
Versão discreta do modelo de elasticidade
constante da variância

Matheus Dorival Leonardo Bombonato Menes

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:

Versão discreta do modelo de elasticidade constante da variância

Matheus Dorival Leonardo Bombonato Menes

Orientador: Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Junior

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Ciências de Computação e Matemática Computacional. *EXEMPLAR DE DEFESA*

USP – São Carlos
Junho de 2012

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M543v Menes, Matheus Dorival Leonardo Bombonato
Versão discreta do modelo de elasticidade
constante da variância / Matheus Dorival Leonardo
Bombonato Menes; orientador Dorival Leão Pinto
Junior. -- São Carlos, 2012.
61 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Ciências de Computação e Matemática Computacional) --
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, 2012.

1. modelo de elasticidade constante da variância.
2. movimento browniano. 3. precificação de opções. 4.
hedging. 5. derivada estocástica. I. Pinto Junior,
Dorival Leão, orient. II. Título.

"Não se turbe o vosso coração; credes em Deus, crede também em mim.

Na casa de meu Pai há muitas moradas. Se assim não fora, eu vo-lo teria dito. Pois vou preparar-vos lugar.

E, quando eu for e vos preparar lugar, voltarei e vos receberei para mim mesmo, para que, onde eu estou, estejais vós também." João 14:1-3

Agradecimentos

Ao bondoso Deus por me amparar nos momentos difíceis, me conceder saúde e sabedoria para realizar este trabalho e me suprir em todas as minhas necessidades.

Ao professor Dorival Leão, por todo o conhecimento transmitido, dedicação, paciência, seriedade na orientação e, principalmente pelo apoio.

Aos meus pais, Dorival e Maria Lucia, pela oportunidade do estudo e pelo apoio e incentivo durante todas as etapas dos meus estudos, preocupando-se para que a minha permanência em São Carlos fosse a melhor possível.

À minha família, a qual amo muito, pelo carinho, paciência e incentivo.

A Mira Melke, que amo muito, pelo apoio, amor e compreensão no decorrer deste período.

A todos os meus amigos, pela amizade, auxílio, discussões e por todos os momentos de lazer e divertimento que passamos juntos.

A todos os professores do ICMC, pelo conhecimento, amizade e auxílio indispensáveis à minha formação. Em especial ao professor Sérgio Henrique Monari Soares pela orientação durante a minha iniciação científica, despertando em mim, o prazer pela pesquisa matemática.

A todos os funcionários do ICMC, pela atenção e por me proporcionarem um ambiente seguro e adequado ao estudo.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que colaboraram de forma direta ou indireta com este trabalho.

Resumo

Neste trabalho propomos um modelo de mercado através de uma discretização aleatória do movimento browniano proposta por [Leão & Ohashi \(2010\)](#). Com este modelo, dada uma função *payoff*, vamos desenvolver uma estratégia de hedging e uma metodologia para precificação de opções.

Palavras-chave: modelo de volatilidade constante da variância (CEV), modelo Black-Scholes-Merton, movimento Browniano, derivada estocástica, precificação de opções, hedging.

Abstract

In this work we propose a market model using a discretization scheme of the random Brownian motion proposed by [Leão & Ohashi \(2010\)](#). With this model, for any given payoff function, we develop a hedging strategy and a methodology to option pricing.

Keywords: constant elasticity of variance model (CEV), Black-Scholes-Merton model, Brownian motion, stochastic derivative, option pricing, hedging.

Sumário

1	Introdução	13
1.1	Motivação	13
1.2	Modelo Black-Scholes-Merton generalizado	16
1.3	Precificação de opções pelo princípio do hedging	16
2	Aproximação de Funcionais do Movimento Browniano	23
2.1	Funcional de Wiener	26
2.2	A decomposição aproximada	27
2.3	Derivada Estocástica	28
3	Processo Portfolio	33
3.1	Medida martingale equivalente	37
4	Precificação de Opções	41
4.1	Modelo	41
4.2	Precificação de opções pelo princípio do hedging	42
5	Modelo de Volatilidade Local	47
5.1	Modelo de Elasticidade Constante da Variância	50
5.2	Versão Discreta do Modelo de Elasticidade Constante da Variância	51
6	Algoritmo	53
6.1	Passo 1: Simulação dos tempos de parada $\{T_n\}$ e dos processos A, \tilde{A}, B e S	53
6.2	Passo 2: Cálculo do valor da opção	54
6.3	Passo 3: Cálculo do hedging	54
6.4	Aplicação	55

7 Conclusão	57
Referências	58

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Os Mercados Futuros no mundo têm sua história diretamente vinculada à necessidade de administração do risco de alterações nos preços dos ativos, originalmente commodities e, mais recentemente, também ativos financeiros. A busca por proteção aos preços agrícolas era grande desde os tempos medievais, no qual eram realizados acordos contratuais entre indivíduos para pagamento e entrega numa data futura.

Entretanto, o Mercado Futuro organizado só teve início em 1848, quando foi criada a *Chicago Board of Trade*, negociando contratos de milho. Até o princípio da década de 70, os negócios com mercadorias representavam a quase totalidade dos negócios realizados em mercados futuros organizados. O ponto de partida da negociação de ativos financeiros no Mercado Futuro ocorreu em 1973, com o lançamento do *International Monetary Market* pela *Chicago Mercantile Exchange*, negociando contratos futuros de câmbio. Coincidentemente, no mesmo ano, Black & Scholes e, de forma independente, Merton publicaram dois trabalhos sobre a precificação de opções, que renderam o Premio Nobel em Economia de 1997 para o Merton e Scholes.

No Brasil, a primeira bolsa a transacionar contratos futuros foi a Bolsa de Mercadorias de São Paulo, em 1918, negociando, inicialmente, contratos de algodão. Já a Bolsa de Valores do Rio de Janeiro, em 1979, foi pioneira nas negociações no Mercado Futuro de Ações no Brasil, mercado que chegou a responder por 84,3% do volume total movimentado nessa bolsa em 1981. Entretanto, a atuação conjunta de uma série de

fatores levou à queda gradativa das negociações no Mercado Futuro de Ações brasileiro, cujas atividades foram encerradas em meados de 1986 em São Paulo e no início de 1987 no Rio de Janeiro. No final da década de 90 e início dos anos 2000, a movimentação de importantes bolsas internacionais aponta para o ressurgimento desse mercado.

Em maio de 2001, importantes bolsas norte-americanas anunciaram a criação de uma *joint venture* visando à implantação de um Mercado Futuro de Ações que proporcione maior eficiência à negociação de ações, empréstimo de títulos e atividades de hedging. Simultaneamente, outra iniciativa importante foi a celebração de acordo entre a *Liffe* e a *Nasdaq* para desenvolver o Mercado Futuro de Ações baseado em ações globais para investidores americanos e europeus. E foi justamente nesse momento que ocorreu na BOVESPA uma mobilização para implantar a negociação de futuro de ações no Brasil.

Uma operação no Mercado Futuro de Ações da BOVESPA compreende a compra ou a venda de ações listadas em Bolsa, a um preço acordado entre as partes, para liquidação em uma data futura específica, previamente autorizada. Normalmente, o esperado é que o preço do contrato futuro de uma determinada ação seja equivalente ao preço a vista, acrescido de uma fração correspondente à expectativa de taxas de juros entre o momento da negociação do contrato futuro de ações e a respectiva data de liquidação do contrato.

Os derivativos são operações financeiras que têm por referência um ativo qualquer, chamado de “ativo base” ou “ativo subjacente” (que em geral é negociado no mercado à vista). A opção de compra ou venda de uma ação é um derivativo cujo valor é dependente do preço da ação. Uma opção fornece ao comprador o direito de *fazer alguma coisa*. Se é um direito e não uma obrigação, o comprador pode escolher não exercer esse direito e permitir a expiração da opção. Obviamente que o comprador deve pagar pela compra da opção. Atualmente, dois tipos de opções são negociados - *call options* (direito de comprar) e as *put options* (direito de vender). O preço especificado no contrato é denominado *preço de exercício* ou *Strike Price*. Além disso, a data especificada no contrato é denominada *data de expiração* ou *maturidade*.

A opção *Call* fornece ao comprador o direito de comprar um ativo a um preço pré-fixado (K) num momento anterior à data de expiração da

opção. O comprador paga um preço por este direito. Na data de expiração, se o valor do ativo (S_T) $>$ *Strike Price*(K), o comprador ganha a diferença $S_T - K$. Porém, se o valor do ativo (S_T) $<$ *Strike Price*(K), o comprador não exerce e perde o investimento inicial. De forma geral, o valor de uma call aumenta quando o valor do ativo associado aumenta, por outro lado, o valor de uma call diminui quando o valor do ativo que lhe está associado diminui. Em termos matemáticos, podemos dizer que o comprador da opção terá um lucro no tempo T igual à $\max(S_T - K, 0)$. Denominamos, $F_T = \max(S_T - K, 0)$ como sendo a função payoff associada a opção de compra do tipo europeia.

A opção *Put* fornece ao comprador da opção o direito de vender o ativo específico a um preço pré-fixado num momento anterior ao da data de expiração da opção. O comprador paga um preço por este direito. Na expiração, se o valor da ativo (S_T) $<$ *Strike Price*(K), o comprador ganha a diferença $K - S_T$. Porém, se o valor do ativo (S_T) $>$ *Strike Price*(K), o comprador não exerce e perde o investimento inicial. De forma geral, o valor de uma put diminui quando o valor do ativo subjacente aumenta, por outro lado, o valor de uma put aumenta quando o valor do ativo subjacente diminui. Em termos matemáticos, podemos dizer que o comprador da opção terá um lucro no tempo T igual à $\max(K - S_T, 0)$. Denominamos, $F_T = \max(K - S_T, 0)$ como sendo a função payoff associada a opção de venda do tipo europeia.

Atualmente, diversos tipos de opções são comercializadas no mercado. As duas mais utilizadas são a *American Option*, que pode ser exercida em qualquer momento anterior a data de expiração, e a *European Option*, que pode ser exercida somente na data de expiração.

Associado a opções, temos diversos problemas, o desenvolvimento de um modelo que atenda as condições de mercado, a calibração dos parâmetros associados ao modelo, a precificação da opção (custo inicial), o desenvolvimento de uma estratégia de replicação (hedging), estudo da sensibilidade do valor das opção em relação ao valor do ativo (Greeks), entre outros. Neste trabalho, vamos propor um modelo simples para o mercado e estudar o problema de precificação e replicação para opções que possuem função payoff F , tal que $F \in L^2$.

1.2 Modelo Black-Scholes-Merton generalizado

De forma simples, o modelo de Black-Scholes-Merton generalizado ([Black & Scholes \(1973\)](#); [Merton \(1973\)](#)) é um modelo a tempo contínuo no qual admitimos que o mercado é composto por um ativo com risco (*Stock*), a qual denotamos por S_t o preço deste ativo no tempo t e um ativo sem risco (*Bond*), a qual denotamos por B_t o preço deste ativo no tempo t . Ambos os ativos podem ser vendidos ou comprados em quaisquer instantes do intervalo de tempo $[0, T]$.

Assumimos que o processo de preços do *Bond*, $B := \{B_t\}_{0 \leq t \leq T}$, é definido pela seguinte equação diferencial estocástica

$$dB_t = r_t B_t dt, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.1)$$

com valor inicial $B_0 = 1$.

Consideramos também que o processo de preços do *Stock*, $S := \{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$, é definido pela equação diferencial estocástica

$$dS_t = b_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

no qual $S_0 > 0$ é um valor inicial conhecido e $W := \{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ é o movimento Browniano definido na base estocástica $(\Omega, \mathbb{F}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ com valor inicial $W_0 = 0$, \mathbb{P} -q.c., sendo que Ω é o conjunto $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ cont\u00ednua; } f(0) = 0\}$, $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}\}_{0 \leq t \leq T}$ é o \mathbb{P} -complemento da filtração natural gerada pelo movimento Browniano, $\mathcal{F} := \mathcal{F}_T$ é a σ -álgebra completa de Borel e \mathbb{P} é a medida de Wiener em Ω .

Os processos $r := \{r_t\}_{0 \leq t \leq T}$, $b := \{b_t\}_{0 \leq t \leq T}$ e $\sigma := \{\sigma_t\}_{0 \leq t \leq T}$ satisfazem as condições usuais para assegurarmos que B e S são semimartingales positivos (ver [Øksendal \(1998\)](#), página 66).

1.3 Precificação de opções pelo princípio do hedging

Muitos dos participantes de mercados futuros são *hedgers*. O principal objetivo deles é a redução de risco. Este risco pode ser flutuações do preço de uma commodity, taxa de câmbio, entre outras variáveis. Um hedging perfeito é tal que eliminamos completamente o risco. Realizar

1.3. PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES PELO PRINCÍPIO DO HEDGING¹⁷

um hedging perfeito é muito raro. Entretanto, na maioria dos casos, um estudo de hedging usando contratos futuros é um estudo de quais formas um hedging pode ser construído para chegarmos perto do hedging perfeito.

