

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Roteamento de ônibus escolares: uma abordagem para
estudantes com deficiência**

Samuel Ferreira Guimarães Santos

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ciências
de Computação e Matemática Computacional (PPG-C²MC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Samuel Ferreira Guimarães Santos

Roteamento de ônibus escolares: uma abordagem para estudantes com deficiência

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientadora: Profa. Dra. Franklina Maria Bragion Toledo

Coorientador: Prof. Dr. Pedro Belin Castellucci

USP – São Carlos
Agosto de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

F383r Ferreira Guimares Santos, Samuel
 Roteamento de ônibus escolares: uma abordagem
 para estudantes com deficiência / Samuel Ferreira
 Guimares Santos; orientadora Franklina Maria
 Bragion Toledo; coorientador Pedro Belin
 Castellucci. -- São Carlos, 2023.
 64 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
 em Ciências de Computação e Matemática
 Computacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas
 e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

 1. Roteamento de veículos. 2. Seleção de pontos de
 parada. 3. Embarque e desembarque simultâneos. 4.
 Tempos de embarque. I. Bragion Toledo, Franklina
 Maria, orient. II. Belin Castellucci, Pedro,
 coorient. III. Título.

Samuel Ferreira Guimarães Santos

School bus routing problem: an approach to special need
students

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Computer and Mathematical Sciences Graduate Program, for the degree of Master in Science. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Franklina Maria Bragion Toledo
Co-advisor: Prof. Dr. Pedro Belin Castellucci

USP – São Carlos
August 2023

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.
Em especial, aos pesquisadores do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC).*

AGRADECIMENTOS

À Deus pelas oportunidades de aprendizado e pelas portas que Ele abriu ao longo dessa jornada. Cada conquista e cada conquista foram frutos de Sua graça e favor.

À minha orientadora, professora Dra. Franklina Maria Bragion Toledo, por acreditar em mim e me conceder a oportunidade de trabalhar sob sua supervisão. Seu conhecimento profundo, entusiasmo contagiante e comprometimento com a excelência acadêmica foram uma fonte constante de inspiração.

Ao meu co-orientador, professor Dr. Pedro Belin Castellucci, gostaria de expressar minha sincera gratidão por sua orientação e contribuição inestimável durante o desenvolvimento desta tese. Sua expertise, visão e apoio foram fundamentais para a minha pesquisa. Agradeço pela sua disponibilidade em discutir minhas ideias, fornecer feedback construtivo e guiar-me na direção certa

Aos meus pais por terem me proporcionado uma base sólida e uma educação de qualidade desde a infância. Seu investimento em minha educação e seu incentivo constante abriram portas e me possibilitaram trilhar este caminho até o mestrado.

Aos meus irmãos por seu apoio constante e por serem meus maiores torcedores. Suas palavras de ânimo, suporte emocional e celebração das minhas conquistas têm sido um incentivo poderoso ao longo desta jornada.

À minha esposa por estar ao meu lado em cada passo desta jornada. Seu amor, paciência e compreensão foram uma fonte constante de força e motivação, mesmo nos momentos mais desafiadores.

Aos meus amigos, minha gratidão por me incentivarem e me apoiarem em todos os momentos da minha jornada de pesquisa e da vida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001".

*“As invenções são, sobretudo,
o resultado de um trabalho de teimoso.”
(Santos Dumont)*

RESUMO

SANTOS, S. F. G. **Roteamento de ônibus escolares: uma abordagem para estudantes com deficiência.** 2023. 64 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

O acesso ao transporte escolar no Brasil é garantido por lei ao estudante de escola pública, responsabilidade que costuma recair sobre os municípios. O desafio de planejar um sistema de transporte seguro, confiável, pontual e com boa relação custo-benefício tem se tornado cada vez maior com o número crescente de estudantes que necessitam de cuidados especiais. Ao longo de décadas, diversas extensões e variações do problema de roteamento de ônibus escolares foram estudadas por pesquisadores da área de Otimização. No entanto, algumas hipóteses simplificadoras ainda restringem a aplicabilidade dos métodos de solução desenvolvidos. Uma delas está relacionada ao tempo necessário para o embarque e o desembarque dos estudantes. Em diversas aplicações, esse tempo é desconsiderado ou assume-se que é constante, independente da quantidade e da característica dos estudantes. Por exemplo, pode haver cadeirantes utilizando o transporte, o que implicaria em um ajuste do tempo de (des)embarque, ou, ainda, um estudante que necessite da ajuda de um monitor para (des)embarcar. Desconsiderar tais características pode implicar na redução da confiabilidade ou mesmo na inviabilidade das soluções obtidas devido ao horário de chegada na escola. Este trabalho consiste na adaptação de modelos da literatura e na elaboração de métodos de resolução para o problema de roteamento de ônibus escolares com seleção de pontos de parada e tempo de (des)embarque dependente dos estudantes. Inicialmente, resolvemos o problema utilizando abordagens exatas, adaptamos e aprimoramos um modelo da literatura e propusemos dois métodos de decomposição de Benders para sua resolução. Em seguida, foi desenvolvido um algoritmo genético com chaves aleatórias enviesadas para tratar o problema. Finalmente, adaptamos instâncias da literatura para considerar tempos de embarque e desembarque distintos para os estudantes e analisamos a relevância desses tempos na resolução do problema. Os resultados mostraram que os métodos desenvolvidos neste trabalho são competitivos com a literatura e que considerar o tempo de embarque e desembarque no problema aumenta sua complexidade

Palavras-chave: Roteamento de veículos, Seleção de pontos de parada, Embarque e desembarque simultâneos, Tempos de embarque.

ABSTRACT

SANTOS, S. F. G. **School bus routing problem: an approach to special need students.** 2023. 64 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Access to school transportation in Brazil is guaranteed by law to students attending public schools, and this responsibility usually falls on municipalities. The challenge of planning a safe, reliable, punctual, and cost-effective transportation system has become increasingly difficult due to the growing number of students requiring special care. Over the decades, researchers in the field of Optimization have studied various extensions and variations of the school bus routing problem. However, some simplifying assumptions still limit the applicability of the developed solution methods. One of these assumptions is related to the time required for student to hop-in and hop-off the vehicles. In many applications, this time is disregarded or assumed to be constant, regardless of the quantity and characteristics of the students. For example, there may be wheelchair users using the transportation, which would require an adjustment of the service time, or a student who needs assistance from a monitor. Ignoring such characteristics might lead to an increase in costs, a reduction in reliability, or even an infeasibility of the solution. This work consists of adapting models from the literature and developing solution methods for the school bus routing problem with stop selection and service time as a function of the demand. Initially, we solve the problem using exact methods, adapt a model from the literature, and propose two Benders decomposition methods for its solution. Next, a genetic algorithm with biased random keys is developed to address the problem. Finally, we adapt literature instances to consider different services times for the students and analyze the relevance of these times in solving the problem. The results showed that the methods developed in this work are competitive with the literature and that considering the service time in the problem increases its complexity.

Keywords: Vehicle Routing, Stop selection, hop-in and hop-off, Service times.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo ilustrativo do problema.	30
Figura 2 – Uma solução para o exemplo ilustrativo do problema.	31
Figura 3 – Exemplo de rota com os nós quadruplicados.	31
Figura 4 – Gráfico da relação dual-primal.	40

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados computacionais agrupados pelas características da instância. . .	38
Tabela 2 – Resultados computacionais agrupados pelas características das instâncias. .	47
Tabela 3 – Resultados computacionais agrupados pelas características das instâncias. .	53
Tabela 4 – Resultados computacionais com e sem tempos de embarque/desembarque. .	56
Tabela 5 – Resultados computacionais para as instâncias de 1 a 40.	62
Tabela 6 – Resultados computacionais para as instâncias de 41 a 80.	63
Tabela 7 – Resultados computacionais para as instâncias de 81 a 112.	64

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Questões de pesquisa	22
1.2	Estrutura do Texto	23
2	REVISÃO DA LITERATURA	25
2.1	Considerações	26
3	O PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE ÔNIBUS ESCOLARES	29
3.1	Modelo desenvolvido	31
3.2	Adaptações do Modelo	36
3.2.1	<i>Eliminação de soluções simétricas</i>	36
3.2.2	<i>Dimensão da função objetivo</i>	37
3.3	Análise Experimental	37
3.4	Considerações	39
4	MÉTODOS DE BENDERS PARA O SBRP	41
4.1	Método de Benders Lógico - versão clássica	42
4.1.1	<i>Problema Mestre</i>	42
4.1.2	<i>Subproblema</i>	43
4.1.3	<i>Cortes de Benders</i>	44
4.2	Método de Benders Lógico - versão aprimorada	45
4.2.1	<i>Problema Mestre</i>	45
4.3	Análise Experimental	46
4.4	Considerações	47
5	BRKGA PARA O SBRP	49
5.1	Algoritmo Genético	49
5.2	BRKGA	50
5.2.1	<i>Representação do cromossomo</i>	50
5.2.2	<i>Decodificação</i>	50
5.2.3	<i>Algoritmo de Fluxo Máximo</i>	52
5.3	Resultados Computacionais	53
5.4	Considerações	54

6	SBRP: TEMPOS EMBARQUE/DESEMBARQUE	55
6.1	Adaptação das Instâncias	55
6.2	Resultados Computacionais	55
7	CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS	57
	REFERÊNCIAS	59
APÊNDICE A	RESULTADOS DETALHADOS MÉTODOS DE BEN- DERS	61

INTRODUÇÃO

De acordo com o censo escolar de 2019, a educação básica contava com mais de 47 milhões de estudantes matriculados em 180 milhões de escolas no Brasil (INEP (2019)). Os dados também apontavam que em torno de 89% das matrículas estavam concentradas na área urbana e que 1,3 milhão de estudantes estavam na educação especial.

Como destacado na literatura, um transporte eficiente e seguro, traz muitos benefícios aos estudantes (Ellegood *et al.* (2020)). Conseqüentemente, o transporte escolar tem impacto significativo no acesso à educação. Mais especificamente no Brasil, a lei determina que o acesso ao transporte dos estudantes é responsabilidade do Estado e, em geral, esta responsabilidade é delegada aos municípios.

É fundamental que o transporte escolar seja seguro, confiável, pontual e com boa relação entre custo e benefício. Nesse sentido, a importância da definição de rotas para o transporte de estudantes é evidenciada pela literatura da área de Otimização há mais de 50 anos acerca do Problema de Roteamento de Ônibus Escolares (Ellegood *et al.* (2020)).

De acordo com Park e Kim (2010), três questões são muito relevantes para o transporte escolar: i) os pontos de parada dos ônibus (que podem ser pré-fixados ou escolhidos a partir de um conjunto disponível); ii) os objetivos a serem considerados, por exemplo, custos de transporte, número de veículos necessários, tempo dos alunos no transporte e distância percorrida pelos alunos até os pontos de parada dos ônibus; e iii) quais são as restrições que o transporte apresenta, como limite de recursos, distância máxima que pode ser percorrida pelos estudantes, horário limite para chegar a escola. Ellegood *et al.* (2020) mostram que diversas combinações dessas características foram de fato abordadas na literatura (p.e., Miranda *et al.* (2018), Bertsimas, Delarue e Martin (2018) e Caceres, Batta e He (2019)).

Além das questões apontadas por Park e Kim (2010), o transporte escolar também pode envolver alunos com deficiência. Nesse contexto, como destacam Ribeiro e Tentes (2016), gerenciar o transporte escolar se torna um desafio ainda maior, pois há demanda por veículos

com características específicas para permitir o acesso dos alunos. Entre outros fatores, [Caceres, Batta e He \(2019\)](#) apontam restrições especiais no transporte dos estudantes, como tempo de duração e necessidade de equipamentos especiais para o transporte. Os autores também destacam que, em geral, esses alunos vivem longe de suas escolas. Apesar da grande variedade de situações exploradas na literatura, a extensão do problema que permite o embarque e o desembarque simultâneos em uma rota, pelo melhor do nosso conhecimento, foi abordada apenas recentemente por [Miranda *et al.* \(2018\)](#). Os autores tratam o problema de transporte escolar direcionado a alunos da área rural que inclui também alunos com deficiência. No entanto, embora a abordagem seja inclusiva, não é considerado o tempo de embarque nos pontos, o que pode se tornar significativo quando temos a presença de alunos com deficiência.

A situação de transporte exclusivamente de alunos com deficiência foi observada numa Associação de Pais e Amigos dos Excepcionais (APAE) do estado de São Paulo. Nesse caso, a prefeitura é responsável pelo transporte, ou seja, um conjunto de ônibus é destinado a buscar/levar os estudantes até suas casas ou próximo a elas. Em cada ônibus, um motorista e um monitor são responsáveis pelo embarque e desembarque dos estudantes. A associação trabalha em dois turnos e, atualmente, o transporte dos estudantes é realizado em quatro etapas. Pela manhã, os estudantes desse turno são pegos em suas casas (ou próximo delas) e levados para a associação. Na hora do almoço, ocorre o retorno a suas casas. Em seguida, os estudantes da tarde são trazidos para a associação e ao final da tarde retornam para suas casas. Ao todo são definidos quatro conjuntos de rotas, dois para cada turno. No horário do almoço, o transporte poderia tratar simultaneamente o embarque e o desembarque dos estudantes, trazendo economia de tempo e de recursos. Devido às características especiais dos estudantes, as distâncias de deslocamentos permitidas até uma parada de ônibus são bastante distintas, chegando a ser necessário ter uma parada em sua própria casa. Além disso, o tempo de embarque e de desembarque é dependente dos estudantes que se encontram nas paradas, sendo, portanto, relevante e devendo ser considerado explicitamente na definição das rotas. Essa característica é chamada na literatura de tempo de serviço.

