

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Método de projeção multiescala e malhas hierárquicas para escoamentos incompressíveis modelados pelas equações de Navier-Stokes

Camila Faria Afonso Lages

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-CCMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Camila Faria Afonso Lages

Método de projeção multiescala e malhas hierárquicas para escoamentos incompressíveis modelados pelas equações de Navier-Stokes

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Simeoni de Sousa

USP – São Carlos
Novembro de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

L174m Lages, Camila Faria Afonso
Método de projeção multiescala e malhas
hierárquicas para escoamentos incompressíveis
modelados pelas equações de Navier-Stokes / Camila
Faria Afonso Lages; orientador Fabrício Simeoni de
Sousa. -- São Carlos, 2023.
96 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Ciências de Computação e Matemática Computacional) --
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, 2023.

1. Navier-Stokes. 2. Métodos multiescala. 3.
Método de projeção. 4. Escoamentos incompressíveis.
5. Malhas hierárquicas. I. de Sousa, Fabrício
Simeoni, orient. II. Título.

Camila Faria Afonso Lages

Multiscale projection method and hierarchical meshes for
incompressible flows modeled by the Navier-Stokes
equations

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-
USP, in partial fulfillment of the requirements for the
degree of the Doctorate Program in Computer Science
and Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and
Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Fabrício Simeoni de Sousa

USP – São Carlos
November 2023

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Agradeço também a todos os professores que me acompanharam durante minha jornada acadêmica, à USP e ao ICMC pela infraestrutura oferecida nesses anos. Agradeço adicionalmente a Petrobras e ao CeMEAI.

RESUMO

LAGES, C. F. **Método de projeção multiescala e malhas hierárquicas para escoamentos incompressíveis modelados pelas equações de Navier-Stokes**. 2023. 96 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Resolver as equações de Navier-Stokes para um grande número de incógnitas é um trabalho difícil e de elevado custo computacional. Essa tarefa geralmente é feita em paralelo, entretanto a escalabilidade é difícil de se obter com métodos tradicionais, especialmente quando o número de incógnitas cresce muito. Esta tese lida com formas diferentes de redução do custo computacional ao se resolver problemas de escoamentos de fluidos modelados pelas equações de Navier-Stokes. Uma das ideias exploradas é o emprego de refinamento localizado permitindo significativa redução de custo computacional ao utilizar malhas mais grosseiras em regiões que não são de interesse ainda mantendo um bom nível de precisão ao refinar regiões importantes do escoamento. Isso é realizado com uma estrutura de malha hierárquica juntamente com interpolações independentes de malha para lidar com os diversos níveis de refinamento possíveis no domínio. Os resultados mostram que o método é robusto e mantém convergência em diversos testes clássicos na literatura. Outra estratégia é utilizar um método com decomposição de domínio multiescala, no caso o Multiscale Robin Coupled Method, para resolver o problema elíptico que surge ao aplicar o método da projeção para desacoplar o cálculo de velocidade e pressão. Análises demonstram enorme potencial para redução de custo global em uma implementação paralela. Os resultados obtidos com essa combinação (método da projeção com método multiescala, batizado de método de projeção multiescala) mostraram acurácia nas comparações com as soluções respectivas de malha fina e soluções analíticas quando existentes.

Palavras-chave: Navier-Stokes, métodos multiescala, método de projeção, escoamentos incompressíveis, malhas hierárquicas.

ABSTRACT

LAGES, C. F. **Multiscale projection method and hierarchical meshes for incompressible flows modeled by the Navier-Stokes equations.** 2023. 96 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Solving the Navier-Stokes equations for a large number of unknowns is a difficult task with a high computational cost. This is usually done in parallel, but scalability is hard to achieve with traditional methods, especially for very large number of unknowns. We propose different ways of dealing with computational cost reduction when solving the Navier-Stokes equations. One of the strategies is using local refinement to reduce the computational cost by coarsening uninteresting areas while maintaining accuracy with local refinement in important flow areas. This is performed by a hierarchical mesh along with meshless interpolations to deal with the variation of refinement levels across the domain. Results show that the method is robust and keep optimal convergence order in several classical tests available in the literature. The second strategy proposes a new domain decomposition multiscale projection method based on the Multiscale Robin Coupled Method to solve the elliptic pressure equation used to decouple velocity and pressure calculations. Analysis show great potential for cost reduction in a parallel implementation. Results obtained with the multiscale projection method show accuracy when comparing them to the undecomposed case or analytical solutions when available.

Keywords: Navier-Stokes, multiscale methods, projection methods, incompressible flows, hierarchical meshes.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Esquema de classificação de fluidos e escoamentos. Neste trabalho, o foco será em líquidos newtonianos em escoamentos viscosos, laminares e incompressíveis.	28
Figura 2 – Representação gráfica da decomposição de Helmholtz-Hodge em que se decompõe um campo \mathbf{w} na soma de um campo com divergente nulo \mathbf{u} com um campo gradiente ∇p	31
Figura 3 – Volumes de controle para pressão e velocidades em x e y em uma malha deslocada. Cada célula (volume de controle) é denotada pelos índices (i, j) , a pressão é avaliada em centro de célula enquanto as velocidades são avaliadas nas faces da mesma. Sendo a velocidade em x avaliada nas faces leste e oeste e a velocidade em y avaliada nas faces norte e sul.	34
Figura 4 – Malha hierárquica com refinamentos arbitrários (à esquerda) e a estrutura em árvore que a representa (à direita). Cada folha da árvore pode ser dividida num número qualquer de células.	38
Figura 5 – Estêncil de diferenças finitas centrais de segunda ordem para discretização da equação de Poisson. As incógnitas são localizadas nos centros das células.	38
Figura 6 – Discretizações considerando estênceis próximos à fronteira. A figura a) mostra a condição de fronteira de Dirichlet, e a figura b) a discretização utilizando a condição de Neumann. Na primeira, o valor u_b é utilizado para calcular U_r com mínimos quadrados móveis e, na segunda, faz-se a discretização da condição de fronteira e modifica o estêncil de U_c de acordo.	42
Figura 7 – Ilustração de uma malha hierárquica deslocada.	43
Figura 8 – Refinamentos de malha para resolução da equação de Poisson usando um método de diferenças finitas com as interpolações realizadas com método dos mínimos quadrados móveis.	44
Figura 9 – Malha não balanceada para o teste de convergência da solução da equação de Poisson	45
Figura 10 – Erro para \mathbf{u} calculado comparado com os erros obtidos por Olshanskii, Terrehov e Vassilevski (2013)	47
Figura 11 – Erro para p calculado comparado com os erros obtidos por Olshanskii, Terrehov e Vassilevski (2013)	48

Figura 12 – Erro na componente u_1 do campo \mathbf{u} para duas malhas diferentes, $h_{min} = 1/32$ e $h_{min} = 1/64$. As imagens mostram o comportamento do erro com o refinamento da malha.	49
Figura 13 – Malha não balanceada utilizada para o teste de estabilidade da decomposição de Helmholtz-Hodge.	49
Figura 14 – Erro $\ \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\ _{L_\infty}$ em escala logarítmica ao longo de sucessivas aplicações da decomposição de Helmholtz-Hodge.	50
Figura 15 – Malhas usadas para os testes da cavidade impulsionada 2D. Ambas correspondem a $h_{min} = 1/64$ e $h_{max} = 1/6$	51
Figura 16 – Convergência nas normas L_2 (topo) e L_∞ (embaixo) para os erros de velocidade (esquerda) e pressão (direita).	52
Figura 17 – Malhas envolvidas no método MRCM. A malha na escala fina consiste em células menores de aresta com tamanho h , enquanto a malha de escala mais grossa é composta pelos subdomínios com tamanho de aresta H . No caso da figura, em particular, $H = 5h$. Cada subdomínio é representado por Ω_i e as interfaces por Γ	54
Figura 18 – A figura da esquerda mostra a estimativa do custo relativo de se resolver um problema local em diferentes configurações de decomposição de domínio enquanto a figura a direita mostra a estimativa do custo do sistema global de interface para diferentes decomposições de domínio. Ambas figuras mostram essas estimativas para quatro diferentes graus de liberdade e, no caso da figura a direita, também uma curva representando a estimativa do custo de se calcular um problema local de funções de base.	64
Figura 19 – Campos de velocidades para combinações de espaços de interface de pressão e fluxo, considerando $\alpha = 1$. Da esquerda para direita, na primeira linha tem-se $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$ e $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$; e na segunda linha $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$. Para os casos $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$ e $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$ há um grande erro nas interfaces dos subdomínios, que se reduz a medida que se enriquece os espaços de interface conjuntamente. De fato, para $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$ não é possível visualizar mais interferências da decomposição de domínio na solução.	66
Figura 20 – Divergente do campo de velocidades, considerando $\alpha = 1$. Da esquerda para direita, na primeira linha tem-se $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$ e $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$; e na segunda linha $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$. Para todos os casos o divergente é próximo de zero, mesmo com combinações de espaços cujos erros são maiores.	67

Figura 21 – Magnitude da componente z do rotacional do fluxo retornado pelo MRCM para combinações de espaços de interface de pressão e fluxo, considerando $\alpha = 1$ em uma malha 90×90 dividida em 3×3 subdomínios com 30×30 células cada. Da esquerda para direita, na primeira linha tem-se $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$ e $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$; e na segunda linha $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$. Para os casos $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$ e $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$ há um grande erro nas interfaces dos subdomínios, que se reduz a medida que se enriquece os espaços de interface conjuntamente. 68

Figura 22 – Magnitude da componente z do rotacional do fluxo retornado pelo MRCM para combinações de espaços de interface de pressão e fluxo, considerando $\alpha = 1$ em uma malha 180×180 dividida em 6×6 subdomínios com 30×30 células cada. Da esquerda para direita, na primeira linha tem-se $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$ e $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$; e na segunda linha $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$. Para os casos $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$ e $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$ há um grande erro nas interfaces dos subdomínios, que se reduz a medida que se enriquece os espaços de interface conjuntamente. 69

Figura 23 – Erros relativos para diferentes valores de α e combinações de espaços de interface. A linha tracejada azul é correspondente a $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$; a linha vermelha a $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$; a linha amarelada corresponde a $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e a linha sólida roxa corresponde a $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$. O comportamento para os quatro casos são semelhantes, mesmo quando o erro é maior. Há um mínimo próximo de $\alpha = 1$ 70

Figura 24 – Erros relativos para estabilidade da decomposição de Helmholtz-Hodge com $\alpha = 1$ e combinações de espaços de interface. A linha tracejada azul é correspondente a $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$; a linha vermelha a $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$; a linha amarelada corresponde a $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e a linha sólida roxa corresponde a $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$. Mesmo nos casos com maior erro relativo, a estabilidade da decomposição foi mantida. 71

Figura 25 – Campos de velocidades para combinações de espaços de interface de pressão e fluxo, considerando $\alpha = 1$. Da esquerda para direita, na primeira linha tem-se $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$ e $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$; e na segunda linha $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$. Mesmo com as escolhas de custo menos elevado, não há erros ao longo da interface, mostrando que o método da projeção combinado com MRCM apresenta bons resultados para resolução numérica das equações de Navier-Stokes. 72

Figura 26 – Erros relativos (em relação a solução de malha fina) para diferentes valores de α e combinações de espaços de interface. A linha tracejada azul é correspondente a $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$; a linha vermelha a $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$; a linha amarelada corresponde a $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e a linha sólida roxa corresponde a $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$ 74

Figura 27 – Análise de convergência para o caso do vórtice amortecido. Foram feitas duas análises, a primeira 3×3 começa de um domínio dividido em 3 subdomínios com 30×30 células finas em cada um e refina-se a decomposição de domínio mantendo 30×30 células. A segunda 6×6 começa com um domínio dividido em 6 subdomínios com 15×15 células finas em cada um e refina-se a decomposição mantendo 15×15 células finas em cada subdomínio. A ordem de convergência obtida foi $O(H^2)$ em que H é o tamanho da aresta de subdomínios.	74
Figura 28 – Domínio para o teste da cavidade impulsionada. O topo da cavidade tem velocidade em x igual a 1 enquanto a velocidade em y é nula, isso simula uma tampa deslizante no topo. As demais paredes tem condição de contorno sem escorregamento (<i>no-slip</i>).	76
Figura 29 – Perfis de velocidade em x_1 e em x_2 fixando regiões do domínio e variando o número de Reynolds, todos os resultados são com $\alpha = 1$. As curvas verticais apresentadas referem-se da componente u_1 da velocidade ao longo de $x_1 = 0$ e as horizontais aos valores da componente u_2 da velocidade ao longo de $x_2 = 0$. As soluções obtidas pelo método de projeção multiescala usando os espaços de interface $(\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1})$ são comparados com a solução de malha fina e com os dados retirados de (GHIA; GHIA; SHIN, 1982). Em todos os casos houve uma ótima concordância da solução obtida com o MRCM e as referências.	77
Figura 30 – Domínio para escoamento com degrau. A entrada de fluido (<i>inflow</i>) é definida a esquerda do domínio enquanto a saída (<i>outflow</i>) é definida na face direita do mesmo. Na entrada considera-se um perfil desenvolvido parabólico com velocidade máxima em x igual a 1.	78
Figura 31 – Erros relativos para o campo de velocidades calculado para diferentes valores de α . Valores grandes de α geram soluções do tipo MHM (MHM-like) enquanto valores pequenos de α geram soluções do tipo MMMFEM (MMMFEM-like). É possível observar um valor mínimo no erro entre essas duas soluções, em $\alpha = 1$	79
Figura 32 – Linhas de corrente para o campo de velocidades com $\alpha = 1$. (a) solução referência de malha fina; (b) solução com MRCM usando $\mathcal{P}_{H,0}, \mathcal{U}_{H,1}$; (c) solução com MRCM usando $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$. As linhas brancas mostram a decomposição de domínio usada para essas simulações. Ambas soluções obtidas com o MRCM estão de acordo com a solução de malha fina, e as linhas de corrente não apresentam inacurácias ao longo das interfaces entre subdomínios.	80

Figura 33 – Decomposições de domínio usadas para o estudo fixando os espaços de interface e refinando as decomposições de domínio. A primeira (topo) é a decomposição de domínio mais grosseira; A segunda é a decomposição de domínio mais refinada.	81
Figura 34 – Erros relativos para campo de velocidades relacionado com o tamanho do sistema global resolvido a cada passo de tempo no estágio <i>online</i> . Três estratégias apresentadas: engrossamento da malha fina (curva verde); fixar a decomposição de domínio enriquecendo o espaço de interfaces para o fluxo (curva azul); fixar os espaços de interface para pressão e fluxo e refinar a decomposição de domínio (curva vermelha).	82
Figura 35 – Domínio para o teste da esteira de Von Kármán. O lado esquerdo tem condição de entrada de fluido (<i>inflow</i>). Do lado direito do domínio, tem-se a condição de saída de fluido (<i>outflow</i>) apropriada enquanto as faces norte e sul do canal tem condição de escorregamento (<i>free-slip</i>). Finalmente, a região escura representa o obstáculo e suas paredes tem condição de contorno sem escorregamento (<i>no-slip</i>).	84
Figura 36 – Diferentes momentos do escoamento em torno de um obstáculo quadrado. A primeira linha mostra a solução de malha fina e a segunda a solução obtida com o método de projeção multiescala considerando $k_U = 1$ e $k_P = 2$ e $\alpha = 1$. As linhas brancas representam o esqueleto da decomposição de domínio escolhida e as linhas acinzentadas as linhas de corrente para o campo de velocidade do escoamento. Ambas soluções são similares mesmo com $k_U = 1$.	86

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Erros e ordem de convergência estimada (OCE) para equação de Poisson usando uma malha hierárquica geral	45
Tabela 2	– Erros e ordem de convergência estimada (OCE) para solução numérica da equação de Poisson e seus gradientes usando um polinômio de grau 2 em uma malha <i>quadtree</i> não balanceada com condição de fronteira de Dirichlet	46
Tabela 3	– Erros e ordem de convergência estimada (OCE) para solução numérica da equação de Poisson e seus gradientes usando um polinômio de grau 3 em uma malha <i>quadtree</i> não balanceada com condição de fronteira de Dirichlet	46
Tabela 4	– Erros relativos (em relação a solução exata dada por (4.26)) para combinações $(\mathcal{P}_{H,i}, \mathcal{U}_{H,j})$ e $\alpha = 1$. O domínio para os testes é quadrado com tamanho 1 em cada direção, contendo 90×90 células divididas em três subdomínios de 30×30 células cada. O erro relativo melhora a medida que os espaços de pressão e fluxo são enriquecidos conjuntamente.	65
Tabela 5	– Erros relativos (em relação a solução exata dada por (4.28)) para combinações $(\mathcal{P}_{H,i}, \mathcal{U}_{H,j})$ e $\alpha = 1$. O domínio para os testes contém 90×90 células divididas em três subdomínios de 30×30 células cada. O erro relativo melhora a medida que os espaços de pressão e fluxo são enriquecidos conjuntamente.	72
Tabela 6	– Erros relativos (em relação a solução de malha fina) para combinações $(\mathcal{P}_{H,i}, \mathcal{U}_{H,j})$ e $\alpha = 1$. O domínio para os testes contém 90×90 células divididas em três subdomínios de 30×30 células cada. O erro relativo melhora a medida que os espaços de pressão e fluxo são enriquecidos conjuntamente, porém já são bem pequenos para os casos menos custosos.	73
Tabela 7	– Valores obtidos para os coeficientes de arrasto e sustentação e número de Strouhal utilizando $\alpha = 1$. Os valores obtidos com o método da projeção multiescala foram comparados com o valor obtido na malha fina e calculou-se um erro relativo dos mesmos.	85
Tabela 8	– Valores obtidos para os coeficientes de arrasto e sustentação e número de Strouhal utilizando três valores distintos de α . Os valores obtidos com o método da projeção multiescala foram comparados com o valor obtido na malha fina e calculou-se um erro relativo dos mesmos.	85

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Métodos de projeção	22
1.2	Malhas hierárquicas	22
1.3	Modelos de ordem reduzida	24
1.4	Decomposição de domínio e métodos multiescala	25
2	EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES	27
2.1	Modelagem matemática	29
2.2	Decomposição de Helmholtz-Hodge	30
2.3	Método da projeção e discretização temporal	31
2.4	Discretização espacial	33
3	MALHAS HIERÁRQUICAS	37
3.1	Formulação do método	37
3.1.1	<i>O método dos mínimos quadrados móveis</i>	39
3.1.2	<i>Considerações sobre as condições de fronteira de Neumann e Dirichlet</i>	42
3.1.3	<i>Considerações sobre malha deslocada</i>	43
3.2	Resultados	43
3.2.1	<i>Equação de Poisson numa malha hierárquica geral</i>	44
3.2.2	<i>Convergência em uma malha quadtree não balanceada</i>	45
3.2.3	<i>Decomposição de Helmholtz-Hodge</i>	46
3.2.4	<i>Cavidade com Solução Manufaturada</i>	50
4	DECOMPOSIÇÃO DE DOMÍNIO E O MÉTODO DE PROJEÇÃO MULTIESCALA	53
4.1	Método de projeção multiescala	53
4.2	O método MRCM para o problema elíptico misto	55
4.3	Regularização do campo final de velocidades, estratégia de <i>downs- caling</i>	58
4.4	O algoritmo	60
4.5	Custo computacional	60
4.6	Verificação do código multiescala	64
4.6.1	<i>Decomposição de Helmholtz-Hodge</i>	64
4.6.2	<i>Decaimento de vórtice</i>	70

5	RESULTADOS	75
5.1	Cavidade impulsionada	75
5.2	Escoamento com degrau	77
5.3	Esteira de Von Kármán	83
6	CONCLUSÕES	87
	REFERÊNCIAS	91

INTRODUÇÃO

Os escoamentos de fluidos são fenômenos abundantes na história da humanidade, ocorrendo tanto de forma natural quanto através de processos induzidos pela necessidade humana no decorrer dos tempos. Dentre os fenômenos que ocorrem naturalmente, pode-se, a título de exemplo, citar: circulação sanguínea, movimento de correntes marítimas, curso de rios, penetração das águas pluviais no solo, lençóis freáticos, dentre outros. E, em se tratando dos escoamentos produzidos pelo homem, pode-se citar: extração de petróleo em reservatórios e filtragem de água e ar (sendo esses classificados como escoamentos em meios porosos), movimento do ar em torno de uma asa de avião, desvio de cursos de rios para contenção em hidroelétricas e todos aqueles presentes em diversos processos industriais. Os escoamentos são classificados de acordo com o tipo de fluido presente e também pela quantidade de fluidos diferentes envolvida (WHITE, 1999), por exemplo, considerando o tipo de fluido, tem-se os compressíveis, em que a massa específica do fluido varia, e os incompressíveis. Há também os newtonianos, cuja viscosidade é constante e os não newtonianos. E os escoamentos que contam com apenas um fluido são chamados de monofásicos enquanto aqueles em que há a presença de dois ou mais são chamados de multifásicos. Nesta tese, o interesse é modelar e simular escoamentos monofásicos e incompressíveis com fluidos newtonianos por meio da solução numérica das equações de Navier-Stokes que serão melhor apresentadas posteriormente.

A resolução numérica de equações diferenciais parciais (como as de Navier-Stokes, por exemplo) requer discretizações de domínio (malhas) que geram incógnitas para cada grandeza de interesse no escoamento (pressão, velocidades, densidade, e assim por diante). Dependendo da natureza do escoamento, do tamanho do domínio, da precisão que é esperada para a solução e dentre outras coisas, essas malhas podem conter um grande número de elementos gerando uma quantidade massiva de incógnitas comprometendo o tempo de computação para obter uma solução numérica. Tomando como exemplo as equações de Navier-Stokes, esse sistema possui como incógnitas a pressão e as velocidades em duas direções se considerar um escoamento bidimensional, tais incógnitas estão fortemente acopladas o que também dificulta a solução

por requerer que todas as incógnitas sejam resolvidas juntas, levando um tempo computacional grande. Para contornar esse problema do acoplamento, métodos de segregação de pressão são bastante eficientes pois fornecem mecanismos simples para desacoplar a pressão das velocidades. Nessa tese, o foco está nos métodos de projeção (BROWN; CORTEZ; MINION, 2001; CHORIN, 1968; QUARTERONI; SALERI; VENEZIANI, 2000; SOUSA; OISHI; BUSCAGLIA, 2015; GUERMOND; MINEV; SHEN, 2006), em que o cálculo das velocidades se dá pela discretização da equação de conservação de quantidade de movimento e a obtenção da pressão acontece resolvendo uma equação de elíptica.

1.1 Métodos de projeção

Os métodos de projeção começaram a ser introduzidos nos trabalhos de Chorin (1968) que descreveram a natureza do problema e a forma de segregar as incógnitas de interesse. Tais métodos são baseados no teorema de Helmholtz-Hodge (LADYZHENSKAYA, 1969) que garante a decomposição de um campo vetorial dado em uma soma de um campo solenoidal com um campo gradiente. Essa decomposição permite calcular o operador da projeção resolvendo uma equação elíptica. No caso da resolução das equações de Navier-Stokes, a projeção é aplicada na equação de momento cujas incógnitas são a pressão e as velocidades. O método apresentado por Chorin (1968), ao discretizar a equação de momento, aproxima o gradiente de pressão discretizado por zero, quando esse tipo de aproximação é feita para o gradiente de pressão, tem-se os métodos de projeção não incremental. Há outras formas de aproximar o gradiente de pressão na discretização da equação de momento, por exemplo calculando o mesmo com os valores da pressão no momento anterior, nesses casos tem-se o método de projeção incremental (GODA, 1979; SOUSA; OISHI; BUSCAGLIA, 2015).

Justamente por ser necessário resolver uma equação elíptica computacionalmente, a demanda de recursos torna-se alta. Principalmente em se tratando de problemas grandes, com malhas com muitos elementos, os sistemas lineares provenientes da discretização utilizada nessa equação elíptica (independente da escolhida) são enormes e difíceis de resolver. Sendo assim, o gargalo no tempo computacional para essas simulações reside justamente no cálculo do operador de projeção, exigindo, portanto, técnicas e estratégias para reduzir esses custo e tempo computacionais. Mesmo utilizando métodos iterativos programados em paralelo para resolver esses sistemas lineares, devido ao tamanho, há frequentemente problemas de desempenho e convergência. Sendo assim, novas estratégias são sempre bem-vindas para contornar esses problemas.

1.2 Malhas hierárquicas

As malhas hierárquicas cartesianas baseadas em uma estrutura de árvore são comumente escolhidas em contextos em que é necessário flexibilidade por permitir refinamentos em regiões

específicas do domínio. Essa característica aumenta resolução de malha em áreas de interesse do escoamento, sem aumentar o custo computacional. Devido a sua natureza cartesiana, tais malhas permitem o desenvolvimento de métodos baseados em diferenças ou volumes finitos sem a necessidade de lidar com células distorcidas ou outros contratempos comuns às malhas não cartesianas.

A dificuldade reside, em sua maior parte, no cálculo dos fluxos em facetas de células que são vizinhas de outras células com diferentes níveis de refinamento, ou seja, pode acontecer de uma célula ter número de vizinhos diferentes em cada uma de suas facetas. Para lidar com esse tipo de problema diferentes técnicas foram desenvolvidas ao longo dos anos considerando, em sua maioria, malhas hierárquicas representadas por estruturas de dados *quadtree* (para problemas em duas dimensões) ou *octree* (problemas em três dimensões). Apesar de essas estruturas de dados terem restrições na sua formulação, essa estratégia obtém bons resultados, sendo uma boa escolha na maioria dos casos (POPINET, 2003; LOSASSO; GIBOU; FEDKIW, 2004; MIN; GIBOU, 2006; GUITTET; THEILLARD; GIBOU, 2015; GÓMEZ *et al.*, 2019).

Dentro da classificação de malhas hierárquicas, as que apresentam maiores dificuldades na implementação e utilização são as malhas estruturadas por blocos. São compostas por sobreposição de blocos de malhas estruturadas com diferentes resoluções, integradas por esquemas e interpolação (BERGER; OLIGER, 1984; PIVELLO *et al.*, 2014). Tal abordagem apresenta restrições na adaptabilidade da malha a diferentes geometrias, além de se necessário cuidado ao mapear células e informações entre os blocos que compõem a malha final.

Já para as malhas *quadtree* e *octree*, a maior dificuldade ao adaptar esquemas de diferenças e volumes finitos (POPINET, 2003; LOSASSO; GIBOU; FEDKIW, 2004) está nas interfaces que compartilham diferentes níveis de refinamento, ou seja, faces de uma mesma célula podem não ter o mesmo número de células vizinhas. Para contornar esta dificuldade, usualmente são feitas interpolações de alta ordem que são, majoritariamente, geométricas dependendo, portanto, do número de vizinhos de uma face. Por esse motivo, os primeiros esquemas de diferenças e volumes finitos foram desenvolvidos considerando malhas cuja razão entre interfaces grossa-fina é restrita a 2:1, ou seja, malhas *octree* e *quadtree* balanceadas (LOSASSO; GIBOU; FEDKIW, 2004).

Uma malha que limita possíveis configurações de células vizinhas como as balanceadas permite deduzir, previamente, fórmulas bem definidas para as interpolações geométricas para cada caso específico. Em termos de implementação, essas fórmulas são inseridas nos códigos de forma engessada. Além disso, mesmo sendo uma malha adaptativa, essa restrição leva a um aumento desnecessário de células (BATTY, 2017), motivando, então, o desenvolvimento de métodos em malhas não balanceadas (OLSHANSKII; TEREKHOV; VASSILEVSKI, 2013).

Um modo de lidar com as limitações geométricas dos métodos citados previamente é utilizar métodos independente de malhas (*meshless*). Existem na literatura métodos completamente independentes de malhas, entretanto, em se tratando de convergência e consistência, ainda há

problemas que não foram completamente investigados (BELYTSCHKO *et al.*, 1996; LI; LIU, 2002; ZHANG; KWON; YOUN, 2005; NGUYEN *et al.*, 2008). Com menos referências na literatura, tem-se os métodos híbridos, que combinam a simplicidade de um esquema de diferenças finitas com as interpolações independentes de malha. São estratégias aplicadas, geralmente, para a discretização de objetos complexos imersos em uma malha cartesiana e aplicações que requerem união de malhas estruturadas (DING *et al.*, 2004; DING; SHU; CAI, 2007; WANG *et al.*, 2008).

Por fim, o trabalho que será apresentado nessa tese usa interpolações independentes de malha calculadas pelo método dos mínimos quadrados móveis para modificar estênceis de diferenças finitas nas vizinhanças de interfaces entre células finas e grossas (comum em malhas hierárquicas) (SOUSA *et al.*, 2019).

1.3 Modelos de ordem reduzida

Outras estratégias, que não serão exploradas nesta tese, que buscam reduzir o custo computacional, são os modelos de redução de ordem. Esses modelos de Redução de Ordem (ROM, do inglês *Reduced Order Models*) tem ganhado bastante espaço na literatura quando se trata de resolver problemas com um grande número de incógnitas. Eles reduzem o número de incógnitas resolvendo problemas menores, porém mantendo acurácia suficiente quando comparados com os modelos completos. Divide-se essa classe de modelos em três grupos distintos: POD (do inglês *Proper Orthogonal Decomposition*, base reduzida (RB do inglês *Reduced Basis*) e PGD (do inglês *Proper Generalized Decomposition*). Apesar de pertencerem a grupos distintos, os dois últimos (RB e PGD) compartilham a mesma base em sua formulação, a decomposição POD introduzida por Pearson (1901).

A técnica de decomposição POD é muito aplicada em problemas que dependem do tempo, sendo frequentemente utilizada para problemas transientes usando Navier-Stokes (LASSILA *et al.*, 2014). A redução do problema original é feita selecionando as características mais relevantes do comportamento do mesmo e colocando-as em um conjunto de vetores que será a base reduzida que deve ser capaz de representar o problema original de forma eficiente (CHINESTA *et al.*, 2016). Tal eficiência dependerá da precisão que essa base reduzida terá, é necessário que critérios de erro sejam bem estabelecidos afim de construir essa base de forma adequada, diminuindo o erro entre a solução obtida com o modelo reduzido e a esperada (FERNANDES, 2020).

Similares à decomposição POD, os modelos de base reduzida contam com uma base ortonormal atualizada durante a simulação, sendo esta enriquecida a medida que o erro torna-se inaceitável (MADAY; RØNQVIST, 2002; QUARTERONI; ROZZA; MANZONI, 2011). Desenvolvimentos recentes focam em duas principais áreas: avaliação de erros *a posteriori* e melhoria nos processos de amostragem para escolher a quantidade ótima de funções para compor a base reduzida. No primeiro, o intuito é controlar as atualizações da base enquanto no segundo,

escolher amostras mais representativas geraria bases que representariam de forma mais fiel o problema (CHINESTA *et al.*, 2016).

1.4 Decomposição de domínio e métodos multiescala

Os métodos de decomposição de domínio vem ganhando espaço na comunidade nos últimos anos. A ideia principal é dividir o domínio onde se resolve uma equação diferencial parcial em domínios menores, resolver pequenos problemas locais semelhantes ao global e, depois, acoplar as soluções obtidas com um sistema que leva em consideração condições de compatibilidade, geralmente aplicadas nas interfaces desses subdomínios quando não há sobreposição entre os mesmos.

O uso de tais métodos para resolução das equações de Navier-Stokes, entretanto, não é recente. Há resultados mostrados por Nataf, Rogier e Sturler (1995), em que uma decomposição de domínio é apresentada para equações de advecção-difusão, aplicando-a nas equações de Navier-Stokes usando a formulação de linhas de corrente e vorticidade. Diversos autores propuseram estratégias baseadas em decomposição de domínio (BRAKKEE; SEGAL; KASSELS, 1995; BRAKKEE; VUIK; WESSELING, 1998; BAIGES; CODINA; IDELSOHN, 2013), em sua maioria utilizando subdomínios com sobreposição (DRYJA; WIDLUND, 1989; GRIEBEL; OSWALD, 1995; NABBEN, 2003; ZHOU; HON; LI, 2003) que requerem algumas iterações entre os subdomínios para atingir uma boa solução final.

Apesar de benquistos na comunidade, os métodos de decomposição de domínio sem sobreposição entre os subdomínios ganharam popularidade recentemente e, portanto, trabalhos com desenvolvimentos recentes sobre o tema surgiram, tais como os apresentados por Girault, Rivièr e Wheeler (2005) e Gunzburger e Lee (2000). Girault, Rivièr e Wheeler (2005) descreve uma família de métodos de elementos finitos Galerkin descontínuos com decomposição de domínio sem sobreposição para resolver Navier-Stokes enquanto Gunzburger e Lee (2000) apresenta uma decomposição de domínio otimizada, também sem sobreposição. Dentro dessa classe de métodos de decomposição de domínio sem sobreposição, encontram-se os métodos de decomposição de domínio multiescala.

