

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Validação de soluções numéricas para sistemas de equações
diferenciais ordinárias**

Victor Hugo Nolasco

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de
Computação e Matemática Computacional (PPG-CCMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Victor Hugo Nolasco

Validação de soluções numéricas para sistemas de equações diferenciais ordinárias

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Marcio Fuzeto Gameiro

USP – São Carlos
Outubro de 2022

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

N763v Nolasco, Victor Hugo
Validação de soluções numéricas para sistemas de
equações diferenciais ordinárias / Victor Hugo
Nolasco; orientador Marcio Fuzeto Gameiro . -- São
Carlos, 2022.
106 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Ciências de Computação e Matemática Computacional) --
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, 2022.

1. Provas assistidas por computador. 2. Validação
numérica. 3. Equações diferenciais ordinárias. 4.
Newton-Kantorovich. 5. Módulo de bijetividade. I.
Fuzeto Gameiro , Marcio , orient. II. Título.

Victor Hugo Nolasco

**Rigorous numerics applied to systems of ordinary differential
equations**

Thesis submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Computer and Mathematical Sciences Graduate Program, for the degree of Doctor in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Marcio Fuzeto Gameiro

**USP – São Carlos
October 2022**

Este trabalho é dedicado à meu filho Pietro, minha esposa Fernanda, minha mãe Creuza e ao meu irmão Renato.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família pelo amor e apoio.

Agradeço ao meu orientador Marcio pelo apoio e ensinamentos.

Agradeço aos amigos Mário, Camilo, Eduardo, Flávio, Wesley, Gustavo, Artur, Filipe e Karina.

Agradeço a Fapesp(2013/14770-2), Capes(PROEX DS-8774822/D, 8774822/D1 "O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil(CAPES) - Código de Financiamento 001) e Univesp(272/2019) pelo apoio financeiro.

“O segredo do sucesso não é tentar evitar os problemas nem se livrar deles, mas crescer pessoalmente para se tornar maior do que qualquer adversidade.”

(T. Harv Eker)

RESUMO

NOLASCO, V. **Validação de soluções numéricas para sistemas de equações diferenciais ordinárias**. 2022. 106 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

Mesmo com a constante evolução dos métodos computacionais existentes, o problema de obter soluções para equações diferenciais ordinárias ainda é bastante pertinente, uma vez que tais equações modelam fenômenos que são fundamentais para o desenvolvimento da ciência, e por consequência da sociedade. Em busca de contribuir para solução deste problema, este trabalho tem por objetivo apresentar um método de validação de soluções numéricas para sistemas de equações diferenciais ordinárias. Este objetivo envolve aspectos teóricos, reformulação abstrata da equação diferencial em um espaço de dimensão infinita e suas consequências, e práticos, implementação do código que verifica rigorosamente as hipóteses dos resultados teóricos obtidos. Como resultado validamos soluções numéricas para sistemas de equações diferenciais ordinárias para condições iniciais e valores de fronteira em casos lineares e não lineares, baseados no teorema de Newton-Kantorovich. Diferente dos demais métodos de validação na literatura, o método apresentado neste trabalho além de fornecer um chute inicial para solução numérica, algo que é difícil de ser obtido no caso de equações diferenciais não lineares, ainda não necessita de ajustes para diferentes tipos de não linearidades.

Palavras-chave: Provas assistidas por computador, Validação numérica, Equações diferenciais ordinárias, Newton-Kantorovich, Módulo de bijetividade.

ABSTRACT

NOLASCO, V. **Rigorous numerics applied to systems of ordinary differential equations.** 2022. 106 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

Although constant evolution of existing computational methods, the problem of solve ordinary differential equations still quite pertinent, since such equations model phenomenas that are fundamental to the development of science, and as a consequence, of society. In order to collaborate to solve this problem, this work provides method of enclosure solutions for systems of ordinary differential equations. This aim includes theoretical aspects, abstract reformulation of the differential equation in infinite dimension spaces, and its consequences, and practical, implementation of code that rigorously checks the hypotheses of the theoretical results obtained. As a result, we rigorously enclosure solutions for systems of ordinary differential equations for initial values problems and boundary values problems in linear and non-linear cases, based on Newton-Kantorovich's Theorem. Unlike the other rigorous numerics methods, our method provides an initial guess for numerical solution, something that is difficult to obtain in the case of non-linear differential equations, and does not require great changes for different types of non-linearities.

Keywords: Computer-assisted proofs, Rigorous numerics, Ordinary differential equations, Newton-Kantorovich, Bijetivity module.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Solução numérica do PVF (2.10) obtida pelo solver <i>bvp4c</i>	42
Figura 2 – Comparativo entre normas dos métodos	49
Figura 3 – Comparativo entre tempo dos métodos	50
Figura 4 – Diagramas de aplicações	58
Figura 5 – Plot da solução teórica u^* e a solução numérica w do PVI (4.1)	75
Figura 6 – Plot da solução teórica u^* e a solução numérica w do PVI (4.4)	77
Figura 7 – Plot da solução numérica w do PVI (4.6)	78
Figura 8 – Plot da solução numérica w do PVI (4.9)	80
Figura 9 – Plot da solução numérica w do PVI (4.11)	82
Figura 10 – Plot da solução teórica u^* e a solução numérica w do PVI (5.1)	85
Figura 11 – Plot da solução teórica u^* e a solução numérica w do PVI (5.4)	86
Figura 12 – Plot da solução numérica w do PVF (5.7)	88
Figura 13 – Plot da solução numérica w do PVF (5.9)	90
Figura 14 – Plot da solução numérica w do PVF (5.12)	92
Figura 15 – Plot da solução numérica w do PVF (5.14)	93
Figura 16 – Funções coordenadas da solução numérica w para o PVF (5.17)	97
Figura 17 – Funções coordenadas da solução numérica w para o PVF (5.19)	99

LISTA DE CÓDIGOS-FONTE

Código-fonte 1 – Script para calcular soluções numéricas do sistema (2.11) com <code>fsolve</code>	40
Código-fonte 2 – Script para calcular solução numérica do PVF (2.10) com <code>bvp4c</code>	41

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparativo entre métodos por norma e tempo	49
--	----

LISTA DE SÍMBOLOS

$(X, \|\cdot\|)$ — Espaço vetorial normado

$B(a, r)_X$ — Bola aberta em X de centro em $a \in X$ e raio $r > 0$

$\overline{B(a, r)_X}$ — Bola fechada em X de centro em $a \in X$ e raio $r > 0$

$F_X^c := X \setminus F$ — Complementar de F em X

\bar{A} — fecho de A

$\text{int}(A)$ — interior de A

$\dim(X)$ — Dimensão do espaço vetorial X

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — Produto interno

f^{-1} — Função inversa de f

$X_1 \cong X_2$ — X_1 é isomorfo a X_2

$\ell^p(\mathbb{N})$ — Conjunto das sequências de números reais p somáveis

$\ell^\infty(\mathbb{N})$ — Conjunto das sequências limitadas de números reais

$L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — Conjunto das funções mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω

$L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — Conjunto das funções mensuráveis e p integráveis em Ω

$\mathcal{L}(X, Y)$ — Conjunto dos operadores lineares contínuos de X para Y

$C^0(U)$ — Conjunto das funções contínuas em U

$C^k(U)$ — Conjunto das funções k -vezes continuamente diferenciáveis em U

$H^1(I)$ — Conjunto das funções quadrado integráveis com derivada fraca também quadrado integrável em I

$C_c^\infty(I)$ — Conjunto das funções teste em I

$H^{1,0}(I)$ — Conjunto das funções $u \in H^1(I)$ tais que $u(0) = 0$

$\lambda(F)$ — Módulo de bijetividade de F

$\|M\|_F = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} [M]_{i,j}^2 \right)^{1/2}$ — Norma de Frobenius de M

$M_m(\mathbb{R})$ — Conjunto das matrizes de ordem m com entradas reais

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
2	PRELIMINARES	27
2.1	Espaços Vetoriais Normados	27
2.2	Equações diferenciais ordinárias	36
2.3	Soluções numéricas	40
2.4	Introdução à Validação Numérica	41
2.4.1	<i>Aritmética Intervalar</i>	42
2.4.2	<i>Ponto fixo de Brouwer e o operador de Krawczyk</i>	45
2.4.3	<i>Aplicações</i>	48
3	TEOREMAS DE VALIDAÇÃO	51
3.1	O espaço $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)$	51
3.2	Espaços produto	55
3.3	Reformulação do sistema de EDO's	57
3.4	Newton-Kantorovich	58
3.4.1	<i>Prova do item (I) do teorema 6</i>	60
3.4.2	<i>Prova do item (II) do teorema 6</i>	65
3.5	Resultados práticos	67
3.5.1	<i>Calculando K</i>	67
3.5.2	<i>Calculando N</i>	68
3.5.3	<i>Calculando v</i>	68
3.5.4	<i>Calculando η</i>	71
4	APLICAÇÕES EM PVI'S	73
4.1	Sistemas de EDO's lineares	74
4.2	Sistemas de EDO's não lineares	77
5	APLICAÇÕES EM PVF'S	83
5.1	Sistemas de EDO's lineares	83
5.2	Sistemas de EDO's não lineares	87
6	CONCLUSÕES	101

REFERÊNCIAS 103

INTRODUÇÃO

A área de provas assistidas por computadores é a área da matemática responsável por produzir provas matemáticas rigorosas utilizando computadores. Tais técnicas possuem como principal objetivo a utilização do poder computacional disponível para atacar problemas que são considerados difíceis para um humano sem perder o rigor das demonstrações matemáticas. Quando dizemos rigor estamos explicitando principalmente que as técnicas computacionais aplicadas impedem que os erros cometidos pelo computador invalidem a demonstração no sentido formal. Seguindo o aumento do poder computacional dos últimos anos podemos citar como problemas resolvidos com técnicas de provas assistidas por computadores: o Teorema das quatro cores proposto em 1852 e provado nos trabalhos [[Kenneth e Haken 1977](#), [Appel et al. 1977](#)]; a Conjectura de Kepler enunciada em 1611 e provada em [[Hales 2005](#)]; O décimo quarto problema do século 20 segundo Smale, enunciado por Edward Lorenz em 1963 e resolvido em [[Tucker 2002](#)], dentre muitos outros.

Dentre as técnicas utilizadas nas provas assistidas por computadores podemos destacar a aritmética intervalar. Sua base simples de pensamento, que consiste em operar com intervalos como se fossem números, permitiu um avanço significativo nesta área. Tem-se indícios da utilização de intervalos para representação e cálculo de números reais desde [[Moore 1959](#)]. Mas só na tese de doutorado [[Moore 1962](#)] tais técnicas ganharam relevância no contexto de problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias. Neste trabalho, [[Moore 1962](#), pg. 58], é considerando o problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ em \mathbb{R}^m sendo f contínua na primeira variável, $x \in \mathbb{R}$, e Lipschitziana na segunda variável, $y \in \mathbb{R}^m$. Nele é desenvolvido um método baseado na aritmética intervalar para o cálculo de um intervalo X^* que contém a solução teórica x^* do problema, o que traduz a ideia geral das técnicas de validação de soluções numéricas dentro das técnicas de provas assistidas por computadores. Uma lista das primeiras contribuições de Moore para área encontra-se em [[Hansen 2001](#)].

Os métodos de validação de soluções numéricas, isto é, utilizar o computador para

verificar se próximo a solução numérica obtida existe uma solução teórica do problema, em sua maioria apropriam-se dos teoremas de ponto fixo para garantir a existência de uma solução teórica em uma vizinhança da solução numérica. Assim além da localização da solução teórica também sabemos estimar o erro em relação a solução numérica. O computador é utilizado dentro de tais técnicas para calcular soluções numéricas e verificar rigorosamente as estimativas, por aritmética intervalar, referentes aos resultados teóricos.

O objetivo deste trabalho é propor um método de validação de soluções numéricas para sistemas de equações diferenciais ordinárias que contemple problemas de valor inicial e problemas de valor de fronteira. Nossa abordagem basea-se no resultado [[Kantorovitch 1939](#)] que estabelece condições semi-locais de convergência do método de Newton. Através das raízes do polinômio de Kantorovich é possível determinar os raios de existência e unicidade para zeros de uma aplicação Fréchet diferenciável em um aberto em um espaço de Banach. Para verificar rigorosamente as condições do teorema de Newton-Kantorovich no computador usamos a aritmética intervalar. Para tal objetivo, determinamos no capítulo 2 as noções iniciais para o estudo do método. Nele utilizaremos como alicerce o teorema de ponto fixo de Brouwer para validar soluções numéricas através do operador de Krawczyk e a aritmética intervalar. Esperamos que a leitura deste capítulo sirva como chute inicial sobre as técnicas de validação de soluções numéricas. No capítulo 3 apresentamos a descrição do método principal deste trabalho. Neste capítulo foram condensados os resultados teóricos necessários para implementação do método. Ao final espera-se que o leitor adquira as noções teóricas para entendimento das aplicações nos capítulos seguintes. No capítulo 4 aplicamos os resultados do capítulo 3 na validação de soluções numéricas de problemas de valor inicial. Para o melhor entendimento, este capítulo foi dividido entre sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares e não lineares. Na seção de equações diferenciais ordinárias lineares são apresentadas as soluções teóricas juntamente com as numéricas para uma análise mais detalhada do método proposto. Já nas equações não lineares, utilizamos diretamente o método de validação de soluções numéricas proposto para verificar se as soluções numéricas obtidas pelo MATLAB [[MATLAB 2016](#)] estão próximas a soluções teóricas dos respectivos problemas. No capítulo 5 tratamos dos problemas de valores de fronteira. Assim como no capítulo 4 separamos este capítulo entre sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares e não lineares, fornecendo as soluções teóricas nos casos lineares. Após da aplicação do método proposto neste trabalho em diversas situações, equações diferenciais ordinárias lineares e não lineares, ordem 2, 3 e 4, problemas de valor inicial e problemas de valor de fronteira, constatamos sua eficácia.

PRELIMINARES

2.1 Espaços Vetoriais Normados

Definição 1. Um espaço vetorial normado sobre o corpo \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), é um par $(X, \|\cdot\|)$, onde X é um espaço vetorial e $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ é a função norma em X , isto é, $X \neq \emptyset$ e satisfaz

- $x + y, \lambda z \in X$ para $x, y, z \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$;
- $x + y = y + x$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ para $x, y, z \in X$;
- existe $0_X \in X$ tal que $0_X + x = x$, para $x \in X$;
- para cada $x \in X$ existe $(-x) \in X$ tal que $x + (-x) = 0_X$;
- se $1 \in \mathbb{K}$ é o elemento neutro multiplicativo de \mathbb{K} então $1 \cdot x = x$ para $x \in X$;
- $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$, $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ e $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ para $x, y \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

além disso, para $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ a função $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ cumpre

- $x \neq 0_X \Rightarrow \|x\| \neq 0$;
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ sendo $|\lambda| = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$ com $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$ no caso complexo;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Usaremos a notação $(X, \|\cdot\|_X)$ para indicar que a função norma está atuando em X sempre que existir possibilidade de confusão. Além disso, no decorrer deste trabalharemos o corpo \mathbb{K} será sempre \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Ao leitor não familiarizado com os conceitos básicos de álgebra linear indicamos como referência [Coelho e Lourenco 2007]. Abaixo definiremos mais algumas noções básicas para este trabalho.

Definição 2. Considere $(X, \|\cdot\|)$ espaço vetorial normado sobre o corpo \mathbb{K} .

- $B(a, r) := \{x \in X : \|x - a\| < r\}$ é a bola aberta de centro em $a \in X$ e raio $r > 0$;
- $\overline{B(a, r)} := \{x \in X : \|x - a\| \leq r\}$ é a bola fechada de centro em $a \in X$ e raio $r > 0$;
- $U \subset X$ é dito aberto se para todo $x \in U$ existe uma bola aberta $B(x, r) \subset U$;
- $V \subset X$ é dito uma vizinhança de $x \in X$ se existe um aberto $U \subset V$ contendo x ;
- $F \subset X$ é dito fechado se $F^c := X \setminus F = \{x \in X : x \notin F\}$ é aberto em X ;
- A sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ é dita sequência de Cauchy em X se para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ sempre que $m, n > n_0$;
- A sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converge para x na norma de X se para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$. Neste caso escrevemos $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ ou equivalentemente $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0$;
- O fecho de A em X é o conjunto \bar{A} dos elementos $x \in X$ tais que x é limite de uma sequência de elementos em A ;
- O interior de A em X é o conjunto $\text{int}(A)$ dos elementos $a \in A$ tais que existe uma bola aberta $B(a, r) \subset A$.
- A é dito compacto se toda família $\{A_i\}_{i \in \Lambda}$ de abertos em X tal que $A \subset \cup_{i \in \Lambda} A_i$ possui uma subfamília finita, digamos A_{i_1}, \dots, A_{i_n} , satisfazendo $A \subset \cup_{j=1}^n A_{i_j}$;
- $A \subset X$ é dito desconexo se existem subconjuntos $B, C \subset X$ tais que $A = B \cup C$ com $\bar{B} \cap C = \emptyset$ e $B \cap \bar{C} = \emptyset$. Caso contrário A é dito conexo;
- $A \subset X$ é dito convexo se dados $a, b \in A$ temos $\{\lambda a + (1 - \lambda)b : \lambda \in [0, 1]\} \subset A$.

A Definição 2 é bastante extensa, porém fixados tais conceitos e notações, espera-se que o leitor tenha conhecimento dos resultados básicos da teoria de espaços normados. Para mais resultados básicos indicamos [Lima 2009]. Os conceitos abaixo também são essenciais quando tratamos de espaços vetoriais normados.

Definição 3. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado sobre o corpo \mathbb{K} .

1. uma combinação linear em X é uma soma finita $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \in X$ com $\alpha_i \in \mathbb{K}$ e $x_i \in X$ para $1 \leq i \leq n$;
2. $A \subset X$ não vazio, é dito linearmente independente se toda quantidade finita de elementos $x_1, \dots, x_n \in A$ satisfazendo $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ implica que $\alpha_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Caso contrário é dito linearmente dependente;

3. $B \subset X$ base de Hamel de X , se é um conjunto linearmente independente em X e dado $x \in X$ não nulo existem únicos $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ (não nulos) e $b_1, \dots, b_n \in B$ tais que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$;
4. X é dito de dimensão finita, $\dim(X) < \infty$, se alguma de suas bases algébricas possui um número finito de elementos;
5. uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ é dita produto interno se
 - (a) $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$ para todo $v, u, w \in X$;
 - (b) $\langle \lambda u, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u, w \in X$;
 - (c) $\langle u, w \rangle = \overline{\langle w, u \rangle}$ para todo $u, w \in X$;
 - (d) $\langle u, u \rangle$ é um número real positivo se $u \in X$ e u é não nulo;
6. $u, v \in X$ são ditos ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$;
7. $B \subset X$ é dito ortogonal se seus elementos são dois a dois ortogonais. Além disso, se B é ortogonal e $\langle u, u \rangle = 1$ para todo $u \in B$ então B é dito ortonormal.

Observação 1. 1. Todo espaço vetorial X não trivial sobre \mathbb{K} , isto é, $X \neq \{0\}$ possui base de Hamel, ver [Charalambos D. A.; Border 2006, 1.8 Theorem, pg. 15]. Para o caso $X = \{0\}$, a base de Hamel de X é o conjunto vazio;

2. Se alguma das bases de Hamel de um espaço vetorial X for finita, digamos com $n \in \mathbb{N}$ elementos, então todas as demais bases de Hamel deste espaço possuem n elementos, ver [Lima 2006, Corolário 2, pg. 30]. Assim o número $\dim(X)$ está bem definido, além disso pode ser finito, $\dim(X) < \infty$, ou infinito, $\dim(X) = \infty$;
3. Utilizando a base de Hamel de um espaço vetorial X sobre \mathbb{K} , definimos um produto interno multiplicando coeficiente por coeficiente. De fato, supondo que $B = \{b_i\}_{i \in \Lambda}$ é uma base de Hamel para o espaço vetorial não trivial X indexada em Λ , dados $x, y \in X$ podemos escrever $x = \sum_{i \in \Lambda} \alpha_i b_i$ e $y = \sum_{i \in \Lambda} \beta_i b_i$. Segue de [Bachman e Narici 2000, Theorem 9.1, pg. 139] e da definição da base de Hamel que apenas uma quantidade finita de α'_i 's e β'_i 's são não nulos, mais ainda, os α'_i 's e β'_i 's são unicamente determinados. Assim é simples verificar que a aplicação $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in \Lambda} \alpha_i \beta_i$ está bem definida e representa um produto interno em X ;
4. Através do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em X definimos a norma $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ para $u \in X$;
5. Nem toda norma $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ provém de um produto interno. Tal afirmação é consequência da Lei do Paralelogramo, ver [Kreyszig 1978, pg. 130];
6. Se $B \subset X$ é um conjunto ortogonal então B é linearmente independente;

7. Se $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço normado com produto interno vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ para $u, v \in X$, ver [Kreyszig 1978, 3.2-1 Lemma, pg. 136].

Em relação a regularidade das aplicações entre espaços normados, segue a próxima definição.

Definição 4. Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços vetoriais normados sobre o mesmo corpo \mathbb{K} e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre espaços vetoriais. Então

1. f é limitada em X se existe $M > 0$ tal que $\|f(x)\|_Y \leq M$ para $x \in X$;
2. f é injetiva se dados $x, y \in X$ com $f(x) = f(y)$ então $x = y$;
3. f é sobrejetiva se dado $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$;
4. f é contínua em $x_0 \in X$, se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que

$$\|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Caso contrário dizemos que f é descontínua em x_0 ;

5. f é contínua em X , ou apenas contínua, se é contínua em todos os elementos de X ;
6. f é uniformemente contínua em X , ou apenas uniformemente contínua, se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para $x, y \in X$ com $\|x - y\|_X < \delta$ tem-se $\|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon$;
7. f é Lipschitziana em X , ou apenas Lipschitziana, se existe $K > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\|_Y \leq K\|x - y\|_X$, para $x, y \in X$;
8. Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua e possui inversa, digamos $f^{-1} : Y \rightarrow X$, também contínua, então f é dita homeomorfismo entre X e Y ;
9. Se $f : X \rightarrow Y$ preserva a distância, isto é, $\|f(x) - f(y)\|_Y = \|x - y\|_X$ para $x, y \in X$ dizemos que f é uma isometria entre X e Y ;

O próximo resultado é uma consequência definição 4.

Proposição 1. Se $f : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ uma aplicação entre espaços vetoriais normados sobre o mesmo corpo \mathbb{K} então

$$f \text{ é isometria} \Rightarrow f \text{ é Lipschitziana} \Rightarrow f \text{ é uniformemente contínua} \Rightarrow f \text{ é contínua.}$$

Observação 2. 1. Na Definição 4 não existe prejuízo em considerarmos a aplicação f definida em um subconjunto A de X ;

2. Considere como em [Lima 2009, pg. 150] $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Segue que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porém não é uniformemente contínua, pois escolhendo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}$, tem-se $|f(x) - f(-x)| = 2$. Como consequência da negação Proposição 1, f não é Lipschitziana. Ou seja, f é contínua porém não é uniformemente contínua, nem Lipschitziana e nem isometria;
3. Ainda em [Lima 2009, pg. 151] temos o exemplo clássico de aplicação uniformemente contínua que não é Lipschitziana, a função $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$;
4. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma isometria entre X e Y então f é injetiva pois $0 = \|f(x) - f(y)\|_Y = \|x - y\|_X$ implica que $x = y$;

Dentre as aplicações que atuam entre espaços vetoriais podemos destacar as chamadas transformações lineares, ou operadores lineares, como veremos a seguir.

Definição 5. Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços vetoriais normados sobre o mesmo corpo \mathbb{K} . Uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ é dita uma transformação linear, ou operador linear, entre os espaços vetoriais X e Y se

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \text{ e } T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

para $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Caso $T : X \rightarrow \mathbb{K}$ dizemos que T é um funcional linear.

A definição de continuidade dada na Definição 4 não enfatiza os ganhos que as propriedades algébricas dos espaços vetoriais juntamente com a linearidade das transformações lineares trazem para o conceito. Sendo assim, o próximo resultado é o mais requisitado.

Proposição 2. Seja $T : X \rightarrow Y$ uma transformação linear entre espaços vetoriais normados $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sobre o mesmo corpo \mathbb{K} . As seguintes afirmações são equivalentes

1. T é contínua;
2. T é contínuo em algum elemento de X ;
3. T é contínuo na origem de X ;
4. $\|T\| := \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X, x \neq 0_X \right\} < \infty$;
5. Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$, para todo $x \in X$;
6. T é Lipschitziano;
7. T é uniformemente contínuo.

Demonstração. Ver [Conway 1990, Proposição 2.1, pg. 68].

□

Observação 3. 1. Se $T : X \rightarrow Y$ é uma transformação linear contínua como na Proposição 2 então T leva subconjuntos limitados de X em subconjuntos limitados de Y , pelo item 5. Porém se T não é identicamente nula sua imagem não é limitada, pois $nT(x) = T(nx) \in \text{Im}(T) \subset Y$, para $x \in X \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, a transformação linear contínua T não é limitada no sentido da Definição 4 como uma aplicação entre X e Y ;

2. Considere o espaço vetorial normado real dos polinômios com uma variável definidos no intervalo $[0, 1]$, isto é, $(\mathcal{P}[0, 1], \|\cdot\|)$, onde $\|\cdot\| : \mathcal{P}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, é dada por $\|p\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |p(x)|$, para $p \in \mathcal{P}[0, 1]$. O funcional linear $T : \mathcal{P}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(p) = p(2)$ para $p \in \mathcal{P}[0, 1]$, é descontínuo neste espaço. De fato, pela Proposição 2 basta mostrar que T descontínuo na origem, isto é, no polinômio identicamente nulo $0_{\mathcal{P}}$. A sequência de polinômios $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}} := \left(\frac{x^n}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}[0, 1]$ converge para $0_{\mathcal{P}}$, pois $\|p_n - 0_{\mathcal{P}}\| = \frac{1}{2^n}$, para $n \in \mathbb{N}$. Porém, $|T(p_n) - T(0_{\mathcal{P}})| = |T(p_n)| = p_n(2) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 6. Sejam $(X, \|\cdot\|_1)$ e $(X, \|\cdot\|_2)$ espaços vetoriais normados sobre mesmo corpo \mathbb{K} . Dizemos que as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sobre o espaço vetorial X são equivalentes se existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \quad (2.2)$$

para todo $x \in X$.

Proposição 3. Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ normas equivalentes sobre o espaço vetorial X , isto é, existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$ para todo $x \in X$. Então a aplicação identidade $i_{1,2} : X_1 \rightarrow X_2$ e sua inversa $i_{2,1} : X_2 \rightarrow X_1$ são contínuas, onde $X_1 := (X, \|\cdot\|_1)$ e $X_2 := (X, \|\cdot\|_2)$. Neste caso $i_{1,2}$ é uma transformação linear contínua com inversa contínua, e será chamado de isomorfismo entre X_1 e X_2 , e denotamos por $X_1 \cong X_2$ o símbolo para indicar que tais espaços são isomorfos.

Demonstração. O resultado segue diretamente de (2.2) e da Proposição 2. \square

Observação 4. Fixadas duas normas equivalentes no espaço vetorial X digamos $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$. Através da identidade $i_{1,2} : X_1 \rightarrow X_2$ e da sua inversa $i_{2,1} : X_2 \rightarrow X_1$, onde $X_1 := (X, \|\cdot\|_1)$ e $X_2 := (X, \|\cdot\|_2)$, dizemos que os espaços vetoriais X_1 e X_2 são os mesmos a menos de um isomorfismo. Assim podemos verificar que os vetoriais normados X_1 e X_2 conservam os mesmos abertos, fechados e noções de convergência.

Dentre os espaços vetoriais normados podemos destacar o que mais serão usados neste trabalho, tema da próxima definição.

Definição 7. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado sobre um corpo \mathbb{K} . Dizemos que $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em $(X, \|\cdot\|)$ é convergente em X , isto é, converge para um elemento em X na norma de X . E ainda se $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach

com produto interno, isto é, a norma $\|\cdot\|$ de X provém de um produto interno dizemos que X é um espaço de Hilbert.

A aparente simplicidade da Definição 7 possui profundas implicações dentro da Matemática, gerando uma gama de espaços vetoriais que possuem utilidade teórica (Análise Funcional e suas variações) e prática (estudo de equações diferenciais), como mostraremos no decorrer deste trabalho. Abaixo exibiremos alguns espaços vetoriais que serão encontrados neste trabalho.