Neste trabalho, abordamos o Problema de Roteamento de Ônibus Escolares com Embarque e Desembarque simultâneos com tempo de serviço nas paradas. Além disso, também vamos considerar a definição dos pontos de paradas dos ônibus respeitando as necessidades dos estudantes que podem ou não apresentar deficiências. Os benefícios desta investigação seriam não só o desenvolvimento de planos de transporte mais eficientes, mais seguros e mais equitativos para os distritos escolares, mas também os benefícios sociais e educativos da redução do tempo “desperdiçado” que as crianças permanecem nos ônibus.

1.1 Questões de pesquisa

Inspirados no problema de transporte de estudantes com e sem deficiência, durante este mestrado buscamos responder a três questões de pesquisa:

Q1: *É possível resolver instâncias de dimensões reais utilizando modelagem matemática e softwares de otimização?*

Embora o problema de roteamento de ônibus escolares com embarque e desembarque simultâneos tenha sido modelado por [Miranda et al. \(2018\)](#) e sua versão sem considerar o embarque e desembarque simultâneos tenha sido modelada por [Caceres, Batta e He \(2019\)](#), em nenhum dos trabalhos os autores buscam resolver os problemas utilizando softwares de otimização com base nos modelos propostos. Também, devemos destacar que o tempo de serviço em cada parada depende dos estudantes alocados a ela, o que não é considerado pelos autores. A inclusão dessa restrição aos modelos da literatura pode não ser trivial. Logo, primeiramente, com base nos modelos da literatura, desenvolvemos um modelo matemático para tratar o problema estudado. Em seguida, buscamos aprimorar o modelo e analisamos a dimensão das instâncias que poderiam ser resolvidas diretamente por softwares de otimização.

Q2: *Qual estratégia de resolução é mais adequada para o problema?*

Exploramos, neste trabalho, uma modelagem do problema utilizando o paradigma de Programação Linear Inteira Mista, em seguida, propusemos duas versões de Métodos de Benders e uma meta-heurística para sua resolução.

Q3: *O tempo de embarque e de desembarque distinto influencia fortemente as soluções do problema?*

Com base na literatura, geramos novas instâncias em que os tempos de embarque e de desembarque dos alunos pode ser distinto. Uma análise computacional utilizando os métodos desenvolvidos é apresentada para avaliar a influencia desses tempos nas soluções do problema.

1.2 Estrutura do Texto

Este texto está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2, é apresentada uma revisão bibliográfica dos principais trabalhos científicos relacionados ao problema de roteamento de ônibus escolares. No Capítulo 3, é definido o problema a ser estudado e modelos matemáticos são apresentados. Em seguida, no Capítulo 4, são propostos dois métodos de Benders para tratar o problema. Buscando resolver instâncias de maior porte em tempo computacional aceitável, no Capítulo 5, desenvolvemos um algoritmo genético com chaves aleatórias enviesadas (BRKGA). Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos uma análise computacional sobre a influência de tempos de embarque e desembarque distintos na definição das rotas escolares. As conclusões e sugestões para pesquisas futuras são apresentadas no Capítulo 7.

REVISÃO DA LITERATURA

O problema do roteamento de ônibus escolar (em inglês, *School Bus Routing Problem* - SBRP) consiste em planejar um conjunto ideal de rotas para o transporte de estudantes para a escola. Cada ônibus escolar passa em diversos pontos de parada de ônibus para levar os estudantes, cada um para a sua escola.

O SBRP é estudado há algumas décadas, no que é de nosso conhecimento, [Newton e Thomas \(1969\)](#) foram os primeiros a abordá-lo do ponto de vista de Otimização. [Ellegood et al. \(2020\)](#) apresentam uma revisão bibliográfica dos artigos mais recentes publicados sobre o tema. Segundo os autores, o SBRP pode ser dividido em subproblemas menores: i) seleção dos pontos de parada; ii) geração de rotas; iii) programação das rotas de ônibus; iv) ajuste do horário de início/término escolar; e v) política de transporte. Em muitas abordagens, esses problemas são tratados separadamente e sequencialmente. Embora sejam tratados de forma independente, eles são altamente interligados.

Neste trabalho, vamos abordar os subproblemas de seleção de pontos de parada e de geração de rotas de forma conjunta. [Ellegood et al. \(2020\)](#) identificaram dezessete publicações que abordam o problema de seleção dos pontos de ônibus que, na maioria dos trabalhos, é examinada juntamente com a geração de rotas. No entanto, em geral, esses dois problemas são resolvidos em duas etapas. Inicialmente, o problema de seleção de pontos é tratado, pois a localização e a demanda de cada parada é utilizada como entrada para o problema de roteamento. Em seguida, o problema de geração de rotas é resolvido, sendo esse o principal foco de estudo do SBRP, considerado em 60 das 64 publicações analisadas pelos autores. Métodos de solução para o roteamento frequentemente utilizam heurísticas construtivas combinadas com heurísticas de melhoria.

Destacamos quatro publicações recentes que possuem similaridades com o problema estudado ([Calvete et al. \(2020\)](#), [Caceres, Batta e He \(2019\)](#), [Miranda et al. \(2018\)](#) e [Kinable, Spieksma e Vanden Berghe \(2014\)](#)). [Calvete et al. \(2020\)](#) tratam o problema de determinação

dos pontos de ônibus, alocação de cada estudante aos pontos e o roteamento dos ônibus escolares entre os pontos previamente selecionados em conjunto. O objetivo é minimizar o custo total da rota respeitando uma dada distância limite de caminhada para os alunos. Para a resolução do problema, os autores desenvolveram uma *matheurística* em que inicialmente os estudantes são parcialmente alocados ao conjunto de pontos de ônibus ativos que eles alcançam, em seguida, é computado o conjunto de rotas que minimiza o custo de roteamento. Por fim, é aplicada uma estratégia de refinamento para completar a alocação dos estudantes e adaptar as rotas até que uma solução factível seja encontrada. O método foi testado em conjunto de instâncias encontradas em [Schittekat et al. \(2013\)](#).

[Caceres, Batta e He \(2019\)](#) consideram o SBRP com foco no roteamento de estudantes com necessidades especiais, inspirado no trabalho dos autores com o distrito escolar em *Williamsville*, em *Western New York*, Estados Unidos. No problema estudado, os estudantes com deficiência devem embarcar em suas respectivas residências, enquanto os demais estudantes são alocados a algum ponto de ônibus, dessa forma, não é preciso resolver o subproblema de seleção de pontos de parada. A frota de ônibus é heterogênea, com diferentes quantidades de assentos regulares e para cadeirantes. Os autores desenvolveram uma heurística gulosa acoplada a uma abordagem de geração de colunas para obter soluções aproximadas para as instâncias randomicamente gerada pelos autores.

O terceiro trabalho que aborda os dois subproblemas em conjunto é o de [Miranda et al. \(2018\)](#). Os autores incorporam ao SBRP a possibilidade de tratar o embarque e desembarque dos estudantes simultaneamente nas rotas, independente do turno que o estudante frequenta a escola. Logo, há mais flexibilidade para a diminuição de custos de transporte. Os autores combinaram diversas meta-heurísticas com uma busca local iterada (ILS) com estruturas de vizinhanças especializadas arranjadas em um Método de Busca Decomposta em Vizinhança Variável (VNDS) enriquecidas com um esquema de diversificação que depende de um conjunto elite. Os resultados demonstraram que considerar a abordagem de embarque e desembarque simultâneo reduz significativamente o custo das soluções.

[Kinable, Spieksma e Vanden Berghe \(2014\)](#) resolveram os problemas de seleção dos pontos de parada e de roteamento dos ônibus com um método exato utilizando geração de colunas. Os autores obtiveram bons resultados nos experimentos computacionais realizados utilizando o *benchmark* de [Schittekat et al. \(2013\)](#), onde obtiveram a solução ótima para diversas instâncias e para as demais, fortes limitantes inferiores foram encontrados.

2.1 Considerações

Nesse trabalho, iremos explorar uma lacuna de pesquisa encontrada na literatura, ou seja, os tempos de embarque e de desembarque dos alunos serem distintos. Como tratamos de um problema de roteamento de ônibus escolares que inclui alunos com deficiência, os tempos

de embarque e desembarque dos estudantes podem ser significativamente diferentes. Além disso, sabemos que neste transporte é imprescindível prover um serviço de alta qualidade, sem comprometer o custo do transporte.

O PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE ÔNIBUS ESCOLARES

¹No Brasil, a maioria das escolas trabalham em dois ou três turnos: manhã, tarde e noite. O transporte de alunos para as escolas em algumas cidades é realizado pelo município e em outras apoiado através de passes escolares. Neste trabalho, nosso foco é estudar a elaboração de rotas eficientes para os ônibus escolares no período de troca de turnos, ou seja, visamos definir as rotas para os ônibus considerando simultaneamente os alunos que deixam a escola no fim do turno da manhã e os que vão para a escola para o turno da tarde. A ideia é aproveitar os trajetos e melhorar o transporte para os alunos reduzindo os custos para o município.

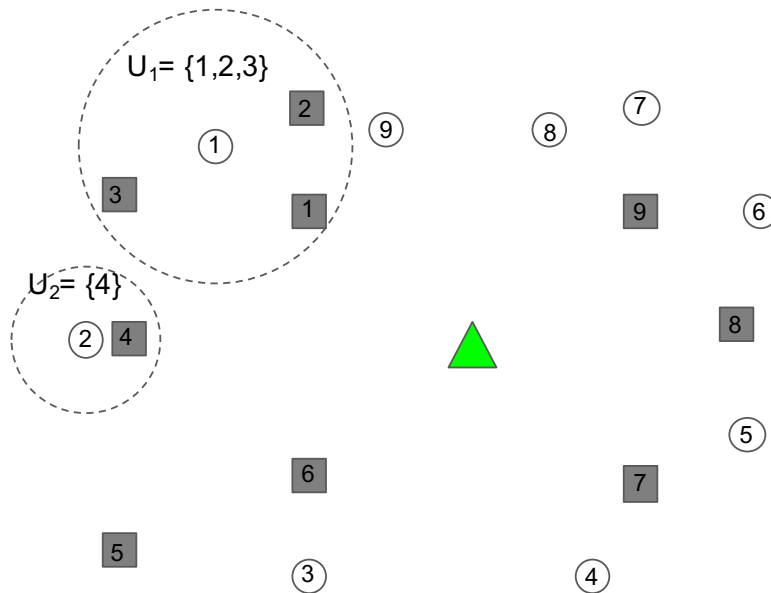
O problema de definição de rotas para ônibus escolares (em inglês: *School Bus Routing Problem* - SBRP) estudado considera que vários pontos de parada de ônibus podem ser utilizados para embarque ou desembarque dos estudantes. Logo, uma das decisões relevantes é a escolha de quais pontos de ônibus farão efetivamente parte das rotas dos ônibus. Além disso, estamos considerando uma situação de inclusão, logo estudantes com deficiências estão presentes e, neste caso, alguns estudantes têm limitações com relação a distância que podem caminhar até um ponto de ônibus, reduzindo assim, o número de pontos a que tem acesso. Em casos extremos, é preciso incluir um ponto de ônibus obrigatório em frente a casa do estudante. Outro ponto importante para o problema estudado, é que o tempo de embarque (desembarque) de cada estudante pode ser diferente, pois os ônibus nem sempre são adaptados da melhor forma para o embarque e o desembarque de pessoas com deficiência.

Na Figura 1, apresentamos um exemplo ilustrativo do problema com nove estudantes e nove possíveis pontos de parada de ônibus. Os círculos menores representam as casas dos estudantes, os retângulos os possíveis pontos de parada e o triângulo a escola. No exemplo, o estudante 1 pode caminhar até os pontos de paradas 1, 2 e 3, logo o círculo pontilhado define o

¹ Parte do trabalho apresentado neste capítulo foi compilado no artigo [Santos, Castellucci e Toledo \(2022\)](#).

conjunto de paradas viáveis para o estudante 1 ($\mathcal{U}_1 = \{1, 2, 3\}$). Enquanto, o estudante 2 deve ser apanhado em sua casa ($\mathcal{U}_2 = \{4\}$).

Figura 1 – Exemplo ilustrativo do problema.



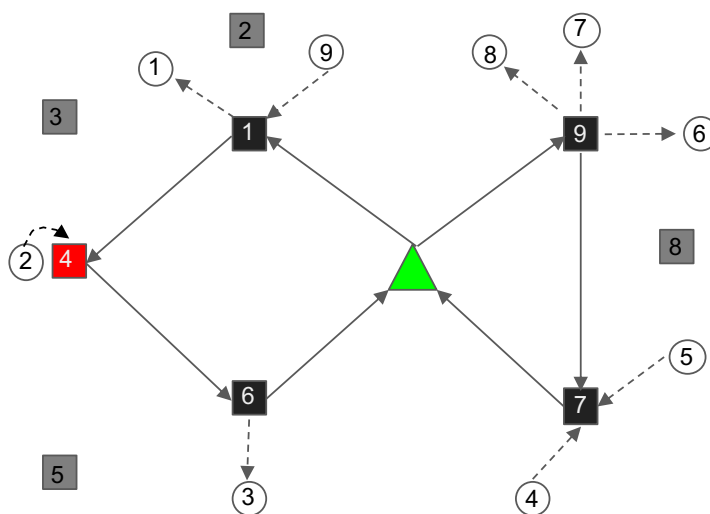
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 2, apresentamos uma solução com duas rotas para o exemplo ilustrativo da Figura 1. Na rota da esquerda (Escola \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow Escola), um ônibus deixa a escola e segue para ponto de parada 1 (quadrado preto), em seguida, passa pela casa de um estudante, ponto de parada 4, que é um ponto de parada obrigatório (retângulo vermelho), finalmente segue para o ponto de parada 6 e retorna a escola. Note que, temos dois estudantes associados ao ponto de parada 1, sendo que o estudante 1 desembarca e o estudante 9 embarca. Nos pontos de parada 4 e 6, os estudantes 2 e 3 embarcam e desembarcam, respectivamente. A rota da direita (Escola \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow Escola) tem apenas dois pontos de parada aos quais estão associados três e dois estudantes, respectivamente. No ponto de parada 9, os estudantes 6, 7 e 8 desembarcam e no ponto de parada 7, os estudantes 4 e 5 embarcam. Nestas rotas, quatro possíveis pontos de parada não são escolhidos (quadrados cinzas).