Inicialmente desenvolvidos para escoamentos em meios porosos, os métodos de decomposição de domínio multiescala apresentam uma grande vantagem quando falamos de redução do custo computacional. Sua formulação é semelhante aos métodos de decomposição de domínio padrão, entretanto o acoplamento entre as soluções locais é enfraquecido, levando a uma aproximação que é conservativa, entretanto a solução final pode não ser contínua nas interfaces entre os subdomínios. Nesta tese, o interesse são os métodos multiescala mistos, que lidam de diferentes maneiras com a questão da solução descontínua ao longo dos subdomínios.

Os métodos multiescala possuem duas medidas de malha, a malha fina e a malha grossa. A primeira é a resolução da malha, o tamanho das células que compõem os subdomínios e a

segunda, geralmente, é o tamanho das arestas dos subdomínios, ou uma fração delas maior que a escala de malha fina. [Arbogast et al. \(2007\)](#) introduziu o *Multiscale Mortar Mixed Finite Element Method* (MMMFEM), em que a continuidade do fluxo é garantida apenas na malha grossa, enquanto a continuidade da pressão é garantida na malha fina. Já [Araya et al. \(2013\)](#), em seu *Multiscale Hybrid Mixed Finite Element Method* (MHM) garante a continuidade do fluxo na malha fina, enfraquecendo a continuidade da pressão.

Finalmente, há uma outra forma de acoplar os subdomínios, usando uma condição de Robin nas bordas dos subdomínios ao resolver os problemas locais (([DOUGLAS et al., 1993](#)), ([LIONS et al., 1988](#))). Essa estratégia é a base para o Método Multiescala Misto, Multiscale Mixed Method (MuMM), apresentado por [Francisco et al. \(2014\)](#). Recentemente, os métodos MMMFEM, MHM e MuMM foram generalizados pelo Multiscale Robin Coupled Method (MRCM) apresentado recentemente por [Guiraldello et al. \(2018\)](#). Este permite definir independentemente os espaços para pressão e fluxo nas interfaces dos subdomínios.

Essa tese está organizada da seguinte forma: o presente capítulo trouxe uma introdução e rápida revisão bibliográfica dos temas que serão posteriormente abordados; o [Capítulo 2](#) traz os principais conceitos a respeito de escoamento de fluidos, bem como a formulação matemática dos escoamentos, o método da projeção e a discretização espacial utilizada; o [Capítulo 3](#) fala a respeito das malhas hierárquicas; o [Capítulo 4](#) mostra a formulação do método de projeção multiescala aqui proposto juntamente com alguns resultados de validação do método; o [Capítulo 5](#) traz os resultados obtidos com o método de projeção multiescala e, finalmente, o [Capítulo 6](#) finaliza e conclui os assuntos dessa tese.

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

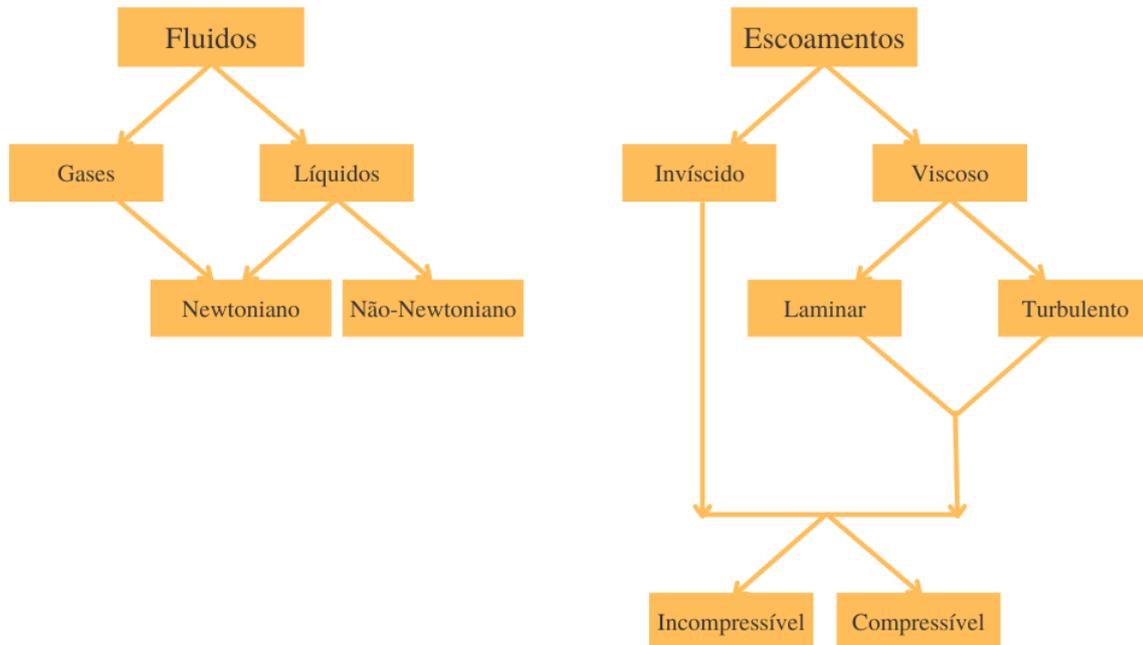
Quando falamos de mecânica de fluidos, reduzimos as substâncias em dois estados: sólido e fluido. Enquanto o primeiro pode resistir a uma força aplicada a ele (demorando para deformar ou quebrar), um fluido facilmente se moverá numa situação assim (WHITE, 1999). Formalmente, um fluido é uma substância que se deforma constantemente ao aplicar uma tensão de cisalhamento, por menor que ela seja (FOX; MCDONALD; MITCHELL, 2020).

Os fluidos são divididos em duas classes: gases e líquidos (como pode ser observado no esquema da Figura 1). Os líquidos possuem forças moleculares mais intensas, fazendo com que suas moléculas fiquem mais próximas e, portanto, com que seu volume seja mantido. Já os gases, por possuírem moléculas mais espaçadas (devido a forças moleculares mais fracas) não retém seu volume, expandindo sempre. Também podemos classificar os fluidos em newtonianos (aqueles que seguem a lei de Newton da viscosidade (WHITE, 1999)) e não newtonianos (aqueles que não seguem a lei de Newton da viscosidade), sendo os primeiros mais comuns, tendo com exemplo água, gasolina e os gases também.

Quando se olha a nível molecular, a distância entre as moléculas, tanto nos líquidos quanto nos gases, são muito maiores do que o diâmetro das mesmas. Isso traria uma dificuldade para o entendimento de como os fluidos se comportam em algumas situações, ou para entender suas propriedades (massa específica e viscosidade). Porém, ao olhar a nível macroscópico, essa distância entre as moléculas é desprezível, sendo possível considerar o fluido como um meio contínuo. Essa suposição é a base da mecânica de fluidos clássica, permitindo o uso das leis da mecânica e do cálculo para modelar e entender os escoamentos.

Os escoamentos podem ser classificados de diversas formas (a Figura 1 mostra um esquema dessas classificações), sendo elas: viscosos ou invíscidos (quando a viscosidade é considerada nula); compressíveis (há variação de massa específica) ou incompressíveis (não há variação de massa específica) e laminares ou turbulentos. Esta última classificação leva em conta o valor do número de Reynolds, que relaciona a viscosidade e massa específica do

Figura 1 – Esquema de classificação de fluidos e escoamentos. Neste trabalho, o foco será em líquidos newtonianos em escoamentos viscosos, laminares e incompressíveis.



Fonte: Adaptada de Fox, McDonald e Mitchell (2020).

fluido, sua velocidade no escoamento e algum comprimento que caracterize o escoamento. Nesta tese, consideraremos apenas líquidos newtonianos em escoamentos viscosos, laminares e incompressíveis.

Outro aspecto a se considerar é o referencial a partir do qual se observa o desenvolvimento do escoamento. Existem duas formulações para analisar problemas de mecânica de fluidos: a lagrangeana e a euleriana. Na formulação lagrangeana, observa-se a partícula de fluido se movendo, ou seja, a partir de uma posição inicial num tempo inicial, o referencial do escoamento segue a partícula ao longo do tempo. Dessa forma, qualquer propriedade do escoamento é uma função do tempo e da posição inicial da partícula. Essa é uma formulação muito utilizada com métodos modelados a partir do movimento de pequenas gotículas ou partículas de fluidos (WHITE, 1999).

Já na formulação euleriana, observa-se uma determinada região do domínio onde acontece o escoamento e analisa-se tudo que acontece ou passa por ela. Pode-se imaginar um volume de controle onde avalia-se como as propriedades do escoamento variam ao longo do tempo (KUNDU; COHEN, 2002). Essa formulação é a utilizada pelos métodos que serão abordados nesta tese, portanto é a única formulação considerada aqui.

2.1 Modelagem matemática

As equações que modelam quaisquer escoamentos são derivadas a partir de princípios físicos de conservação de massa, movimento e energia. O princípio de conservação de massa dita que só é possível haver variação de massa em um volume de controle se houver fluxo entrando ou saindo do mesmo, a equação que modela este princípio é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.1)$$

Em que ρ é a massa específica, \mathbf{u} é o campo de velocidades e ∇ é um operador dado por

$$\nabla = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (2.2)$$

Em que \mathbf{e}_i são vetores da base canônica de um espaço \mathbb{R}^n . Nesta tese, optamos por considerar escoamentos apenas em \mathbb{R}^2 .

A massa específica e viscosidade são constantes devido à natureza do escoamento e do tipo de fluido considerado (newtoniano e incompressível), deste modo a massa específica de uma partícula de fluido não sofre alterações com o tempo, assim

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (2.3)$$

em que $\frac{D\rho}{Dt}$ é a derivada material de ρ . Sua definição é dada por (SOUSA, 2003)

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi, \quad (2.4)$$

que representa a variação de uma propriedade ϕ de uma partícula material do fluido movendo-se no domínio de referencial fixo.

Usando a regra da cadeia na [Equação 2.1](#) e a definição de derivada dada pela [Equação 2.4](#) tem-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

Usando a afirmação da [Equação 2.3](#) (que a derivada material da massa específica é zero) e isolando $\nabla \cdot \mathbf{u}$ da [Equação 2.5](#), a conservação de massa dada na [Equação 2.1](#) fica

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \text{ou seja} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.6)$$

a [Equação 2.6](#) é conhecida como condição de incompressibilidade e deve ser mantida em todo o domínio.

Pode-se deduzir a equação de conservação de quantidade de movimento a partir da segunda lei de Newton, que diz que a taxa de variação temporal da quantidade de movimento de uma partícula é igual a soma resultante das forças que atuam sobre a mesma. Esse conceito é equacionado por

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho \mathbf{f}_b + \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}), \quad (2.7)$$

em que p é a pressão, μ é a viscosidade, \mathbf{f}_b é uma força geralmente associada com a gravidade ou outras forças externas atuando sobre o escoamento. As [Equação 2.6](#) e [Equação 2.7](#) são chamadas de Equações de Navier-Stokes e aqui modelam escoamentos incompressíveis e newtonianos.

Juntamente com a [Equação 2.6](#), a [Equação 2.7](#) forma um sistema de três equações (considerando \mathbb{R}^2 e, portanto, duas componentes para velocidade) que modela escoamentos newtonianos, incompressíveis e isotérmicos e acopla os campos de velocidade e pressão. Para contornar este problema, que gera não linearidades no sistema de equações dificultando sua resolução numérica, será usado um método de projeção, explicado nas próximas subseções, cuja formulação é baseada na decomposição de Helmholtz-Hodge ([LADYZHENSKAYA, 1969](#); [OISHI, 2008](#)), possibilitando o desacoplamento de pressão e velocidade.

2.2 Decomposição de Helmholtz-Hodge

A decomposição de Helmholtz-Hodge diz que um campo vetorial qualquer, suave em um domínio, pode ser decomposto como a soma de dois outros campos: um de divergência nula e outro com rotacional nulo (campo gradiente), sua representação gráfica é apresentada na [Figura 2](#). Este resultado está demonstrado em [Ladyzhenskaya \(1969\)](#) e é a base teórica para os métodos de projeção. Formalmente, dado um campo vetorial \mathbf{w} ele pode ser decomposto da forma

$$\begin{cases} \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \nabla \times \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}, \end{cases} \quad (2.8)$$

em que Ω é o domínio e $\partial\Omega$ sua fronteira.

Sendo \mathbf{u} um campo com divergente nulo e pelo fato de \mathbf{v} ser um campo irrotacional (e portanto existe um campo escalar p de forma que $\mathbf{v} = \nabla p$), ao aplicar o operador divergente na [Equação 2.8](#) tem-se

$$\begin{cases} \nabla^2 p = \nabla \cdot \mathbf{w} \\ \nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}, \end{cases} \quad (2.9)$$

o interesse é encontrar o campo vetorial \mathbf{u} e o campo escalar p . A condição de contorno apresentada na [Equação 2.9](#) é consequência de \mathbf{u} ser paralelo a borda de Ω , $\partial\Omega$. Chamando $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = g$, pode-se verificar a existência de solução para a [Equação 2.9](#). Para garantir a existência de solução para uma equação de Poisson, o termo fonte $\nabla \cdot \mathbf{w}$ e a condição de contorno g devem satisfazer

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega = \int_{\partial\Omega} g d\partial\Omega, \quad (2.10)$$

como $g = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$ e aplicando o teorema da divergência no lado esquerdo da [Equação 2.10](#) tem-se

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} g d\partial\Omega, \quad (2.11)$$

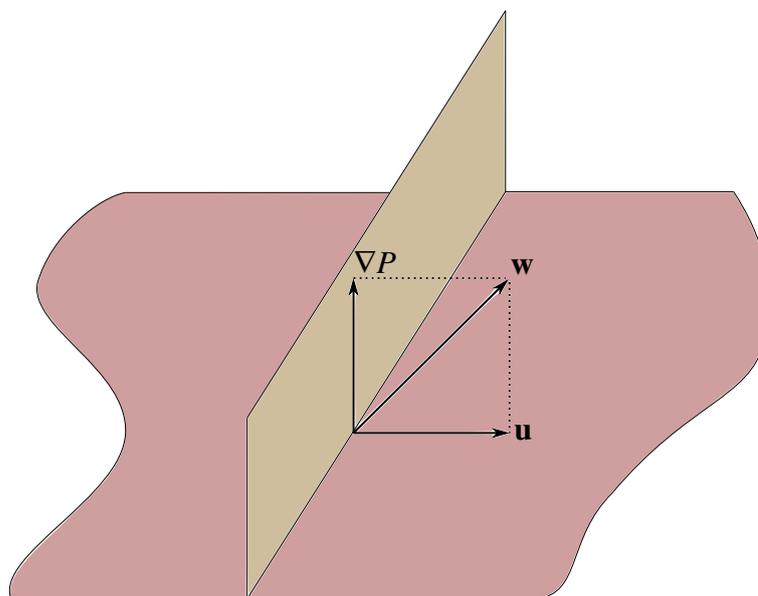
garantindo, portanto, existência da solução para essa equação.

Prosseguindo com o processo de encontrar o campo vetorial \mathbf{u} e o campo escalar p , resolve-se a [Equação 2.9](#). Uma vez encontrado p recupera-se o campo vetorial \mathbf{u} da seguinte forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} - \nabla p. \quad (2.12)$$

Nos métodos de projeção para resolução das equações de Navier-Stokes, resolver a [Equação 2.9](#) é a etapa que consome grande parte do tempo computacional das simulações, tornando o método lento à medida que aumenta o número de células computacionais presentes em malhas de alta resolução, utilizadas para representar o domínio do problema.

Figura 2 – Representação gráfica da decomposição de Helmholtz-Hodge em que se decompõe um campo \mathbf{w} na soma de um campo com divergente nulo \mathbf{u} com um campo gradiente ∇p .



Fonte: Adaptada de [Oishi \(2008\)](#).

2.3 Método da projeção e discretização temporal

Resolver o sistema de equações dado pelas [Equação 2.6](#) e [Equação 2.7](#) de forma acoplada requer alto custo computacional, tornando-se, muitas vezes, inviável. Uma forma de contornar isso é segregar pressão e velocidade e resolver o sistema em dois estágios, usando, portanto, métodos de projeção como os apresentados por [Chorin \(1968\)](#), [Oishi \(2008\)](#), [Quarteroni, Saleri e Veneziani \(2000\)](#). Esses métodos baseiam-se na decomposição de Helmholtz-Hodge, apresentada na [Seção 2.2](#), para calcular os campos de velocidade e pressão separados, usando o cálculo de uma velocidade intermediária, podendo ter, ou não, alguma aproximação para o gradiente de pressão.

Para deduzir o método da projeção para as equações de Navier-Stokes, primeiramente faz-se a discretização temporal da equação de momento. Nesta tese, utilizou-se o método de Euler para discretizar a [Equação 2.7](#). Dessa forma, a [Equação 2.7](#) discretizada no tempo fica

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n) = \frac{1}{\rho} [-\nabla p^{n+1} + \nabla \cdot \mu (\nabla \mathbf{u}^n + \nabla^T \mathbf{u}^n) + \mathbf{f}_b^n], \quad (2.13)$$

nota-se que a pressão é avaliada no tempo $t = t_{n+1}$, uma vez a velocidade \mathbf{u}^{n+1} e a pressão p^{n+1} são calculadas juntas a cada passo de tempo. Rearranja-se a [Equação 2.13](#) da seguinte forma

$$\mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{\rho} \delta t \nabla p^{n+1} = \mathbf{u}^n - \delta t \nabla \cdot (\mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n) + \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot \mu (\nabla \mathbf{u}^n + \nabla^T \mathbf{u}^n) + \mathbf{f}_b^n], \quad (2.14)$$

em que

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \frac{\delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (2.15)$$

é o campo vetorial que será decomposto com a decomposição de Helmholtz-Hodge. Ao aplicar o operador divergente em \mathbf{w}^* e considerando que o campo vetorial \mathbf{u}^{n+1} deve manter o divergente nulo, conforme a [Equação 2.9](#), tem-se a seguinte equação de Poisson

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\rho}{\delta t} \nabla \cdot \mathbf{w}^*. \quad (2.16)$$

O campo vetorial \mathbf{w}^* pode ser interpretado como uma velocidade intermediária quando se aproxima $\nabla p^{n+1} = 0$ e, portanto, calculado da seguinte forma

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{u}^n - \delta t \nabla \cdot (\mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n) + \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot \mu (\nabla \mathbf{u}^n + \nabla^T \mathbf{u}^n) + \mathbf{f}_b^n]. \quad (2.17)$$

Uma vez encontrada a velocidade intermediária \mathbf{w}^* , ela é usada como termo fonte da equação de Poisson, como mostrado na [Equação 2.16](#). Encontrada a pressão p^{n+1} o cálculo de \mathbf{u}^{n+1} segue direto da própria decomposição do campo vetorial usando a [Equação 2.15](#).

Resumindo o procedimento para o método da projeção, tem-se as seguintes etapas:

1. Cálculo de uma velocidade intermediária \mathbf{w}^* com [Equação 2.17](#)
2. Cálculo da pressão p^{n+1} no tempo t_{n+1} com [Equação 2.16](#)
3. Atualização do campo de velocidade \mathbf{u}^{n+1} no tempo t_{n+1} com [Equação 2.15](#).

O esquema deduzido anteriormente é chamado de esquema não incremental, em que não se utiliza nenhuma aproximação para o gradiente de pressão ao calcular a velocidade intermediária. A ordem temporal do método de projeção não incremental é $o(\delta t)$. Vale ressaltar que existem formulações do método de projeção que possuem ordem maior no tempo, é o caso do método de projeção incremental, em que se utiliza o gradiente de pressão no tempo $t = t_n$ como aproximação do gradiente de pressão no tempo $t = t_{n+1}$ no cálculo da velocidade intermediária, este método tem ordem temporal $o(\delta t^2)$.

O principal gargalo na implementação deste método é, justamente, resolver o sistema linear proveniente da discretização da equação elíptica presente no método de projeção. É um processo que usualmente é custoso computacionalmente, requerendo estratégias para diminuir o tempo computacional envolvido. Dentre as diversas estratégias usadas para contornar este problema, podemos citar as que focam em dividir o problema com computação paralela e decomposição de domínio e as que focam em reduzir os graus de liberdade do sistema. Esta última, ligada principalmente ao problema de Navier-Stokes, pode ser feita usando malhas que possuem diversos níveis de refinamento permitindo células mais grossas em regiões de pouco interesse do escoamento. Vale lembrar, também, que a segunda estratégia pode ser combinada com a primeira (SOUSA *et al.*, 2019).

Em se tratando de programação paralela, um problema que afeta a performance dessa abordagem é a comunicação de dados entre os processos. Portanto, para atingir uma boa escalabilidade, a estratégia deve se preocupar em minimizar os momentos em que há comunicação (GHOSH *et al.*, 2022). Métodos de decomposição de domínio como o apresentado em Guiral-dello *et al.* (2018) em geral usam o mínimo de comunicação entre os processos apresentando uma boa escalabilidade (JARAMILLO *et al.*, 2022).

Nesta tese serão apresentadas duas formas de reduzir o custo computacional do sistema: uso de malhas hierárquicas implementadas em paralelo e métodos de decomposição de domínio multiescala. A primeira abordagem será explicada e detalhada no [Capítulo 3](#) e a segunda no [Capítulo 4](#).

2.4 Discretização espacial

Nesta seção será apresentada a discretização espacial dos termos difusivo e advectivo das equações de Navier-Stokes. A discretização da equação da pressão dependerá da abordagem escolhida para reduzir seu custo computacional, tal será detalhada nos [Capítulo 3](#) e [Capítulo 4](#).

A discretização espacial escolhida foi a de volumes finitos, que consiste em dividir o domínio em diversos volumes e observar a variação de uma grandeza passando por ele, respeitando os princípios de conservação. Em cada volume de controle, são formuladas equações integrais das leis de conservação que serão aproximadas numericamente. A discretização aqui apresentada para os operadores diferenciais é equivalente a obtida considerando, em elementos finitos, o espaço de menor ordem de Raviart-Thomás.

Seguiu-se os passos apresentados em Prosperetti e Tryggvason (2007) considerando escoamentos incompressíveis em que a massa específica ρ e viscosidade μ são constantes em todo domínio. Deste modo simplifica-se a [Equação 2.7](#) da seguinte forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}_b + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.18)$$

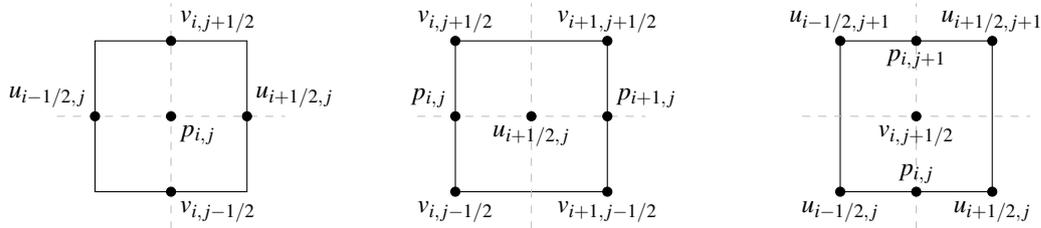
em que ν é a razão μ/ρ e $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$. Como estamos aplicando o método da projeção

para resolver numericamente as equações de Navier-Stokes, é o campo \mathbf{w}^* , advindo do método da projeção, que será discretizado, ou seja,

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{u}^n - \delta t \nabla \cdot (\mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n) + \delta t \mathbf{f}_b + \delta t \nu \nabla^2 \mathbf{u}^n. \quad (2.19)$$

A discretização do domínio foi feita com uma malha estruturada deslocada, cujos volumes de controle para cada grandeza observada (pressão e velocidades em x e y) são mostrados na [Figura 3](#). A pressão é avaliada em centro de célula enquanto as velocidades x e y são avaliadas nas faces leste e oeste para x e norte e sul para y .

Figura 3 – Volumes de controle para pressão e velocidades em x e y em uma malha deslocada. Cada célula (volume de controle) é denotada pelos índices (i, j) , a pressão é avaliada em centro de célula enquanto as velocidades são avaliadas nas faces da mesma. Sendo a velocidade em x avaliada nas faces leste e oeste e a velocidade em y avaliada nas faces norte e sul.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Feitas essas considerações, define-se os operadores discretos $\mathbf{T}(\mathbf{u}^n)$ e $\mathbf{L}(\mathbf{u}^n)$ para os termos advectivo e difusivo das equações de Navier-Stokes da seguinte forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}^n) = \frac{1}{\Delta V} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n) dv = \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{u}^n (\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}) ds \quad (2.20)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}^n) = \frac{1}{\Delta V} \int_V \nabla^2 \mathbf{u}^n dv. \quad (2.21)$$

em que ΔV é a área do volume de controle e S sua superfície e \mathbf{n} é o vetor normal a superfície S .

Na [Equação 2.20](#), usou-se o teorema da divergência para transformar a integral volumétrica em integral de superfície. Este teorema garante que para um campo vetorial contínuo e diferenciável vale a identidade

$$\int_V \nabla \cdot q dv = \oint_S q \cdot \mathbf{n} ds. \quad (2.22)$$

Este teorema pode ser generalizado para campos tensoriais, o caso da [Equação 2.20](#).

Elaborando melhor, a [Equação 2.20](#) pode ser reescrita como

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}^n) = \frac{1}{h^2} \oint_S \mathbf{u}^n (\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}) ds = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \oint_S u_1^n (\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}) ds \\ \oint_S u_2^n (\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}) ds \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

e a Equação 2.21 também é reescrita da seguinte forma

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}^n) = \frac{1}{h^2} \oint_S \nabla \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n} ds = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \oint_S \nabla u_1^n \cdot \mathbf{n} ds \\ \oint_S \nabla u_2^n \cdot \mathbf{n} ds \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Em ambas Equação 2.23 e Equação 2.24, $\mathbf{u}^n = [u_1^n, u_2^n]^T$ em que $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$. Por conta da integral de superfície, considerando os volumes de controle apresentados na Figura 3, deve se considerar quatro vetores normais para cada volume de controle na hora de discretizar essa integral: $\mathbf{n}_N = [0, 1]^T$ para a face norte, $\mathbf{n}_S = [0, -1]^T$ para a face sul, $\mathbf{n}_E = [1, 0]^T$ para a face leste e $\mathbf{n}_W = [-1, 0]^T$ para a face oeste.

Os operadores apresentados nas Equação 2.23 e Equação 2.24 são, basicamente, uma média das quantidades observadas que passam pelo volume de controle. Sua discretização é dada ao discretizar as integrais que os compõem, como mencionado anteriormente, para tal será usada a regra do ponto médio. Adiante vamos elaborar a discretização do componente x_1 tanto da Equação 2.23 quanto da Equação 2.24, para o componente x_2 o procedimento é análogo.

Começando com a Equação 2.23, considerando o segundo volume de controle da Figura 3, divide-se a integral de superfície da seguinte forma

$$\begin{aligned} (T_1)|_{i+1/2,j} &= \frac{1}{h^2} \oint_S u_1^n (\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}) ds = \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\oint_{S_N} u_1^n (\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}_N) ds + \oint_{S_S} u_1^n (\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}_S) ds + \right. \\ &\quad \left. + \oint_{S_E} u_1^n (\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}_E) ds + \oint_{S_W} u_1^n (\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}_W) ds \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Calculando o produto interno entre \mathbf{u} e o vetor normal correspondente a face e usando a regra do ponto médio para aproximar essas integrais tem-se

$$(T_1)|_{i+1/2,j} = \frac{1}{h} [(u_1^n u_2^n)|_{i+1/2,j+1/2} - (u_1^n u_2^n)|_{i+1/2,j-1/2} + (u_1^n)^2|_{i+1,j} - (u_1^n)^2|_{i,j}]. \quad (2.26)$$

Existem quantidades avaliadas nas faces dos volumes de controle, como $(u_1^n)|_{i+1,j}$ e $(u_1^n)|_{i+1/2,j-1/2}$. Elas são aproximadas utilizando uma média dos valores avaliados nos volumes de controle que compartilham essas faces, por exemplo:

$$(u_1^n)|_{i+1,j} = \frac{(u_1^n)|_{i+3/2,j} + (u_1^n)|_{i+1/2,j}}{2} \quad \text{e} \quad (u_1^n)|_{i+1/2,j-1/2} = \frac{(u_1^n)|_{i+1/2,j} + (u_1^n)|_{i+1/2,j-1}}{2}. \quad (2.27)$$

Para a Equação 2.24, as integrais em cada superfície são

$$\begin{aligned} (L_1)|_{i+1/2,j} &= \oint_S \nabla u_1 \cdot \mathbf{n} = \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\oint_{S_N} \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_N ds + \oint_{S_S} \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_S ds + \right. \\ &\quad \left. + \oint_{S_E} \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_E ds + \oint_{S_W} \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_W ds \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Usando o mesmo procedimento mostrado anteriormente,

$$(L_1)|_{i+1/2,j} = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{i+1/2,j+1/2} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{i+1/2,j-1/2} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{i+1,j} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{i,j} \right]. \quad (2.29)$$

Finalmente, para avaliar as derivadas nas faces dos volumes de controle, um esquema de diferenças finitas é utilizado levando, assim, a

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{i+1,j} = \frac{(u_1^n)|_{i+3/2,j} - (u_1^n)|_{i+1/2,j}}{h} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{i+1/2,j-1/2} = \frac{(u_1^n)|_{i+1/2,j} - (u_1^n)|_{i+1/2,j-1}}{h}. \quad (2.30)$$

Desta forma, tem-se devidamente discretizados os termos advectivo e difusivo das equações de Navier-Stokes e, portanto, é possível discretizar \mathbf{w}^* para usar nos métodos que irão discretizar a equação da pressão.

MALHAS HIERÁRQUICAS

Neste capítulo será apresentada a produção publicada em (SOUSA *et al.*, 2019). Será apresentada a malha hierárquica cartesiana representada por uma estrutura de árvore, bem como o esquema de diferenças finitas independente de malha desenvolvido para aproximar derivadas nessa estrutura. Essa ferramenta pode ser utilizada para resolver a equação elíptica que surge no método de projeção apresentado na [Seção 2.3](#), aproveitando-se do fato de permitir refinamentos em áreas de interesse de um escoamento.

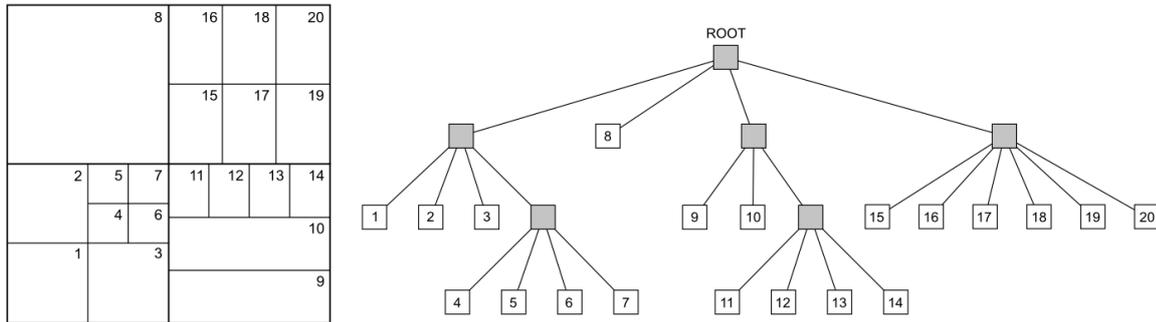
3.1 Formulação do método

Para apresentar o método de diferenças finitas em malhas hierárquicas, inicialmente é preciso apresentar melhor a estrutura de dados que representa a malha hierárquica cartesiana em que será desenvolvido esse método. Além disso, também é necessário apresentar as interpolações que serão responsáveis por calcular os pontos de estênceis de diferenças finitas que não se alinham com a posição das incógnitas da malha. A [Figura 4](#) mostra um exemplo de malha com refinamentos arbitrários juntamente com a estrutura de dados em árvore que representa essa malha. Nela, cada folha pode ser dividida em qualquer configuração de células desde que as células resultantes se mantenham retangulares (ou seja, mantendo o caráter cartesiano da malha). É fácil perceber que malhas do tipo *quadtrees* (em 2D) e *octrees* (em 3D) são casos particulares em que a primeira restringe a divisão das folhas a quatro células e a segunda a oito células.

Uma malha com tal liberdade para refinamentos apresenta dificuldades para os métodos numéricos, principalmente aqueles baseados em diferenças finitas que requerem estênceis que utilizam pontos não alinhados à malha. Nesses casos, o método proposto usa uma interpolação que depende de uma vizinhança de pontos em torno no ponto de interesse, sem necessidade de informações geométricas ou topológicas da malha.

