RECORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL

Engenheiro Vinicius Arcaro

Orientador: Doutor Marcos Arenales

julho 1988

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências de Computação e Matemática Computacional.

RESUMO

Uma grande variedade de materiais são manufaturados em grandes unidades por processos nos quais o tamanho da unidade de produção é restrito pela natureza da máquina utilizada. O problema de recorte de estoque é o de formular um esquema para o recorte das unidades de produção em peças dos tamanhos encomendadas pelos clientes.

Este estudo descreve modificações para o modelo de recorte de estoque de Gilmore-Gomory que melhoram as características das soluções geradas. Mudanças são propostas para as restrições como também para a função objetivo. O ponto principal é que *maximização do lucro*, ao invés de *minimização da perda percentual*, é a real meta que deve ser perseguida. Um conjunto de problemas exemplo é resolvido e tempos computacionais são fornecidos.

ABSTRACT

A wide variety of materials are manufactured in bulk by processes in which the size of the unit of production is constrained by the nature of the machinery being used. The cutting stock problem is that of formulating a scheme for the cutting of the production units into pieces of the sizes ordered by customers.

This study describes modifications to the Gilmore-Gomory cutting stock model that improve the characteristics of the solutions being generated. Changes are proposed for the constraints as well as for the objective function. The major point is that *profit maximization*, rather than *percentage waste minimization*, is the real goal that should be persued. A set of sample problems is solved and computational times are provided.

CONTEÚDO

NOTAÇÃO

Em qualquer capítulo, *escalares* são representados por letras gregas, *vetores* são representados por letras minúsculas e *matrizes* são representadas por letras maiúsculas. Um vetor é sempre uma matriz coluna.

$[\alpha]$ denota o maior inteiro menor ou igual a α.

RECORTE DE ESTOQUE

INTRODUÇÃO

Uma grande variedade de materiais são manufaturados em grandes unidades (unidades de produção) que serão recortadas posteriormente em pedaços dos tamanhos encomendados pelos clientes.

Esta estratégia de produzir grandes pedaços e depois recorta-los, é consequência da necessidade de produção em massa, e geralmente leva a uma redução no custo da produção quando comparado com produzir diretamente os tamanhos encomendados pelos clientes.

Considerando a maneira como são distribuidos os tamanhos encomendados pelos clientes e as restrições às medidas das unidades de produção (dependentes da natureza das máquinas utilizadas), surge o seguinte problema: Quais devem ser estas medidas, ou analogamente, os tamanhos do estoque?. Este problema é conhecido na literatura como Problema da Classificação (Assortment Problem) e não será tratado neste trabalho.

Um outro problema, relacionado ao anterior e que será aqui tratado, conhecido na literatura como Problema do Recorte de Estoque (Cutting Stock Problem) é o seguinte: Como devem ser recortados os estoques (unidades de produção) para satisfazer às encomendas requeridas pelos clientes?.

O presente trabalho é dirigido à indústria do papel, onde o Problema do Recorte de Estoque é particularmente comum, e procura mostrar que *maximização do lucro*, ao invés de *minimização da perda percentual*, é a real meta que deve ser perseguida.

INSPEÇÃO DOS MÉTODOS PARA A SOLUÇÃO

Os métodos disponíveis para a solução do Problema do Recorte de Estoque podem ser divididos em dois grupos:

- *ALGORITMICOS.*
- *HEURÍSTICOS.*

Um método algoritmico para um problema garante encontrar a solução ótima, enquanto um método heurístico não pode garantir encontrar a solução ótima e frequentemente não encontrará.

Na área em consideração existem somente alguns poucos algoritmos disponíveis para cada classe de problemas, tornando fácil a identificacão, dentro de cada classe, do algoritmo mais eficiente.

Uma heurística é aceitável se os resultados que ela produz são "satisfatórios", isto é, quando acredita-se que a solução dada pela heurística esteja "perto" da solução ótima. O método heurístico é utilizado rotineiramente pelos seres humanos para a execução das mais variadas tarefas.

