o suficiente para varrer o paciente inteiro ou uma amostra em qualquer tempo, conforme ilustra a figura 4c. Comparando-o com os *scanners* das gerações anteriores pode-se verificar que não há a necessidade de se efetuar translações lineares. A fonte de raio-X e o arco de detectores apenas rotacionam sincronizadamente sobre o paciente.

Nos sistemas de quarta geração somente o tubo de raio-X rotaciona ao redor do paciente, conforme ilustra a figura 4d. Nas gerações anteriores os detectores e o tubo estão ligados e ambos rotacionam sobre o paciente, enquanto que os *scanners* de quarta geração possui um anel de 360 a 2400 detectores fixo ao redor do paciente. Uma exploração pode ser feita em 1 segundo.

Nos *scanners* de quinta geração, os detectores são fixos em volta do paciente como nos *scanners* de quarta geração, mas a fonte de raio-X, um anel grande de tungstênio, também é fixa e os dados são coletados sem que haja movimento físico. O processo de exploração pode levar de 50 a 100mseg, mais rápido que a "batida" do coração.

Os dispositivos que funcionam por Ressonância Magnética formam imagens de objetos através da sondagem dos momentos magnéticos dos núcleos, geralmente prótons, empregando rádio-freqüência (RF) e fortes campos magnéticos. As informações referentes à distribuição espacial da magnetização nuclear na amostra é determinada a partir da emissão de sinal de rádio-freqüência por estes núcleos estimulados. A intensidade do sinal recebido, no caso médico, depende de 5 parâmetros, ou seja, da densidade de Hidrogênio da amostra, do tempo de relaxação do spin, do tempo de relaxação entre spins, da velocidade de fluxo, por exemplo, do sangue arterial e do deslocamento químico.

Existem vantagens distintas em se utilizar MRT em vez de outras modalidade como o Raio-X. A interação entre o campo magnético estático, a rádio-freqüência, e os núcleos atômicos não é destrutiva nem ionizante, tornando o processo de aquisição de imagem aparentemente seguro. O mecanismo de exploração é completamente eletrônico, não necessitando de nenhum movimento e consegue-se obter qualquer secção bidimensional coronal, sagital e oblíqua além das secções transversais que são características a tomógrafos de Raio-X. Porém, os processos por MRT apresentam perda de resolução temporal, levando minutos para se obter uma simples imagem. A figura 5 ilustra um sistema

típico de MRT.

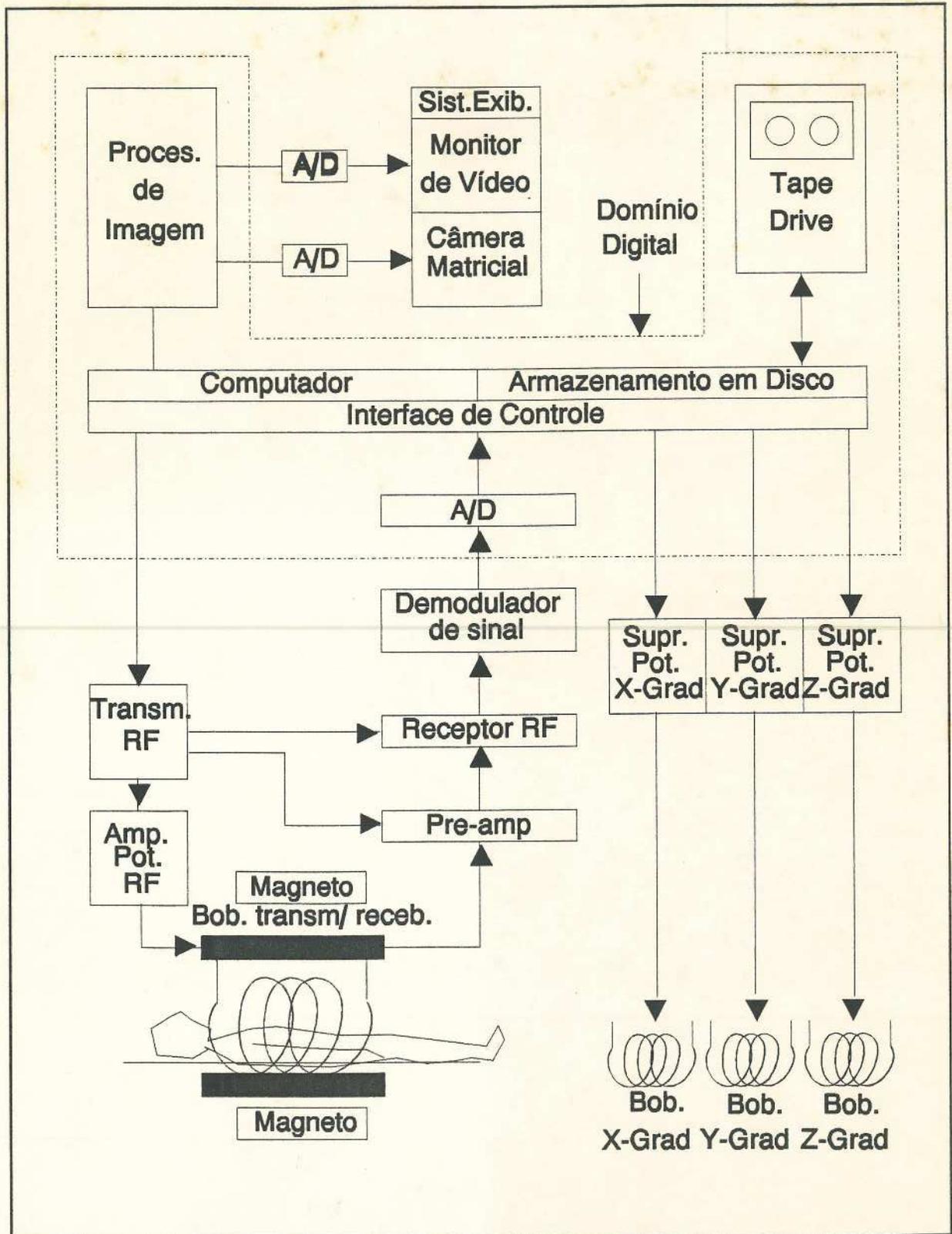


Figura 5 Diagrama de um sistema típico de tomografia por ressonância magnética.