Usaremos um exemplo clássico de discretização de diferenças finitas para introduzir o

Figura 4 – Malha hierárquica com refinamentos arbitrários (à esquerda) e a estrutura em árvore que a representa (à direita). Cada folha da árvore pode ser dividida num número qualquer de células.



Fonte: Sousa *et al.* (2019).

esquema em malhas hierárquicas para aproximar derivada: a equação de Poisson

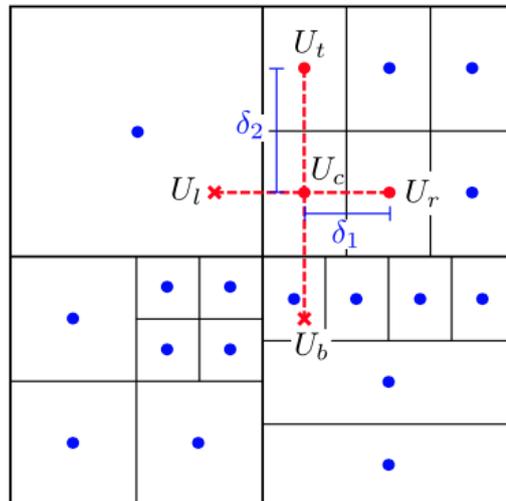
$$\nabla^2 u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \tag{3.1}$$

definida em um domínio retangular $\Omega \in \mathbb{R}^2$ com condições de fronteira apropriadas, vale lembrar que, neste capítulo u será uma incógnita qualquer. Supondo que esse domínio é discretizado com uma malha cartesiana com espaçamentos δ_1 na direção x_1 e δ_2 na direção x_2 , uma aproximação de diferenças finitas padrão de segunda ordem para Equação 3.1 é dada por

$$\frac{1}{\delta x_1^2}(U_l - 2U_c + U_r) + \frac{1}{\delta x_2^2}(U_b - 2U_c + U_t) = f_c, \tag{3.2}$$

em que U_l, U_r, U_t, U_b e U_c são as aproximações de u a esquerda, direita, topo, baixo e centro no estêncil de cinco pontos dessa discretização. Devido a possibilidade de refinamentos arbitrários, é possível que alguns pontos desse estêncil estejam fora de pontos da malha, sejam eles centro de células ou facetas, como pode ser visto na Figura 5.

Figura 5 – Estêncil de diferenças finitas centrais de segunda ordem para discretização da equação de Poisson. As incógnitas são localizadas nos centros das células.



Fonte: Sousa *et al.* (2019).

Em relação aos espaçamentos utilizados nas aproximações de diferenças finitas, utiliza-se os espaçamentos definidos na célula onde o valor central está. Por exemplo, na [Figura 5](#), δ_1 e δ_2 estão definidos na célula que contém U_c , se os outros valores necessários para o estêncil estão em células com o mesmo tamanho (na [Figura 5](#) seria o caso de U_r), nenhum tratamento precisa ser feito. Entretanto, em casos onde esses valores recaem em células com refinamento diferente (por exemplo U_l na [Figura 5](#)), aproxima-se esses valores com algum tipo de interpolação utilizando uma nuvem de pontos na vizinhança de U_c .

Uma interpolação usando pontos da vizinhança de U_c para aproximar algum valor (vamos supor U_l como exemplo didático) que não coincide com pontos da malha pode ser dada por

$$U_l = \sum_{k \in \mathcal{I}_l} w_k^l U_k, \quad (3.3)$$

em que $\mathcal{I}_l = \{i_k, k = 1, \dots, N_l\}$ é o conjunto de índices para os valores na vizinhança de U_c usados na aproximação de U_l . Os coeficientes w_k^l são calculados por algum procedimento de interpolação, nesse caso o método dos Mínimos Quadrados Móveis, explicado mais adiante. O número de vizinhos N_l depende diretamente da ordem desejada para a interpolação, esta deve manter a ordem geral do método, por exemplo, se estamos usando um esquema de diferenças finitas de segunda ordem, a interpolação deve ter, pelo menos, terceira ordem.

De forma análoga, a aproximação de U_b (também necessária pelo estêncil da [Figura 5](#)) é dada por

$$U_b = \sum_{k \in \mathcal{I}_b} w_k^b U_k, \quad (3.4)$$

e, portanto, pode-se escrever a [Equação 3.2](#) da seguinte forma

$$\frac{1}{\delta x_1^2} \left(\sum_{k \in \mathcal{I}_l} w_k^l U_k - 2U_c + U_r \right) + \frac{1}{\delta x_2^2} \left(\sum_{k \in \mathcal{I}_b} w_k^b U_k - 2U_c + U_t \right) = f_c. \quad (3.5)$$

Como os valores U_k da vizinhança de U_c usados são também incógnitas, essa discretização apresentada na [Equação 3.5](#) pode ser escrita em função das incógnitas da forma

$$\sum_{k=1}^{N_u} A_{ck} U_k = f, \quad (3.6)$$

em que N_u é o número total de incógnitas na malha e $c = 1, \dots, N_u$. A [Equação 3.6](#) resulta em um sistema linear da forma $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ em que cada linha de A vem de aproximações similares a apresentada na [Equação 3.5](#).

3.1.1 O método dos mínimos quadrados móveis

O procedimento apresentado anteriormente, pode ser generalizado para qualquer esquema de diferenças finitas em malhas hierárquicas, o número de pontos na vizinhança de U_c necessários dependem da ordem desejada para interpolação e, em casos em que não existem

número suficiente de vizinhos para atingir a ordem esperada, faz-se uma interpolação de ordem menor ou implementa-se um estêncil adaptativo. Neste caso aqui apresentado, as interpolações são feitas usando o método dos mínimos quadrados móveis (BELYTSCHKO *et al.*, 1996; BENITO; URENA; GAVETE, 2001; ZHANG; KWON; YOUN, 2005; ZHENG; DUAN; MA, 2010). Será introduzida aqui uma forma eficiente de calcular essas interpolações de alta ordem para esquemas de diferenças finitas.

Partindo para o método em si, considere um conjunto de funções polinomiais $\Phi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ linearmente independentes de tamanho n , queremos interpolar o valor da função $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a aproximação é dada por

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \Phi_j(\mathbf{x}). \quad (3.7)$$

Para isso, sejam $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^d$, $m > n$ pontos com m valores de funções associados $u_1 = u(\mathbf{x}_1), \dots, u_m = u(\mathbf{x}_m)$, o procedimento para interpolação de u num ponto \mathbf{x} usando o método dos mínimos quadrados móveis consiste em minimizar a seguinte função erro:

$$E(\mathbf{c}) = \|U - u\|_2^2 = \langle U - u, U - u \rangle_\lambda = \sum_{i=1}^m (U(\mathbf{x}_i) - u_i)^2 \lambda_i(\mathbf{x}). \quad (3.8)$$

A Equação 3.8 é uma norma induzida por um produto interno ponderado definido nas funções peso

$$\lambda_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2} \quad (3.9)$$

dependentes da posição \mathbf{x} . O minimizador \mathbf{c} depende da posição onde se está interpolando o valor \mathbf{x} , além disso, é colocado um valor $\varepsilon > 0$ para que não haja divisão por zero ao definir λ_i na Equação 3.9.

Escrevendo a Equação 3.8 na forma matricial, sejam as matrizes $W(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (matriz diagonal de pesos) definida por $W_{ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij} \sqrt{\lambda_i(\mathbf{x})}$ e $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definida por $P_{ij} = \Phi_j(\mathbf{x}_i)$ e o vetor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ tem-se

$$E(\mathbf{c}) = \|WP\mathbf{c} - W\mathbf{u}\|_2^2. \quad (3.10)$$

Portanto, a solução que minimiza o erro é dada por

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = (WP)^\dagger W\mathbf{u} \quad (3.11)$$

em que $(.)^\dagger$ é a notação para matriz pseudo-inversa de Moore-Penrose (QUARTERONI; SACCO; SALERI, 2010). Como a matriz WP não é quadrada, pode-se aplicar a decomposição QR nela resultando em

$$WP = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = [Q_{\parallel} \quad Q_{\perp}] \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

em que $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz ortogonal, $Q_{\parallel} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Q_{\perp} \in \mathbb{R}^{m \times (m-n)}$ são submatrizes de Q e $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz triangular superior. Assim, a Equação 3.10 pode ser reescrita como

$$E(\mathbf{c}) = \|R\mathbf{c} - Q_{\parallel}^t W\mathbf{u}\|_2^2 + \|Q_{\perp}^t W\mathbf{u}\|_2^2 \quad (3.13)$$

de tal forma que a solução é dada por

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = R^{-1}Q_{\parallel}^t W \mathbf{u}, \quad (3.14)$$

e o valor de erro mínimo é

$$E(\mathbf{c}) = \|Q_{\perp}^t W \mathbf{u}\|_2^2. \quad (3.15)$$

Para incorporar os coeficientes $c_j(\mathbf{x})$ da combinação linear mostrada na [Equação 3.7](#) na aproximação das derivadas por diferenças finitas, é necessário calcular os coeficientes w_i que formam a combinação linear dos valores de u_i . Desse modo, das [Equação 3.7](#) e [Equação 3.14](#)

$$U(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^t \Phi = \mathbf{u}^t W Q_{\parallel} R^{-t} \Phi, \quad \text{em que } \mathbf{w} = W Q_{\parallel} R^{-t} \Phi, \quad (3.16)$$

logo,

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}_i). \quad (3.17)$$

A aproximação $U(\mathbf{x})$ também deve interpolar $u_i = u(\mathbf{x}_i)$ nos pontos \mathbf{x}_i tais que

$$u_i = u(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^n c_j \Phi_j(\mathbf{x}_i), \quad (3.18)$$

levando a, ao combinar a [Equação 3.17](#) e [Equação 3.18](#),

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^m w_i \Phi_j(\mathbf{x}_i). \quad (3.19)$$

Ao comparar a definição de $U(\mathbf{x})$ na [Equação 3.7](#) com a [Equação 3.19](#) conclui-se

$$\sum_{j=1}^n c_j \Phi_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^m w_i \Phi_j(\mathbf{x}_i) \quad (3.20)$$

que vale para todo \mathbf{c} que é uma solução do problema de mínimos quadrados mostrado na [Equação 3.10](#), levando a

$$\Phi_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m w_i \Phi_j(\mathbf{x}_i). \quad (3.21)$$

Uma das consequências da [Equação 3.21](#) é que a interpolação com mínimos quadrados móveis permite a recuperação exata das funções de base e em particular, como a [Equação 3.21](#) vale para funções polinomiais de base constantes $\Phi_1(\mathbf{x}) = 1$, os pesos w_i satisfazem

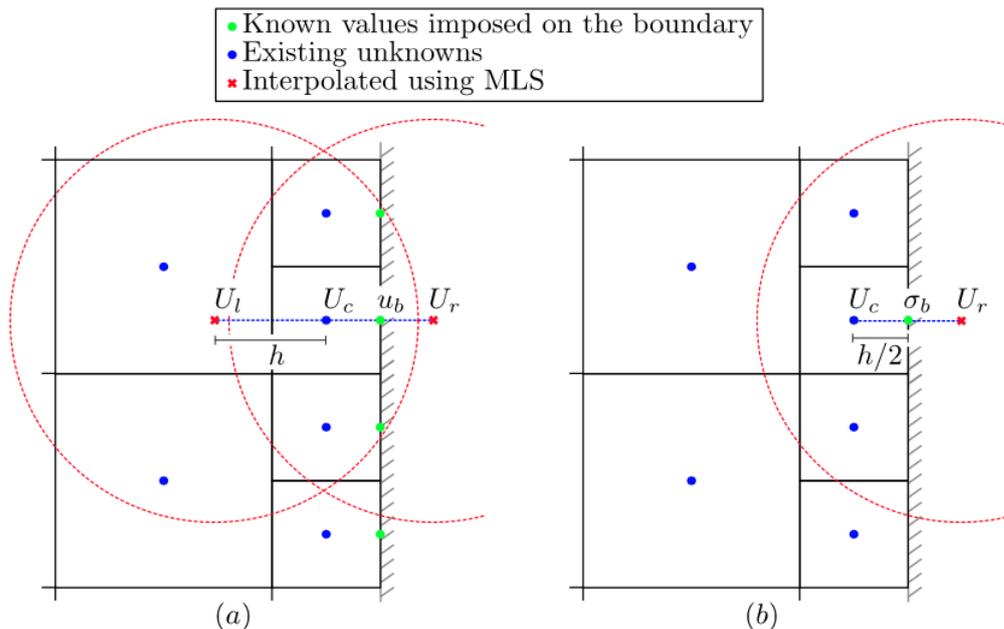
$$\sum_{i=1}^m w_i = 1. \quad (3.22)$$

Mais detalhes sobre o cálculo dos coeficientes w_i dentro da estrutura da malha hierárquica aqui apresentada podem ser encontrados em ([SOUSA et al., 2019](#)).

3.1.2 Considerações sobre as condições de fronteira de Neumann e Dirichlet

Quando definimos condições de contorno e temos que usar um estêncil de diferenças finitas nessa região, dependendo da estratégia escolhida para discretizar as condições de fronteira, necessita-se de pontos fora do domínio computacional. Para os casos de condições de fronteira de Dirichlet, os valores da fronteira são incorporados nos pontos da vizinhança necessários para calcular a aproximação daquele valor do estêncil fora do domínio com mínimos quadrados móveis. Para os casos em que as condições de fronteira são do tipo Neumann $\frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_b$, discretiza-se a condição de fronteira usando diferenças finitas e encontra-se um valor para o ponto em questão. Supondo que estamos no lado direito do domínio, seria o ponto $U_r = U_c + h\sigma_b$, com h o tamanho da menor célula logo antes da fronteira. Assim, modifica-se o estêncil em U_c de acordo para incorporar U_r calculado.

Figura 6 – Discretizações considerando estêncis próximos à fronteira. A figura a) mostra a condição de fronteira de Dirichlet, e a figura b) a discretização utilizando a condição de Neumann. Na primeira, o valor u_b é utilizado para calcular U_r com mínimos quadrados móveis e, na segunda, faz-se a discretização da condição de fronteira e modifica o estêncil de U_c de acordo.



Fonte: Sousa *et al.* (2019).

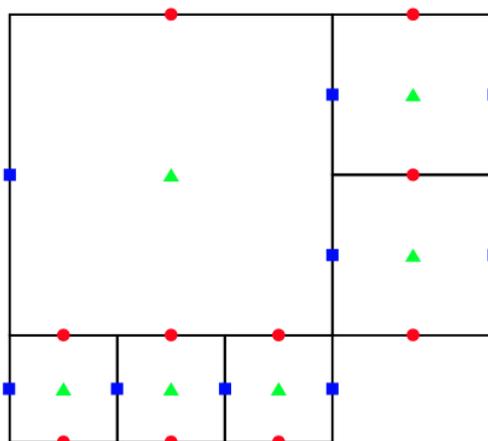
A Figura 6 mostra uma região próxima à fronteira e os pontos perto da mesma para as condições de Dirichlet e Neumann. Em a) o valor u_b é incorporado na vizinhança de pontos (delimitada na figura pelo círculo pontilhado) para calcular U_r usando mínimos quadrados móveis. Em b) tem-se a discretização de σ_b com diferenças finitas. Logicamente, também há o problema de que, perto da fronteira, não ter o número ideal de pontos para montar a interpolação

de mínimos quadrados móveis mantendo a ordem desejada, nesse caso, aumenta-se o raio da vizinhança até conseguir a quantidade de pontos suficiente.

3.1.3 Considerações sobre malha deslocada

Como mencionado no [Capítulo 2](#), a malha utilizada para discretizar as equações de Navier-Stokes é uma malha deslocada. Ou seja, os valores de pressão são avaliados nos centros das células e os valores das velocidades nas facetas das mesmas. Na malha hierárquica, ambiguidades podem surgir por conta de avaliar as velocidades nas facetas das células, um exemplo disso é mostrado na [Figura 7](#).

Figura 7 – Ilustração de uma malha hierárquica deslocada.



Fonte: [Sousa et al. \(2019\)](#).

No caso de ambiguidades, células menores mantêm os valores das velocidades em suas facetas, enquanto células maiores, quando compartilham a face com células menores, perdem os valores ali avaliados, a não ser que esses coincidam com o valor de umas das células menores. Essas situações estão esquematizadas na [Figura 7](#), a célula maior (azul) perde sua incógnita da face direita, mas mantém sua incógnita inferior, pois ela coincide com a incógnita de uma célula menor. Essa estratégia de priorizar a menor célula pode ser trabalhosa em malhas mais gerais como a apresentada na [Figura 4](#), desse modo, para simulações com as equações de Navier-Stokes, as malhas utilizadas serão restritas a casos em que todas as facetas compartilhadas dividem exatamente a faceta da célula maior.

3.2 Resultados

Nessa seção serão apresentados alguns resultados presentes em ([SOUSA et al., 2019](#)), como por exemplo, solução numérica de uma equação de Poisson, testes de convergência, decomposição de Helmholtz-Hodge e escoamento em uma cavidade impulsionada. Desenvolvimentos

como discretização das equações de Navier-Stokes e desenvolvimento do método da projeção não serão detalhados nesta seção já que foram apresentados no [Capítulo 2](#). Outros resultados, mostrando o potencial das malhas hierárquicas, podem ser encontrados diretamente em ([SOUSA et al., 2019](#)).

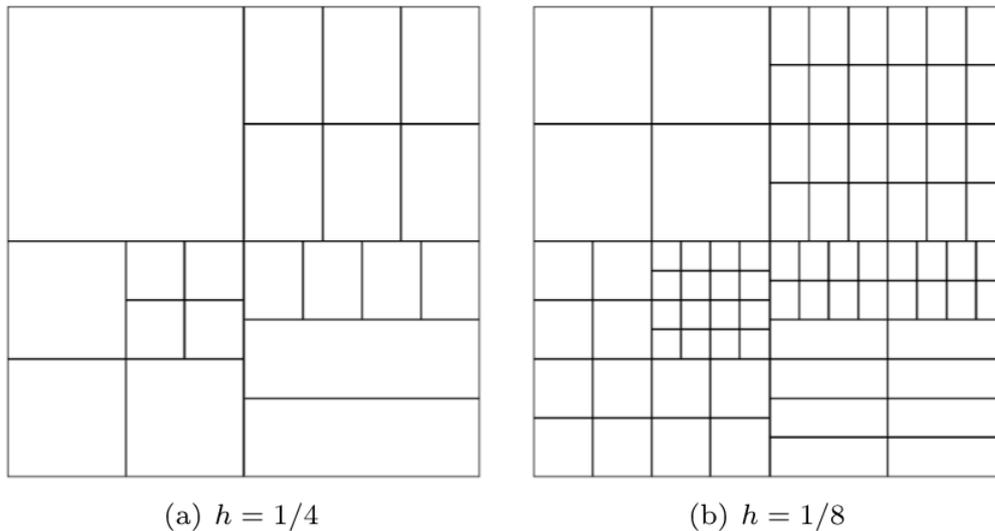
3.2.1 Equação de Poisson numa malha hierárquica geral

O primeiro teste consiste em resolver a equação de Poisson em uma malha com a configuração mostrada na [Figura 4](#) usada para discretizar um domínio $\Omega = [-1, 1]^2$. O tamanho de referência da malha (para fins de refinamento da mesma) é dado por $h = 1/4$, o tamanho da menor aresta. O método foi aplicado para resolver a [Equação 3.1](#) com a seguinte solução analítica

$$u(x, y) = \sin(x) \cos(x) \quad (3.23)$$

em que o termo fonte $f(x, y)$ e as condições de fronteira de Dirichlet foram calculadas manualmente ao substituir a [Equação 3.23](#) em [Equação 3.1](#).

Figura 8 – Refinamentos de malha para resolução da equação de Poisson usando um método de diferenças finitas com as interpolações realizadas com método dos mínimos quadrados móveis.



Fonte: [Sousa et al. \(2019\)](#).

Escolheu-se polinômios de segunda ordem para realizar a interpolação pelo método dos mínimos quadrados móveis. Além disso, a malha base escolhida para realizar esse teste possui várias interfaces sem células coincidentes, ou seja, serão performadas diversas interpolações para resolver a [Equação 3.1](#). Também é avaliada a ordem de convergência do método, para isso, uma série de refinamentos foram feitos partindo de $h = 1/4$ até $h = 1/32$, na [Figura 8](#) são apresentadas as malhas com $h = 1/4$ e $h = 1/8$. A [Tabela 1](#) mostra os resultados obtidos para os refinamentos testados: a ordem de convergência e o erro em duas normas. Esses resultados

mostram a robustez do método mesmo usando malhas que requerem uma grande quantidade de aplicações do método dos mínimos quadrados móveis para lidar com os nós não coincidentes.

Tabela 1 – Erros e ordem de convergência estimada (OCE) para equação de Poisson usando uma malha hierárquica geral

h	$\ u - u_h\ _2$	OCE	$\ u - u_h\ _\infty$	OCE
1/4	1.29e-01	-	1.21e-01	-
1/8	7.06e-03	4.1	8.66e-03	3.8
1/16	1.30e-03	3.3	1.66e-03	3.1
1/32	2.32e-04	3.0	3.14e-04	2.9

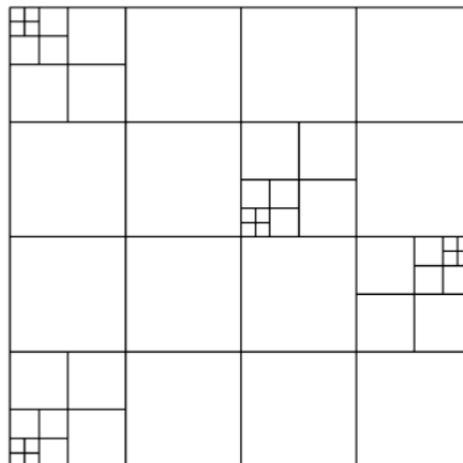
Fonte: Sousa *et al.* (2019).

3.2.2 Convergência em uma malha quadtree não balanceada

Uma das vantagens das interpolações usando mínimos quadrados móveis é conseguir lidar com facilidade com malhas que tem uma variação abrupta de tamanho de células, como por exemplo, malhas do tipo *quadtree* ou *octree* não balanceadas. Interpolações de alta ordem para calcular valores que não estão nessas malhas podem ser complicadas de programar dependendo fortemente da geometria da malha, não é o caso do método aqui apresentado.

Para mostrar como o método lida com malhas não balanceadas, resolveu-se a [Equação 3.1](#) de Poisson numa malha *quadtree* não balanceada. Testes como este já foram documentados na literatura, por exemplo em (MIN; GIBOU; CENICEROS, 2006) e (BATTY, 2017). A malha não balanceada escolhida é apresentada na [Figura 9](#) e discretiza o domínio $[0, \pi]^2$ em que a [Equação 3.1](#) tem seu termo fonte $f(x, y)$ calculado de forma que a solução final seja $u(x, y) = e^{-x-y}$ usando condições de fronteira de Dirichlet adequadas. As interpolações usadas nesse teste usam polinômios de ordem 2 e 3.

Figura 9 – Malha não balanceada para o teste de convergência da solução da equação de Poisson



Fonte: Sousa *et al.* (2019).

Os resultados deste teste estão sumarizados nas [Tabela 2](#) e [Tabela 3](#), a segunda ordem do método fica evidente para u e ∇u quando usados polinômios de grau 3. Há uma queda na ordem de convergência para ∇u quando usados polinômios de grau 2. Em [Sousa et al. \(2019\)](#) ainda são feitas análises a respeito do número de condição das matrizes do sistema linear, além de simular também a resolução de uma equação de Poisson em 3D. No caso da simulação em 3D, a vantagem do método de mínimos quadrados móveis para as interpolações é, justamente, ser de fácil extensão, diferente das interpolações geométricas já presentes na literatura. Os resultados de convergência para o caso 3D apresentados por [Sousa et al. \(2019\)](#) mostram que a ordem de convergência estimada é 2 para u e ∇u usando polinômios de grau 3, consistente com os resultados apresentados para o caso 2D.

Tabela 2 – Erros e ordem de convergência estimada (OCE) para solução numérica da equação de Poisson e seus gradientes usando um polinômio de grau 2 em uma malha *quadtree* não balanceada com condição de fronteira de Dirichlet

h	$\ u - u_h\ _{L_\infty}$	OCE	$\ \nabla u - \nabla u_h\ _{L_\infty}$	OCE
$\pi/32$	2.68e-02	-	2.57e-02	-
$\pi/64$	6.08e-03	2.1	1.07e-02	1.3
$\pi/128$	1.15e-03	2.3	3.18e-03	1.5
$\pi/256$	2.39e-04	2.2	1.03e-03	1.5
$\pi/512$	5.59e-05	2.3	3.24e-04	1.6
$\pi/1024$	1.43e-05	2.3	9.85e-05	1.6
$\pi/2048$	3.73e-06	2.1	3.03e-05	1.6
$\pi/4096$	8.72e-07	2.1	8.76e-06	1.6

Fonte: [Sousa et al. \(2019\)](#).

Tabela 3 – Erros e ordem de convergência estimada (OCE) para solução numérica da equação de Poisson e seus gradientes usando um polinômio de grau 3 em uma malha *quadtree* não balanceada com condição de fronteira de Dirichlet

h	$\ u - u_h\ _{L_\infty}$	OCE	$\ \nabla u - \nabla u_h\ _{L_\infty}$	OCE
$\pi/32$	1.08e-02	-	7.01e-03	-
$\pi/64$	1.80e-03	2.6	2.36e-03	1.6
$\pi/128$	3.18e-04	2.5	6.96e-04	1.7
$\pi/256$	7.65e-05	2.4	1.70e-04	1.8
$\pi/512$	1.90e-05	2.3	4.40e-05	1.8
$\pi/1024$	5.19e-06	2.2	1.08e-05	1.9
$\pi/2048$	1.33e-06	2.2	2.81e-06	1.9
$\pi/4096$	3.36e-07	2.1	7.08e-07	1.9

Fonte: [Sousa et al. \(2019\)](#).

3.2.3 Decomposição de Helmholtz-Hodge

Testes com a decomposição de Helmholtz-Hodge (apresentada na [Seção 2.2](#)) são sempre interessantes para, de forma preliminar, entender como um método pode funcionar ao aplicar

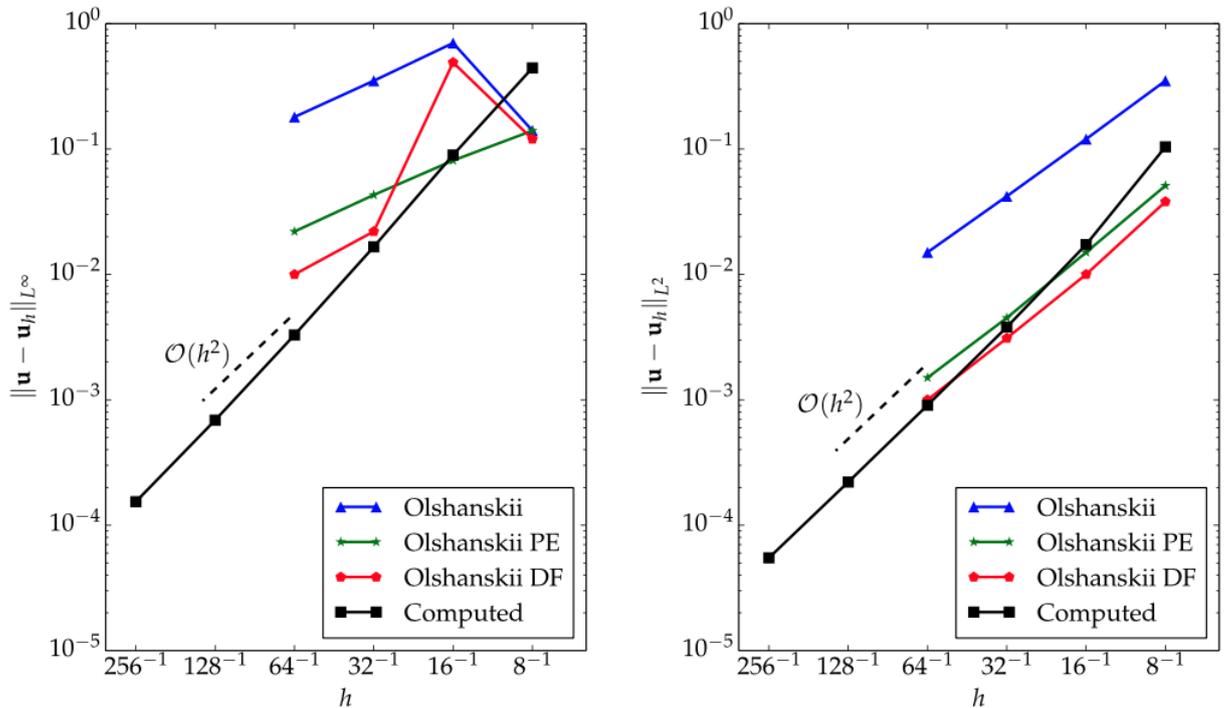
um método de projeção para as equações de Navier-Stokes. [Olshanskii, Terekhov e Vassilevski \(2013\)](#) reportaram instabilidades numéricas na discretização proposta em seu trabalho quando aplicada na decomposição de Helmholtz-Hodge em uma malha deslocada. Nesse caso, foi criado um filtro para lidar com essas instabilidades. Como o intuito é discretizar as equações de Navier-Stokes em malhas hierárquicas generalizadas, é interessante replicar os testes apresentados por [Olshanskii, Terekhov e Vassilevski \(2013\)](#) para verificar a estabilidade do método proposto.

O teste é feito em um domínio quadrado $\Omega = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ discretizado com uma malha com dois níveis de refinamento em que o comprimento característico é $h = h_{min}$ para $x > 1/2$ e $h = 2h_{min}$ para $x < 1/2$, replicando o mesmo problema mostrado por [Olshanskii, Terekhov e Vassilevski \(2013\)](#). Além disso, há solução exata para $p(x_1, x_2)$ e $\mathbf{u}(x_1, x_2) = [u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)]^T$ dadas por

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \sin\left(\frac{2\pi(e^{ay} - 1)}{e^a - 1}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi(e^x - 1)}{e - 1}\right)\right] \frac{ae^{ay}}{2\pi(e^a - 1)} \\ u_2(x_1, x_2) &= -\sin\left(\frac{2\pi(e^x - 1)}{e - 1}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi(e^{ay} - 1)}{e^a - 1}\right)\right] \frac{e^x}{2\pi(e - 1)}, \\ p(x_1, x_2) &= a \cos\left(\frac{2\pi(e^x - 1)}{e - 1}\right) \cos\left(\frac{2\pi(e^{ay} - 1)}{e^a - 1}\right) \frac{e^{a+1}}{(e - 1)(e^a - 1)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

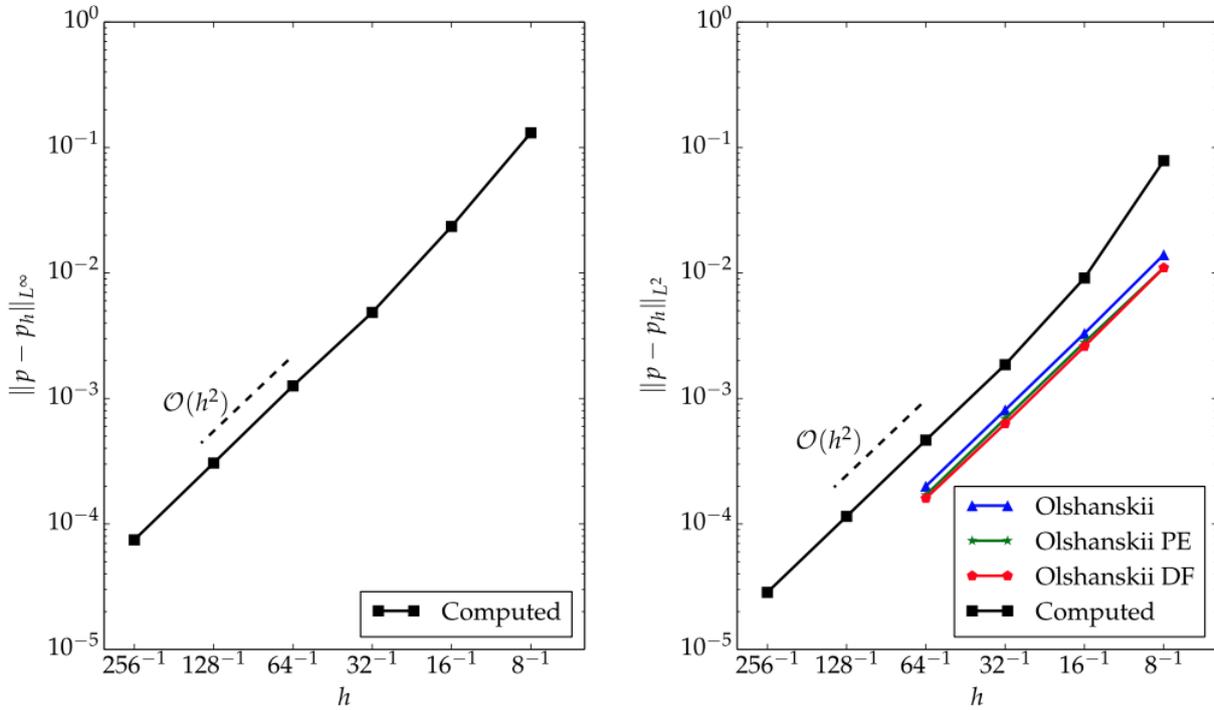
em que $a = 0.1$ é uma constante.