Métodos heurísticos são geralmente adotados onde não é possível a utilização de métodos algoritmicos. Um algoritmo pode não estar disponível, ou o custo computacional pode ser enorme inviabilizando sua utilização.

Em geral, um método heurístico é fortemente dependente das particularidades do problema para o qual foi desenvolvido e também da regularidade estatística dos dados. Portanto sua extensão a problemas similares pode tornar-se difícil. Por exemplo, no Problema do Recorte de Estoque onde acontece alguma condição patológica nos dados como consequência de alguma anormalidade no mercado, a solução heurística pode apresentar, com alta probabilidade, um desvio inaceitável da solução ótima.

CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS

Os problemas podem ser classificados pelo número de dimensões envolvidas, devendo ser observado que a complexidade cresce juntamente com este mesmo número.

a) Problema de dimensão 1.

Existe somente uma dimensão do estoque que é significativa na determinação da solução. O tamanho do estoque (unidade de produção) é fixo, embora possam existir diversos tamanhos diferentes.

Esta situação ocorre, por exemplo, no corte de barras de aço e também, de uma maneira suficientemente aproximada, no corte de papel.

b) Problema de dimensão 1,5.

O estoque tem duas dimensões que são significativas para a determinação da solução. Numa das dimensões o tamanho do estoque é fixo, enquanto que na outra é variável.

Por exemplo, quando vidro plano é produzido por um processo de fluxo contínuo, o resultado é uma fita de largura constante. O problema de otimização, nesta situação, é minimizar o comprimento da fita que deve ser produzido.

c) Problema de dimensão 2.

Os tamanhos das duas dimensões, significativas para a determinação da solução, são fixos e neste caso o estoque é uma placa retangular.

Como exemplo, podem ser citados o corte de placas de vidro, aço ou madeira.

É importante observar que para esta classe ainda não existe um algoritmo para a solução do problema na sua forma geral. Entretanto uma ampla sub-classe de problemas bidimensionais, encontrados na indústria, possuem restrições que permitem sua solução de uma maneira eficiente.

CLASSIFICAÇÃO DOS MÉTODOS

Os métodos algoritmicos usados para resolver o Problema do Recorte de Estoque (e também o Problema da Classificação) dividem-se nos seguintes grupos:

- *Programação Linear.*
- *Programação Dinâmica.*
- *Ramificação e Limitação (Branch and Bound).*

É necessário salientar que para a resolução de um determinado problema, geralmente é usada uma mistura dos métodos anteriores como também algumas heurísticas. Por exemplo, no próprio algoritmo *simplex*, para passar de uma iteração à seguinte é utilizada uma heurística.

Em geral, no lugar onde um método algoritmico é iterativo, pode ser utilizada uma heurística para forçar o término antes de serem completadas todas as iterações.

Em contrapartida, também os métodos heurísticos são baseados na estrutura dos métodos algoritmicos e os sub-problemas advindos das etapas de resolução por uma heurística são frequentemente solucionados por um algoritmo.

Os métodos heurísticos podem ser descritos com a ajuda de conceitos do tipo:

- *Procura em Espaço de Estados (State-Space Search).*
- *Redução do Problema.*

Numa procura em Espaço de Estados, as potenciais soluções parciais do problema são consideradas como nós num grafo, e uma procura é feita por um caminho neste grafo do estado inicial, representando problema totalmente não solucionado, ao estado objetivo, ou seja a completa solução ótima.

Em Redução do Problema, o problema inicial é decomposto em problemas menores que por sua vez também podem ser decompostos. Decomposições alternativas podem ser consideradas. A união das soluções dos sub-problemas resultantes da decomposição forma a solução do problema original.

RECORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL

RECONHECIMENTO HISTÓRICO

O Problema do Recorte de Estoque Unidimensional está entre as primeiras aplicações da Pesquisa Operacional. Entre os primeiros artigos estão os de Kantorovich [1960 - reedição], que produziu uma formulação matemática do problema em 1939, e o de Paull e Wallter [1955], no qual apresentam uma formulação como um problema de programação matemática. Até hoje em dia [1988], o assunto continua a receber um considerável interesse.