Definição 8. 1. O conjunto $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$, das seqüências de números reais $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ munido com as operações usuais de soma, multiplicação por escalar e tal que

$$\|a\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} < \infty \quad (2.3)$$

para toda $a \in \ell^p(\mathbb{N})$ é um espaço vetorial normado. O mesmo podemos dizer a respeito do conjunto $\ell^\infty(\mathbb{N})$ das seqüências limitadas de números reais com norma do supremo, isto é, $\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty$ para toda $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$;

2. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida positiva com \mathcal{A} uma σ -álgebra em Ω . O conjunto $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ mensuráveis, munido das operações usuais de soma, subtração e multiplicação por escalar ponto a ponto, tais que duas funções são consideradas iguais em μ -q.t.p., e

$$\|f\|_\infty := \inf\{c > 0 / |f(x)| \leq c \text{ em } \mu\text{-q.t.p. } x \in \Omega\} = \sup \text{ess}(f) < \infty \quad (2.4)$$

para toda $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Dado $1 \leq p < \infty$, seja $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : U \rightarrow \mathbb{K}$, munido das operações usuais de soma, subtração e multiplicação por escalar ponto a ponto, tais que duas funções são consideradas iguais em μ -q.t.p., e

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty \quad (2.5)$$

para toda $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Os conjuntos $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, são espaços vetoriais normados sobre \mathbb{K} . No caso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, μ é a medida de Lebesgue na σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}^n escreveremos somente $L^p(\Omega)$;

3. Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Definindo pontualmente a soma de transformações lineares e a multiplicação por escalar, o conjunto $\mathcal{L}(X, Y)$ das transformações lineares contínuas $T : X \rightarrow Y$, é um espaço vetorial. Mais ainda, considerando $\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$ como na Proposição 2 item 4, $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)})$ é um espaço vetorial normado;

4. Dado o aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto $\mathbf{C}^0(U)$ das funções contínuas $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ munido com a norma do supremo, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in U} |f(x)| < \infty$, é um espaço vetorial normado e será denotado por $(\mathbf{C}^0(U), \|\cdot\|_{\mathbf{C}^0(U)})$. Dado $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{C}^k(\bar{U})$ é o conjunto das funções

cujas derivadas parciais até a ordem k são limitadas e uniformemente contínuas em U . Consideramos $\mathbf{C}^k(\bar{U})$ munido com a norma

$$\|f\|_{\mathbf{C}^k(\bar{U})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\| \quad (2.6)$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ com $\alpha_i \geq 0$, $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$, $D^0 f = f$ e $D^\alpha = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \right) \times \dots \times \left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right)$, tal conjunto é um espaço vetorial normado;

5. O conjunto $H^1(I)$ onde $I = (a, b)$ é um intervalo real não degenerado, é o conjunto das funções $u \in L^2(I)$ tal que existe $v \in L^2(I)$ satisfazendo

$$\int_I u(x) \phi'(x) dx = - \int_I v(x) \phi(x) dx$$

para toda $\phi \in \mathbf{C}_c^\infty(I)$, onde $\mathbf{C}_c^\infty(I)$ é o conjunto das funções $g \in \mathbf{C}^\infty(I)$ tais que existe um intervalo fechado $J \subset I$ contendo o suporte de g , isto é, $\text{supp}(g) := \overline{\{x \in I : g(x) \neq 0\}} \subset J$. O conjunto $H^1(I)$ com as operações usuais de funções ponto a ponto é um espaço vetorial e será chamado de espaço de Sobolev. A função v acima é dita derivada fraca de u , e denotada por $v = u'$. Note que ela é única e estende a noção usual de derivada, no seguinte sentido, se uma função tem derivada (usual) então ela tem derivada fraca e elas coincidem. Mais ainda, $H^1(I)$ é um espaço vetorial normado definindo o produto interno e norma $\langle u, v \rangle_{H^1(I)} = \langle u, v \rangle_{L^2(I)} + \langle u', v' \rangle_{L^2(I)}$ e $\|u\|_{H^1(I)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^1(I)}} = \sqrt{\|u\|_{L^2(I)}^2 + \|u'\|_{L^2(I)}^2}$ para $u, v \in H^1(I)$.

Algumas observações sobre os espaços vetoriais normados definidos acima.

Observação 5. 1. O conjunto $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq \infty$, é um espaço de Banach, [Biezuner 2009, Prop. 1.11, pg. 5]. Porém tais espaços são Hilberts somente para o caso $p = 2$, pois pela Lei do Paralelogramo se $x = (1, 1, 0, \dots), y = (1, -1, 0, \dots) \in \ell^p(\mathbb{N})$ então

$$\begin{cases} \|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 8, & \text{para } 1 \leq p \leq \infty \\ 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) = \begin{cases} 4 \cdot 2^{\frac{2}{p}}, & \text{para } 1 \leq p < \infty \\ 4, & \text{para } p = \infty. \end{cases} \end{cases}$$

2. Os conjuntos $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach [Biezuner 2009, Props. 1.14 e 1.15, pgs.7 e 8]. Assim como no caso dos espaços de seqüências acima, tais espaços são Hilberts se, e somente se, $p = 2$. De fato, se $A, B \subset \Omega$ são mensuráveis e disjuntos com $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$ e χ_A e χ_B são suas respectivas funções características (1 dentro e 0 fora) então definindo as funções

$$f_A(x) = \begin{cases} \frac{\chi_A(x)}{\mu(A)^{1/p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \chi_A(x), & \text{se } p = \infty \end{cases} \quad g_B(x) = \begin{cases} \frac{\chi_B(x)}{\mu(B)^{1/p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \chi_B(x), & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

e usando a desigualdade do Paralelogramo, obtemos que $p = 2$. Se $p = 2$ definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \times L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x) d\mu(x)$, para $f, g \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, e verificamos que é um produto interno neste espaço, sendo $\|\cdot\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)}$ a norma que provém de tal produto interno;

3. Se Y é espaço de Banach então $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)})$ também é Banach [Oliveira 2010, Teorema 4.5, pg. 27];
4. Dados o aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$ verificamos que os conjuntos $\mathbf{C}^0(U)$, $\mathbf{C}^k(\bar{U})$ e $\mathbf{C}^\infty(U)$ são espaços de Banach;
5. O Sobolev $H^1(I)$ é um espaço de Hilbert, ver [Brezis 2011, Proposition 8.1, pg. 203].

Como foi visto anteriormente, todo espaço vetorial não trivial sobre o corpo \mathbb{K} possui base de Hamel. Por isso tradicionalmente este tipo de conjunto em um espaço vetorial normado é chamado somente por base. Porém dentro do contexto computacional nos espaços de funções esta base não é de grande utilidade, como mostra o próximo resultado.

Proposição 4. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach sobre o corpo \mathbb{K} com $\dim(X) = \infty$. Então as bases de Hamel de X são não enumeráveis.

Demonstração. Ver [Botelho, Pellegrino e Teixeira 2012, Proposição 10.3.1, pg. 313]. \square

Neste texto quando dizemos base, é do próximo conceito que estamos nos referirmos.

Definição 9. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach sobre o corpo \mathbb{K} . Uma sequência $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X é dita base de Schauder, ou simplesmente base, se dado $x \in X$ existe uma única sequência de coeficientes $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{K} tal que $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n$, ou seja, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$.

Observação 6. 1. A convergência $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$ é na norma de X , isto é, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \Leftrightarrow \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;

2. Em espaços vetoriais normados de dimensão finita, $\dim(X) < \infty$, as bases de Hamel e Schauder coincidem;
3. Um espaço vetorial normado com um subconjunto enumerável e denso é dito separável. Todo espaço de Banach com base de Schauder é separável;
4. O espaço dual de X é definido por $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$. Denotamos por $X'' = (X')'$ o bidual de X . Como já foi visto, ambos X' e X'' são espaços de Banach. Assim estabelecemos a isometria linear $J_X : X \rightarrow X''$ dada por $J_X(x)(\phi) = \phi(x)$ para todo $x \in X$ e $\phi \in X'$. Se J_X for sobrejetor, dizemos que X é reflexivo;

5. Como todo espaço normado reflexivo é um espaço de Banach, uma afirmação natural é que um espaço normado reflexível e separável possui base de Schauder. Porém segue de [Enflo 1973] que existem espaços de Banach reflexíveis e separáveis que não possuem base de Schauder.

O próximo conceito é essencial para o desenvolvimento do nosso método no próximo capítulo.

Definição 10. Considere os espaços de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sobre o mesmo corpo \mathbb{K} e $U \subset X$ aberto. Uma aplicação $f : U \rightarrow Y$ é Fréchet-diferenciável em $x_0 \in U$ se existe uma transformação linear $T_{x_0} \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - T_{x_0}(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

A transformação linear contínua T_{x_0} é chamada derivada de Fréchet de f em x_0 . Se f é Fréchet-diferenciável em todos os elementos de U , dizemos que f Fréchet-diferenciável em U , e neste caso definimos a aplicação derivada de f por $Df : U \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\mathcal{D}f(x) = T_x$ para $x \in U$.

Definição 11. Considere os espaços de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sobre o mesmo corpo \mathbb{K} e $U \subset X$ aberto. Uma aplicação $f : U \rightarrow Y$ é Gâteaux-diferenciável em $x_0 \in U$ na direção de $v \in X$ se existe o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}.$$

Em caso afirmativo tal limite está em Y será denotado por $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$.

- Observação 7.**
1. A derivada de Fréchet de uma aplicação f entre espaços de Banach é construída de maneira que seja a generalização para derivada em espaços vetoriais com dimensão finita. O mesmo podemos dizer com respeito a derivada de Gâteaux e as derivadas parciais em dimensão finita. Então muita das propriedades estudadas em cálculo são também válidas neste contexto. Uma ótima referência para o cálculo em espaços de Banach é [Cartan 1971];
 2. Um dos resultados importantes no Cálculo que não vale no contexto do cálculo em espaços de Banach é o Teorema do Valor Médio. Para espaços de Banach o análogo é a desigualdade do valor médio ver (ver [Cartan 1971, Theorem 3.3.2, pg. 41]).

2.2 Equações diferenciais ordinárias

Nesta seção trataremos de algumas noções básica sobre equações diferenciais ordinárias (EDO's), orientadas para o capítulo 2. Para um estudo mais aprofundado recomendamos que o leitor veja [Hale 1980, Chicone 2006].

Definição 12. Seja $J \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, e $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$ conjuntos abertos, e seja $f : J \times U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$. Uma equação da forma

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda) \quad (2.7)$$

onde \dot{x} representa a derivada de x com relação a variável t , é dita uma equação diferencial ordinária (EDO). Quando x e f forem vetores em \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, a equação (2.7) também será chamada de sistema de equações diferenciais. Classificamos (2.7) como

1. autônoma se $f(t, x, \lambda) = f(x, \lambda)$, isto é, f não depende explicitamente de t . Caso contrário é dita não autônoma;
2. linear se $f(t, x, \lambda) = A(t, \lambda)x + g(t, \lambda)$, onde $A = A(t, \lambda)$ é uma matriz de ordem n , e $g : J \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$. Caso contrário, dizemos que (2.7) é não linear;
3. homogênea se o termo $g = g(t, \lambda)$ é identicamente nulo.

Definição 13. Fixado o parâmetro $\lambda_0 \in \Lambda$, uma solução para (2.7) no intervalo $I \subset J$, é uma aplicação diferenciável $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, que satisfaz

1. $(t, x(t), \lambda_0) \in J \times U \times \Lambda, \forall t \in I$;
2. $x'(t) = f(t, x(t), \lambda_0), \forall t \in I$,

onde $\dot{x}(t) = x'(t) = \frac{d}{dt}x(t)$.

Observação 8. A escolha de apresentar neste trabalho sistemas de primeira ordem (derivada primeira com relação a t) não é uma particularização, pois o caso geral (derivada n -ésima com relação a t) $y^{(n)} = F(t, y, \dots, y^{(n-1)})$, se resume a equação equivalente (2.7) pela mudança $x = (y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})$ e $f(x_2, \dots, x_n, F)$, ver [Hale 1980, pg. 14].

Para o estudo das propriedades referentes a equação diferencial (2.7), ou sistema de equações diferenciais, são considerados dois tipos condições "extras" que uma solução deve satisfazer, como veremos abaixo.

Definição 14. Dizemos que

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda_0) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

é um problema de valor inicial (PVI) para (2.7). Isto é, fixados $\lambda_0 \in \Lambda$, $t_0 \in J$ e $x_0 \in U$ desejamos determinar a solução de $\dot{x} = f(t, x, \lambda_0)$ tal que $x(t_0) = x_0$. Fixados $\lambda_0 \in \Lambda$, $t_0, L \in J$, $t_0 < L$, e $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $\beta \in \mathbb{R}^p$, dizemos que

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda_0) \\ Ax(t_0) = \alpha, Bx(L) = \beta, \end{cases} \quad (2.9)$$

é um problema de valor de fronteira (PVF) para (2.7), com $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$. Assim como no caso do PVI, desejamos determinar a solução de $\dot{x} = f(t, x, \lambda_0)$ tal que $Ax(t_0) = \alpha$ e $Bx(t_1) = \beta$.

Fixado $\lambda_0 \in \Lambda$, consideraremos $f(t, x, \lambda_0) = f(t, x)$ no PVI (2.8) para o próximo resultado.

Teorema 1 (Existência e unicidade de soluções para PVI's). Se a aplicação $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ no PVI (2.8) é contínua e Lipchitziana com respeito a x , fixados $t_0 \in J$ e $x_0 \in U$ existe um intervalo aberto $J_0 \subset J$, $t_0 \in J_0$, e uma única aplicação diferenciável $u : J_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ solução para o PVI (2.8). Em particular, se f é C^k , $k \in \mathbb{N}$, então o PVI (2.8) também possui somente uma solução.

Demonstração. Ver [Chicone 2006, Teorema 1.261, pg. 138]. □

Observação 9. 1. Um exemplo clássico que ilustra a importância da hipótese de f ser Lipchitziana com respeito a segunda variável consiste no PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) = |x|^{\frac{1}{2}} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Ele possui como soluções as funções $x_1 \equiv 0$ (identicamente nula) e

$$x_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2, & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{4}t^2, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Como $f(x) = |x|^{\frac{1}{2}} > |x|$ para $0 < |x| < 1$ então f não é Lipchitziana em qualquer vizinhança próxima ao zero;

2. No caso dos PVF's a caracterização de existência e unicidade é bem mais complicada podemos citar [Gingold et al. 1978, Keller 1976] como referencias, porém não possui um Teorema geral como no caso dos PVI's. Por exemplo, considere a equação

$$y'' + y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -x. \end{cases} \quad (2.10)$$

O PVI de (2.10) com a condição $(x(0), y(0)) = (a, b)$ tem solução única pelo Teorema 1 (a menos de reparametrização), dada por $u(t) = (\rho \sin(t + \theta), \rho \cos(t + \theta))$ com $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = \arctg(a/b)$ para $t \in \mathbb{R}$ se $b \neq 0$. Porém o PVF (2.10) com as condições

- a) $x(0) = 1 = x(\frac{\pi}{2})$, possui somente uma solução;
- b) $x(0) = 1 = x(\pi)$, não possui solução;
- c) $x(0) = 1 = x(2\pi)$, possui infinitas soluções.

Exemplificando o fato que mesmo sendo $f = f(t, x) \in \mathbf{C}^\infty$, para os casos de PVF's garantir existência e/ou unicidade não é tão fácil como para PVI's;

3. Ao analisar as hipóteses do Teorema 1 e sua demonstração, somos levados a acreditar que trocando \mathbb{R}^n por um espaço de Banach qualquer X ainda preservamos a existência e/ou unicidade de soluções. Porém tal afirmação não é válida, como mostra o seguinte exemplo retirado de [Schäfer 2014, Example 9.3, pg. 114]. Considere o espaço de Banach $\mathbf{c}_0 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ munido com a norma do supremo $\|\cdot\|_\infty$. Sejam $0 < T \leq 2$ e $a_0 = (1, 1/2, \dots, 1/n, \dots) \in \mathbf{c}_0$. Defina $f : [0, T] \times \mathbf{c}_0 \rightarrow \mathbf{c}_0$ por $f(t, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (f_m(t, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}))_{m \in \mathbb{N}}$ onde

$$f_m(t, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_m \leq 0 \\ \sqrt{x_m} & \text{se } 0 \leq x_m \leq 4 \\ 2 & \text{se } 4 \leq x_m. \end{cases}$$

Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero então f está bem definida. Além disso, f não depende de t , logo é contínua. Vamos mostrar que o PVI

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(0) = a_0 \end{cases}$$

não possui solução. De fato, suponha por absurdo que existe solução, digamos $u : [0, T] \rightarrow \mathbf{c}_0$ dada por $u(t) = (u_m(t))_{m \in \mathbb{N}}$ para $t \in [0, T]$ e $u_m(0) = 1/m$ para $m \in \mathbb{N}$. Integrando

$$u'_m(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } u_m(t) \leq 0 \\ \sqrt{u_m(t)} & \text{se } 0 \leq u_m(t) \leq 4 \\ 2 & \text{se } 4 \leq u_m(t) \end{cases}$$

obtemos $u_m(t) = (t/2 + 1/\sqrt{m})^2$ para $0 \leq t \leq T \leq 2$. Porém $\lim_{m \rightarrow \infty} u_m(t) = t^2/2 > 0$ implica que $u \notin \mathbf{c}_0$ contradizendo a hipótese. Portanto tal PVI não possui solução;

4. O PVF (5.6) é considerado na literatura como separado. Outra maneira de definir as condições (valores) de fronteira para EDO's é através das condições combinadas, isto é, $g(x(t_0), x(t_1)) = 0$ onde $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Não trataremos PVF's com condições combinadas neste trabalho.

Na literatura existem vários métodos para obter soluções de equações diferenciais ordinárias. Em sua maioria tais métodos tratam somente casos lineares. Os casos não lineares, que representam de fato modelos mais próximos da realidade, são extremamente difíceis de serem resolvidos, o que motiva nossa próxima seção.

2.3 Soluções numéricas

Considerando a análise numérica subárea da matemática que estuda algoritmos para calcular expressões numéricas [Scott 2011, pg. xi], um método numérico é uma sequência de regras (algoritmos) desenvolvidos para resolver um problema de análise numérica. Assim dada uma equação, ou sistema de equações (diferencial ou não), uma solução numérica pode ser considerada a resposta obtida por um método numérico para resolver tal equação, ou sistema de equações.

Exemplo 1. Para exemplificar tal conceito faremos o seguinte exemplo retirado de [Malajovich 2008, pg. 9]. Considere o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 - \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Ax = b. \quad (2.11)$$

Resolvendo tal sistema através do MATLAB [MATLAB 2016] de maneira simbólica, obtemos

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\varepsilon-1)} \\ \frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)} \\ -\frac{1}{(\varepsilon-1)} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Que representa a solução analítica ou solução teórica para o sistema. Note que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x = (-1, 0, 1)^T$. Para resolver numericamente no MATLAB utilizaremos o seguinte script

Código-fonte 1 – Script para calcular soluções numéricas do sistema (2.11) com fsolve

```
1: clear; clc; close all;
2: % x1 = (1 - x3)/epsilon
3: % x2 = - epsilon*x3
4: % x3 = 1/(1 - epsilon)
5: epsilon = 10^(-20);
6: f = @(x) [x(1) - (1 - x(3))/epsilon, x(2) + epsilon*x(3), x(3)
            - 1/(1-epsilon)];
7: options = optimoptions('fsolve','Display','iter');
8: [x,fval] = fsolve(f, [10,2,3],options)
```

Que retorna

$$\begin{aligned} x &= (0, 0, 1) \\ \text{fval} &= 10^{-20} \times (0, 1, 0). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ou seja, para ε próximo de zero, $\varepsilon = 10^{-20}$, o MATLAB retorna $x = (0, 0, 1)^T$, sendo $\|(0, 0, 1) - (-1, 0, 1)\|_{\mathbb{R}^3} = 1$. Devido aos erros de aproximação, nem sempre as soluções numéricas refletem as soluções reais para os problemas. Utilizamos ε muito pequeno neste caso pois o sistema era

simples. Mas em contextos reais nos quais as matrizes podem ter milhares de entradas é de se esperar que o erro produzido pelos métodos numéricos influenciem mais ainda.

Exemplo 2. Considere o PVF dado em (2.10) com as condições de fronteira $x(0) = 1 = x(\pi)$. Note que foi observado acima que tal PVF não possui solução. Porém utilizando no MATLAB o próximo script que é baseado no solver *bvp4c* obtemos uma solução numérica, ver Figura 1.

Código-fonte 2 – Script para calcular solução numérica do PVF (2.10) com *bvp4c*

```

1: clear; clc; close all; close all force;
2: xmesh = linspace(0,pi);
3: solinit = bvpinit(xmesh, [1.1,1]);
4: sol1 = bvp4c(@bvpfun, @bcfun, solinit);
5: plot(sol1.x,sol1.y(1,:))
6: xlabel('x')
7: ylabel('y')
8: %%% Funções locais %%%%%%%%%%%%%%%
9: function dydx = bvpfun(x,y)
10: dydx = zeros(2,1);
11: dydx = [y(2); -y(1)];
12: end
13:
14: function res = bcfun(ya,yb)
15: res = [ya(1)-1; yb(1)-1];
16: end

```

Imprimindo $sol1.y(1,1) = 1$ e $sol1.y(1,end) = 1$, fica claro que $sol1.y(1,:)$ é de fato uma solução numérica do problema apresentado.

Neste sentido, a validação de soluções numéricas, isto é, utilizar o computador para verificar se próximo a solução numérica obtida existe uma solução analítica (teórica), faz-se necessário. É o que tratará a próxima seção deste trabalho.

2.4 Introdução à Validação Numérica

Nas próximas seções deste capítulo utilizaremos o operador de Krawczyk para validar soluções numéricas de sistemas de equações lineares, isto é, verificar a existência de uma solução teórica em uma vizinhança da solução numérica. Esperamos assim introduzir algumas das ideias que serão utilizadas no capítulo 3 para validar soluções numéricas de sistemas de equações diferenciais ordinárias. Para tal desenvolveremos uma breve introdução sobre aritmética intervalar.

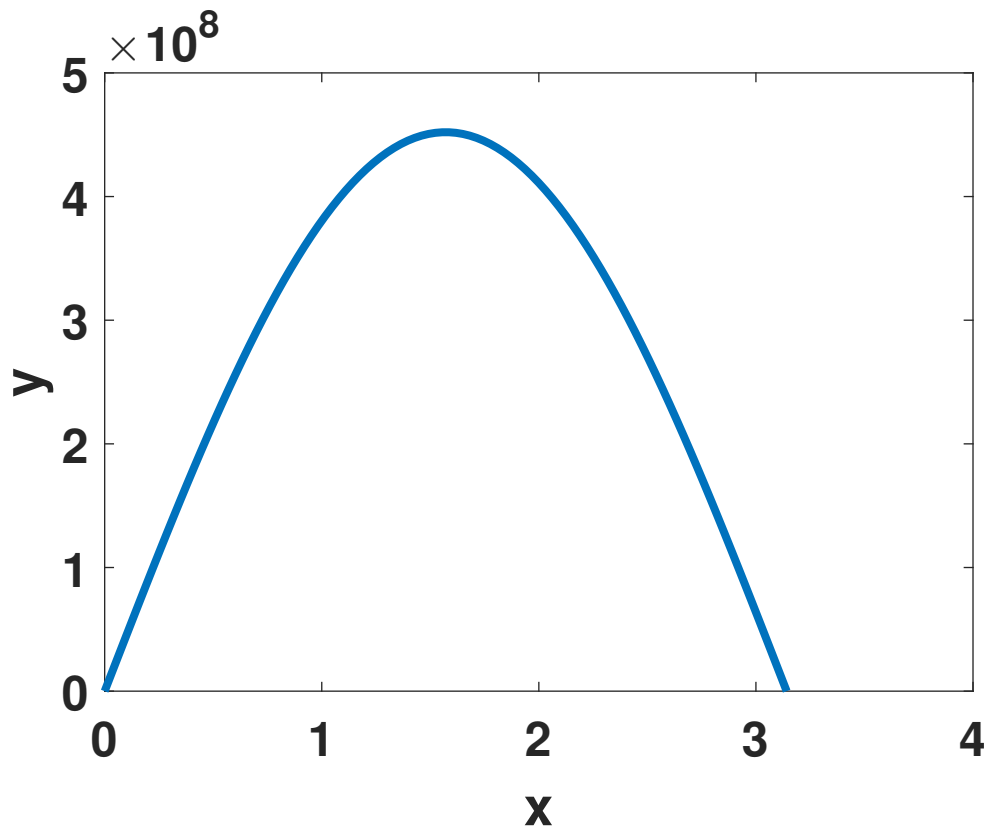


Figura 1 – Solução numérica do PVF (2.10) obtida pelo solver *bvp4c*.

2.4.1 Aritmética Intervalar

Definição 15. Seja $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$, $\underline{x} \leq \bar{x}$, um intervalo fechado em \mathbb{R} . Denotamos por \mathbb{IR} o conjunto de tais intervalos de números reais. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{IR}$ definimos as seguintes operações em \mathbb{IR}

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = [\min(\underline{x} \circ \underline{y}, \underline{x} \circ \bar{y}, \bar{x} \circ \underline{y}, \bar{x} \circ \bar{y}), \max(\underline{x} \circ \underline{y}, \underline{x} \circ \bar{y}, \bar{x} \circ \underline{y}, \bar{x} \circ \bar{y})]$$

para $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$, supondo que $0 \notin \mathbf{y}$ para o caso da divisão.

Observação 10. 1. A definição acima permite a existência do intervalo degenerado $\mathbf{x} = [x, x]$, que é representação de um número real. Além disso, as operações intervalares aplicadas aos intervalos $\mathbf{x} = [x, x]$ coincidem com as operações reais;

2. Uma das principais propriedades das operações intervalares definidas acima é a inclusão, isto é, dados $x \in \mathbf{x}$ e $y \in \mathbf{y}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{IR}$, $x \circ y \in \mathbf{x} \circ \mathbf{y}$, para $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$, supondo que $0 \notin \mathbf{y}$ para o caso da divisão;
3. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{IR}$ outras propriedades básicas que seguem da definição das operações intervalares são

a) Inclusão Isotônica - se $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{z}$ e $\mathbf{y} \subseteq \mathbf{w}$ temos

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} \subseteq \mathbf{z} \circ \mathbf{w} \quad \circ \in \{+, -, \cdot, /\}$$

b) Comutatividade e associação da soma e multiplicação

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \quad \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$$

c)

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{x}$$

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

d) Algumas diferenças entre as operações intervalares e as numéricas são dadas por

•

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = [\underline{x} - \bar{x}, \bar{x} - \underline{x}] \Rightarrow [-1, 2] - [-1, 2] = [-3, 3] \not\subseteq \mathbf{0}$$

•

$$\mathbf{x}/\mathbf{x} = \begin{cases} [\underline{x}/\bar{x}, \bar{x}/\underline{x}], & \text{se } \underline{x} > 0 \\ [\bar{x}/\underline{x}, \underline{x}/\bar{x}], & \text{se } \bar{x} < 0 \end{cases} \Rightarrow [1, 2]/[1, 2] = [1/2, 2] \not\subseteq \mathbf{1}$$

•

$$\mathbf{x}^2 = \begin{cases} [\underline{x}^2, \bar{x}^2], & \text{se } 0 \leq \underline{x} \leq \bar{x} \\ [\bar{x}^2, \underline{x}^2], & \text{se } \underline{x} \leq \bar{x} \leq 0 \\ [0, \max\{\underline{x}^2, \bar{x}^2\}], & \text{se } \underline{x} < 0 < \bar{x} \end{cases} \Rightarrow [-1, 2]^2 = [0, 4] \not\subseteq [-2, 4]$$

$$[-2, 4] = [-1, 2] \cdot [-1, 2]$$

•

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \subseteq \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \quad \Rightarrow [1, 2] \cdot ([1, 1] + [-1, -1]) = [0, 0]$$

$$\not\subseteq [-1, 1] = [1, 2] \cdot [1, 1] + [1, 2] \cdot [-1, -1]$$

4. Para trabalharmos com a aritmética intervalar na prática usaremos o pacote INTLAB [Rump 1999] do MATLAB [MATLAB 2016], cujo principal desenvolvedor é o professor Rump. Em [Rump 1998] são disponibilizados tutoriais e links para download das versões do INTLAB. A versão utilizada neste trabalho do MATLAB é R2016a e a versão do INTLAB é 9.0 instalados no Windows 10 Home Single Language 64 bits, em um notebook Dell Inspiron 15R 5537-A20;

5. Dado $n \in \mathbb{N}$ naturalmente obtemos a extensão intervalar $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$ de \mathbb{R}^n operando coordenada por coordenada como segue

$$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \circ (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) := (\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{x}_n \circ \mathbf{y}_n) \quad (2.14)$$

para $\circ \in \{+, -\}$.

Para o estudo das funções no contexto da aritmética intervalar, a princípio poderíamos trocar as operações numéricas por operações intervalares na lei de definição da função. Mas como veremos a seguir, esta simples mudança pode produzir funções intervalares cujas imagens são estimativas muito grosseiras das imagens das funções reais.

Definição 16. Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ denotamos por $\mathbf{F} : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$ sua extensão intervalar, isto é, a função definida e tomando valores em intervalos, atuando através das operações intervalares, e que quando aplicada em intervalos degenerados coincide com f .

Observação 11. 1. Como as operações intervalares estão bem definidas a extensão intervalar também está;

2. Segue da definição de extensão intervalar que a imagem de f aplicada ao intervalo \mathbf{x} está contida em $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, isto é, $f(\mathbf{x}) = \text{Img}(f)(\mathbf{x}) \subseteq \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Neste sentido dizemos que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é um invólucro para $f(\mathbf{x})$;
3. A versão intervalar de uma função, isto é, a função trocando aritmética real por aritmética intervalar é uma extensão intervalar pela propriedade de inclusão das operações intervalares, Observação 10 item (ii);
4. Para entendermos melhor a definição acima, usaremos como exemplo [Moore, Kearfott e Cloud 2009, pg. 43]. Considere as funções reais

$$\begin{aligned} f(x) &= x(1-x) & x \in [0, 1] \\ g(x) &= x - x^2 & x \in [0, 1] \\ h(x) &= \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 & x \in [0, 1] \end{aligned}$$

Na aritmética real, as funções f , g e h representam a mesma função. Porém considerando suas versões intervalares, isto é, \mathbf{F} , \mathbf{G} e \mathbf{H} com aritmética intervalar, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}([0, 1]) &= [0, 1] \cdot ([1, 1] - [0, 1]) = [0, 1] \supsetneq [0, \frac{1}{4}] = \text{Img}(f)([0, 1]) \\ \mathbf{G}([0, 1]) &= [0, 1] - [0, 1]^2 = [-1, 1] \supsetneq [0, \frac{1}{4}] = \text{Img}(f)([0, 1]) \\ \mathbf{H}([0, 1]) &= [\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] - ([0, 1] - [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])^2 = [0, \frac{1}{4}] = \text{Img}(f)([0, 1]) \end{aligned}$$

que são funções intervalares diferentes. Mas as três funções são extensões intervalares de f pois

$$\begin{aligned} \mathbf{F}([x, x]) &= [x - x^2, x - x^2] \\ \mathbf{G}([x, x]) &= [x - x^2, x - x^2] \\ \mathbf{H}([x, x]) &= [x - x^2, x - x^2] \end{aligned}$$

Percebemos que extensões intervalares não são únicas. Porém a escolha imediata da versão intervalar da função nem sempre é uma boa opção. Neste exemplo a escolha de \mathbf{F} ou \mathbf{G} acarreta em invólucros grosseiros para representar f de maneira intervalar. Que por sua vez, gera maior custo computacional e estimativas ruins, e em iterações sucessivas pode criar o efeito wrapping [Neumaier 1993].