Para exemplificarmos o conceito de hedging, considere uma companhia que sabe que irá ganhar R\$ 10.000 a cada centavo que o preço de uma commodity aumenta nos próximos três meses e perderá R\$ 10.000 a cada centavo que o preço cai durante o mesmo período. Para cobrir este risco, a companhia resolve fazer uma posição futura de *short* (venda). A posição futura deverá conduzir uma perda de R\$10.000 a cada centavo que o preço da commodity aumenta nos próximos três meses e um ganho de R\$ 10.000 a cada centavo que o preço cai no mesmo período. Se o preço da commodity cair, ele ganha na posição futura cobrindo a perda no restante dos negócios da companhia. Caso contrário, a perda na posição futura é compensada pelo ganho no restante dos negócios da companhia.

Este exemplo mostra que o principal objetivo do hedging é proteção do capital com respeito a oscilações no mercado.

Agora, suponhamos que ao assinar um contrato de opção de compra com preço de exercício K e tempo de maturidade T , o titular¹ pagou ao lançador² o valor $c > 0$.

Precificar uma opção significa descobrir qual é o valor justo a ser pago por esta opção.

Diremos que c é o preço justo da opção estabelecido pelo *princípio de hedging* se

H1 O lançador pode compor um portfolio (ou uma carteira, em outras palavras) no tempo $t = 0$ cujo valor é exatamente c ,

H2 O valor no tempo T do portfolio composto no tempo $t = 0$ conforme **H1** é igual a função payoff F_T .

Observação 1.1. Podemos dizer que o princípio de hedging estabelece que o valor inicial da opção, c , devolverá ao lançador o valor necessário para

¹titular - aquele que detém o direito de exercer a opção;

²lançador - aquele que outorga a opção, assumindo a obrigação de, se o titular a exercer, vender a este ou dele comprar o Ativo-objeto a que se refere a opção.

cumprir sua obrigação frente ao titular, no instante de maturidade T , qualquer que seja o preço da ação ([Belitsky \(2000\)](#)).

Com o propósito de exemplificar a precificação de opções usando o princípio do hedging usaremos um modelo de mercado mais simples, no qual os processos r , b e σ são constantes. Logo, os processos de preços do *Bond* e *Stock* são definidos, respectivamente, pelas seguintes equações diferenciais estocásticas

$$\begin{cases} dB_t = rB_t dt, & 0 \leq t \leq T, \\ B_0 = 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

com taxa de juros $r > 0$ e

$$\begin{cases} dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dW_t, & 0 \leq t \leq T, \\ S_0 > 0 \text{ conhecido} \end{cases} \quad (1.4)$$

com *drift* (média) $b \in \mathbb{R}$ e volatilidade $\sigma > 0$.

Pode-se ver facilmente que, $B_t = e^{rt}$, $0 \leq t \leq T$, é solução da equação diferencial estocástica apresentada em (1.3).

A equação (1.4) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$S_t = S_0 + b \int_0^t S_u du + \sigma \int_0^t S_u dW_u, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.5)$$

Seja $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 (classe das funções contínuas com derivadas até 2ª ordem contínuas), definida por

$$f(t, x) = S_0 \exp \left\{ bt + \sigma x - \frac{\sigma^2}{2} t \right\},$$

para quaisquer $0 \leq t \leq T$ e $x \in \mathbb{R}$. Pela fórmula de Itô (ver [Øksendal \(1998\)](#), página 44), obtemos que

$$\begin{aligned} f(t, W_t) &= f(0, W_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, W_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, W_s) dW_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, W_s) ds, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(t, W_t) &= S_0 \exp \left\{ bt + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t \right\} \\ &= S_0 + \left(b - \frac{\sigma^2}{2} \right) \int_0^t S_0 \exp \left\{ bs + \sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2} s \right\} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sigma \int_0^t S_0 \exp \left\{ bs + \sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2} s \right\} dW_s \\
 & + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t S_0 \exp \left\{ bs + \sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2} s \right\} ds \\
 & = S_0 + b \int_0^t S_0 \exp \left\{ bs + \sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2} s \right\} ds \\
 & + \sigma \int_0^t S_0 \exp \left\{ bs + \sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2} s \right\} dW_s, \tag{1.7}
 \end{aligned}$$

para qualquer $0 \leq t \leq T$. Portanto, por (1.5) e (1.7), temos que $S_t = S_0 \exp \left\{ bt + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t \right\}$, $0 \leq t \leq T$, é solução da equação (1.4).

Defina, a medida neutra de risco como $\gamma = \frac{b-r}{\sigma}$. Considere, também a medida de probabilidade \mathcal{Q} , dada por $\mathcal{Q}(A) = \mathbb{E}[Z_T 1_{\{A\}}]$, $A \in \mathcal{F}_T$, sendo que $Z_T = \exp \left\{ -\gamma W_T - \frac{\gamma^2}{2} T \right\}$.

Segundo o Teorema de Girsanov (ver Øksendal (1998), página 157), o processo $W' = \{W'_t\}_{0 \leq t \leq T}$ definido por

$$W'_t = W_t + \gamma t, \quad 0 \leq t \leq T$$

é um \mathcal{Q} -movimento browniano.

Note que

$$\begin{aligned}
 dS_t & = bS_t dt + \sigma S_t dW_t = (r + \gamma\sigma)S_t dt + \sigma S_t dW_t \\
 & = rS_t dt + \gamma\sigma S_t dt + \sigma S_t dW_t = rS_t dt + \sigma S_t (dW_t + \gamma dt) \\
 & = rS_t dt + \sigma S_t dW'_t, \quad 0 \leq t \leq T.
 \end{aligned}$$

Nosso objetivo agora é resolver a seguinte equação diferencial

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW'_t, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{1.8}$$

Com um raciocínio análogo a resolução da equação (1.4), obtemos que

$$S_t = S_0 \exp \left\{ rt + \sigma W'_t - \frac{\sigma^2}{2} t \right\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

é solução de (1.8).

Além disso, o processo $S = \{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$ é um \mathcal{Q} -submartingale. Consequentemente, o processo do preço do *Stock* descontado, definido por $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$, $0 \leq t \leq T$, é um \mathcal{Q} -martingale.

Voltando, ao problema de precificação. Imagine que o lançador investe o prêmio $c > 0$, investindo no tempo $t = 0$ a quantidade π_0 u.m.

(unidades monetárias) no *Stock* e $c - \pi_0$ u.m. no *Bond*, ou seja, ele compo um portfolio no instante inicial cujo valor é exatamente c , satisfazendo a propriedade **H1** do princípio de hedging. Logo, o capital do lançador no instante t é igual a $X_t^\pi = \pi_t S_t + (X_t - \pi_t S_t)r$, $0 \leq t \leq T$. Portanto, a variação do capital é dada por

$$\begin{cases} dX_t^\pi = \pi_t dS_t + (X_t^\pi - \pi_t S_t)r dt, & 0 \leq t \leq T, \\ X_0^\pi = c. \end{cases}$$

De (1.8), temos

$$\begin{aligned} dX_t^\pi &= \pi_t S_t (rdt + \sigma dW'_t) + (X_t^\pi - \pi_t S_t)r dt \\ &= \sigma \pi_t S_t dW'_t + r X_t^\pi dt, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Multiplicando por e^{-rt} , obtemos

$$e^{-rt} dX_t^\pi = \sigma \pi_t e^{-rt} S_t dW'_t + r e^{-rt} X_t^\pi dt, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.9)$$

Agora, note que

$$d(e^{-rt} X_t^\pi) = e^{-rt} dX_t^\pi + X_t^\pi d(e^{-rt}) = e^{-rt} dX_t^\pi - r e^{-rt} X_t^\pi dt, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.10)$$

De (1.9) e (1.10), temos que

$$d(e^{-rt} X_t^\pi) = \sigma \pi_t e^{-rt} S_t dW'_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Portanto, o capital descontado da taxa de juros no instante t é igual a

$$e^{-rt} X_t^\pi = c + \sigma \int_0^t \pi_u e^{-ru} S_u dW'_u. \quad (1.11)$$

Agora, o processo $Y = \{Y_t\}_{0 \leq t \leq T}$ definido por

$$Y_t = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[e^{-rt} F_T | \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T$$

é um \mathcal{Q} -martingale. De fato, sejam $0 \leq s < t \leq T$, então

$$\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[Y_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}(e^{-rt} F_T | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[e^{-rt} F_T | \mathcal{F}_s] = Y_s.$$

Todo martingale quadrado integrável definido na filtragem do movimento browniano é representável, isto é, existe um processo $H = \{H_t\}_{0 \leq t \leq T}$ previsível tal que

$$Y_t = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[e^{-rt} F_T] + \int_0^t H_s dW'_s, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.12)$$

Para satisfazer **H2**, precisamos que $X_T^\pi = F_T$, ou equivalentemente, $e^{-rT} X_T^\pi = e^{-rT} F_T$. Como $Y_T = e^{-rt} F_T$, temos que $Y_T = e^{-rT} X_T^\pi$. Portanto, de (1.11) e (1.12), obtemos que

$$\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[e^{-rT} F_T] + \int_0^T H_s dW'_s = c + \sigma \int_0^T \pi_u e^{-ru} S_u dW'_u$$

Os processos Y e $e^{-rt} X^\pi$ são \mathcal{Q} -martingales quadrados integráveis adaptados na filtragem natural gerada pelo movimento Browniano W' e iguais no instante final, então

$$\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[e^{-rt} F_T] + \int_0^t H_s dW'_s = c + \sigma \int_0^t \pi_u e^{-ru} S_u dW'_u, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Portanto, $c = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[e^{-rT} F_T]$ é a resposta do problema de precificação pelo princípio do hedging e $\pi_t = \frac{e^{rt} H_t}{\sigma S_t}$, $0 \leq t \leq T$ é o processo da quantidade de u.m. que o investidor deve investir no *Stock*.

Para o caso do modelo de mercado mais complexo, como apresentado em (1.1) e (1.2), o processo π é derivado da fórmula de Clark-Ocone-Karatzas (Ocone & Karatzas (1991)), como segue

$$\pi_t = \frac{B_t}{\sigma_t S_t} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[D_t F - F \int_t^T D_t \gamma_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.13)$$

no qual $F \in L^2(\mathcal{Q})$ é uma função payoff, $\gamma_t = \frac{b_t - r_t}{\sigma_t}$, D é a derivada de Malliavin³ e \mathcal{Q} é a medida martingale equivalente (denotada por EMM) $\mathcal{Q} \sim \mathbb{P}$ que é dada por

$$\frac{d\mathcal{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left\{ - \int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T |\gamma_t|^2 dt \right\}. \quad (1.14)$$

Diversos autores propuseram métodos de Monte Carlo para aproximarem a expressão (1.13), ver Fournié *et al.* (1999, 2001), Cvitanic *et al.* (2003) e Tebaldi (2005). Entretanto, estes métodos utilizam diversas restrições e são complicados de serem implementados. Outra abordagem ao problema de precificação e replicação associado ao mercado futuro de opções consiste em discretizar o modelo de Black-Scholes-Merton através da árvore binomial (ver, Cox *et al.* (1979) e Shiryaev *et al.* (1994b)). Apesar desta técnica ser a mais utilizada no mercado, este modelo é muito simples e não retrata adequadamente o comportamento dos papéis ao longo do tempo.

³Para maiores detalhes sobre a derivada de Malliavin ver Shigekawa (2004).

Recentemente, [Leão & Ohashi \(2010\)](#) propuseram uma estratégia para aproximar funcionais de Wiener baseado em um processo de discretização aleatória. Neste trabalho, vamos utilizar esta estratégia de discretização para estabelecer um modelo para o mercado, bem como fórmulas para a precificação e replicação associadas ao mercado futuro de opções.

Capítulo 2

Aproximação de Funcionais do Movimento Browniano

Inicialmente, para que possamos entender o modelo, vamos revisar alguns resultados obtidos por [Leão & Ohashi \(2010\)](#).

Seja $W = \{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ um movimento Browniano unidimensional com $W_0 = 0$ q.c.. Para qualquer inteiro positivo k , definimos $T_0^k = 0$ q.c. e

$$T_n^k := \inf\{t > T_{n-1}^k : |W_t - W_{T_{n-1}^k}| = 2^{-k}\}, \quad n \geq 1. \quad (2.1)$$

Para qualquer nível k , as seguintes propriedades são verdadeiras:

- (i) A família $\{T_n^k\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de \mathbb{F} -tempos de parada, isto é, $\{T_n^k \leq t\} = \{\omega \in \Omega : T_n^k(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, $0 \leq t \leq T$;
- (ii) Sejam $Z_n^k = W_{T_n^k} - W_{T_{n-1}^k}$, $n \geq 1$, então Z_1^k, Z_2^k, \dots são i.i.d. com $\mathbb{P}(Z_1^k = -2^{-k}) = \mathbb{P}(Z_1^k = 2^{-k}) = 1/2$;
- (iii) Pela propriedade forte de Markov, os incrementos $\{T_n^k - T_{n-1}^k\}_{n \geq 1}$ são i.i.d. com a mesma distribuição de T_1^k .