Numa forma simplificada, o Problema do Recorte de Estoque Unidimensional pode ser aproximado, suficientemente para diversas situações práticas, por um problema de programação linear. Entretanto, mesmo quando o número de tamanhos de estoque (tamanhos padronizados que usualmente são no máximo cinco no caso da indústria do papel) e também o número de encomendas de tamanhos diferentes (encomendas de tamanhos iguais podem ser agrupadas) é favoravelmente pequeno, o número total de variáveis de decisão é muito grande tornando de pouca utilidade o algoritmo simplex na sua forma normal. Problemas práticos, como por exemplo um típico da indústria do papel, com um só tamanho para estoque e quarenta tamanhos diferentes para encomendas envolvem de dez a cem milhões de variáveis de decisão.

Um aumento significativo para o tamanho do problema que poderia ser tratado, foi alcançado por Gilmore e Gomory [1961] pela utilização de um método que envolve, em cada iteração do algoritmo simplex, a solução de um problema auxiliar conhecido na literatura como Problema da Mochila (*Knapsack Problem*).

Posteriormente, Gilmore e Gomory [1963] apresentam uma formulação adaptada a diversas características da indústria do papel.

Este método proposto por Gilmore e Gomory, quando utilizado juntamente com os melhores métodos disponíveis para a solução do Problema da Mochila, leva ao mais poderoso algoritmo já apresentado. Também conduz ao mais eficiente algoritmo para problemas de duas dimensões para os quais existe uma solução eficiente do Problema da Mochila associado.

As críticas existentes sugerem que o método proposto por Gilmore e Gomory é apropriado somente em situações onde minimizar as sobras ou retalhos é o único objetivo. Uma das pequenas sugestões deste trabalho é justamente propor uma alternativa para este objetivo no caso da indústria do papel.

Pierce [1964], estudando problemas da indústria do papel, foi o primeiro autor a apresentar um método heurístico. O método adotado está baseado no conceito de Redução do Problema.

Pierce [1966] apresenta um método baseado em Ramificação e Limitação (Branch and Bound). Também faz considerações sobre um equilíbrio entre procedimentos exatos, que garantem encontrar a solução ótima embora tendam a ser caros do ponto de vista computacional, e procedimentos heurísticos que tendem a ser relativamente baratos.

Haessler [1971], estudando problemas do corte de papel, apresenta um método baseado no conceito de Redução do Problema e introduz o termo nível de aspiração (*aspiration level*) como a designação de um critério empregado para apontar, quando diversas soluções factíveis estão sendo geradas, a solução a ser utilizada (a primeira solução a satisfazer tal critério).

Métodos baseados no conceito de Redução do Problema juntamente com idéias de Penalização foram apresentados por Marconi [1971] (voltado para problemas do corte de papel) e também por Tilanus e Gerhardt [1976] (voltado para a indústria do aço).

Stainton [1977], estudando um problema do corte de barras de aço para concreto armado, apresenta um método baseado no conceito de Procura em Espaço de Estados (State-Space Search).

Haessler [1980], apresenta uma nota descrevendo modificações para o algoritmo de Gilmore e Gomory que melhoram as características das soluções geradas (outras que não a perda por sobras).

Dyckhoff [1981], apresenta uma nova abordagem para o problema do Recorte de Estoque Unidimensional, que dispensa a utilização do problema auxiliar conhecido como Problema da Mochila, para quando a operação do corte de estoque (unidade de produção) produz somente dois novos pedaços.

O estado da arte é de tal maneira sofisticado que, a menos que o método proposto por Gilmore e Gomory seja aplicável, um novo método deve ser estudado e desenvolvido para o particular problema encontrado. Tal método tem grande chance de ser heurístico.

Nesta direção estão os recentes métodos propostos nos artigos de Sumichrast [1986] (voltado para um problema encontrado na indústria de mantas de fibra de vidro), e de Roodman [1986] (voltado para um problema de características especiais encontrado na indústria do aço).

Como ultima observação deve ser lembrado que os procedimentos para tratar o Problema do Recorte de Estoque são desenvolvidos comercialmente e portanto tendem a ser mantidos em segredo limitando a literatura atualmente disponível.