5. Para obtermos invólucros “mais próximos” da imagem de uma função em um intervalo, podemos usar o processo chamado de refinamento descrito em [Moore, Kearfott e Cloud 2009, example 6.3, pg. 56]. O processo consiste em subdividir o intervalo dado em subintervalos e calcular a função em cada subintervalo, fazendo a união das imagens. Usando o código descrito na referência citada, para $[0, 1]$ e 1000 subdivisões, obtemos os refinamentos

$[0.000000000000000, 0.250500000000001]$ para **F**, $[-0.001000000000001, 0.251000000000001]$ para **G** e $[0.000000000000000, 0.250000000000001]$ para **H**. Logo, independente da extensão intervalar utilizada, se desejarmos um invólucro menos grosseiro da imagem de uma função, podemos utilizar a técnica de refinamento.

2.4.2 Ponto fixo de Brouwer e o operador de Krawczyk

Os Teoremas de ponto fixo possuem um espectro amplo de utilização dentro da matemática. Um dos papéis fundamentais de tais resultados, é garantir a existência de solução local para determinado problema, mesmo que não fique explícito como tal solução é obtida analiticamente. Dentro da perspectiva do método de validação de soluções numéricas que abordamos neste trabalho, os Teoremas de ponto fixo são fundamentais pois garantem sob certas hipóteses que em uma vizinhança de uma solução numérica exista uma solução no sentido teórico. Nesta seção apresentaremos o Teorema de ponto fixo de Brouwer. Como aplicação do mesmo dentro da perspectiva deste trabalho, tal resultado será utilizado juntamente com o operador de Krawczyk para validação de soluções numéricas para sistemas lineares. Para o leitor interessado em mais referências para Teoremas de ponto fixo e suas aplicações podemos citar [Zeidler e Wadsack 1986].

Teorema 2 (Ponto fixo de Brouwer). Seja $f : U \rightarrow U$ uma aplicação contínua definida e tomando valores em $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, com $U \neq \emptyset$, compacto e convexo. Então, f tem um ponto fixo.

Demonstração. Ver [Zeidler e Wadsack 1986, Proposição 2.6, pg. 51] onde é feita uma demonstração que segue os princípios de retração. \square

Como aplicação do Teorema 2 introduziremos o método Self-Validating (S-V). Este método proposto em [Rump 1999, Rump 2001] visa obter soluções numéricas para sistemas lineares e então validá-las. Para tal, considere o sistema linear de $n \in \mathbb{N}$ variáveis, e n equações abaixo

$$Ax = b. \quad (2.15)$$

Determinar uma solução sistema (2.15) é equivalente a obter zeros para a aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, tal que $f(x) = Ax - b$, para $x \in \mathbb{R}^n$. Para obtermos um método rigoroso de validação de soluções para f , definiremos o operador de Krawczyk.

Definição 17. Seja C uma matriz quadrada de ordem n não-singular. Considere \hat{x} um zero aproximado de f , isto é, $f(\hat{x}) \approx 0 \in \mathbb{R}^n$, e $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$ tal que $\hat{x} \in \mathbf{x}$. Usando as operações intervalares, o operador de Krawczyk $\mathcal{K} : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n$ é dado por

$$\mathcal{K}(\mathbf{x}) = \hat{x} - Cf(\hat{x}) + (I - \mathbf{CDF}(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - \hat{x}) \quad (2.16)$$

onde **F** e **DF** são extensões intervalares de f e Df , respectivamente.

Antes de apresentar o resultado que une o Teorema de ponto fixo de Brouwer (Teorema 2) com a validação de soluções numéricas por intermédio do operador de Krawczyk (2.16), faremos algumas observações.

- Observação 12.** 1. A matrix C é um preconditionador e pode ser escolhida como uma aproximação de $[Df(\hat{x})]^{-1} = A^{-1}$, uma vez que o custo computacional para obter $C = [Df(\hat{x})]^{-1}$ em geral é alto;
2. Como as operações intervalares possuem propriedades de inclusão então $T(\mathbf{x}) \subset \mathcal{H}(\mathbf{x})$ onde $T(x) = x - Cf(x)$ é um operador do tipo Newton. Assim, de certa maneira, \mathcal{H} fornece uma extensão para T que é útil para manipulações, uma vez que mostrar diretamente que $T(\mathbf{x}) \subset \mathbf{x}$ pode ser complicado devido as propriedades de inclusão das operações intervalares;
3. A vantagem computacional em utilizar o operador de Krawczyk no lugar de um operador tipo Newton, é que para as iterações do operador de Krawczyk só calculamos uma única vez a aproximação da inversa para derivada de f , enquanto para o operador do tipo Newton este processo é feito em toda iteração. Em [Michel e Zidna 2015, Tabela 1, pg. 10] o autor apresenta uma comparação entre os dois métodos quando utilizados com aritmética intervalar. Nas situações em questão, o operador de Krawczyk mostra-se mais eficiente;
4. Considerando $n = 1$, isto é, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, obtemos a expressão do operador de Krawczyk usando o Teorema do Valor Médio, como veremos a seguir. Pelo Teorema do Valor Médio existe ξ entre y e \hat{x} tal que

$$f(y) - f(\hat{x}) = f'(\xi)(y - \hat{x}).$$

Suponha que y seja o zero que desejamos localizar, logo $f(y) = 0$, e assim

$$0 = f(\hat{x}) + f'(\xi)(y - \hat{x}).$$

Multiplicando por $r \neq 0$ e finalmente somando e subtraindo $(y - \hat{x})$ chegamos na seguinte expressão

$$y = \hat{x} - rf(\hat{x}) + (1 - rf'(\xi))(y - \hat{x}),$$

que determina o operador de Krawczyk (2.16). Seja $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}$ tal que $y, \hat{x} \in \mathbf{x}$. Então, $\xi \in \mathbf{x}$ e consequentemente $f'(\xi) \in \mathbf{F}'(\mathbf{x})$ onde \mathbf{F} é uma extensão intervalar de f . Assim, o operador de Krawczyk pode ser tomado por

$$\mathcal{K}(\mathbf{x}) = \hat{x} - rf(\hat{x}) + (1 - \mathbf{C}\mathbf{F}'(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - \hat{x}).$$

O caso geral $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, pode encontrado em [Schäfer 2014, pg. 63].

O próximo resultado é uma adaptação feita por mim, dos resultados [Moore, Kearfott e Cloud 2009, Teorema 8.2, pg. 116] e [Galias e Zgliczyński 2007, Teorema 1, pg. 4263]. Em sua demonstração usaremos o Teorema de ponto fixo de Brouwer (Teorema 2). A ideia geral é mostrar que sob certas hipóteses verificar existência de zeros de f pode ser condicionada ao estudo do operador de Krawczyk (2.16).

Teorema 3. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe $\mathbf{C}^1(\mathbb{R}^n)$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não-singular e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ compacto. Considere \mathcal{K} e \hat{x} como na Definição 17. São válidas as seguintes afirmações

1. Se $\mathcal{K}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{x}$ então existe $x^* \in \mathbf{x}$ tal que $f(x^*) = 0$;
2. Se existe $x^* \in \mathbf{x}$ tal que $f(x^*) = 0$ então $x^* \in \mathcal{K}(\mathbf{x})$.

Demonstração. Item 1: Defina $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $g(y) = y - Cf(y)$, para $y \in \mathbb{R}^n$. Assim g é classe $\mathbf{C}^1(\mathbb{R}^n)$ pois f é $\mathbf{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $g(\mathbf{x}) \subset \mathcal{K}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{x}$ já que $Dg(y) = I - CDf(y)$ para $y \in \mathbb{R}^n$. Sendo $\mathbf{x} \subset \mathbb{R}^n$ não vazio, compacto e conexo, segue do Teorema de ponto fixo de Brouwer (Teorema 2) que g possui um ponto fixo em \mathbf{x} , isto é, existe $x^* \in \mathbf{x}$ tal que $g(x^*) = x^*$. Como C é não-singular, pontos fixos de g são zeros de f . Logo, $f(x^*) = 0$. Finalizando a prova do Item 1.

Item 2: Supondo que existe $x^* \in \mathbf{x}$ tal que $f(x^*) = 0$ mostraremos que $x^* \in \mathcal{K}(\mathbf{x})$. De fato, usando um argumento similar ao feito na Observação 12 item (iii) escrevemos

$$x^* = x^* - Cf(x^*) \in \hat{x} - Cf(\hat{x}) + (I - CDf(\mathbf{x}))(x^* - \hat{x}) \subset \mathcal{K}(\mathbf{x}),$$

ou seja, $x^* \in \mathcal{K}(\mathbf{x})$. □

Observação 13. 1. O Teorema 3 possui uma versão mais "forte", no seguinte sentido, em [Rump 2010, Teorema 13.3, pg. 89] o autor mostra que a hipótese C não-singular pode ser descartada, isto é, a inclusão $\mathcal{K}(\mathbf{x}) \subset \text{Int}(\mathbf{x})$ é suficiente para garantir que C seja não-singular. Porém uma sequência de resultados intermediários é preciso para tal conclusão. Além disso, [Qi 1980] mostra que $\mathcal{K}(\mathbf{x}) \subset \text{Int}(\mathbf{x})$ garante a unicidade de soluções para $f(x) = 0$;

2. O item (i) do Teorema 3 garante a existência de pelo menos um zero de f enquanto o item (ii) é uma ferramenta útil para estudarmos a não-existência de zeros de f . Em [Semenov 2015, Teorema 4, pg. 821] é apresentado um resultado de não-existência baseado no item (ii) do Teorema 3;
3. Apesar do foco desta seção ser a validação de soluções numéricas para sistemas lineares, o Teorema 3 tem como principal aplicação o caso não linear, ver [Rump 2010, PART 2, pg. 87];
4. A generalização do Teorema 3 para sistemas com infinitas equações pode ser encontrado em [Galias e Zgliczyński 2007, Teorema 2, pg. 4264]. Neste caso, é preciso que a matriz

C satisfaça algumas condições extras além de ser não-singular (limitada e dependência finita), além das condições de convergência para a solução de $f(x) = 0$.

2.4.3 Aplicações

Como aplicação dos conteúdos anteriormente expostos, utilizaremos o Teorema 3 para validar soluções numéricas para sistemas lineares. O código descrito em [Rump 2010, Algorithm 10.7, pg. 58] será usado com pequenas modificações feitas por mim, seguido de um script para implementá-lo que está disponível em GitHub [Nolasco 2021]. O código para verificar rigorosamente, através da aritmética intervalar, as condições do Teorema 3 para soluções do sistema linear $Ax = b$ também está disponível em GitHub [Nolasco 2021]. Suas entradas são a matriz A , o vetor b e número máximo de iterações max_itr , e suas saídas são o vetor intervalar XX e vetor $interval_solutions$ com os pontos médios dos intervalos de XX e seus respectivos raios. Caso a verificação falhe o vetor XX retorna como NaN . O código foi implementado para aceitar versões intervalares de A e b . Além disso o vetor b pode ser inicializado como um vetor coluna ou linha. O código trabalha com a inversa R da matriz dos centros dos intervalos que compõem a matriz A . Assim a solução numérica para o sistema $Ax = b$ é tomada como $xs = R * mid(b)$. A inclusão $\mathcal{H}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{x}$ do Teorema 3 é testada na linha 13 do código, e para que ela seja feita de maneira rigorosa é preciso que Y seja definido com a técnica do ε -inflation (linha 11 do código), ver [Rump 1998]. Caso a verificação obtenha sucesso, teremos uma solução numérica xs e uma vizinha da mesma $xs + X$ que sabemos possuir uma solução no sentido teórico para o sistema $Ax = b$. O script `test_vhn_VerifyLinSys` foi implementada pelo autor e tem como entrada o número natural m , que representa o número máximo de iterações e também o tamanho máximo ($\times 1000$) do sistema $Ax = b$ que o algoritmo verificará rigorosamente soluções. Ela cria aleatoriamente a matriz A e o vetor b em cada uma das n iterações, $n = 1, \dots, m$, armazena as soluções encontradas por $A \setminus b$, e seus respectivos tempos de cálculo em cada iteração. Caso alguma iteração da verificação feita pelo código `vhn_VerifyLinSys` falhe, o script irá parar e exibir o gráfico com as iterações concluídas com êxito, a menos que isto ocorra na primeira iteração. Neste caso será exibida a mensagem “Verification failed!” O gráfico mostrado no final do script será em função das iterações e normas de $Ax - b$ para os dois métodos. Na Figura 2 temos o comparativo obtido tomando $m = 10$. A precisão da aplicação fornecida pelo script `vhn_VerifyLinSys` se manteve estável na medida que o tamanho do sistema cresce, além de melhor. Porém como podemos observar na Figura 3 o custo para se obter uma melhor precisão é o tempo. Vale lembrar que a intenção não é mostrar que determinado método é melhor que outro, mas sim evidenciar opções para que o leitor possa escolher qual se encaixa em seu estudo. Mais detalhes podem ser vistos na tabela 1.

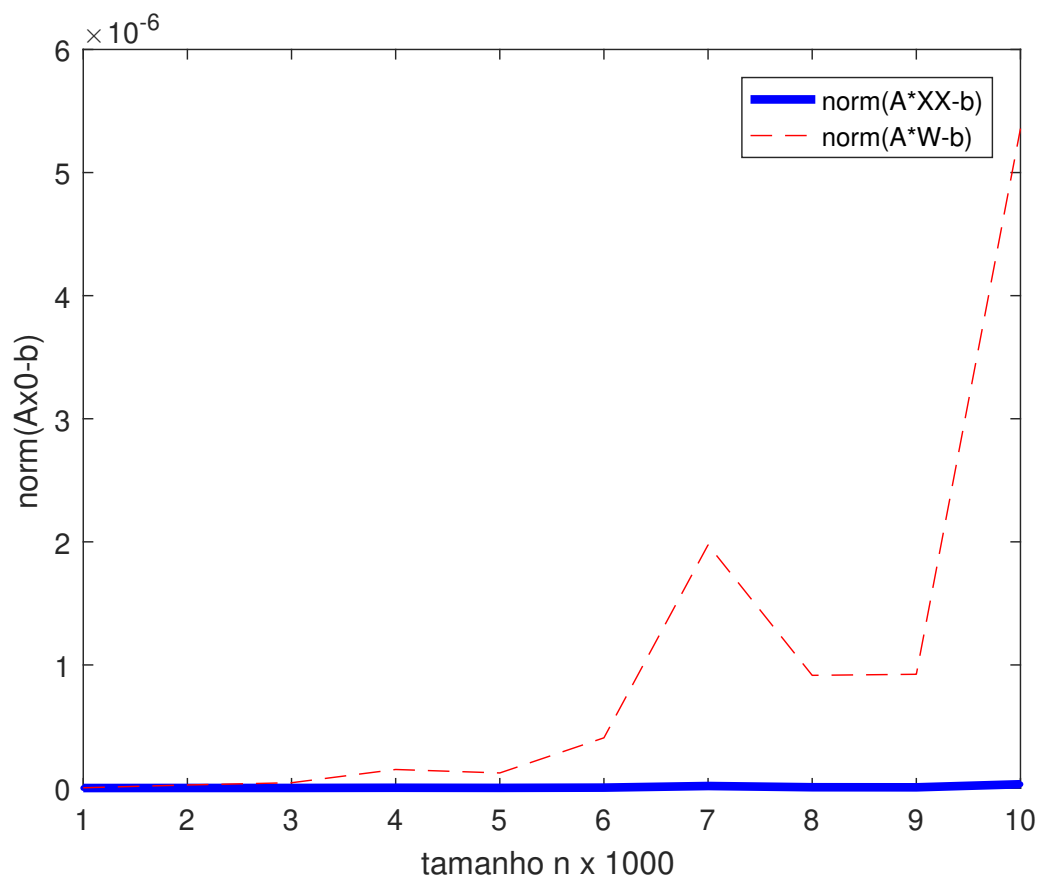


Figura 2 – Comparativo entre normas dos métodos

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 1 – Comparativo entre métodos por norma e tempo

m	$norm(AW - b)$	tempo (segs) $W = A \setminus b$	$norm(AXX - b)$	tempo (segs) vhn_VerifyLinSys
1	$2,11 \cdot 10^{-9}$	0,0524811	$6,79 \cdot 10^{-11}$	1,1702762
2	$2,49 \cdot 10^{-8}$	0,2350848	$5,44 \cdot 10^{-10}$	3,1919298
3	$4,31 \cdot 10^{-8}$	0,7566771	$6,48 \cdot 10^{-10}$	9,0503555
4	$1,51 \cdot 10^{-7}$	1,699093	$2,20 \cdot 10^{-9}$	20,4532258
5	$1,23 \cdot 10^{-7}$	5,6736417	$1,21 \cdot 10^{-9}$	35,055517
6	$4,08 \cdot 10^{-7}$	6,0058098	$3,38 \cdot 10^{-9}$	50,0593242
7	$1,98 \cdot 10^{-6}$	10,0621712	$1,64 \cdot 10^{-8}$	75,9227034
8	$9,16 \cdot 10^{-7}$	15,1588984	$6,38 \cdot 10^{-9}$	113,7615666
9	$9,24 \cdot 10^{-7}$	19,5160107	$5,75 \cdot 10^{-9}$	157,9879479
10	$5,36 \cdot 10^{-6}$	27,045852	$3,07 \cdot 10^{-8}$	212,7361415

Fonte: Elaborada pelo autor.

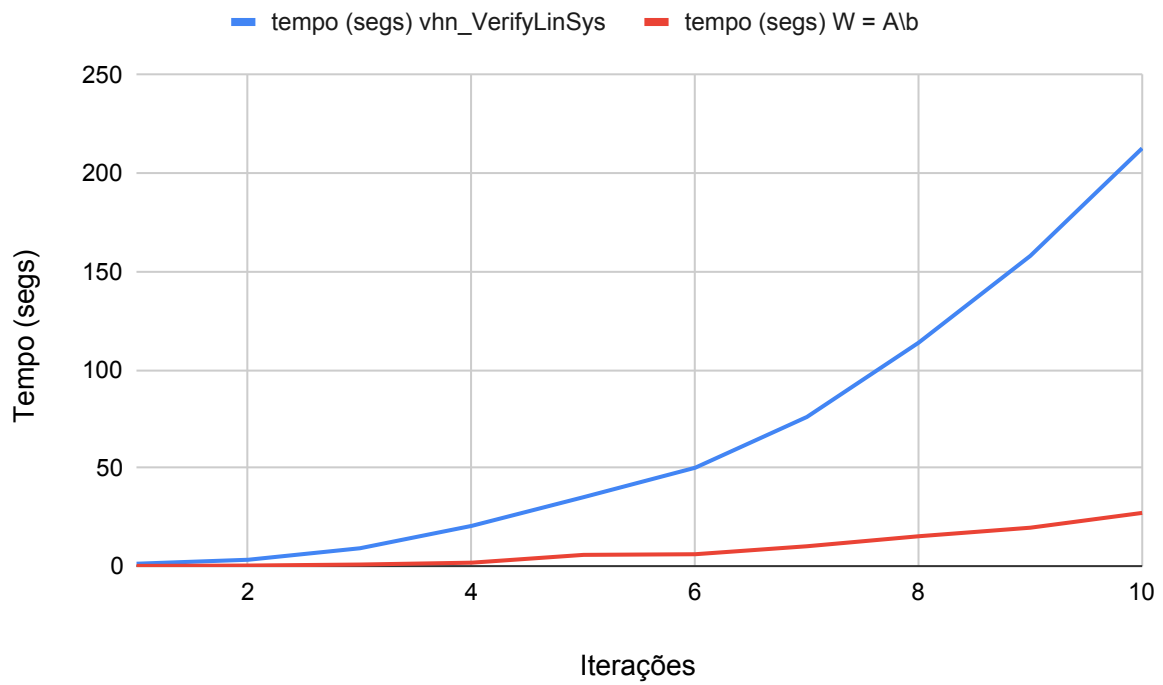


Figura 3 – Comparativo entre tempo dos métodos

Fonte: Elaborada pelo autor.

TEOREMAS DE VALIDAÇÃO

Neste capítulo utilizaremos o teorema de Newton-Kantorovik e o módulo de bijetividade para obter um teorema de validação de soluções numéricas de EDO's para PVI's e BVP's. Através deste teorema será possível, juntamente com a aritmética intervalar, validar soluções numéricas de sistemas de EDO's das as condições iniciais/fronteira determinadas. Tal abordagem foi desenvolvida primeiramente em colaboração no trabalho [Ramos, Nolasco e Gameiro 2022] para problemas de valor fronteira do tipo Neumann em EDO's de segunda ordem, isto é, em problemas da forma $u'' = f(t, u, u')$, $u'(0) = u'(s) = 0$, com $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua em t e \mathbf{C}^2 nas variáveis (u, u') . Aqui será feito uma generalização para o caso de sistemas de equações diferenciais ordinárias nos casos de PVI's e BVP's. Em ambos os casos, tal método mostrou-se eficaz, pois diferente de outras abordagens de validação de soluções numéricas, não sofre modificações no que se refere a não linearidade da equação aplicada.

3.1 O espaço $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)$

Definindo $I = (0, 1)$ e $\bar{I} = [0, 1]$, os espaços $L^2(I)$ e $H^1(I)$ são Hilberts com respeito ao produto interno

$$\langle u, v \rangle_{L^2(I)} = \int_0^1 u(t)v(t)dt \quad \text{e} \quad \langle u, v \rangle_{H^1(I)} = \langle u, v \rangle_{L^2(I)} + \langle u', v' \rangle_{L^2(I)} \quad (3.1)$$

onde $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ respectivamente. Segue de [Brezis 2011, pg. 145] que os conjuntos

$$\left\{ 1, \sqrt{2} \cos(k\pi t) \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{e} \quad \left\{ \sqrt{2} \text{sen}(k\pi t) \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad (3.2)$$

são bases ortonormais para $L^2(I)$ com respeito ao produto interno definido em (3.1). Dada $u \in L^2(I)$, seja

$$u(t) \sim \hat{u}_{\cos}(1) + \sum_{k=2}^{\infty} \hat{u}_{\cos}(k) \sqrt{2} \cos((k-1)\pi t) \quad (3.3)$$

a expansão de u na base cosseno de $L^2(I)$, onde

$$\widehat{u}_{\cos}(1) = \int_0^1 u(t) dt,$$

$$\widehat{u}_{\cos}(k) = \int_0^1 u(t) \sqrt{2} \cos((k-1)\pi t) dt \text{ para } k \in \mathbb{N}, k \geq 2.$$

Definição 18. Denotamos por $H^{1,0}(I)$ o subconjunto de $H^1(I)$ das funções $u \in H^1(I)$ tais que $u(0) = 0$.

Segue da inequação de Morrey [Evans 2010, Theorem 4, pg. 280] que o funcional linear $\Theta : H^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$, $\Theta(u) = u(0)$, é contínuo. Sendo $H^{1,0}(I) = \Theta^{-1}(0)$, concluímos que $H^{1,0}(I)$ é um subespaço fechado de $H^1(I)$, ou seja, um espaço de Banach. Considere em $H^{1,0}(I)$ o conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ t, \left(\frac{\sqrt{2} \operatorname{sen}(k\pi t)}{k\pi} \right)_{k \in \mathbb{N}} \right\}.$$

Na próxima proposição provaremos que \mathcal{B} é uma base ortonormal para $H^{1,0}(I)$ com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}$ dado por

$$\langle u, v \rangle_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)} = \int_0^1 u'(t)v'(t) dt$$

e mais ainda, também mostraremos que a norma induzida pelo produto interno acima em $H^{1,0}(I)$, isto é, $\|\cdot\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}$, é equivalente a norma clássica de $H^1(I)$ sobre $H^{1,0}$, ou seja, $\|\cdot\|_{H^1(I)}$ em $H^{1,0}(I)$. Para tal note que por [Brezis 2011, Theorem 8.2, pg. 204], cada $u \in H^1(I)$ pode ser considerada uma função contínua definida em \bar{I} .

Proposição 5. As seguintes afirmações são válidas

1. \mathcal{B} é uma base ortonormal de $H^{1,0}(I)$ com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}}$, e dada $u \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}$ sua representação na base \mathcal{B} é

$$u(x) = \widehat{u}'_{\cos}(1)t + \sum_{k=2}^{\infty} \widehat{u}'_{\cos}(k) \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen}((k-1)\pi t)}{(k-1)\pi},$$

onde $t \in I$ e $\widehat{u}'_{\cos}(k)$, $k \in \mathbb{N}$, são os coeficientes de u' na base cosseno de $L^2(I)$;

2. A norma $\|\cdot\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}}$ é equivalente a norma clássica $\|\cdot\|_{H^1(I)}$ sobre $H^{1,0}(I)$, com a seguinte relação

$$\|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)} \leq \|u\|_{H^1(I)} \leq \sqrt{2} \|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}, \quad (3.4)$$

para $u \in H^{1,0}$.

Demonstração. Item 1: De fato, provaremos primeiramente que \mathcal{B} é denso em $H^{1,0}(I)$. Dada $u \in H^{1,0}(I)$, considerando a expansão de u' na base cosseno como em (3.3), para $n \in \mathbb{N}$, defina $u_n \in H^{1,0}(I)$ por

$$u_n(t) = \widehat{u}'_{\cos}(1)t + \sum_{k=2}^n \widehat{u}'_{\cos}(k) \frac{\sqrt{2}\text{sen}((k-1)\pi t)}{(k-1)\pi}.$$

Assim vale

$$u'_n(t) = \widehat{u}'_{\cos}(1) + \sum_{k=2}^n \widehat{u}'_{\cos}(k) \sqrt{2} \cos((k-1)\pi t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Calculando a norma da diferença entre u e u_n , obtemos

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}^2 &= \langle u - u_n, u - u_n \rangle_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)} = \int_0^1 (u'(t) - u'_n(t))^2 dt = \\ &= \|u' - u'_n\|_{L^2(I)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

convergência válida pela base cosseno de $L^2(I)$. Para provar que \mathcal{B} é um conjunto ortonormal em $H^{1,0}(I)$ com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}$, calcularemos o produto interno entre os elementos de \mathcal{B} , isto é,

- $\langle t, t \rangle_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)} = \int_0^1 1 dt = 1,$
- $\left\langle t, \frac{\sqrt{2}\text{sen}(k\pi t)}{k\pi} \right\rangle_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)} = \int_0^1 \sqrt{2} \cos(k\pi t) dt = \frac{\sqrt{2}\text{sen}(k\pi t)}{k\pi} \Big|_0^1 = 0,$
- $\left\langle \frac{\sqrt{2}\text{sen}(k_1\pi t)}{k_1\pi}, \frac{\sqrt{2}\text{sen}(k_2\pi t)}{k_2\pi} \right\rangle_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)} = 2 \int_0^1 \cos(k_1\pi t) \cos(k_2\pi t) dt$
 $= \int_0^1 \cos((k_1 - k_2)\pi t) dt + \int_0^1 \cos((k_1 + k_2)\pi t) dt$
 $= \frac{\text{sen}((k_1 - k_2)\pi t)}{(k_1 - k_2)\pi} \Big|_0^1 + \frac{\text{sen}((k_1 + k_2)\pi t)}{(k_1 + k_2)\pi} \Big|_0^1 = 0,$
- $\left\langle \frac{\sqrt{2}\text{sen}(k\pi t)}{k\pi}, \frac{\sqrt{2}\text{sen}(k\pi t)}{k\pi} \right\rangle_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)} = 2 \int_0^1 \cos^2(k\pi t) dt$
 $= \int_0^1 dt + \int_0^1 \cos(2k\pi t) dt$
 $= 1 + \frac{\text{sen}(2k\pi t)}{2k\pi} \Big|_0^1 = 1,$

onde $k, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, com $k_1 \neq k_2$. Provando que \mathcal{B} é um conjunto ortonormal em $H^{1,0}(I)$ com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}$, ou seja, concluímos que \mathcal{B} é uma base ortonormal em $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)$. Assim os coeficientes de $u \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)$ na base \mathcal{B} são dados por

$$\begin{aligned} \langle u, t \rangle_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)} &= \int_0^1 u'(t) dt = \langle u', 1 \rangle_{L^2(I)} = \widehat{u}'_{\cos}(1), \\ \left\langle u, \frac{\sqrt{2}\text{sen}(k\pi t)}{k\pi} \right\rangle_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)} &= \int_0^1 u'(t) \sqrt{2} \cos(k\pi t) dt = \langle u', \sqrt{2} \cos(k\pi t) \rangle_{L^2(I)} = \widehat{u}'_{\cos}(k) \end{aligned}$$

para $k \geq 2$. Item 2: Dados $u \in H^{1,0}(I)$ e $x \in I$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo para $H^1(I)$ (ver [Brezis 2011, Theorem 8.2, pg. 204]) vale

$$u(x) = \int_0^x u'(t) dt \Rightarrow |u(x)| \leq \int_0^1 |u'(t)| dt. \quad (3.5)$$

Usando a inequação de Holder (ver [Brezis 2011, Theorem 4.6, pg. 92]) no lado direito de (3.5), obtemos

$$|u(x)| \leq \|u'\|_{L^2(I)} = \|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)},$$

então

$$\|u\|_{C^0(\bar{I})} \leq \|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)} \Rightarrow \|u\|_{L^2(I)} \leq \|u\|_{C^0(\bar{I})} \leq \|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}. \quad (3.6)$$

Estabelecendo a relação entre a norma de $L^2(I)$ e a norma de $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)$. Assim a primeira parte da desigualdade de equivalência entre as normas segue de

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(I)}^2 &= \|u\|_{L^2(I)}^2 + \|u'\|_{L^2(I)}^2 \leq \|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}^2 + \|u'\|_{L^2(I)}^2 = 2\|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}^2 \Rightarrow \\ &\|u\|_{H^1(I)} \leq \sqrt{2}\|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

para $u \in H^{1,0}(I)$. Por outro lado,

$$\|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)} = \|u'\|_{L^2(I)} \leq \|u\|_{H^1(I)}.$$

Portanto as normas $\|\cdot\|_{H^1(I)}$ e $\|\cdot\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}$ são equivalentes em $H^{1,0}(I)$, e vale

$$\|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)} \leq \|u\|_{H^1(I)} \leq \sqrt{2}\|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}. \quad (3.8)$$

□

Para tratarmos a sequência de coeficientes de uma função em $H_{\mathcal{B}}^{1,0}$ estabeleceremos um isomorfismo isométrico entre $H_{\mathcal{B}}^{1,0}$ e $\ell^2(\mathbb{N})$.