Agora, definimos a família de processos do tipo escada

$$A_t^k := 2^{-k} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^k 1_{\{T_n^k \leq t\}}, \quad k \geq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.2)$$

no qual

$$\eta_n^k := \begin{cases} 1 & \text{se } W_{T_n^k} - W_{T_{n-1}^k} = 2^{-k} \text{ e } T_n^k < \infty; \\ -1 & \text{se } W_{T_n^k} - W_{T_{n-1}^k} = -2^{-k} \text{ e } T_n^k < \infty; \\ 0 & \text{se } T_n^k = \infty. \end{cases} \quad (2.3)$$

Uma importante propriedade que segue direto da construção do processo $A^k := \{A_t^k\}_{0 \leq t \leq T}$, é o fato de $A_t^k = W_{T_n^k}$ em $\{T_n^k \leq t < T_{n+1}^k\}$.

Para cada inteiro positivo k , seja $\mathbb{F}^k := \{\mathcal{F}_t^k\}_{0 \leq t \leq T}$ a filtragem natural gerada pelo processo A^k satisfazendo as condições usuais. É importante observarmos que \mathbb{F}^k é uma filtração do tipo discreta no sentido que

$$\mathcal{F}_t^k = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\mathcal{G}_n^k \cap \{T_n^k \leq t < T_{n+1}^k\} \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.4)$$

no qual $\mathcal{G}_0^k := \{\Omega, \emptyset\}$ e $\mathcal{G}_n^k := \sigma(T_1^k, \dots, T_n^k, \eta_1^k, \dots, \eta_n^k)$, $n \geq 1$. Além disso, desde que $\mathcal{G}_n^k = \sigma(A_{s \wedge T_n^k}^k : s \geq 0)$ e $\mathcal{G}_n^k = \mathcal{F}_{T_n^k}^k$ obtemos que no conjunto $\{T_n^k \leq t < T_{n+1}^k\}$ as σ -álgebras $\mathcal{F}_{T_n^k}^k$ e \mathcal{F}_t^k coincidem a menos de conjuntos \mathbb{P} -nulos. Portanto, \mathbb{F}^k é uma *jumping filtration*¹.

Algumas das propriedades desta estratégia de discretização são apresentadas nos Lemas a seguir, cujas demonstrações são dadas em [Leão & Ohashi \(2010\)](#).

Lema 2.1. *O processo A^k é um \mathbb{F}^k -martingale quadrado integrável com variação localmente integrável². Além disso, para todo $0 < T < \infty$, temos que*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|W_t - A_t^k\|_{\infty} \leq 2^{-k}, \quad k \geq 1, \quad (2.5)$$

no qual $\|\cdot\|_{\infty}$ denota a norma usual do espaço $L^{\infty}(\mathbb{P})$.

Na sequência, denotaremos por π a projeção usual de $[0, T] \times \Omega$ em Ω . Além disso, $\bigvee_{k \geq 0} \mathcal{A}_k$ denota a menor σ -álgebra gerada pela $\bigcup_{k \geq 0} \mathcal{A}_k$ para uma sequência de classes $\{\mathcal{A}_k\}_{k \geq 0}$. Denotaremos também, \mathcal{O} e \mathcal{O}^k as σ -álgebras opcionais³ com respeito à \mathbb{F} e \mathbb{F}^k , respectivamente.

Lema 2.2. *A filtragem natural de A^k satisfaz as seguintes propriedades:*

¹Uma filtragem $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ é chamada uma *jumping filtration* se existe uma sequência de tempos de parada $\{T_n\}$ crescente para ∞ , tal que no conjunto $\{T_n \leq t < T_{n+1}\}$ as σ -álgebras \mathcal{F}_t e \mathcal{F}_{T_n} coincidem a menos de conjunto de medida nula.

²Um processo de variação limitada X é dito ser de **variação integrável** se o valor esperado da variação total de X é finito: $\mathbb{E} \left\{ \int_0^{\infty} |dA_s| \right\} < \infty$. Agora, um processo de variação limitada X é dito ser de **variação localmente integrável** se existe uma sequência de tempos de parada $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ crescente para ∞ q.c. tal que $\mathbb{E} \left\{ \int_0^{\tau_n} |dA_s| \right\} < \infty$, para cada n .

³A σ -álgebra opcional \mathcal{O} em $[0, T] \times \Omega$ é a menor σ -álgebra formada por todos os processos mensuráveis, adaptados e *càdlàg* (contínuo à direita e com limite à esquerda). Dizemos que um processo é opcional se ele é \mathcal{O} -mensurável.

- (i) $\{\mathbb{F}^k : k \geq 1\}$ é uma família crescente de σ -álgebras tal que $\mathcal{F}_t = \bigvee_{k \geq 0} \mathcal{F}_t^k$, para todo $t \geq 0$.
- (ii) A sequência de filtrações \mathbb{F}^k convergem fracamente para \mathbb{F} ;
- (iii) Para cada $O \in \mathcal{O}$ existe uma sequência $O^k \in \mathcal{O}^k$ tal que
- $$O^k \subset O \quad \forall k \geq 1, \quad \text{e} \quad \mathbb{P}[\pi(O) - \pi(O^k)] \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad k \rightarrow \infty.$$

Para simplificarmos a notação no restante do texto consideraremos o nível k fixo. Logo, denotaremos por $\{T_n\}_{n \geq 1}$ a sequência de tempos de parada definida em (2.1) e $A := \{A_t\}_{0 \leq t \leq T}$ o processo de saltos definido em (2.2). Consideraremos também $\mathbb{G} := \{\mathcal{G}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ filtração gerada pelo processo A como acima definida.

Observações 2.1. a) Uma filtração é dita ser quase-contínua à esquerda se $\mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_T$ q.c., para todo tempo de parada previsível⁴ T . Desde que T_1 é uma variável aleatória absolutamente contínua e A é um processo de saltos segue que \mathbb{G} é uma filtração quase-contínua à esquerda.

b) De *Jacod & Skorohod (1994)* sabemos que todo \mathbb{G} -martingale possui saltos em tempos de paradas totalmente inacessíveis⁵ $\{T_n\}_{n \geq 1}$. Além disso, \mathbb{G} suporta apenas martingales com variação localmente limitada.

Neste trabalho, as projeções \mathbb{G} -previsíveis e \mathbb{G} -opcionais de um dado processo mensurável X serão denotadas por ${}^p[X]$ e ${}^o[X]$, respectivamente. As projeções \mathbb{G} -dual previsíveis e \mathbb{G} -dual opcionais serão denotadas por $[X]^p$ e $[X]^o$, respectivamente. O usual processo de salto é denotado por $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-}$, no qual Y_{t-} é o limite à esquerda de um processo *càdlàg* Y . Dados X e Y dois semimartingales, denotamos por $[X, Y]$ o processo variação quadrática, definido por $[X, Y] = XY - \int X_- dY - \int Y_- dX$ (para maiores detalhes ver *Protter (2004)*, página 66). Também denotamos por $\langle X, Y \rangle$ o processo *angle bracket*, o qual é definido como o processo tal que $XY - \langle X, Y \rangle$ é um martingale (para maiores detalhes ver *Shiryaev (1999)*, página 305).

⁴Um tempo de parada T é **previsível** se existe uma sequência de tempos de parada $\{T_n\}_{n \geq 1}$ tal que T_n é crescente, $T_n < T$ em $\{T > 0\}$, para todo n , e $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ q.c..

⁵Um tempo de parada T é **totalmente inacessível** se $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : T(\omega) = S(\omega) < \infty\} = 0$, para todo tempo de parada previsível S .

2.1 Funcional de Wiener

No restante desse texto, adotaremos a seguinte terminologia.

Definição 2.1. Dizemos que um processo estocástico X é um **funcional de Wiener** se ele é adaptado na filtragem do movimento Browniano \mathbb{F} e possui trajetórias càdlàg.

Observação 2.1. Ao longo deste trabalho, se X é um funcional de Wiener, assumimos que $\mathbb{E}|X_{T_n}| < \infty$ para todo $n \geq 1$.

A seguir, projetamos um dado funcional de Wiener X na base estocástica $(\Omega, \mathbb{G}, \mathcal{G}_T, \mathbb{P})$, como a seguir

$$\delta X_t := X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_{T_n} | \mathcal{G}_{T_n}] 1_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}}. \quad (2.6)$$

Teorema 2.1. Qualquer \mathbb{F} -martingale M com $M_0 = 0$ q.c. admite a seguinte representação

$$\delta M_t = \mathbb{E}[M_T | \mathcal{G}_t], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.7)$$

Demonstração. Seja M um \mathbb{F} -martingale com $M_0 = 0$ e $t \in [0, T]$, logo existe um natural n tal que $T_n \leq t < T_{n+1}$. Da definição de δM , apresentada em (2.6), segue

$$\delta M_t = \mathbb{E}[M_{T_n} | \mathcal{G}_{T_n}]. \quad (2.8)$$

Desde que M é um \mathbb{F} -martingale e pelo teorema da parada opcional (Protter (2004), Teorema 16), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{T_n} | \mathcal{G}_{T_n}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(M_{T_n} | \mathcal{G}_{T_n}) | \mathcal{F}_{T_n}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(M_{T_n} | \mathcal{F}_{T_n}) | \mathcal{G}_{T_n}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(M_T | \mathcal{F}_{T_n}) | \mathcal{G}_{T_n}]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como \mathcal{G}_{T_n} é sub- σ -álgebra de \mathcal{F}_{T_n} , temos

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(M_T | \mathcal{F}_{T_n}) | \mathcal{G}_{T_n}] = \mathbb{E}[M_T | \mathcal{G}_{T_n}]. \quad (2.10)$$

Agora, desde que \mathbb{G} é uma *jumping filtration*, obtemos

$$\mathbb{E}[M_T | \mathcal{G}_{T_n}] = \mathbb{E}[M_T | \mathcal{G}_t]. \quad (2.11)$$

De (2.8)-(2.11), concluímos que $\delta M_t = \mathbb{E}[M_T | \mathcal{G}_t]$. Como t é arbitrário, finalizamos a prova do teorema. \square

Corolário 2.1. *A projeção do movimento Browniano W na base estocástica $(\Omega, \mathbb{G}, \mathcal{G}_T, \mathbb{P})$ é igual ao processo A , ou seja, $A = \delta W$.*

A seguir, dado um funcional de Wiener X apresentamos uma decomposição explícita do semimartingale especial δX em termos de uma derivada do tipo discreta.

2.2 A decomposição aproximada

Nesta seção, dado um funcional de Wiener X obtemos uma decomposição de Doob-Meyer para δX . O seguinte Lema é uma consequência direta da definição e da quase-continuidade à esquerda⁶ de δX .

Lema 2.3. *O processo $\{\delta X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ é um processo \mathbb{G} -adaptado com variação localmente integrável. Ainda mais, existe um único processo \mathbb{G} -previsível N^X com variação localmente integrável tal que*

$$M_t^X := \delta X_t - X_0 - N_t^X, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.12)$$

é um \mathbb{G} -martingale local. O processo N^X é a projeção previsível dual de $\delta X_t - X_0$ o qual pode ser tomado com trajetórias contínuas.

Da equação (2.12) segue que δX é um \mathbb{G} -semimartingale especial⁷, o que nos leva a concluir que a decomposição acima é a canônica.

A seguir veremos a caracterização dos elementos da decomposição (2.12).

Desde que \mathbb{G} não é uma filtração completamente contínua (ver (2.4)), o processo A não tem a propriedade de representação previsível, mas tem a representação opcional (ver He *et al.* (1992), Ex 13.9). Isto é, todo \mathbb{F}^k -martingale local com valor inicial igual a zero é representado por uma integral opcional com respeito à A .

⁶Um processo *càdlàg* X é chamado **quase-contínuo à esquerda** se $\Delta X_T = 0$ q.c. no conjunto $\{T < \infty\}$, para todo tempo de parada previsível T . Um processo *càdlàg* X é quase-contínuo à esquerda se, e somente se, existe uma sequência de tempos parada totalmente inacessíveis tal que os saltos do processo X ocorrem somente nesta sequência de tempos de parada.

⁷Seja X um semimartingale. O processo X é um **semimartingale especial** se ele possui uma decomposição $X_t = X_0 + M_t + A_t$ com $M_0 = A_0 = 0$, M um martingale local e A um processo previsível com variação limitada.

No restante deste projeto, faremos uso da integral estocástica opcional com respeito à A . Para maiores detalhes sobre a integral opcional, citamos [Dellacherie & Meyer \(1982\)](#) e [He *et al.* \(1992\)](#). Queremos mencionar aqui que uma vez que a filtração \mathbb{G} é quase contínua à esquerda, então a integral opcional admite as mesmas propriedades usuais da integração estocástica com integrandos previsíveis (veja observação 3.5 em [Dellacherie & Meyer \(1982\)](#), página 346). Neste projeto, denotamos por $\oint_0^t Y_s dA_s$ a integral opcional com respeito a um processo \mathbb{G} -opcional Y .