Figura 10 – Erro para \mathbf{u} calculado comparado com os erros obtidos por [Olshanskii, Terekhov e Vassilevski \(2013\)](#)



Fonte: [Sousa et al. \(2019\)](#).

Figura 11 – Erro para p calculado comparado com os erros obtidos por Olshanskii, Terekhov e Vassilevski (2013)



Fonte: Sousa *et al.* (2019).

A Equação 2.9 de Poisson foi discretizada em uma malha deslocada, usou-se um estêncil de diferenças finitas de 5 pontos de segunda ordem com interpolações independentes de malha usando polinômios de grau 2 quando necessário. Comparou-se os resultados obtidos com os reportados em (OLSHANSKII; TEREKHOV; VASSILEVSKI, 2013), mostrados nas Figura 10, para o campo \mathbf{u} usando norma L_∞ , e Figura 11, para pressão p usando norma L_2 . O método proposto apresenta ordem quadrática de convergência para todas as normas de erro consideradas.

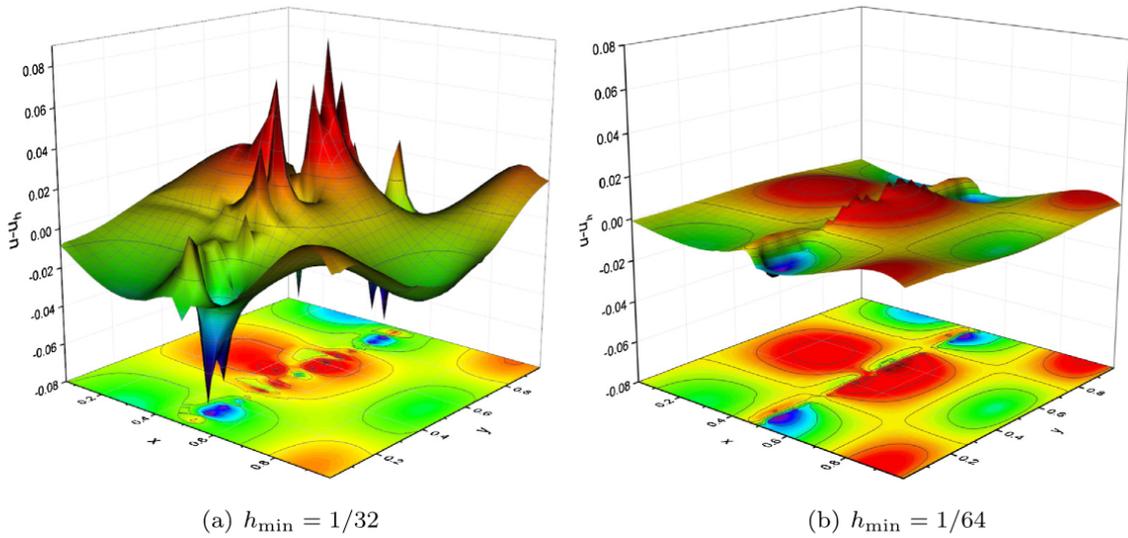
A Figura 12 mostra o erro na componente u_1 do campo \mathbf{u} , observa-se pequenas oscilações no método proposto provenientes do desbalanço do fluxo entre a interface da malha mais grossa para mais fina. Entretanto, não é um erro maior do que os erros no restante no domínio e, com refinamento, esses erros diminuem, mostrando a estabilidade da discretização.

Outro teste numérico interessante, é o da estabilidade da decomposição de Helmholtz-Hodge (BATTY, 2017). Esse teste consiste em múltiplas aplicações da decomposição de Helmholtz-Hodge começando com um campo vetorial \mathbf{u}^0

$$\mathbf{u}^0(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \sin(x_1) \cos(x_2) + x_1(\pi - x_1)x_2^2 \left(\frac{x_2}{3} - \frac{\pi}{2} \right) \\ -\cos(x_1) \sin(x_2) + x_2(\pi - x_2)x_1^2 \left(\frac{x_1}{3} - \frac{\pi}{2} \right) \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

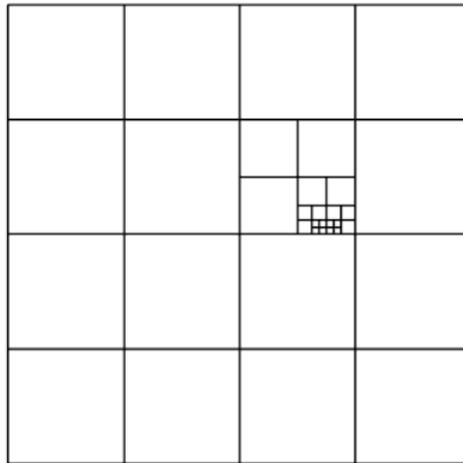
definido em um quadrado $\Omega = [0, \pi]^2$ discretizado pela malha não balanceada ilustrada na Figura 13.

Figura 12 – Erro na componente u_1 do campo \mathbf{u} para duas malhas diferentes, $h_{\min} = 1/32$ e $h_{\min} = 1/64$. As imagens mostram o comportamento do erro com o refinamento da malha.



Fonte: Sousa *et al.* (2019).

Figura 13 – Malha não balanceada utilizada para o teste de estabilidade da decomposição de Helmholtz-Hodge.



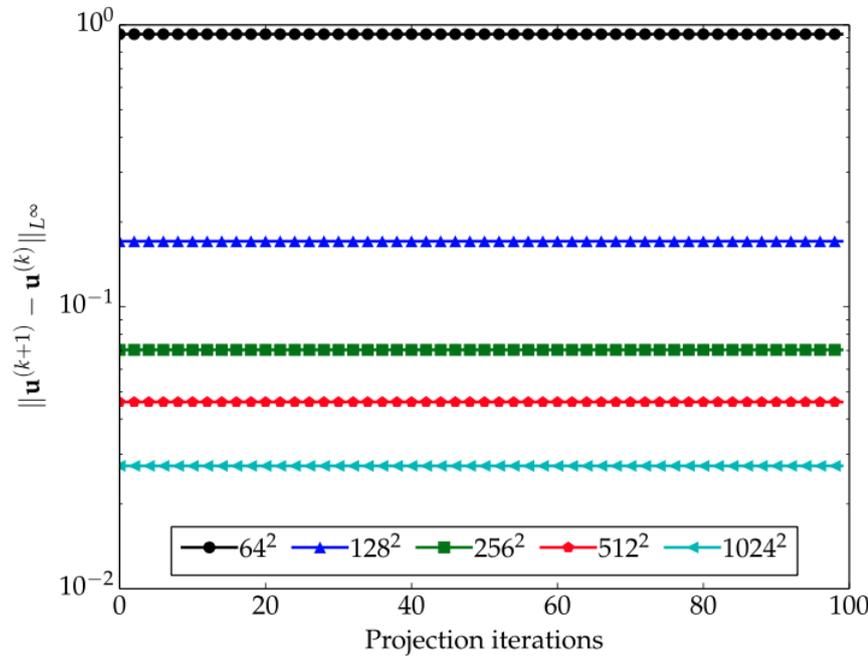
Fonte: Sousa *et al.* (2019).

O procedimento segue resolvendo uma sequência de projeções da forma

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^{k+1} + \nabla p^{k+1} \quad (3.26)$$

em que $\nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0$ para todo $k \geq 0$. Se a decomposição é estável, o erro deve ficar estacionário em todas as sucessivas aplicações da decomposição. A Figura 14 mostra o erro $\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|_{L^\infty}$ que se mantém constante ao longo das aplicações.

Figura 14 – Erro $\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|_{L^\infty}$ em escala logarítmica ao longo de sucessivas aplicações da decomposição de Helmholtz-Hodge.



Fonte: Sousa *et al.* (2019).

3.2.4 Cavidade com Solução Manufaturada

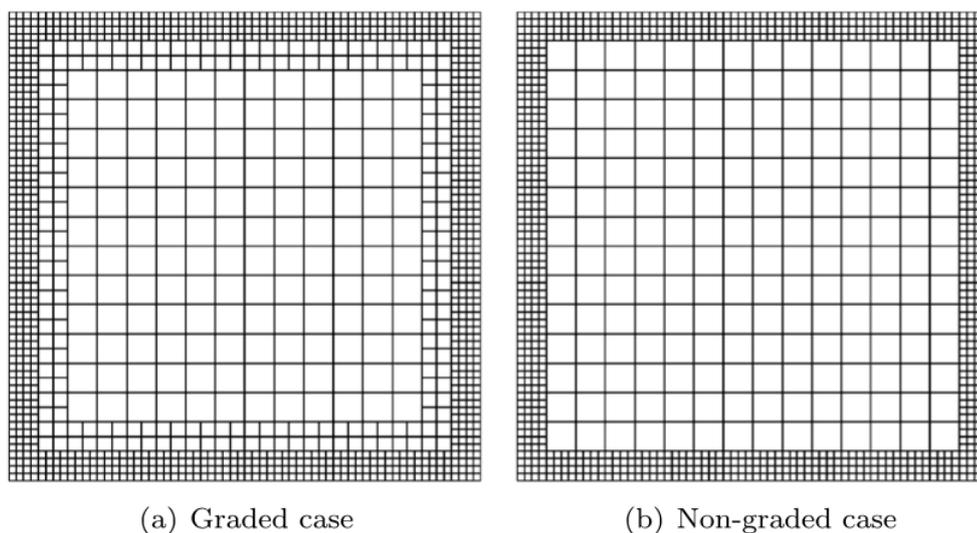
O escoamento em uma cavidade é um teste muito utilizado para verificar métodos numéricos, nesta seção, serão apresentados os resultados obtidos com o método proposto para esse tipo de escoamento. Para realizar uma análise de convergência nesse contexto, usou-se uma solução estacionária manufaturada publicada por Shih, Tan e Hwang (1989). O domínio computacional é dado por um quadrado $\Omega = [0, 1]^2$ com $Re = 100$, onde Re é o número de Reynolds.

Os resultados foram obtidos utilizando uma malha balanceada e uma malha não balanceada, como mostradas na Figura 15, em que $h_{min} = 1/64$ e $h_{max} = 1/16$ para ambas. Acoplou-se o método da projeção mostrado na Seção 2.3 com a metodologia aqui proposta, que foi utilizada para discretizar a equação de Poisson que surge no método da projeção e os termos advectivo e difusivo da equação de momento. O sistema linear proveniente da discretização da equação de Poisson foi resolvido com o método GMRES utilizando a biblioteca PETSc (BALAY *et al.*, 2019; BALAY *et al.*, 2001). Finalmente, as interpolações com mínimos quadrados móveis foram realizadas utilizando polinômios de grau 2.

As simulações foram realizadas para as equações de Navier-Stokes transientes até que a solução estacionária fosse atingida para então calcular os erros na velocidade e pressão comparando com a solução manufaturada apresentada em (SHIH; TAN; HWANG, 1989). A Figura 16 mostra as curvas de convergência para os casos com malha balanceada e não balanceada, o

método atinge segunda ordem, resultado consistente com os apresentados anteriormente. Apesar da malha não balanceada ter menos células em comparação com a malha balanceada e as transições entre os níveis de refinamento serem abruptas, a ordem de convergência é mantida com erros ligeiramente maiores.

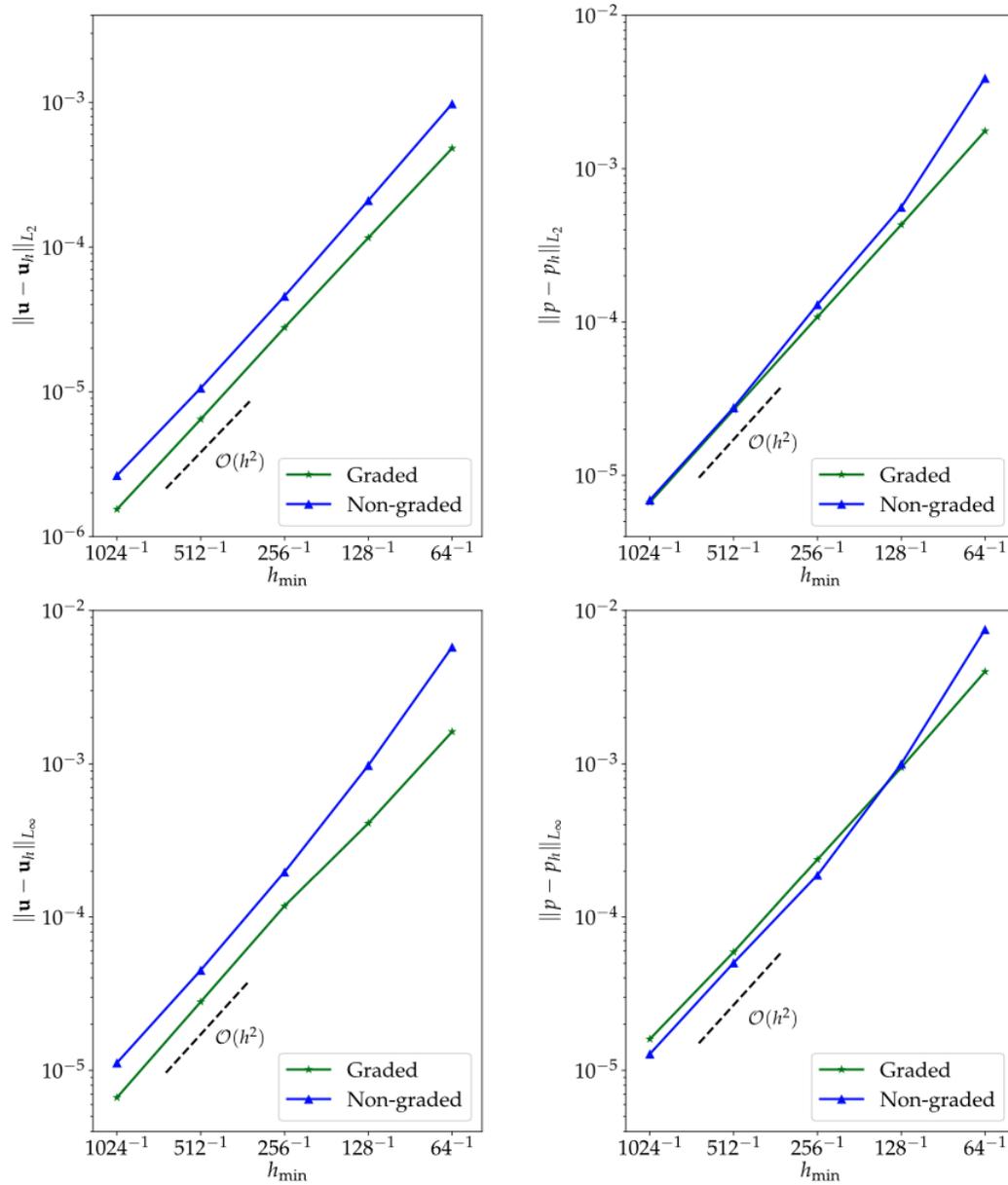
Figura 15 – Malhas usadas para os testes da cavidade impulsionada 2D. Ambas correspondem a $h_{min} = 1/64$ e $h_{max} = 1/6$.



Fonte: [Sousa et al. \(2019\)](#).

Em [Sousa et al. \(2019\)](#), é possível encontrar mais resultados aplicando esse método, como por exemplo, análise de convergência para equação de Poisson em um domínio 3D, escoamento em cavidade impulsionada 3D e um escoamento em canais complexos em 3D. Todos esses resultados mostram e atestam a estabilidade do método e a capacidade do mesmo de manter as ordens de convergência esperadas.

Figura 16 – Convergência nas normas L_2 (topo) e L_∞ (embaixo) para os erros de velocidade (esquerda) e pressão (direita).



Fonte: Sousa *et al.* (2019).

DECOMPOSIÇÃO DE DOMÍNIO E O MÉTODO DE PROJEÇÃO MULTIESCALA

A ideia principal dos métodos de decomposição de domínio multiescala é dividir o domínio em subdomínios e resolver problemas locais semelhantes ao global em cada subdomínio. O acoplamento das soluções locais de cada subdomínio é feito resolvendo-se um problema global de interfaces muito menor que o problema original. Tal estratégia tem mostrado ótimos resultados na redução de custo computacional, além de ser um método com escalabilidade próxima ao ideal quando usado em paralelo.

Este capítulo visa apresentar o método de projeção multiescala, ou seja, elaborar os conceitos de decomposição de domínio e método multiescala presentes em [Francisco *et al.* \(2014\)](#), [Guiraldello *et al.* \(2018\)](#) e [Mehmani e Balhoff \(2014\)](#) que irão resolver a equação elíptica que surge ao aplicar o método de projeção nas equações de Navier-Stokes. Pretende-se explorar essas ideias com intuito de reduzir o tempo computacional nessa etapa. Com este tipo de método, pretende-se trocar a resolução de um sistema linear global no número total de incógnitas pela resolução em paralelo de problemas locais bem menores acrescidos de um sistema global com número reduzido de incógnitas, dependente do acoplamento exigido em escala maior que a escala fina, nas interfaces entre subdomínios.

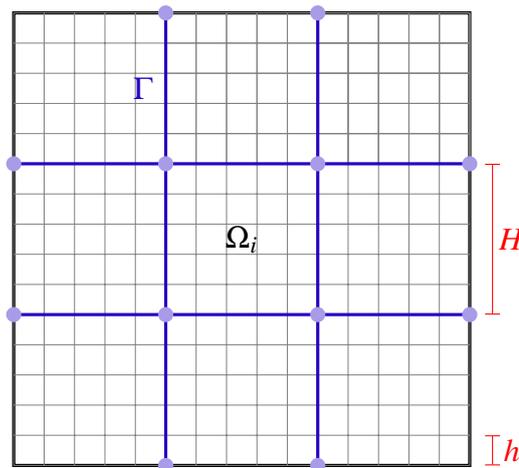
4.1 Método de projeção multiescala

Como já mencionado na introdução deste trabalho, o método de decomposição de domínio multiescala escolhido foi o MRCM apresentado por [Guiraldello *et al.* \(2018\)](#). A ideia principal deste método é impor uma condição de Robin nas bordas dos subdomínios ao resolver os problemas locais, tanto deste quanto em outros métodos multiescala, há mais de uma resolução de malha envolvida. Nomeamos de malha fina a malha que compõe os subdomínios, a menor discretização dos elementos da malha; e a malha grossa como a decomposição de domínio, ou

seja a malha cujos elementos tem as arestas do tamanho das interfaces dos subdomínios.

A Figura 17 ilustra uma decomposição de domínio usada no MRCM (GUIRALDELLO *et al.*, 2018). A malha grossa tem tamanho de aresta H (escala dos subdomínios) e a malha fina tem tamanho de aresta h (escala de malha fina, das células da malha). Um sistema global resolvido nesta malha fina da Figura 17 envolveria 225 células com três incógnitas cada uma (pressão, velocidade em x e velocidade em y), enquanto que com o MRCM seriam resolvidos nove problemas locais nos subdomínios (com 25 células com três incógnitas cada) sem comunicação entre eles e um sistema global reduzido com doze interfaces entre subdomínios, com pelo menos duas incógnitas cada (pressão e velocidade normal à interface). O número total de incógnitas nas interfaces depende de condições que serão descritas mais adiante. Esta técnica torna-se vantajosa em paralelo pois reduz a comunicação necessária entre os subdomínios e também a ordem de grandeza do sistema global resolvido.

Figura 17 – Malhas envolvidas no método MRCM. A malha na escala fina consiste em células menores de aresta com tamanho h , enquanto a malha de escala mais grossa é composta pelos subdomínios com tamanho de aresta H . No caso da figura, em particular, $H = 5h$. Cada subdomínio é representado por Ω_i e as interfaces por Γ



Fonte: Elaborada pelo autor.

O MRCM é um método de decomposição de domínio multiescala que vem de uma formulação mista de elementos finitos, cuja ideia principal baseia-se em impor condições de fronteira de Robin nas interfaces entre subdomínios. Este método oferece grande flexibilidade para escolha das incógnitas nas interfaces na forma de dois multiplicadores de Lagrange V_H e P_H que fazem o acoplamento da solução em cada subdomínio. Os multiplicadores de Lagrange aparecem nas condições de contorno dos problemas locais resolvidos no MRCM, dados por

$$-\beta(\mathbf{x}) \mathbf{v}_h^i \cdot \mathbf{n}^i + p_h^i = -\beta(\mathbf{x}) V_H \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^i + P_H, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_i \subset \partial\Omega_i, \quad (4.1)$$

em que \mathbf{n}^i é o vetor normal apontando para fora do subdomínio Ω_i , \mathbf{n} é um vetor normal de referência e \mathbf{v}_h^i e p_h^i são as soluções locais em Ω_i para fluxo e pressão.

A [Equação 4.1](#) depende de um parâmetro $\alpha(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})/H$ que permite transitar entre os métodos MHM e MMMFEM: se $\alpha \rightarrow 0$ em todo domínio, a solução do MRCM tende para uma solução do tipo MMMFEM; se $\alpha \rightarrow \infty$, a solução recuperada tende para uma solução de MHM. Com uma escolha certa de parâmetros também é possível recuperar a solução dada pelo MuMM. A escolha do parâmetro α , além de trazer flexibilidade, permite o desenvolvimento de estratégias adaptativas, uma vez que o menor erro pode acontecer para valores intermediários de α , como foi demonstrado em ([GUIRALDELLO et al., 2018](#)) para problemas heterogêneos em meios porosos. Essa questão será discutida mais adiante nesta tese.

Para aplicar um método de decomposição de domínio multiescala com formulação mista de elementos finitos, é necessário identificar o problema elíptico do método da projeção apresentado na [Seção 2.3](#) com o problema misto. Partindo da equação de conservação de quantidade de movimento semi-discreta no tempo ([2.8](#))

$$\mathbf{u}^{n+1} + \underbrace{\frac{\delta t}{\rho} \nabla p^{n+1}}_{\mathbf{v}^{n+1}} = \underbrace{\mathbf{u}^n - \delta t \nabla \cdot (\mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n) + \delta t \nu \nabla^2 \mathbf{u}^n + \delta t \mathbf{f}_b^n}_{\mathbf{w}^*}, \quad (4.2)$$

onde \mathbf{u}^{n+1} é um campo solenoidal e $\mathbf{v}^{n+1} = \frac{\delta t}{\rho} \nabla p^{n+1}$ é um campo vetorial com rotacional nulo, como apresentado na [Equação 2.8](#). Resumindo, tem-se

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{w}^* \quad (4.3)$$

resultando no problema elíptico misto: encontrar $(\mathbf{v}^{n+1}, p^{n+1})$ tal que

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = -\nabla \cdot \mathbf{w}^* & \text{in } \Omega \\ \mathbf{v}^{n+1} = \frac{\delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{v}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.4)$$

Desta forma, o problema elíptico está enunciado da mesma forma que problemas de escoamentos em meios porosos usando lei de Darcy, e assim o MRCM pode ser aplicado diretamente a este problema sem grandes alterações. Uma vez resolvido [4.4](#) usando o MRCM em um domínio como o representado na [Figura 17](#), a velocidade dada pelo método da projeção \mathbf{u}^{n+1} pode ser calculada usando [Equação 4.3](#). A esta estratégia, daremos o nome de **projeção multiescala**.

Resumindo o método de projeção multiescala, resolve-se o sistema [Equação 4.4](#) em subdomínios sem sobreposição Ω_i de Ω com a escala de malha fina h e de malha grossa H definidas como descrito na [Figura 17](#). Chamamos de esqueleto Γ o conjunto de interfaces desses subdomínios e $\mathcal{E}_h \subset \Gamma$ todas as arestas de malha fina dentro desse esqueleto.

4.2 O método MRCM para o problema elíptico misto

Os espaços de interface \mathcal{U}_H e \mathcal{P}_H são definidos como subespaços do espaço de funções

$$\mathcal{F}_h(\mathcal{E}_h) = \{f : \mathcal{E}_h \rightarrow \mathbb{R}; f|_e \in \mathbb{P}_0, \forall e \in \mathcal{E}_h\}, \quad (4.5)$$

ou seja, espaços de funções definidas por partes nas arestas do esqueleto Γ . O MRCM calcula soluções \mathbf{v}_h^i e p_h^i para a Equação 4.4 em cada subdomínio Ω_i e valores globais V_H e P_H satisfazendo os seguintes problemas locais

$$\begin{cases} \mathbf{v}_h^i = -\delta t \nabla p_h^i & \text{in } \Omega_i \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_h^i = -\nabla \cdot \mathbf{w}_h^i & \text{in } \Omega_i \\ -\beta_i \mathbf{v}_h^i \cdot \check{\mathbf{n}}^i + p_h^i = -\beta_i V_H \check{\mathbf{n}} \cdot \check{\mathbf{n}}^i + P_H & \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma \\ \mathbf{v}_h^i \cdot \check{\mathbf{n}}^i = 0 & \text{on } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \end{cases} \quad (4.6)$$

e condições de compatibilidade dadas por

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i \cap \Gamma} (\mathbf{v}_h^i \cdot \check{\mathbf{n}}^i) \psi_H d\Gamma = 0 \\ \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i \cap \Gamma} \beta_i (\mathbf{v}_h^i \cdot \check{\mathbf{n}}^i - V_H \check{\mathbf{n}} \cdot \check{\mathbf{n}}^i) \phi_H (\check{\mathbf{n}} \cdot \check{\mathbf{n}}^i) d\Gamma = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

que devem ser satisfeitas para cada par de funções $(\phi_H, \psi_H) \in \mathcal{U}_H \times \mathcal{P}_H$. A partir daqui o supra-índice n , antes usado para denotar o tempo computacional, será ignorado para manter a notação mais legível, desta forma os supra-índices indicarão o subdomínio em que essas soluções foram calculadas.

A solução do método de decomposição de domínio multiescala é escrita como uma soma de funções de base chamadas aqui de funções de base multiescala (FBMs). Para obter essas funções de base, resolve-se um problema local homogêneo e, então, constrói-se solução homogênea, essa etapa pode ser feita antes de iterar o método no tempo, sendo uma etapa offline do processo. A cada iteração no tempo, resolve-se o problema particular e, somando a solução particular com a homogênea, tem-se a solução final. Em suma sejam

$$\mathbf{v}_h^i = \widehat{\mathbf{v}}_h^i + \bar{\mathbf{v}}_h^i \quad \text{and} \quad p_h^i = \widehat{p}_h^i + \bar{p}_h^i \quad (4.8)$$

as soluções locais, $\widehat{\mathbf{v}}_h^i$ e \widehat{p}_h^i é a parte homogênea da solução, obtida resolvendo

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{v}}_h^i = -\delta t \nabla \widehat{p}_h^i & \text{in } \Omega_i \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{v}}_h^i = 0 & \text{in } \Omega_i \\ -\beta_i \widehat{\mathbf{v}}_h^i \cdot \check{\mathbf{n}}^i + \widehat{p}_h^i = -\beta_i V_H \check{\mathbf{n}} \cdot \check{\mathbf{n}}^i + P_H & \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma \\ \widehat{\mathbf{v}}_h^i \cdot \check{\mathbf{n}}^i = 0 & \text{on } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \end{cases} \quad (4.9)$$

em cada subdomínio Ω_i e $\bar{\mathbf{v}}_h^i$ e \bar{p}_h^i é a solução particular proveniente do sistema local

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{v}}_h^i = -\delta t \nabla \bar{p}_h^i & \text{in } \Omega_i \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}_h^i = -\nabla \cdot \mathbf{w}_h^i & \text{in } \Omega_i \\ -\beta_i \bar{\mathbf{v}}_h^i \cdot \check{\mathbf{n}}^i + \bar{p}_h^i = 0 & \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma \\ \bar{\mathbf{v}}_h^i \cdot \check{\mathbf{n}}^i = 0 & \text{on } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.10)$$

É a solução homogênea que é escrita como uma soma das funções de base multiescala, para calcular o conjunto de funções de base é necessário especificar os espaços de interface \mathcal{U}_H e \mathcal{P}_H . Seja $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_U}\} \in \mathcal{U}_H \subset \mathcal{F}_h$ o conjunto de funções de base que geram \mathcal{U}_H com dimensão N_U , analogamente, seja $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_P}\} \in \mathcal{P}_H \subset \mathcal{F}_h$ o conjunto que gera \mathcal{P}_H , com dimensão N_P . Escolhe-se o número de graus de liberdade de cada incógnita na interface k_U e k_P , em função desses, é possível determinar a dimensão de cada espaço $N_U = k_U \times N_I$ e $N_P = k_P \times N_I$, com N_I representando o número de elementos no esqueleto Γ . Sendo assim, as incógnitas na interface são escritas como

$$U_H = \sum_{\ell=1}^{N_U} U_\ell \phi_\ell \quad \text{and} \quad P_H = \sum_{\ell=1}^{N_P} P_\ell \psi_\ell \quad (4.11)$$

e serão inseridas na [Equação 4.9](#).

Pelo princípio da sobreposição, o conjunto de funções de base multiescala (que dão as soluções $\widehat{\mathbf{v}}_h^i$ e \widehat{p}_h^i quando combinadas linearmente) é obtido resolvendo problemas locais do tipo da [Equação 4.9](#) combinando $U_H = \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_U}$ com $P_H = 0$ e $P_H = \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_P}$ com $U_H = 0$. Se essas bases nas interfaces são escolhidas de modo a ter apenas um elemento na escala mais grossa $\Gamma_{ij} \subset \Gamma$ como suporte, o número de funções de base multiescala por subdomínio i será $k_U + k_P$ vezes o número de interfaces de Ω_i , no caso, como são subdomínios quadrados (em 2D), 4. Ou seja, tem-se $4 \times (k_U + k_P)$ funções de base multiescala por subdomínio sem tocar a fronteira física do domínio $\partial\Omega$. A parte não homogênea da solução é encontrada resolvendo a [Equação 4.10](#).

A solução do problema local dada pelas [Equação 4.9](#) e [Equação 4.10](#) resulta em um sistema linear esparsa da forma $\mathbf{A}^i \mathbf{x}^i = \mathbf{b}^i$ que depende diretamente do método usado para discretizar espacialmente as derivadas nas [Equação 4.9](#) e [Equação 4.10](#). Apesar de o MRCM ser um método de elementos finitos mistos, esses problemas locais podem ser discretizados independentemente, usando qualquer método que se aplique ou queira desde que comporte condições de fronteira de Robin nas interfaces, tais como Elementos Finitos, Diferenças Finitas ou Volumes Finitos.

Com o conjunto completo de funções de base multiescala, calcula-se os coeficientes da combinação linear na [Equação 4.11](#). Para isso, com as [Equação 4.8](#) e [Equação 4.11](#) inseridas na [Equação 4.7](#), expande-se a combinação linear e testa para todas as $N_U + N_P$ funções de base nas interfaces. Isso resulta em um sistema linear global da forma $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{x} = [U_1, \dots, U_{N_U}, P_1, \dots, P_{N_P}]^T$ são os coeficientes necessários para acoplar as soluções locais (\mathbf{v}_h^i, p_h^i) e formar a solução global final (\mathbf{v}_h, p_h) . Detalhes a respeito da montagem do sistema linear global pode ser vistos em ([GUIRALDELLO et al., 2020](#); [JARAMILLO et al., 2021](#); [ROCHA et al., 2022](#)).

Neste ponto, faz-se um adendo à discretização espacial apresentada na [Seção 2.4](#). Uma vez calculada a discretização de \mathbf{w}^* com os métodos apresentados em [Seção 2.4](#), calcula-se o divergente de \mathbf{w}^* para colocá-lo como termo fonte dos sistemas dados pelas [Equação 4.4](#) e

Equação 4.6 fazendo a multiplicação matriz vetor $D\mathbf{w}^*$ em que D é a representação matricial do operador divergente discreto. Aqui, usou-se um esquema central para aproximar as derivadas do operador divergente e gradiente.