Vale destacar que cada ônibus é capaz de transportar um número limitado de estudantes. Nosso objetivo é encontrar uma solução para o problema que minimize os custos de transporte, ou seja, minimize a soma dos custos das rotas dos ônibus.

Embora relevante do ponto de vista prático e desafiador do ponto de vista teórico, não é de nosso conhecimento que o SBRP tenha sido tratado na literatura com todas as características aqui estudadas, ou seja, estudantes com deficiência, embarque e desembarque simultâneos, seleção de pontos de parada e tempo de embarque em cada ponto de ônibus dependente dos estudantes. Na Seção 3.1, descrevemos o modelo matemático desenvolvido para tratar o problema estudado que foi baseado em (MIRANDA *et al.*, 2018) e (FURTADO; MUNARI; MORABITO, 2017). Em seguida, na Seção 3.2, apresentamos melhorias para o modelo inicialmente desenvolvido.

Figura 2 – Uma solução para o exemplo ilustrativo do problema.



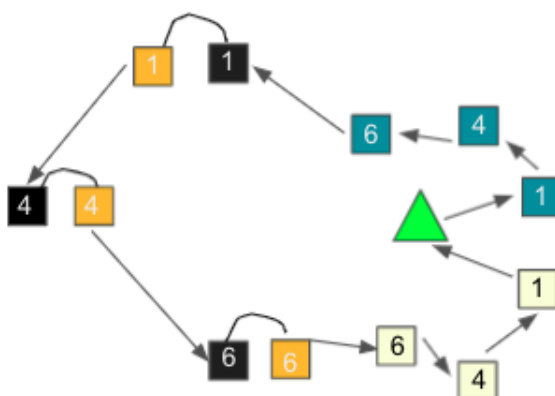
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.1 Modelo desenvolvido

Miranda *et al.* (2018) estudaram um problema muito semelhante ao abordado neste trabalho. Os autores incorporam ao SBRP a possibilidade de tratar o embarque e o desembarque dos estudantes simultaneamente nas rotas. Embora os autores apresentem apenas resultados computacionais para a meta-heurística desenvolvida, os autores também definem um modelo matemático para o problema.

Com base nos modelos de Miranda *et al.* (2018) e de Furtado, Munari e Morabito (2017), desenvolvemos um modelo de otimização linear inteira-mista para o SBRP com as características apresentadas. Vale destacar que, diferentemente de (MIRANDA *et al.*, 2018), utilizamos variáveis com dois índices para representar as rotas. Reduzindo, portanto, o número de variáveis binárias do modelo. Esta abordagem foi apresentada por Furtado, Munari e Morabito (2017) e é descrita a seguir.

Figura 3 – Exemplo de rota com os nós quadruplicados.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para modelar o problema de embarque e desembarque simultâneos, é preciso expandir o conjunto dos pontos de ônibus (U). Cada ponto de ônibus $u \in U$ é duplicado, de tal forma, que um seja responsável pelo embarque de estudantes, u^e , e o outro pelos desembarque de estudantes, u^d . Os estudantes que embarcam em u^e , desembarcam na escola, enquanto os estudantes que desembarcam em u^d , embarcam na escola. Temos, portanto, dois novos conjuntos de paradas de ônibus U^e e U^d . Além disso, como apresentado em (FURTADO; MUNARI; MORABITO, 2017), para tratar o problema de embarque e desembarque simultâneos utilizando variáveis de decisão que não dependem dos ônibus (uma formulação com dois índices), é preciso que cada nó de embarque esteja associado a seu respectivo nó de desembarque. Portanto, criamos múltiplos nós na escola para realizar as associações aos pontos de ônibus duplicados (Sc^d associado ao conjunto U^e e Sc^e associado ao conjunto U^d). Na Figura 3, é ilustrada a representação do problema com três pontos de ônibus. Cada parada é duplicada para tratar a questão do embarque (nó em laranja) e o desembarque (em preto). Em torno da escola, para manter a consistência da lotação dos veículos esses nós são associados a nós localizados na mesma coordenada geográfica da escola (na figura, numerados de acordo com as paradas, estando em amarelo claro os nós de desembarque e em azul os de embarque).

Temos, portanto, o conjunto de nós $N = Sc^e \cup U^d \cup U^e \cup Sc^d \cup Sc$, onde $Sc^e = \{1, \dots, n_u\}$ e $U^d = \{n_u + 1, \dots, 2n_u\}$ representam as viagens dos estudantes voltando da escola, $U^e = \{2n_u + 1, \dots, 3n_u\}$ e $Sc^d = \{3n_u + 1, \dots, 4n_u\}$ representam as viagens dos estudantes indo para a escola e $Sc = \{0, 4n_u + 1\}$ são os dois nós que representam a escola e uma cópia da escola, respectivamente. O conjunto de nós é dividido em dois subconjuntos para facilitar a modelagem, $N^e = Sc^e \cup U^e$ representam os nós de embarque, e $N^d = Sc^d \cup U^d$, os nós de desembarque.

Os parâmetros e as variáveis do modelo são resumidos a seguir.

Conjuntos, Índices e Parâmetros

S	conjunto de estudantes ($k = 1, \dots, S $);
S^e	conjunto de estudantes que embarcam na escola ($S^e \subseteq S$);
S^d	conjunto de estudantes que desembarcam na escola ($S^d \subseteq S$, $S^e \cap S^d = \emptyset$ e $S^e \cup S^d = S$);
U	conjunto de pontos de ônibus ($\ell = 1, \dots, n_u$ em que $n_u = U $);
Sc^e	conjunto de nós de embarque na escola correspondentes aos pontos de ônibus U ($Sc^e = \{1, \dots, n_u\}$);
U^d	conjunto de nós de desembarque correspondentes aos pontos de ônibus U ($U^d = \{n_u + 1, \dots, 2n_u\}$);
U^e	conjunto de nós de embarque correspondentes aos pontos de ônibus U ($U^e = \{2n_u + 1, \dots, 3n_u\}$);
Sc^d	conjunto de nós de desembarque na escola correspondentes aos pontos de ônibus U ($Sc^d = \{3n_u + 1, \dots, 4n_u\}$);
Sc	conjunto de nós que representam a escola ($Sc = \{0, 4n_u + 1\}$);

N	conjunto de todos os nós que representam o problema ($N = Sc^e \cup U^d \cup U^e \cup Sc^d \cup Sc$);
D_{ij}	tempo (ou distância) para ir do nó i ao nó j ($i, j = 0, \dots, 4n_u + 1$);
U_k	conjunto de pontos de ônibus alcançáveis pelo estudante k ($U_k \subseteq U$);
T_k	tempo de embarque (desembarque) do estudante k ;
Q	capacidade dos ônibus;
$TMax$	tempo máximo para um ônibus completar sua rota.

Variáveis binárias

x_{ij}	é igual a 1 se o arco (i, j) for percorrido por algum ônibus, e 0 caso contrário;
y_{kl}	é igual a 1 se o estudante k for designado ao ponto de ônibus ℓ , e 0 caso contrário;
z_ℓ	é igual a 1 se houver embarque ou desembarque no ponto de ônibus ℓ , ou seja, ele é considerado ativo, e 0 caso contrário.

Variáveis inteiras

d_i	demanda do nó i , ou seja, número de estudantes que embarcam (desembarcam) no nó i ;
q_i	lotação do veículo após visitar o nó i ;
r_i	identificador da rota a que o nó i pertence.

Variáveis contínuas

t_i	tempo total de embarque/desembarque no nó i ;
u_i	tempo total da rota após visitar o nó i .

O modelo de otimização linear inteira-mista desenvolvido é dado por (3.1)–(3.26). Vale destacar que, sem perda de generalidade, as variáveis d_i e q_i podem ser consideradas contínuas, pois são resultantes da soma de valores binários, logo não assumem valores fracionários em uma solução ótima do problema.

$$\text{minimizar } \sum_{(i,j) \in N \times N} D_{ij} x_{ij} \quad (3.1)$$

sujeito a:

// Designação dos estudantes aos pontos de ônibus

$$\sum_{\ell \in U_k} y_{k\ell} = 1 \quad \forall k \in S \quad (3.2)$$

$$\sum_{k \in S^e} y_{ki} = d_i \quad \forall i \in Sc^e \quad (3.3)$$

$$\sum_{k \in S^d} y_{k,i-2n_u} = d_i \quad \forall i \in U^e \quad (3.4)$$

$$d_i = -d_{i+n_u} \quad \forall i \in Sc^e \cup U^e \quad (3.5)$$

$$\sum_{k \in S^e} T_k y_{ki} = t_i \quad \forall i \in S^e \quad (3.6)$$

$$\sum_{k \in S^d} T_k y_{k,i-2n_u} = t_i \quad \forall i \in U^e \quad (3.7)$$

$$t_i = t_{i+n_u} \quad \forall i \in S^e \cup U^e \quad (3.8)$$

// Restrições de integração

$$y_{k\ell} \leq z_\ell \quad \forall k \in S, \ell \in U \quad (3.9)$$

// Roteamento dos ônibus

$$\sum_{i \in N} x_{0i} = \sum_{i \in N} x_{i0} \quad (3.10)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = z_i \quad \forall i \in N \quad (3.11)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ji} = z_i \quad \forall i \in N \quad (3.12)$$

$$q_j \geq q_i + d_j + 2Q(x_{ij} - 1) \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, j \in N, i \neq j \quad (3.13)$$

$$q_i \leq Q \quad \forall i \in N \quad (3.14)$$

$$u_j \geq u_i + (D_{ij} + t_j) + M(x_{ij} - 1) \quad \forall i, j \in N, i \neq j \quad (3.15)$$

$$u_{i+n_u} \geq u_i + (d_{i,i+n_u} + t_{i+n_u}) \quad \forall i \in N^e \quad (3.16)$$

$$u_j \leq TMax \quad \forall i \in N^e \quad (3.17)$$

$$r_{i+n_u} = r_i \quad \forall i \in N^e \quad (3.18)$$

$$r_j \geq j x_{0j} \quad \forall i \in N \setminus \{0\} \quad (3.19)$$

$$r_j \leq j x_{0j} + |N| (1 - x_{0j}) \quad \forall i \in N \setminus \{0\} \quad (3.20)$$

$$r_j \geq r_i - n (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (3.21)$$

$$r_j \leq r_i + n (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (3.22)$$

// Domínio das variáveis

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N \quad (3.23)$$

$$y_{k\ell} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in S, \ell \in U \quad (3.24)$$

$$z_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in U \quad (3.25)$$

$$d_i \geq 0, q_i \geq 0, r_i \geq 0, u_i \geq 0, t_i \geq 0 \quad \forall i \in N \quad (3.26)$$

A função objetivo (3.1) visa minimizar a soma dos tempos (distâncias) gastos para concluir as rotas. As restrições (3.2) garantem que cada estudante k é alocado a exatamente um ponto de ônibus ℓ . Conforme explicado anteriormente, a cada ponto de ônibus ℓ estão associados quatro nós. O primeiro par corresponde a um nó de embarque na escola e desembarque no ponto de ônibus, enquanto o segundo par representa o oposto, ou seja, um nó de embarque no ponto de ônibus e um nó de desembarque na escola. O número de alunos designados a cada nó de embarque da escola é contabilizado pelas restrições (3.3), enquanto o número de alunos

designados a cada nó de embarque correspondente aos pontos de ônibus é contabilizado pelas restrições (3.4). As restrições (3.5) asseguram a consistência da quantidade de estudantes que embarcam em um nó e desembarcam em seu nó correspondente, ou seja, os alunos que embarcam em i devem desembarcar em $i + n_u$. De forma análoga, em (3.6)–(3.8) contabilizamos o tempo de embarque/desembarque nos nós somando o tempo de embarque/desembarque de cada estudante k alocado ao nó i .

As restrições (3.9) asseguram que um estudante só pode ser alocado ao ponto de ônibus ℓ , se o ponto estiver ativado ($z_\ell = 1$). Vale destacar que estas restrições são responsáveis pela integração entre o problema de designar os estudantes aos pontos de ônibus e o roteamento dos ônibus escolares. Ao ativarmos um ponto de ônibus ℓ , temos que considerar os quatro nós correspondentes a esse ponto no planejamento das rotas, ou seja, no roteamento dos ônibus escolares.

A restrição (3.10) impõe que todos os ônibus que deixam a escola retornam a ela ao final de suas rotas. As restrições (3.11) e (3.12) garantem que um ônibus somente visitará os nós ativos, ou seja, aqueles aos quais pelo menos um estudante for alocado. As restrições (3.13) asseguram a consistência da capacidade dos veículos durante a rota, enquanto as restrições (3.14) garantem que a capacidade dos ônibus é respeitada. As restrições (3.15) contabilizam o tempo acumulado de rota de um veículo após finalizar o atendimento do nó j .

As restrições (3.16) – (3.22) asseguram as relações de pareamento e de precedência entre os nós de embarque e de desembarque. As restrições (3.16) garantem que o nó de desembarque somente é visitado após o nó de embarque. As restrições (3.19) e (3.20) permitem atribuir o valor j a r_j se o nó j for o primeiro nó a ser visitado em sua rota, ou seja, $x_{0j} = 1$. Enquanto, as restrições (3.21) e (3.22) garantem que todo nó i sucessor j recebe o rótulo j , ou seja, $r_i = r_j$. Finalmente, as restrições (3.18) asseguram que os pontos de embarque e desembarque pertencem a mesma rota. O domínio das variáveis é definido pelas restrições (3.23)–(3.26).