2.3 Derivada Estocástica

Na sequência, introduzimos um processo que será crucial durante o desenvolvimento deste projeto. Se δX é a projeção de um funcional de Wiener X na base estocástica $(\Omega, \mathbb{G}, \mathcal{G}_T, \mathbb{P})$, então definimos o seguinte processo \mathbb{G} -opcional:

$$\mathcal{D}_t \delta X := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta X_{T_n} - \delta X_{T_{n-1}}}{W_{T_n} - W_{T_{n-1}}} 1_{[[T_n, T_n]]}(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.13)$$

no qual $[[T_n, T_n]] = \{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega : T_n(\omega) = t\}$, $n \geq 1$.

Devido ao fato de $A_t = W_{T_n}$ em $\{T_n \leq t < T_{n+1}\}$, obtemos que

$$\mathcal{D}_t \delta X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta X_{T_n} - \delta X_{T_{n-1}}}{A_{T_n} - A_{T_{n-1}}} 1_{[[T_n, T_n]]}(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

Suponha que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^m |\Delta \delta X_{T_n}|^2 \right] < \infty, \quad m \geq 1, \quad (2.14)$$

então

$$\left[\int_0^t \mathcal{D}_s^2 \delta X d[A, A]_s \right]^{1/2} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\delta X_{T_n} - \delta X_{T_{n-1}})^2 1_{\{T_n \leq t\}} \right]^{1/2}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

é um processo crescente localmente integrável. Nesse caso, existe um único \mathbb{G} -martingale local M tal que para todo \mathbb{G} -martingale local V , o processo $[M, V] - \int \mathcal{D} \delta X d[V, A]$ é um \mathbb{G} -martingale local e

$$M_t = \int_0^t \mathcal{D}_s \delta X dA_s - \left[\int_0^{\cdot} \mathcal{D}_s \delta X dA_s \right]_t^p \quad (2.15)$$

$$= \oint_0^t \mathcal{D}_s \delta X dA_s$$

onde $\int_0^t \mathcal{D}_s \delta X dA_s$ é interpretada no sentido Lebesgue-Stieltjes.

Agora vamos escrever a decomposição (2.12) de um modo mais conveniente. Desde que M^X é um martingale local com uma variação localmente integrável podemos representá-lo como uma soma compensada de saltos como segue

$$M_t^X = Y_t - [Y]_t^p; \quad M_0^X = 0,$$

sendo que $Y_t = \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta \delta X_s = \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta M_s^X$ e a projeção previsível dual $[Y]^p$ pode ser tomada com trajetórias contínuas. Mais uma vez, através da quase continuidade à esquerda de δX concluímos que $N^X = [Y]^p$. Ao tomarmos,

$$Y_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta \delta X_{T_n}}{\Delta A_{T_n}} \Delta A_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

concluímos que podemos escrever Y_t em termos da seguinte integral de Lebesgue-Stieltjes

$$Y_t = \int_0^t \mathcal{D}_s \delta X dA_s.$$

Somando os argumentos acima, concluímos que se X satisfaz (2.14), portanto obtemos à seguinte representação opcional para a parte martingale na decomposição (2.12)

$$M_t^X = \oint_0^t \mathcal{D}_s \delta X dA_s; \quad 0 \leq t \leq T.$$

Obviamente que $\mathcal{D}\delta X$ é o único processo \mathbb{G} -opcional que representa M^X como uma integral estocástica opcional com respeito ao martingale A .

A seguir, vamos caracterizar o resíduo da decomposição (2.12).

Lema 2.4. *A projeção previsível dual de $\delta X - X_0$ é dada pelo processo contínuo*

$$\int_0^t U_s^X d\langle A, A \rangle_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

no qual $U^X := \mathbb{E}_{[A]} [\mathcal{D}\delta X / \Delta A | \mathcal{P}]$. Aqui \mathcal{P} é a σ -álgebra previsível na base estocástica $(\Omega, \mathbb{G}, \mathcal{G}_T, \mathbb{P})$ e $\mathbb{E}_{[A]}[\cdot | \mathcal{P}]$ denota a esperança condicional com respeito a \mathcal{P} sob a medida de Doléans gerada por $[A, A]$. Ainda mais,

$$U_t^X = 0 \cdot 1_{\{T_0=t\}} + \frac{1}{2^{-2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_t - X_{T_{n-1}} | \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n = t] 1_{\{T_{n-1} < t \leq T_n\}} \quad (2.16)$$

Demonstração. Vamos escrever $Y_t = \int_0^t \mathcal{D}_s \delta X dA_s$ no sentido Lebesgue-Stieltjes. Pela definição

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\int_0^T 1_{\{C\}}(s) \cdot dY_s \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^T 1_{\{C\}}(s) \cdot \mathcal{D}_s \delta X \cdot dA_s \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{C\}} \cdot T_n \cdot \mathcal{D}_{T_n} \delta X \cdot \Delta A_{T_n} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{C\}} \cdot T_n \cdot \frac{\mathcal{D}_{T_n} \delta X}{\Delta A_{T_n}} \cdot \Delta A_{T_n} \cdot \Delta A_{T_n} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_0^T 1_{\{C\}}(s) \cdot \frac{\mathcal{D}_{T_n} \delta X}{\Delta A_{T_n}} \cdot d[A, A]_s \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_0^T 1_{\{C\}}(s) \cdot U_s^X \cdot d[A, A]_s \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_0^T 1_{\{C\}}(s) \cdot U_s^X \cdot d\langle A, A \rangle_s \right]
 \end{aligned}$$

para todo $C \in \mathcal{P}$. Isso conclui a primeira parte da prova. Agora vamos considerar a seguinte sequência de σ -álgebras $\mathcal{G}_{n-} := \mathcal{G}_{T_{n-1}} \vee \sigma(T_n)$, $n \geq 1$. Lembramos que para todo $C \in \mathcal{G}_{n-}$, existe um processo previsível H tal que $H_{T_n} = 1_{\{C\}}$ e é nulo fora do intervalo estocástico $]]T_{n-1}, T_n]] = \{(t, \omega) : T_{n-1}(\omega) < t \leq T_n(\omega)\}$ (ver [Brémaud \(1981\)](#), Teorema 31, página 307). Então, segue da primeira parte que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [1_C \Delta \delta X_{T_n} 1_{\{T_n \leq T\}}] &= \mathbb{E} \int_0^T H(s) dY_s \\
 &= \mathbb{E} \int_0^T H(s) U^X(s) d[A, A]_s \\
 &= \mathbb{E} [1_{\{C\}} U^X T_n 2^{-2k} 1_{\{T_n \leq T\}}].
 \end{aligned}$$

Desde que C é arbitrário e U^X é um processo previsível, segue que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [\Delta \delta X_{T_n} 1_{\{T_n \leq T\}} | \mathcal{G}_{n-}] &= \mathbb{E} [U^X T_n 2^{-2k} 1_{\{T_n \leq T\}} | \mathcal{G}_{n-}] \\
 &= U^X T_n 2^{-2k} 1_{\{T_n \leq T\}}.
 \end{aligned}$$

Então, uma versão da esperança condicional pode ser escrita como a seguir

$$U^X(t) 1_{\{T_{n-1} < t \leq T_n \leq T\}} = \mathbb{E} \left[\frac{\Delta \delta X_{T_n}}{2^{-2k}} \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n = t \right] 1_{\{T_{n-1} < t \leq T_n \leq T\}}.$$

Isso conclui a prova do Lema. \square

O próximo resultado nos fornece uma expressão explícita para o *angle bracket* do processo A em termos da densidade f e da função de distribuição F do tempo de parada

$$T_1 := \inf\{t \geq 0 : |W_t| = 2^{-k}\},$$

relembrando que W é o movimento Browniano. Veja, por exemplo, [Burq & Jones \(2008\)](#) para as correspondentes fórmulas de f e F .

Lema 2.5. *O angle bracket do processo A é um processo absolutamente contínuo dado por*

$$\langle A, A \rangle_t = \int_0^t h_s ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.17)$$

sendo que a intensidade h do processo de saltos $[A, A]$ é dada por

$$h_t = 2^{-2k} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{t-T_{n-1}} 1_{\{T_{n-1} < t \leq T_n\}}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.18)$$

no qual $\lambda_t = \frac{f_t}{1 - F_t}$, $0 \leq t \leq T$.

Somando todos o resultados anteriores deste capítulo, chegamos a seguinte representação.

Proposição 2.1. *Se X é um funcional de Wiener satisfazendo a hipótese (2.14), então a única decomposição \mathbb{G} -semimartingale especial (M^X, N^X) em (2.12) é na realidade dada por*

$$\delta X_t = X_0 + \oint_0^t \mathcal{D}_s \delta X dA_s + \int_0^t U_s^X h_s ds, \quad (2.19)$$

sendo que de (2.16) e (2.18), obtemos

$$U_t^X h_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_t - X_{T_{n-1}} | \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n = t] \cdot \lambda_{t-T_{n-1}} 1_{\{T_{n-1} < t \leq T_n\}}; \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.20)$$

Finalmente, em [Leão & Ohashi \(2010\)](#) foi demonstrado que qualquer funcional de Wiener X , com energia finita⁸, pode ser aproximado (fracamente) pela sua projeção δX_t sobre a base estocástica $(\Omega, \mathbb{G}, \mathcal{G}_T, \mathbb{P})$.

⁸Geralmente falando, dizemos que um processo X tem energia finita se o $\sup_n \sum_{t_i^n \in D_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 < \infty$ para uma sequência refinada D_n de subdivisões de $[0, T]$ com o mesh tendendo a zero. Porém, em [Leão & Ohashi \(2010\)](#) está noção clássica de energia é substituída por $\mathcal{E}_2(X) = \sup_{k \geq 1} [\delta^k X, \delta^k X]_T = \sup_{k \geq 1} \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta \delta^k X_{T_n^k}|^2 1_{\{T_n^k \leq T\}}$, sendo $\delta^k X$ a projeção de X na base estocástica $(\Omega, \mathbb{F}^k, \mathcal{F}_T^k, \mathbb{P})$, $k \geq 1$. Logo, dizemos que um funcional de Wiener X tem energia finita se $\mathcal{E}_2(X) < \infty$.

Desta forma, ao invés de trabalharmos diretamente com os funcionais de Wiener, vamos propor um modelo de mercado baseado na projeção δX .

Capítulo 3

Processo Portfolio

Neste capítulo, fixaremos um nível k e denotaremos por $(\Omega, \mathbb{G}, \mathcal{G}_T, \mathbb{P})$ a base estocástica definida a partir da sequência de tempos de parada $\{T_n\}_{n \geq 1}$ e do processo de saltos $\{A_t\}_{0 \leq t \leq T}$ como definidos no capítulo anterior.

Desde que os funcionais de Wiener, sob condições bem gerais, podem ser aproximados por semimartingales especiais com respeito a base estocástica $(\Omega, \mathbb{G}, \mathcal{G}_T, \mathbb{P})$, vamos propor uma aproximação ao modelo de Black-Scholes-Merton.

O processo solução forte da equação diferencial estocástica

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

é um funcional de Wiener, que pode ser aproximado por

$$\delta X_t = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_{T_n} | \mathcal{G}_{T_n}] 1_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Como consequência da Proposição 2.1, o processo δX pode ser representado por

$$\delta X_t = X_0 + \int_0^t \psi_s ds + \oint_0^t D_s dA_s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.1)$$

no qual o processo de médias $\{\psi_t\}_{0 \leq t \leq T}$ é definido por (2.20) e o processo volatilidade estocástica $\{D_t\}_{0 \leq t \leq T}$ corresponde a derivada estocástica do processo δX com respeito ao ruído branco¹ A .

¹Um processo estocástico $\{X_t\}$ é um **ruído branco** se $\mathbb{E}(X_t) = 0$, para todo t , e $\text{Cov}(X_s, X_t) = 0$, para quaisquer $s \neq t$.