Desse modo, define-se uma matriz M dada por

$$M = \begin{bmatrix} 0 & D \\ G & I \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

em que D é a matriz do operador divergente discreto, G é a matriz do operador gradiente discreto, I é a matriz identidade e 0 uma matriz nula. A representação matricial do sistema a ser resolvido é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & D \\ G & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

em que P é a pressão Q é o vetor de fluxos, F_1 é o termo fonte e F_2 é o vetor de multiplicadores de Lagrange. Assim, o sistema pode ser reescrito como

$$DQ = F_1 \quad \text{e} \quad GP + Q = F_2, \quad (4.14)$$

$$Q = F_2 - GP, \quad DF_2 - DGP = F_1, \quad \text{e} \quad DGP = -F_1 + DF_2, \quad (4.15)$$

assim, elimina-se as incógnitas de fluxo utilizando o complemento de Schur. Logo, o sistema que é, de fato resolvido é $DGP = -F_1 + DF_2$, pois as outras operações não passam de multiplicações e somas de matrizes e vetores. Esse procedimento é aplicado nos sistemas locais e a decomposição LU foi utilizada para resolvê-lo.

4.3 Regularização do campo final de velocidades, estratégia de *downscaling*

Uma das desvantagens do método multiescala é que não há garantia de continuidade em malha fina para o fluxo, tampouco para pressão. Isso acontece pois as condições de compatibilidade são satisfeitas na escala das interfaces H e não na escala de malha fina h . A continuidade da solução entregue pelo MRCM na malha fina depende do parâmetro α : se $\alpha = 0$ em todo domínio, a solução do MRCM tende para solução do MMMFEM que garante continuidade do campo de pressão na escala de malha fina h , mas não do fluxo. Se $\alpha \rightarrow \infty$ em todo domínio, a solução do MRCM tende para solução do MHM, que garante continuidade na malha fina para o campo de fluxo e não para pressão. Como em (GUIRALDELLO *et al.*, 2018), foi mostrado que valores de α longe dos extremos entregavam soluções com menores erros relativos, nesses casos tanto a pressão quanto o fluxo não eram contínuos na malha fina.

Esse é um problema bem conhecido em escoamentos em meios porosos em que os métodos multiescala são acoplados com equações de transporte (bifásico, *black oil*, etc), nesses

casos há a exigência do fluxo ser contínuo na escala de malha fina. No método da projeção com MRCM essa também é uma exigência, uma vez que o fluxo retornado pelo MRCM é usado para calcular a velocidade final do passo de tempo.

Para lidar com esse problema, faz-se a regularização do campo de fluxo com um processo chamado *downscaling*, muito usado na literatura em meios porosos (JENNY; LEE; TCHELEPI, 2003; FRANCISCO *et al.*, 2014; GUIRALDELLO *et al.*, 2020). O mais comum é calcular a média dos fluxos nas interfaces, usá-las como condição de fronteira de Neumann e calcular um campo de fluxo novo, contínuo em todo domínio. O MRCM testou essa abordagem em (ROCHA *et al.*, 2020) juntamente com outras técnicas (GUIRALDELLO *et al.*, 2020). Entretanto, neste trabalho, optou-se por usar a estratégia da média por simplicidade.

Considerando uma interface Γ_{ij} entre dois subdomínios Ω_i e Ω_j , como $\mathbf{v}_h^i|_{\Gamma_{ij}}$ (o fluxo do lado de Ω_i) é diferente de $\mathbf{v}_h^j|_{\Gamma_{ij}}$ (o fluxo do lado de Ω_j), uma média de fluxos ao longo de Γ_{ij} é calculada para obter um fluxo único

$$\tilde{\mathbf{V}}_h^{ij} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{v}_h^i|_{\Gamma_{ij}} + \mathbf{v}_h^j|_{\Gamma_{ij}} \right). \quad (4.16)$$

Entretanto, esse procedimento quebra a conservação de massa ao longo dos subdomínios, portanto, para recuperar essa conservação de massa na escala de malha fina h , resolve-se problemas locais adicionais usando as médias dos fluxos como condição de contorno de Neumann. Os problemas locais ficam da seguinte forma

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{v}}_h^i = -\delta t \nabla \tilde{p}_h^i & \text{em } \Omega_i \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_h^i = -\nabla \cdot \mathbf{w}_h^i & \text{em } \Omega_i \\ \tilde{\mathbf{v}}_h^i \cdot \mathbf{n}^i = \tilde{\mathbf{V}}_h^{ij} \cdot \mathbf{n}^i & \text{em } \Gamma_{ij} \\ \tilde{\mathbf{v}}_h^i \cdot \mathbf{n}^i = 0 & \text{on } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.17)$$

e são resolvidos em cada um dos subdomínios, resultando em uma solução global $(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{p}_h)$ com fluxo contínuo na escala de malha fina e conservação de massa garantida. Para remover a singularidade na pressão da Equação 4.17, impõe-se um valor de pressão em algum ponto do domínio.

Com esse procedimento, atualiza-se a velocidade no método de projeção com MRCM

$$\mathbf{u}_h^{i,n+1} = \mathbf{w}_h^{i,*} - \tilde{\mathbf{v}}_h^i, \quad (4.18)$$

permitindo o cálculo de um campo de velocidades \mathbf{u}_h^{n+1} que será usado no próximo passo de tempo. O divergente do campo resultante continua sendo zero pois a Equação 4.17 é garantida em cada subdomínio. Apesar de esse procedimento adicionar um custo computacional no método, ele pode ser feito em paralelo com quase nenhuma comunicação entre processos, tal qual se faz com o cálculo das funções de base multiescala.

4.4 O algoritmo

Para resolver o Sistema 4.4, adotou-se uma estratégia dividida em dois estágios: *offline* e *online*. No primeiro, antes de começar o laço temporal para resolução das equações de Navier-Stokes (*offline*), resolve-se os problemas locais homogêneos para calcular as funções de base multiescala com condições de contorno de Robin. A cada passo do laço temporal (*online*) há a resolução de um problema local por subdomínio referente a solução particular de 4.4, uma vez que o termo fonte da mesma muda a cada passo de tempo, e a solução de um problema global reduzido de interfaces acoplando as soluções obtidas em cada subdomínio.

Para ilustrar melhor o funcionamento do método de projeção multiescala e mostrar de forma mais clara como funcionam os estágios *online* e *offline*, esta seção se dedica a mostrar e explicar um algoritmo final do método proposto. A maior parte dos cálculos, como as funções de base multiescala na Equação 4.9, podem ser feitos *offline*, restando apenas os cálculos das soluções particulares, que dependem do tempo, para o estágio *online*. Além disso, as partes que envolvem solução de problemas locais, tanto *online* quanto *offline*, podem ser feitas em paralelo sem comunicação entre processos. Finalmente, as matrizes das Equação 4.7 e Equação 4.10 não dependem do tempo, podendo ser decompostas em LU fora do estágio *online*.

O Algoritmo 1 mostra a rotina do Método de Projeção Multiescala. Todos os laços que percorrem os subdomínios podem ser feitos em paralelo como mencionado anteriormente (sem comunicação entre processos). Desta forma, tem-se um algoritmo em paralelo com bom potencial de escalabilidade, como mostrado por Jaramillo *et al.* (2021) para problemas de Darcy.

Um último adendo, foi comentado apenas sobre a regularização do campo de velocidades, portanto a pressão retornada pelo MRCM ainda não é contínua na malha fina h , entretanto, vale ressaltar que para o método de projeção multiescala, é preciso apenas do gradiente da pressão retornada pelo MRCM e regularizado pelo procedimento de *downscaling* apresentado na Seção 4.3.

4.5 Custo computacional

Para estimar o custo computacional do método de projeção com MRCM, considera-se um domínio $\Omega \in \mathbb{R}^2$ discretizado com uma malha fina com $N_x \times N_y$ elementos. Para resolver diretamente o sistema de Navier-Stokes usando o método da projeção explícito Equação 2.17, Equação 4.3 e Equação 4.4, o maior custo computacional recai na resolução do sistema mostrado na Equação 4.4, que nada mais é do que o custo de resolver um sistema linear de tamanho $m = N_x N_y$ para cada passo de tempo. A partir daqui, denota-se o custo de resolver um sistema linear de tamanho m como C_m .

Deve-se definir alguns outros custos para poder estimar todas as etapas do método de projeção com MRCM e, então, fazer a comparação desses custos com o custo de resolver

Algoritmo 1 – Método de projeção multiescala.

-
- 1: **Estágio offline:**
 - 2: **para** cada subdomínio Ω_i **faça**
 - 3: Calcular e armazenar todas as funções de base multiescala para $(\widehat{\mathbf{v}}_h^i, \widehat{p}_h^i)$ usando (4.9) \triangleright paralelo
 - 4: Montar e armazenar as matrizes \mathbf{A}^i do problema (4.10) \triangleright paralelo
 - 5: **fim para**
 - 6: Montar a matriz do sistema global de interface \mathbf{A} e da condição de compatibilidade (4.7)
 - 7: **Estágio online**
 - 8: Dadas as soluções iniciais e o tempo final T
 - 9: **enquanto** $t_{n+1} \leq T$ **faça**
 - 10: Calcular \mathbf{w}_h^* usando \mathbf{u}_h^n , vinda de (2.17)
 - 11: **para** cada subdomínio Ω_i **faça**
 - 12: Calcula e armazena todas as soluções $(\bar{\mathbf{v}}_h^i, \bar{p}_h^i)$ usando (4.10) \triangleright paralelo
 - 13: **fim para**
 - 14: Montar o termo fonte dos problemas particulares \mathbf{b} de (4.7)
 - 15: Resolver $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para obter $\mathbf{x} = [U_1, \dots, U_{N_U}, P_1, \dots, P_{N_P}]^T$
 - 16: Montar \mathbf{v}_h^{n+1} nas interfaces $\Gamma_{ij} \subset \Gamma$ usando (4.8) e as funções de base armazenadas
 - 17: Calcule $\widetilde{\mathbf{V}}_h^{ij}$ de (4.16) para todo $\Gamma_{ij} \subset \Gamma$
 - 18: **para** cada subdomínio Ω_i **faça**
 - 19: Resolva os problemas locais (4.17) \triangleright paralelo
 - 20: Calcula \mathbf{u}_h^{n+1} de (4.18) \triangleright paralelo
 - 21: **fim para**
 - 22: Calcula \mathbf{u}_h^{n+1} e avança para o próximo passo de tempo
 - 23: **fim enquanto**
-

diretamente Navier-Stokes. Sendo assim, denota-se C_{BF} o custo de resolver um problema local dado por Equação 4.9, C_{NH} o custo de resolver o sistema local não homogêneo dado pela Equação 4.10, C_{DS} o custo de *downscaling* para regularizar o campo de velocidades retornado pelo método multiescala e C_I o custo de resolver o sistema global de interfaces.

Supondo que o domínio $\Omega \in \mathbb{R}^2$ é dividido em N subdomínios com N_I sendo o número de interfaces (elementos do esqueleto Γ), pela Equação 4.11 o número total de funções de base multiescala calculado é dado por $N_U + N_P$ que pode ser aproximado por $4N(k_U + k_P)$ se considerar que, nessa geometria, o número de interfaces é em torno de $N_I = 4N$. Apesar de o MRCM permitir escolhas locais e independentes dos espaços e interface para pressão e fluxo, com intuito de manter simples essa análise, considerou-se que todos os subdomínios tem o mesmo número de graus de liberdade por interface. Portanto, ao dividir os custos em estágios *online* e *offline* tem-se:

$$\text{cost}_{off}^s(\text{MPrM}) = C_{BF} \times (N_U + N_P) \quad (4.19)$$

$$\text{cost}_{on}^s(\text{MPrM}) = C_{NH} \times N + C_{DS} \times N + C_I. \quad (4.20)$$

Algumas considerações devem ser feitas nesse momento, o custo de fazer a regularização do campo de velocidades é semelhante ao custo de resolver um sistema não homogêneo que,

por sua vez, é semelhante ao custo de resolver um sistema homogêneo (cálculo das funções de base multiescala), ou seja $C_{NH} \approx C_{DS} \approx C_{BF}$. Além disso, idealmente os cálculos serão feitos em paralelo com um processo para cada subdomínio, deste modo, a constante N pode ser omitida da [Equação 4.20](#) resultando em

$$\text{cost}_{off}^p(\text{MPrM}) = 4(k_U + k_P)C_{BF} \quad (4.21)$$

$$\text{cost}_{on}^p(\text{MPrM}) = 2 C_{BF} + C_I. \quad (4.22)$$

Essa aproximação não leva em conta a paralelização do sistema global de interfaces, [Ferraz \(2019\)](#) fez um estudo detalhado sobre essa questão. Finalmente, como o problema é transiente, a etapa que mais consome recursos e tempo computacional é, justamente, a etapa *online* que é feita a todo passo de tempo, ou seja, a parte *offline* pode ser encarada como um pré processamento sendo descartada na análise daqui por diante.

Seguindo com a análise, é importante estimar o custo de resolver o método de projeção na malha fina para poder comparar com o método aqui proposto. Dessa forma, será discutido agora o custo de resolver um sistema linear (como dito anteriormente, o maior custo no método da projeção é, justamente, resolver um sistema linear advindo da discretização da equação elíptica para pressão), tanto no método de malha fina, quanto no método de projeção com MRCM. Iniciando com o método de malha fina, existem duas opções quando se fala em resolver sistemas lineares: os métodos diretos e os métodos iterativos. Para os métodos diretos, como a matriz do sistema não muda com o tempo, é possível fazer qualquer decomposição necessária no estágio *offline*, restando apenas o custo de resolver dois sistemas triangulares no estágio *online*, por exemplo

$$Ax = b \quad A = LU \quad LUx = b \quad Lz = b \quad e \quad Ux = z \quad (4.23)$$

performando a decomposição LU de A *offline*, resta o custo de resolver os sistemas triangulares $Lz = b$ e $Ux = z$ no estágio *online*.

Para matrizes de dimensões $m \times m$ esparsas com banda inferior b_l e banda superior b_u , o custo de decompor LU e resolver um sistema linear triangular é $\mathcal{O}(bm)$ ([GOLUB; LOAN, 2013](#)) em que $b = b_l b_u$. Em se tratando de métodos iterativos, o custo pode variar, entretanto, as estratégias mais populares recaem nos métodos iterativos de Krylov (como gradientes conjugados ou métodos de resíduo mínimo) cujo custo é majoritariamente devido a operações de multiplicação de matriz com vetores. Tais métodos tem um custo de $\mathcal{O}(bm)$ para matrizes esparsas de banda, isso quando o número necessário de iterações é bem menor que m , ou seja, no mínimo tem-se um custo de $\mathcal{O}(bm)$, igual dos métodos diretos aqui explanados.

Os sistemas resolvidos para encontrar as funções de base multiescala vem da discretização de um operador laplaciano, deste modo, é sabido que a matriz desse sistema é esparsa e com uma banda bem reduzida. As matrizes provenientes da discretização do sistema global de interfaces também são esparsas, porém tem tamanho de banda diferente. De qualquer forma,

por simplicidade, considera-se que ambas matrizes tem o mesmo tamanho de bandas inferior e superior, portanto $b = b_l b_u$.

Considere a decomposição de domínio $N = N_{Hx} \times N_{Hy}$ para uma malha cartesiana de tamanho $m = N_x \times N_y$ em que o tamanho de cada subdomínio é dado por $N_{hx} \times N_{hy}$ em quem $N_{hx} = N_x/N_{Hx}$ e $N_{hy} = N_y/N_{Hy}$. Substituindo os custos com as devidas dimensões das matrizes nos valores *online* das Equação 4.20 (para sequencial) e Equação 4.22 (para paralelo) tem-se o custo relativo para o caso paralelo

$$RC_{on}^p = \frac{2C_{BF} + C_I}{C_m} = \frac{2bN_{hx}N_{hy} + 4bN(k_U + k_P)}{bN_{hx}N_{hy}N} = \frac{2}{N} + \frac{4(k_U + k_P)}{N_{hx}N_{hy}}, \quad (4.24)$$

e para o sequencial

$$RC_{on}^s = \frac{2C_{BF}N + C_I}{C_m} = \frac{2bN_{hx}N_{hy}N + 4bN(k_U + k_P)}{bN_{hx}N_{hy}N} = 2 + \frac{4(k_U + k_P)}{N_{hx}N_{hy}}. \quad (4.25)$$

Analisando apenas o custo relativo da implementação sequencial 4.25, não há vantagens em utilizar o método da projeção com MRCM, pois o custo é pelo menos duas vezes maior do que usar um método de malha fina para resolver Navier-Stokes. Mas, ao olhar para o custo em paralelo 4.24, $RC_{on}^p < 1$, mostrando uma vantagem em utilizar esse procedimento. Mesmo sendo possível paralelizar um método de malha fina, os esforços envolvidos (como, por exemplo, modelar em paralelo o método, custos com comunicação e otimização de tudo isso) frente a escalabilidade quase ideal dos métodos multiescala faz com que o método aqui proposto tenha vantagem sobre o de malha fina (JARAMILLO *et al.*, 2022).

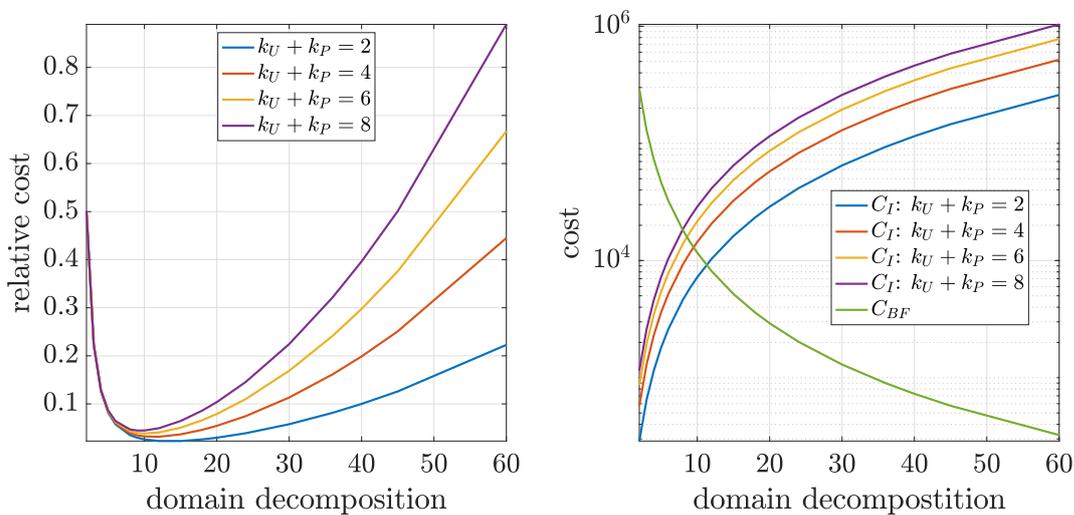
Dentre as vantagens, destaca-se a não necessidade de usar um método paralelo para resolver os sistemas lineares das funções de base multiescala, tampouco para resolver o sistema global de interfaces. Portanto, o método de projeção com MRCM é facilmente implementado em ambientes de computação de alto desempenho (HPC). Além disso, Jaramillo *et al.* (2022) mostrou simulações de escoamentos em meios porosos com malhas de até 2.7 bilhões de células com boa escalabilidade e *speed-up* próximo ao ideal.

Com o intuito de ilustrar como o custo relativo computacional do método de projeção com MRCM se comporta em função da decomposição de domínio, mostra-se na Figura 18 dois gráficos: à direita um gráfico com o custo relativo do método para diferentes decomposições de domínio e graus de liberdade nas interfaces e à esquerda um gráfico com o custo de calcular um sistema local para funções de base multiescala juntamente com o custo para resolver o problema global de interfaces, também variando a decomposição de domínio e, para o problema global de interfaces, diferentes graus de liberdade nas interfaces. Aqui se usou um caso hipotético em que $N_x = N_y = 360$ (com $m = 129600$), as decomposições de domínio foram tais que $N_{Hx} = N_{Hy}$ divisores de 360 começando de 2 e indo até 60 levando a valores de $N_{hx} = N_{hy}$ de 180 até 6.

A medida que o número de subdomínios aumenta e, portanto, o tamanho de cada subdomínio diminui, o custo é reduzido até um ponto ótimo (observando o gráfico à esquerda

da Figura 18). Esse ponto ótimo é o balanço entre reduzir o custo para calcular o sistema das funções de base multiescala (mostrado no gráfico à direita da Figura 18), já que os subdomínios ficam menores, e aumentar o custo de resolver o sistema global de interfaces (já que aumentam as interfaces a medida que a decomposição de domínio se refina). Para esse estudo, o ponto ótimo ocorre em $N_{Hx} = N_{Hy} = 12$, o que equivale a um custo total projetado entre 2% a 6% do custo de resolver o problema global de malha fina.

Figura 18 – A figura da esquerda mostra a estimativa do custo relativo de se resolver um problema local em diferentes configurações de decomposição de domínio enquanto a figura a direita mostra a estimativa do custo do sistema global de interface para diferentes decomposições de domínio. Ambas figuras mostram essas estimativas para quatro diferentes graus de liberdade e, no caso da figura a direita, também uma curva representando a estimativa do custo de se calcular um problema local de funções de base.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.6 Verificação do código multiescala

Nesta seção, serão apresentados resultados que visam verificar o método de projeção multiescala. São eles: decomposição de Helmholtz-Hodge que visa avaliar a estabilidade do método e como os erros da decomposição de domínio podem afetar a decomposição e o decaimento de vórtice, um teste para avaliar o comportamento do método de projeção multiescala com as equações de Navier-Stokes.

4.6.1 Decomposição de Helmholtz-Hodge

Para entender e avaliar como o método de projeção multiescala se comporta com a decomposição de Helmholtz-Hodge (e assim ter uma ideia de como será ao usá-lo no método da projeção para resolver Navier-Stokes), optou-se por usar uma solução manufaturada. Ou seja, escolhe-se campos para pressão e velocidades e aplica-se os mesmos no problema a ser resolvido

gerando um termo fonte, que será utilizado no método para forçar o mesmo a encontrar a solução manufaturada desejada. Deste modo é fácil comparar a solução numérica com a esperada.

A solução manufaturada utilizada neste teste é dada por [Olshanskii, Terekhov e Vassilevski \(2013\)](#) e, portanto, dado um campo vetorial conhecido \mathbf{w} que satisfaz a ??, $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$ e p são expressos da seguinte forma:

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2) = \frac{a e^{ax_2}}{2\pi(e^a - 1)} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi(e^{x_1} - 1)}{e - 1}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(e^{ax_2} - 1)}{e^a - 1}\right) \\ u_2(x_1, x_2) = \frac{-e^{x_1}}{2\pi(e - 1)} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi(e^{ax_2} - 1)}{e^a - 1}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(e^{x_1} - 1)}{e - 1}\right) \\ p(x_1, x_2) = \frac{-e^{a+1}}{(e - 1)(e^a - 1)} \left[a \cos\left(\frac{2\pi(e^{ax_2} - 1)}{e^a - 1}\right) \cos\left(\frac{2\pi(e^{x_1} - 1)}{e - 1}\right) \right], \end{cases} \quad (4.26)$$

em que $a = 0.1$ é uma constante. Primeiramente, analisou-se o erro relativo das soluções de \mathbf{u} calculadas com o método de projeção multiescala em relação a solução exata para múltiplas escolhas dos espaços de interface para pressão p ($\mathcal{P}_{H,i}$) e fluxo ∇p ($\mathcal{U}_{H,i}$), em que i é a ordem dos polinômios que compõem estes espaços.

As análises desses casos foram todas feitas para $\alpha = 1$, essa escolha vem do fato de que foi observado por [Guiraldello et al. \(2018\)](#) que em torno deste valor de α , os erros eram menores quando simulados escoamentos da escala de Darcy para meios heterogêneos. Posteriormente serão apresentadas varreduras de α para as combinações de espaços mais interessantes com o intuito de verificar se existe um valor de α que entrega um erro menor.

Os primeiros resultados obtidos apresentados nas [Tabela 4](#) e [Figura 19](#) mostram que, a medida que se enriquece os espaços de pressão e fluxo conjuntamente, os erros relativos diminuem. O motivo para haver erros altos em combinações $(\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1})$, $(\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,2})$ e assim por diante, se deve a problemas no campo de velocidades em regiões próximas as interfaces entre subdomínios.

Tabela 4 – Erros relativos (em relação a solução exata dada por (4.26)) para combinações $(\mathcal{P}_{H,i}, \mathcal{U}_{H,j})$ e $\alpha = 1$. O domínio para os testes é quadrado com tamanho 1 em cada direção, contendo 90×90 células divididas em três subdomínios de 30×30 células cada. O erro relativo melhora a medida que os espaços de pressão e fluxo são enriquecidos conjuntamente.

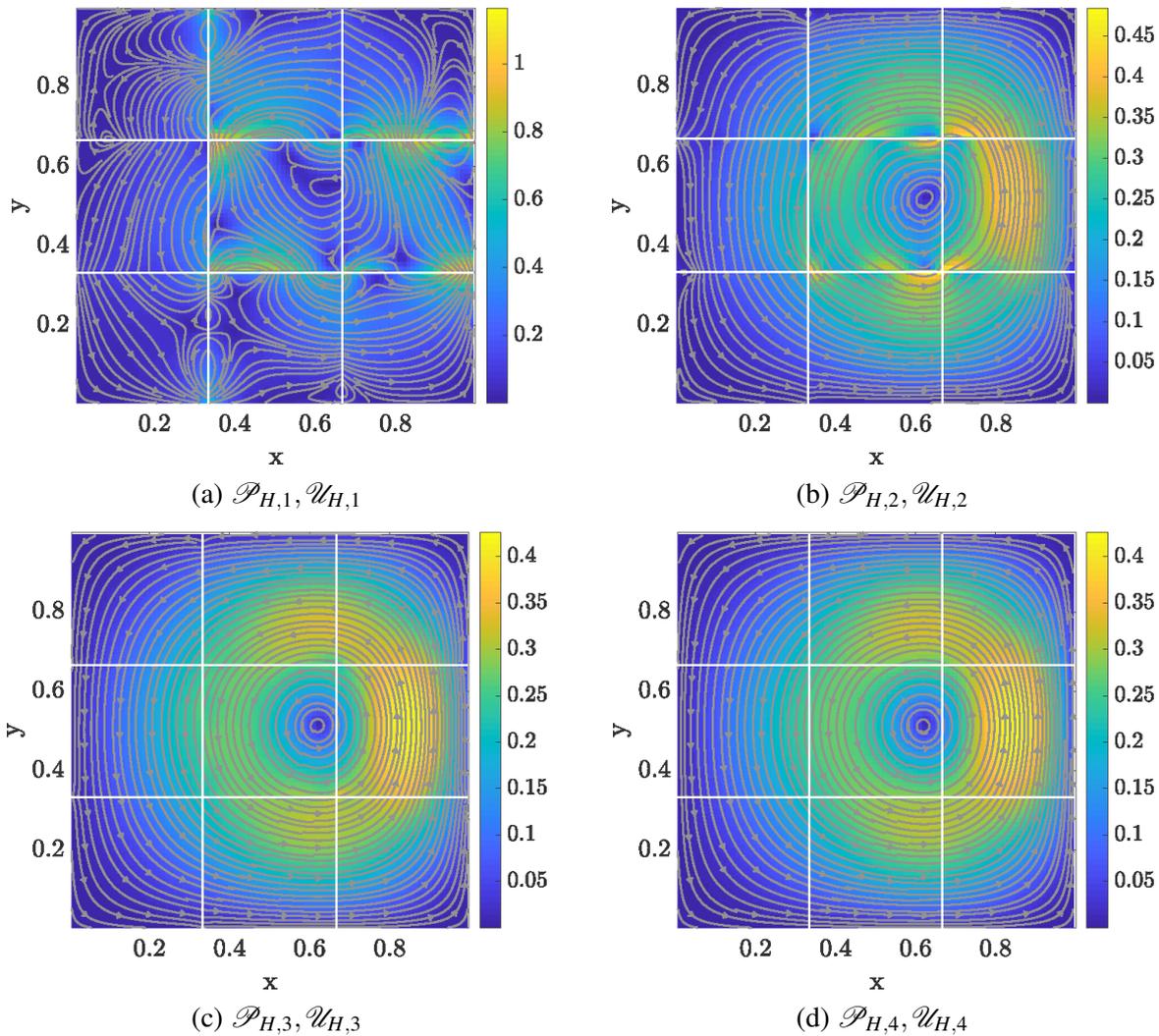
$\mathcal{P}_{H,1}$		$\mathcal{P}_{H,2}$		$\mathcal{P}_{H,3}$		$\mathcal{P}_{H,4}$	
Flux	Error	Flux	Error	Flux	Error	Flux	Error
$\mathcal{U}_{H,1}$	108.0%	$\mathcal{U}_{H,1}$	93.3%	$\mathcal{U}_{H,1}$	92.3%	$\mathcal{U}_{H,1}$	92.4%
$\mathcal{U}_{H,2}$	91.9%	$\mathcal{U}_{H,2}$	16.1%	$\mathcal{U}_{H,2}$	13.2%	$\mathcal{U}_{H,2}$	13.2%
$\mathcal{U}_{H,3}$	104.8%	$\mathcal{U}_{H,3}$	10.9%	$\mathcal{U}_{H,3}$	2.1%	$\mathcal{U}_{H,3}$	2.0%
$\mathcal{U}_{H,4}$	108.9%	$\mathcal{U}_{H,4}$	12.3%	$\mathcal{U}_{H,4}$	1.3%	$\mathcal{U}_{H,4}$	0.4%

Fonte: Dados da pesquisa.

A medida que os espaços são enriquecidos, esses erros diminuem e o campo de velocidades fica suave, como mostrado nas [Figura 19c](#) e [Figura 19d](#). Com base nesses resultados,

fixou-se as combinações de espaços $(\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1})$, $(\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2})$, $(\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3})$ e $(\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4})$ para realizar estudos variando o parâmetro α . A mesma combinação de espaços foi utilizada para estudar a estabilidade da decomposição, detalhada mais adiante.

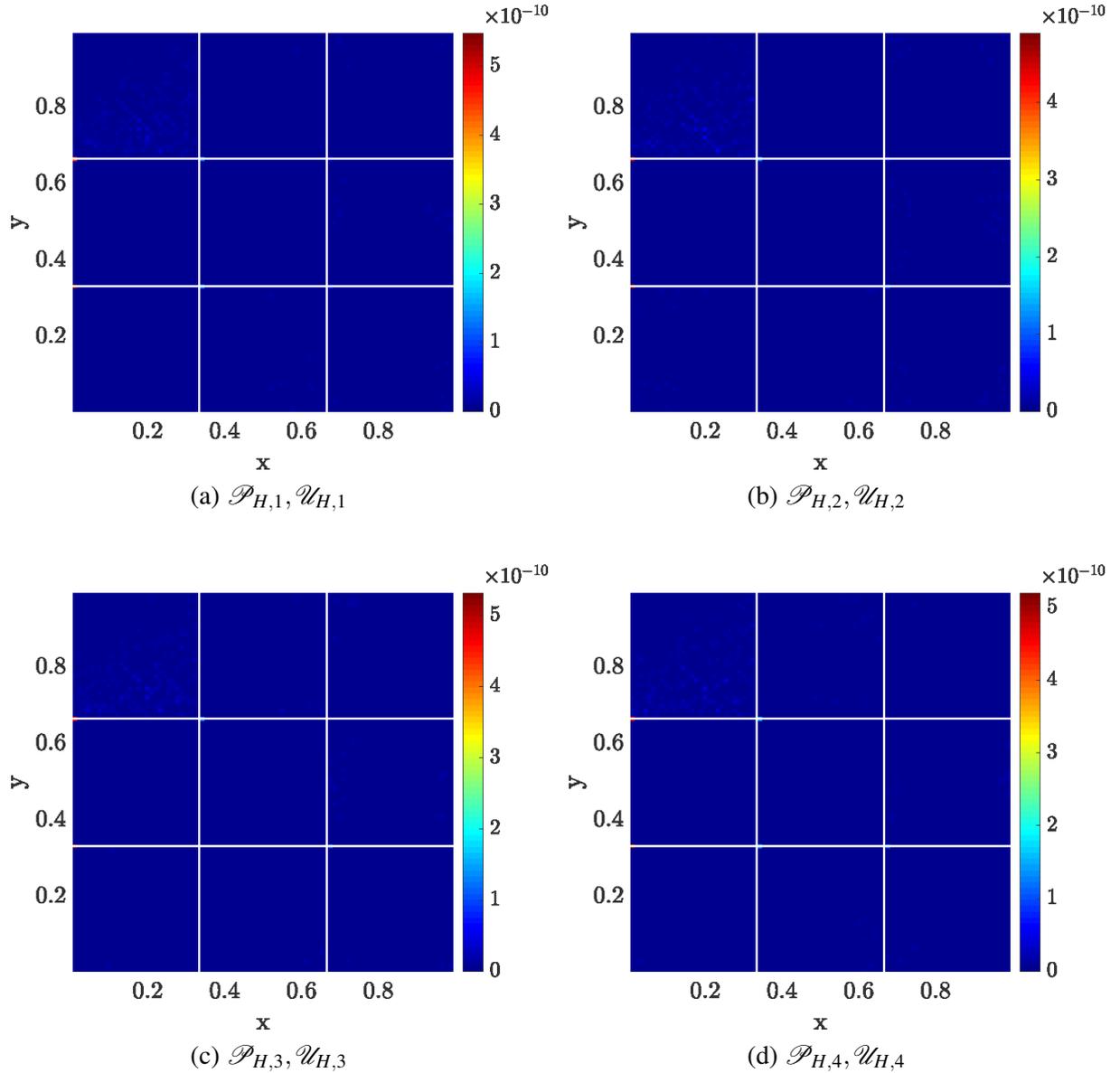
Figura 19 – Campos de velocidades para combinações de espaços de interface de pressão e fluxo, considerando $\alpha = 1$. Da esquerda para direita, na primeira linha tem-se $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$ e $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$; e na segunda linha $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$. Para os casos $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$ e $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$ há um grande erro nas interfaces dos subdomínios, que se reduz a medida que se enriquece os espaços de interface conjuntamente. De fato, para $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$ não é possível visualizar mais interferências da decomposição de domínio na solução.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tendo em vista que para as primeiras escolhas de espaços de interface a solução apresentou muitos artefatos ao longo do esqueleto da decomposição de domínio, o divergente do fluxo e a magnitude da componente z de seu rotacional foram avaliados para tentar entender o motivo de tais problemas entre os subdomínios. Apesar de o campo de velocidades para espaços mais pobres apresentar problemas nas interfaces entre subdomínios, o divergente deste campo de velocidade matem-se próximo de zero para todos os casos, como mostra a [Figura 20](#).