Como destacamos anteriormente, o modelo de [Miranda et al. \(2018\)](#) trata um problema muito semelhante ao estudado, no entanto, os autores consideram janelas de tempo para cada ponto de ônibus, o que em nosso caso não é necessário, pois consideramos apenas o horário limite para que os estudantes cheguem na escola (3.17). Além disso, no caso estudado pelos autores, um ônibus pode ou não ter monitor, dependendo dos estudantes a ele associados. Em nosso caso, todos os ônibus têm monitor, pois estamos trabalhando com estudantes com deficiência. Outro ponto importante é que no trabalho de [Miranda et al. \(2018\)](#) não é relevante o tempo de embarque e desembarque nos pontos de ônibus. No nosso estudo, esta questão é extremamente relevante, pois os estudantes podem ter deficiência e o tempo de embarque de cada um pode ser muito distinto, uma vez que os ônibus não são adequadamente adaptados.

Nota 1. Vale destacar que caso o tempo de embarque e de desembarque de um estudante sejam diferentes, o modelo apresentado pode ser facilmente adaptado substituindo as restrições (3.6) e (3.7) por:

$$\sum_{k \in S^e} T_k^e y_{ki} = t_i \quad \forall i \in S^e \quad (3.27)$$

$$\sum_{k \in S^e} T_k^d y_{ki} = t_{i+n_u} \quad \forall i \in U \quad (3.28)$$

$$\sum_{k \in S^d} T_k^e y_{k,i-2n_u} = t_i \quad \forall i \in U^e \quad (3.29)$$

$$\sum_{k \in S^d} T_k^d y_{ki} = t_{i+3n_u} \quad \forall i \in U \quad (3.30)$$

em que: T_k^e é o tempo de embarque do estudante k e T_k^d é seu tempo de desembarque.

Nota 2. O modelo (3.1)–(3.26) foi definido para considerar estudantes com deficiência e sem deficiência no mesmo sistema de transporte. Neste caso, é necessário apenas definir os tempos de embarque e de desembarque dos estudantes de forma apropriada. Deve-se enfatizar que esta questão está totalmente em acordo com a inclusão dos estudantes com deficiência nas escolas municipais e estaduais.

3.2 Adaptações do Modelo

Dois pontos foram analisados em busca da melhoria do modelo inicialmente desenvolvido: i) eliminação de soluções simétricas; e ii) melhoria do processo de busca de soluções na árvore *branch-and-bound*.

3.2.1 Eliminação de soluções simétricas

Ao estudarmos o problema, observamos que várias soluções simétricas podem ser descartadas, sem perda de generalidade, eliminando variáveis do problema, mais especificamente, variáveis que corresponde a arcos do problema (x_{ij}).

O tempo de descolamento (ou distância) entre nós pertencentes ao conjunto S^e é zero, pois todos esses nós estão na mesma localização da escola, sendo apenas utilizados no modelo como um artifício de modelagem para determinar o embarque e desembarque dos alunos. Por isso, podemos eliminar alguns arcos desse conjunto sem perda de generalidade. Por exemplo, dadas duas soluções com os seguintes arcos: 1 -> 3 -> 2 e 1 -> 2 -> 3. As duas possuem o mesmo custo (zero) e representam a mesma solução, estão embarcando os alunos 1, 2 e 3, na escola. Para evitar este tipo de simetria é imposto que os arcos devem ser percorridos de forma crescente dentro desse conjunto, ou seja, $x_{ij} = 0$ para $i \geq j$. A mesma estratégia é aplicada para os arcos do conjunto S^d que representa os alunos desembarcando na escola.

3.2.2 Dimensão da função objetivo

A fim de contribuir positivamente no processo de busca na árvore *branch-and-cut* buscamos incluir informações de mais variáveis no gradiente da função objetivo. Para tanto, a função objetivo foi reescrita para considerar os custos da rota relacionados a cada ponto de ônibus utilizado. A nova função objetivo é dada por:

$$\text{minimizar } \sum_{i \in N} c'_i z_i + \sum_{(i,j) \in N \times N} (D_{ij} - c'_i) x_{ij} \quad (3.31)$$

em que: c'_i é o tempo mínimo necessário para um veículo passar pelo ponto de ônibus i , ou seja, $c'_i = \min_{j \in N} \{D_{ij}\}$. Vale destacar que quando $z_i = 1$, o ponto de ônibus pertence a rota.

Como mostramos a seguir, as duas funções objetivo são equivalentes.

Demonstração.

$$\sum_{(i,j) \in N \times N} D_{ij} x_{ij} = \sum_{(i,j) \in N \times N} D_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in N} c'_i z_i - \sum_{i \in N} c'_i z_i$$

Por (3.10), temos que: $\sum_{j \in N} x_{ij} = z_i$, portanto:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in N \times N} D_{ij} x_{ij} &= \sum_{(i,j) \in N \times N} D_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in N} c'_i z_i - \sum_{i \in N} c'_i \sum_{j \in N} x_{ij} \\ \sum_{(i,j) \in N \times N} D_{ij} x_{ij} &= \sum_{(i,j) \in N \times N} D_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in N} c'_i z_i - \sum_{(i,j) \in N \times N} c'_i x_{ij} \\ \sum_{(i,j) \in N \times N} D_{ij} x_{ij} &= \sum_{i \in N} c'_i z_i + \sum_{(i,j) \in N \times N} (D_{ij} - c'_i) x_{ij} \end{aligned}$$

□

3.3 Análise Experimental

O objetivo destes experimentos computacionais é analisar a dimensão das instâncias para as quais é possível obter uma solução comprovadamente ótima utilizando os modelos propostos para representá-las. Além disso, comparamos o desempenho das duas funções objetivo propostas.

Para tanto, foram testadas as 112 instâncias de [Schittekat et al. \(2013\)](#) que frequentemente são utilizadas na literatura para avaliar modelos e métodos propostos para tratar o SBRP (p.e. [Kinable, Spieksma e Vanden Berghe \(2014\)](#), [Miranda et al. \(2018\)](#)). Nesse conjunto de instâncias, o número de pontos de ônibus varia entre 5 e 40, enquanto o número de estudantes varia entre 25 e 800. Cada instância descreve a distância entre as paradas, a capacidade máxima dos

ônibus e a máxima distância de caminhada de cada estudante. O conjunto de paradas de ônibus alcançáveis para cada estudante é obtido pela sua localização e a distância máxima de caminhada. É considerado o plano euclidiano para o cálculo das distâncias utilizadas. Estas instâncias não consideram tempos de embarque e desembarque. No Capítulo 6, apresentamos uma análise que inclui tais tempos.

As instâncias foram codificadas utilizando os modelos propostos utilizando linguagem C++ e foram resolvidas utilizando o *solver* de otimização Gurobi versão 9.1 e limitando o número máximo de *threads* em quatro. O ambiente computacional era equipado com um processador Intel(R) Core(TM) i7-7700 CPU @ 3,60GHz, memória RAM de 16 GB e o sistema operacional Ubuntu 16.04. Para todos os testes realizados, foi utilizado o tempo limite de 1 hora para resolução de cada instância.

Tabela 1 – Resultados computacionais agrupados pelas características da instância.

U	S	<i>Obj₁</i>			<i>Obj₂</i>		
		GAP (%)	NO	NS	GAP (%)	NO	NS
5	25	0,00	8	0	0,00	8	0
5	50	0,00	8	0	0,00	8	0
5	100	0,00	8	0	0,00	8	0
10	50	0,00	8	0	0,00	8	0
10	100	1,75	3	0	0,09	7	0
10	200	5,63	1	0	1,66	3	0
20	100	18,75	0	0	11,08	1	0
20	200	26,38	0	0	17,65	0	0
20	400	15,57	0	2	10,29	0	1
40	200	54,25	0	0	43,39	0	0
40	400	46,50	0	1	42,28	0	1
40	800	22,14	0	3	18,85	0	1
80	400	75,33	0	1	68,22	0	2
80	800	77,86	0	1	65,55	0	1
Total			36	8		43	6

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Tabela 1, são apresentados os resultados obtidos para os dois modelos, ou seja, utilizando a função objetivo (3.1) (*Obj₁*) e a função objetivo (3.31) (*Obj₂*). Em cada linha da tabela são sumarizados os resultados das 8 instâncias de cada dimensão, ou seja, o número de pontos de ônibus ($|U|$) e o número de estudantes ($|S|$). Estes dados são reportados nas duas primeiras colunas da tabela. As colunas 3-5 apresentam os resultados obtidos utilizando a função objetivo (3.1), em que a terceira coluna indica o *GAP* médio, a quarta indica o número de instâncias para as quais uma solução comprovadamente ótima foi obtida (NO) e a quinta coluna o número de instâncias para as quais nenhuma solução factível foi encontrada no tempo limite de 1 hora (NS). Nas colunas 6-8, são reportadas as mesmas informações para o modelo com a função objetivo (3.31).

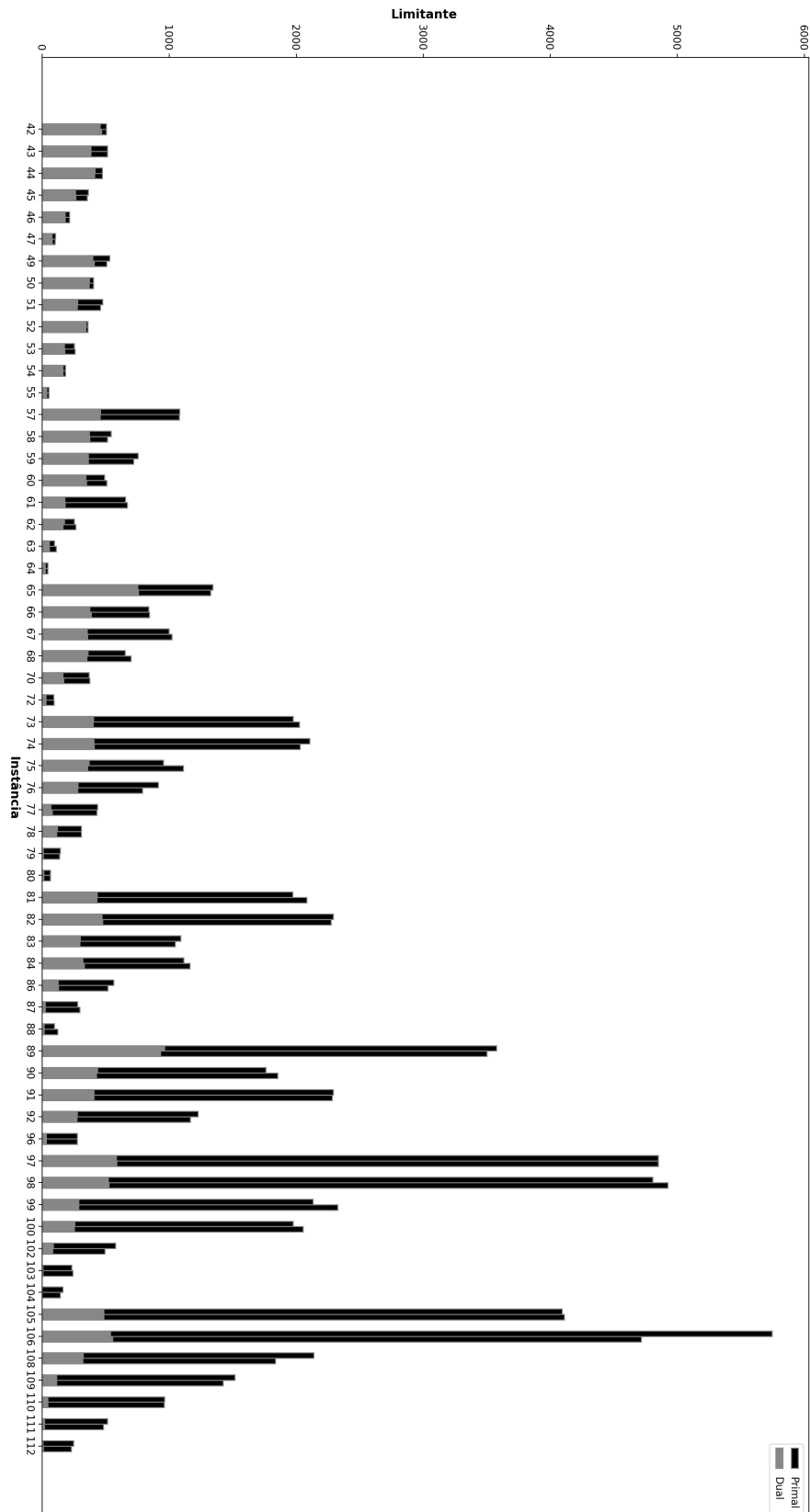
Observamos que para todas as instâncias com 5 pontos de parada uma solução comprovadamente ótima foi obtida pelos dois modelos desenvolvidos. No entanto, para 23% e 57% das instâncias com 10 pontos de parada foram obtidas soluções comprovadamente ótimas, utilizando a função objetivo (3.1) e (3.31), respectivamente. Para as instâncias com 20 ou mais pontos de parada foi obtida apenas uma solução comprovadamente ótima utilizando a função objetivo (3.31). Em resumo, podemos notar que ao utilizarmos a função objetivo (3.31) foi possível comprovar a otimalidade para 43 instâncias, ou seja, houve um aumento de 25% em relação ao modelo com a função objetivo (3.1). Além disso, considerando todas as instâncias, o GAP médio foi diminuído em média 11,34%.

Para as instâncias em que uma solução comprovadamente ótima não foi obtida, ilustramos na Figura 4, os limitantes duais e primais obtidos utilizando cada uma das funções objetivo analisadas. Logo, para cada instância temos duas barras a primeira corresponde aos limitantes obtidos resolvendo a instância utilizando a função objetivo (3.1) (Obj_1) e a segunda utilizando a função objetivo (3.31).

3.4 Considerações

Como podemos observar, não foi possível obter soluções comprovadamente ótimas para todas as instâncias com dez ou mais paradas de ônibus. No entanto, o modelo que utiliza a função objetivo (3.31) mostrou-se mais promissor. Logo, no Capítulo 4, abordamos a resolução do problema utilizando o método de Benders com base no modelo desenvolvido utilizando a função objetivo (3.31).