Note que das expressões (2.12), (2.15) e (3.1), obtemos

$$\delta X_t = \int_0^t D_s dA_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Diferente do caso contínuo, o processo derivada estocástica D caracteriza tanto a parte sistemática (média) quanto a parte martingale. Por exemplo, no modelo de Black-Scholes-Merton tradicional, temos que $b(t, X_t) = b$, $\sigma(t, X_t) = \sigma$, com $b \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$ constantes. Neste caso, obtemos que

$$\delta X_{T_n} - \delta X_{T_{n-1}} = b(T_n - T_{n-1}) + \sigma(A_{T_n} - A_{T_{n-1}}), \quad n \geq 1,$$

ou seja,

$$\Delta \delta X_{T_n} = b \Delta T_n + \sigma \Delta A_{T_n}, \quad n \geq 1.$$

Além disso,

$$\delta X_t = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \delta X_{T_n} 1_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

e o processo derivada estocástica e U^X são dados, respectivamente, por

$$D_{T_n} = \frac{b(T_n - T_{n-1})}{\Delta A_{T_n}} + \sigma, \quad n \geq 1,$$

e

$$U_{T_n}^X = 2^{2k} \mathbb{E}[\Delta X_{T_n} | \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n] = 2^{2k} b(T_n - T_{n-1}), \quad n \geq 1.$$

Como no modelo de Black-Scholes-Merton, considere um mercado composto por dois ativos que são negociados continuamente. Um dos ativos, denominado Bond, tem o processo de preço definido conforme a equação diferencial

$$\frac{\Delta B_{T_n}}{B_{T_{n-1}}} = r_{T_{n-1}}(T_n - T_{n-1}), \quad B_0 = 1, \quad n \geq 1. \quad (3.2)$$

no qual o processo taxa de juros $\{r_t\}_{0 \leq t \leq T}$ é um processo adaptado com relação a base estocástica $(\Omega, \mathbb{G}, \mathcal{G}_T, \mathbb{P})$. A solução da equação do preço do ativo sem risco é dada através produto integrado,

$$B_t = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + r_{T_{n-1}}(T_n - T_{n-1})] 1_{\{T_n \leq t\}}.$$

O outro ativo, denominado stock, está sujeito a risco e tem o seu processo de preço modelado pela equação diferencial estocástica

$$\frac{\Delta S_{T_n}}{S_{T_{n-1}}} = D_{T_n} \Delta A_{T_n}, \quad S_0 = s, \quad n \geq 1. \quad (3.3)$$

Assim concluímos que a equação (3.3) tem uma única solução dada por

$$S_t = s \prod_{n=1}^{\infty} [1 + D_{T_n} \Delta A_{T_n}] 1_{\{T_n \leq t\}}.$$

Em particular, se tomarmos

$$D_{T_n} = \frac{b_{T_{n-1}} (T_n - T_{n-1})}{\Delta A_{T_n}} + \sigma_{T_{n-1}}, \quad n \geq 1,$$

obtemos que o processo de preço satisfaz

$$\frac{\Delta S_{T_n}}{S_{T_{n-1}}} = D_{T_n} \Delta A_{T_n} = b_{T_{n-1}} (T_n - T_{n-1}) + \sigma_{T_{n-1}} \Delta A_{T_n}, \quad S_0 = s, \quad n \geq 1. \quad (3.4)$$

Considere um investidor que inicia sua aplicação nos dois ativos (Bond e Stock) com um investimento inicial $c > 0$. Assumimos que a transferência de dinheiro entre os ativos pode ser realizada a qualquer momento e sem custos de transacionais. Além disso, os ativos são infinitamente divisíveis, isto é, o investidor pode comprar ou vender qualquer quantidade do ativo.

Definição 3.1. *Seja $\pi = \{\beta_t, \gamma_t\}_{0 \leq t \leq T}$ um par de processos estocásticos adaptados na base estocástica $(\Omega, \mathbb{G}, \mathcal{G}_T, \mathbb{P})$, tal que*

$$\beta_t = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \beta_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}} \quad e \quad \gamma_t = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \gamma_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dizemos que π é um portfolio se satisfaz as seguintes condições de integrabilidade

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\Delta \beta_{T_n})^2 1_{\{T_n \leq t\}} \right] < \infty \quad e \quad \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\Delta \gamma_{T_n})^2 1_{\{T_n \leq t\}} \right] < \infty.$$

O processo portfolio π representa a quantidade de ativos comprados pelo investidor no tempo t , com β_t referente ao ativo sem risco e γ_t referente ao ativo com risco. Desta forma temos que $c = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0 = \beta_0 + \gamma_0 s$ e o capital do investidor no tempo t é dado por

$$C_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \quad 0 < t \leq T. \quad (3.5)$$

Como as transações ocorrem nos instantes de salto do ruído branco A , temos que

$$\begin{aligned}\Delta C_{T_n}^\pi &= C_{T_n}^\pi - C_{T_{n-1}}^\pi = \beta_{T_n} B_{T_n} + \gamma_{T_n} S_{T_n} - \beta_{T_{n-1}} B_{T_{n-1}} - \gamma_{T_{n-1}} S_{T_{n-1}} \\ &= (\beta_{T_n} - \beta_{T_{n-1}}) B_{T_{n-1}} + (\gamma_{T_n} - \gamma_{T_{n-1}}) S_{T_{n-1}} \\ &\quad + \beta_{T_n} (B_{T_n} - B_{T_{n-1}}) + \gamma_{T_n} (S_{T_n} - S_{T_{n-1}}) \\ &= \Delta\beta_{T_n} B_{T_{n-1}} + \Delta\gamma_{T_n} S_{T_{n-1}} + \beta_{T_n} \Delta B_{T_n} + \gamma_{T_n} \Delta S_{T_n}, \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

Definição 3.2. Dizemos que um portfolio $\pi = \{\beta_t, \gamma_t\}_{0 \leq t \leq T}$ é auto-financiável se

$$\Delta\beta_{T_n} B_{T_{n-1}} + \Delta\gamma_{T_n} S_{T_{n-1}} = 0, \quad n \geq 1.$$

A classe de todos os portfolios π auto-financiáveis será denotada por SF .

Desta forma, se tomarmos $\pi \in SF$, obtemos que

$$\Delta C_t^\pi = \beta_t \Delta B_t + \gamma_t \Delta S_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

com capital inicial $C_0^\pi = c$. O capital descontado da taxa de juros de interesse (r) é definido por

$$\tilde{C}_t^\pi = \frac{C_t^\pi}{B_t} = \frac{\beta_t B_t + \gamma_t S_t}{B_t} = \beta_t + \frac{\gamma_t S_t}{B_t}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Desde que a estratégia π é auto-financiável, concluímos que

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{C}_{T_n}^\pi &= \frac{C_{T_n}^\pi}{B_{T_n}} - \frac{C_{T_{n-1}}^\pi}{B_{T_{n-1}}} \\ &= (\beta_{T_n} - \beta_{T_{n-1}}) + \frac{\gamma_{T_n} S_{T_n}}{B_{T_n}} - \frac{\gamma_{T_{n-1}} S_{T_{n-1}}}{B_{T_{n-1}}} \\ &= (\beta_{T_n} - \beta_{T_{n-1}}) \frac{B_{T_{n-1}}}{B_{T_{n-1}}} + (\gamma_{T_n} - \gamma_{T_{n-1}}) \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_{n-1}}} + \gamma_{T_n} \left(\frac{S_{T_n}}{B_{T_n}} - \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_{n-1}}} \right) \\ &= \gamma_{T_n} \left(\frac{S_{T_n}}{B_{T_n}} - \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_{n-1}}} \right), \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

Então, para toda estratégia $\pi \in SF$, o capital descontado pode ser reescrito na forma

$$\tilde{C}_t^\pi = c + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{T_n} \Delta \tilde{S}_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.6)$$

no qual $\Delta \tilde{S}_{T_n} = \frac{S_{T_n}}{B_{T_n}} - \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_{n-1}}}$, $n \geq 1$.

De (3.2) e (3.3), concluímos que o preço do ativo com risco descontado é dado por

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{S}_{T_n} &= \frac{S_{T_n}}{B_{T_n}} - \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_{n-1}}} = \frac{S_{T_n}}{B_{T_n}} - \frac{S_{T_{n-1}}(1 + r_{T_n} \Delta T_n)}{B_{T_{n-1}}(1 + r_{T_n} \Delta T_n)} \\ &= \frac{S_{T_n}}{B_{T_n}} - \frac{S_{T_{n-1}}(1 + r_{T_n} \Delta T_n)}{B_{T_n}} = \frac{\Delta S_{T_n} - r_{T_n} S_{T_{n-1}} \Delta T_n}{B_{T_n}} \\ &= \frac{S_{T_{n-1}} D_{T_n} \Delta A_{T_n} - r_{T_n} S_{T_{n-1}} \Delta T_n}{B_{T_n}} \\ &= \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} (D_{T_n} \Delta A_{T_n} - r_{T_n} \Delta T_n), \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que o preço descontado do ativo com risco é dado por

$$\tilde{S}_t = s + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} (D_{T_n} \Delta A_{T_n} - r_{T_n} \Delta T_n) 1_{\{T_n \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.7)$$

3.1 Medida martingale equivalente

A seguir, vamos mostrar que existe uma única medida de probabilidade martingale equivalente.

Teorema 3.1. *Suponha que o processo derivada seja definido por*

$$D_{T_n} = b_{T_{n-1}} \frac{\Delta T_n}{\Delta A_{T_n}} + \sigma_{T_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Então, existe uma única medida de probabilidade martingale \mathcal{Q} tal que o processo

$$\tilde{A}_t = A_t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{T_{n-1}} - r_{T_{n-1}}}{\sigma_{T_{n-1}}} \Delta T_n 1_{\{T_n \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.8)$$

é um martingale com respeito a base estocástica $(\Omega, \mathbb{G}, \mathcal{G}_T, \mathcal{Q})$. Além disso, a probabilidade \mathcal{Q} é definida por:

(i) *A sequência de variáveis aleatórias independentes $\{T_n - T_{n-1}\}_{n \geq 1}$ tem a mesma distribuição sobre a probabilidade real \mathbb{P} e sobre a probabilidade martingale \mathcal{Q} ;*

(ii) *Porém, a distribuição dos saltos de A sobre \mathcal{Q} é dada por:*

$$\mathcal{Q} \left(\Delta A_{T_n} = 2^{-k} \mid \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b_{T_{n-1}} - r_{T_{n-1}} \Delta T_n}{2^{-k} \sigma_{T_{n-1}}} \right), \quad n \geq 1.$$

Em particular, o preço do ativo com risco descontado \tilde{S}_t , dado por

$$\tilde{S}_t = s + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} \sigma_{T_{n-1}} \Delta \tilde{A}_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.9)$$

é um martingale com respeito a base estocástica $(\Omega, \mathbb{G}, \mathcal{G}_T, \mathcal{Q})$.

Demonstração. O processo de preço do ativo com risco descontado, dado por (3.7), é um \mathcal{Q} -martingale se, e somente se,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[\frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} [D_{T_n} \Delta A_{T_n} - r_{T_{n-1}} \Delta T_n] \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n \right] \\ &= \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[D_{T_n} \Delta A_{T_n} - r_{T_{n-1}} \Delta T_n \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n \right] \\ &= \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[(b_{T_{n-1}} - r_{T_{n-1}}) \Delta T_n + \sigma_{T_{n-1}} \Delta A_{T_n} \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n \right] \\ &= \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} \left\{ (b_{T_{n-1}} - r_{T_{n-1}}) \Delta T_n + \sigma_{T_{n-1}} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left(\Delta A_{T_n} \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n \right) \right\} \\ &= \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} \left\{ (b_{T_{n-1}} - r_{T_{n-1}}) \Delta T_n \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{T_{n-1}} [2^{-k} \mathcal{Q}(\Delta A_{T_n} = 2^{-k}) - 2^{-k} \mathcal{Q}(\Delta A_{T_n} = -2^{-k})] \right\}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= (b_{T_{n-1}} - r_{T_{n-1}}) \Delta T_n + \sigma_{T_{n-1}} \left\{ 2^{-k} \mathcal{Q}(\Delta A_{T_n} = 2^{-k}) \right. \\ &\quad \left. - 2^{-k} [1 - \mathcal{Q}(\Delta A_{T_n} = 2^{-k})] \right\}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Então, a probabilidade martingale satisfaz

$$\mathcal{Q} \left[(T_n - T_{n-1}) \in B \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}} \right] = P \left[(T_n - T_{n-1}) \in B \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}} \right], \quad n \geq 1,$$

e

$$\mathcal{Q} \left(\Delta A_{T_n} = 2^{-k} \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b_{T_{n-1}} - r_{T_{n-1}} \Delta T_n}{2^{-k} \sigma_{T_{n-1}}} \right), \quad n \geq 1.$$

Além disso, o preço do *stock* descontado

$$\tilde{S}_t = s + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} \sigma_{T_{n-1}} \Delta \tilde{A}_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

é um \mathcal{Q} -martingale. □

Corolário 3.1. *A dinâmica do preço do Stock, nos pontos de saltos do processo \tilde{A} , na medida martingale equivalente \mathcal{Q} , definida no Teorema 3.1, é dada por:*

$$\begin{cases} S_{T_n} = S_{T_{n-1}} + r_{T_{n-1}} S_{T_{n-1}} \Delta T_n + \sigma_{T_{n-1}} S_{T_{n-1}} \Delta \tilde{A}_{T_n}, & n \geq 1, \\ S_0 = s > 0 \text{ (Conhecido)}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Demonstração. De acordo com o teorema (3.1), a dinâmica do preço do *Stock* na medida martingale equivalente \mathcal{Q} , é dada por

$$\tilde{S}_t = s + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} \sigma_{T_{n-1}} \Delta \tilde{A}_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Logo, nos pontos de saltos do processo \tilde{A} , obtemos

$$\tilde{S}_{T_n} = \tilde{S}_{T_{n-1}} + \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} \sigma_{T_{n-1}} \Delta \tilde{A}_{T_n}, \quad n \geq 1.$$

Multiplicando ambos os lados por B_{T_n} , obtemos

$$\tilde{S}_{T_n} B_{T_n} = \tilde{S}_{T_{n-1}} B_{T_n} + \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} \sigma_{T_{n-1}} \Delta \tilde{A}_{T_n} B_{T_n}, \quad n \geq 1.$$

Com isso,

$$S_{T_n} = \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_{n-1}}} B_{T_n} + S_{T_{n-1}} \sigma_{T_{n-1}} \Delta \tilde{A}_{T_n}, \quad n \geq 1,$$

Da equação (3.2), obtemos

$$\frac{B_{T_n}}{B_{T_{n-1}}} = 1 + r_{T_{n-1}} \Delta T_n, \quad n \geq 1$$

Portanto,

$$S_{T_n} = S_{T_{n-1}} + r_{T_{n-1}} S_{T_{n-1}} \Delta T_n + \sigma_{T_{n-1}} S_{T_{n-1}} \Delta \tilde{A}_{T_n}, \quad n \geq 1.$$

□

Capítulo 4

Precificação de Opções

Neste capítulo, fixaremos um nível k e denotaremos por $(\Omega, \mathbb{G}, \mathcal{G}_T, \mathcal{Q})$ a base estocástica definida a partir da sequência de tempos de parada $\{T_n\}_{n \geq 1}$, definida em (2.1), e do processo de saltos $\{\tilde{A}_t\}_{0 \leq t \leq T}$, definido no Teorema 3.1.