Proposição 6. A aplicação $h_{\mathcal{B}} : H_{\mathcal{B}}^{1,0} \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ definida por

$$h_{\mathcal{B}}(u) = \left(\widehat{u}'_{\cos}(1), \widehat{u}'_{\cos}(2), \dots \right) =: \widehat{u}'_{\cos},$$

é um isomorfismo isométrico entre tais espaços, onde $\ell^2(\mathbb{N})$ é considerado munido pela norma usual $\|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{N})}$ e $\widehat{u}'_{\cos} := \left(\widehat{u}'_{\cos}(1), \widehat{u}'_{\cos}(2), \dots \right)$ é a sequência de coeficientes de u' na base cosseno de $L^2(I)$.

Demonstração. A aplicação $h_{\mathcal{B}}$ está bem definida pois

$$\|h_{\mathcal{B}}(u)\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2 = \left\| \widehat{u}'_{\cos} \right\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \widehat{u}'_{\cos}(n) \right|^2 = \|u'\|_{L^2(I)}^2 < \infty, \quad (3.9)$$

para $u \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}$. Além disso sua linearidade segue da unicidade de representação na base de $H_{\mathcal{B}}^{1,0}$. Por (3.9), segue que $\|h_{\mathcal{B}}(u)\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = \|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}}$, já que $\|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}} = \|u'\|_{L^2(I)}$, para $u \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}$. Ou seja,

$h_{\mathcal{B}}$ é um operador linear isométrico entre $H_{\mathcal{B}}^{1,0}$ e $\ell^2(\mathbb{N})$ e, conseqüentemente, é injetiva e contínua. Definimos naturalmente $h_{\mathcal{B}}^{-1} : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow H_{\mathcal{B}}^{1,0}$ por

$$h_{\mathcal{B}}^{-1}(a)(t) = a(1)t + \sum_{k \geq 2} a(k) \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen}((k-1)\pi t)}{(k-1)\pi},$$

para $a = (a(k))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ e $t \in I$. Segue de [Brezis 2011, Corollary 2.7, pg. 35] que é um isomorfismo, completando a demonstração. \square

3.2 Espaços produto

Suponha que $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = f(t, u)$, é uma aplicação contínua em t e de classe \mathbf{C}^2 em u , sendo $t \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}^n$. Considere a equação diferencial

$$u' = f(t, u). \quad (3.10)$$

Nosso interesse é validar soluções numéricas para o sistema de EDO's (3.10) no caso de PVI's e PVF's em intervalos limitados $[t_0, L]$, $t_0 < L$. Então, sem perda de generalidade, para questões práticas (nas aplicações), consideraremos a EDO

$$\begin{cases} v' = f((L-t_0)s + t_0, v + x_0)(L-t_0) =: g(s, v) \\ v(0) = 0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.11)$$

com $s \in I$ para o caso dos PVI's. Assim se $v : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução de (3.11) então $u : [t_0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $u(t) = v\left(\frac{t-t_0}{L-t_0}\right) + x_0$ é uma solução de (3.10) tal que $u(t_0) = x_0$. Por outro lado, se $u : [t_0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução de (3.10) com a condição $u(t_0) = x_0$ então $v : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v(s) = u((L-t_0)s + t_0) - x_0$, $s \in I$, é uma solução de (3.11).

Para o caso dos PVF's considere (3.10) com as condições $u(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $u(L) = x_1 \in \mathbb{R}^n$ em $[t_0, L]$. Se $u : [t_0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução deste problema então $v : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v(s) = u((L-t_0)s + t_0) - x_0$, $s \in I$ é solução de (3.11) com $v(1) = x_1 - x_0$. Por outro lado, $v : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, é solução de (3.11) com $v(1) = x_1 - x_0$ então $u : [t_0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $u(t) = v\left(\frac{t-t_0}{L-t_0}\right) + x_0$ é uma solução de (3.10) tal que $u(t_0) = x_0$ e $u(L) = x_1$.

Através desta equivalência de soluções entre (3.10) e (3.11) para os casos de PVI's e PVF's, escolheremos como ambiente de trabalho o produto do espaço $H_{\mathcal{B}}^{1,0}$ por ele mesmo, isto é, $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$. Feita a observação acima sobre qual é o contexto que desejamos trabalhar, agora estamos prontos para introduzir os espaços produto.

Definição 19. Definimos

$$L^2(I)^n = \underbrace{L^2(I) \times \cdots \times L^2(I)}_{n \text{ fatores}} \quad \text{e} \quad H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n = \underbrace{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I) \times \cdots \times H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}_{n \text{ fatores}}.$$

Como o produto finito de espaços de Banach é um espaço de Banach, $L^2(I)^n$ e $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$ são espaços de Banach. Mais ainda, eles são espaços de Hilberts com respeito aos produtos internos

$$\langle u, v \rangle_{L^2(I)^n} = \sum_{i=1}^n \langle u_i, v_i \rangle_{L^2(I)} \quad \text{e} \quad \langle u, v \rangle_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n} = \sum_{i=1}^n \langle u_i, v_i \rangle_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}. \quad (3.12)$$

onde $u = (u_1, \dots, u_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $v = (v_1, \dots, v_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente. As normas induzidas pelos produtos internos (3.12) em $L^2(I)^n$ e $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$ são, respectivamente,

$$\|u\|_{L^2(I)^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^2(I)}^2} \quad \text{e} \quad \|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}^2}. \quad (3.13)$$

Proposição 7. Para $n, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, sejam

$$\begin{aligned} e_k &= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \\ \kappa_k &= (0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0), \\ c_k^m &= (0, \dots, 0, \sqrt{2} \cos(m\pi t), 0, \dots, 0), \\ s_k^m &= \left(0, \dots, 0, \frac{\sqrt{2} \text{sen}(m\pi t)}{m\pi}, 0, \dots, 0 \right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

cuja k -ésima entrada é diferente de zero, e as demais entradas são nulas. Os conjuntos $\mathcal{C}^n = \{e_k, c_k^m\}_{m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$ e $\mathcal{B}^n = \{\kappa_k, s_k^m\}_{m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$ são bases ortonormais com respeito aos produtos internos definidos em (3.12) para $L^2(I)^n$ e $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$, respectivamente.

Demonstração. Ver [Carothers 2004, pg. 49]. □

O próximo resultado é o equivalente a proposição 5 para o contexto de espaços produto.

Proposição 8. A norma induzida pelo produto interno (3.12) em $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$ é equivalente a norma induzida por $H^1(I)^n$ em $H^{1,0}(I)^n$, de maneira que vale

$$\|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n} \leq \|u\|_{H^1(I)^n} \leq \sqrt{2} \|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n}, \quad (3.15)$$

para $u \in H^{1,0}(I)^n$ onde $H^{1,0}(I)^n := (H^{1,0}(I))^n$ e $H^1(I)^n := (H^1(I))^n$ e seus produtos internos e normas são dados como em (3.12) e (3.13).

Demonstração. Se $u = (u_1, \dots, u_n) \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$ então cada $u_i \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)$, e conseqüentemente $u_i \in H^1(I)$. Aplicando a proposição 5 em cada coordenada de u , obtemos o resultado pela definição de $\|\cdot\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n}$ em (3.13). □

Defina o espaço produto $\ell^2(\mathbb{N})^n = (\ell^2(\mathbb{N}))^n$ com o produto interno e norma induzida como em (3.12) e (3.13) respectivamente. Segue de [Carothers 2004, pg. 49] que $\ell^2(\mathbb{N})^n \cong \ell^2(\mathbb{N})$. Por conveniência de notação usaremos $\ell^2(\mathbb{N})^n$. Seja $h_{\mathcal{B}} : H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})^n$ uma aplicação dada por

$$h_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = (h_{\mathcal{B}}(v_1), \dots, h_{\mathcal{B}}(v_n)), \quad \text{para } (v_1, \dots, v_n) \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n. \quad (3.16)$$

Como consequência da proposição 6 e da proposição 8, $h_{\mathcal{B}_n}$ é um isomorfismo isométrico entre tais espaços. Isto é,

Proposição 9. A aplicação $h_{\mathcal{B}_n} : H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})^n$ é um isomorfismo isométrico entre $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$ e $\ell^2(\mathbb{N})^n$.

3.3 Reformulação do sistema de EDO's

Reformulando a equação (3.11) em termos da aplicação $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n} : H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n \rightarrow L^2(I)^n$ dada por $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(v)(s) = v'(s) - g(s, v(s))$, $s \in I$, obtemos o resultado abaixo.

Teorema 4. Os zeros de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}$ são equivalentes as soluções de (3.11) em $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$.

Pelo teorema 4 nosso problema passa ser estudar os zeros de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}$ em $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$. Porém como $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$ é um espaço de dimensão infinita, precisamos obter uma aproximação por um espaço de dimensão finita, a escolha natural será os espaços euclidianos \mathbb{R}^m , $m \in \mathbb{N}$. Para tal, projetando sobre \mathbb{R}^m a sequência de coeficientes com relação a base cosseno de $L^2(I)$, definimos o seguinte operador linear contínuo e sobrejetor

$$\begin{aligned} L^2(I) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto \widehat{v}_{\cos} \mapsto (\widehat{v}_{\cos}(1), \dots, \widehat{v}_{\cos}(m)) =: \widehat{v}_{\cos, m} \end{aligned} \quad (3.17)$$

A primeira correspondência de (3.17), $v \mapsto \widehat{v}_{\cos}$, é o isomorfismo isométrico $\pi_{\cos} : L^2(I) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$, ver [Ramos, Nolasco e Gameiro 2022, Proposition 1, pg. 3]. Daí $\pi_{\cos_n} : L^2(I)^n \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})^n$ dada por

$$\pi_{\cos_n}(v_1, \dots, v_n) = (\widehat{v}_{1\cos}, \dots, \widehat{v}_{n\cos}) \quad (3.18)$$

também é um isomorfismo isométrico. Seja $\pi_{\cos_{n,m}} : L^2(I)^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que

$$\pi_{\cos_{n,m}}(v_1, \dots, v_n) = (\widehat{v}_{1\cos, m}, \dots, \widehat{v}_{n\cos, m}). \quad (3.19)$$

Como $\pi_{\cos_{n,m}}$ herda as características das suas coordenadas tem-se que $\pi_{\cos_{n,m}}$ é linear, contínua e sobrejetora. Identificando \mathbb{R}^m com sua cópia em $\ell^2(\mathbb{N})$, isto é, $\mathbb{R}^m \subsetneq \ell^2(\mathbb{N})$, através do mergulho isométrico $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N})$, consideramos a restrição $h_{\mathcal{B}_n}^{-1}|_{\mathbb{R}^{n \times m}} := h_{\mathcal{B}_{n,m}}^{-1} : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$, onde $\mathbb{R}^{n \times m} \subsetneq \ell^2(\mathbb{N})$. Estamos prontos para definir a projeção da aplicação $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}$.

Definição 20. Dados $m \geq 1$ e a aplicação $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n} : H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n \rightarrow L^2(I)^n$ definida acima, denotamos por $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}} : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ a aplicação

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(v_1, \dots, v_n) = \pi_{\cos_{n,m}} \circ \mathcal{F}_{\mathcal{B}_n} \circ h_{\mathcal{B}_{n,m}}^{-1}(v_1, \dots, v_n). \quad (3.20)$$

onde $v_i \in \mathbb{R}^m$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Nos próximos passos deste trabalho desenvolveremos um método para validar soluções numérica de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(u) = 0$. Como nossa abordagem é computacional, na prática as soluções numéricas são aproximações de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w) = 0$.

Figura 4 – Diagramas de aplicações

$$\begin{array}{ccc}
H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n & \xrightarrow{\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}} & L^2(I)^n \\
h_{\mathcal{B}_n} \downarrow & & \downarrow \pi_{\cos n} \\
\ell^2(\mathbb{N})^n & & \ell^2(\mathbb{N})^n
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n & \xrightarrow{\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}} & L^2(I)^n \\
h_{\mathcal{B}_{n,m}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\cos_{n,m}} \\
\mathbb{R}^{n \times m} & \xrightarrow{\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}} & \mathbb{R}^{n \times m}
\end{array}$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4 Newton-Kantorovich

Como base para validação de soluções numéricas utilizaremos uma versão do Teorema de Newton-Kantorovich. Para tal, nesta seção suponha que X e Y são espaços de Banach.

Definição 21. Dado $F \in \mathcal{L}(X, Y)$ o módulo de bijetividade $\lambda(F)$ de F é dado por

$$\lambda(F) = \begin{cases} \|F^{-1}\|^{-1}, & \text{se } F \text{ é inversível} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Usando o módulo de bijetividade definido acima obtemos a seguinte versão do Teorema de Newton-Kantorovich.

Teorema 5. Seja $U \subset X$ um aberto, $\mathcal{F} : U \subset X \rightarrow Y$ diferenciável, $A \subset U$ convexo, $x_0 \in A$, $R > 0$ satisfazendo $\overline{B(x_0, R)} \subset A$, e $\eta, \nu, K \in \mathbb{R}$ tais que

1. $\|\mathcal{F}(x_0)\| \leq \eta$, $\lambda(D\mathcal{F}(x_0)) \geq \nu$ e $\|D\mathcal{F}(x) - D\mathcal{F}(y)\| \leq K\|x - y\|$ para todo $x, y \in A$.
2. $g(t) = \eta - \nu t + \frac{K}{2}t^2$ tem zeros $t^* < t^{**}$ com $t^* \in [0, R]$.

Então \mathcal{F} tem um zero $x^* \in \overline{B(x_0, t^*)}$ e não possui outros zeros em $B(x_0, t^{**}) \cap A$.

Demonstração. Ver [Ramos, Nolasco e Gameiro 2022]. □

Observação 14. Por [Cartan 1971, pg. 23] podemos considerar $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

$$\cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)) \text{ e } \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n) \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)).$$

Assim a aplicação $D_u^2 f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ pode ser escrita como

$$D_u^2 f(t, u)(u_1, u_2) = (D_u^2 f(t, u)(u_1))(u_2)$$

para $t \in \mathbb{R}$ e $u, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$.

Pelo teorema 5 podemos garantir a existência de zeros para $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n} : H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n \rightarrow L^2(I)^n$, ou seja, a existência de soluções para o sistema de EDO's (3.11). Porém as hipóteses deste

teorema envolvem checar desigualdades como por exemplo, $\lambda(D\mathcal{F}(x_0)) \geq \nu$, que podem ser muito difíceis de serem verificadas já que o contexto é de aplicações em espaços de dimensão infinita. Então é preciso um resultado em expresse as condições do teorema 5 para aproximações em espaços de dimensão finita. É o que estabelece nosso próximo resultado.

Teorema 6. Seja $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = f(t, u)$, uma aplicação contínua em $t \in \mathbb{R}$ e de classe C^2 em $u \in \mathbb{R}^n$, $w : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação C^1 em $H_{\mathcal{B}}^1(I)^n$ e suponha que

$$\left(\left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \right\|_{C^0(\bar{I})} + \sqrt{2} \left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \right\|_{C^1(\bar{I})} \right) \leq N_{i,j}$$

e

$$\|D_u^2 f(t, u)\| \leq K \text{ para cada } (t, u) \in \bar{I} \times \overline{B(0, r)}_{\mathbb{R}^n},$$

onde $z(t) = (t, w(t))$, para $t \in \bar{I}$, e $N_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n N_{i,j}^2}$ para $1 \leq i, j \leq n$. Então $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n} : H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n \rightarrow L^2(I)^n$ é Frechét diferenciável e se $N = \sqrt{\sum_{i=1}^n N_i^2}$ temos

$$(I) \lambda(D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w)) \in [L - \frac{N}{m\pi}, L + \frac{N}{m\pi}], \text{ onde } L = \min(\lambda(D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)), 1);$$

$$(II) \|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(u_1) - D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(u_2)\|_{\mathcal{L}(H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n, L^2(I)^n)} \leq K \|u_1 - u_2\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n} \text{ para todo}$$

$$u_1, u_2 \in \overline{B(0, r)}_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n}.$$

O primeiro item que demonstraremos do teorema 6 é a diferenciabilidade da aplicação $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n} : H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n \rightarrow L^2(I)^n$. De fato, seja $D_u f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, como na observação 14. Vamos mostrar que $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}$ é Fréchet diferenciável em $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$ com $D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n} : H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n \rightarrow \mathcal{L}(H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n, L^2(I)^n)$ dada por

$$(D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w))(v)(t) = v'(t) - D_u f(t, w(t))v(t) \text{ para todo } w, v \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n. \quad (3.21)$$

Dado $w \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$, obtemos

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w+h)(t) - \mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w)(t) - (h'(t) - D_u f(t, w(t))h(t)) \\ &= ((w+h)'(t) - f(t, (w+h)(t))) - (w'(t) - f(t, w(t))) - (h'(t) - D_u f(t, w(t))h(t)) \\ &= D_u f(t, w(t))h(t) - (f(t, (w+h)(t)) - f(t, w(t))), \end{aligned}$$

para $h \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$. Como $\|h(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|h\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n}$ (ver (3.6)), tomando $r = \|w\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n} + 1 > 0$ temos $(t, w(t)) \in \bar{I} \times \overline{B(0, r)}_{\mathbb{R}^n}$, além disso, $h(t) \in B(0, r)_{\mathbb{R}^n}$, para $\|h\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n}$ suficientemente pequeno. Usando a hipótese de limitação de $D_u^2 f$ do teorema 6 podemos aplicar a Fórmula de Taylor com resto de Lagrange (ver [Cartan 1971, Theorem 5.6.2]) e obter

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w+h) - \mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w) - (h' - D_u f(t, w)h) \right\|_{L^2(I)^n} \\ &= \|D_u f(t, w)h - (f(t, w+h) - f(t, w))\|_{L^2(I)^n} \leq K \frac{\|h\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n}^2}{2}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\|\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w+h) - \mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w) - (h' - D_u f(t, w)h)\|_{L^2(I)^n}}{\|h\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n}} < K \|h\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n} \Rightarrow 0,$$

quando $\|h\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n} \rightarrow 0$. Assim concluímos que $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}$ é Fréchet diferenciável. As subseções a seguir provam os itens (I) e (II) do teorema 6.

3.4.1 Prova do item (I) do teorema 6

Para demonstrar o item (I) do teorema 6, construiremos alguns resultados intermediários.

Definição 22. Para $m \geq 1$, os operadores de truncamento $\rho_{\cos, m} : L^2(I) \rightarrow \mathbf{C}^\infty(\bar{I})$ e $\rho_{\cos, m}^* : L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ na base cosseno de $L^2(I)$ são dados por

$$\rho_{\cos, m}(u) = \widehat{u}_{\cos}(1) + \sum_{k=2}^m \widehat{u}_{\cos}(k) \sqrt{2} \cos((k-1)\pi t) \quad \text{e} \quad \rho_{\cos, m}^*(u) = u - \rho_{\cos, m}(u).$$

Considerando a base \mathcal{B} de $H^{1,0}(I)$ os operadores de truncamento $\rho_{\mathcal{B}, m} : H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I) \rightarrow \mathbf{C}^\infty(\bar{I})$ e $\rho_{\mathcal{B}, m}^* : H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I) \rightarrow H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)$ são dados por

$$\rho_{\mathcal{B}, m}(u) = \widehat{u}'_{\cos}(1)t + \sum_{k=2}^m \widehat{u}'_{\cos}(k) \frac{\sqrt{2} \text{sen}((k-1)\pi t)}{(k-1)\pi} \quad \text{e} \quad \rho_{\mathcal{B}, m}^*(u) = u - \rho_{\mathcal{B}, m}(u).$$

O próximo resultado expressa como estimar os operadores $\rho_{\mathcal{B}, m}$ e $\rho_{\mathcal{B}, m}^*$ em relação a norma de $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$.

Proposição 10. Para $v \in H^1(I)$ e $m \geq 1$ são válidos

1. $\|\rho_{\mathcal{B}, m}^*(v)\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{m\pi} \|v\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}$;
2. $\|\rho_{\mathcal{B}, m}(v)\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)} \leq \|v\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}$;
3. $\|\rho_{\cos, m}^*(u)\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{m\pi} \|u'\|_{L^2(I)}$.

Demonstração. Item 1: Dados $v \in H^{1,0}(I)$ e $m \in \mathbb{N}$, por (3.9) é válido $\widehat{v}'_{\cos} \in \ell^2(\mathbb{N})$ e $\|\widehat{v}'_{\cos}\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = \|v'\|_{L^2(I)}$. Assim, utilizando a definição de operador de truncamento em $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$ temos

$$\begin{aligned} \|\rho_{\mathcal{B}, m}^*(v)\|_{L^2(I)} &= \sqrt{\sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k-1)\pi} \widehat{v}'_{\cos}(k) \right)^2} \leq \frac{1}{m\pi} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{v}'_{\cos}(k)^2} = \\ &= \frac{1}{m\pi} \|v'\|_{L^2(I)} = \frac{1}{m\pi} \|v\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}. \end{aligned}$$

Item 2: Verificamos facilmente a validade deste item, pois

$$\|\rho_{\mathcal{B}, m}(v)\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}^2 = \widehat{v}'_{\cos}(1)^2 + \sum_{k=2}^m \widehat{v}'_{\cos}(k)^2 \leq \widehat{v}'_{\cos}(1)^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \widehat{v}'_{\cos}(k)^2 = \|v\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}^2.$$

Item 3: A demonstração deste item segue os mesmos passos do item 1. Finalizando a demonstração da proposição. \square

Seguindo a definição 22, apresentamos os operadores de truncamento nos espaços produto $L^2(I)^n$ e $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$.

Definição 23. Dados $m, n \geq 1$, os operadores de truncamento $\rho_{\cos_{n,m}} : L^2(I)^n \rightarrow \mathbf{C}^\infty(\bar{I})^n$ e $\rho_{\cos_{n,m}}^* : L^2(I)^n \rightarrow L^2(I)^n$ no espaço produto $L^2(I)^n$ são

$$\rho_{\cos_{n,m}}(v) = (\rho_{\cos,m}(v_1), \dots, \rho_{\cos,m}(v_n)) \quad \text{e} \quad \rho_{\cos_{n,m}}^*(v) = v - \rho_{\cos_{n,m}}(v),$$

onde $v = (v_1, \dots, v_n) \in L^2(I)^n$. Relacionado com a base \mathcal{B} de $H^{1,0}(I)$ os operadores de truncamento $\rho_{\mathcal{B}_{n,m}} : H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n \rightarrow \mathbf{C}^\infty(\bar{I})^n$ e $\rho_{\mathcal{B}_{n,m}}^* : H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n \rightarrow H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$ são dados por

$$\rho_{\mathcal{B}_{n,m}}(v) = (\rho_{\mathcal{B},m}(v_1), \dots, \rho_{\mathcal{B},m}(v_n)) \quad \text{e} \quad \rho_{\mathcal{B}_{n,m}}^*(v) = v - \rho_{\mathcal{B}_{n,m}}(v),$$

onde $v = (v_1, \dots, v_n) \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$.

Os pr oximos dois lemas em sequência são fundamentais na construção da prova do item (I) do teorema 6.

Lema 1. Suponha que $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = f(t, u)$, uma aplicação contínua em t e \mathbf{C}^2 em u , e $w : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ em $\mathbf{C}^1(\bar{I})$, considere $z(t) = (t, w(t))$ para todo $t \in \bar{I}$. Suponha ainda que $\left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \right\|_{\mathbf{C}^0(\bar{I})} + \sqrt{2} \left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \right\|_{\mathbf{C}^1(\bar{I})} \leq N_{i,j}$ e sejam $N_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n N_{i,j}^2}$ for $1 \leq i, j \leq n$, então

$$\|\nabla_u f_i(z) \cdot v - \rho_{\cos,m}(\nabla_u f_i(z) \cdot \rho_{\mathcal{B}_{n,m}}(v))\|_{L^2(I)} \leq \frac{N_i \|v\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n}}{m\pi} \quad \text{para todo } v \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n, \quad (3.22)$$

para $t \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathbb{R}^n$. Mais ainda, se $N = \sqrt{\sum_{i=1}^n N_i^2}$ então

$$\|D_u f(z)v - \rho_{\cos_{n,m}}(D_u f(z)\rho_{\mathcal{B}_{n,m}}(v))\|_{L^2(I)^n} \leq \frac{N \|v\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n}}{m\pi} \quad \text{para todo } v \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n.$$

Demonstração. Dada $v \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$ e $i, j \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i, j \leq n$, para obter (3.22) estimaremos as funções coordenadas de f , isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} v_j - \rho_{\cos,m} \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B},m}(v_j) \right) &= \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B},m}^*(v_j) + \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B},m}(v_j) \\ &\quad - \rho_{\cos,m} \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B},m}(v_j) \right) \\ &= \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B},m}^*(v_j) + \rho_{\cos,m} \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B},m}(v_j) \right) + \rho_{\cos,m}^* \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B},m}(v_j) \right) \\ &\quad - \rho_{\cos,m} \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B},m}(v_j) \right). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} v_j - \rho_{\cos, m} \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right) = \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}^*(v_j) + \rho_{\cos, m}^* \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right). \quad (3.23)$$

Estimaremos o lado direito da igualdade de (3.23). Começaremos por $\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}^*(v_j)$. Considerando $v_j \in H^{1,0}(I)$, do item (i) da proposição 10 temos

$$\left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}^*(v_j) \right\|_{L^2(I)} \leq \left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \right\|_{\mathbf{C}^0(\bar{I})} \|\rho_{\mathcal{B}, m}^*(v_j)\|_{L^2(I)} \leq \frac{\left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \right\|_{\mathbf{C}^0(\bar{I})} \|v_j\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}}{m\pi}. \quad (3.24)$$

Assim pela proposição 10 item 3 para estimar $\rho_{\cos, m}^* \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right)$, basta estimar $\left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right)'$ na norma de $L^2(I)$, já que $\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \in \mathbf{C}^1(\bar{I})$. Aplicando a desigualdade de Cauchy–Schwarz em $\left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right)'$ obtemos

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right)'(t) \right| &\leq \left| \left(\frac{\partial f_i(z(t))}{\partial u_j} \right)' \right| |(\rho_{\mathcal{B}, m}(v_j))(t)| + \left| \frac{\partial f_i(z(t))}{\partial u_j} \right| |(\rho_{\mathcal{B}, m}(v_j))'(t)| \leq \\ &\sqrt{\left(\left(\frac{\partial f_i(z(t))}{\partial u_j} \right)' \right)^2 + \left(\frac{\partial f_i(z(t))}{\partial u_j} \right)^2} \sqrt{((\rho_{\mathcal{B}, m}(v_j))(t))^2 + ((\rho_{\mathcal{B}, m}(v_j))'(t))^2} \leq \\ &\left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \right\|_{\mathbf{C}^1(\bar{I})} \sqrt{((\rho_{\mathcal{B}, m}(v_j))(t))^2 + ((\rho_{\mathcal{B}, m}(v_j))'(t))^2} \text{ para } t \in \bar{I}. \end{aligned}$$

Daí a norma em $L^2(I)$ de $\left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right)'$ é estimada por

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right)'(t) \right|^2 dt &\leq \left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \right\|_{\mathbf{C}^1(\bar{I})}^2 \int_0^1 \left(((\rho_{\mathcal{B}, m}(v_j))(t))^2 + ((\rho_{\mathcal{B}, m}(v_j))'(t))^2 \right) dt \\ \Rightarrow \left\| \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right)' \right\|_{L^2(I)} &\leq \left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \right\|_{\mathbf{C}^1(\bar{I})} \|\rho_{\mathcal{B}, m}(v_j)\|_{H^1(I)} \\ \xrightarrow{\text{prop. 5}} \left\| \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right)' \right\|_{L^2(I)} &\leq \sqrt{2} \left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \right\|_{\mathbf{C}^1(\bar{I})} \|\rho_{\mathcal{B}, m}(v_j)\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)} \\ &\leq \sqrt{2} \left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \right\|_{\mathbf{C}^1(\bar{I})} \|v_j\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}, \end{aligned}$$

a última desigualdade acima é válida pelo item 2 da proposição 10. Juntando as estimativas feitas até o momento, estamos prontos para estimar $\rho_{\cos, m}^* \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right)$ usando o item 3 da proposição 10, isto é,

$$\left\| \rho_{\cos, m}^* \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right) \right\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{m\pi} \left\| \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right)' \right\|_{L^2(I)} \leq \frac{\sqrt{2} \left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \right\|_{\mathbf{C}^1(\bar{I})} \|v_j\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}}{m\pi}. \quad (3.25)$$

Juntos (3.24) e (3.25) fornecem

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} v_j - \rho_{\cos, m} \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right) \right\|_{L^2(I)} &\leq \left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}^*(v_j) \right\|_{L^2(I)} \\
&\quad + \left\| \rho_{\cos, m} \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right) \right\|_{L^2(I)} \\
\left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} v_j - \rho_{\cos, m} \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right) \right\|_{L^2(I)} &\leq \frac{\left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \right\|_{C^0(\bar{I})} \|v_j\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}}{m\pi} \\
&\quad + \frac{\sqrt{2} \left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \right\|_{C^1(\bar{I})} \|v_j\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}}{m\pi} \\
\left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} v_j - \rho_{\cos, m} \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right) \right\|_{L^2(I)} &\leq \frac{\left(\left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \right\|_{C^0(\bar{I})} + \sqrt{2} \left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \right\|_{C^1(\bar{I})} \right) \|v_j\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}}{m\pi} \\
\left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} v_j - \rho_{\cos, m} \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right) \right\|_{L^2(I)} &\leq \frac{N_{i,j} \|v_j\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}}{m\pi}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Para $1 \leq i \leq n$, pela desigualdade triangular obtemos (3.22) por

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla_u f_i(z) \cdot v - \rho_{\cos, m} \left(\nabla_u f_i(z) \cdot \rho_{\mathcal{B}_{n,m}}(v) \right) \right\|_{L^2(I)} &\leq \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} v_j - \rho_{\cos, m} \left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial u_j} \rho_{\mathcal{B}, m}(v_j) \right) \right\|_{L^2(I)} \\
\left\| \nabla_u f_i(z) \cdot v - \rho_{\cos, m} \left(\nabla_u f_i(z) \cdot \rho_{\mathcal{B}_{n,m}}(v) \right) \right\|_{L^2(I)} &\leq \sum_{j=1}^n \frac{N_{i,j} \|v_j\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}}{m\pi} \\
\left\| \nabla_u f_i(z) \cdot v - \rho_{\cos, m} \left(\nabla_u f_i(z) \cdot \rho_{\mathcal{B}_{n,m}}(v) \right) \right\|_{L^2(I)} &\leq \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n N_{i,j}^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n \|v_j\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}^2}}{m\pi} = \frac{N_i \|v\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}^n}{m\pi}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Terminando a primeira parte da demonstração. Para estimar a segunda parte, aplicamos (3.27) da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\left\| D_u f(z)v - \rho_{\cos_{n,m}} \left(D_u f(z) \rho_{\mathcal{B}_{n,m}}(v) \right) \right\|_{L^2(I)^n}^2 &= \sum_{i=1}^n \left\| \nabla_u f_i(z) \cdot v - \rho_{\cos, m} \left(\nabla_u f_i(z) \cdot \rho_{\mathcal{B}_{n,m}}(v) \right) \right\|_{L^2(I)}^2 \\
\left\| D_u f(z)v - \rho_{\cos_{n,m}} \left(D_u f(z) \rho_{\mathcal{B}_{n,m}}(v) \right) \right\|_{L^2(I)^n}^2 &\leq \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 \|v\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}^2}{m^2 \pi^2} = \frac{\|v\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}^2}{m^2 \pi^2} \sum_{i=1}^n N_i^2 \\
\left\| D_u f(z)v - \rho_{\cos_{n,m}} \left(D_u f(z) \rho_{\mathcal{B}_{n,m}}(v) \right) \right\|_{L^2(I)^n} &\leq \frac{N \|v\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}^n}{m\pi},
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração do lema. \square

Observação 15. Lembramos que identificamos \mathbb{R}^m com sua cópia em $\ell^2(\mathbb{N})$ através do operador linear $\pi_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ dado por $\pi_{\mathbb{R}^m}(a) = (a_1, \dots, a_m, 0, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N})$, $\mathbb{R}^m \subsetneq \ell^2(\mathbb{N})$. Da mesma maneira consideramos $\pi_{\mathbb{R}^{n \times m}} : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})^n$ dado por

$$\pi_{\mathbb{R}^{n \times m}}(v_1, \dots, v_n) = (\pi_{\mathbb{R}^m}(v_1), \dots, \pi_{\mathbb{R}^m}(v_n)) \in \ell^2(\mathbb{N})^n.$$

Para formalizar tais projeções faremos a próxima definição.