Figura 4 – Gráfico da relação dual-primal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

MÉTODOS DE BENDERS PARA O SBRP

Na literatura, os melhores resultados para o problema de roteamento de ônibus escolares (SBRP) foram obtidos utilizando um método exato baseado em geração de colunas (Kinable, Spieksma e Vanden Berghe (2014)). Além disso, como observamos no Capítulo 3, houve melhoria das soluções ao utilizarmos a nova função objetivo (3.31). Inspirados nestes dois resultados, exploramos a resolução do problema estudado utilizando um método exato.

Escolhemos investigar o método de Benders por haver na literatura casos de sucesso de sua aplicação a problemas de roteamento de veículo (VRP) (p.e. Li, Wang e Zhang (2018), Riedler e Raidl (2018) e Fachini e Armentano (2020)). Embora o roteamento seja uma componente importante do problema de roteamento de ônibus escolares, não é de nosso conhecimento a utilização de algoritmos baseados em Decomposição de Benders como abordagem de solução para o problema estudado.

A decomposição de Benders foi proposta em 1962 por Benders (Benders (1962)) e é aplicada amplamente na literatura para a resolução de diversos problemas. A ideia central do método de Benders e do método de geração de colunas é a resolução de problemas através da estratégia de decomposição dos problemas em subproblemas menores. Enquanto a geração de colunas baseia-se em geração de novas variáveis, o método de Benders consiste na geração de novas restrições.

O método de decomposição de Benders pode ser utilizado na resolução de problemas de programação linear inteira mista e não-linear. O problema original é decomposto em dois subproblemas: o problema mestre, uma versão relaxada do problema original contendo o conjunto de variáveis inteiras juntamente com suas respectivas restrições e uma variável contínua adicional, e o subproblema, que corresponde ao problema original com os valores das variáveis inteiras temporariamente fixadas pelo problema mestre.

O algoritmo proposto por Benders resolve cada um dos dois problemas mais simples de forma iterativa. A cada ciclo, uma nova restrição, conhecida como corte de Benders, é adicionada

ao problema mestre. Essa nova restrição, originada a partir da resolução do dual do subproblema, permite estimar limites inferiores (se o problema estudado for de minimização) para o problema original. O algoritmo cicla até que os limitantes dual e primal sejam iguais. O limitante dual é dado pela função objetivo do problema mestre relaxado.

Para o problema estudado neste trabalho, dividimos o problema em: i) designação dos estudantes aos pontos de ônibus, e ii) roteamento dos ônibus escolares. O problema mestre é responsável por encontrar designações de estudantes a pontos de ônibus válidos, ou seja, que cada estudante seja designado a um ponto de ônibus que respeite sua distância máxima de caminhada e que a cada ponto de ônibus não sejam alocados mais estudantes do que a capacidade do ônibus. Com a designação fixada, o subproblema resolve um problema de roteamento de veículos com embarque e desembarque simultâneos.

Esta decomposição do problema resulta em subproblemas com variáveis contínuas e inteiras, o que difere da proposta original do método de Benders. Por isso, usaremos uma extensão do método, conhecida como *Logic-based Benders Decomposition* conforme proposta de [Hooker e Ottosson \(2003\)](#).

4.1 Método de Benders Lógico - versão clássica

Inicialmente, o SBRP foi decomposto de forma que o problema mestre considera a designação dos estudantes aos pontos de ônibus e o subproblema obtém as rotas considerando os pontos de ônibus para os quais há estudantes designados. O problema mestre e o subproblema são descritos a seguir.

4.1.1 Problema Mestre

No problema mestre, é considerada a designação dos estudantes aos pontos de ônibus. A função objetivo visa minimizar a distância percorrida pelos veículos. Inicialmente, são consideradas apenas as distâncias mínimas para que um veículo passe em um ponto de ônibus (c'_i). Nas iterações seguintes, o valor de α corresponde a distância percorrida pelos ônibus. O problema mestre é dado pelo modelo (4.1) – (4.8).

$$\text{minimizar } \sum_{\ell \in U} c'_\ell z_\ell + \alpha \quad (4.1)$$

sujeito a:

// Designação dos estudantes aos pontos de ônibus

$$\sum_{\ell \in U_k} y_{k\ell} = 1 \quad \forall k \in S \quad (4.2)$$

$$\sum_{k \in S^e} y_{ki} \leq Q \quad \forall i \in Sc^e \quad (4.3)$$

$$\sum_{k \in S^d} y_{k,i-2n_u} \leq Q \quad \forall i \in U^e \quad (4.4)$$

$$y_{k\ell} \leq z_\ell \quad \forall k \in S, \ell \in U \quad (4.5)$$

// Domínio das variáveis

$$y_{k\ell} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in S, \ell \in U \quad (4.6)$$

$$z_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in U \quad (4.7)$$

$$\alpha \geq 0 \quad (4.8)$$

4.1.2 Subproblema

No problema mestre, são definidos os pontos de ônibus aos quais foram designados os estudantes, logo as variáveis z_ℓ têm seus valores fixados em 1 se uma rota deve passar pelo ponto de ônibus ℓ e 0 caso contrário. São, portanto, dados para o subproblema, que chamamos de \bar{z}_ℓ .

Um vez obtida a designação dos estudantes aos pontos de ônibus, ou seja, fixadas as variáveis y_{ki} , é possível obter a demanda e o tempo de serviço para cada ponto de ônibus, isto é, as variáveis d_i e t_i passam a ser dados para o subproblema e são definidos como:

$$d_i = \sum_{k \in S^e} y_{ki} \quad \forall i \in Sc^e \quad (4.9)$$

$$d_i = \sum_{k \in S^d} y_{k,i-2n_u} \quad \forall i \in U^e \quad (4.10)$$

$$d_i = -d_{i+n_u} \quad \forall i \in Sc^e \cup U^e \quad (4.11)$$

$$t_i = \sum_{k \in S^e} T_k y_{ki} \quad \forall i \in Sc^e \quad (4.12)$$

$$t_i = \sum_{k \in S^d} T_k y_{k,i-2n_u} \quad \forall i \in U^e \quad (4.13)$$

$$t_i = t_{i+n_u} \quad \forall i \in Sc^e \cup U^e \quad (4.14)$$

Definidos os pontos de parada, as demandas e os tempos de serviço em cada ponto de parada, o subproblema a ser resolvido é dado por (4.15) – (4.29).

$$fo_{sub} = \text{minimizar} \sum_{(i,j) \in N} (D_{ij} - c'_i) x_{ij} \quad (4.15)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in N} x_{0i} = \sum_{i \in N} x_{i0} \quad (4.16)$$

$$\sum_{j \in N} x_{\ell+i,j} = \bar{z}_\ell \quad \ell \in U, i \in \{0, n_u, 2n_u, 3n_u\} \quad (4.17)$$

$$\sum_{j \in N} x_{j,\ell+i} = \bar{z}_\ell \quad \ell \in U, i \in \{0, n_u, 2n_u, 3n_u\} \quad (4.18)$$

$$q_j \geq q_i + d_j + 2Q(x_{ij} - 1) \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, j \in N, i \neq j \quad (4.19)$$

$$q_i \leq Q \quad \forall i \in N \quad (4.20)$$

$$u_j \geq u_i + (D_{ij} + t_j) + M(x_{ij} - 1) \quad \forall i, j \in N, i \neq j \quad (4.21)$$

$$u_{i+n_u} \geq u_i + (d_{i,i+n_u} + t_{i+n_u}) \quad \forall i \in N^e \quad (4.22)$$

$$r_{i+n_u} = r_i \quad \forall i \in N^e \quad (4.23)$$

$$r_j \geq j x_{0j} \quad \forall i \in N \setminus \{0\} \quad (4.24)$$

$$r_j \leq j x_{0j} + |N| (1 - x_{0j}) \quad \forall i \in N \setminus \{0\} \quad (4.25)$$

$$r_j \geq r_i - n (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (4.26)$$

$$r_j \leq r_i + n (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (4.27)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N \quad (4.28)$$

$$q_i \geq 0, r_i \geq 0, u_i \geq 0 \quad \forall i \in N \quad (4.29)$$

4.1.3 Cortes de Benders

Com a solução do subproblema, tem-se definido o melhor custo para o problema com a designação de estudantes definida, \bar{y}_{kl} . Para incorporar tal informação, pode-se adicionar a restrição (4.30) no problema mestre.

$$\alpha \geq fo_{sub} - fo_{sub} \sum_{\bar{y}_{kl}=1} (1 - y_{kl}) + \sum_{\bar{y}_{kl}=0} y_{kl}. \quad (4.30)$$

Como a adição de novos pontos de parada em uma rota não diminui o valor da solução, então é possível escrever a restrição (4.31).

$$\alpha \geq fo_{sub} - fo_{sub} \sum_{\bar{y}_{kl}=1} (1 - y_{kl}). \quad (4.31)$$

Portanto, o problema mestre é reotimizado adicionando o corte definido em (4.31).

4.2 Método de Benders Lógico - versão aprimorada

Um dos desafios do algoritmo de Benders é encontrar um equilíbrio entre os problemas mestre e subproblema. Um problema mestre demasiadamente simples pode implicar em um elevado número de iterações para convergência, entretanto, um problema mestre sofisticado (contemplando muitas características do problema original) pode implicar em iterações bastante custosas. Experimentos computacionais iniciais mostraram que o método desenvolvido anteriormente apresenta lentidão na convergência. Portanto, desenvolvemos uma segunda versão do método de Benders para o problema estudado. O problema mestre é detalhado a seguir. O subproblema e os cortes de Benders se mantêm os mesmos.

4.2.1 Problema Mestre

Na primeira versão do método, percebemos que a solução estava demorando para convergir. Pudemos notar que como não há custo relacionado a designação dos estudantes, diferentes designações factíveis apresentam o mesmo valor de função objetivo (zero). Por isso, nesta segunda versão, optamos por contabilizar o custo aproximado do roteamento também no problema mestre. Para isso, adicionamos as variáveis e as restrições de roteamento ao problema com as variáveis x_{ij} linearmente relaxadas, ou seja, $0 \leq x_{ij} \leq 1$. O novo problema mestre é descrito a seguir.

$$\text{minimizar } \sum_{i \in U} c'_i z_i + \sum_{(i,j) \in N} (D_{ij} - c'_i) x_{ij} \quad (4.32)$$

sujeito a:

// Designação dos estudantes aos pontos de ônibus

$$\sum_{\ell \in U_k} y_{k\ell} = 1 \quad \forall k \in S \quad (4.33)$$

$$\sum_{k \in S^e} y_{ki} = d_i \quad \forall i \in Sc^e \quad (4.34)$$

$$\sum_{k \in S^d} y_{k,i-2n_u} = d_i \quad \forall i \in U^e \quad (4.35)$$

$$d_i = -d_{i+n_u} \quad \forall i \in Sc^e \cup U^e \quad (4.36)$$

$$\sum_{k \in S^e} T_k y_{ki} = t_i \quad \forall i \in Sc^e \quad (4.37)$$

$$\sum_{k \in S^d} T_k y_{k,i-2n_u} = t_i \quad \forall i \in U^e \quad (4.38)$$

$$t_i = t_{i+n_u} \quad \forall i \in Sc^e \cup U^e \quad (4.39)$$

// Restrições de integração

$$y_{k\ell} \leq z_\ell \quad \forall k \in S, \ell \in U \quad (4.40)$$

// Roteamento dos ônibus

$$\sum_{i \in N} x_{0i} = \sum_{i \in N} x_{i0} \quad (4.41)$$

$$\sum_{j \in N} x_{\ell+i,j} = z_\ell \quad \ell \in U, i \in \{0, n_u, 2n_u, 3n_u\} \quad (4.42)$$

$$\sum_{j \in N} x_{j,\ell+i} = z_\ell \quad \ell \in U, i \in \{0, n_u, 2n_u, 3n_u\} \quad (4.43)$$

$$q_j \geq q_i + d_j + 2Q(x_{ij} - 1) \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, j \in N, i \neq j \quad (4.44)$$

$$q_i \leq Q \quad \forall i \in N \quad (4.45)$$

$$u_j \geq u_i + (D_{ij} + t_j) + M(x_{ij} - 1) \quad \forall i, j \in N, i \neq j \quad (4.46)$$

$$u_{i+n_u} \geq u_i + (d_{i,i+n_u} + t_{i+n_u}) \quad \forall i \in N^e \quad (4.47)$$

$$r_{i+n_u} = r_i \quad \forall i \in N^e \quad (4.48)$$

$$r_j \geq j x_{0j} \quad \forall i \in N \setminus \{0\} \quad (4.49)$$

$$r_j \leq j x_{0j} + |N| (1 - x_{0j}) \quad \forall i \in N \setminus \{0\} \quad (4.50)$$

$$r_j \geq r_i - n (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (4.51)$$

$$r_j \leq r_i + n (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (4.52)$$

// Domínio das variáveis

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j \in N \quad (4.53)$$

$$y_{k\ell} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in S, \ell \in U \quad (4.54)$$

$$z_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in U \quad (4.55)$$

$$d_i \geq 0, q_i \geq 0, r_i \geq 0, u_i \geq 0, t_i \geq 0 \quad \forall i \in N \quad (4.56)$$

O modelo apresentado acima é o mesmo do Capítulo 3 com as variáveis de roteamento relaxadas de forma linear (4.53).

4.3 Análise Experimental

O objetivo destes experimentos computacionais é analisar o desempenho das versões do Método de Benders desenvolvidas para tratar o problema estudado. Para tanto, utilizamos o mesmo conjunto de instâncias do Capítulo 3 e comparamos os resultados com os resultados obtidos pelos modelos anteriores e os melhores resultados da literatura.