4.1 Modelo

Como no modelo de Black-Scholes-Merton, consideraremos um mercado composto por dois ativos que são negociados continuamente. Além disso, ambos os ativos estão definidos na base estocástica $(\Omega, \mathbb{G}, \mathcal{G}_T, \mathcal{Q})$.

Um dos ativos, denominado *Bond*, tem processo de preço definido conforme a equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{\Delta B_{T_n}}{B_{T_{n-1}}} = r_{T_{n-1}} \Delta T_n, & n \geq 1, \\ B_0 = 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

O outro ativo, denominado *Stock*, está sujeito a risco e tem o seu processo de preço modelado pela equação diferencial estocástica

$$\begin{cases} \frac{\Delta S_{T_n}}{S_{T_{n-1}}} = r_{T_{n-1}} \Delta T_n + \sigma_{T_{n-1}} \Delta \tilde{A}_{T_n}, & n \geq 1, \\ S_0 = s > 0 \text{ (Conhecido)}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Definição 4.1. *Daqui para frente, consideraremos que um processo estocástico π é um portfolio auto-financiável se ele satisfazer:*

- (i) *as condições das Definições 3.1 e 3.2;*
- (ii) $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[\gamma_{T_n} \Delta \tilde{A}_{T_n} \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n \right] = 0, \quad n \geq 1.$

4.2 Precificação de opções pelo princípio do hedging

Suponha que no tempo $t = 0$ nós assinamos um contrato que nos dá uma opção para comprar, num tempo especificado T (chamado tempo de maturidade), uma ação do ativo com risco (*stock*) por um preço especificado K , chamado preço de exercício. No tempo de maturidade, se o preço S_T do *stock* for menor que o preço de exercício, o contrato é sem valor para nós; por outro lado, se $S_T > K$, nós exercemos a nossa opção (isto é, compramos uma ação do *stock* pelo preço pré-acordado K) e então vendemos essa ação imediatamente no mercado por S_T . Este contrato, que é denominado opção europeia de compra (*European call option*), é equivalente ao pagamento de $(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$ unidades monetárias no tempo de maturidade. Denominamos, $F_T = (S_T - K)^+$ a função *payoff* da opção europeia de compra.

A seguinte definição generaliza o conceito de função *payoff*.

Definição 4.2. *Seja F_T uma variável aleatória \mathcal{G}_T -mensurável e não-negativa. Dizemos que ela é uma função *payoff* se $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[F_T^2] < \infty$.*

Definição 4.3. *Dados $c > 0$, $\pi = \{(\beta_t, \gamma_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ um processo portfolio auto-financiável e $C^\pi = \{C_t^\pi\}_{0 \leq t \leq T}$ o processo do capital do investidor associado ao portfolio π , conforme definido em (3.5), dizemos que π é uma estratégia de hedging para a função *payoff* F_T se*

$$(i) \quad C_0^\pi = c;$$

$$(ii) \quad C_T^\pi = F_T.$$

Além disso, dizemos que uma estratégia é admissível para um investimento inicial c se $C_t^\pi > 0$, $0 \leq t \leq T$. Denotamos por $\Pi(c, F_T)$ a classe de todas as estratégias admissíveis de hedging.

O conceito de *hedging* é introduzido afim de permitir a solução do problema de precificar uma opção: Qual é o preço justo a ser pago por uma opção no tempo $t = 0$?

Definição 4.4. *O valor*

$$\alpha = \inf \{c > 0 : \Pi(c, F_T) \neq \emptyset\}$$

é o preço justo a ser pago pela opção no instante inicial.

4.2. PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES PELO PRINCÍPIO DO HEDGING 43

A Definição 4.4 nos diz que o preço justo a ser pago por uma opção no tempo $t = 0$ é o menor $c > 0$, o qual permite que o investidor construa uma estratégia de *hedging* com valor inicial igual a c .

Teorema 4.1. *Defina o processo $Y_t = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[\tilde{F}_T | \mathcal{G}_t]$, para qualquer $0 \leq t \leq T$, sendo que $\tilde{F}_T = F_T/B_T$ é a função payoff descontada. Então, o processo estocástico $Y = \{Y_t\}_{0 \leq t \leq T}$ é um \mathcal{Q} -martingale. Além disso, se $\Delta \tilde{A}_{T_n} \neq 0$, \mathcal{Q} -q.c. então,*

$$Y_t = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[\tilde{F}_T] + \int_0^t \mathcal{D}_s^Y d\tilde{A}_s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.3)$$

no qual

$$\mathcal{D}_t^Y = \frac{\Delta Y_{T_n}}{\Delta \tilde{A}_{T_n}} \text{ em } \{T_n \leq t < T_{n+1}\}, \quad (4.4)$$

é o processo derivada estocástica de Y .

Demonstração. Para mostrar que Y é um \mathcal{Q} -martingale, basta observar que

$$\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[Y_t | \mathcal{G}_s] = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}(\tilde{F}_T | \mathcal{G}_t) | \mathcal{G}_s] = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[\tilde{F}_T | \mathcal{G}_s] = Y_s,$$

para quaisquer $0 \leq s < t \leq T$.

Como o processo Y está definido na base estocástica $(\Omega, \mathbb{G}, \mathcal{G}_T, \mathcal{Q})$, temos que os saltos de Y ocorrem nos tempos de saltos do ruído branco A (ou seja, nos tempos de parada $\{T_n\}_{n \geq 1}$) e além disso, $Y_t = Y_{T_n}$ em $\{T_n \leq t < T_{n+1}\}$. Portanto,

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta Y_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}} = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta Y_{T_n}}{\Delta \tilde{A}_{T_n}} \Delta \tilde{A}_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}} \\ &= Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{T_n}^Y \Delta \tilde{A}_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}} = Y_0 + \int_0^t \mathcal{D}_s^Y d\tilde{A}_s, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Como $Y_0 = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[\tilde{F}_T]$, concluímos que

$$Y_t = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[\tilde{F}_T] + \int_0^t \mathcal{D}_s^Y d\tilde{A}_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

□

Lema 4.1. *Seja π um processo portfolio auto-financiável. Então, o capital do investidor descontado, $\tilde{C}^\pi = \{\tilde{C}_t^\pi\}_{0 \leq t \leq T}$, é um \mathcal{Q} -martingale.*

Demonstração. Das equações (3.6) e (3.9), obtemos que o capital do investidor descontado é igual

$$\begin{aligned}\tilde{C}_t^\pi &= c + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{T_n} \Delta \tilde{S}_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}} = c + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{T_n} \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} \sigma_{T_{n-1}} \Delta \tilde{A}_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}} \\ &= c + \int_0^t \gamma_u \frac{S_{u-}}{B_u} \sigma_{u-} d\tilde{A}_u, \quad 0 \leq t \leq T,\end{aligned}\tag{4.5}$$

no qual, dado um processo estocástico X assumimos que $X_{0-} = X_0$.

Logo, \tilde{C}^π é um \mathcal{Q} -martingale se, e somente se,

$$\mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[\gamma_{T_n} \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} \sigma_{T_{n-1}} \Delta \tilde{A}_{T_n} \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n \right] = 0, \quad n \geq 1.$$

Observe que,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[\gamma_{T_n} \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} \sigma_{T_{n-1}} \Delta \tilde{A}_{T_n} \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n \right] \\ = \frac{S_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} \sigma_{T_{n-1}} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[\gamma_{T_n} \Delta \tilde{A}_{T_n} \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n \right], \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

Com isso, \tilde{C}^π é um \mathcal{Q} -martingale se, e somente se,

$$\mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[\gamma_{T_n} \Delta \tilde{A}_{T_n} \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n \right] = 0, \quad n \geq 1.\tag{4.6}$$

Desde que π é um portfólio auto-financiável, temos que a condição (4.6) é satisfeita. Portanto, \tilde{C}^π é um \mathcal{Q} -martingale. \square

Teorema 4.2. *Dada uma função payoff F_T . Obtemos que $c = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[\tilde{F}_T]$ é o preço justo a ser pago pela opção no tempo $t = 0$. Além disso, o processo portfólio π com $\gamma_t = \frac{B_t \mathcal{D}_t^Y}{\sigma_{t-} S_{t-}}$, $0 \leq t \leq T$, é um processo de hedging para a função payoff F_T .*

Demonstração. Como a função payoff \tilde{F}_T é \mathcal{G}_T -mensurável, temos que $Y_T = \tilde{F}_T$.

Pelo princípio do *hedging*, obtemos que o capital é igual a função payoff no tempo de maturidade T , isto é, $C_T^\pi = F_T$, equivalentemente, $\tilde{C}_T^\pi = \tilde{F}_T$. Portanto, $\tilde{C}_T^\pi = Y_T$.

Como os processos Y e \tilde{C}^π são iguais no tempo final T e são \mathcal{Q} -martingales, obtemos que

$$\tilde{C}_t^\pi = Y_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

4.2. PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES PELO PRINCÍPIO DO HEDGING 45

Portanto, das equações (4.3) e (4.5)

$$c + \int_0^t \gamma_u \frac{S_{u-}}{B_u} \sigma_u d\tilde{A}_u = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[\tilde{F}_T] + \int_0^t \mathcal{D}_u^Y d\tilde{A}_u, \quad 0 \leq t \leq T,$$

Com isso, concluímos que $c = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[\tilde{F}_T]$ e $\gamma_t = \frac{B_t \mathcal{D}_t^Y}{\sigma_t S_{t-}}$, $0 \leq t \leq T$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[\gamma_{T_n} \Delta \tilde{A}_{T_n} \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n \right] &= \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[\frac{B_{T_n} \mathcal{D}_{T_n}^Y}{\sigma_{T_{n-1}} S_{T_{n-1}}} \Delta \tilde{A}_{T_n} \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n \right] \\ &= \frac{B_{T_n}}{\sigma_{T_{n-1}} S_{T_{n-1}}} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[\mathcal{D}_{T_n}^Y \Delta \tilde{A}_{T_n} \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n \right] \\ &= \frac{B_{T_n}}{\sigma_{T_{n-1}} S_{T_{n-1}}} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[\frac{\Delta Y_{T_n}}{\Delta \tilde{A}_{T_n}} \Delta \tilde{A}_{T_n} \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n \right] \\ &= \frac{B_{T_n}}{\sigma_{T_{n-1}} S_{T_{n-1}}} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[\Delta Y_{T_n} \middle| \mathcal{G}_{T_{n-1}}; T_n \right] = 0, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

pois o processo Y é um \mathcal{Q} -martingale.

Portanto, $c = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[\tilde{F}_T]$ e $\gamma_t = \frac{B_t \mathcal{D}_t^Y}{\sigma_t S_{t-}}$, $0 \leq t \leq T$ são o valor justo a ser pago pela opção no tempo $t = 0$ e a quantidade de ações investidas no *stock* no tempo t , respectivamente. \square

Capítulo 5

Modelo de Volatilidade Local

No modelo de Black-Scholes-Merton tradicional (Black & Scholes (1973); Merton (1973)), assumimos que o preço do *Stock* sem dividendos associados, S , segue a seguinte equação diferencial estocástica

$$\frac{dS_t}{S_t} = bdt + \sigma dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.1)$$

sendo que $S_0 > 0$ é um valor conhecido, $W = \{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ é o movimento Browniano unidimensional com $W_0 = 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$ são o *drift* e a volatilidade, respectivamente. Conforme vimos na Seção 1.3, o processo lognormal

$$S_t = S_0 \exp \left\{ bt + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t \right\}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.2)$$

é a solução da equação (5.1).

É bem conhecido que o preço $C(S_t, t; K, T)$ de uma opção de compra do tipo europeia com *Spot* (preço à vista) S_t , preço de exercício K e tempo de maturidade T satisfaz a seguinte equação diferencial parcial

$$\begin{cases} C_t + \frac{\sigma^2}{2} S^2 C_{SS} + rSC_S - rC = 0 & \text{em } (0, \infty) \times [0, T], \\ C(S_T, T; K, T) = (S_T - K)^+, \end{cases} \quad (5.3)$$

no qual r é a taxa de juros livre de risco (Berestycki *et al.* (2002); Hull (2002)).