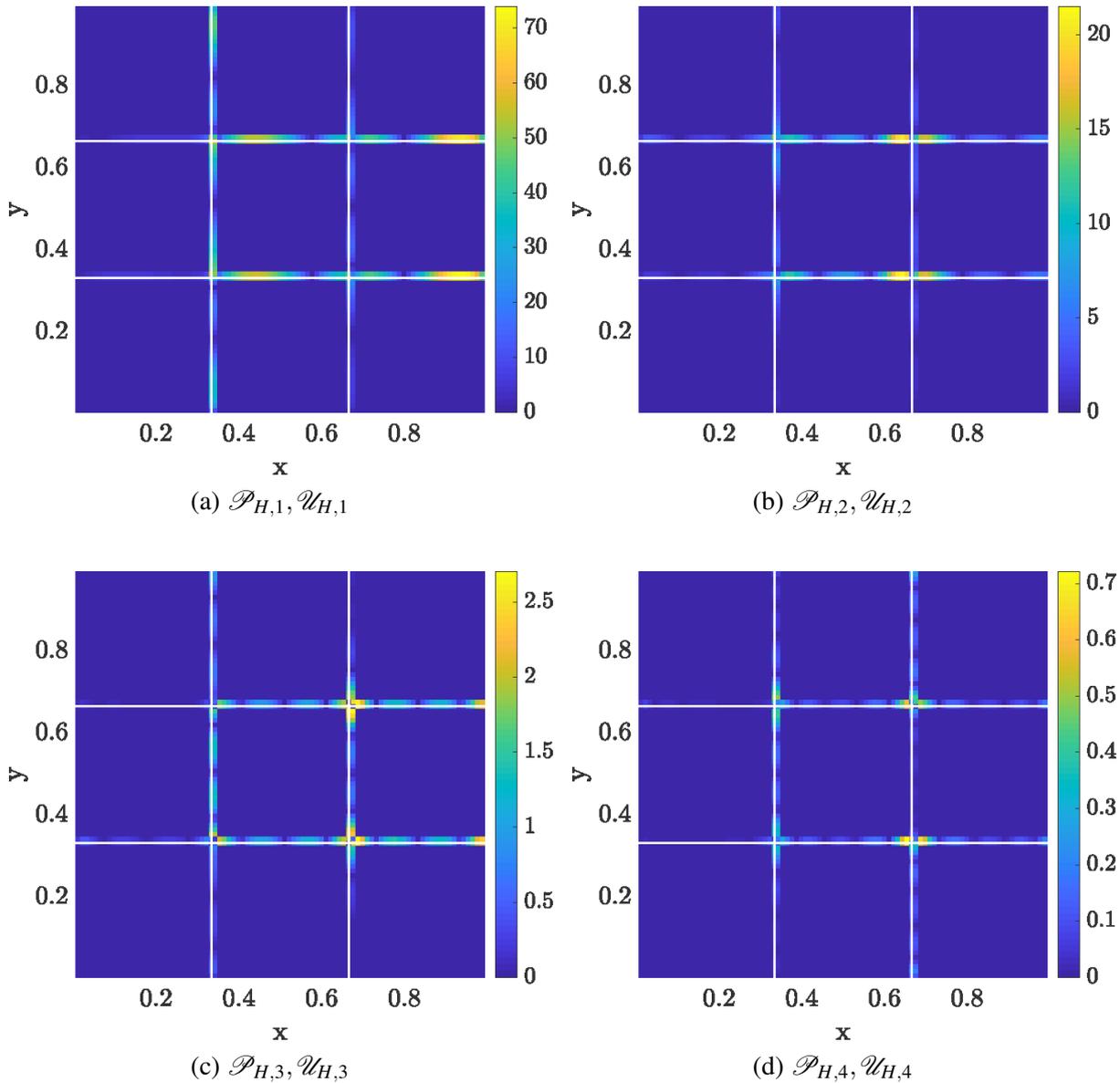
Figura 20 – Divergente do campo de velocidades, considerando $\alpha = 1$. Da esquerda para direita, na primeira linha tem-se $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$ e $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$; e na segunda linha $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$. Para todos os casos o divergente é próximo de zero, mesmo com combinações de espaços cujos erros são maiores.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Desconfia-se que o que causa os artefatos observados na [Figura 19](#) é o rotacional do fluxo, que deveria ser zero, entretanto como existe uma decomposição de domínio, a projeção não é exata em um espaço de rotacional nulo. A [Figura 21](#) mostra a magnitude da componente z do rotacional do fluxo calculado pelo método de projeção multiescala. Para espaços mais pobres, vê-se valores diferentes de zero nas interfaces entre subdomínios. Entretanto, esses valores vão decaindo a medida que os espaços são enriquecidos. Deste modo, o resultado final do campo de velocidades vai ficando suave como observado anteriormente.

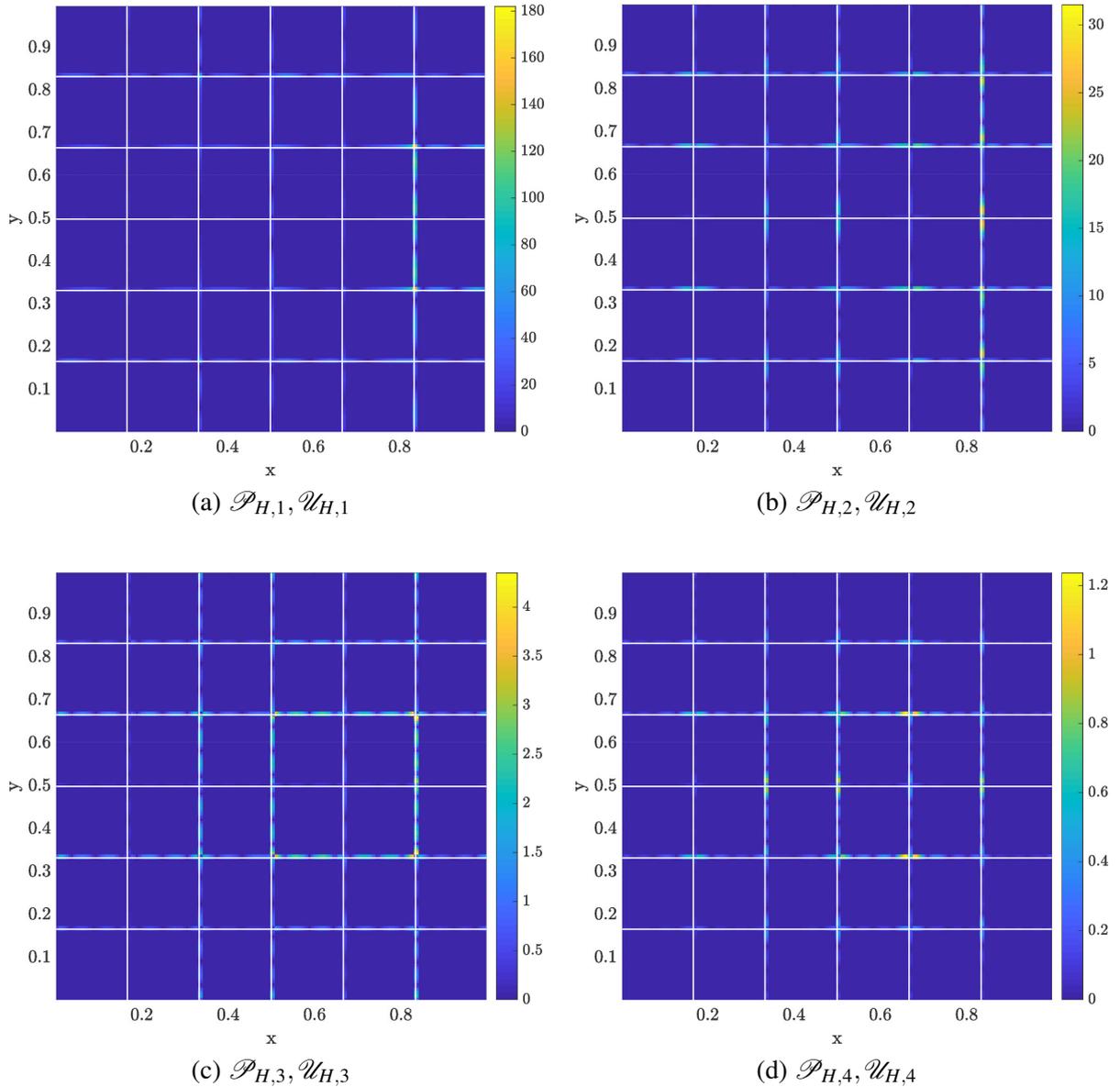
Figura 21 – Magnitude da componente z do rotacional do fluxo retornado pelo MRCM para combinações de espaços de interface de pressão e fluxo, considerando $\alpha = 1$ em uma malha 90×90 dividida em 3×3 subdomínios com 30×30 células cada. Da esquerda para direita, na primeira linha tem-se $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$ e $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$; e na segunda linha $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$. Para os casos $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$ e $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$ há um grande erro nas interfaces dos subdomínios, que se reduz a medida que se enriquece os espaços de interface conjuntamente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com o intuito de analisar se a decomposição de domínio influenciaria no rotacional do fluxo, fez-se o mesmo estudo considerando uma decomposição mais fina, cujos resultados são mostrados na [Figura 22](#). Ainda há valores altos nas interfaces entre subdomínios, entretanto, como para o caso da decomposição mais grossa, esses valores diminuem a medida que se enriquece os espaços para pressão e fluxo nas interfaces. Ou seja, o que atenua os artefatos é enriquecer os espaços de interface.

Figura 22 – Magnitude da componente z do rotacional do fluxo retornado pelo MRCM para combinações de espaços de interface de pressão e fluxo, considerando $\alpha = 1$ em uma malha 180×180 dividida em 6×6 subdomínios com 30×30 células cada. Da esquerda para direita, na primeira linha tem-se $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$ e $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$; e na segunda linha $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$. Para os casos $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$ e $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$ há um grande erro nas interfaces dos subdomínios, que se reduz a medida que se enriquece os espaços de interface conjuntamente.

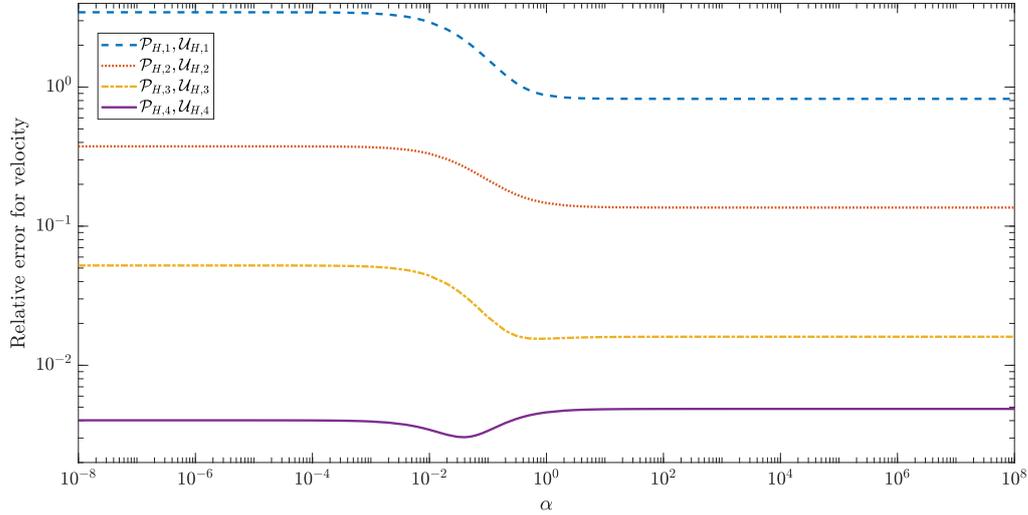


Fonte: Elaborada pelo autor.

É interessante estudar como o erro relativo do fluxo se comporta com a variação do parâmetro α , esse teste é chamado de varredura de α . A Figura 23 mostra, justamente, o resultado desse teste. Existe um comportamento semelhante para as quatro combinações escolhidas, mesmo com o erro relativo alto, a curva referente a $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$ mostra um mínimo no erro relativo em valores de α entre 10^{-2} e 10^{-1} .

Finalmente, foi verificada a estabilidade da decomposição de Helmholtz-Hodge (BATTY,

Figura 23 – Erros relativos para diferentes valores de α e combinações de espaços de interface. A linha tracejada azul é correspondente a $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$; a linha vermelha a $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$; a linha amarelada corresponde a $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e a linha sólida roxa corresponde a $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$. O comportamento para os quatro casos são semelhantes, mesmo quando o erro é maior. Há um mínimo próximo de $\alpha = 1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

2017), esse é um teste interessante pois aplica sucessivas decomposições e estuda se existe um aumento do erro relativo a medida que elas são aplicadas. Este procedimento consiste em, após encontrar o primeiro valor de \mathbf{u} usando a Equação 2.12, resolver uma sequência de projeções da forma

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^{k+1} + \nabla p^{k+1} \quad (4.27)$$

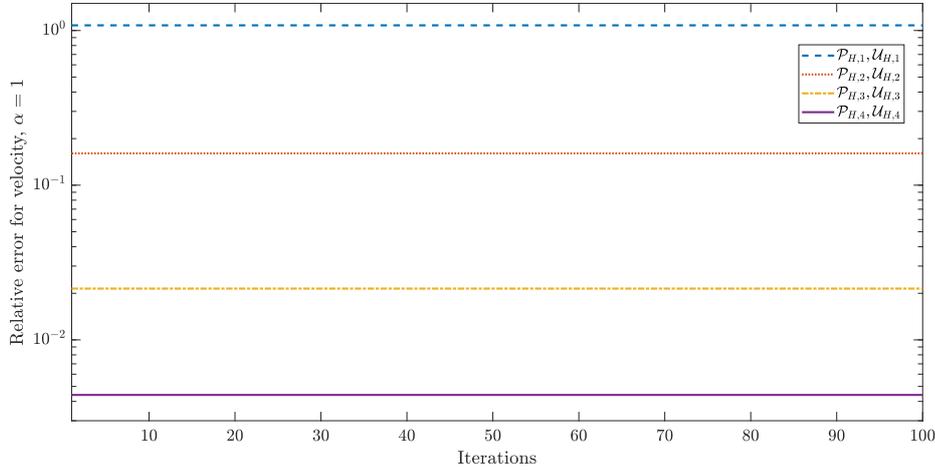
em que $\nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0$ para $k \geq 0$. Este processo foi repetido 100 vezes e, como esperado, o erro manteve-se o mesmo ao longo das aplicações mostrando que o método de projeção multiescala garante a estabilidade da decomposição de Helmholtz-Hodge. É interessante notar que, mesmo com um erro alto para a combinação $(\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1})$, ele não se amplifica ao longo das aplicações da decomposição, ou seja, a estabilidade foi mantida.

Assim sendo, os testes com a decomposição de Helmholtz-Hodge mostraram o potencial do método de projeção multiescala. Mesmo sendo necessárias escolhas de espaços de ordem mais alta, a decomposição de domínio não interfere na estabilidade do método, um prognóstico interessante para testes que envolvem evolução no tempo, como o decaimento de vórtice, mostrado a seguir.

4.6.2 Decaimento de vórtice

O problema do decaimento de um vórtice é um teste bem difundido na literatura usado para estabelecer a performance do método aqui proposto. Considera-se um domínio quadrado $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que a solução exata para as equações de Navier-Stokes seja dada por

Figura 24 – Erros relativos para estabilidade da decomposição de Helmholtz-Hodge com $\alpha = 1$ e combinações de espaços de interface. A linha tracejada azul é correspondente a $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$; a linha vermelha a $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$; a linha amarelada corresponde a $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e a linha sólida roxa corresponde a $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$. Mesmo nos casos com maior erro relativo, a estabilidade da decomposição foi mantida.



Fonte: Elaborada pelo autor.

(SOUSA; OISHI; BUSCAGLIA, 2015)

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, t) = -e^{-2t\mu/\rho} \cos(x_1) \sin(x_2) \\ u_2(x_1, x_2, t) = e^{-2t\mu/\rho} \sin(x_1) \cos(x_2) \\ p(x_1, x_2, t) = -0.25 e^{-4t\mu/\rho} [\cos(2x_1) + \cos(2x_2)], \end{cases} \quad (4.28)$$

em que $\nu = \mu/\rho = 1$ e o termo fonte \mathbf{F} da Equação 2.7 é nulo.

Com base nos resultados apresentados para a decomposição de Helmholtz-Hodge, foram simulados casos com diversas escolhas de espaços de interface, desde aquelas menos custosas computacionalmente até as que apresentaram melhores resultados para os testes anteriores. Além disso, fixou-se $\alpha = 1$ num primeiro momento, mais adiante uma varredura de α foi feita para verificar se há um valor de α para o qual o método de projeção multiescala tem um erro mínimo como observado anteriormente.

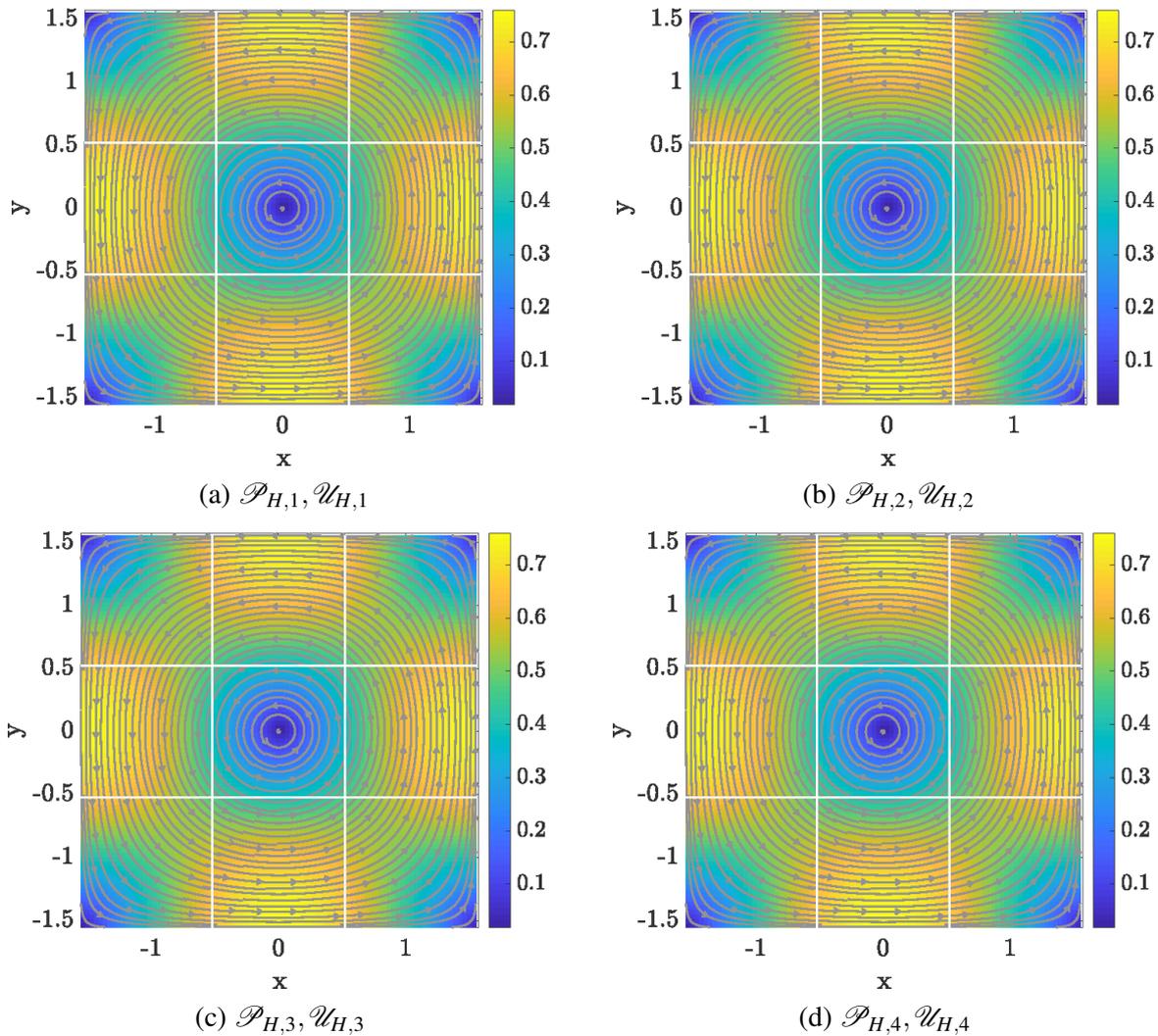
A Tabela 5 mostra os erros relativos para os casos testados considerando a solução exata dada por (4.28). Já no primeiro caso, vê-se que o erro relativo em relação a solução exata é da ordem de 10^{-4} , o que indica um erro de aproximadamente 0.02% na solução dada pelo método de projeção multiescala. Deste modo, para esse problema, é possível obter soluções boas mesmo com combinações de espaços de interfaces menos custosas, melhorando ainda mais o desempenho do método proposto. Corroborando com os resultados apresentados na Tabela 5, a Figura 25 mostra os campos de velocidade para alguns dos casos. Com um erro relativo da ordem de 10^{-4} , não há diferenças visíveis entre os campos de velocidade, tampouco erros próximos das interfaces entre subdomínios.

Tabela 5 – Erros relativos (em relação a solução exata dada por (4.28)) para combinações $(\mathcal{P}_{H,i}, \mathcal{U}_{H,j})$ e $\alpha = 1$. O domínio para os testes contém 90×90 células divididas em três subdomínios de 30×30 células cada. O erro relativo melhora a medida que os espaços de pressão e fluxo são enriquecidos conjuntamente.

	Erro		Erro
$\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$	8.42E-04	$\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,2}$	9.06E-04
$\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$	7.94E-04	$\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,3}$	8.92E-04
$\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$	7.93E-04	$\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,1}$	8.75E-04
$\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$	7.93E-04	$\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,3}$	7.94E-04

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 25 – Campos de velocidades para combinações de espaços de interface de pressão e fluxo, considerando $\alpha = 1$. Da esquerda para direita, na primeira linha tem-se $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$ e $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$; e na segunda linha $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$. Mesmo com as escolhas de custo menos elevado, não há erros ao longo da interface, mostrando que o método da projeção combinado com MRCM apresenta bons resultados para resolução numérica das equações de Navier-Stokes.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Mesmo que para os testes da decomposição de Helmholtz-Hodge as escolhas de espaços de interface mais pobres apresentassem erros significativos, para as simulações com Navier-Stokes esses erros permaneceram baixos para essas escolhas de espaços. Além disso, pela [Tabela 5](#), o erro mantém-se da ordem de 10^{-4} para todos os casos, isso se deve ao fato de a comparação ser em relação a solução analítica, ou seja, o erro da discretização, e não da decomposição de domínio do método de projeção multiescala, está influenciando o resultado. Justamente por isso, também foi avaliado o erro relativo do campo de velocidades em relação a solução de malha fina. Esses resultados são apresentados na [Tabela 6](#), assim como os erros em relação a solução exata, os valores são baixos, da ordem de 10^{-4} , porém decaindo até a ordem de 10^{-7} ao enriquecer os espaços de interface. Desse modo, o método de projeção multiescala apresentou bons resultados para simulações de escoamentos com Navier-Stokes evoluindo ao longo do tempo.

Tabela 6 – Erros relativos (em relação a solução de malha fina) para combinações $(\mathcal{P}_{H,i}, \mathcal{U}_{H,j})$ e $\alpha = 1$. O domínio para os testes contém 90×90 células divididas em três subdomínios de 30×30 células cada. O erro relativo melhora a medida que os espaços de pressão e fluxo são enriquecidos conjuntamente, porém já são bem pequenos para os casos menos custosos.

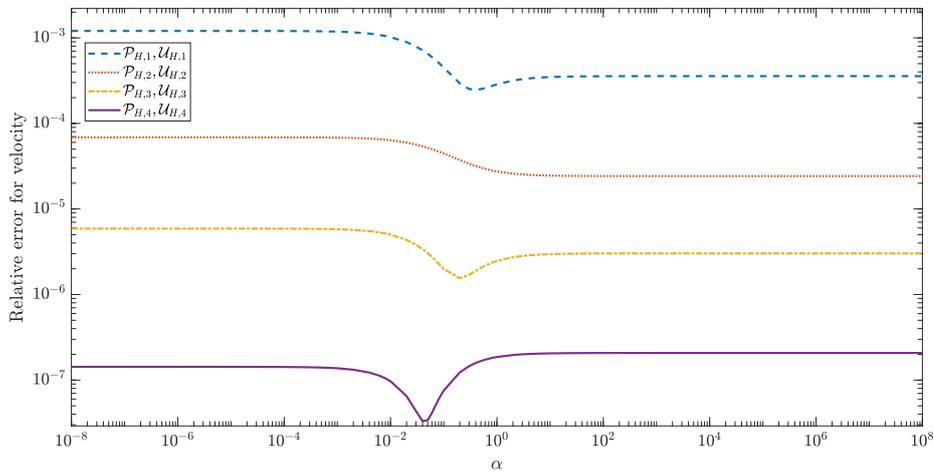
	Erro		Erro
$\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$	2.86E-04	$\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,2}$	4.44E-04
$\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$	2.75E-05	$\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,3}$	4.15E-04
$\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$	2.46E-06	$\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,1}$	3.68E-04
$\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$	1.86E-07	$\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,3}$	2.80E-05

Fonte: Dados da pesquisa.

Como mencionado anteriormente, foi feita uma varredura no parâmetro α apresentada na [Figura 26](#). Os erros foram calculados ao final da simulação, ou seja, no último passo de tempo. Assim como no caso da decomposição de Helmholtz-Hodge, o mínimo do erro para algumas curvas acontece para valores de α variando de 10^{-2} até aproximadamente 10^{-1} . Ou seja, é interessante escolher valores intermediários de α para obter uma solução com erro relativo menor.

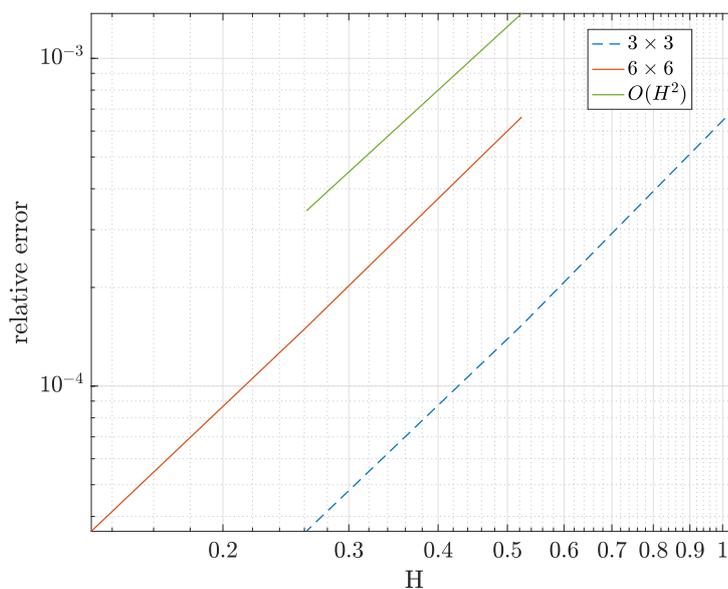
Para finalizar os testes com esse modelo de escoamento, foi feita uma análise de ordem de convergência do método. A [Figura 27](#) mostra os resultados obtidos para duas configurações iniciais que foram sucessivamente refinadas. Os erros calculados são em relação à solução exata. A curva referente à legenda 3×3 corresponde ao teste começando com um domínio de 90×90 células finas divididas em 3×3 subdomínios com 30×30 células cada e foi refinado aumentando a quantidade de subdomínios porém mantendo o tanto de células finas dentro deles. Ou seja, o próximo refinamento correspondente a uma malha fina de 180×180 com 6×6 subdomínios com 30×30 células cada. Analogamente, a curva referente à legenda 6×6 corresponde ao teste começando com um domínio de 90×90 células finas divididas em 6×6 subdomínios com 15×15 células cada. A ordem obtida é $O(H^2)$ em que H é o tamanho da aresta dos subdomínios, ou seja, convergência quadrática.

Figura 26 – Erros relativos (em relação a solução de malha fina) para diferentes valores de α e combinações de espaços de interface. A linha tracejada azul é correspondente a $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$; a linha vermelha a $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$; a linha amarelada corresponde a $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ e a linha sólida roxa corresponde a $\mathcal{P}_{H,4}, \mathcal{U}_{H,4}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 27 – Análise de convergência para o caso do vórtice amortecido. Foram feitas duas análises, a primeira 3×3 começa de um domínio dividido em 3 subdomínios com 30×30 células finas em cada um e refina-se a decomposição de domínio mantendo 30×30 células. A segunda 6×6 começa com um domínio dividido em 6 subdomínios com 15×15 células finas em cada um e refina-se a decomposição mantendo 15×15 células finas em cada subdomínio. A ordem de convergência obtida foi $O(H^2)$ em que H é o tamanho da aresta de subdomínios.



Fonte: Elaborada pelo autor.

RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados resultados obtidos com o método de projeção multiescala. Foram escolhidos problemas conhecidos na literatura para verificar como o método se comporta em situações estacionárias e transientes. São eles: cavidade impulsionada, escoamento em um degrau e escoamento em torno de um obstáculo quadrado (esteira de Von Kármán). Esses resultados visam complementar os estudos feitos nos capítulos anteriores.

5.1 Cavidade impulsionada

O problema da cavidade impulsionada, apresentado nessa seção, consiste em um escoamento confinado em um domínio quadrado em que a tampa superior desliza com velocidade constante na direção x_1 . Ao longo dos anos, esse tipo de escoamento vem sendo usado para testar e validar diversas técnicas numéricas, sendo, portanto, um importante teste. A medida que a tampa desliza e o escoamento se desenvolve, formam-se vórtices no domínio, sendo o principal encontrado no centro da caixa.

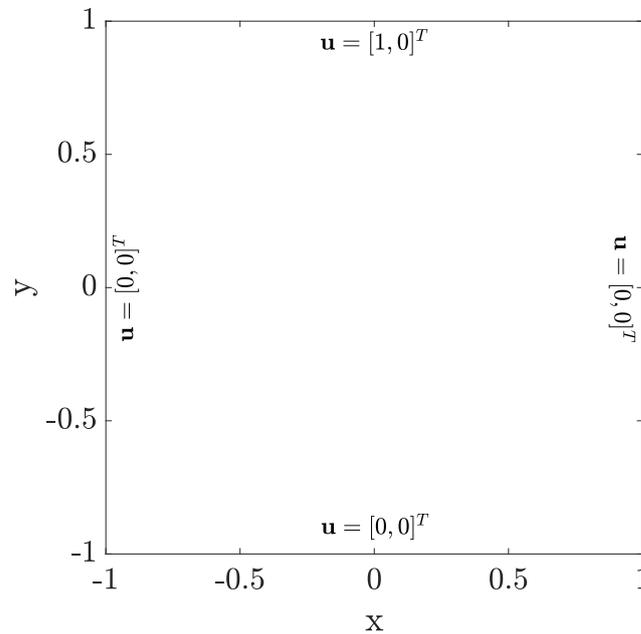
Para simular o comportamento da tampa deslizante, são impostas condições de Dirichlet nas fronteiras para velocidade da seguinte forma: no topo da caixa é imposta velocidade tangencial adimensional igual a 1 e, nas demais paredes, são impostas condições de não-escorregamento, isto é, ambas componentes tangencial e normal da velocidade são nulas. A [Figura 28](#) mostra o esquema de domínio para o problema da cavidade impulsionada.