Definição 24. Dado $m \geq 1$, denotamos por $\text{pr}_m: \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\text{pr}_{n,m}: \ell^2(\mathbb{N})^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\text{pr}_{n,m}^*: \ell^2(\mathbb{N})^n \rightarrow (\mathbb{R}^{n \times m})^*$ os operadores projeções determinados da seguinte forma

$$\begin{aligned} \text{pr}_m(a) &= (a(1), \dots, a(m)), \\ \text{pr}_{n,m}(v) &= (\text{pr}_m(v_1), \dots, \text{pr}_m(v_n)), \\ \text{pr}_{n,m}^*(v) &= v - \pi_{\mathbb{R}^{n \times m}}(\text{pr}_{n,m}(v)), \end{aligned}$$

para $a \in \ell^2(\mathbb{N})$ e $v = (v_1, \dots, v_n) \in \ell^2(\mathbb{N})^n$, onde $(\mathbb{R}^{n \times m})^*$ é o espaço de Hilbert $\{v \in \ell^2(\mathbb{N})^n \mid v_1 = \dots = v_{n \times m} = 0\}$ com respeito ao produto interno de $\ell^2(\mathbb{N})^n$.

Lema 2. Sejam

1. $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência convergente, digamos $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = r \neq 0$, e considere $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_k \neq 0$ para todo $k \geq m$;
2. $\mathcal{P}_n: \ell^2(\mathbb{N})^n \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})^n$ um operador linear contínuo.

Suponha que $G_n: \ell^2(\mathbb{N})^n \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})^n$ é definido por $(G_n(v))(k) = a_k v(k) - (\mathcal{P}_n(v))(k)$, e

- (a) $\mathcal{P}_{n,m} = \text{pr}_{n,m} \circ \mathcal{P}_m \circ \pi_{\mathbb{R}^{n \times m}}: \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$;
- (b) $G_{n,m} = \text{pr}_{n,m} \circ G_m \circ \text{pr}_{n,m}: \ell^2(\mathbb{N})^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m} \subseteq \ell^2(\mathbb{N})^n$.

Então $\lambda(\mathcal{P}_n) \in [L - \varepsilon_{n,m}, L + \varepsilon_{n,m}]$ onde

$$L = \min \left\{ \lambda(\mathcal{P}_{n,m}), \inf_{k \geq m} |a_k| \right\} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{n,m} = \|G_n - G_{n,m}\|.$$

Demonstração. Considerando a soma de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}) \cong \mathbb{R}^m \oplus (\mathbb{R}^m)^*$, escrevemos

$$\ell^2(\mathbb{N})^n \cong \underbrace{[\mathbb{R}^m \oplus (\mathbb{R}^m)^*] \times \dots \times [\mathbb{R}^m \oplus (\mathbb{R}^m)^*]}_{n \text{ fatores}} \cong \mathbb{R}^{n \times m} \oplus (\mathbb{R}^{n \times m})^*.$$

Sendo $\ell^2(\mathbb{N})^n \cong \ell^2(\mathbb{N})$, o resultado segue de [Ramos, Nolasco e Gameiro 2022, Lemma 2, pg. 11].

□

Agora estamos prontos para demonstrar o item (I) do teorema 6.

Demonstração. Seja $G: \ell^2(\mathbb{N})^n \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})^n$ definida por $G_n(b) = \pi_{\cos_n} \left(D_{u,f}(z) h_{\mathcal{B}_n}^{-1}(b) \right)$ para todo $b \in \ell^2(\mathbb{N})^n$ e sejam

- $a_k = 1$ para $k \in \mathbb{N}$;
- $\mathcal{P}_n = \pi_{\cos_n} \circ D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w) \circ h_{\mathcal{B}_n}^{-1} : \ell^2(\mathbb{N})^n \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})^n$;
- $\mathcal{P}_{n,m} = \pi_{\cos_{n,m}} \circ D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w) \circ h_{\mathcal{B}_{n,m}}^{-1} = D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w) : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$;
- $G_{n,m} = \pi_{\cos_{n,m}} \circ D_{uf}(z) \circ \left(h_{\mathcal{B}_{n,m}}^{-1} \circ \text{pr}_{n,m} \right) : \ell^2(\mathbb{N})^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m} \subsetneq \ell^2(\mathbb{N})^n$.

O operador \mathcal{P}_n é contínuo, pois é composição de operadores contínuos. Mais ainda, $\lambda(\mathcal{P}_n) = \lambda(D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w))$, já que π_{\cos_n} e $h_{\mathcal{B}_n}^{-1}$ são isomorfismos isométricos. Dado $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \ell^2(\mathbb{N})^n$ pela definição de $D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}$ em (3.21) temos

$$\mathcal{P}_n(b) = \pi_{\cos_n} \left((D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w))(h_{\mathcal{B}_n}^{-1}(b)) \right) = \pi_{\cos_n} \left(\left(h_{\mathcal{B}_n}^{-1}(b) \right)' \right) - G_n(b) \Rightarrow$$

$$(\mathcal{P}_n(b))(k) = (b_1(k+1), b_2(k+1), \dots, b_n(k+1)) - (G_n(b))(k) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Pelo lema 2, $\lambda(D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w)) = \lambda(\mathcal{P}_n) \in [L - \varepsilon_{n,m}, L + \varepsilon_{n,m}]$ onde

$$L = \min(\lambda(D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)), 1) \quad \text{e} \quad \varepsilon_{n,m} = \|G_n - G_{n,m}\|_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N})^n)}.$$

Finalmente, considerando $v(b) = h_{\mathcal{B}_n}^{-1}(b) \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$, pelo lema 1 segue que

$$\begin{aligned} \|(G_n - G_{n,m})(b)\|_{\ell^2(\mathbb{N})^n} &\leq \|D_{uf}(z)v(b) - \rho_{\cos_{n,m}}(D_{uf}(z)\rho_{\mathcal{B}_{n,m}}(v(b)))\|_{L^2(I)^n} \\ &\leq \frac{N\|v(b)\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n}}{m\pi} = \frac{N\|b\|_{\ell^2(\mathbb{N})^n}}{m\pi} \end{aligned}$$

para todo $b \in \ell^2(\mathbb{N})^n$ e, portanto

$$\varepsilon_{n,m} = \|G_n - G_{n,m}\|_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N})^n)} \leq \frac{N}{m\pi}$$

provando o resultado. □

3.4.2 Prova do item (II) do teorema 6

Assim como na demonstração do item (I) do teorema 6 precisamos de alguns resultados preliminares para provar o item (II) deste teorema.

Lema 3. Para $u \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$, são válidas as seguintes desigualdades

1. $\|u\|_{C^0(\bar{I})} \leq \|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}$;
2. $\|u\|_{C^0(\bar{I})^n} \leq \|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n}$.

Demonstração. Dado $u \in H^{1,0}(I)$ e $x \in I$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo para $H^1(I)$ (ver [Brezis 2011, Theorem 8.2, pg. 204]) vale

$$u(x) = \int_0^x u'(t) dt \Rightarrow |u(x)| \leq \int_0^1 |u'(t)| dt. \quad (3.28)$$

Segue da desigualdade de Holder (ver [Brezis 2011, Theorem 4.6, pg. 92]) que

$$|u(x)| \leq \|u'\|_{L^2(I)} \Rightarrow \|u\|_{C^0(\bar{I})} \leq \|u'\|_{L^2(I)} = \|u\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)}.$$

Para mostrar o item 2 basta considerar o espaço produto $C^0(\bar{I})^n$ munido com o produto interno e norma com em (3.12) e (3.13). Daí, obtemos

$$\|u\|_{C^0(\bar{I})^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{C^0(\bar{I})}^2} \quad (3.29)$$

onde $u = (u_1, \dots, u_n)$. O item vale aplicando o item 1 em cada u_i , $1 \leq i \leq n$. \square

Demonstraremos o item 2 do teorema 6.

Demonstração. Considerando $u, w \in \overline{B(0, r)}_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n}$ e $z \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$, escrevemos

$$((D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(u) - D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w))(z))(t) = (D_u f(t, u(t)) - D_u f(t, w(t)))z(t),$$

para todo $t \in \bar{I}$. Aplicando o Teorema do Valor Médio (ver [Cartan 1971, Theorem 3.3.2, pg. 41]) em $D_u f^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $D_u f^t(v) := D_u f(t, v)$, segue que

$$\|(D_u f(t, u_1) - D_u f(t, u_0))\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \leq K \|u_1 - u_0\|_{\mathbb{R}^n}$$

para todo $t \in \bar{I}$, $u_1, u_0 \in \overline{B(0, r)}_{\mathbb{R}^n}$. Note que $u, w \in \overline{B(0, r)}_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n}$, então pelo item 2 do lema 3 temos $u(t), w(t) \in \overline{B(0, r)}_{\mathbb{R}^n}$. Portanto, tomando $h = u - w \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$, vale

$$\begin{aligned} \|D_u f(t, u(t)) - D_u f(t, w(t))\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} &\leq K \|h(t)\|_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \\ \|((D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(u) - D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w))(z))(t)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq K \|h(t)\|_{\mathbb{R}^n} \|z(t)\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

para todo $t \in \bar{I}$. Novamente pelo item 2 do lema 3 obtemos $\|h(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|h\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n}$, assim

$$\|((D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(u) - D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w))(z))(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq K \|h\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n} \|z(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

para todo $t \in \bar{I}$. Portanto

$$\|(D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(u) - D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w))(z)\|_{L^2(I)^n} \leq K \|h\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n} \|z\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n}.$$

Concluimos que vale

$$\|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(u) - D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w)\|_{\mathcal{L}(H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n, L^2(I)^n)} \leq K \|h\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n} = K \|u - w\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n},$$

provando o teorema. \square

3.5 Resultados práticos

Nesta seção desenvolveremos alguns resultados que serão utilizados para implementação da parte teórica vista anteriormente. A escolha de produzir esta seção separadamente é que ela visa muito mais os códigos, que por sua vez, podem ser mudados. O primeiro resultado é sobre como obter K no teorema 6.

3.5.1 Calculando K

Proposição 11. Seja $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua em t e de classe \mathbf{C}^2 em u . Então,

$$\|D_u^2 f(t, u)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \leq \sqrt{\|H(f_1)(t, u)\|^2 + \cdots + \|H(f_n)(t, u)\|^2}. \quad (3.30)$$

onde $H(f_i)(t, u)$, $1 \leq i \leq n$, representa a matriz hessiana da função coordenada f_i de f em $(t, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$ com relação as variáveis $u \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. De fato, dado $(t, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$ por [Cartan 1971, eq. (5.2.5), pg. 62] escrevemos

$$\begin{aligned} D_u^2 f(t, u)(v, w) &= \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_i \partial u_j}(t, u) v_i w_j, \dots, \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 f_n}{\partial u_i \partial u_j}(t, u) v_i w_j \right) \\ &= (\langle v, H(f_1)(t, u)w \rangle_{\mathbb{R}^n}, \dots, \langle v, H(f_n)(t, u)w \rangle_{\mathbb{R}^n}) \Rightarrow \\ \|D_u^2 f(t, u)(v, w)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \sqrt{\|H(f_1)(t, u)\|^2 + \cdots + \|H(f_n)(t, u)\|^2} \|v\|_{\mathbb{R}^n} \|w\|_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \\ \|D_u^2 f(t, u)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} &\leq \sqrt{\|H(f_1)(t, u)\|^2 + \cdots + \|H(f_n)(t, u)\|^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

□

Observação 16. 1. As normas das matrizes hessianas na demonstração acima não foram determinadas de propósito, pois podem ser facilmente escolhidas na implementação. Além disso, utilizando a Toolbox INTLAB [Rump 1999] do MATLAB [MATLAB 2016] tais matrizes são obtidas por diferenciação automática;

2. Seguindo os passos do item anterior as normas das matrizes hessianas são obtidas por aritmética intervalar. Assim, temos o intervalo

$$\hat{K} = \sup_{(t, u) \in \bar{I} \times \bar{B}(0, r)_{\mathbb{R}^n}} \left(\sqrt{\|H(f_1)(t, u)\|^2 + \cdots + \|H(f_n)(t, u)\|^2} \right),$$

onde r em geral é escolhido como $\|w\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n}$, sendo w uma solução numérica de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w) = 0$.

Tomamos $K = \sup \hat{K}$ o extremo deste intervalo.

3.5.2 Calculando N

O próximo resultado mostra como calcular N .

Proposição 12. Seja $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = f(t, u)$, uma aplicação contínua em $t \in \mathbb{R}$ e \mathbf{C}^2 em $u \in \mathbb{R}^n$, $w : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação \mathbf{C}^1 em $H_{\mathcal{B}}^1(I)^n$ e $z(t) = (t, w(t))$, para $t \in \bar{I}$. Se existem $N_{i,j}$, N_i e N satisfazendo as hipóteses do teorema 6 então $\|\mathcal{M}\|_F \leq N$, onde

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \left\| \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(z) \right\|_{\mathbf{C}^0(\bar{I})} + \sqrt{2} \left\| \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(z) \right\|_{\mathbf{C}^1(\bar{I})} & \cdots & \left\| \frac{\partial f_1}{\partial u_n}(z) \right\|_{\mathbf{C}^0(\bar{I})} + \sqrt{2} \left\| \frac{\partial f_1}{\partial u_n}(z) \right\|_{\mathbf{C}^1(\bar{I})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\| \frac{\partial f_n}{\partial u_1}(z) \right\|_{\mathbf{C}^0(\bar{I})} + \sqrt{2} \left\| \frac{\partial f_n}{\partial u_1}(z) \right\|_{\mathbf{C}^1(\bar{I})} & \cdots & \left\| \frac{\partial f_n}{\partial u_n}(z) \right\|_{\mathbf{C}^0(\bar{I})} + \sqrt{2} \left\| \frac{\partial f_n}{\partial u_n}(z) \right\|_{\mathbf{C}^1(\bar{I})} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

e $\|\mathcal{M}\|_F = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} [\mathcal{M}]_{i,j}^2 \right)^{1/2}$ é a norma de Frobenius ([Burden e Faires 2016, pg. 449])

de \mathcal{M} . Mais ainda, tomando $\mathcal{M}_{i,j} = N_{i,j}$, $N_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n N_{i,j}^2}$ e $N = \|\mathcal{M}\|_F$ para $1 \leq i, j \leq n$ as hipóteses do teorema 6 são satisfeitas, com relação a estes parâmetros.

Demonstração. Como $f = f(t, u)$ é \mathbf{C}^2 em $u \in \mathbb{R}^n$ e z é \mathbf{C}^1 , \mathcal{M} está bem definida. Calculando a norma de Frobenius de \mathcal{M} , temos

$$\|\mathcal{M}\|_F^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} [\mathcal{M}]_{i,j}^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} N_{i,j}^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} N_{i,j}^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} N_i^2 = N^2 \Rightarrow \|\mathcal{M}\|_F \leq N, \quad (3.33)$$

tomando $N_{i,j}$, N_i e N como nas hipóteses do teorema 6. Pela definição da matriz \mathcal{M} se $\mathcal{M}_{i,j} = N_{i,j}$, $N_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n N_{i,j}^2}$ e $N = \|\mathcal{M}\|_F$, as hipóteses do teorema 6 são claramente satisfeitas, provando o resultado. \square

Observação 17. Pelo resultado acima para obter N satisfazendo as hipóteses do teorema 6 basta calcular a norma de Frobenius de \mathcal{M} . A norma de Frobenius é de fácil implementação, porém para conseguir a matriz \mathcal{M} utilizaremos a Toolbox INTLAB [Rump 1999] do MATLAB [MATLAB 2016], pois através dessas ferramentas, é possível usar a diferenciação automática para obter \mathcal{M} através de f . Assim,

$$\hat{N} = \|\mathcal{M}\|_F,$$

onde $z(t) = (t, w(t))$, $t \in \bar{I}$, e w uma solução numérica de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w) = 0$, é um intervalo que contém a norma Frobenius de \mathcal{M} .

Escolhemos $N = \sup \hat{N}$.

3.5.3 Calculando v

Calculamos v no teorema 6 pelo seguinte resultado.

Proposição 13. A diferencial da aplicação $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}} : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ (ver definição 20) é dada por

$$D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w) = \pi_{\cos_{n,m}} \circ D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w) \circ h_{\mathcal{B}_{n,m}}^{-1} : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m} \quad (3.34)$$

com $w \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$. Mais ainda, utilizando a notação da proposição 7 os elementos de $D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)$, como uma matriz em $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ são dados por

$$\begin{aligned} & \left([D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{1,j}, [D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{m+1,j}, \dots, [D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{(n-1)m+1,j} \right) \\ &= \int_0^1 \chi_j'(t) - D_{uf}(t, w(t)) \chi_j(t) dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \left([D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{i,j}, [D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{m+i,j}, \dots, [D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{(n-1)m+i,j} \right) = \\ & \int_0^1 (\chi_j'(t) - D_{uf}(t, w(t)) \chi_j(t)) \sqrt{2} \cos((i-1)\pi t) dt \end{aligned}$$

para $j \in \chi = \{1, m+1, 2m+1, \dots, (n-1)m+1\}$ e $2 \leq i \leq m$. Tomando $j = (l-1)m+k$ com $1 \leq l \leq n$ e $2 \leq k \leq m$ temos $j \in \{1, 2, \dots, n \times m\} \setminus \chi$ e vale

$$\begin{aligned} & \left([D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{1,j}, [D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{m+1,j}, \dots, [D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{(n-1)m+1,j} \right) = \\ & \int_0^1 \left(s_l^{(k-1)} \right)'(t) - D_{uf}(t, w(t)) s_l^{(k-1)}(t) dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \left([D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{i,j}, [D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{m+i,j}, \dots, [D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{(n-1)m+i,j} \right) = \\ & \int_0^1 \left(\left(s_l^{(k-1)} \right)'(t) - D_{uf}(t, w(t)) s_l^{(k-1)}(t) \right) \sqrt{2} \cos((i-1)\pi t) dt, \end{aligned}$$

onde $2 \leq i \leq m$.

Demonstração. Dada $w \in H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$ já foi visto no teorema 6 que $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n} : H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n \rightarrow L^2(I)^n$ é diferenciável em w . Sendo $h_{\mathcal{B}_n}$ e π_{\cos_n} isomorfismos isométricos então vale a igualdade

$$D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w) = \pi_{\cos_{n,m}} \circ D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w) \circ h_{\mathcal{B}_{n,m}}^{-1} : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}. \quad (3.35)$$

Dado $e_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$, temos

$$h_{\mathcal{B}_{n,m}}^{-1}(e_j) = \begin{cases} \chi_j & \text{se } j \in \chi \\ s_l^{(k-1)} & \text{se } j = (l-1)m+k \text{ com } 1 \leq l \leq n \text{ e } 2 \leq k \leq m. \end{cases} \quad (3.36)$$

Logo, denotando $v = h_{\mathcal{B}_{n,m}}^{-1}(e_j)$ obtemos

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)(e_j) &= \pi_{\cos_{n,m}} \circ D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w) \circ h_{\mathcal{B}_{n,m}}^{-1}(e_j) = \pi_{\cos_{n,m}} \circ D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w)(v) = \\ & \pi_{\cos_{n,m}}(v' - D_{uf}(t, w)v) = \underbrace{(\widehat{\Psi}_{1\cos,m})}_{\in \mathbb{R}^m}, \dots, \underbrace{(\widehat{\Psi}_{n\cos,m})}_{\in \mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}^{n \times m} \end{aligned}$$

o que determina os m coeficientes da base cosseno de $L^2(I)$ para cada uma das n funções coordenadas de $v' - D_u f(t, w)v$, aos quais foram denotamos por ψ_i . Note que a alocação dos coeficientes é dada seguindo a definição de $\pi_{\cos_{n,m}}$, ou seja, em blocos de m coeficientes. Multiplicando por exemplo por 1 cada entrada do vetor $v' - D_u f(t, w)v$ e integrando de 0 até 1, coordenada por coordenada, obtemos o primeiro coeficiente das funções coordenadas de $v' - D_u f(t, w)v$ na base cosseno de $L^2(I)$, e segundo a definição de $\pi_{\cos_{n,m}}$ tais coordenadas devem ser alocadas na coluna j de $D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)$, pois $v = h_{\mathcal{B}_{n,m}}^{-1}(e_j)$, seguindo as linhas de m em m , dependendo de (3.36) para determinar qual linha é a primeira da alocação. Daí verificamos que para $j \in \chi$ as colunas de $D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)$ segundo (3.36) são determinadas por

$$\int_0^1 \chi_j'(t) - D_u f(t, w(t))\chi_j(t) dt = \left([D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{1,j}, [D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{m+1,j} \cdots, [D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{(n-1)m+1,j} \right)$$

e

$$\int_0^1 (\chi_j'(t) - D_u f(t, w(t))\chi_j(t)) \sqrt{2} \cos((i-1)\pi t) dt = \left([D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{i,j}, [D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{m+i,j} \cdots, [D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{(n-1)m+i,j} \right)$$

e $2 \leq i \leq m$. Expressando os demais índices de $\{1, 2, \dots, n \times m\} \setminus \chi$ por $j = (l-1)m + k$ com $1 \leq l \leq n$ e $2 \leq k \leq m$, obtemos

$$\int_0^1 \left(s_l^{(k-1)} \right)'(t) - D_u f(t, w(t))s_l^{(k-1)}(t) dt = \left([D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{1,j}, [D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{m+1,j} \cdots, [D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{(n-1)m+1,j} \right)$$

e

$$\int_0^1 \left(\left(s_l^{(k-1)} \right)'(t) - D_u f(t, w(t))s_l^{(k-1)}(t) \right) \sqrt{2} \cos((i-1)\pi t) dt = \left([D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{i,j}, [D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{m+i,j} \cdots, [D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)]_{(n-1)m+i,j} \right)$$

onde $2 \leq i \leq m$, finalizando a demonstração. \square

Observação 18. 1. Calculando $D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)$, caso seja inversível, segue do teorema 6 que $\lambda(D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w))$ possui módulo de bijetividade. Mais ainda, o módulo de bijetividade $\lambda(D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w))$ é calculado por $\|\lambda(D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w))^{-1}\|^{-1}$. Além disso, por [Ramos, Nolasco e Gameiro 2022, prop. 5, pg. 7] concluímos que $\lambda(D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)) \geq \lambda(D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w))$;

2. Utilizaremos a regra de Simpson [Rump 2010, Theorem 12.1., pg. 85] para implementar a integração na proposição 13.

Pela norma de Frobenius, que em geral é fácil de ser implementada, obtemos o seguinte resultado para estimar $\lambda(D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w))$.

Proposição 14. Supondo que $D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)$ é inversível então

$$\|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)^{-1}\|_F^{-1} \leq \lambda(D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)) \leq \|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)\|_F. \quad (3.37)$$

Demonstração. Começaremos provando a última desigualdade em (3.37). Como

$\|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w) D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)^{-1}\| = 1$ então $\|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)^{-1}\|^{-1} \leq \|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)\|$. Assim $\lambda(D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)) = \|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)^{-1}\|^{-1} \leq \|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)\| \leq \|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)\|_F$. A outra desigualdade segue de $\|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)^{-1}\|_F \geq \|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)^{-1}\|$ pois implica

$$\|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)^{-1}\|_F^{-1} \leq \|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)^{-1}\|^{-1} = \lambda(D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)). \text{ Portanto, vale}$$

$$\|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)^{-1}\|_F^{-1} \leq \lambda(D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)) \leq \|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)\|_F. \quad (3.38)$$

□

Assim pelos resultados acima, escolhemos,

$$\mathbf{v} = \inf \|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)^{-1}\|_F^{-1}$$

lembrando que $\|D\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w)^{-1}\|_F^{-1}$ é um intervalo.

3.5.4 Calculando η

Se w é uma solução numérica para $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{n,m}}(w) = 0$, obtemos η calculando primeiramente

$$\|\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w)\|_{L^2(I)^n} = \sqrt{\|(\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n})_1\|_{L^2(I)}^2 + \cdots + \|(\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n})_n\|_{L^2(I)}^2},$$

onde a integração feita nas coordenadas de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w) = w' - f(t, w)$, isto é, em $(\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n})_i$, $1 \leq i \leq n$, é através da regra de Simpson. Assim, tomamos η por

$$\eta = \sup \|\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w)\|_{L^2(I)^n},$$

já que $\|\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}(w)\|_{L^2(I)^n}$ é um intervalo.

APLICAÇÕES EM PVI'S

Para exemplificar os conceitos apresentados no capítulo anterior, desenvolveremos alguns exemplos de validação de soluções numéricas para sistemas de EDO's no caso de PVI's. Na primeira seção, sistemas de EDO's lineares, serão fornecidas as soluções teóricas com intuito de tornar a discussão mais clara. Porém na segunda seção, sistemas de EDO's não lineares, as soluções teóricas são em geral extremamente complicadas de serem obtidas. Neste contexto principalmente que este trabalho faz-se necessário, pois através do método de validação apresentado aqui localizaremos a solução teórica, caso exista, próximo a uma solução numérica sem exibir uma fórmula analítica para a solução teórica. Os códigos utilizados neste capítulo estão disponíveis no GitHub [Nolasco 2021]. As entradas dos scripts disponibilizados são f , $D_u f$, m (tamanho da projeção), n (tamanho do sistema), R (raio de verificação do teorema 5), parâmetros da equação (se necessário), $intvSol = [t_0, L]$ (domínio da solução), $initCond$ (condição inicial) e $finalCond$ (condição final para PVF). Todas estas entradas são descritas nos modelos de scripts disponibilizados. Preenchendo estas entradas, ao rodar o script, automaticamente a função `compute_solutions`, tentará calcular uma solução numérica para o problema proposto. Caso ela falhe ou caso o usuário já possua a solução numérica, basta fornecer o vetor de valores desta solução numérica para a função `verify_solution`. A função `compute_solutions` foi implementada utilizando os solvers do MATLAB `fsolve`, `ODE45` e `bvp4c`. Caso apareça na janela de comando do MATLAB uma mensagem de perda de precisão ao rodar `compute_solutions`, provavelmente seu problema foi mal posto, então revise as condições iniciais e/ou finais, intervalo de definição da solução ou até mesmo a própria equação. A função `compute_solutions` possui como principal saída um vetor $m \times n$ que representa os coeficientes da solução numérica na base de $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$. Ela alimenta automaticamente a função `verify_solution` que é responsável por verificar rigorosamente, usando aritmética intervalar, as hipóteses do teorema 5. A função `verify_solution` foi implementada usando como principal ferramenta a toolbox INTLAB [Rump 1999]. Suas saídas são

1. “Proof Failed! No real roots.”- Isto significa que $\Delta = v^2 - 2\eta K < 0$. Neste caso, se $v < 0$ aumente m ou diminua o extremo do intervalo L , pois pela proposição 14 $v > 0$. Se $\eta > 1$ a solução numérica é muito ruim, logo verifique se condições iniciais e/ou de fronteira estão bem postas. Caso contrário faça igual no caso $v < 0$;
2. “Proof Failed! Root out of bounds” - Isto significa que $\Delta = v^2 - 2\eta K > 0$ mas $t^* < 0$ no teorema 5. Basta seguir a dica da mensagem, ou diminua o extremo do intervalo L ;
3. “Proof Failed! Root out of bounds. Please, try to increase R length.” - Isto significa que $\Delta = v^2 - 2\eta K > 0$ mas $t^* > R$. Basta seguir a dica;
4. “Proof was successful!” - Neste caso, foi possível verificar que próximo a solução numérica fornecida existe uma solução teórica para o problema. Os outputs são os valores η , v , K , t^* e t^{**} , do teorema 5, e também o plot da solução numérica. Note que os scripts fornecidos foram configurados para plot de soluções numéricas em sistemas de tamanho 2, 3 e 4 (basta escolher o script nos exemplos), logo para tamanhos diferentes destes é necessário configurar o plot.