A solução da equação (5.3) é dada por

$$C(S_t, t; K, T) = S_t \phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \phi(d_2), \quad (5.4)$$

sendo que

- $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}};$
- $d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t};$
- $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz$, $x \in \mathbb{R}$, é a função densidade acumulada da normal padrão.

As opções de compra do tipo europeia são negociadas no mercado, entretanto a volatilidade σ não é diretamente observável. Portanto, é uma prática comum, a partir dos preços observados da opção no mercado, inverter a solução (5.4) afim de encontrar a constante σ - **volatilidade implícita** - para qual a solução do custo da opção (5.4) esteja de acordo com os preços praticados no mercado da opção.

Evidências empíricas sugerem que os retornos de um *Stock* são heteroscedástico e também que as volatilidades implícitas não são constantes (Emanuel & MacBeth (1982)). Vale ressaltar, que as volatilidades implícitas não apresentavam comportamento *smile* ou assimétrico até o *Crash* de 1987, mas começaram a mostrar tais comportamentos a partir de outubro de 1987 (Ayache *et al.* (2004)).

Para ilustrar o comportamento assimétrico da volatilidade implícita, consideremos os dados de uma opção de compra do tipo europeia, sendo que o derivativo associado é o índice BOVESPA (IBOVESPA). O conjunto de dados consiste nos preços, praticados no mercado, de exercício e da opção no fechamento do dia 04/01/2010. O conjunto de dados é fornecido na tabela 5.1.

O preço de fechamento do IBOVESPA era igual à R\$ 70045, no dia 04/01/2010. Além disso, o dia de expiração de tais opções foi no dia 17/02/2010. Logo, o tempo de maturidade é igual à 30/252, pois em ano temos 252 dias de negociação e no período de 04/01/2010 até 17/02/2010 tivemos 30 dias de negociação.

A figura 5.1 apresenta as volatilidades implícitas, sendo que tais volatilidades foram calculadas invertendo a solução (5.4) do modelo Black-Scholes-Merton tradicional para cada preço de exercício da tabela 5.1, considerando que a taxa de juros livre de risco era igual à 8,68% ao ano.

Preços de Exercício	Preços da Opção	Preços de Exercício	Preços da Opção
36000	34541	62000	9215
38000	32561	64000	7480
40000	30580	66000	5844
42000	28600	68000	4352
44000	26620	70000	3043
46000	24640	72000	1961
48000	22660	74000	1162
50000	20683	76000	645
52000	18710	78000	351
54000	16748	80000	187
56000	14805	82000	95
58000	12893	84000	46
60000	11025		

Tabela 5.1: Preços de exercício e de compra de uma opção de compra do tipo europeia do IBOVESPA, no fechamento do dia 04/01/2010

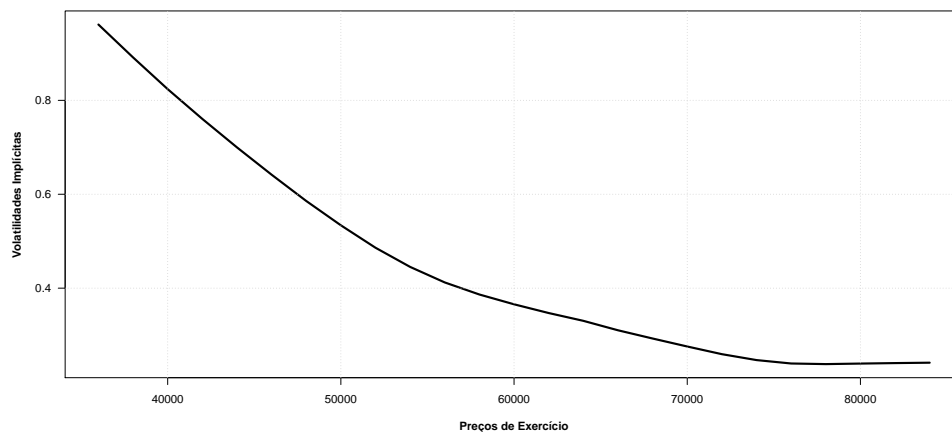


Figura 5.1: Volatilidades Implícitas

Podemos observar na figura 5.1 que as volatilidades implícitas, observadas do IBOVESPA, possuem comportamento assimétrico. Tal comportamento, contraria o modelo de Black-Scholes-Merton tradicional, desde que neste modelo a volatilidade é considerada constante.

Para superar esta dificuldade iremos estender o modelo. Uma alternativa é considerar o modelo de volatilidade estocástica, o qual a volatilidade também segue uma equação diferencial estocástica. Um caso particular desse modelo, consiste em considerar que a volatilidade é uma

função (determinística) do *Spot* e do tempo. Estes modelos são chamados **modelos de volatilidade local**. Para tais modelos, a dinâmica do ativo associado é dada pela seguinte equação diferencial estocástica

$$\frac{dS_t}{S_t} = bdt + \sigma(S_t, t)dW_t, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.5)$$

5.1 Modelo de Elasticidade Constante da Variância

O modelo de **elasticidade constante da variância (CEV)** (Cox (1975); Emanuel & MacBeth (1982); Schroder (1989)) propõe a seguinte relação determinística entre o preço do *Stock*, S , e a volatilidade:

$$\sigma(S_t, t) = \sigma \cdot S_t^{(\beta-2)/2}, \quad t \in [0, T].$$

Neste modelo assumimos que o preço do *Stock* é governado pela seguinte equação diferencial estocástica

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \alpha)dt + \sigma S_t^{(\beta-2)/2} dW_t^{\mathcal{Q}}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.6)$$

sendo que α representa os dividendos associados ao *Stock* e $W^{\mathcal{Q}}$ é um \mathcal{Q} -movimento Browniano, no qual \mathcal{Q} é a medida martingale equivalente definida em (1.14).

A elasticidade no modelo CEV é $\beta - 2$ desde que a variância do retorno do *Stock* dado o *Spot*, $v(S_t, t) := \text{Var}\left(\frac{dS_t}{S_t} \middle| S_t\right) = \sigma^2 S_t^{\beta-2} dt$, segue a seguinte relação

$$\frac{dv(S_t, t)/dS_t}{v(S_t, t)/S_t} = \beta - 2,$$

implicando que $\frac{dv(S_t, t)}{v(S_t, t)} = (\beta - 2) \frac{dS_t}{S_t}$.

Se $\beta = 2$ (isto é, a elasticidade é zero), os preços do *Stock* têm distribuição lognormal e a variância dos retornos é constante, como assumidos no modelo de Black-Scholes-Merton. Agora, se $\beta = 1$ então a elasticidade é -1 e temos o modelo proposto em Cox & Ross (1976).

Nós focaremos no caso em que $\beta < 2$, desde que muitas evidências empíricas têm mostrado uma relação negativa entre o preço do *Stock* e a volatilidade associada ao *Stock*.

5.2. VERSÃO DISCRETA DO MODELO DE ELASTICIDADE CONSTANTE DA VARIÂNCIA

Quando $\beta < 2$ (veja por exemplo [Schroder \(1989\)](#)), o preço de uma opção de compra do tipo europeia vale

$$C(S_t, t; K, T) = S_t e^{-\alpha(T-t)} Q\left(2y; 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x\right) - K e^{-r(T-t)} \left(1 - Q\left(2x; \frac{2}{2-\beta}, 2y\right)\right),$$

sendo que

- $x = k^* S_t^{2-\beta} e^{(r-\alpha)(2-\beta)(T-t)}$;
- $y = k^* K^{2-\beta}$;
- $k^* = \frac{2(r-\alpha)}{\sigma^2(2-\beta)(e^{(r-\alpha)(2-\beta)(T-t)} - 1)}$;
- $Q(z; \nu, \lambda) = \int_z^\infty p(y; \nu, \lambda) dy$, $z > 0$, no qual $p(\bullet; \nu, \lambda)$ é a função densidade de probabilidade da distribuição qui-quadrado não central com ν graus de liberdade e parâmetro de não centralidade λ .

Se $\beta > 2$ ([Emanuel & MacBeth \(1982\)](#)), o preço de uma opção de compra do tipo europeia vale

$$C(S_t, t; K, T) = S_t e^{-\alpha(T-t)} Q\left(2x; \frac{2}{\beta-2}, 2y\right) - K e^{-r(T-t)} \left(1 - Q\left(2y; 2 + \frac{2}{\beta-2}, 2x\right)\right).$$

5.2 Versão Discreta do Modelo de Elasticidade Constante da Variância

A seguir, fixaremos um nível k e denotaremos por $(\Omega, \mathbb{G}, \mathcal{G}_T, \mathbb{P})$ a base estocástica definida a partir da sequência de tempos de parada $\{T_n\}_{n \geq 1}$, definida em (2.1), e do processo de saltos $\{A_t\}_{0 \leq t \leq T}$, definido em (2.2).

Através do esquema de discretização induzido por tais tempos de parada, trabalharemos a partir de agora com o seguinte modelo:

Os dois ativos, *Bond* e *Stock*, são definidos na base estocástica $(\Omega, \mathbb{G}, \mathcal{G}_T, \mathbb{P})$ e as dinâmicas dos preços na versão discreta do modelo CEV são dadas, respectivamente, por

$$\begin{cases} \frac{\Delta B_{T_n}}{B_{T_{n-1}}} = (r - \alpha) \Delta T_n, & n \geq 1, \\ B_0 = 1, \end{cases} \quad (5.7)$$

e

$$\begin{cases} \frac{\Delta S_{T_n}}{S_{T_{n-1}}} = b\Delta T_n + \sigma S_{T_{n-1}}^{(\beta-2)/2} \Delta A_{T_n}, & n \geq 1, \\ S_0 = s > 0 \text{ (Conhecido)}. \end{cases} \quad (5.8)$$

De acordo com o Corolário 3.1, a dinâmica do preço *Stock* na medida martingale equivalente \mathcal{Q} , definida no Teorema 3.1, é dada por

$$\begin{cases} \frac{\Delta S_{T_n}}{S_{T_{n-1}}} = (r - \alpha)\Delta T_n + \sigma S_{T_{n-1}}^{(\beta-2)/2} \Delta \tilde{A}_{T_n}, & n \geq 1, \\ S_0 = s > 0 \text{ (Conhecido)}, \end{cases} \quad (5.9)$$

No Teorema 4.2 vimos que pelo princípio do *hedging* $c = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[\tilde{F}_T]$ é o preço justo a ser pago por uma opção no instante $t = 0$, sendo que \tilde{F}_T é a função *payoff* descontada. Além disso, vimos também que

$$\gamma_{T_n} = \frac{B_{T_n} \mathcal{D}_{T_n}^Y}{\sigma_{T_{n-1}} S_{T_{n-1}}},$$

é a quantidade de ações investidas no *Stock* no tempo T_n , $n \geq 1$. Sendo que, \mathcal{D}^Y é a derivada estocástica do processo $Y_t = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[\tilde{F}_t | \mathcal{G}_t]$, $0 \leq t \leq T$.

Na versão discreta do modelo CEV, temos a seguinte relação entre a volatilidade e o *Stock*:

$$\sigma_{T_n} := \sigma(S_{T_n}, T_n) = \sigma \cdot S_{T_n}^{(\beta-2)/2}, \quad n \geq 1.$$

Portanto,

$$\gamma_{T_n} = \frac{B_{T_n} \mathcal{D}_{T_n}^Y}{\sigma S_{T_{n-1}}^{\beta/2}}, \quad (5.10)$$

é a quantidade de ações investidas no *Stock* no tempo T_n , $n \geq 1$, quando consideramos que os preços dos ativos seguem a versão discreta do modelo CEV.

Capítulo 6

Algoritmo

A seguir, descreveremos o nosso algoritmo de precificação de opções e de *hedging*, que é completamente baseado no esquema de discretização induzido pela sequência de tempos de parada $\{T_n\}_{n \geq 1}$, definida em (2.1).

6.1 Passo 1: Simulação dos tempos de parada

$\{T_n\}$ e dos processos A , \tilde{A} , B e S

- Escolhemos um inteiro positivo k que representa o nível de discriminação do movimento Browniano;
- Geramos os tempos de parada $\{T_i - T_{i-1}\}_{1 \leq i \leq n}$ de acordo com o algoritmo descrito por [Burq & Jones \(2008\)](#), sendo que o índice n é tal que $T_n \leq T < T_{n+1}$;
- Escolhemos a taxa de juros r , a taxa de dividendos α , o *drift* b , a constante de elasticidade β e os valores iniciais do *Bond* (B_0) e do *Stock* (S_0);
- $A_0 = \tilde{A}_0 = 0$;
- Para $i = 1, \dots, n$, realizamos os seguintes passos:

(i) Geramos A_{T_i} através da distribuição dos saltos de A :

$$\mathcal{Q}\left(\Delta A_{T_i} = 2^{-k} \mid \mathcal{G}_{T_{i-1}}; T_i\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b - (r - \alpha)}{2^{-k} \sigma S_{T_{i-1}}^{(\beta-2)/2}} \Delta T_i\right);$$

$$(ii) \text{ Calculamos } \tilde{A}_{T_i} = A_{T_i} + \sum_{j=1}^i \frac{b - (r - \alpha)}{\sigma S_{T_{j-1}}^{(\beta-2)/2}} \Delta T_j;$$

(iii) Calculamos o *Stock*:

$$S_{T_i} = S_{T_{i-1}} + (r - \alpha)S_{T_{i-1}}\Delta T_i + \sigma S_{T_{i-1}}^{\beta/2} \Delta \tilde{A}_{T_i};$$

(iv) Calculamos o *Bond*: $B_{T_i} = B_{T_{i-1}} + (r - \alpha)B_{T_{i-1}}\Delta T_i$.