Foram escolhidas quatro situações para estudar o comportamento do método de projeção multiescala nesse contexto. Cada caso é diferenciado pela escolha do número de Reynolds (Re), um adimensional dado por

$$Re = \frac{\rho L \|\mathbf{u}_\infty\|}{\mu}, \quad (5.1)$$

em que $\|\mathbf{u}_\infty\| = 1$ é a velocidade máxima no perfil de entrada e L é um comprimento característico para o escoamento, neste caso $L = 2$, o tamanho da aresta da cavidade. Escolheu-se números de

Figura 28 – Domínio para o teste da cavidade impulsionada. O topo da cavidade tem velocidade em x igual a 1 enquanto a velocidade em y é nula, isso simula uma tampa deslizante no topo. As demais paredes tem condição de contorno sem escorregamento (*no-slip*).



Fonte: Elaborada pelo autor.

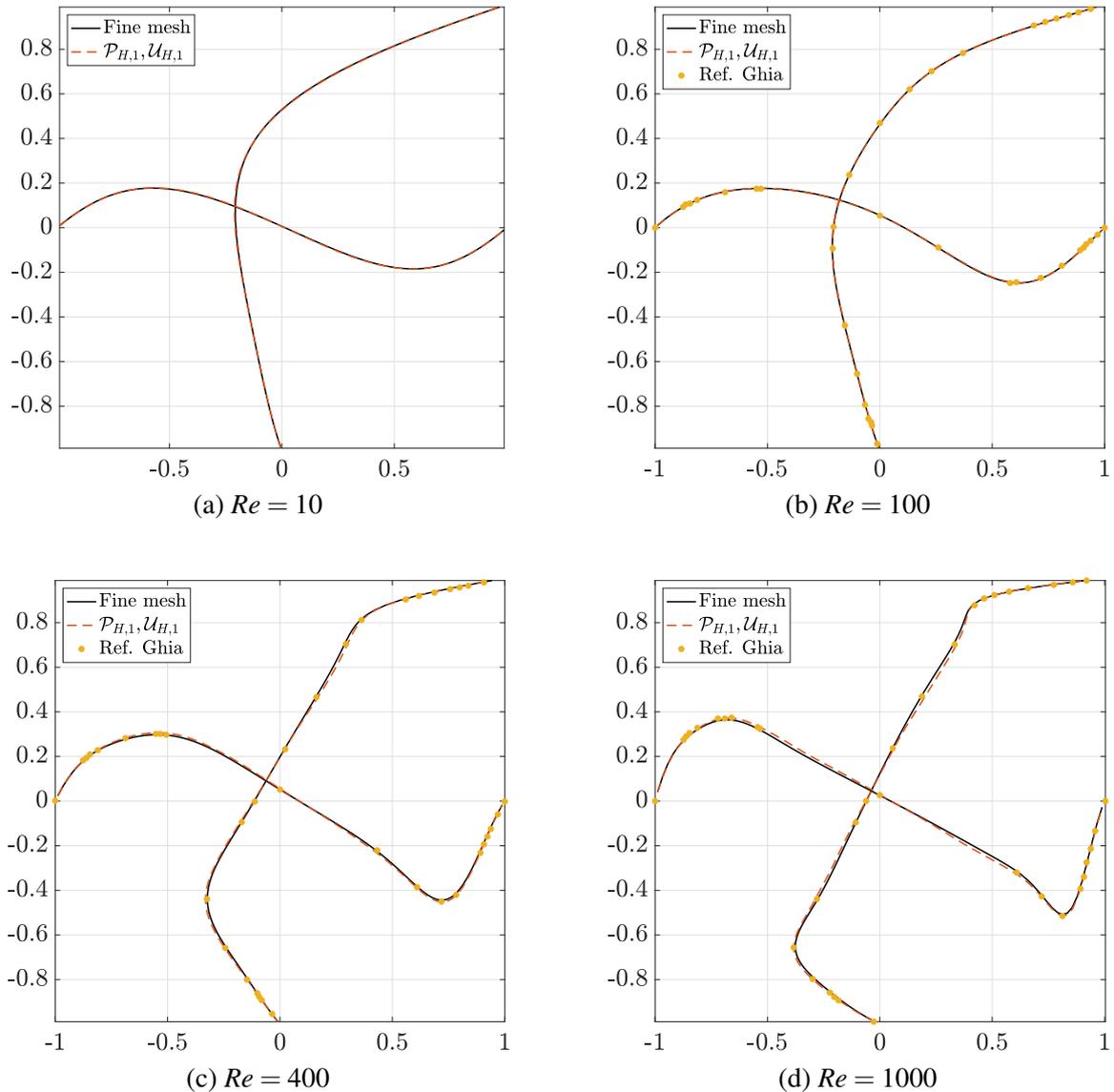
Reynolds variando de 10 a 1000, mantendo o caráter laminar do escoamento em todos os testes. As comparações foram feitas com a solução de malha fina e resultados apresentados por [Ghia, Ghia e Shin \(1982\)](#), analisando as curvas de velocidade que passavam pelo centro do domínio, ou seja, pelo vórtice principal do campo de velocidades.

Em relação aos parâmetros para definir o método de projeção multiescala, o teste da cavidade impulsionada foi realizado considerando espaços de interface $(\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1})$ e $\alpha = 1$. Essas escolhas foram baseadas nos resultados obtidos com o teste de decaimento de vórtice.

A [Figura 29](#) mostra os quatro casos estudados: Reynolds 10, 100, 400 e 1000. O resultado obtido com o método de projeção multiescala foi comparado com o resultado de malha fina para todos os números de Reynolds e com a referência ([GHIA; GHIA; SHIN, 1982](#)). As curvas verticais vistas na [Figura 29](#) referem-se à velocidade em $x_1 = 0$ variando x_2 , enquanto as curvas horizontais referem-se à velocidade observada em $x_2 = 0$ variando o valor de x_1 .

Há uma boa concordância entre os dados obtidos com as referências (de malha fina e [GHIA; GHIA; SHIN, 1982](#)) e a solução calculada pelo método de projeção multiescala. Apesar de a escolha de espaços de interface ser por espaços de ordem menor, a solução ainda assim foi satisfatória, atestando o potencial do método de projeção multiescala para simular escoamentos modelados pelas equações de Navier-Stokes.

Figura 29 – Perfis de velocidade em x_1 e em x_2 fixando regiões do domínio e variando o número de Reynolds, todos os resultados são com $\alpha = 1$. As curvas verticais apresentadas referem-se da componente u_1 da velocidade ao longo de $x_1 = 0$ e as horizontais aos valores da componente u_2 da velocidade ao longo de $x_2 = 0$. As soluções obtidas pelo método de projeção multiescala usando os espaços de interface ($\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$) são comparados com a solução de malha fina e com os dados retirados de (GHIA; GHIA; SHIN, 1982). Em todos os casos houve uma ótima concordância da solução obtida com o MRCM e as referências.



Fonte: Elaborada pelo autor.

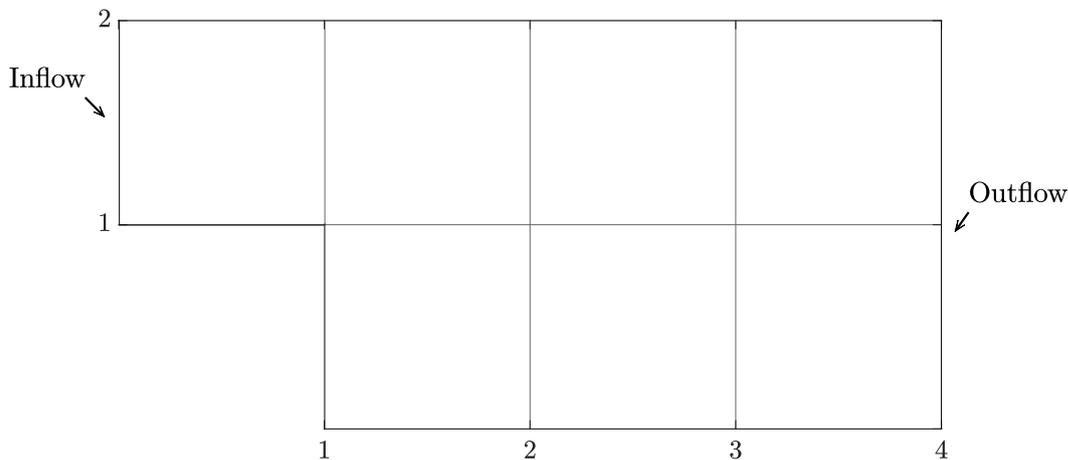
5.2 Escoamento com degrau

Foram feitos alguns testes para avaliar a viabilidade, eficácia e acurácia dos estágios *offline* e *online* na resolução das equações de Navier-Stokes. Para isso, tomando um problema clássico de mecânica de fluidos, foram feitos estudos focados na precisão do método proposto e comparação de três estratégias para reduzir o tamanho do sistema global resolvido no estágio *online*. O caso teste para realizar esses estudos foi o escoamento com degrau (BISWAS; BREUER;

DURST, 2004; ARMALY *et al.*, 1983), problema amplamente conhecido em mecânica de fluidos e com grande quantidade de referências na literatura. Além disso, avaliou-se apenas os erros relativos do campo de velocidades.

A Figura 30 mostra o domínio utilizado para resolver o escoamento com degrau. O fluido entra pela região de *inflow* com um perfil parabólico para velocidade na direção x e sai pela região de *outflow*, onde são aplicadas condições de contorno apropriadas para saída de fluido. A solução de malha fina foi usada como referência para calcular os erros analisados ao longo dos estudos propostos. Uma característica importante do escoamento é a razão entre a face de entrada e a face de saída, nesta tese o estudo foi restrito à razão $l/L = 1/2$ sendo l o tamanho da face de entrada e L a face de saída.

Figura 30 – Domínio para escoamento com degrau. A entrada de fluido (*inflow*) é definida a esquerda do domínio enquanto a saída (*outflow*) é definida na face direita do mesmo. Na entrada considera-se um perfil desenvolvido parabólico com velocidade máxima em x igual a 1.

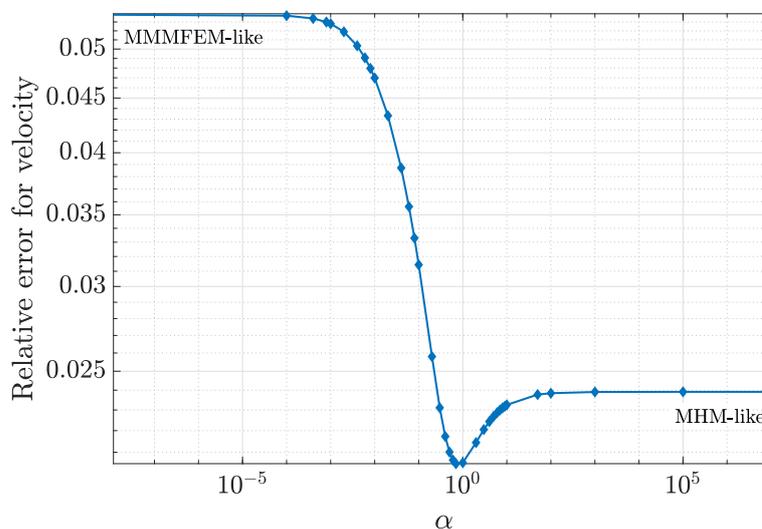


Fonte: Elaborada pelo autor.

O primeiro estudo realizado foi avaliar o erro relativo das soluções fornecidas pelo método de projeção multiescala em relação a malha fina a medida que o parâmetro α fosse variado, a varredura de α já explorada nos resultados apresentados anteriormente. A Figura 31 mostra esses erros relativos a medida que α varia fixando espaços constantes por partes nas interfaces para pressão $\mathcal{P}_{H,0}$ e linear por partes para fluxo $\mathcal{U}_{H,1}$. Nas proximidades de $\alpha = 1$ vê-se um valor mínimo para o erro relativo, levando a escolher este valor para os próximos estudos. Tal comportamento para a curva de erros relativos para velocidade é semelhante ao obtido por Guiraldello *et al.* (2018) para escoamentos heterogêneos na escala de Darcy.

Um outro aspecto importante para verificar nesse tipo de escoamento é o tamanho do vórtice formado adjacente ao degrau, aqui são comparadas as soluções encontradas para o método proposto com diferentes parâmetros com a solução de malha fina. A Figura 32 mostra os campos de velocidades para $\alpha = 1$ variando os espaços de interfaces. Na Figura 32a tem-se a solução de malha fina, enquanto que na Figura 32b há a solução obtida com o método de projeção multiescala usando espaço constante por partes para pressão e linear por partes para

Figura 31 – Erros relativos para o campo de velocidades calculado para diferentes valores de α . Valores grandes de α geram soluções do tipo MHM (MHM-like) enquanto valores pequenos de α geram soluções do tipo MMMFEM (MMFEM-like). É possível observar um valor mínimo no erro entre essas duas soluções, em $\alpha = 1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

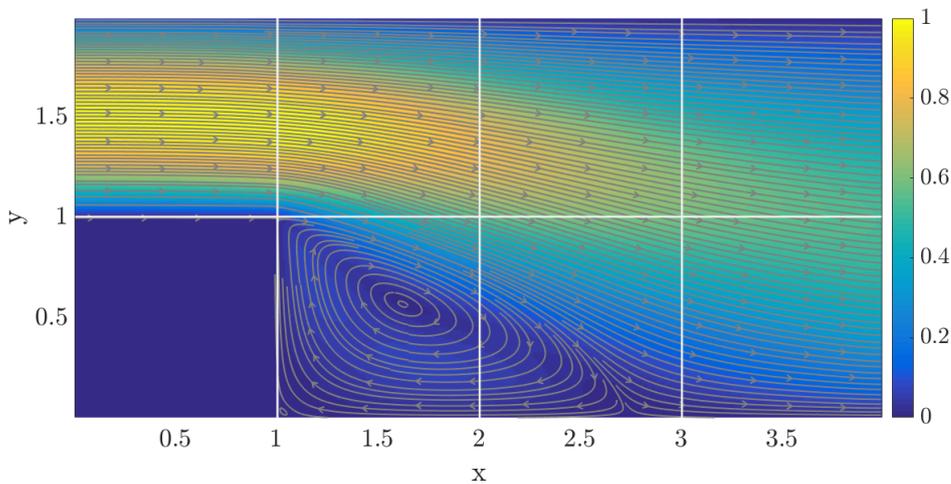
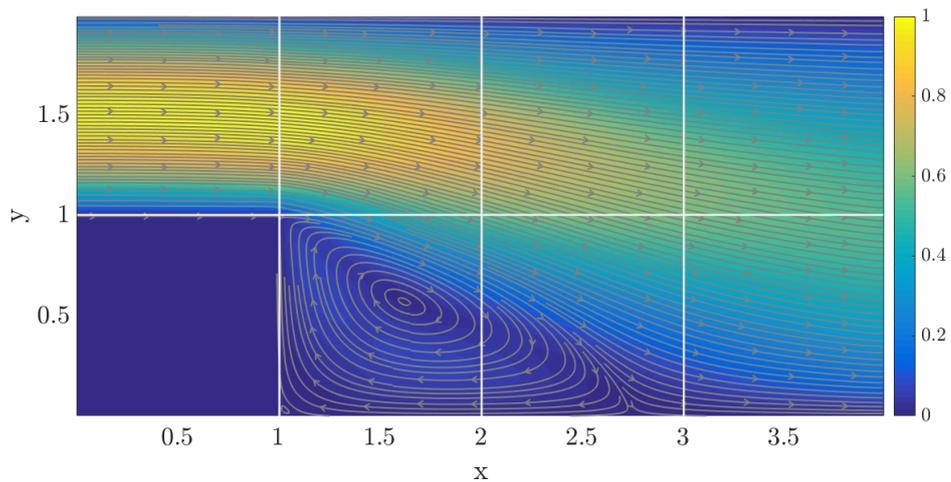
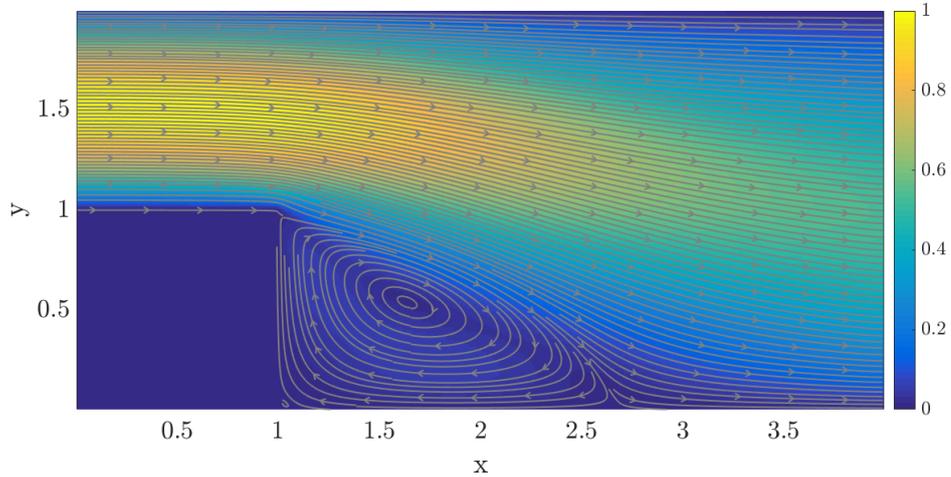
fluxo ($\mathcal{P}_{H,0}, \mathcal{U}_{H,1}$), já na [Figura 32c](#) os espaços usados foram linear por partes para pressão e fluxo ($\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$).

É possível observar que nas três imagens, o comprimento do vórtice fica um pouco além de 2.5. Além disso, em ambos casos as soluções obtidas com o método de projeção multiescala estão de acordo com a referência de malha fina não mostrando nenhuma imprecisão ao longo das interfaces dos subdomínios (representadas pelas linhas brancas nas figuras).

Finalmente, são apresentadas três estratégias relacionando o erro relativo do campo de velocidades com o tamanho do sistema global resolvido a cada passo de tempo. A proposta do método descrito nessa tese é, justamente, reduzir o tempo computacional gasto na etapa da equação elíptica do método de projeção por meio de decomposição de domínio. Ou seja, resolver pequenos problemas locais em cada subdomínio e um sistema global reduzido que acopla todas as soluções locais. Dessa forma, é intuitivo pensar em estratégias para melhorar ainda mais a performance reduzindo, tanto quanto possível, o estágio *online* do método.

Entretanto, é necessário pesar prós e contras em cada tipo de estratégia. Revisitando a [Seção 4.5](#), em se tratando do sistema global resolvido no estágio *online* do método de projeção multiescala aqui proposto, o custo deste depende dos espaços de interface e da decomposição de domínio. Da mesma forma, a solução obtida pode ser mais ou menos satisfatória (apresentando erros maiores ou menores dependendo das configurações do método). Ou seja, vale pesar o ponto ótimo entre acurácia e redução do custo computacional.

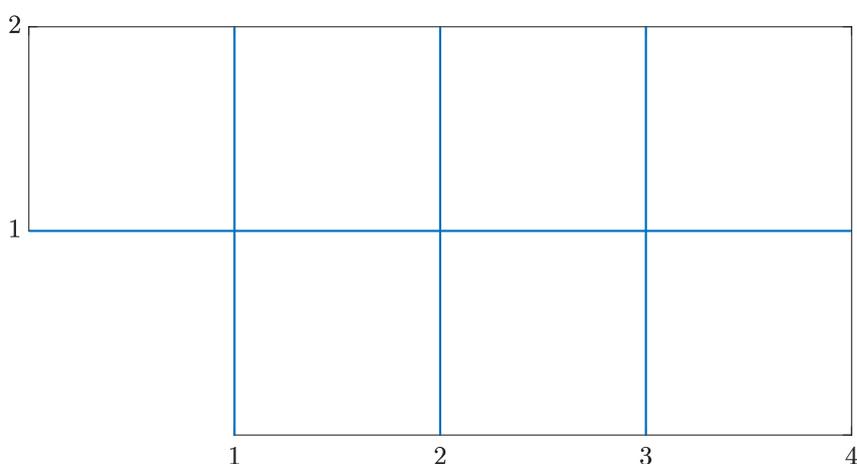
Figura 32 – Linhas de corrente para o campo de velocidades com $\alpha = 1$. (a) solução referência de malha fina; (b) solução com MRCM usando $\mathcal{P}_{H,0}, \mathcal{U}_{H,1}$; (c) solução com MRCM usando $\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$. As linhas brancas mostram a decomposição de domínio usada para essas simulações. Ambas soluções obtidas com o MRCM estão de acordo com a solução de malha fina, e as linhas de corrente não apresentam inacurácias ao longo das interfaces entre subdomínios.



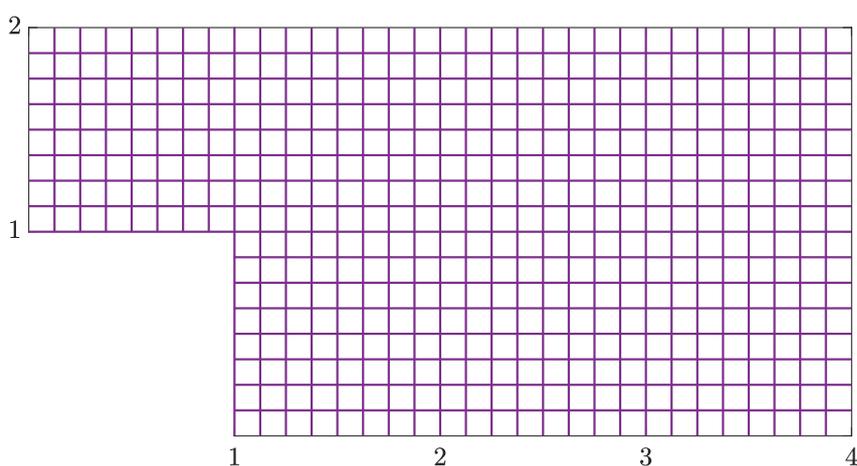
Fonte: Elaborada pelo autor.

A primeira estratégia para avaliar o custo do sistema global resolvido no estágio *online* é, usando apenas soluções de malha fina, partindo da malha de referência com 320×160 células, diminuir o número de células da malha (reduzindo o tamanho do sistema global resolvido) e avaliar como o erro aumenta neste processo. Essa estratégia nada mais é que resolver o problema de malha fina (sem decomposição de domínio) com malhas cada vez menos refinadas, o método de referência mais tradicionalmente usado. Na [Figura 34](#), estes resultados estão apresentados na curva verde, a medida que o número de células diminui, o erro aumenta.

Figura 33 – Decomposições de domínio usadas para o estudo fixando os espaços de interface e refinando as decomposições de domínio. A primeira (topo) é a decomposição de domínio mais grosseira; A segunda é a decomposição de domínio mais refinada.



(a) Decomposição de domínio mais grosseira



(b) Decomposição de domínio mais refinada

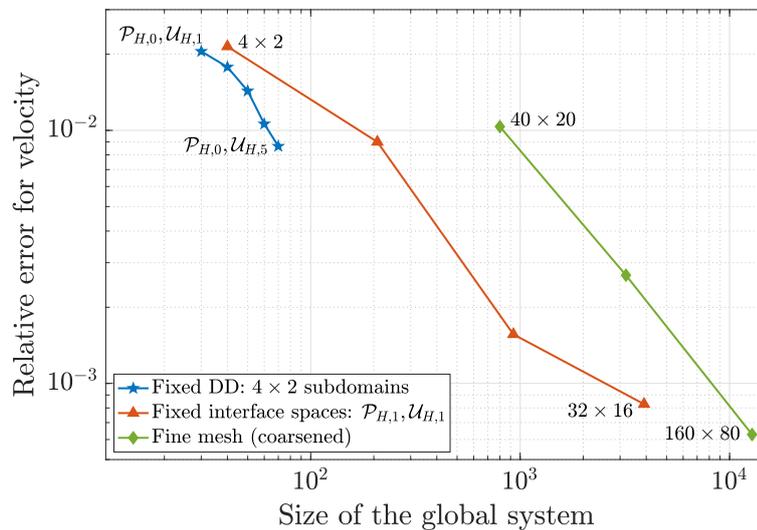
Fonte: Elaborada pelo autor.

A segunda estratégia é fixar a decomposição de domínio (apresentada na [Figura 33a](#)) usando 320×160 células finas e enriquecer o espaço de interfaces para o fluxo, partindo do espaço linear por partes (mantendo o espaço para pressão constante por partes em todos os casos). Desta forma, o sistema global aumenta a medida que se usa espaços de maior ordem para o fluxo.

A medida que o espaço de interfaces para o fluxo é enriquecido, o erro diminui como mostrado na Figura 34 pela curva em azul.

A terceira e última estratégia, fixa os espaços de interface lineares por partes para pressão e fluxo e, partindo da decomposição de domínio da Figura 33a, refina esta decomposição até chegar na apresentada na Figura 33b, sempre mantendo 320×160 células finas. Ou seja, o sistema global aumenta devido ao número de interfaces entre subdomínios cada vez maior. Observando a Figura 34 (curva vermelha), a medida que a decomposição de domínio é refinada, o tamanho do sistema global resolvido no estágio *online* aumenta e há uma queda no erro relativo.

Figura 34 – Erros relativos para campo de velocidades relacionado com o tamanho do sistema global resolvido a cada passo de tempo no estágio *online*. Três estratégias apresentadas: engrossamento da malha fina (curva verde); fixar a decomposição de domínio enriquecendo o espaço de interfaces para o fluxo (curva azul); fixar os espaços de interface para pressão e fluxo e refinar a decomposição de domínio (curva vermelha).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dos resultados obtidos, tanto a segunda quanto a terceira estratégia apresentam prós e contras interessantes. Na segunda, o erro cai de forma lenta a medida que a ordem do espaço de interface para o fluxo aumenta, apesar de não haver um aumento expressivo do custo computacional no estágio *online*. Na terceira estratégia, o erro cai de forma mais expressiva e o custo do sistema cresce de forma razoável, podendo chegar perto do custo da primeira estratégia. Isso sugere que, possivelmente, uma abordagem híbrida pode ser interessante, ou seja, partindo de uma decomposição de domínio intermediária, enriquecer o espaço de interface do fluxo.

Além disso, reduzir o tamanho do sistema global em uma ordem de grandeza, por exemplo de 10^4 para 10^3 com a estratégia de engrossamento simples da malha fina produz um erro da ordem de 10^{-2} , enquanto usar uma decomposição de domínio adequada produz um erro da ordem de 10^{-3} , sendo essa uma estratégia mais interessante que simplesmente usar uma malha mais grosseira. Por outro lado, se a porcentagem de erro permitida para uma certa aplicação do método de projeção multiescala é de apenas 1% no campo de velocidades, é possível atingir

esse resultado nessa margem de erro resolvendo problemas globais no estágio *online* com 70 equações, enquanto o problema de malha fina requer sistemas com pelo menos 50000 incógnitas no estágio *online*.

5.3 Esteira de Von Kármán

Para dar seguimento aos testes para verificação do método proposto, escolheu-se o problema de escoamento em torno de um obstáculo, tal exemplo permite observar fenômenos transientes no escoamento. O obstáculo (que neste caso é um quadrado (BREUER *et al.*, 2000)), induz perturbações nos campos de velocidade e pressão e, a medida que o número de Reynolds varia, o escoamento apresenta diferentes particularidades. Para números de Reynolds em torno de 50, o escoamento ainda é estacionário. Com valores superiores indo até aproximadamente 200, surge uma esteira de vórtices laminar conhecida como esteira de Von Kármán e, para valores superiores a 200, já se observa um escoamento com fenômenos tridimensionais ou turbulentos (FERNANDES, 2020). Neste trabalho, escolheu-se o número de Reynolds igual a 100, permitindo observar a esteira de Von Kármán. Comparou-se a solução obtida com o método da projeção multiescala com a solução de malha fina.

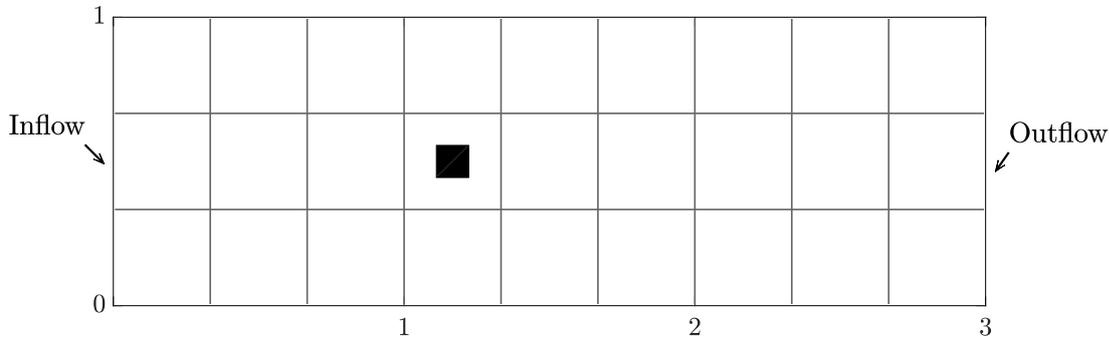
A Figura 35 mostra o esquema do domínio utilizado para as simulações do problema. As linhas cinzas da Figura 35 representam a decomposição de domínio utilizada em todos os testes com este escoamento, cada subdomínio tem 30 células em cada direção. A região escura é o obstáculo, considerado como parede tendo, portanto, condições de contorno sem escorregamento (*no-slip*), em que as velocidades em x_1 e x_2 são nulas no contorno do mesmo. As paredes superior e inferior tem condição de contorno com escorregamento (*free-slip*), ou seja, a velocidade normal à parede tem condição de contorno de Dirichlet nula e a velocidade tangencial tem condição de contorno de Neumann igual a zero. Finalmente, a lateral esquerda do domínio tem condição de entrada de fluido, em que foi imposto um perfil parabólico com valor máximo 1 para componente u_1 da velocidade e valor zero para componente u_2 da velocidade, e a lateral direita tem condição de saída de fluido.

Em se tratando dos adimensionais relevantes para essas simulações, tem-se o número de Reynolds, Equação 5.1, fixado em 100 para os testes aqui relatados. Outro adimensional importante é o número de Strouhal (St), que representa de forma adimensional a frequência de despreendimento dos vórtices (denotada por f_v) na esteira de Von Kármán, ele é dado por

$$St = \frac{f_v L}{\|\mathbf{u}_\infty\|} \quad (5.2)$$

e seu valor é calculado após as simulações. Finalmente, tem-se os coeficientes de arrasto (*drag*) C_D e sustentação (*lift*) C_L que dependem das forças de arrasto F_D e sustentação F_L , calculadas na

Figura 35 – Domínio para o teste da esteira de Von Kármán. O lado esquerdo tem condição de entrada de fluido (*inflow*). Do lado direito do domínio, tem-se a condição de saída de fluido (*outflow*) apropriada enquanto as faces norte e sul do canal tem condição de escorregamento (*free-slip*). Finalmente, a região escura representa o obstáculo e suas paredes tem condição de contorno sem escorregamento (*no-slip*).



Fonte: Elaborada pelo autor.

superfície do obstáculo e dadas por

$$\begin{bmatrix} F_D \\ F_L \end{bmatrix} = \mathbf{F} = \int_{\Gamma_S} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, P) \mathbf{n} d\Gamma_S \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, P) = -P\mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (5.3)$$

assim, para calcular C_D e C_L faz-se

$$C_D = \frac{2F_D}{\rho \|\mathbf{u}_\infty\|^2 L} \quad \text{e} \quad C_L = \frac{2F_L}{\rho \|\mathbf{u}_\infty\|^2 L}. \quad (5.4)$$

Tal como o número de Strouhal, os coeficientes de arrasto e sustentação são calculados após o final das simulações, os resultados obtidos com o método proposto foram comparados com os resultados obtidos na simulação de malha fina.

Os resultados estão apresentados nas [Tabela 7](#) e [Tabela 8](#), e mostram os coeficientes de arrasto e sustentação e o número de Strouhal para malha fina (usados como referência) e para o método da projeção multiescala variando os espaços das interfaces entre subdomínios para pressão e fluxo e fixando o parâmetro $\alpha = 1$ ([Tabela 7](#)); e variando α e os espaços de interfaces ([Tabela 8](#)).