4.1 Sistemas de EDO's lineares

Exemplo 3. Como primeira aplicação para o método descrito no capítulo anterior, considere o PVI

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(-1) = (10, 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = t - u_1 \end{cases}, \quad u_1(-1) = 10, u_2(-1) = 3, \quad (4.1)$$

onde $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $f(t, u_1, u_2) = (f_1(t, u_1, u_2), f_2(t, u_1, u_2)) = (u_2, t - u_1)$ e $u = (u_1, u_2)$. É fácil verificar que a solução teórica deste PVI em $[-1, 2]$ é dada por

$$u^*(t) = (c_2 \sin(t) + c_1 \cos(t) + t, -c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) + 1),$$

onde

$$c_1 = 11 \cos(1) + 2 \sin(1) \quad \text{e} \quad c_2 = -11 \sin(1) + 2 \cos(1).$$

As entradas do script para validação de soluções numéricas para o PVI (4.1) são f , $D_{(u_1, u_2)} f$, m (tamanho da projeção na base de $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$), n (tamanho do sistema) e R (raio de verificação de solução em $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$). Calculando

$$D_{(u_1, u_2)} f(t, u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

fornecemos para o script as entradas $f, D_{(u_1, u_2)}f, m = 32, n = 2$ e $R = 1$. Obtemos como resposta

Proof was successful!

$$\eta = 5.429 \cdot 10^{-6}$$

$$v = 0.89811$$

$$K = 0.05$$

$$tstar = 6.0449 \cdot 10^{-6}$$

$$t2star = 35.9246$$

Elapsed Time in seconds = 569.3648

Através da função *compute_solution* calculamos a solução numérica para o PVI equivalente

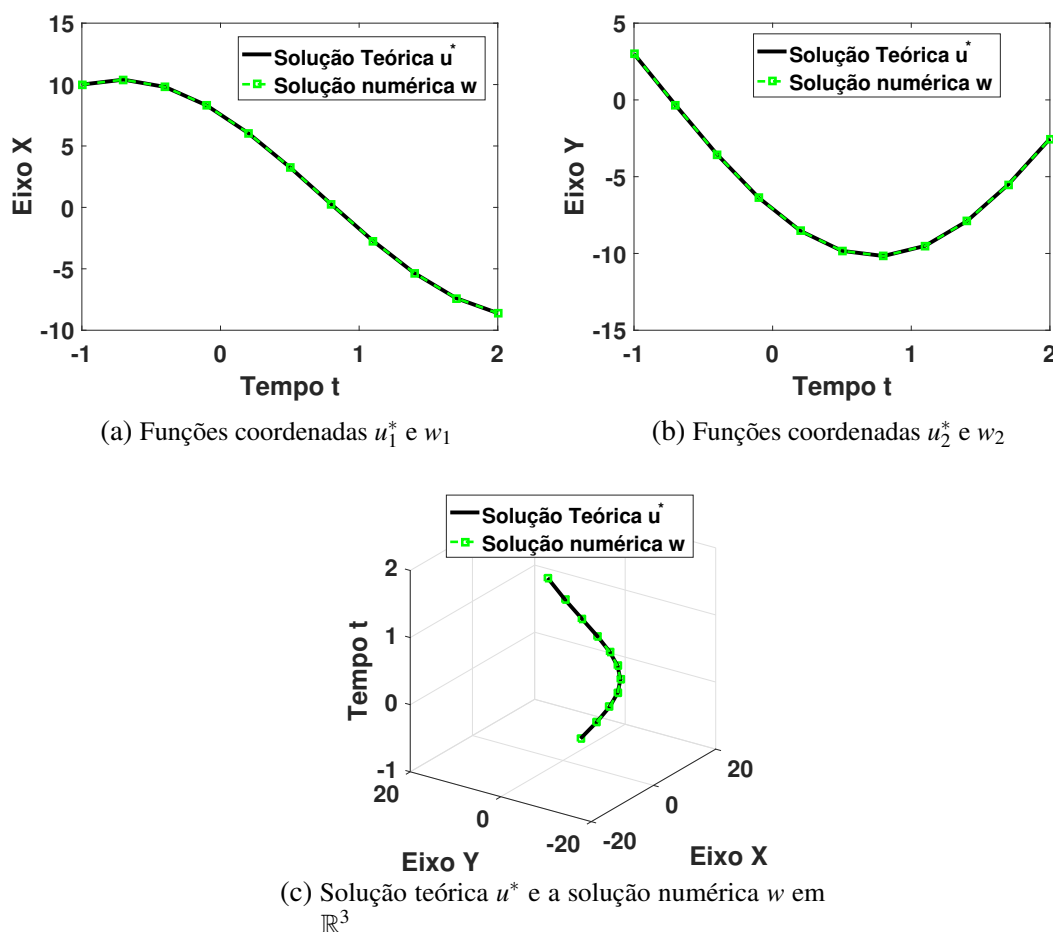


Figura 5 – Plot da solução teórica u^* e a solução numérica w do PVI (4.1)

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\begin{cases} v' = (v_1, v_2)' = 3f(3s - 1, v_1 + 10, v_2 + 3) = g(s, v) \\ v(0) = (0, 0). \end{cases} \quad (4.2)$$

Esta função ainda ajusta a solução numérica obtida com respeito a base de $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2$. Ela retorna uma matriz b de tamanho $m \times n$, neste caso 32×2 , cuja as colunas representam os coeficientes

das funções coordenadas da solução numérica do PVI (4.2) na base de $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2$. A matriz b serve para alimentar a função *verify_solution*, que utilizará a aritmética intervalar para verificar rigorosamente as condições do teorema 5. No caso descrito acima o retorno de *verify_solution* foi que existe uma solução teórica próximo a aproximação numérica fornecida. A saída *tstar* fornece o raio r da bola fechada em $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2$ de centro na solução numérica e contendo a solução teórica do PVI (4.2). Chamando a solução numérica do PVI (4.2) de w_I , $I = (0, 1)$ como no capítulo anterior, o resultado acima nos fornece $v^* \in \overline{B(w_I, t^*)}_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2}$, onde $v^*(s) = u^*(3s - 1) - (10, 3)$, $s \in [0, 1]$, é a solução teórica do PVI (4.2). Retornando ao intervalo original $[-1, 2]$ a solução teórica e a solução numérica são respectivamente u^* e $w(t) = w_I\left(\frac{t-(-1)}{2-(-1)}\right) + (10, 3) = w_I\left(\frac{t+1}{3}\right) + (10, 3)$ para $t \in [-1, 2]$. Calculando sua diferença em norma

$$\begin{aligned} \|(t, u^*(t)) - (t, w(t))\|_{\mathbb{R}^3} &= \|u^*(t) - w(t)\|_{\mathbb{R}^2} = \left\| u^*(t) - w_I\left(\frac{t+1}{3}\right) - (10, 3) \right\|_{\mathbb{R}^2} = \\ & \|u^*(3s - 1) - (10, 3) - w_I(s)\|_{\mathbb{R}^2} = \|v^*(s) - w_I(s)\|_{\mathbb{R}^2} \leq \|v^* - w_I\|_{C^0(I)^2} \leq \|v^* - w_I\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2} < t^* \\ & \Rightarrow \|(t, u^*(t)) - (t, w(t))\|_{\mathbb{R}^3} < t^* = 6.0449 \cdot 10^{-6} \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde $s = \frac{t+1}{3}$ para $s \in [0, 1]$, e a desigualdade $\|v^* - w_I\|_{C^0(I)^2} \leq \|v^* - w_I\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2}$ é válida pelo lema 3, ver figura 5.

Exemplo 4. Considere o PVI

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(0) = (-6, 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_1 = -2u_2 \\ u'_2 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 \end{cases}, \quad u_1(0) = -6, \quad u_2(0) = 2, \quad (4.4)$$

onde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $f(t, u_1, u_2) = (f_1(t, u_1, u_2), f_2(t, u_1, u_2)) = (-2u_2, \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2)$ e $u = (u_1, u_2)$. A solução teórica deste PVI em $[0, 2]$ é dada por

$$u^*(t) = \frac{2}{15}e^{-t/4} \left(-11\sqrt{15}\text{sen}(\sqrt{15}t/4) - 45\cos(\sqrt{15}t/4), -7\sqrt{15}\text{sen}(\sqrt{15}t/4) + 15\cos(\sqrt{15}t/4) \right).$$

Calculando

$$D_{(u_1, u_2)}f(t, u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

fornecemos para o script as entradas $f, D_{(u_1, u_2)}f, m = 32, n = 2$ e $R = 1$. Obtemos como resposta

Proof was successful!

$$\eta = 4.6315 \cdot 10^{-6}$$

$$v = 0.89811$$

$$K = 0.05$$

$$tstar = 5.1569 \cdot 10^{-6}$$

$$t2star = 35.9246$$

Elapsed Time in seconds = 564.1579

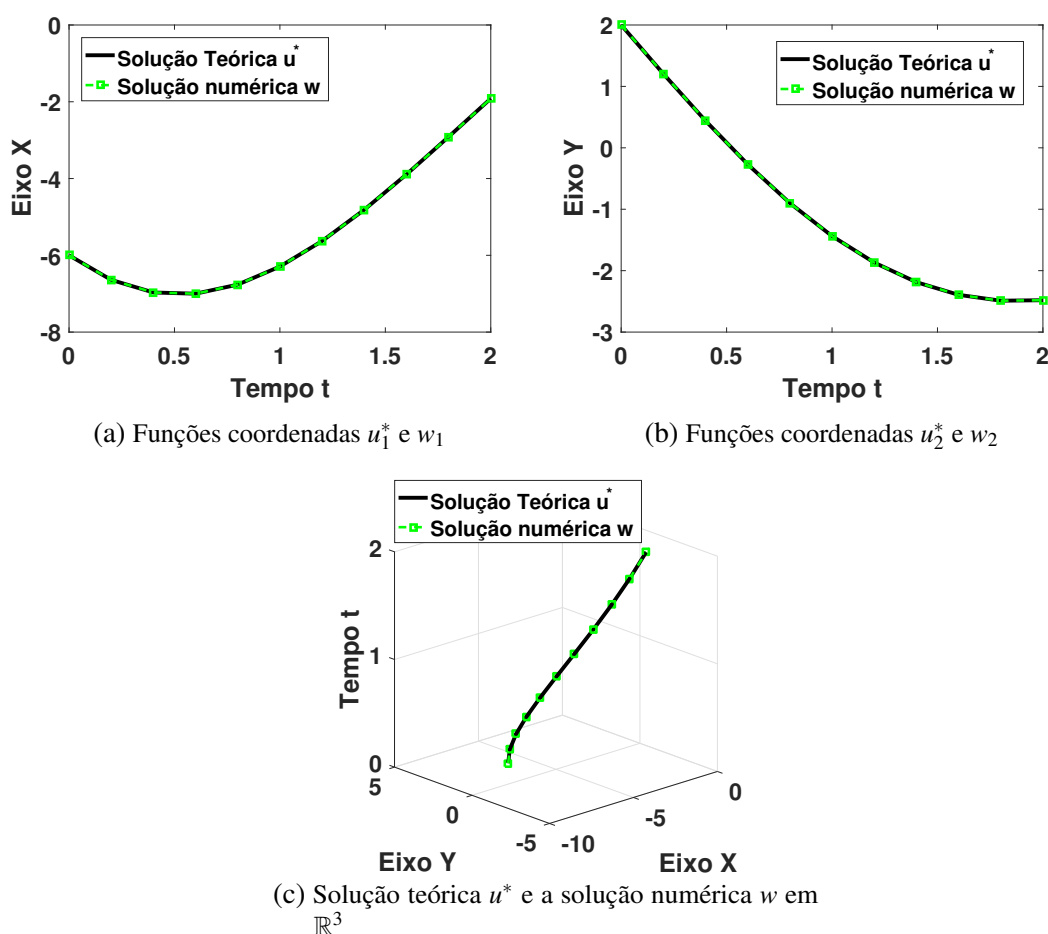


Figura 6 – Plot da solução teórica u^* e a solução numérica w do PVI (4.4)

Fonte: Elaborada pelo autor.

onde $v^*(s) = u^*(2s) - (-6, 2)$, $s \in [0, 1]$, é a solução teórica e w_I é a solução numérica do PVI equivalente

$$\begin{cases} v' = (v_1, v_2)' = 2f(2s, v_1 - 6, v_2 + 2) = g(s, v) \\ v(0) = (0, 0). \end{cases} \quad (4.5)$$

Retornando ao intervalo original $[0, 2]$ a solução teórica e a solução numérica são respectivamente u^* e $w(t) = w_I(t/2) + (-6, 2)$ para $t \in [0, 2]$. Calculando sua diferença em norma como em (4.3), temos

$$\|(t, u^*(t)) - (t, w(t))\|_{\mathbb{R}^3} < t^* = 5.1569 \cdot 10^{-6},$$

ver figura 6.

4.2 Sistemas de EDO's não lineares

Nesta seção validaremos soluções numéricas para sistemas de EDO's não lineares. Diferente da seção anterior, neste caso só exibiremos as soluções teóricas triviais dos problemas apresentados.

Exemplo 5. O primeiro sistema não linear é

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(1) = (1, 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_1 = 3u_1 - 2u_1^2 - u_1u_2 \\ u'_2 = 3u_2 - 2u_2^2 - u_1u_2 \end{cases}, \quad u_1(1) = 1, u_2(1) = 2 \quad (4.6)$$

onde $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $f(t, u_1, u_2) = (f_1(t, u_1, u_2), f_2(t, u_1, u_2)) = (3u_1 - 2u_1^2 - u_1u_2, 3u_2 - 2u_2^2 - u_1u_2)$ e $u = (u_1, u_2)$. Calculando

$$D_{(u_1, u_2)}f(t, u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 3 - 4u_1 - u_2 & -u_1 \\ -u_2 & 3 - 4u_2 - u_1 \end{bmatrix},$$

fornecemos para o script as entradas $f, D_{(u_1, u_2)}f, m = 35, n = 2$ e $R = 1$. Obtemos como resposta

Proof was successful!

$$\eta = 1.3105 \cdot 10^{-5}$$

$$v = 0.66953$$

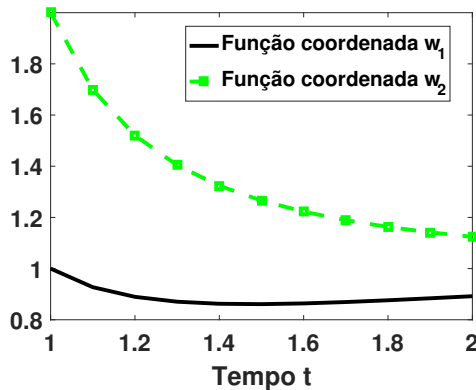
$$K = 6$$

$$tstar = 1.9575 \cdot 10^{-5}$$

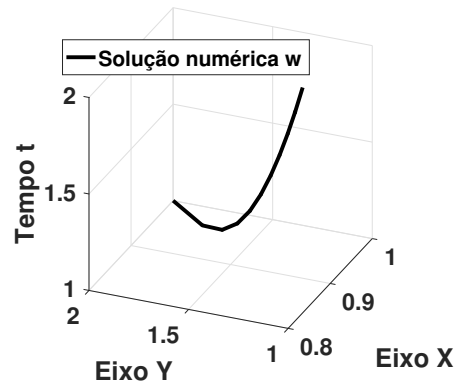
$$t2star = 0.22316$$

Elapsed Time in seconds = 783.6725

Este exemplo usaremos diretamente o teorema 5 para obter a estimativa entre v^* e w_I , como



(a) Funções coordenadas da solução numérica w



(b) Solução numérica w em \mathbb{R}^3

Figura 7 – Plot da solução numérica w do PVI (4.6)

Fonte: Elaborada pelo autor.

segue abaixo

$$\|v^* - w_I\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2} \leq 1.9575 \cdot 10^{-5} = t^*$$

onde v^* é a solução teórica e w_I é a solução numérica do PVI equivalente

$$\begin{cases} v' = (v_1, v_2)' = f(s + 1, v_1 + 1, v_2 + 2) = g(s, v) \\ v(0) = (0, 0). \end{cases} \quad (4.7)$$

Retornando ao intervalo original $[1, 2]$ a solução teórica e a solução numérica são respectivamente $u^*(t) = v^*(t-1) + (1, 2)$ e $w(t) = w_I(t-1) + (1, 2)$ para $t \in [1, 2]$. Calculando sua diferença em norma, temos

$$\begin{aligned} \|(t, u^*(t)) - (t, w(t))\|_{\mathbb{R}^3} &= \|u^*(t) - w(t)\|_{\mathbb{R}^2} = \|v^*(t-1) + (1, 2) - w_I(t-1) - (1, 2)\|_{\mathbb{R}^2} = \\ &= \|v^*(t-1) - w_I(t-1)\|_{\mathbb{R}^2} = \|v^*(s) - w_I(s)\|_{\mathbb{R}^2} \leq \|v^* - w_I\|_{C^0(I)^2} \leq \|v^* - w_I\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2} \leq t^* \\ &\Rightarrow \|(t, u^*(t)) - (t, w(t))\|_{\mathbb{R}^3} \leq t^* = 1.9575 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde $s = t - 1$ para $s \in [0, 1]$, e a desigualdade $\|v^* - w_I\|_{C^0(I)^2} \leq \|v^* - w_I\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2}$ é válida pelo lema 3, ver figura 7.

Utilizando a aplicação $\rho_{\mathcal{B}_{2,6}}(w_I)$ como uma solução numérica para o PVI (4.7), obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} \left\| w_I - \rho_{\mathcal{B}_{2,6}}(w_I) \right\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2} &\leq 1.1289243900257 \cdot 10^{-5} \\ \Rightarrow \|(t, u^*(t)) - (t, w_6(t))\|_{\mathbb{R}^3} &\leq t^* + 0.11289243900257 \cdot 10^{-6} = 2.4394243900257 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

onde estamos escolhendo como solução numérica para o PVI (4.6) a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} w_6(t) &= ((w_6)_1(t), (w_6)_2(t)) = \rho_{\mathcal{B}_{2,6}}(w_I)(t-1) + (1, 2) \quad \text{com} \\ (w_6)_1(t) &= -0.1079(t-1) - 0.2065 \frac{\sqrt{2} \text{sen}((t-1)\pi)}{\pi} - 0.1134 \frac{\sqrt{2} \text{sen}(2\pi(t-1))}{2\pi} \\ &\quad - 0.0672 \frac{\sqrt{2} \text{sen}(3\pi(t-1))}{3\pi} - 0.0443 \frac{\sqrt{2} \text{sen}(4\pi(t-1))}{4\pi} - 0.0311 \frac{\sqrt{2} \text{sen}(5\pi(t-1))}{5\pi} + 1 \\ (w_6)_2(t) &= -0.8757(t-1) - 0.7211 \frac{\sqrt{2} \text{sen}(\pi(t-1))}{\pi} - 0.3701 \frac{\sqrt{2} \text{sen}(2\pi(t-1))}{2\pi} \\ &\quad - 0.2371 \frac{\sqrt{2} \text{sen}(3\pi(t-1))}{3\pi} - 0.1536 \frac{\sqrt{2} \text{sen}(4\pi(t-1))}{4\pi} - 0.1126 \frac{\sqrt{2} \text{sen}(5\pi(t-1))}{5\pi} + 2 \end{aligned}$$

para $t \in [1, 2]$.

Exemplo 6. Considere o PVI

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(1) = (0, 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_1 = 3 + \text{sen}(u_2) \\ u'_2 = 3 + \text{sen}(u_1) \end{cases}, \quad u_1(0) = 0 = u_2(0), \quad (4.9)$$

onde $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $f(t, u_1, u_2) = (f_1(t, u_1, u_2), f_2(t, u_1, u_2)) = (3 + \text{sen}(u_2), 3 + \text{sen}(u_1))$ e $u = (u_1, u_2)$. Calculando

$$D_{(u_1, u_2)} f(t, u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 0 & \cos(u_2) \\ \cos(u_1) & 0 \end{bmatrix},$$

forneçemos para o script as entradas $f, D_{(u_1, u_2)}f, m = 35, n = 2$ e $R = 1$. Obtemos como resposta

Proof was successful!

$$\eta = 1.9475 \cdot 10^{-6}$$

$$\nu = 0.90417$$

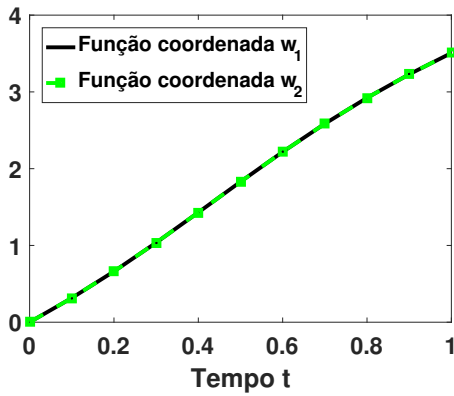
$$K = 1.4142$$

$$tstar = 2.1539 \cdot 10^{-6}$$

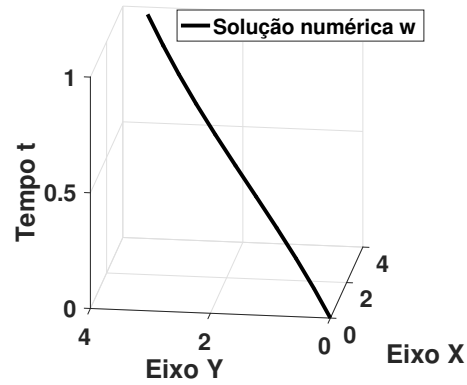
$$t2star = 1.2787$$

Elapsed Time in seconds = 776.4511

Pelo teorema 5 obtemos a estimativa entre u^* e w , como segue abaixo



(a) Funções coordenadas da solução numérica w



(b) Solução numérica w em \mathbb{R}^3

Figura 8 – Plot da solução numérica w do PVI (4.9)

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\|u^* - w\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2} \leq 2.1539 \cdot 10^{-6} = t^*$$

onde u^* é a solução teórica e w é a solução numérica do PVI (4.9). Calculando sua diferença em norma em \mathbb{R}^3 , temos

$$\begin{aligned} \|(t, u^*(t)) - (t, w(t))\|_{\mathbb{R}^3} &= \|u^*(t) - w(t)\|_{\mathbb{R}^2} \leq \|u^* - w\|_{C^0(I)^2} \leq \|u^* - w\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2} \leq t^* \\ &\Rightarrow \|(t, u^*(t)) - (t, w(t))\|_{\mathbb{R}^3} \leq t^* = 2.1539 \cdot 10^{-6} \end{aligned} \quad (4.10)$$

sendo a desigualdade $\|u^* - w\|_{C^0(I)^2} \leq \|u^* - w\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2}$ válida pelo lema 3, ver figura 8.

Utilizando a aplicação $\rho_{\mathcal{B}_{2,6}}(w)$ como uma solução numérica para o PVI (4.7), obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} \left\| w - \rho_{\mathcal{B}_{2,6}}(w) \right\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2} &\leq 1.1878561938222 \cdot 10^{-5} \\ \Rightarrow \|(t, u^*(t)) - (t, w_6(t))\|_{\mathbb{R}^3} &\leq t^* + 0.11878561938222 \cdot 10^{-6} = 2.272685619382220 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

onde $\rho_{\mathcal{B}_{2,6}}(w)$ é dada por

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{B}_{2,6}}(w)(t) &= \left(\left(\rho_{\mathcal{B}_{2,6}}(w) \right)_1(t), \left(\rho_{\mathcal{B}_{2,6}}(w) \right)_2(t) \right) \text{ com} \\ \left(\rho_{\mathcal{B}_{2,6}}(w) \right)_1(t) &= 3.5064t + 0.1608 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(t\pi)}{\pi} - 0.3587 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi t)}{2\pi} \\ &\quad - 0.0252 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi t)}{3\pi} - 0.0476 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi t)}{4\pi} - 0.0030 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi t)}{5\pi} \\ \left(\rho_{\mathcal{B}_{2,6}}(w) \right)_2(t) &= 3.5064t + 0.1608 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(t\pi)}{\pi} - 0.3587 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi t)}{2\pi} \\ &\quad - 0.0252 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi t)}{3\pi} - 0.0476 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi t)}{4\pi} - 0.0030 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi t)}{5\pi} \end{aligned}$$

para $t \in [0, 1]$.

Exemplo 7. Como último exemplo de sistema de ordem 2 considere a equação de Van der Pol

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(0) = (2, 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = c(1 - u_1^2)u_2 - u_1 \end{cases}, \quad u_1(0) = 2, u_2(0) = 0, \quad (4.11)$$

onde $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $f(t, u_1, u_2) = (f_1(t, u_1, u_2), f_2(t, u_1, u_2)) = (u_2, c(1 - u_1^2)u_2 - u_1)$, $u = (u_1, u_2)$ e $c = 1$. Calculando

$$D_{(u_1, u_2)}f(t, u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2cu_1u_2 - 1 & c(1 - u_1^2) \end{bmatrix},$$

fornecemos para o script as entradas $f, D_{(u_1, u_2)}f, m = 42, n = 2$ e $R = 1$. Obtemos como resposta

Proof was successful!

$$\eta = 0.00051762$$

$$v = 0.139$$

$$K = 16.108$$

$$\text{tstar} = 0.0054364$$

$$\text{t2star} = 0.011822$$

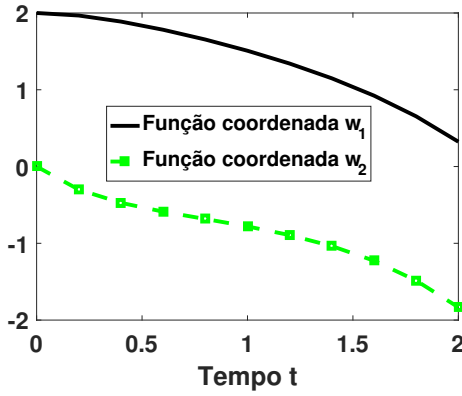
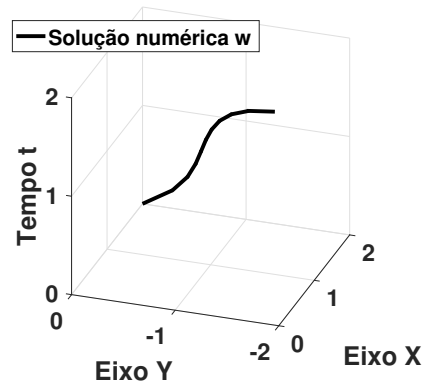
$$\text{Elapsed Time in seconds} = 1089.5743$$

Pelo teorema 5 obtemos a estimativa entre v^* e w_I , como segue abaixo

$$\|v^* - w_I\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2} \leq 0.0054364 = t^*$$

onde v^* é a solução teórica e w_I é a solução numérica do PVI equivalente

$$\begin{cases} v' = (v_1, v_2)' = 2f(2s, v_1 + 2, v_2) = g(s, v) \\ v(0) = (0, 0). \end{cases} \quad (4.12)$$

(a) Funções coordenadas da solução numérica w (b) Solução numérica w em \mathbb{R}^3 Figura 9 – Plot da solução numérica w do PVI (4.11)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Retornando ao intervalo original $[0, 2]$ a solução teórica e a solução numérica são respectivamente $u^*(t) = v^*(2t) + (2, 0)$ e $w(t) = w_I(2t) + (2, 0)$ para $t \in [0, 2]$. Calculando sua diferença em norma em \mathbb{R}^3 , temos

$$\|(t, u^*(t)) - (t, w(t))\|_{\mathbb{R}^3} \leq t^* = 0.0054364, \quad (4.13)$$

ver na figura 9. Utilizando a aplicação $\rho_{\mathcal{B}_{2,7}}(w_I)$ como uma solução numérica para o PVI (4.12), obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} & \left\| w_I - \rho_{\mathcal{B}_{2,7}}(w_I) \right\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2} \leq 0.14148058809504 \cdot 10^{-6} \\ \Rightarrow & \|(t, u^*(t)) - (t, w_7(t))\|_{\mathbb{R}^3} \leq t^* + 0.14148058809504 \cdot 10^{-6} = 0.00543654148058 \end{aligned}$$

onde $w_7(t) = ((w_7)_1(t), (w_7)_2(t)) = \rho_{\mathcal{B}_{2,7}}(w_I)(2t) + (2, 0)$ é dada por

$$\begin{aligned} (w_7)_1(t) = & -1.6766(2t) + 0.8246 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2t\pi)}{\pi} - 0.0932 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi(2t))}{2\pi} + \\ & 0.2021 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi(2t))}{3\pi} - 0.0133 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi(2t))}{4\pi} + 0.0842 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi(2t))}{5\pi} \\ & - 0.0029 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi(2t))}{6\pi} + 2 \\ (w_7)_2(t) = & -1.8329(2t) + 0.2851 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2t\pi)}{\pi} - 0.7625 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi(2t))}{2\pi} \\ & - 0.0778 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi(2t))}{3\pi} - 0.2786 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi(2t))}{4\pi} - 0.0604 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi(2t))}{5\pi} \\ & - 0.1318 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi(2t))}{6\pi} \end{aligned}$$

para $t \in [0, 2]$.