6.2 Passo 2: Calculo do valor da opção

Realizamos uma simulação Monte Carlo para conseguirmos uma aproximação de $c = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[F_T/B_T]$, da seguinte maneira:

- Escolhemos uma função *payoff* F_T ;
- Escolhemos um inteiro positivo l suficientemente grande que será o número de iterações da simulação Monte Carlo;
- Para $j = 1, \dots, l$, realizamos os seguintes passos:
 - (i) Geramos B e S conforme descrito no Passo 1;
 - (ii) $\hat{c}_j = F_T/B_{T_{n_j}}$, sendo que n_j é tal que $T_{n_j} \leq T < T_{n_j+1}$;
- Calculamos uma aproximação para o valor da opção: $\hat{c} = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \hat{c}_j$.

6.3 Passo 3: Calculo do hedging

- Geramos uma amostra do processo de saltos \tilde{A} de acordo com o passo 1. Desta amostra, consideramos $(T_1, \eta_1), \dots, (T_n, \eta_n)$, tais que $T_j \leq T < T_{n+1}$, para todo $j = 1, \dots, n$.
- Aplicamos uma simulação Monte Carlo para obter uma aproximação dos seguintes objetos: $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[\tilde{F}_T]$ e $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[\tilde{F}_T|(T_1, \eta_1)]$. Denotaremos estas aproximações por $\hat{\mathbb{E}}_{\mathcal{Q}}[\tilde{F}_T]$ e $\hat{\mathbb{E}}_{\mathcal{Q}}[\tilde{F}_T|(T_1, \eta_1)]$, respectivamente.
- De acordo com (4.4), uma aproximação para a derivada estocástica D^Y é dada por

$$\hat{D}_{T_1}^Y = \frac{\hat{\mathbb{E}}_{\mathcal{Q}}[\tilde{F}_T|(T_1, \eta_1)] - \hat{\mathbb{E}}_{\mathcal{Q}}[\tilde{F}_T]}{\tilde{A}_{T_1}}.$$

- De (5.10), a estratégia de *hedging*, no modelo CEV, correspondente a esta trajetória pode ser aproximada por

$$\hat{\gamma}_{T_1} = \frac{B_{T_1} \hat{D}_{T_1}^Y}{\sigma S_0^{\beta/2}}.$$

- Repetimos estes passos um número suficientemente grande de vezes e tomamos a média destas estratégias $\hat{\gamma}_{T_1}$ como uma estimativa para a estratégia de *hedging* no ponto $t = 0$.

6.4 Aplicação

Como ilustração do algoritmo proposto para a precificação de opções, apresentado na Seção 6.2, selecionamos o seguinte exemplo em Hull (2002), página 299.

Exemplo 6.1. *“Usando como exemplo a posição de uma instituição financeira que vendeu por \$300.000 uma opção europeia de compra sobre 100.000 lotes de uma opção que não paga dividendos. Assumimos que o preço à vista das ações é de \$49, o preço de exercício é de R\$ 50, a taxa juros livre de risco é de 5% ao ano, a volatilidade do preço das ações é de 20% ao ano, o tempo de maturidade é de 20 semanas (0,3846 ano) e o retorno esperado da ação é de 13% por ano.”*

Com a notação desse trabalho, isso significa que

$$S_0 = 49, K = 50, T = 0,3846, r = 0,05, \sigma = 0,2, b = 0,13, \alpha = 0.$$

A seguir, calculamos o valor da opção, para este exemplo, segundo o modelo Black-Scholes-Merton tradicional e segundo o modelo CEV com diferentes valores para β . Além disso, simulamos o preço da opção para cada caso através do algoritmo proposto na Seção 6.2, considerando o nível $k = 4$ e $l = 1000$ iterações.

- Segundo o modelo de Black-Scholes-Merton tradicional, o preço da opção é aproximadamente \$240.000. Através do nosso algoritmo, o preço da opção é aproximadamente \$241.000.
- Quando $\beta = 1,9$ o preço da opção no modelo CEV é aproximadamente \$197.000. Através do nosso algoritmo, o preço da opção é aproximadamente \$195.000.

- Quando $\beta = 1,8$ o preço da opção no modelo CEV é aproximadamente \$161.000. Através do nosso algoritmo, o preço da opção é aproximadamente \$160.000.
- Quando $\beta = 1,5$ o preço da opção no modelo CEV é aproximadamente \$89.000. Através do nosso algoritmo, o preço da opção é aproximadamente \$88.000.
- Segundo o modelo proposto em [Cox & Ross \(1976\)](#) (quando $\beta = 1$), o preço da opção é aproximadamente \$32.000. Através do nosso algoritmo, o preço da opção é aproximadamente \$31.000.

Considerando o Exemplo 6.1, nós simulamos o valor do hedging, conforme o algoritmo da Seção 6.3, para o modelo com parâmetro $\beta = 2$, sendo que geramos 1000 valores para o hedging e tomamos a média desses valores. A figura 6.1 fornece as médias dos valores do hedging.

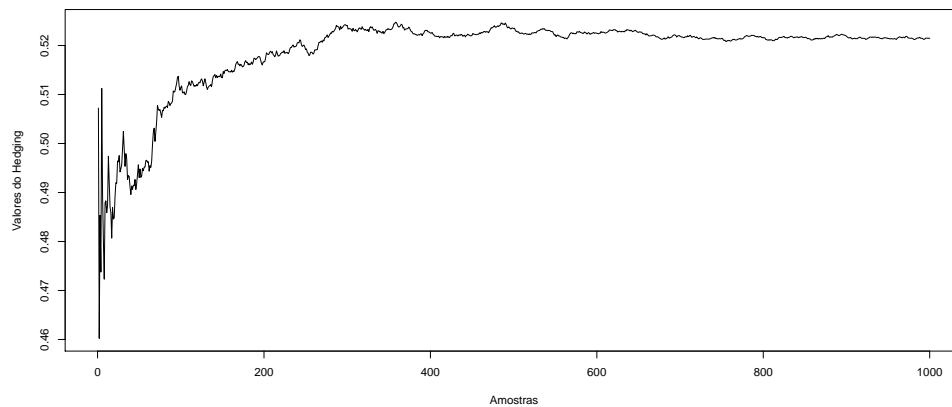


Figura 6.1: Hedging

O valor do hedging simulado através do nosso algoritmo foi igual à 0,5214462, sendo que o valor exato é igual à 0,522 ([Leão & Ohashi \(2010\)](#)). Definimos, o *erro* (%) como o valor absoluto entre o valor estimado e o valor exato dividido pelo valor exato. Com apenas, 1000 amostras obtemos um *erro* de 0,001%.

Estas simulações numéricas indicam que o nosso método se comporta muito bem sem um número muito grande de amostras e sem tomarmos um nível descritivo (k) muito alto.

Capítulo 7

Conclusão

A seguir, listamos os principais resultados obtidos nessa dissertação:

1. Propomos um modelo de mercado, composto por dois ativos (*Bond* e *Stock*), baseado no esquema de discretização aleatória do movimento Browniano proposto por [Leão & Ohashi \(2010\)](#);
2. Desenvolvemos um Teorema de Girsanov para a classe de semimartingales especiais como pode ser visto no Teorema [3.1](#);
3. Dada uma função *payoff* $F_T \in L^2$, com tempo de maturidade T , desenvolvemos uma estratégia de hedging e uma metodologia para precificação de opções;
4. Apresentamos um algoritmo, que é completamente baseado na informação gerada pelos tempos de parada $\{T_n\}_{n \geq 0}$, para a simulação do preço da opção e da estratégia de hedging.

Referências

- Ayache, E., Henrotte, P., Nassar, S. & Wang, X. (2004). Can anyone solve the smile problem. *Wilmott magazine*, **3**, 78–96.
- Belitsky, V. (2000). *Métodos Probabilísticos em Precificação de Derivativos*. ABE - Associação Brasileira de Estatística.
- Berestycki, H., Busca, J. & Florent, I. (2002). Asymptotics and calibration of local volatility models. *Quantitative finance*, **2**(1), 61–69.
- Bermin, H. P. (2002). A general approach to hedging options: applications to barrier and partial barrier options. *Math. Finance*, **12**(3), 199–218.
- Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, **81**(3), pp. 637–654.
- Brémaud, P. (1981). *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*. Springer-Verlag, New York.
- Burq, Z. A. & Jones, O. D. (2008). Simulation of Brownian motion at first-passage times. *Math. Comput. Simulation*, **77**(1), 64–71.
- Cox, J. (1975). Notes on option pricing i: Constant elasticity of variance diffusions. *Unpublished note, Stanford University, Graduate School of Business*.
- Cox, J. & Ross, S. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of financial economics*, **3**(1), 145–166.
- Cox, J. C., Ross, S. A. & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, **7**(3), 229–263.

- Cvitanic, J., Ma, J. & Zhang, J. (2003). Efficient computation of hedging portfolios for options with discontinuous payoffs. *Mathematical Finance*, **13**(1), 135–151.
- Delbaen, F. & Schachermayer, W. (1994). A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math. Ann.*, **300**(3), 463–520.
- Dellacherie, C. & Meyer, P. A. (1982). *Probabilities and Potential B: Theory of Martingales*. North-Holland, Amsterdam.
- Emanuel, D. & MacBeth, J. (1982). Further results on the constant elasticity of variance call option pricing model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **17**(4), 533–554.
- Fournié, E., Lasry, J.-M., Lebuchoux, J., Lions, P.-L. & Touzi, N. (1999). Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. *Finance Stoch.*, **3**(4), 391–412.
- Fournié, E., Lasry, J.-M., Lebuchoux, J. & Lions, P.-L. (2001). Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance. II. *Finance Stoch.*, **5**(2), 201–236.
- Hamida, S. & Cont, R. (2005). Recovering volatility from option prices by evolutionary optimization. *Journal of Computational Finance*, **8**(4), 43–76.
- He, S. W., Wang, J. G. & Yan, J. A. (1992). *Semimartingale theory and stochastic calculus*. Kexue Chubanshe (Science Press), Beijing. ISBN 7-03-003066-4.
- Hull, J. C. (2002). *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall Finance Series. Prentice Hall, fifth edition.
- Jacod, J. (1979). *Calcul Stochastique et Problème de Martingales*. Lecture Notes in Math, **714**. Springer-Verlag, Berlin.
- Jacod, J. & Skorohod, A. V. (1994). Jumping filtrations and martingales with finite variation. In *Séminaire de Probabilités, XXVIII*, volume 1583 of *Lecture Notes in Math.*, pages 21–35. Springer, Berlin.
- Leão, D. & Ohashi, A. (2010). Weak approximations for wiener functionals. Preprint.

- Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell J. Econom. and Management Sci.*, **4**, 141–183.
- Ocone, D. L. & Karatzas, I. (1991). A generalized Clark representation formula, with application to optimal portfolios. *Stochastics Stochastics Rep.*, **34**(3-4), 187–220.
- Øksendal, B. (1998). *Stochastic differential equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition. ISBN 3-540-63720-6. An introduction with applications.
- Protter, P. E. (2004). *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, second edition. ISBN 3-540-00313-4. Stochastic Modeling and Applied Probability.
- Schroder, M. (1989). Computing the constant elasticity of variance option pricing formula. *Journal of Finance*, pages 211–219.
- Shigekawa, I. (2004). *Stochastic analysis*, volume 224 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI. ISBN 0-8218-2626-3. Translated from the 1998 Japanese original by the author, Iwanami Series in Modern Mathematics.
- Shiryaev, A. N. (1999). *Essentials of stochastic finance*, volume 3 of *Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ. ISBN 981-02-3605-0. Facts, models, theory, Translated from the Russian manuscript by N. Kruzhilin.
- Shiryaev, A. N., Kabanov, Y. M., Kramkov, D. O. & Mel’Nikov, A. V. (1994a). Toward a theory of pricing options of European and American types. II. Continuous time. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, **39**(1), 80–129.
- Shiryaev, A. N., Kabanov, Y. M., Kramkov, D. O. & Mel’Nikov, A. V. (1994b). Toward a theory of pricing options of European and American types. I. Discrete time. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, **39**(1), 23–79.
- Tebaldi, C. (2005). Hedging using simulation: a least squares approach. *J. Econom. Dynam. Control*, **29**(8), 1287–1312.