Na [Tabela 7](#), primeiramente fixou-se o espaço de interface linear por partes para pressão $\mathcal{P}_{H,1}$, variando o espaço de interface para o fluxo, começando com espaço linear por partes $\mathcal{U}_{H,1}$ até cúbico por partes $\mathcal{U}_{H,3}$. Como o presente escoamento é mais complexo e apresenta um transiente com desprendimento de vórtices, viu-se a necessidade de também enriquecer o espaço de interfaces para pressão.

Deste modo, a [Tabela 7](#) também apresenta $\mathcal{P}_{H,2}$ e $\mathcal{P}_{H,3}$ com variação do espaço de fluxo. De fato, ao enriquecer o espaço para pressão, o erro decaiu, sendo os melhores resultados obtidos com $\mathcal{P}_{H,2}$ e $\mathcal{P}_{H,3}$, encarecendo um pouco o sistema global de interfaces resolvido no estágio *online*.

Tabela 7 – Valores obtidos para os coeficientes de arrasto e sustentação e número de Strouhal utilizando $\alpha = 1$. Os valores obtidos com o método da projeção multiescala foram comparados com o valor obtido na malha fina e calculou-se um erro relativo dos mesmos.

	C_D	Erro	C_L	Erro	Strouhal
Malha fina	1.33E+00	-	2.63E-01	-	1.21E-01
$\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$	1.30E+00	2.41E-02	3.05E-01	1.57E-01	1.21E-01
$\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,2}$	1.29E+00	3.40E-02	2.96E-01	1.24E-01	1.21E-01
$\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,3}$	1.29E+00	3.13E-02	3.07E-01	1.65E-01	1.21E-01
$\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,1}$	1.35E+00	1.08E-02	2.67E-01	1.33E-02	1.21E-01
$\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,2}$	1.35E+00	1.07E-02	2.91E-01	1.07E-01	1.26E-01
$\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,3}$	1.35E+00	1.19E-02	2.84E-01	8.06E-02	1.26E-01
$\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,1}$	1.34E+00	4.88E-03	2.50E-01	5.11E-02	1.21E-01
$\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,2}$	1.33E+00	9.63E-04	2.64E-01	3.06E-03	1.21E-01
$\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$	1.33E+00	1.87E-03	2.63E-01	1.87E-03	1.21E-01

Fonte: Dados da pesquisa.

Juntamente com o enriquecimento dos espaços de interfaces para pressão investigou-se como as soluções se comportariam ao variar o valor de α . Porém, como são simulações que tomam um tempo considerável para serem concluídas devido ao tempo de desprendimento dos vórtices na esteira de Von Kármán, escolheu-se valores estratégicos para α . São eles: $\alpha = 10^{-6}$, $\alpha = 1$ e $\alpha = 10^6$. Apesar do método de projeção multiescala ter soluções com erros perto do mínimo com valores intermediários de α para os exemplos apresentados nos resultados anteriores, nada garante que esse comportamento se repetirá para os escoamentos com transiente.

Tabela 8 – Valores obtidos para os coeficientes de arrasto e sustentação e número de Strouhal utilizando três valores distintos de α . Os valores obtidos com o método da projeção multiescala foram comparados com o valor obtido na malha fina e calculou-se um erro relativo dos mesmos.

		C_D	Erro	C_L	Erro	Strouhal
	Malha fina	1.33E+00	-	2.63E-01	-	1.21E-01
$\alpha = 10^{-6}$	$\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$	1.29E+00	2.76E-02	3.00E-01	1.40E-01	1.26E-01
	$\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,1}$	1.34E+00	3.08E-03	2.84E-01	8.05E-02	1.26E-01
	$\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,1}$	1.33E+00	2.84E-03	2.63E-01	4.42E-04	1.21E-01
$\alpha = 1$	$\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$	1.30E+00	2.41E-02	3.05E-01	1.57E-01	1.21E-01
	$\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,1}$	1.35E+00	1.08E-02	2.67E-01	1.33E-02	1.21E-01
	$\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,1}$	1.34E+00	4.88E-03	2.50E-01	5.11E-02	1.21E-01
	$\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$	1.30E+00	2.41E-02	3.05E-01	1.57E-01	1.21E-01
	$\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,2}$	1.29E+00	3.40E-02	2.96E-01	1.24E-01	1.21E-01
	$\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,3}$	1.29E+00	3.13E-02	3.07E-01	1.65E-01	1.21E-01
$\alpha = 10^6$	$\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,1}$	1.31E+00	1.77E-02	2.97E-01	1.28E-01	1.21E-01
	$\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,2}$	1.29E+00	3.04E-02	2.91E-01	1.06E-01	1.21E-01
	$\mathcal{P}_{H,1}, \mathcal{U}_{H,3}$	1.29E+00	2.76E-02	3.00E-01	1.40E-01	1.26E-01

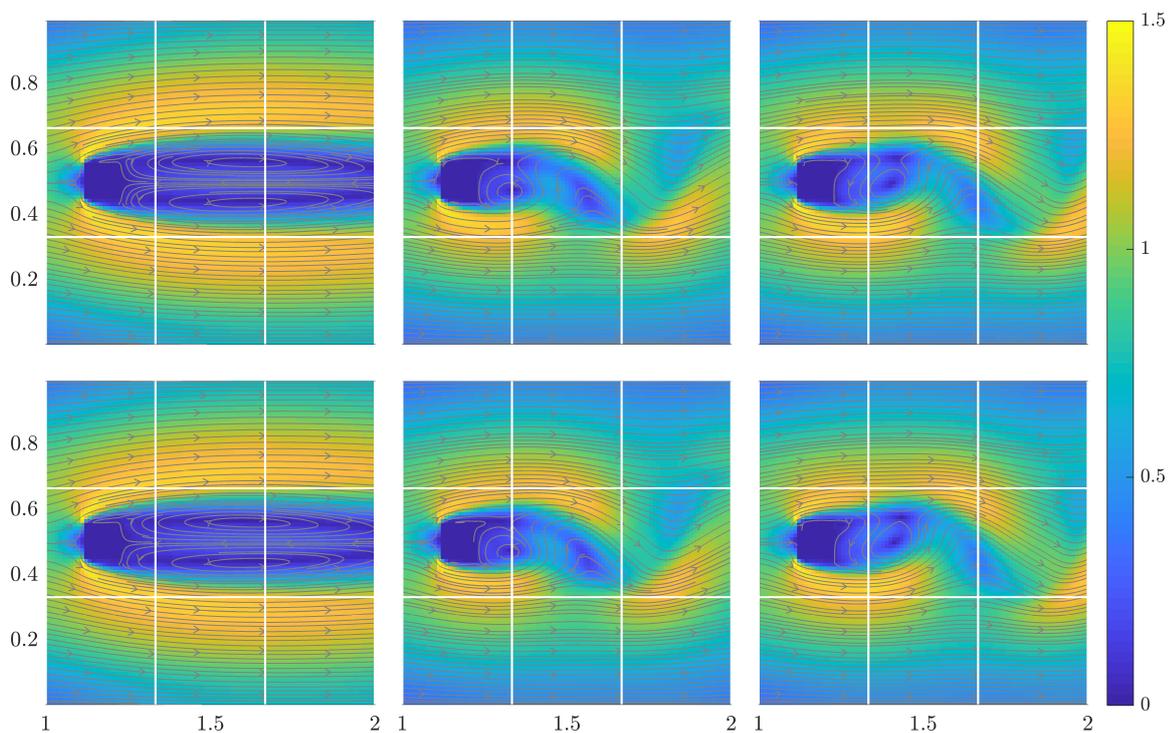
Fonte: Dados da pesquisa.

Os espaços escolhidos para as simulações da [Tabela 8](#) foram combinações dos espaços

de pressão e fluxo que não encarecessem muito o sistema global de interfaces como $\mathcal{P}_{H,2}, \mathcal{U}_{H,3}$ e $\mathcal{P}_{H,3}, \mathcal{U}_{H,3}$ que mostraram melhores soluções na Tabela 7. O intuito dessas escolhas era justamente tentar encontrar uma configuração menos custosa do método de projeção multiescala com uma solução com acurácia suficiente. Assim, para $\alpha = 10^{-6}$ e os três primeiros testes com $\alpha = 1$, fixou-se $\mathcal{U}_{H,1}$ variando o espaço de pressão e, para $\alpha = 10^6$ e os três últimos testes com $\alpha = 1$, fixou-se $\mathcal{P}_{H,1}$ variando o espaço de fluxo. Os melhores resultados foram observados com $\alpha = 10^{-6}$ e $\mathcal{P}_{H,3}$, mostrando que a pressão, para essas simulações, tem muita influência na acurácia da solução.

Para além de estudar os coeficientes de arrasto e sustentação e o número de Strouhal para os testes aqui apresentados, é importante verificar (mesmo que visualmente) se a decomposição de domínio afeta em alguma medida o campo de velocidades nas regiões em que há desprendimento de vórtices. A Figura 36 mostra três momentos diferentes do escoamento obtidos com as soluções de malha fina (primeira linha) e com o método de projeção multiescala (segunda linha) utilizando espaço de pressão quadrático por partes e de fluxo linear por partes, bem como $\alpha = 1$. Visualmente, além das soluções estarem semelhantes, não se observa perturbações no campo de velocidades ao longo do esqueleto da decomposição de domínio (representado pelas linhas brancas nas imagens).

Figura 36 – Diferentes momentos do escoamento em torno de um obstáculo quadrado. A primeira linha mostra a solução de malha fina e a segunda a solução obtida com o método de projeção multiescala considerando $k_U = 1$ e $k_p = 2$ e $\alpha = 1$. As linhas brancas representam o esqueleto da decomposição de domínio escolhida e as linhas acinzentadas as linhas de corrente para o campo de velocidade do escoamento. Ambas soluções são similares mesmo com $k_U = 1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentadas duas estratégias para reduzir o custo computacional da solução numérica das equações de Navier-Stokes. Uma baseada em reduzir o número de células da malha que discretiza o domínio utilizando malhas hierárquicas que permitem refinamentos locais em regiões de interesse do escoamento e engrossamento das malhas em regiões sem interesse. E outra baseada na decomposição de domínio multiescala, que reduz o custo resolvendo problemas locais menores e acoplando as soluções locais com um sistema global reduzido.

A estratégia que utiliza malhas hierárquicas conta com um esquema de interpolação independente de malha para lidar com os casos em que os nós dos estênceis de diferenças finitas (usadas para discretizar as derivadas presentes nas equações de Navier-Stokes, bem como a equação de Poisson que surge ao aplicar o método da projeção) não estão na malha. Essa estratégia de interpolação mostrou-se robusta e manteve a ordem das discretizações em diversos testes relatados aqui e em (SOUSA *et al.*, 2019).

Neste trabalho também foi apresentado um novo método de projeção multiescala que usa um método de decomposição de domínio multiescala para resolver a equação elíptica que surge quando aplicado o método da projeção de Chorin (1968) nas equações de Navier-Stokes. As soluções obtidas com esse método foram comparadas com uma solução previamente calculada de malha fina (sem a decomposição de domínio) utilizando o método já conhecido na literatura para resolver esse tipo de problema. No caso um método de volumes finitos padrão com discretizações centrais para derivadas. Essa solução de malha fina não leva em consideração nenhuma decomposição de domínio, ou seja, é possível verificar, portanto, se a decomposição de domínio do método proposto afeta e como afeta a solução final.

Os primeiros testes realizados foram para verificar o método de projeção multiescala, sendo eles: uma decomposição de Helmholtz-Hodge de um campo vetorial conhecido e o decaimento de vórtice, que possui uma solução e comportamento esperados e bem conhecidos do campo de velocidades ao longo do tempo. Vale lembrar que as comparações entre a solução

referência de malha fina e a do método de projeção multiescala avaliaram o campo de velocidades e o erro relativo do mesmo de diversas formas. A pressão não foi avaliada, uma vez que a pressão final não é contínua na resolução de malha fina. Garante-se continuidade apenas no gradiente de pressão por aplicar uma estratégia de *downscaling* e é justamente o gradiente de pressão que é utilizado no método de projeção multiescala para obter a velocidade final, deste modo a velocidade final preserva continuidade na malha fina.

Os resultados para a decomposição de Helmholtz-Hodge mostraram que, com espaços de interface pobres para pressão e fluxo, a solução apresentava muitos erros ao longo do esqueleto da decomposição de domínio. Apesar de o gradiente da velocidade obtida ser zero, a menos de erro de máquina, em todo domínio, observou-se que o que fazia o campo de velocidades apresentar erros tão grotescos nas interfaces para espaços de ordem mais baixa era que o rotacional do fluxo retornado pelo método não era nulo em todo domínio, apresentando valores grandes no esqueleto da decomposição.

Com o enriquecimento dos espaços de interface, o campo final de velocidades se aproximou da solução de malha fina e o erro relativo ficou num patamar aceitável. Além de analisar esse aspecto da velocidade, foi feito um teste de estabilidade da decomposição de Helmholtz-Hodge. Mesmo com as escolhas de espaços em que a solução era bastante imprecisa na interface dos subdomínios, esse erro não aumentou ao longo das sucessivas aplicações da decomposição de Helmholtz-Hodge, mostrando que o método tem potencial para lidar com problemas que evoluem com o tempo, onde é necessário aplicar a projeção a cada passo de tempo.

De fato, ao analisar os resultados do decaimento de vórtice, espaços com ordem mais baixa já foram capazes de recuperar uma solução com boa concordância com a solução de malha fina, mostrando que o método se comportou bem num primeiro teste de Navier-Stokes. Essa escolha de espaços com ordem mais baixa foi a selecionada para os próximos testes de validação do método. Tanto neste caso como no teste da decomposição de Helmholtz-Hodge, variou-se o parâmetro α do método da projeção multiescala e observou-se que, para valores intermediários de α o erro relativo da velocidade era menor.

Em se tratando dos resultados de validação do método, foram escolhidos três problemas bem conhecidos na literatura: cavidade impulsionada, escoamento num degrau e escoamento em torno de um obstáculo quadrado. Os resultados da cavidade impulsionada foram todos feitos considerando $\alpha = 1$. A solução obtida com o método da projeção multiescala mostrou boa concordância com a solução de malha fina e com a solução apresentada por [Ghia, Ghia e Shin \(1982\)](#).

Para o escoamento num degrau, viu-se a necessidade de validar se $\alpha = 1$ era uma boa escolha, deste modo fez-se um estudo variando esse parâmetro e, de fato, $\alpha = 1$ era a escolha que recuperava uma solução com menor erro relativo para velocidade. Além deste estudo, fez-se um estudo variando as decomposições de domínio fixando os espaços de interface e variando os espaços de interface com uma decomposição de domínio fixada. Esse estudo mostrou que é mais

vantajoso trabalhar com uma decomposição de domínio intermediária.

No escoamento em torno de um obstáculo quadrado, um problema transiente que mostra o fenômeno da esteira de Von Kármán, foi preciso enriquecer tanto o espaço de fluxo quanto o de pressão. Os testes realizados compararam os coeficientes de arrasto e sustentação obtidos com o método proposto e o método de malha fina. Também foi realizado um estudo variando o parâmetro α , concluindo que $\alpha = 1$ é uma boa escolha. Finalmente, foram feitas capturas de diferentes momentos da evolução dos vórtices tanto pra malha fina quanto pra solução do método de projeção multiescala e observou-se que a decomposição de domínio não interferiu na estrutura do vórtice, nem poluiu o desenvolvimento dos mesmos.

Com base nesses resultados, pode-se concluir que o método proposto tem uma boa performance, em se tratando de acurácia. Além disso, com base no estudo teórico de custo computacional, há a promessa de ser um método com escalabilidade próxima do ideal, reduzindo de fato o custo computacional da etapa de resolução da equação elíptica no método da projeção.

Tanto os resultados com malhas hierárquicas quanto os resultados com o método de projeção multiescala sugerem ser interessante combinar ambos em trabalhos futuros. Aproveitando a escalabilidade de um método multiescala com a possibilidade de refinamentos localizados nos subdomínios, há possibilidade de redução no custo computacional.

REFERÊNCIAS

ARAYA, R.; HARDER, C.; PAREDES, D.; VALENTIN, F. Multiscale hybrid-mixed method. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, SIAM, v. 51, n. 6, p. 3505–3531, 2013. Citado na página 26.

ARBOGAST, T.; PENCHEVA, G.; WHEELER, M. F.; YOTOV, I. A multiscale mortar mixed finite element method. **Multiscale Modeling & Simulation**, SIAM, v. 6, n. 1, p. 319–346, 2007. Citado na página 26.

ARMALY, B. F.; DURST, F.; PEREIRA, J.; SCHÖNUNG, B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. **Journal of fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 127, p. 473–496, 1983. Citado na página 78.

BAIGES, J.; CODINA, R.; IDELSOHN, S. A domain decomposition strategy for reduced order models. application to the incompressible navier–stokes equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 267, p. 23–42, 2013. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782513001965>>. Citado na página 25.

BALAY, S.; ABHYANKAR, S.; ADAMS, M.; BROWN, J.; BRUNE, P.; BUSCHELMAN, K.; DALCIN, L.; DENER, A.; EIJKHOUT, V.; GROPP, W. *et al.* Petsc users manual. Argonne National Laboratory, 2019. Citado na página 50.

BALAY, S.; ABHYANKAR, S.; ADAMS, M. F.; BROWN, J.; BRUNE, P.; BUSCHELMAN, K.; DALCIN, L.; EIJKHOUT, V.; GROPP, W. D.; KAUSHIK, D. *et al.* **PETSc web page**. 2001. Citado na página 50.

BATTY, C. A cell-centred finite volume method for the poisson problem on non-graded quadtrees with second order accurate gradients. **Journal of Computational Physics**, v. 331, p. 49 – 72, 2017. Citado nas páginas 23, 45, 48 e 70.

BELYTSCHKO, T.; KRONGAUZ, Y.; ORGAN, D.; FLEMING, M.; KRYSL, P. Meshless methods: an overview and recent developments. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 139, n. 1-4, p. 3–47, 1996. Citado nas páginas 24 e 40.

BENITO, J.; URENA, F.; GAVETE, L. Influence of several factors in the generalized finite difference method. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 25, n. 12, p. 1039–1053, 2001. Citado na página 40.

BERGER, M. J.; OLIGER, J. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. **Journal of computational Physics**, Elsevier, v. 53, n. 3, p. 484–512, 1984. Citado na página 23.

BISWAS, G.; BREUER, M.; DURST, F. Backward-facing step flows for various expansion ratios at low and moderate reynolds numbers. **J. Fluids Eng.**, v. 126, n. 3, p. 362–374, 2004. Citado na página 78.

- BRAKKEE, E.; SEGAL, A.; KASSELS, C. A parallel domain decomposition algorithm for the incompressible navier-stokes equations. **Simulation Practice and Theory**, v. 3, n. 4, p. 185–205, 1995. ISSN 0928-4869. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0928486995000267>>. Citado na página 25.
- BRAKKEE, E.; VUIK, C.; WESSELING, P. Domain decomposition for the incompressible navier–stokes equations: solving subdomain problems accurately and inaccurately. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Wiley Online Library, v. 26, n. 10, p. 1217–1237, 1998. Citado na página 25.
- BREUER, M.; BERNSDORF, J.; ZEISER, T.; DURST, F. Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods: lattice-boltzmann and finite-volume. **International journal of heat and fluid flow**, Elsevier, v. 21, n. 2, p. 186–196, 2000. Citado na página 83.
- BROWN, D. L.; CORTEZ, R.; MINION, M. L. Accurate projection methods for the incompressible navier–stokes equations. **Journal of Computational Physics**, v. 168, n. 2, p. 464 – 499, 2001. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999101967154>>. Citado na página 22.
- CHINESTA, F.; HUERTA, A.; ROZZA, G.; WILLCOX, K. **Model order reduction. Encyclopedia of computational mechanics**. [S.l.]: Elsevier Editor, 2016. Citado nas páginas 24 e 25.
- CHORIN, A. J. Numerical solution of the navier-stokes equations. **Mathematics of computation**, v. 22, n. 104, p. 745–762, 1968. Citado nas páginas 22, 31 e 87.
- DING, H.; SHU, C.; CAI, Q. Applications of stencil-adaptive finite difference method to incompressible viscous flows with curved boundary. **Computers & fluids**, Elsevier, v. 36, n. 4, p. 786–793, 2007. Citado na página 24.
- DING, H.; SHU, C.; YEO, K.; XU, D. Simulation of incompressible viscous flows past a circular cylinder by hybrid fd scheme and meshless least square-based finite difference method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 193, n. 9-11, p. 727–744, 2004. Citado na página 24.
- DOUGLAS, J.; LEME, P. P.; ROBERTS, J.; WANG, J. A parallel iterative procedure applicable to the approximate solution of second order partial differential equations by mixed finite element methods. **Numerische Mathematik**, Springer, v. 65, n. 1, p. 95–108, 1993. Citado na página 26.
- DRYJA, M.; WIDLUND, O. B. **Towards a unified theory of domain decomposition algorithms for elliptic problems**. [S.l.]: New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, Division of . . . , 1989. Citado na página 25.
- FERNANDES, J. W. D. **Técnica de superposição de modelos estabilizada para análise de interação fluido-estrutura**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2020. Citado nas páginas 24 e 83.
- FERRAZ, P. C. **A novel recursive formulation of multiscale mixed methods and relaxation modeling of flow in porous media: Uma nova formulação recursiva para métodos mistos multiescala e modelagem de fluxo em meios porosos com relaxamento**. Tese (Doutorado) — Universidade de Estadual de Campinas, 2019. Citado na página 62.

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; MITCHELL, J. W. **Fox and McDonald's introduction to fluid mechanics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2020. Citado nas páginas 27 e 28.

FRANCISCO, A.; GINTING, V.; PEREIRA, F.; RIGELO, J. Design and implementation of a multiscale mixed method based on a nonoverlapping domain decomposition procedure. **Mathematics and Computers in Simulation**, Elsevier, v. 99, p. 125–138, 2014. Citado nas páginas 26, 53 e 59.

GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. **Journal of computational physics**, Academic Press, v. 48, n. 3, p. 387–411, 1982. Citado nas páginas 14, 76, 77 e 88.

GHOSH, S.; LU, J.; GUPTA, V.; TRYGGVASON, G. Communication-efficient algorithms for solving pressure poisson equation for multiphase flows using parallel computers. **Plos one**, Public Library of Science San Francisco, CA USA, v. 17, n. 11, p. e0277940, 2022. Citado na página 33.

GIRAULT, V.; RIVIÈRE, B.; WHEELER, M. A discontinuous galerkin method with nonoverlapping domain decomposition for the stokes and navier-stokes problems. **Mathematics of computation**, v. 74, n. 249, p. 53–84, 2005. Citado na página 25.

GODA, K. A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two-or three-dimensional cavity flows. **Journal of computational physics**, Elsevier, v. 30, n. 1, p. 76–95, 1979. Citado na página 22.

GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. **Matrix computations**. [S.l.]: JHU press, 2013. Citado na página 62.

GÓMEZ, P.; ZANZI, C.; LÓPEZ, J.; HERNÁNDEZ, J. Simulation of high density ratio interfacial flows on cell vertex/edge-based staggered octree grids with second-order discretization at irregular nodes. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 376, p. 478–507, 2019. Citado na página 23.

GRIEBEL, M.; OSWALD, P. On the abstract theory of additive and multiplicative schwarz algorithms. **Numerische Mathematik**, Springer, v. 70, n. 2, p. 163–180, 1995. Citado na página 25.

GUERMOND, J.-L.; MINEV, P.; SHEN, J. An overview of projection methods for incompressible flows. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 195, n. 44-47, p. 6011–6045, 2006. Citado na página 22.

GUIRALDELLO, R. T.; AUSAS, R. F.; SOUSA, F. F.; PEREIRA, F.; BUSCAGLIA, G. C. The multiscale robin coupled method for flows in porous media. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, 2018. Citado nas páginas 26, 33, 53, 54, 55, 58, 65 e 78.

GUIRALDELLO, R. T.; AUSAS, R. F.; SOUSA, F. S.; PEREIRA, F.; BUSCAGLIA, G. C. Velocity postprocessing schemes for multiscale mixed methods applied to contaminant transport in subsurface flows. **Computational Geosciences**, Springer, v. 24, n. 3, p. 1141–1161, 2020. Citado nas páginas 57 e 59.

GUITTET, A.; THEILLARD, M.; GIBOU, F. A stable projection method for the incompressible navier–stokes equations on arbitrary geometries and adaptive quad/octrees. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 292, p. 215–238, 2015. Citado na página 23.

- GUNZBURGER, M. D.; LEE, H. K. An optimization-based domain decomposition method for the navier–stokes equations. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, SIAM, v. 37, n. 5, p. 1455–1480, 2000. Citado na página 25.
- JARAMILLO, A.; GUIRALDELLO, R. T.; PAZ, S.; AUSAS, R. F.; SOUSA, F. S.; PEREIRA, F.; BUSCAGLIA, G. C. Towards hpc simulations of billion-cell reservoirs by multiscale mixed methods. **arXiv preprint arXiv:2103.08513**, 2021. Citado nas páginas 57 e 60.
- _____. Towards hpc simulations of billion-cell reservoirs by multiscale mixed methods. **Computational Geosciences**, Springer, v. 26, n. 3, p. 481–501, 2022. Citado nas páginas 33 e 63.
- JENNY, P.; LEE, S.; TCHELEPI, H. A. Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 187, n. 1, p. 47–67, 2003. Citado na página 59.
- KUNDU, R. K.; COHEN, I. M. **Fluid mechanics**. [S.l.]: Academic press, 2002. Citado na página 28.
- LADYZHENSKAYA, O. A. **The mathematical theory of viscous incompressible flow**. [S.l.]: Gordon & Breach New York, 1969. v. 12. Citado nas páginas 22 e 30.
- LASSILA, T.; MANZONI, A.; QUARTERONI, A.; ROZZA, G. Model order reduction in fluid dynamics: challenges and perspectives. **Reduced Order Methods for modeling and computational reduction**, Springer, p. 235–273, 2014. Citado na página 24.
- LI, S.; LIU, W. K. Meshfree and particle methods and their applications. **Appl. Mech. Rev.**, v. 55, n. 1, p. 1–34, 2002. Citado na página 24.
- LIONS, P.-L. *et al.* On the schwarz alternating method. i. In: PARIS, FRANCE. **First international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations**. [S.l.], 1988. v. 1, p. 42. Citado na página 26.
- LOSASSO, F.; GIBOU, F.; FEDKIW, R. Simulating water and smoke with an octree data structure. In: **Acm siggraph 2004 papers**. [S.l.: s.n.], 2004. p. 457–462. Citado na página 23.
- MADAY, Y.; RØNQUIST, E. M. A reduced-basis element method. **Journal of scientific computing**, Springer, v. 17, n. 1, p. 447–459, 2002. Citado na página 24.
- MEHMANI, Y.; BALHOFF, M. T. Bridging from pore to continuum: A hybrid mortar domain decomposition framework for subsurface flow and transport. **Multiscale Modeling & Simulation**, SIAM, v. 12, n. 2, p. 667–693, 2014. Citado na página 53.
- MIN, C.; GIBOU, F. A second order accurate projection method for the incompressible navier–stokes equations on non-graded adaptive grids. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 219, n. 2, p. 912–929, 2006. Citado na página 23.
- MIN, C.; GIBOU, F.; CENICEROS, H. D. A supra-convergent finite difference scheme for the variable coefficient poisson equation on non-graded grids. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 218, n. 1, p. 123–140, 2006. Citado na página 45.
- NABBEN, R. Comparisons between multiplicative and additive schwarz iterations in domain decomposition methods. **Numerische Mathematik**, Springer, v. 95, n. 1, p. 145–162, 2003. Citado na página 25.

NATAF, F.; ROGIER, F.; STURLER, E. de. Domain decomposition methods for fluid dynamics. In: _____. **Navier—Stokes Equations and Related Nonlinear Problems**. Boston, MA: Springer US, 1995. p. 367–376. ISBN 978-1-4899-1415-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4899-1415-6_30>. Citado na página 25.

NGUYEN, V. P.; RABCZUK, T.; BORDAS, S.; DUFLOT, M. Meshless methods: a review and computer implementation aspects. **Mathematics and computers in simulation**, Elsevier, v. 79, n. 3, p. 763–813, 2008. Citado na página 24.

OISHI, C. M. **Análise e implementação de métodos implícitos e de projeção para escoamentos com superfície livre**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2008. Citado nas páginas 30 e 31.

OLSHANSKII, M. A.; TEREKHOV, K. M.; VASSILEVSKI, Y. V. An octree-based solver for the incompressible navier–stokes equations with enhanced stability and low dissipation. **Computers and Fluids**, v. 84, p. 231 – 246, 2013. Citado nas páginas 11, 23, 47, 48 e 65.

PEARSON, K. Liii. on lines and planes of closest fit to systems of points in space. **The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science**, Taylor & Francis, v. 2, n. 11, p. 559–572, 1901. Citado na página 24.

PIVELLO, M. R.; VILLAR, M. M.; SERFATY, R.; ROMA, A. M.; SILVEIRA-NETO, A. d. A fully adaptive front tracking method for the simulation of two phase flows. **International Journal of Multiphase Flow**, Elsevier, v. 58, p. 72–82, 2014. Citado na página 23.

POPINET, S. Gerris: a tree-based adaptive solver for the incompressible euler equations in complex geometries. **Journal of computational physics**, Elsevier, v. 190, n. 2, p. 572–600, 2003. Citado na página 23.

PROSPERETTI, A.; TRYGGVASON, G. **Computational methods for multiphase flow**. [S.l.]: Cambridge university press, 2007. Citado na página 33.

QUARTERONI, A.; ROZZA, G.; MANZONI, A. Certified reduced basis approximation for parametrized partial differential equations and applications. **Journal of Mathematics in Industry**, Springer, v. 1, n. 1, p. 1–49, 2011. Citado na página 24.

QUARTERONI, A.; SACCO, R.; SALERI, F. **Numerical mathematics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. v. 37. Citado na página 40.

QUARTERONI, A.; SALERI, F.; VENEZIANI, A. Factorization methods for the numerical approximation of navier–stokes equations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 188, n. 1, p. 505–526, 2000. Citado nas páginas 22 e 31.

ROCHA, F. F.; MANKAD, H.; SOUSA, F. S.; PEREIRA, F. The multiscale perturbation method for two-phase reservoir flow problems. **Applied Mathematics and Computation**, v. 421, p. 126908, 2022. ISSN 0096-3003. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300321009917>>. Citado na página 57.

ROCHA, F. F.; SOUSA, F. S.; AUSAS, R. F.; BUSCAGLIA, G. C.; PEREIRA, F. Multiscale mixed methods for two-phase flows in high-contrast porous media. **Journal of Computational Physics**, v. 409, p. 109316, 2020. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999120300905>>. Citado na página 59.

SHIH, T.; TAN, C.; HWANG, B. Effects of grid staggering on numerical schemes. **International Journal for numerical methods in fluids**, Wiley Online Library, v. 9, n. 2, p. 193–212, 1989. Citado na página 50.

SOUSA, F. S. **Simulação de Escoamentos Multifásicos usando o Sistema FreeFlow 3D**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, 2003. Citado na página 29.

SOUSA, F. S.; LAGES, C. F.; ANSONI, J. L.; CASTELO, A.; SIMAO, A. A finite difference method with meshless interpolation for incompressible flows in non-graded tree-based grids. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 396, p. 848–866, 2019. Citado nas páginas 24, 33, 37, 38, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52 e 87.

SOUSA, F. S.; OISHI, C. M.; BUSCAGLIA, G. C. Spurious transients of projection methods in micro flow simulations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 285, p. 659–693, 2015. Citado nas páginas 22 e 71.

WANG, X.; YEO, K.; CHEW, C.; KHOO, B. A svd-gfd scheme for computing 3d incompressible viscous fluid flows. **Computers & Fluids**, Elsevier, v. 37, n. 6, p. 733–746, 2008. Citado na página 24.

WHITE, F. M. **Fluid mechanics, WCB**. [S.l.]: Ed McGraw-Hill Boston, 1999. Citado nas páginas 21, 27 e 28.

ZHANG, X. K.; KWON, K.-C.; YOUN, S.-K. The least-squares meshfree method for the steady incompressible viscous flow. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 206, n. 1, p. 182–207, 2005. Citado nas páginas 24 e 40.

ZHENG, X.; DUAN, W.-y.; MA, Q.-W. Comparison of improved meshless interpolation schemes for sph method and accuracy analysis. **Journal of Marine Science and Application**, Springer, v. 9, n. 3, p. 223–230, 2010. Citado na página 40.

ZHOU, X.; HON, Y.; LI, J. Overlapping domain decomposition method by radial basis functions. **Applied numerical mathematics**, Elsevier, v. 44, n. 1-2, p. 241–255, 2003. Citado na página 25.