Na Tabela 2, são apresentados os resultados obtidos para as duas versões do Método de Benders, ou seja, utilizando a versão clássica (4.1) (Benders1) e a versão aprimorada (4.2) (Benders 2). Em cada linha da tabela, são sumarizados os resultados das 8 instâncias de cada dimensão, ou seja, o número de pontos de ônibus ($|U|$) e o número de estudantes ($|S|$). Estes dados são reportados nas duas primeiras colunas da tabela. As colunas 3-5 apresentam os resultados obtidos utilizando a versão clássica do método de Benders (Seção 4.1), em que a terceira coluna indica o *GAP* médio, a quarta indica o número de instâncias para as quais uma

Tabela 2 – Resultados computacionais agrupados pelas características das instâncias.

		Benders 1			Benders 2			Obj_2		
UI	SI	GAP(%)	NO	NS	GAP(%)	NO	NS	GAP(%)	NO	NS
5	25	0,00	8	0	0,00	8	0	0,00	8	0
5	50	0,00	8	0	0,00	8	0	0,00	8	0
5	100	0,00	8	0	0,00	8	0	0,00	8	0
10	50	0,00	8	0	0,00	8	0	0,00	8	0
10	100	0,31	7	0	0,31	7	0	0,09	7	0
10	200	2,64	2	0	2,39	2	0	1,66	3	0
20	100	15,57	1	0	14,33	1	0	11,08	1	0
20	200	23,89	0	0	21,88	0	0	17,65	0	0
20	400	18,70	0	1	16,08	0	1	10,29	0	1
40	200	57,27	0	0	53,34	0	0	43,39	0	0
40	400	55,79	0	2	52,45	0	2	42,28	0	1
40	800	39,51	0	2	32,77	0	2	18,85	0	1
80	400	79,57	0	2	76,71	0	2	68,22	0	2
80	800	67,42	0	3	64,26	0	3	65,55	0	1
Total			42	10		42	10		43	6

Fonte: Elaborada pelo autor.

solução comprovadamente ótima foi obtida (NO) e a quinta coluna o número de instâncias para as quais nenhuma solução factível foi encontrada no tempo limite de 1 hora (NS). Nas colunas 6-8, são reportadas as mesmas informações para o Método de Benders com a função aprimorada do Método de Benders (Seção 4.2). Nas colunas 9-11, são apresentadas as mesmas informações para o melhor resultado (Obj_2) encontrado no Capítulo 3. Uma versão mais detalhada dos resultados pode ser encontrada no Apêndice A onde é apresentado o valor da função objetivo e o *GAP* para cada uma das 112 instâncias.

Quando comparamos, as duas versões do Método de Benders, podemos observamos que, de fato, a segunda apresenta resultados levemente melhores. No geral, o *GAP* médio é inferior. No entanto, notamos que as duas versões do Método de Benders não tiveram um desempenho superior à versão do modelo original com a melhoria do limitante dual (Obj_2). Embora, para algumas instâncias tenha havido uma leve redução no *GAP*, no geral, as duas versões tiveram um *GAP* médio superior aos resultados anteriores.

4.4 Considerações

Embora as versões desenvolvidas do Método de Benders não tenham levado a resultados melhores que os apresentados no Capítulo 3, a segunda versão do Método de Benders se mostra promissora indicando que ainda é possível explorar essa ideia em pesquisas futuras. Destacamos ainda que o melhor resultado da literatura até o momento utiliza geração de colunas que assim como Benders é um método de decomposição.

BRKGA PARA O SBRP

O problema de definição de rotas para ônibus escolares (SBRP) pode ocorrer em diferentes situações, inclusive naquelas em que muitos estudantes e muitas paradas de ônibus devem ser consideradas. No entanto, as abordagens exatas propostas nos capítulos anteriores mostraram-se eficientes para resolver problemas de médio porte. Logo, apresentamos, neste capítulo, um método heurístico para abordar o problema estudado.

Neste trabalho, optamos por utilizar uma variante do algoritmo genético proposta por [Gonçalves e Resende \(2011\)](#) para tratar o problema estudado. Esta variante é conhecida como *Biased Random-Key Genetic Approach* (BRKGA). A principal vantagem do BRKGA é simplificar e padronizar as decisões do algoritmo genético. Para a utilização do método, o usuário (desenvolvedor) apenas deve implementar uma função chamada *decoder* que é responsável pela decodificação do cromossomo. Esta função traduz um indivíduo composto por números aleatórios, para uma solução do problema estudado.

Neste capítulo, na Seção 5.1, apresentamos resumidamente a ideia de um algoritmo genético. Em seguida, na Seção 5.2, descrevemos o BRKGA desenvolvido para abordar o problema estudado.

5.1 Algoritmo Genético

Algoritmos Genéticos (AGs) são algoritmos de otimização global baseados em mecanismos de seleção natural da genética. Esse paradigma foi inicialmente proposto por [Holland \(1975\)](#), mas foi popularizado após o trabalho de [Goldberg \(1989\)](#).

Um algoritmo genético envolve uma população de soluções, ou cromossomos, onde cada cromossomo codifica uma solução para uma instância em particular. A evolução ocorre através de operadores genéticos que visam replicar fenômenos observados na natureza. Os operadores mais conhecidos são: reprodução, mutação e seleção.

Basicamente, a evolução acontece da seguinte forma: uma população inicial de indivíduos é gerada aleatoriamente ou por algum método heurístico. A cada geração, os indivíduos são avaliados, segundo alguma função que mede seu nível de aptidão. Esta função é conhecida como *fitness*. Os cromossomos que tiverem os melhores níveis de aptidão são selecionados para darem origem a próxima geração. O Algoritmo 1 descreve um pseudocódigo de um algoritmo genético básico.

Algoritmo 1 – *Algoritmo genético básico*

Inicia_População (P)

para $k = 1, \dots, \text{Max-Gerações}$ **faça**

- Avaliação (P)
 - Seleção(P)
 - Reprodução(P)
 - Mutação(P)
-

5.2 BRKGA

O BRKGA é um algoritmo genético baseado em chaves aleatórias entre 0 e 1 utilizadas para representar as soluções do problema. Para implementação do BRKGA é preciso definir como as soluções do problema são representadas e, em seguida, desenvolver uma função de decodificação para esta solução (*decoder*). Na Seção 5.2.1, definimos um cromossomo para representar uma solução do problema estudado. Em seguida, na Seção 5.2.2, detalhamos o decodificador proposto.

5.2.1 Representação do cromossomo

O problema estudado tem dois conjuntos de decisões a serem tomadas. O primeiro está relacionado a designação dos alunos aos pontos de ônibus, enquanto o segundo está associado a definição das rotas dos ônibus escolares. Neste trabalho, o cromossomo armazena apenas informações sobre o roteamento, sendo assim, a designação dos alunos aos pontos de ônibus é feita durante a decodificação do cromossomo. A primeira posição do cromossomo indica o número de rotas a serem definidas, enquanto as N seguintes posições representam os N pontos de ônibus que serão visitados pelas rotas. O cromossomo tem, portanto, tamanho $N + 1$. Todos os valores do cromossomo são entre 0 e 1.

5.2.2 Decodificação

Como descrito, o primeiro valor de um cromossomo c ($c[0]$) permite obter o número de rotas, ou seja, o número de ônibus disponíveis. Para cada instância, o número de ônibus pode variar de um valor mínimo K_{min} até um valor máximo K_{Max} que são dados do problema. A partir

destes limites e do valor de $c[0]$ que é um número entre 0 e 1, podemos obter o número de ônibus que estão disponíveis (K) para cada cromossomo, que é dado pelo número mínimo de ônibus (K_{min}) mais uma fração da diferença entre o número mínimo e máximo de ônibus que depende do valor de $c[0]$, isto é:

$$K = K_{min} + \text{floor}(c[0] (K_{Max} - K_{min} + 1)).$$

Por exemplo, dados $K_{min} = 3$, $K_{Max} = 10$, para o cromossomo c a seguir temos $K = 5$.

	0	1	2	3	4	5	6
c	0,26	0,15	0,30	0,10	0,85	0,60	0,90

Os demais valores do cromossomo ($c[1..n]$) definem as rotas a que os pontos de ônibus pertencem. Para facilitar a decodificação, as rotas são numeradas de 0 à $K - 1$. Cada ponto de parada i é atribuído a uma rota k da seguinte forma:

$$k = \text{floor}(c[i] K).$$

Para o exemplo acima, temos que ao ponto de ônibus 1 está associado o valor $c[1] = 0,15$, ao ponto de ônibus 2 está associado o valor $c[2] = 0,3$ e assim por diante. Logo, o cromossomo seria decodificado da seguinte forma:

	0	1	2	3	4	5	6
c	5	0	1	0	4	3	4

e, portanto, teríamos os pontos de ônibus atribuídos as rotas da seguinte forma:

- Rota 0: {1 e 3}
- Rota 1: {2}
- Rota 2: vazia
- Rota 3: {5}
- Rota 4: {4, 6}

A segunda etapa é determinar a ordem de visitação de cada rota. Para isso é feita uma ordenação não decrescente dentro de cada rota pelos valores $c[1..n]$ do cromossomo. No exemplo anterior, a ordem de roteamento da rota 1 é {3 e 1} e da rota 4 é {4 e 6}.

Na terceira etapa, é realizada a designação dos alunos às rotas definidas nas etapas anteriores. Uma vez que as rotas já estão determinadas, a designação dos estudantes não interfere no custo da função objetivo. O objetivo é, portanto, alocar o maior número de estudantes a

cada rota, e assim garantir a factibilidade da solução. Logo, ao final desta etapa, é aplicada uma penalização ao valor da função objetivo proporcional ao número de alunos não alocados a nenhuma rota.

A designação dos estudantes foi realizada utilizando um algoritmo de fluxo máximo, descrito na Seção 5.2.3. Com a designação realizada, a última etapa da decodificação do cromossomo é a avaliação do valor de *fitness*. Para isso, foi calculado o custo do roteamento, utilizando a distância percorrida pelos ônibus, adicionada de uma penalização quando a solução não é factível. A penalização foi calculada da seguinte forma: $P = (M - F) * C$, onde F é o fluxo máximo (obtido da designação), M é o número de estudantes e C é uma constante, que representa o peso da infactibilidade.

5.2.3 Algoritmo de Fluxo Máximo

O problema de designar os estudantes as rotas foi modelado como um problema de fluxo máximo. Em teoria dos grafos, uma rede de fluxo é um grafo direcionado sem laços com uma raiz e uma anti-raiz, conhecidos também como fonte (*source*) e sumidouro (*sink*), onde cada aresta tem uma capacidade. O fluxo em cada aresta não pode exceder sua capacidade. O fluxo total que chega a um nó deve ser igual ao fluxo total que sai do mesmo, exceto nos casos em que o nó é uma fonte, tendo apenas saída de fluxo, ou um sumidouro, caso em que há apenas entrada de fluxo.

A rede de fluxo foi modelada dividindo os nós em quatro grupos: i) o vértice 0 é a fonte; ii) os vértices de 1 a M representam os estudantes; iii) os vértices de $M + 1$ a $M + K$ representam as rotas; iv) o vértice $M + K + 1$ é o sumidouro. Já as arestas são definidas da seguinte maneira: i) M arestas com capacidade 1 conectando a fonte a cada estudante; ii) saindo de cada vértice 1 a M , há uma aresta para cada vértice associado a cada uma das rotas, ou seja, há para cada vértice $i \in \{1 \dots M\}$ K arestas de saída com capacidade 1; e iii) K arestas com capacidade Q conectando cada rota ao sumidouro, em que Q é a capacidade do veículo.

Há diversos algoritmos na literatura propostos para o problema de fluxo máximo em uma rede, alguns dos mais conhecidos são os algoritmos de *Edmonds-Karp*, *Ford-Fulkerson* e *Dinic*. Dependendo da aplicação cada algoritmo tem uma vantagem, pois a complexidade de cada um é distinta e depende de diferentes fatores como o número de vértices (V), o número de arestas (E) e o fluxo máximo (F). A complexidade do *Edmonds-Karp* é $O(VE^2)$, de *Ford-Fulkerson* é $O(FE)$ e de *Dinic* é $O(V^2E)$.

Para a modelagem do problema estudado, sabemos que o fluxo representa os estudantes, portanto, o fluxo máximo da rede é o número de estudantes, que é ligeiramente menor que o número de nós da rede. Portanto, foi utilizado o algoritmo de *Ford-Fulkerson*, pois é o que apresenta a menor complexidade neste contexto.

5.3 Resultados Computacionais

O objetivo destes experimentos computacionais é analisar o desempenho do método heurístico apresentado. Para tanto, utilizamos o mesmo conjunto de instâncias do Capítulo 3 e comparamos os resultados com os melhores resultados encontrados nos capítulos anteriores e os melhores resultados da literatura.

Tabela 3 – Resultados computacionais agrupados pelas características das instâncias.

		BRKGA			Benders 2			<i>Obj₂</i>		
U	S	GAP(%)	NO	NS	GAP(%)	NO	NS	GAP(%)	NO	NS
5	25	0,00	8	0	0,00	8	0	0,00	8	0
5	50	0,00	8	0	0,00	8	0	0,00	8	0
5	100	0,00	8	0	0,00	8	0	0,00	8	0
10	50	0,00	8	0	0,00	8	0	0,00	8	0
10	100	0,08	7	0	0,08	7	0	0,09	7	0
10	200	5,47	1	0	2,23	2	0	1,66	3	0
20	100	6,75	1	0	11,58	1	0	11,08	1	0
20	200	9,52	0	0	19,21	0	0	17,65	0	0
20	400	12,23	0	0	11,85	0	1	10,29	0	1
40	200	14,58	0	0	49,74	0	0	43,39	0	0
40	400	14,83	0	0	46,27	0	1	42,28	0	1
40	800	16,29	0	0	26,42	0	3	18,85	0	3
80	400	32,51	0	0	78,44	0	1	68,22	0	1
80	800	39,72	0	0	81,03	0	1	65,55	0	1
Total			41	0		42	7		43	7

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Tabela 3, são apresentados os resultados obtidos para o BRKGA descrito na Seção 5.2, a versão que obteve os melhores resultados utilizando o método de Benders como descrito na Seção 4.2 (Benders 2) e a versão aprimorada do modelo proposto, apresentada na Seção 3.2. Vale ressaltar que o BRKGA demandou no máximo 300 segundos para resolver uma instância, enquanto para os métodos exatos foi considerado o tempo limite de 3.600 segundos.