APLICAÇÕES EM PVF'S

Para exemplificar os conceitos apresentados no capítulo 3, desenvolveremos alguns exemplos de validação de soluções numéricas para sistemas de EDO's no caso de PVF's. A divisão deste capítulo é a mesma do capítulo 4 com uma seção de EDO's lineares e outra seção de EDO's não lineares. Ainda disponibilizaremos as soluções teóricas nos casos lineares. Outra característica que podemos evidenciar em relação ao método que não fica clara quando trabalhamos com PVI's é a existência e unicidade. O teorema 1 garante existência e unicidade de soluções para PVI's. Então nos PVI's apenas nos certificamos que a solução teórica existente está próxima da solução numérica. Porém no caso dos PVF's o problema de existência e unicidade não possui uma caracterização geral, como foi visto na observação 9. Assim através do teorema 5 podemos nos certificar, caso o método convirja, a existência e unicidade da solução teórica na bola fechada de centro na solução numérica e raio t^* em $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$. Os códigos utilizados neste capítulo estão disponíveis no GitHub [Nolasco 2021].

5.1 Sistemas de EDO's lineares

Exemplo 8. Como primeira aplicação para o método descrito no capítulo 3, considere o PVF

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u_1(0) = 0 \\ u_2(\pi/2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = -u_1 \\ u_1(0) = 0, \\ u_2(\pi/2) = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $f(t, u_1, u_2) = (f_1(t, u_1, u_2), f_2(t, u_1, u_2)) = (u_2, -u_1)$ e $u = (u_1, u_2)$. É fácil verificar que a solução teórica deste PVF em $[0, \pi/2]$ é dada por

$$u^*(t) = (\sin(t), \cos(t)).$$

As entradas do script para validação de soluções numéricas para o PVF (5.1) são f , $D_{(u_1, u_2)}f$, m (tamanho da projeção na base de $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$), n (tamanho do sistema), R (raio de verificação de solução em $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$), $intvSol$ (intervalo de definição da solução $[t_0, L]$, neste caso $[0, \pi/2]$), $initCond$ (condição em t_0 , neste caso $u_1(0) = 0$) e $finalCond$ (condição em L , neste caso $u_2(L) = 0$). Calculando

$$D_{(u_1, u_2)}f(t, u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

forneçemos para o script as entradas f , $D_{(u_1, u_2)}f$, $m = 8$, $n = 2$, $R = 1$, $intvSol = [0, \pi/2]$, $initCond = (0, 1)$ e $finalCond = (1, 0)$. Obtemos como resposta

Proof was successful!

$$\eta = 8.3235 \cdot 10^{-7}$$

$$v = 0.020733$$

$$K = 0.05$$

$$tstar = 4.1719 \cdot 10^{-5}$$

$$t2star = 0.82926$$

Elapsed Time in seconds = 62.5991

Através da função *compute_solution* calculamos a solução numérica para o PVF equivalente

$$\begin{cases} v' = (v_1, v_2)' = (\pi/2)f(\pi/2s, v_1, v_2 + 1) = g(s, v) \\ v_1(0) = 0 \\ v_2(1) = -1. \end{cases} \quad (5.2)$$

A função *compute_solution* ainda ajusta a solução numérica obtida com respeito a base de $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2$ seguindo os mesmos passos do caso dos PVI's. Após a função *compute_solution* calcular a solução numérica, a próxima função é a *verify_solution*. Ela verifica as hipóteses do teorema 5 utilizando aritmética intervalar, assim como no caso dos PVI's. A distância entre a solução teórica $v^*(s) = u^*(\pi s/2) - (0, 1)$ do PVF (5.2) em $[0, 1]$, e a respectiva solução numérica w_I obtida pelo método descrito acima, isto é,

$$\|v^* - w_I\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2} \leq 4.1719 \cdot 10^{-5} = t^*.$$

Retornando ao intervalo original $[0, \pi/2]$ a solução teórica e a solução numérica são respectivamente u^* e $w(t) = w_I(2t/\pi) + (0, 1)$ para $t \in [0, \pi/2]$. Calculando sua diferença em norma

$$\begin{aligned} \|(t, u^*(t)) - (t, w(t))\|_{\mathbb{R}^3} &= \|u^*(t) - w(t)\|_{\mathbb{R}^2} = \|u^*(t) - w_I(2t/\pi) - (0, 1)\|_{\mathbb{R}^2} = \\ \|u^*(\pi s/2) - (0, 1) - w_I(s)\|_{\mathbb{R}^2} &= \|v^*(s) - w_I(s)\|_{\mathbb{R}^2} \leq \|v^* - w_I\|_{C^0(I)^2} \leq \|v^* - w_I\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2} \leq t^* \\ \Rightarrow \|(t, u^*(t)) - (t, w(t))\|_{\mathbb{R}^3} &\leq 4.1719 \cdot 10^{-5} = t^* \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde $s = 2t/\pi$ para $s \in [0, 1]$, e a desigualdade $\|v^* - w_I\|_{C^0(I)^2} \leq \|v^* - w_I\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2}$ é válida pelo lema 3, ver figura 10.

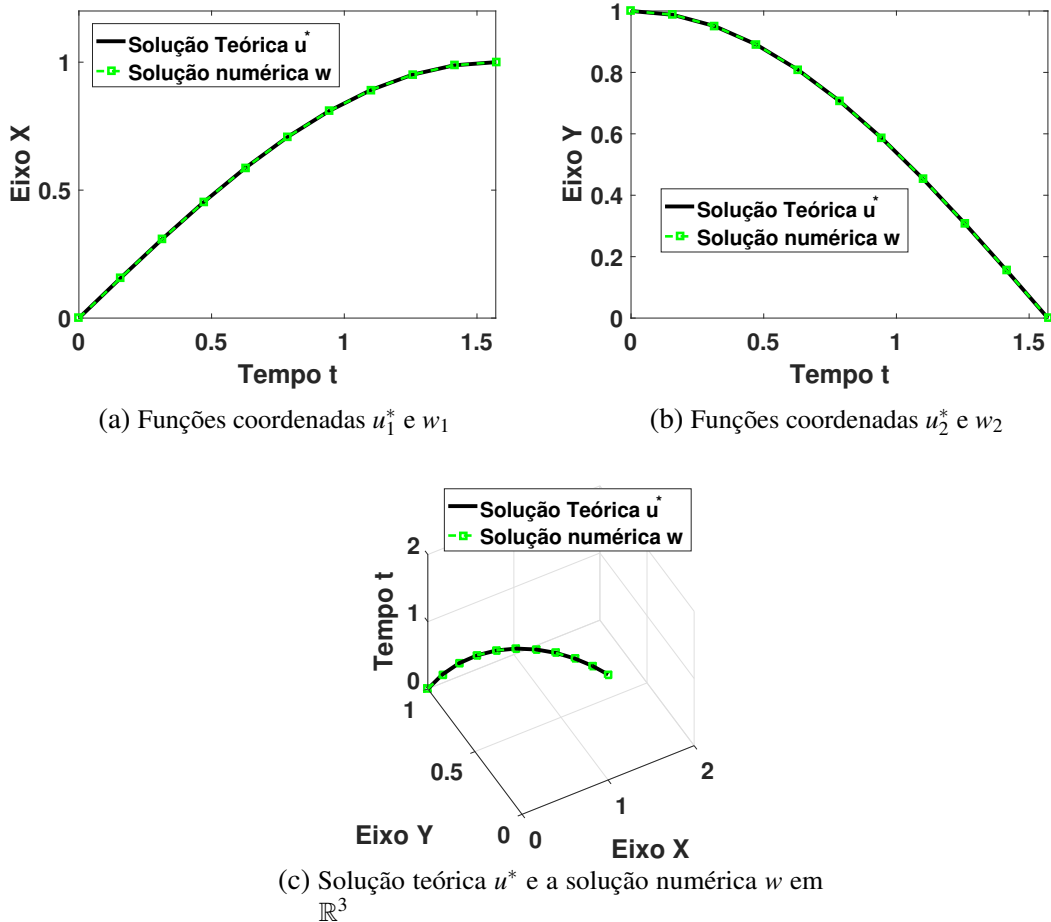


Figura 10 – Plot da solução teórica u^* e a solução numérica w do PVI (5.1)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 9. Considere o PVF

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u_1(-1) = -1/\sqrt{11} \\ u_2(1) = 10/11^{3/2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = \frac{-30u_1}{(10+t^2)^2} \end{cases} \quad (5.4)$$

sendo

$$\begin{cases} u_1(-1) = -1/\sqrt{11} \\ u_2(1) = 10/11^{3/2}, \end{cases}$$

onde $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $f(t, u_1, u_2) = (f_1(t, u_1, u_2), f_2(t, u_1, u_2)) = (u_2, -30u_1/(10+t^2)^2)$ e $u = (u_1, u_2)$. A solução teórica deste PVF em $[-1, 1]$ é dada por

$$u^*(t) = \left(t/\sqrt{10+t^2}, 10/(10+t^2)^{3/2} \right)$$

Calculando

$$D_{(u_1, u_2)} f(t, u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -30/(10+t^2)^2 & 0 \end{bmatrix},$$

forneçemos para o script as entradas $f, D_{(u_1, u_2)}f, m = 15, n = 2$ e $R = 1$. Obtemos como resposta

Proof was successful!

$$\eta = 3.5782 \cdot 10^{-7}$$

$$v = 0.068155$$

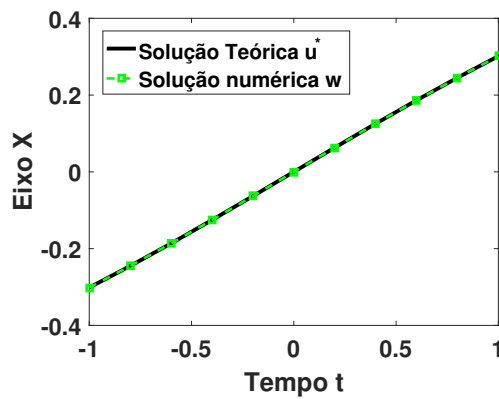
$$K = 0.05$$

$$tstar = 5.2501 \cdot 10^{-6}$$

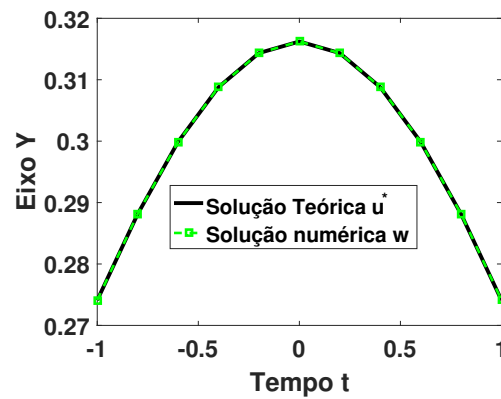
$$t2star = 2.7262$$

Elapsed Time in seconds = 145.4317

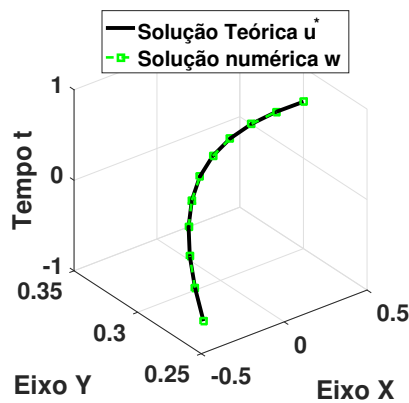
Seguindo os passos do exemplo anterior obtemos



(a) Funções coordenadas u_1^* e w_1



(b) Funções coordenadas u_2^* e w_2



(c) Solução teórica u^* e a solução numérica w em \mathbb{R}^3

Figura 11 – Plot da solução teórica u^* e a solução numérica w do PVI (5.4)

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\|v^* - w_I\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2} \leq 5.2501 \cdot 10^{-6} = t^*$$

onde $v^*(s) = u^*(2s - 1) - (-1/\sqrt{11}, 10/11^{3/2})$, $s \in [0, 1]$, é a solução teórica e w_I é a solução

numérica do PVF equivalente

$$\begin{cases} v' = (v_1, v_2)' = 2f(2s-1, v_1 - 1/\sqrt{11}, v_2 + 10/11^{3/2}) = g(s, v) \\ v_1(0) = 0 \\ v_2(1) = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Retornando ao intervalo original $[-1, 1]$ a solução teórica e a solução numérica são respectivamente u^* e $w(t) = w_I((t+1)/2) + (-1/\sqrt{11}, 10/11^{3/2})$ para $t \in [-1, 1]$. Calculando sua diferença em norma como em (4.3), temos

$$\|(t, u^*(t)) - (t, w(t))\|_{\mathbb{R}^3} \leq 5.2501 \cdot 10^{-6} = t^*.$$

ver figura 11.

5.2 Sistemas de EDO's não lineares

Nesta seção validaremos soluções numéricas para sistemas de EDO's não lineares. Diferente da seção anterior, neste caso não exibiremos as soluções teóricas dos problemas apresentados. Além disso, o método apresentado admite valores de fronteira separados da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ Ax(t_0) = \alpha, Bx(L) = \beta, \end{cases} \quad (5.6)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}^k$, $\beta \in \mathbb{R}^p$ e $A \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ com $k + p = n$, sendo as linhas de A e B vetores canônicos de \mathbb{R}^n .

Exemplo 10. O primeiro sistema não linear é equação de Bratu

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ Au(0) = 0 \\ Bu(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = -\lambda^2 e^{u_1} \end{cases}, \quad u_1(0) = 0, u_1(1) = 0 \quad (5.7)$$

onde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $f(t, u_1, u_2) = (f_1(t, u_1, u_2), f_2(t, u_1, u_2)) = (u_1, -\lambda^2 e^{u_1})$, $u = (u_1, u_2)$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Segundo [Davis 1962, pg. 432] para $\lambda = 1.8745^2$ está equação possui somente uma solução teórica no intervalo $[0, 1]$. Calculando

$$D_{(u_1, u_2)} f(t, u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 e^{u_1} & 0 \end{bmatrix},$$

forneçemos para o script as entradas f , $D_{(u_1, u_2)}f$, $m = 35$, $n = 2$ e $R = 0.5$. Obtemos como resposta

Proof was successful!

$$\eta = 0.00015664$$

$$\nu = 0.36508$$

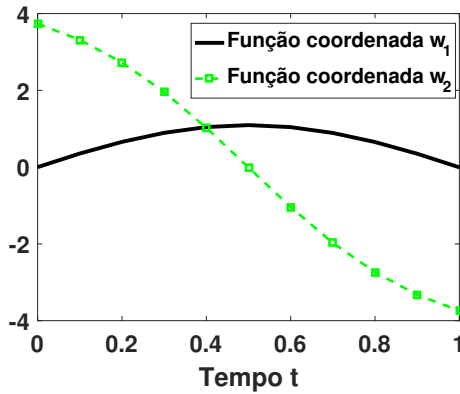
$$K = 10.7994$$

$$tstar = 0.00043182$$

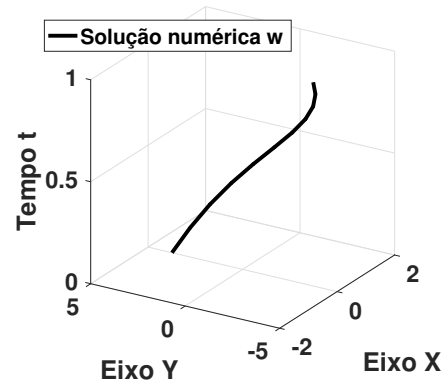
$$t2star = 0.067178$$

$$\text{Elapsed Time in seconds} = 695.519$$

Este exemplo usaremos diretamente o teorema 5 para obter a estimativa entre u^* e w , como



(a) Funções coordenadas da solução numérica w



(b) Solução numérica w em \mathbb{R}^3

Figura 12 – Plot da solução numérica w do PVF (5.7)

Fonte: Elaborada pelo autor.

segue abaixo

$$\|u^* - w\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2} \leq 0.00043182 = t^*.$$

O que implica que

$$\|(t, u^*(t)) - (t, w(t))\|_{\mathbb{R}^3} \leq t^* = 0.00043182 \quad (5.8)$$

para $t \in [0, 1]$, ver figura 12. Utilizando a aplicação $\rho_{\mathcal{B}_{2,8}}(w)$ como uma solução numérica para o PVF (5.7), obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} & \left\| w - \rho_{\mathcal{B}_{2,8}}(w) \right\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2} \leq 0.18022492510427 \cdot 10^{-6} \\ \Rightarrow & \|(t, u^*(t)) - (t, \rho_{\mathcal{B}_{2,8}}(w)(t))\|_{\mathbb{R}^3} \leq t^* + 0.18022492510427 \cdot 10^{-6} = 0.43200022492510 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

onde estamos escolhendo como solução numérica para o PVF (5.7) a aplicação $\rho_{\mathcal{B}_{2,8}}(w)$ definida

por

$$\begin{aligned}
 (\rho_{\mathcal{B}_{2,8}}(w))_1(t) &= -0.0059t + 2.4561 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(\pi t)}{\pi} + 0.0017 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi t)}{2\pi} \\
 &+ 0.0687 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi t)}{3\pi} + 0.0001 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi t)}{4\pi} + 0.0386 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi t)}{5\pi} \\
 &+ 0.00008 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi t)}{6\pi} + 0.0200 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(7\pi t)}{7\pi} \\
 (\rho_{\mathcal{B}_{2,8}}(w))_2(t) &= -7.4831t - 0.0113 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(\pi t)}{\pi} + 2.2550 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi t)}{2\pi} \\
 &+ 0.0030 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi t)}{3\pi} + 0.1881 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi t)}{4\pi} + 0.0002 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi t)}{5\pi} \\
 &+ 0.1045 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi t)}{6\pi} + 0.0001 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(7\pi t)}{7\pi}
 \end{aligned}$$

para $t \in [0, 1]$.

Exemplo 11. A próxima equação é obtida quando modela-se um reator tubular, ver [Shampine *et al.* 2000, pg. 13],

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ Au(0) = 0.63678 \\ Bu(1) = -0.66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = u_2 - 2u_1^2 \end{cases}, \quad u_1(0) = 0.63678, u_2(1) = -0.66, \quad (5.9)$$

onde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $f(t, u_1, u_2) = (f_1(t, u_1, u_2), f_2(t, u_1, u_2)) = (u_2, u_2 - 2u_1^2)$, $u = (u_1, u_2)$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculando

$$D_{(u_1, u_2)}f(t, u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4u_1 & 1 \end{bmatrix},$$

fornecemos para o script as entradas $f, D_{(u_1, u_2)}f, m = 35, n = 2$ e $R = 1$. Obtemos como resposta

Proof was successful!

$$\eta = 1.4176 \cdot 10^{-6}$$

$$v = 0.91295$$

$$K = 4$$

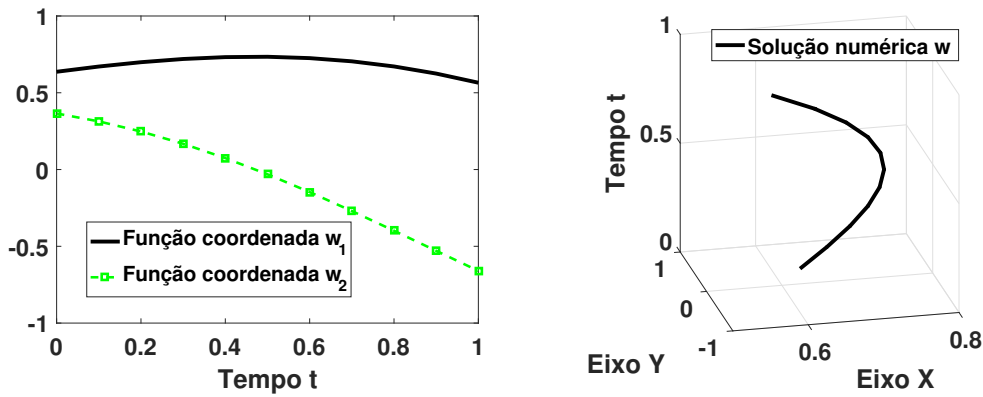
$$tstar = 1.5528 \cdot 10^{-6}$$

$$t2star = 0.45647$$

$$\text{Elapsed Time in seconds} = 681.959$$

Pelo teorema 5 obtemos a estimativa entre v^* e w_I , como segue abaixo

$$\|v^* - w_I\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2} \leq 1.5528 \cdot 10^{-6} = t^*$$

(a) Funções coordenadas da solução numérica w (b) Solução numérica w em \mathbb{R}^3 Figura 13 – Plot da solução numérica w do PVF (5.9)

Fonte: Elaborada pelo autor.

onde v^* é a solução teórica e w_I é a solução numérica do PVF equivalente

$$\begin{cases} v' = (v_1, v_2)' = f(s, v_1 + 0.63678, v_2 + 0.365168) = g(s, v) \\ v(0) = (0, 0) \\ v(1) = (-0.071267762926889, -1.025193464821393). \end{cases} \quad (5.10)$$

Retornando ao PVF (5.9) a solução teórica e a solução numérica são respectivamente $u^*(t) = v^*(t) + (0.63678, 0.365168)$ e $w(t) = w_I(t) + (0.63678, 0.365168)$ para $t \in [0, 1]$. Calculando sua diferença em norma em \mathbb{R}^3 , temos

$$\|(t, u^*(t)) - (t, w(t))\|_{\mathbb{R}^3} \leq t^* = 1.5528 \cdot 10^{-6}. \quad (5.11)$$

A solução numérica w pode ser vista na figura 13. Utilizando a aplicação $w_8(t) = ((w_8)_1(t), (w_8)_2(t)) = \rho_{\mathcal{B}_{2,8}}(w)(t) + (0.63678, 0.365168)$ como uma solução numérica para o PVF (5.9), obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} & \left\| w_I - \rho_{\mathcal{B}_{2,8}}(w) \right\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2} \leq 0.68330373622183 \cdot 10^{-7} \\ \Rightarrow & \|(t, u^*(t)) - (t, w_8(t))\|_{\mathbb{R}^3} \leq t^* + 0.68330373622183 \cdot 10^{-7} = 0.16211279127 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

onde $w_8(t) = ((w_8)_1(t), (w_8)_2(t))$ é dada por

$$\begin{aligned} (w_8)_1(t) &= -0.0712t + 0.3038 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(\pi t)}{\pi} - 0.0339 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi t)}{2\pi} \\ &+ 0.0279 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi t)}{3\pi} - 0.0077 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi t)}{4\pi} + 0.0100 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi t)}{5\pi} \\ &- 0.0034 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi t)}{6\pi} + 0.0050 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(7\pi t)}{7\pi} + 0.63678 \\ (w_8)_2(t) &= -1.0251t + 0.2633 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(\pi t)}{\pi} + 0.0705 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi t)}{2\pi} \\ &+ 0.0179 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi t)}{3\pi} + 0.0148 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi t)}{4\pi} \\ &+ 0.0064 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi t)}{6\pi} + 0.0034 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(7\pi t)}{7\pi} + 0.365168 \end{aligned}$$

para $t \in [0, 1]$.

Exemplo 12. Também como exemplo de aplicação segue a equação de Troesch, ver [Kubíček, Hlaváček e Holodniok 1979, Example 1, pg.4],

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ Au(0) = 0 \\ Bu(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = \lambda \text{senh}(\lambda u_1) \end{cases}, \quad u_1(0) = 0, u_1(1) = 1, \quad (5.12)$$

onde $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $f(t, u_1, u_2) = (f_1(t, u_1, u_2), f_2(t, u_1, u_2)) = (u_2, \lambda \text{senh}(\lambda u_1))$, $u = (u_1, u_2)$, $\lambda = 1$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando

$$D_{(u_1, u_2)} f(t, u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda \cosh(\lambda u_1) & 0 \end{bmatrix},$$

fornecemos para o script as entradas $f, D_{(u_1, u_2)} f, m = 20, n = 2$ e $R = 1$. Obtemos como resposta

Proof was successful!

$$\eta = 4.9509 \cdot 10^{-6}$$

$$v = 0.055905$$

$$K = 1.1976$$

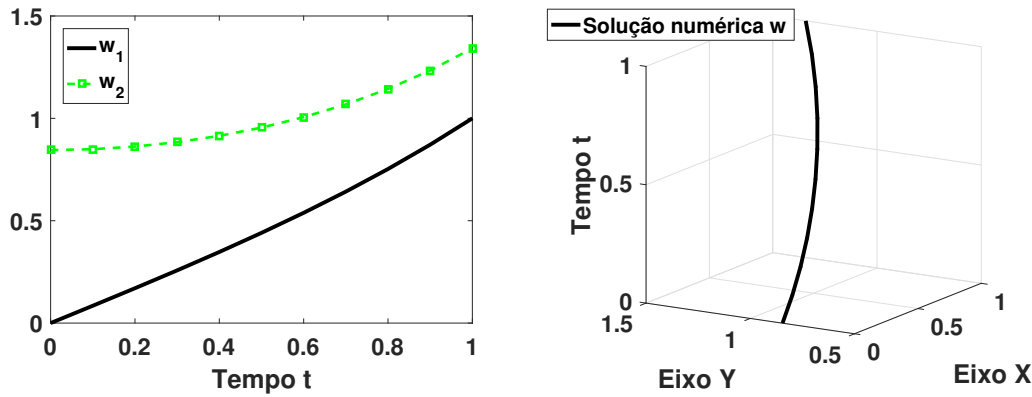
$$tstar = 8.8643 \cdot 10^{-5}$$

$$t2star = 0.093272$$

Elapsed Time in seconds = 253.6566

Pelo teorema 5 obtemos a estimativa entre u^* e w , como segue abaixo

$$\|u^* - w\|_{H^1_{\mathcal{B}}(I)^2} \leq 4.9509 \cdot 10^{-6} = t^*$$

(a) Funções coordenadas da solução numérica w (b) Solução numérica w em \mathbb{R}^3 Figura 14 – Plot da solução numérica w do PVF (5.12)

Fonte: Elaborada pelo autor.

onde u^* é a solução teórica e w é a solução numérica do PVF (5.12). Calculando sua diferença em norma em \mathbb{R}^3 , temos

$$\|(t, u^*(t)) - (t, w(t))\|_{\mathbb{R}^3} \leq t^* = 4.9509 \cdot 10^{-6}. \quad (5.13)$$

A solução numérica w pode ser vista na figura 14. Utilizando a aplicação $\rho_{\mathcal{B}_{2,8}}(w)$ como uma solução numérica para o PVF (5.12), obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} \left\| w - \rho_{\mathcal{B}_{2,8}}(w) \right\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^2} &\leq 0.61702056685325 \cdot 10^{-7} \\ \Rightarrow \|(t, u^*(t)) - (t, \rho_{\mathcal{B}_{2,8}}(t))\|_{\mathbb{R}^3} &\leq t^* + 0.61702056685325 \cdot 10^{-7} = 0.8870424377065 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

onde $\rho_{\mathcal{B}_{2,8}}(w)(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} \left(\rho_{\mathcal{B}_{2,8}}(w) \right)_1(t) &= 0.9999t - 0.1369 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(\pi t)}{\pi} + 0.0392 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi t)}{2\pi} \\ &\quad - 0.0180 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi t)}{3\pi} + 0.0103 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi t)}{4\pi} - 0.0066 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi t)}{5\pi} + \\ &\quad 0.0046 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi t)}{6\pi} - 0.0034 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(7\pi t)}{7\pi} \\ \left(\rho_{\mathcal{B}_{2,8}}(w) \right)_2(t) &= 0.4966t - 0.3204 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(\pi t)}{\pi} + 0.0367 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi t)}{2\pi} \\ &\quad - 0.0442 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi t)}{3\pi} + 0.0104 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi t)}{4\pi} - 0.0164 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi t)}{5\pi} + \\ &\quad 0.0047 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi t)}{6\pi} - 0.0084 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(7\pi t)}{7\pi} \end{aligned}$$

para $t \in [0, 1]$.