Em cada linha da tabela, são sumarizados os resultados para as 8 instâncias de cada dimensão, ou seja, o número de pontos de ônibus ($|U|$) e o número de estudantes ($|S|$). Estes dados são reportados nas duas primeiras colunas da tabela. Nas colunas 3-5, são apresentados os resultados obtidos utilizando o BRKGA, em que a terceira coluna indica o *GAP* médio em relação as melhores soluções da literatura, ou seja, a média dos *GAPs* das soluções que é dado por $GAP = \frac{Sol_m - MelSol}{MelSol} 100$, em que Sol_m é a melhor solução encontrada pelo método avaliado e $MelSol$ é a melhor solução da literatura. A quarta coluna indica o número de instâncias para as quais uma solução comprovadamente ótima foi obtida (NO) e a quinta coluna o número de instâncias para as quais nenhuma solução factível foi encontrada no tempo limite de 3.600 segundos (NS). Nas colunas 6-8 e 9-11, são reportadas, respectivamente, as mesmas informações obtidos pelo Método de Benders (Bender 2) e ao resolver as instâncias representadas pelo modelo

matemático aprimorado (Obj_2). Uma versão mais detalhada dos resultados pode ser encontrada no Apêndice ?? onde é apresentado o valor da função objetivo e o *GAP* para cada uma das 112 instâncias.

Ao comparar o desempenho do método heurístico com os demais métodos desenvolvidos neste trabalho, pode-se identificar dois comportamentos distintos. Para instâncias com até 10 pontos de parada de ônibus, o método heurístico apresentou um desempenho competitivo. O número de soluções ótimas encontradas foi ligeiramente menor (41 contra 43) e o *GAP* médio também foi superior apenas para as instâncias com 10 pontos de parada e 200 estudantes. No entanto, para instâncias maiores, o método heurístico apresentou um desempenho superior, sendo capaz de encontrar soluções factíveis para todas as instâncias, enquanto os métodos exatos não encontraram solução para sete delas. Além disso, o *GAP* foi menor para as maiores instâncias da literatura (média de 21,69% contra 41,43%).

5.4 Considerações

Com base nos experimentos computacionais, verificou-se que o desempenho do algoritmo genético mostra-se competitivo em relação aos métodos anteriores para as instâncias menores. No entanto, para as instâncias maiores, o algoritmo genético encontrou uma solução factível para todas elas, ao contrário dos métodos anteriores, e obteve um *GAP* menor em relação as melhores soluções da literatura.

Esses resultados apontam para o potencial do método heurístico baseado em algoritmo genético para o roteamento de ônibus escolares. No entanto, é importante notar que o algoritmo utilizado neste trabalho foi um BRKGA que não leva em consideração todas as especificidades desse problema. Investir em um algoritmo genético específico para o roteamento de ônibus escolares pode levar a resultados ainda mais promissores.

SBRP: TEMPOS EMBARQUE/DESEMBARQUE

Neste capítulo, buscamos analisar a influência dos tempos de embarque e de desembarque na definição de rotas para o problema do roteamento de ônibus escolar (SBRP). Para tanto, primeiro adaptamos um conjunto de instâncias da literatura para incluir tempos de embarque e de desembarque distintos para os estudantes e, em seguida, comparamos os resultados obtidos com os resultados sem considerar tais tempos. Para esta análise, consideramos o modelo aprimorado (Obj_2).

6.1 Adaptação das Instâncias

Não foram encontradas na literatura instâncias que tratassem os tempos de embarque/desembarque dos estudantes. Portanto, adaptamos as instâncias de (SCHITTEKAT *et al.*, 2013) com até 10 pontos de ônibus e 200 estudantes para incluir tais tempos. Essas 48 instâncias foram escolhidas por termos obtido uma solução ótima para 43 delas utilizando o método exato com base no modelo aprimorado (Obj_2). Além disso, para todas essas instâncias uma solução factível foi obtida.

Os estudantes foram divididos em dois grupos, sendo que os estudantes do Grupo 1 demoram 1 minuto para embarcar/desembarcar, enquanto do Grupo 2 demoram 6 minutos. Assim, simulamos a falta de adaptação dos veículos e a dificuldade dos estudantes do Grupo 2. O Grupo 2 é composto por 25% do número total de estudantes sorteados aleatoriamente.

6.2 Resultados Computacionais

Os testes computacionais foram realizados em três etapas. Na primeira, as instâncias foram resolvidas como proposto no Capítulo 3. Na segunda etapa, adicionamos na função

objetivo como critério de desempate o tempo da maior rota. Finalmente, na terceira etapa, consideramos as instâncias adaptadas com tempos de embarque/desembarque distintos para os estudantes (ver Seção 6.1). Para 16 das 48 instâncias, as soluções obtidas apresentaram apenas uma rota e, nestes casos, mesmo considerando os tempos de embarque, a solução seguiu tendo apenas uma rota. Logo, os resultados não são apresentados para essas instâncias.

Na Tabela 4, reportamos os resultados para as instâncias sem considerar os tempos de embarque/desembarque e considerando tais tempos. Cada linha da tabela representa uma instância (ID), que é definida pelo número de paradas de ônibus (|U|) e pelo número de estudantes (|S|) descritos na segunda e terceira colunas da tabela. Nas colunas 4 e 5, apresentamos o valor da função objetivo (total de tempo para percorrer todas as rotas - Min_T) e o tempo da maior rota (Max_Rota) quando não são considerados os tempos de embarque/desembarque nem o desempate da maior rota (S/T e S/Desempate). Os mesmos resultados são reportados para os dois outros casos.

Tabela 4 – Resultados computacionais com e sem tempos de embarque/desembarque.

			S/T e S/Desempate		S/T e C/Desempate		C/T e C/Desempate	
ID	U	S	Min_T	Max_Rota	Min_T	Max_Rota	Min_T	Max_Rota
9	5	50	286,68	135,30	*288,28	116,32	296,11	116,32
11	5	50	193,55	87,82	*194,45	85,24	267,92	94,86
15	5	50	130,53	77,99	130,53	77,99	163,68	83,27
17	5	100	12,89	10,53	*19,59	10,53	12,89	10,53
18	5	100	360,35	87,99	*360,47	87,99	389,49	87,99
19	5	100	304,23	111,71	304,23	111,71	304,23	111,71
20	5	100	294,21	76,40	294,21	76,40	307,09	76,51
21	5	100	229,41	100,42	*252,21	100,42	340,64	125,47
22	5	100	134,95	42,08	*157,72	42,08	155,58	43,27
23	5	100	144,41	53,49	144,41	53,49	176,82	87,49
24	5	100	58,95	17,36	58,95	17,36	58,95	17,36
29	10	50	39,44	35,29	*48,21	25,14	39,96	35,78
31	10	50	108,98	87,95	*162,30	92,48	180,04	135,05
40	10	100	31,89	28,05	*47,45	24,75	52,29	28,12
41	10	200	735,27	111,51	735,27	111,51	760,23	120,15

* - Melhor solução obtida.

Como podemos observar, quando é o tempo da maior rota é considerado como desempate não foi possível obter uma solução comprovadamente ótima para todas as instâncias avaliadas. Observamos também que para nove das 15 instâncias o tempo da maior rota se manteve igual. Além disso, considerar o tempo de embarque e desembarque no problema aumenta a complexidade do mesmo, tendo em vista que o número de instâncias em que uma solução comprovadamente ótima reduziu de 41 para 15 como apresentado na Tabela 4. Para esse conjunto de instâncias, considerar o tempo de embarque e desembarque no modelo aumentou o tempo do roteamento em média 5,45%, porém reduziu o tempo total da maior rota em média 2,12%.

CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS

A relevância do problema de roteamento de ônibus escolares é destacada há décadas na literatura. Apesar da abrangente literatura acerca do problema, verifica-se que considerar o embarque e o desembarque simultâneos dos estudantes, mostra-se uma característica importante afim de melhorar a qualidade do serviço prestado sem comprometer a qualidade das soluções.

Neste trabalho, abordamos o problema de roteamento de ônibus escolares (SBRP) considerando o embarque e o desembarque simultâneos e também os tempos relacionados a eles. Inicialmente, tendo como base os modelos de [Miranda *et al.* \(2018\)](#) e de [Furtado, Munari e Morabito \(2017\)](#), desenvolvemos um modelo de otimização linear inteira-mista para o SBRP estudado. Vale destacar que, diferentemente de ([MIRANDA *et al.*, 2018](#)), utilizamos variáveis com dois índices para representar as rotas. Reduzindo, portanto, o número de variáveis binárias do modelo como proposto por [Furtado, Munari e Morabito \(2017\)](#). Este modelo foi aprimorado visando eliminar soluções simétricas e guiar a busca na árvore *branch-and-bound* ampliando a dimensão da função objetivo. Como pudemos observar, não foi possível obter soluções comprovadamente ótimas para todas as instâncias com dez ou mais paradas de ônibus. No entanto, o modelo aprimorado mostrou-se promissor, o que nos motivou a buscar um método exato para resolução do problema.

Escolhemos investigar o método de Benders por haver na literatura casos de sucesso de sua aplicação a problemas de roteamento de veículo (VRP) (p.e. [Li, Wang e Zhang \(2018\)](#), [Riedler e Raidl \(2018\)](#) e [Fachini e Armentano \(2020\)](#)). O problema foi decomposto no problema mestre que trata a designação dos estudantes aos pontos de ônibus e o subproblema que define o roteamento dos ônibus escolares. Ambos contém variáveis contínuas e inteiras, logo utilizamos uma extensão do método de Benders, conhecida como *Logic-based Benders Decomposition* conforme proposto por [Hooker e Ottosson \(2003\)](#). Duas versões do método foram desenvolvidas, a primeira foi uma versão clássica e a segunda foi uma versão aprimorada em que o problema mestre inclui as decisões de roteamento considerando suas variáveis linearmente relaxadas.

Embora as versões desenvolvidas do Método de Benders não tenham levado a resultados melhores que os obtidos utilizando o modelo matemático aprimorado, sua segunda versão se mostrou promissora indicando que ainda é possível explorar essa ideia em pesquisas futuras. Destacamos ainda que o melhor resultado da literatura até o momento utiliza geração de colunas que assim como Benders é um método de decomposição.

O transporte escolar pode ocorrer em diferentes contextos, inclusive em situações em que muitos estudantes e paradas de ônibus devem ser considerados. No entanto, as abordagens exatas propostas mostraram-se eficientes para resolver problemas com até dez paradas de ônibus e 200 estudantes. Logo, desenvolvemos uma variante do algoritmo genético proposta por [Gonçalves e Resende \(2011\)](#) para tratar o problema estudado. Esta variante é conhecida como *Biased Random-Key Genetic Approach* (BRKGA). Com base nos experimentos computacionais realizados, o desempenho do método mostrou-se competitivo em relação aos métodos exatos para as instâncias de pequeno porte. No entanto, para as instâncias maiores, encontrou uma solução factível para todas as instâncias e obteve um *GAP* menor em relação as melhores soluções da literatura, superando os métodos exatos desenvolvidos. Esses resultados apontam para o potencial do desenvolvimento de pesquisas futuras relacionadas ao desenvolvimento de algoritmos genéticos para o roteamento de ônibus escolares.

Em resumo, neste trabalho abordamos o problema de roteamento de ônibus escolares com tempos de embarque e desembarque utilizando tanto métodos exatos como heurísticos. A pesquisa desenvolvida aponta basicamente para quatro tópicos de pesquisas futuras. O primeiro é explorar o aumento da dimensão da função objetivo para outros problemas, pois a análise experimental mostrou que ao incluirmos na função objetivo mais informações associadas as variáveis do problema, a busca por soluções factíveis se tornou mais eficiente. O segundo ponto é buscar aprimorar o método de Benders apresentado e verificar sua eficiência ao resolver instâncias de maior porte. O uso do BRKGA para resolução do problema estudado se mostra promissor, logo torná-lo mais especializado para o problema estudado pode melhorar sua eficiência. Finalmente, como pudemos observar, considerar tempos de embarque e desembarque torna o problema mais desafiador, além de ser uma questão relevante para na minimização do tempo da maior rota. Logo, estudos explorando esta característica utilizando dados reais seriam muito importantes.

REFERÊNCIAS

- BENDERS, J. F. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. **Numerische Mathematik**, v. 4, p. 238–252, 1962. Citado na página 41.
- BERTSIMAS, D.; DELARUE, A.; MARTIN, S. From school buses to start times: Driving policy with optimization. In: . [S.l.: s.n.], 2018. Citado na página 21.
- CACERES, H.; BATTÀ, R.; HE, Q. Special need students school bus routing: Consideration for mixed load and heterogeneous fleet. **Socio-Economic Planning Sciences**, v. 65, p. 10–19, 2019. Citado nas páginas 21, 22, 23, 25 e 26.
- CALVETE, H.; GALÉ, C.; IRANZO, J.; TOTH, P. A partial allocation local search matheuristic for solving the school bus routing problem with bus stop selection. **Mathematics**, v. 8, n. 8, p. 1214, 2020. Citado na página 25.
- ELLEGOOD, W. A.; SOLOMON, S.; NORTH, J.; CAMPBELL, J. F. School bus routing problem: Contemporary trends and research directions. **Omega**, v. 95, p. 102056, 2020. Citado nas páginas 21 e 25.
- FACHINI, R. F.; ARMENTANO, V. A. Logic-based benders decomposition for the heterogeneous fixed fleet vehicle routing problem with time windows. **Computers & Industrial Engineering**, v. 148, p. 106641, 2020. Citado nas páginas 41 e 57.
- FURTADO, M. G. S.; MUNARI, P.; MORABITO, R. Pickup and delivery problem with time windows: A new compact two-index formulation. **Operations Research Letters**, v. 45, n. 4, p. 334–341, 2017. Citado nas páginas 30, 31, 32 e 57.
- GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning**. 1st. ed. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1989. Citado na página 49.
- GONÇALVES, J.; RESENDE, M. G. C. Biased random-key genetic algorithms for combinatorial optimization. **Journal of Heuristics**, v. 17, p. 487–525, 2011. Citado nas páginas 49 e 58.
- HOLLAND, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. Ann Arbor, M. I.: University of Michigan Press, 1975. Second edition, 1992. Citado na página 49.
- HOOKE, J. N.; OTTOSSON, G. Logic-based benders decomposition. **Mathematical Programming**, v. 96, n. 1, p. 33–60, 2003. Citado nas páginas 42 e 57.
- INEP. **Censo da Educação Básica - Notas Estatísticas**. 2019. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/documents/186968/0/Notas+Estatísticas++Censo+da+Educação+Básica+2019/43bf4c5b-b478-4c5d-ae17-7d55ced4c37d?version=1.0>>. Acesso em: 28/08/2020. Citado na página 21.
- KINABLE, J.; SPIEKSMÀ, F. C. R.; Vanden Berghe, G. School bus routing-a column generation approach. **International Transactions in Operational Research**, v. 21, n. 3, p. 453 – 478, 2014. Citado nas páginas 25, 26, 37 e 41.

- LI, J.; WANG, D.; ZHANG, J. Heterogeneous fixed fleet vehicle routing problem based on fuel and carbon emissions. **Journal of Cleaner Production**, v. 201, p. 896 – 908, 2018. Citado nas páginas [41](#) e [57](#).
- MIRANDA, D. M.; de-CAMARGO, R. S.; CONCEIÇÃO, S. V.; PORTO, M. F.; NUNES, N. T. R. A multi-loading school bus routing problem. **Expert Systems with Applications**, v. 101, p. 228 – 242, 2018. Citado nas páginas [21](#), [22](#), [23](#), [25](#), [26](#), [30](#), [31](#), [35](#), [37](#) e [57](#).
- NEWTON, R. M.; THOMAS, W. H. Design of school bus routes by computer. **Socio-Economic Planning Sciences**, v. 3, n. 1, p. 75 – 85, 1969. Citado na página [25](#).
- PARK, J.; KIM, B. I. The school bus routing problem: A review. **European Journal of Operational Research**, v. 202, n. 2, p. 311 – 319, 2010. Citado na página [21](#).
- RIBEIRO, A. C.; TENTES, V. T. A. O caminho da escola para os estudantes com deficiência: o transporte escolar acessível no plano viver sem limite. **Revista Brasileira de Educação Especial**, v. 22, p. 27 – 38, 2016. Citado na página [21](#).
- RIEDLER, M.; RAIDL, G. Solving a selective dial-a-ride problem with logic-based benders decomposition. **Computers & Operations Research**, v. 96, p. 30 – 54, 2018. Citado nas páginas [41](#) e [57](#).
- SANTOS, S. F. G.; CASTELLUCCI, P. B.; TOLEDO, F. M. B. Roteamento de ônibus escolares: uma abordagem inclusiva. **Anais do LIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**, v. 54, p. 152605, 2022. Citado na página [29](#).
- SCHITTEKAT, P.; KINABLE, J.; SÖRENSEN, K.; SEVAUX, M.; SPIEKSMAN, F.; SPRINGAEL, J. A metaheuristic for the school bus routing problem with bus stop selection. **European Journal of Operational Research**, v. 229, n. 2, p. 518–528, 2013. Citado nas páginas [26](#), [37](#) e [55](#).

RESULTADOS DETALHADOS MÉTODOS DE BENDERS

Neste apêndice, são apresentados os resultados obtidos pelos métodos de Benders desenvolvidos.

Tabela 5 – Resultados computacionais para as instâncias de 1 a 40.

ID	ISI	IUI	Sol_Lit	Sol_ZI	Benders1	Benders2	GAP_Z(%)	GAP_B1(%)	GAP_B2(%)
1	25	5	141,01	141,01	141,01	141,01	0,00	0,00	0,00
2	25	5	161,62	161,62	161,62	161,62	0,00	0,00	0,00
3	25	5	182,14	182,14	182,14	182,14	0,00	0,00	0,00
4	25	5	195,80	195,80	195,80	195,80	0,00	0,00	0,00
5	25	5	111,65	111,65	111,65	111,65	0,00	0,00	0,00
6	25	5	103,18	103,18	103,18	103,18	0,00	0,00	0,00
7	25	5	7,63	7,63	7,63	7,63	0,00	0,00	0,00
8	25	5	25,64	25,64	25,64	25,64	0,00	0,00	0,00
9	50	5	286,68	286,68	286,68	286,68	0,00	0,00	0,00
10	50	5	197,20	197,20	197,20	197,20	0,00	0,00	0,00
11	50	5	193,55	193,55	193,55	193,55	0,00	0,00	0,00
12	50	5	215,86	215,86	215,86	215,86	0,00	0,00	0,00
13	50	5	130,53	130,53	130,53	130,53	0,00	0,00	0,00
14	50	5	96,26	96,26	96,26	96,26	0,00	0,00	0,00
15	50	5	12,89	12,89	12,89	12,89	0,00	0,00	0,00
16	50	5	30,24	30,24	30,24	30,24	0,00	0,00	0,00
17	100	5	360,35	360,35	360,35	360,35	0,00	0,00	0,00
18	100	5	304,23	304,23	304,23	304,23	0,00	0,00	0,00
19	100	5	294,21	294,21	294,21	294,21	0,00	0,00	0,00
20	100	5	229,41	229,41	229,41	229,41	0,00	0,00	0,00
21	100	5	134,95	134,95	134,95	134,95	0,00	0,00	0,00
22	100	5	144,41	144,41	144,41	144,41	0,00	0,00	0,00
23	100	5	58,95	58,95	58,95	58,95	0,00	0,00	0,00
24	100	5	39,44	39,44	39,44	39,44	0,00	0,00	0,00
25	50	10	242,85	242,85	242,85	242,85	0,00	0,00	0,00
26	50	10	282,12	282,12	282,12	282,12	0,00	0,00	0,00
27	50	10	244,54	244,54	244,54	244,54	0,00	0,00	0,00
28	50	10	288,33	288,33	288,33	288,33	0,00	0,00	0,00
29	50	10	108,98	108,98	108,98	108,98	0,00	0,00	0,00
30	50	10	157,48	157,48	157,48	157,48	0,00	0,00	0,00
31	50	10	32,25	32,25	32,25	32,25	0,00	0,00	0,00
32	50	10	36,66	36,66	36,66	36,66	0,00	0,00	0,00
33	100	10	403,18	403,18	403,18	403,18	0,00	0,00	0,00
34	100	10	296,53	296,53	296,53	296,53	0,00	0,00	0,00
35	100	10	388,87	391,71	398,66	398,66	0,01	0,02	0,02
36	100	10	294,80	294,80	294,80	294,80	0,00	0,00	0,00
37	100	10	178,28	178,28	178,28	178,28	0,00	0,00	0,00
38	100	10	175,96	175,96	175,96	175,96	0,00	0,00	0,00
39	100	10	57,50	57,50	57,50	57,50	0,00	0,00	0,00
40	100	10	31,89	31,89	31,89	31,89	0,00	0,00	0,00

Tabela 6 – Resultados computacionais para as instâncias de 41 a 80.

ID	S	U	Sol_Lit	Sol_ZI	Benders1	Benders2	GAP_Z(%)	GAP_B1(%)	GAP_B2(%)
41	200	10	735,27	735,27	735,27	735,27	0,00	0,00	0,00
42	200	10	506,06	506,06	506,06	506,06	0,00	0,00	0,00
43	200	10	513,00	513,54	513,54	513,54	0,00	0,00	0,00
44	200	10	475,21	475,21	475,21	475,21	0,00	0,00	0,00
45	200	10	347,29	368,43	376,46	375,42	0,06	0,08	0,07
46	200	10	217,46	217,98	217,98	217,98	0,00	0,00	0,00
47	200	10	102,93	107,73	109,46	109,46	0,04	0,06	0,06
48	200	10	55,05	56,61	59,23	58,24	0,03	0,07	0,05
49	100	20	507,81	617,63	634,58	627,62	0,18	0,20	0,19
50	100	20	406,65	551,76	621,57	587,26	0,26	0,35	0,31
51	100	20	419,17	477,35	502,64	497,32	0,12	0,17	0,16
52	100	20	360,86	385,03	403,72	396,24	0,06	0,11	0,09
53	100	20	245,17	289,98	289,98	289,98	0,15	0,15	0,15
54	100	20	185,06	204,17	244,58	236,24	0,09	0,24	0,22
55	100	20	52,52	53,21	54,15	54,15	0,01	0,03	0,03
56	100	20	19,05	19,05	19,05	19,05	0,00	0,00	0,00
57	200	20	875,46	989,94	1096,18	1062,74	0,12	0,20	0,18
58	200	20	476,05	532,66	604,89	582,63	0,11	0,21	0,18
59	200	20	606,80	767,15	801,34	779,62	0,21	0,24	0,22
60	200	20	462,31	518,46	536,24	527,63	0,11	0,14	0,12
61	200	20	373,21	415,23	460,49	448,23	0,10	0,19	0,17
62	200	20	250,75	265,12	290,74	284,63	0,05	0,14	0,12
63	200	20	93,01	188,42	202,36	196,24	0,51	0,54	0,53
64	200	20	45,40	57,55	60,46	59,23	0,21	0,25	0,23
65	400	20	1323,35	1338,30	1478,26	1396,51	0,01	0,10	0,05
66	400	20	720,83	769,96	802,62	793,42	0,06	0,10	0,09
67	400	20	975,12	1016,29	1067,36	1041,28	0,04	0,09	0,06
68	400	20	614,67	714,47	759,68	742,29	0,14	0,19	0,17
69	400	20	763,76	857,58	982,46	923,28	0,11	0,22	0,17
70	400	20	298,47	376,50	501,87	480,62	0,21	0,41	0,38
71	400	20	239,58	*	*	*	*	*	*
72	400	20	84,49	99,23	105,19	104,87	0,15	0,20	0,19
73	200	40	831,94	2530,51	3647,26	2876,29	0,67	0,77	0,71
74	200	40	593,35	1997,98	2324,29	2108,31	0,70	0,74	0,72
75	200	40	728,44	1241,17	1643,29	1490,89	0,41	0,56	0,51
76	200	40	481,05	1315,13	1867,14	1579,63	0,63	0,74	0,70
77	200	40	339,75	413,47	553,27	529,63	0,18	0,39	0,36
78	200	40	273,88	328,64	408,96	367,36	0,17	0,33	0,25
79	200	40	76,77	123,69	202,92	197,52	0,38	0,62	0,61
80	200	40	58,46	86,69	102,27	98,58	0,33	0,43	0,41

Tabela 7 – Resultados computacionais para as instâncias de 81 a 112.

ID	ISI	IUI	Sol_Lit	Sol_ZI	Benders1	Benders2	GAP_Z(%)	GAP_B1(%)	GAP_B2(%)
81	400	40	1394,23	2348,89	3109,84	2892,47	0,41	0,55	0,52
82	400	40	858,80	2349,44	2874,62	2798,20	0,63	0,70	0,69
83	400	40	891,02	1233,33	1627,80	1498,31	0,28	0,45	0,41
84	400	40	757,42	1334,08	1480,20	1398,69	0,43	0,49	0,46
85	400	40	586,29	*	*	*	*	*	*
86	400	40	395,95	*	*	*	*	*	*
87	400	40	195,33	279,23	442,36	376,23	0,30	0,56	0,48
88	400	40	70,77	137,71	174,89	173,26	0,49	0,60	0,59
89	800	40	2900,14	3020,34	4246,72	3627,52	0,04	0,32	0,20
90	800	40	1345,70	2321,16	2930,29	2504,80	0,42	0,54	0,46
91	800	40	2200,57	2453,63	2823,17	2680,14	0,10	0,22	0,18
92	800	40	1025,16	1257,50	1649,74	1383,29	0,18	0,38	0,26
93	800	40	1404,16	*	*	*	*	*	*
94	800	40	616,58	781,27	*	*	0,21	*	*
95	800	40	396,92	458,29	806,04	805,29	0,13	0,51	0,51
96	800	40	200,94	259,99	338,07	312,93	0,23	0,41	0,36
97	400	80	1546,23	9702,73	11305,28	10480,30	0,84	0,86	0,85
98	400	80	1048,56	5038,88	7850,27	5439,14	0,79	0,87	0,81
99	400	80	1216,74	*	*	*	*	*	*
100	400	80	760,61	2100,18	3290,59	2943,17	0,64	0,77	0,74
101	400	80	565,49	*	*	*	*	*	*
102	400	80	372,05	774,62	910,25	805,92	0,52	0,59	0,54
103	400	80	131,75	199,72	472,29	438,51	0,34	0,72	0,70
104	400	80	95,84	2612,95	2612,95	2612,95	0,96	0,96	0,96
105	800	80	2527,96	8630,49	9780,38	9238,14	0,71	0,74	0,73
106	800	80	1530,58	9733,60	*	*	0,84	*	*
107	800	80	1809,90	*	*	*	*	*	*
108	800	80	1187,51	2350,49	3176,20	2845,18	0,49	0,63	0,58
109	800	80	1110,44	1562,28	2489,72	2208,34	0,29	0,55	0,50
110	800	80	623,03	1109,78	1382,40	1307,23	0,44	0,55	0,52
111	800	80	311,41	2389,87	3108,76	2672,80	0,87	0,90	0,88
112	800	80	126,06	2370,82	*	*	0,95	*	*