Exemplo 13. O sistema tridimensional de Michelson, ver [Kokubu, Wilczak e Zgliczynski

2007], é dado por

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ Au(0) = (0, 0)^T \\ Bu(2) = 0.735 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = u_3 \\ u'_3 = \lambda^2 - u_1^2/2 + u_2 \end{cases}, \begin{cases} u_1(0) = 0 = u_2(0) \\ u_3(2) = 0.735 \end{cases} \quad (5.14)$$

onde $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por $f(t, u_1, u_2, u_3) = (f_1(t, u_1, u_2, u_3), f_2(t, u_1, u_2, u_3), f_3(t, u_1, u_2, u_3)) = (u_2, u_3, \lambda^2 - u_1^2/2 + u_2)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, $\lambda = 1$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculando

$$D_{(u_1, u_2, u_3)} f(t, u_1, u_2, u_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -u_1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

fornecemos para o script as entradas f , $D_{(u_1, u_2, u_3)} f$, $m = 35$, $n = 3$ e $R = 1$. Obtemos como resposta

Proof was successful!

$$\eta = 7.1212 \cdot 10^{-6}$$

$$v = 0.87729$$

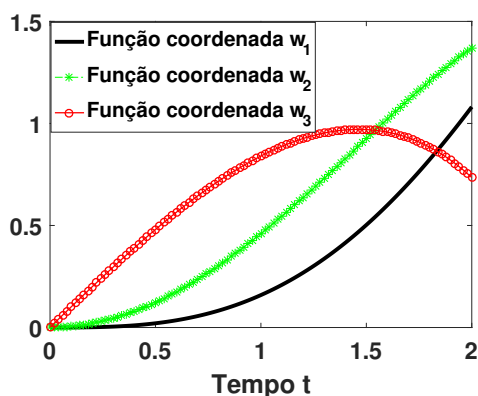
$$K = 2$$

$$tstar = 8.1173 \cdot 10^{-6}$$

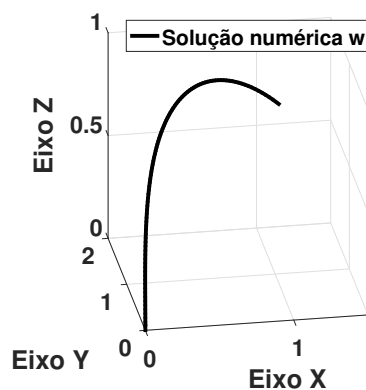
$$t2star = 0.87728$$

Elapsed Time in seconds = 1016.1249

Pelo teorema 5 obtemos a estimativa entre v^* e w_I , como segue abaixo



(a) Funções coordenadas da solução numérica w



(b) Solução numérica w em \mathbb{R}^3

Figura 15 – Plot da solução numérica w do PVF (5.14)

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\|v^* - w_I\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^3} \leq 8.1173 \cdot 10^{-6} = t^*$$

com v^* a solução teórica e w_I é a solução numérica do PVF equivalente

$$\begin{cases} v' = (v_1, v_2, v_3)' = 2f(2s, v_1, v_2, v_3) = g(s, v) \\ v(0) = (0, 0, 0), v_3(1) = 0.735. \end{cases} \quad (5.15)$$

Retornando ao intervalo original $[0, 2]$ a solução teórica e a solução numérica são respectivamente $u^*(t) = v^*(t/2)$ e $w(t) = w_I(t/2)$ para $t \in [0, 2]$. Calculando sua diferença em norma em \mathbb{R}^4 , temos

$$\|(t, u^*(t)) - (t, w(t))\|_{\mathbb{R}^4} \leq t^* = 8.1173 \cdot 10^{-6}. \quad (5.16)$$

A solução numérica w pode ser vista na figura 15. Utilizando a aplicação

$$w_8(t) = ((w_8)_1(t), (w_8)_2(t), (w_8)_3(t)) = \rho_{\mathcal{B}_{2,8}}(w_I)(t/2), t \in [0, 2]$$

como uma solução numérica para o PVF (5.14), obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} & \|w_I - \rho_{\mathcal{B}_{3,8}}(w_I)\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^3} \leq 0.12545839796085 \cdot 10^{-6} \\ \Rightarrow & \|(t, u^*(t)) - (t, w_8(t))\|_{\mathbb{R}^4} \leq t^* + 0.12545839796085 \cdot 10^{-6} = 0.82427583979608 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

onde w_8 é dada por

$$\begin{aligned} (w_8)_1(t) &= 1.0810(t/2) - 0.8626 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(\pi(t/2))}{\pi} + 0.1337 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi(t/2))}{2\pi} \\ &- 0.0530 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi(t/2))}{3\pi} + 0.0282 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi(t/2))}{4\pi} - 0.0176 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi(t/2))}{5\pi} \\ &+ 0.0120 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi(t/2))}{6\pi} - 0.0087 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(7\pi(t/2))}{7\pi} \\ (w_8)_2(t) &= 1.3699(t/2) - 0.5025 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(\pi(t/2))}{\pi} - 0.2685 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi(t/2))}{2\pi} \\ &- 0.0117 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi(t/2))}{3\pi} - 0.0691 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi(t/2))}{4\pi} - 0.0021 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi(t/2))}{5\pi} \\ &- 0.0309 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi(t/2))}{6\pi} - 0.0008 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(7\pi(t/2))}{7\pi} \\ (w_8)_3(t) &= 0.7340(t/2) + 1.0874 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(\pi(t/2))}{\pi} - 0.2822 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi(t/2))}{2\pi} \\ &+ 0.1385 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi(t/2))}{3\pi} - 0.0788 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi(t/2))}{4\pi} + 0.0506 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi(t/2))}{5\pi} \\ &- 0.0351 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi(t/2))}{6\pi} - 0.0258 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(7\pi(t/2))}{7\pi} \end{aligned}$$

para $t \in [0, 2]$.

Exemplo 14. Como exemplo de sistema com ordem 4, segue um PVF para equação de Gray-Scott, ver [Berg *et al.* 2011],

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ Au(0) = (0, 0)^T \\ Bu(5) = (1.6, 1.6)^T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = u_1 u_3^2 - \lambda(1 - u_1) \\ u'_3 = u_4 \\ u'_4 = (1/\gamma)(u_3 - u_1 u_3^2) \end{cases}, \begin{cases} u_2(0) = 0 = u_4(0) \\ u_1(1) = 1.6 = u_3(1) \end{cases} \quad (5.17)$$

onde $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é dada por

$$f(t, u_1, u_2, u_3, u_4) = (u_2, u_1 u_3^2 - \lambda(1 - u_1), u_4, (1/\gamma)(u_3 - u_1 u_3^2))$$

com $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $\lambda = 1$, $\gamma = 2$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando

$$D_{(u_1, u_2, u_3, u_4)} f(t, u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_3^2 + \lambda & 0 & 2u_1 u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{u_3^2}{\gamma} & 0 & \frac{1 - 2u_1 u_3}{\gamma} & 0 \end{bmatrix},$$

fornecemos as entradas f , $D_{(u_1, u_2, u_3, u_4)} f$, $m = 35$, $n = 4$ e $R = 1$ para o script. Obtemos

Proof was successful!

$$\eta = 2.7361 \cdot 10^{-5}, \nu = 0.75729, K = 6.761, \text{tstar} = 3.6136 \cdot 10^{-5}, \text{t2star} = 0.22398,$$

$$\text{Elapsed Time in seconds} = 1650.7464.$$

Segue do teorema 5 que a diferença em norma entre v^* e w_I é

$$\|v^* - w_I\|_{H_{\emptyset}^{1,0}(I)^4} \leq 2.7361 \cdot 10^{-5} = t^*$$

onde v^* é a solução teórica e w_I é a solução numérica do PVF equivalente

$$\begin{cases} v' = (v_1, v_2)' = f(s, v_1 + 0.618251, v_2, v_3 + 1.72368, v_4) = g(s, v) \\ v(0) = (0, 0, 0, 0) \\ v(1) = (0.98171, 2.49839, -0.12368, -0.44611). \end{cases} \quad (5.18)$$

A solução teórica e a solução numérica do PVF (5.17) são respectivamente $u^*(t) = v^*(t) + (0.618251, 0, 1.72368, 0)$ e $w(t) = w_I(t) + (0.618251, 0, 1.72368, 0)$ para $t \in [0, 1]$. Pelo lema 3 temos a diferença

$$\|(t, u^*(t)) - (t, w(t))\|_{\mathbb{R}^5} \leq t^* = 2.7361 \cdot 10^{-5}$$

para $t \in [0, 1]$, ver figura 16. Escolhendo $w_8(t) = \rho_{\mathcal{B}_{4,8}}(w_I)(t) + (0.618251, 0, 1.72368, 0)$, $t \in [0, 1]$, como uma solução numérica do PVF (5.17), calculamos

$$\begin{aligned} & \left\| w_I - \rho_{\mathcal{B}_{4,8}}(w_I) \right\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^4} \leq 0.12786668919691 \cdot 10^{-6} \\ \Rightarrow & \left\| (t, u^*(t)) - (t, w_8(t)) \right\|_{\mathbb{R}^5} \leq t^* + 0.12786668919691 \cdot 10^{-6} = 0.36263866689196 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

onde $\rho_{\mathcal{B}_{4,8}}(w)$ é dada por

$$\begin{aligned} \left(\rho_{\mathcal{B}_{4,8}}(w) \right)_1(t) &= 0.9817t - 0.6796 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(\pi t)}{\pi} + 0.1141 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi t)}{2\pi} \\ &\quad - 0.0959 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi t)}{3\pi} + 0.0290 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi t)}{4\pi} - 0.0349 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi t)}{5\pi} \\ &\quad + 0.0128 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi t)}{6\pi} - 0.0178 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(7\pi t)}{7\pi} \\ \left(\rho_{\mathcal{B}_{4,8}}(w) \right)_2(t) &= 2.4983t - 0.9188 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(\pi t)}{\pi} + 0.2532 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi t)}{2\pi} \\ &\quad - 0.1097 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi t)}{3\pi} + 0.0607 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi t)}{4\pi} - 0.0384 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi t)}{5\pi} \\ &\quad + 0.0265 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi t)}{6\pi} - 0.0194 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(7\pi t)}{7\pi} \\ \left(\rho_{\mathcal{B}_{4,8}}(w) \right)_3(t) &= -0.1236t + 0.1146 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(\pi t)}{\pi} - 0.0426 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi t)}{2\pi} + \\ &\quad 0.0202 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi t)}{3\pi} - 0.0107 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi t)}{4\pi} + 0.0074 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi t)}{5\pi} \\ &\quad - 0.0047 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi t)}{6\pi} + 0.0037 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(7\pi t)}{7\pi} \\ \left(\rho_{\mathcal{B}_{4,8}}(w) \right)_4(t) &= -0.4461t + 0.3416 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(\pi t)}{\pi} - 0.0918 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi t)}{2\pi} + \\ &\quad 0.0389 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi t)}{3\pi} - 0.0213 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi t)}{4\pi} + 0.0134 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi t)}{5\pi} \\ &\quad - 0.0092 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi t)}{6\pi} + 0.0067 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(7\pi t)}{7\pi} \end{aligned}$$

para $t \in [0, 1]$.

Exemplo 15. Outro exemplo de sistema de ordem 4, PVF para equação de Ginzburg-Landau, ver [Correc e Lessard 2015],

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = f(t, u) \\ Au(0.1) = (0, 0)^T \\ Bu(1) = (0.85, 0.85)^T \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u'_1 = du_2 \\ u'_2 = d\kappa^2 u_1 (u_1^2 + u_3^2 - 1) \\ u'_3 = du_4 \\ u'_4 = du_1^2 u_3 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} u_2(0.1) = 0, u_4(0.1) = 0, \\ u_2(1) = 0.85, u_4(1) = 0.85, \end{array} \right. \quad (5.19)$$

onde $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é dada por

$$f(t, u_1, u_2, u_3, u_4) = d(u_2, \kappa^2 u_1 (u_1^2 + u_3^2 - 1), u_4, u_1^2 u_3)$$

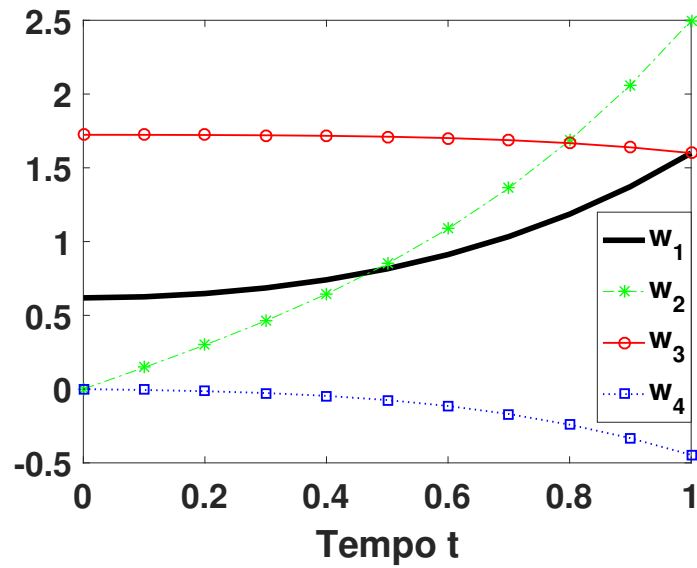


Figura 16 – Funções coordenadas da solução numérica w para o PVF (5.17)

com $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $d = 1$, $\kappa = 0.95$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculando

$$D_{(u_1, u_2, u_3, u_4)} f(t, u_1, u_2, u_3, u_4) = d \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2u_1 \kappa^2 u_1 (u_1^2 + u_3^2 - 1) & 0 & 2\kappa^2 u_1 u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2u_1 u_3 & 0 & u_1^2 & 0 \end{bmatrix},$$

fornecemos as entradas f , $D_{(u_1, u_2, u_3, u_4)} f$, $m = 35$, $n = 4$ e $R = 1$ para o script. Obtemos

Proof was successful!

$$\eta = 0.00054822, \quad v = 0.79413, \quad K = 7.5765, \quad tstar = 0.00069263, \quad t2star = 0.20894,$$

$$\text{Elapsed Time in seconds} = 1747.4177.$$

Segue do teorema 5 que a diferença em norma entre v^* e w_I é

$$\|v^* - w_I\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^4} \leq 0.00054822 = t^*$$

sendo v^* a solução teórica e w_I a solução numérica do PVF equivalente

$$\begin{cases} v' = (v_1, v_2, v_3, v_4)' = 0.9f(0.9s + 0.1, v_1 + 0.81033, v_2, v_3 + 1.04350, v_4) = g(s, v) \\ v(0) = (0, 0, 0, 0), \\ v_2(1) = (0.292082, 0.84995, 0.32427, 0.85026) = v_2(4). \end{cases}$$

(5.20)

Retornando ao intervalo original $[0.1, 1]$ a solução teórica e a solução numérica são respectivamente $u^*(t) = v^*((t-0.1)/0.9) + (0.8103, 0, 1.0435, 0)$ e $w(t) = w_I((t-0.1)/0.9) + (0.8103, 0, 1.0435, 0)$ para $t \in [0.1, 1]$. Calculando sua diferença em norma em \mathbb{R}^5 , temos

$$\|(t, u^*(t)) - (t, w(t))\|_{\mathbb{R}^5} \leq t^* = 0.00054822. \quad (5.21)$$

A solução numérica w pode ser vista na figura 17. Escolhendo $w_8(t) = \rho_{\mathcal{B}_{4,8}}(w_I)((t-0.1)/0.9) + (0.8103, 0, 1.0435, 0)$, $t \in [0.1, 1]$, como uma solução numérica do PVF (5.19), calculamos

$$\begin{aligned} & \left\| w_I - \rho_{\mathcal{B}_{4,8}}(w_I) \right\|_{H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^4} \leq 0.98479351455057 \cdot 10^{-7} \\ \Rightarrow & \|(t, u^*(t)) - (t, w_8(t))\|_{\mathbb{R}^5} \leq t^* + 0.98479351455057 \cdot 10^{-7} = 0.54831847935145 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

onde $w_8(t) = ((w_8)_1(t), (w_8)_2(t), (w_8)_3(t), (w_8)_4(t))$ é dada por

$$\begin{aligned} (w_8)_1(t) = & 0.2920(t-0.1)/0.9 - 0.2022 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(\pi(t-0.1)/0.9)}{\pi} \\ & + 0.0361 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi(t-0.1)/0.9)}{2\pi} - 0.0313 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi(t-0.1)/0.9)}{3\pi} \\ & + 0.0104 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi(t-0.1)/0.9)}{4\pi} - 0.0117 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi(t-0.1)/0.9)}{5\pi} \\ & + 0.0047 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi(t-0.1)/0.9)}{6\pi} - 0.0060 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(7\pi(t-0.1)/0.9)}{7\pi} + 0.8103 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (w_8)_2(t) = & 0.8499(t-0.1)/0.9 - 0.3417 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(\pi(t-0.1)/0.9)}{\pi} \\ & + 0.1291 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi(t-0.1)/0.9)}{2\pi} - 0.0649 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi(t-0.1)/0.9)}{3\pi} \\ & + 0.0387 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi(t-0.1)/0.9)}{4\pi} - 0.0252 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi(t-0.1)/0.9)}{5\pi} \\ & + 0.0179 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi(t-0.1)/0.9)}{6\pi} - 0.0131 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(7\pi(t-0.1)/0.9)}{7\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (w_8)_3(t) = & 0.3242(t-0.1)/0.9 - 0.2090 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(\pi(t-0.1)/0.9)}{\pi} \\ & + 0.0228 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi(t-0.1)/0.9)}{2\pi} - 0.0293 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi(t-0.1)/0.9)}{3\pi} \\ & + 0.0060 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi(t-0.1)/0.9)}{4\pi} - 0.0112 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi(t-0.1)/0.9)}{5\pi} \\ & + 0.0024 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi(t-0.1)/0.9)}{6\pi} - 0.0060 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(7\pi(t-0.1)/0.9)}{7\pi} + 1.0435 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(w_8)_4(t) &= 0.8502(t-0.1)/0.9 - 0.2193 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(\pi(t-0.1)/0.9)}{\pi} \\
&+ 0.0823 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(2\pi(t-0.1)/0.9)}{2\pi} - 0.0398 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(3\pi(t-0.1)/0.9)}{3\pi} \\
&+ 0.0250 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(4\pi(t-0.1)/0.9)}{4\pi} - 0.0149 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(5\pi(t-0.1)/0.9)}{5\pi} \\
&+ 0.0120 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(6\pi(t-0.1)/0.9)}{6\pi} - 0.0073 \frac{\sqrt{2}\text{sen}(7\pi(t-0.1)/0.9)}{7\pi}
\end{aligned}$$

para $t \in [0.1, 1]$.

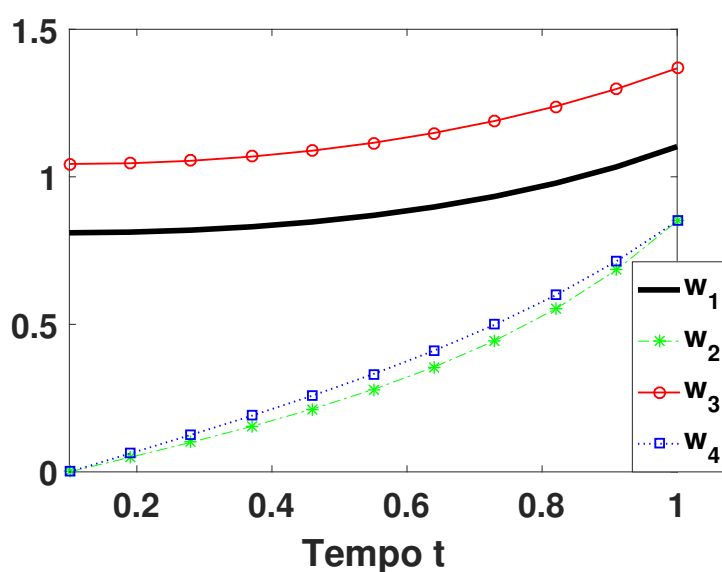


Figura 17 – Funções coordenadas da solução numérica w para o PVF (5.19)

CONCLUSÕES

Como foi observado nos exemplos, o método de validação de soluções numéricas proposto neste trabalho foi eficaz em localizar a solução teórica dos problemas propostos em diferentes situações, desde PVI's para sistemas de EDO's lineares até PVF's (com valores de fronteira separados) para sistemas de EDO's não lineares. Não foram necessárias grandes alterações nos scripts para que o processo de validação ocorresse, somente ajustes na equação e no tamanho da projeção m na base de $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$. Isso mostra que a reformulação do teorema 5 proposta no trabalho [Ramos, Nolasco e Gameiro 2022], ainda é eficaz em um contexto mais amplo que para two-point boundary problems para equações de segunda ordem (na derivada). As estimativas para as derivadas parciais da aplicação $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que define o sistema de equações diferenciais ordinárias $u' = f(t, u)$, foram de extrema importância na demonstração que o operador $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n} : H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n \rightarrow L^2(I)^n$ é Frechét diferenciável. Além disso, através da limitação para as derivadas parciais de f obtida neste trabalho, foi possível automatizar este cálculo usando a norma de Frobenius, proposição 12. Os resultados já citados aqui validam escolha do espaço de construção da teoria $H_{\mathcal{B}}^{1,0}(I)^n$ e sua base.

REFERÊNCIAS

APPEL, K.; HAKEN, W.; KOCH, J. *et al.* Every planar map is four colorable. part ii: Reducibility. **Illinois Journal of Mathematics**, University of Illinois at Urbana-Champaign, v. 21, n. 3, p. 491–567, 1977. Disponível em: <<https://doi.org/10.1215/ijm/1256049012>>. Citado na página 25.

BACHMAN, G.; NARICI, L. **Functional Analysis**. Dover Publications, 2000. Disponível em: <<https://store.doverpublications.com/0486402517.html>>. Citado na página 29.

BERG, J. B. V. D.; MIRELES-JAMES, J. D.; LESSARD, J.-P.; MISCHAIKOW, K. Rigorous numerics for symmetric connecting orbits: Even homoclinics of the gray–scott equation. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, SIAM, v. 43, n. 4, p. 1557–1594, 2011. Disponível em: <<https://epubs.siam.org/doi/10.1137/100812008>>. Citado na página 95.

BIEZUNER, R. J. Notas de aula análise funcional. 2009. Disponível em: <http://150.164.25.15/~rodney/notas_de_aula/analise_funcional.pdf>. Citado na página 34.

BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de análise funcional**. SBM, 2012. Disponível em: <<https://loja.sbm.org.br/fundamentos-de-analise-funcional.html>>. Citado na página 35.

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Springer-Verlag New York, 2011. Disponível em: <<https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-70914-7>>. Citado nas páginas 35, 51, 52, 54, 55 e 66.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical analysis, 10E**. Cengage Learning, 2016. Disponível em: <<https://www.cengage.ca/c/isbn/9781305253667/>>. Citado na página 68.

CAROTHERS, N. L. **A Short Course on Banach Space Theory**. Cambridge University Press, 2004. (London Mathematical Society Student Texts). Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/CBO9780511614057>>. Citado na página 56.

CARTAN, H. **Differential Calculus**. [S.l.]: Houghton Mifflin, 1971. Citado nas páginas 36, 58, 59, 66 e 67.

CHARALAMBOS D. A.; BORDER, K. **Infinite dimensional analysis. A Hitchhiker's Guide**. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/3-540-29587-9>>. Citado na página 29.

CHICONE, C. **Ordinary differential equations with applications**. Springer Science & Business Media, 2006. v. 34. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/0-387-35794-7>>. Citado nas páginas 36 e 38.

COELHO, F. U.; LOURENCO, M. L. **Curso de Álgebra Linear, Um Vol. 34**. Edusp, 2007. Disponível em: <<https://www.edusp.com.br/livros/curso-de-algebra-linear>>. Citado na página 27.

- CONWAY, J. B. **A course in functional analysis**. Springer-Verlag New York, 1990. v. 96. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3828-5>>. Citado na página 31.
- CORREC, A.; LESSARD, J.-P. Coexistence of nontrivial solutions of the one-dimensional ginzburg-landau equation: a computer-assisted proof. **European Journal of Applied Mathematics**, Cambridge University Press, v. 26, n. 1, p. 33–60, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0956792514000308>>. Citado na página 96.
- DAVIS, H. T. **Introduction to nonlinear differential and integral equations**. Dover Publications, 1962. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0008439500027120>>. Citado na página 87.
- ENFLO, P. A counterexample to the approximation problem in banach spaces. **Acta Mathematica**, Acta Mathematica, v. 130, n. 0, p. 309–317, 1973. ISSN 0001-5962. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02392270>>. Citado na página 36.
- EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2010. Citado na página 52.
- GALIAS, Z.; ZGLICZYŃSKI, P. Infinite dimensional krawczyk operator for finding periodic orbits of discrete dynamical systems. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, World Scientific, v. 17, n. 12, p. 4261–4272, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0218127407019937>>. Citado na página 47.
- GINGOLD, H. *et al.* Uniqueness of linear boundary value problems for differential systems. **Pacific Journal of Mathematics**, Pacific Journal of Mathematics, v. 75, n. 1, p. 107–136, 1978. Citado na página 38.
- HALE, J. K. **Ordinary differential equations, re krieger pub**. [S.l.: s.n.], 1980. v. 46. Citado nas páginas 36 e 37.
- HALES, T. C. A proof of the kepler conjecture. **Annals of mathematics**, JSTOR, p. 1065–1185, 2005. Disponível em: <www.jstor.org/stable/20159940>. Citado na página 25.
- HANSEN, E. R. **Publications Related to Early Interval Work of R. E. Moore**. 2001. Disponível em: <https://interval.louisiana.edu/Moores_early_papers>. Acesso em: 18/09/2020. Citado na página 25.
- KANTOROVITCH, L. The method of successive approximation for functional equations. **Acta Mathematica**, Acta Mathematica, v. 71, n. 0, p. 63–97, 1939. ISSN 0001-5962. Citado na página 26.
- KELLER, H. B. **Numerical solution of two point boundary value problems**. [S.l.]: SIAM, 1976. Citado na página 38.
- KENNETH, A.; HAKEN, W. Every planar map is four colorable part i. discharging. **Illinois Journal of Mathematics**, v. 21, p. 429–490, 1977. Disponível em: <<https://doi.org/10.1215/ijm/1256049011>>. Citado na página 25.
- KOKUBU, H.; WILCZAK, D.; ZGLICZYNSKI, P. Rigorous verification of cocoon bifurcations in the michelson system. **Nonlinearity**, v. 20, p. 2147–2174, 2007. Citado na página 92.
- KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. [S.l.]: wiley New York, 1978. v. 1. Citado nas páginas 29 e 30.

KUBÍČEK, M.; HLAVÁČEK, V.; HOLODNIOK, M. Test examples for comparison of codes for nonlinear boundary value problems in ordinary differential equations. In: **Codes for Boundary-Value Problems in Ordinary Differential Equations**. [S.l.]: Springer, 1979. p. 325–346. Citado na página 91.

LIMA, E. L. *Algebra linear*, 7ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2006. Citado na página 29.

_____. **Espaços métricos**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 2009. v. 4. Disponível em: <<https://loja.sbm.org.br/index.php/espacos-metricos.html>>. Citado nas páginas 28 e 31.

MALAJOVICH, G. **Geometria de Algoritmos Numéricos, Notas em Matemática Aplicada, vol. 36, SBMAC, São Carlos, setembro de 2008**. 2008. Disponível em: <https://labma.ufrj.br/~gregorio/livros/geometria_de_algoritmos_numericos.pdf>. Citado na página 40.

MATLAB. **version 9.0.0.341360 (R2016a)**. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2016. Citado nas páginas 26, 40, 43, 67 e 68.

MICHEL, D.; ZIDNA, A. Interval-krawczyk approach for solving nonlinear equations systems in b-spline form. In: **Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences**. Springer, 2015. p. 455–465. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-18161-5_39>. Citado na página 46.

MOORE, R. E. **Automatic error analysis in digital computation**. Lockheed, 1959. Disponível em: <https://interval.louisiana.edu/Moores_early_papers/Moore_Lockheed.pdf>. Citado na página 25.

_____. **Interval arithmetic and automatic error analysis in digital computing**. Stanford University, 1962. Disponível em: <https://interval.louisiana.edu/Moores_early_papers/disert.pdf>. Citado na página 25.

MOORE, R. E.; KEARFOTT, R. B.; CLOUD, M. J. **Introduction to interval analysis**. SIAM, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/1.9780898717716>>. Citado nas páginas 44 e 47.

NEUMAIER, A. The wrapping effect, ellipsoid arithmetic, stability and confidence regions. In: **Validation numerics**. [S.l.]: Springer, 1993. p. 175–190. Citado na página 44.

NOLASCO, V. **GitHub**. 2021. Disponível em: <<https://github.com/nolascovictor/ThesisCodes>>. Acesso em: 19/10/2020. Citado nas páginas 48, 73 e 83.

OLIVEIRA, C. R. D. **Introdução à análise funcional**. Impa, 2010. Disponível em: <<https://impa.br/page-livros/introducao-a-analise-funcional/>>. Citado na página 35.

QI, L. A generalization of the krawczyk-moore algorithm. In: **Interval Mathematics 1980**. Elsevier, 1980. p. 481–488. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/b978-0-12-518850-0.50040-8>>. Citado na página 47.

RAMOS, E.; NOLASCO, V.; GAMEIRO, M. Rigorous enclosures of solutions of neumann boundary value problems. **Applied Numerical Mathematics**, in press, 2022. Citado nas páginas 51, 57, 58, 64, 70 e 101.

RUMP, S. M. **Institute for Reliable Computing**. 1998. Disponível em: <<http://www.ti3.tu-harburg.de>>. Acesso em: 19/10/2020. Citado na página 43.

_____. A note on epsilon-inflation. **Reliable Computing**, Springer, v. 4, n. 4, p. 371–375, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1024419816707>>. Citado na página 48.

_____. **IntLab-Interval Laboratory**, in “**Developments in Reliable Computing**”(T. Csendes, ed.). [S.l.]: Kluwer, Dordrecht, 1999. Citado nas páginas 43, 67, 68 e 73.

_____. Verified solution of large linear and nonlinear systems. In: **Error control and adaptivity in Scientific Computing**. Springer, 1999. p. 279–298. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-4647-0_13>. Citado na página 45.

_____. Self-validating methods. **Linear Algebra and its Applications**, North-Holland, v. 324, n. 1-3, p. 3–13, 2001. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(00\)00195-6](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(00)00195-6)>. Citado na página 45.

_____. Verification methods: Rigorous results using floating-point arithmetic. In: **Proceedings of the 2010 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation**. [s.n.], 2010. p. 3–4. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S096249291000005X>>. Citado nas páginas 47, 48 e 70.

SCHÄFER, U. **From Sperner’s Lemma to Differential Equations in Banach Spaces: An Introduction to Fixed Point Theorems and Their Applications**. KIT Scientific Publishing, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.5445/KSP/1000042944>>. Citado nas páginas 39 e 46.

SCOTT, L. R. **Numerical analysis**. Princeton University Press, 2011. Citado na página 40.

SEMENOV, V. Y. A method to find all the roots of the system of nonlinear algebraic equations based on the krawczyk operator. **Cybernetics and Systems Analysis**, Springer, v. 51, n. 5, p. 819–825, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10559-015-9775-0>>. Citado na página 47.

SHAMPINE, L. F.; KIERZENKA, J.; REICHEL, M. W. *et al.* Solving boundary value problems for ordinary differential equations in matlab with bvp4c. **Tutorial notes**, Citeseer, v. 2000, p. 1–27, 2000. Citado na página 89.

TUCKER, W. A rigorous ode solver and smale’s 14th problem. **Foundations of Computational Mathematics**, Springer, v. 2, n. 1, p. 53–117, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s002080010018>>. Citado na página 25.

ZEIDLER, E.; WADSACK, P. R. **Nonlinear functional analysis and its applications: Fixed-point theorems/transl. by Peter R. Wadsack**. Springer-Verlag, 1986. Disponível em: <<https://www.springer.com/gp/book/9780387909141>>. Citado na página 45.