ALGORITMO SIMPLEX

REFLEXÕES SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO EM COMPUTADOR

Como bem observou Becker [1973], um dos fardos da nossa época, que o homem nunca imaginou sustentar, é a superprodução de verdades impossíveis de serem consumidas. Neste contexto, aparentemente, a introdução de um capítulo sobre o tão discutido algoritmo simplex pode parecer desnecessária. Por que, então, acrescentar um outro texto a uma já inútil superprodução?.

Em primeiro lugar porque na grande maioria dos algoritmos existentes, salvo raríssimas exceções, existe uma enorme confusão entre <u>tipos de dados</u> e <u>estrutura de dados</u>. Por exemplo, é relativamente comum encontrar a recomendação de que os coeficientes da função objetivo sejam armazenados na primeira linha da matriz que se refere às restrições do problema. O fato grave é que a partir deste pequeno embaralhamento desenvolve-se todo o algoritmo de uma maneira que não poderia deixar de ser absolutamente confusa.

Uma falsa justificativa para tal procedimento é a alegação de que o programa de computador codificado desta maneira (coeficientes da função objetivo armazenados na matriz das restrições) seria mais eficiente. É muito mais evidente perceber que esta maneira de descrever o algoritmo simplex está intimamente associada ao que é conhecido na literatura como quadro simplex (

tableau). Aqui cabe a necessária observação que deve ser escrita com todas as letras: O algoritmo simplex na forma de quadro, por estar baseado na atualização de uma inversão de matriz, é extremamente <u>instável</u>. Também é importante deixar claro que a forma em quadro condiciona uma no mínimo discutível, para não dizer pobre, maneira de conceber a resolução de um problema de programação linear, uma vez que as operações algébricas formais do algoritmo simplex são substituidas por operações, evidentemente equivalentes, aplicáveis ao quadro (*tableau*).

Uma segunda razão para um outro texto sobre o algoritmo simplex é a constatação de que os textos disponíveis estão direcionados ao uso da linguagem de programação fortran, e como consequência apresentarem alguns vícios da escolha de tal linguagem. Uma alternativa para a codificação deve ser decidida pelo paradigma de linguagem de programação conhecido como pascal. Esta escolha pode ser legitimada por uma maior facilidade de expressão do algoritmo e também tendo em vista que para resolver qualquer problema prático, cuja formulação matemática seja um problema de programação linear, será necessário uma interação com o usuário que seria difícil de ser programada utilizando a linguagem fortran.

É muito apropriado o comentário de Gill e Murray, em recente artigo sobre tendências do *software* de programação matemática: *One trend that should be noted initially is that optimization software will tend to involve more software and less optimization*.

Finalmente, também pode ser observado nos algoritmos disponíveis que partes insignificantes são desproporcionalmente ampliadas, enquanto outras fundamentais para uma boa compreensão e também boa implementação ficam mendigando reparo. Por exemplo, um fato que é absolutamente desprezível como o vetor segundo membro das restrições ser ou não ser não-negativo é muitas vezes realçado, enquanto que raramemte é escrito de maneira clara e indubitável, embora esteja fracamente subentendido, que a passagem de uma iteração a outra envolve, como não poderia deixar de ser, os valores das derivadas direcionais da função objetivo. Outro fato irrelevante que tem merecido injustificável destaque é sobre a inicialização do algoritmo simplex por um método conhecido na literatura como método do m grande (*big m method*). Alguns autores chegam até mesmo ao ponto de, após longa discussão deste método seguida de uma exposição do algoritmo, declarar que ele não deve ser utilizado.

Um assunto cuja ausência é notável em textos sobre o algoritmo simplex, embora não esteja relacionado ao algoritmo propriamente, é o levantado pela seguinte questão: Como gerar problemas de programação linear com soluções conhecidas com a finalidade de avaliar ou mesmo testar uma implementação?.

A finalidade deste capítulo, além de preparar a apresentação do método de Gilmore e Gomory para o Problema do Recorte de Estoque Unidimensional, é mostrar de uma maneira simples e suficiente o algoritmo simplex.

PROGRAMAÇÃO LINEAR

O problema de programação linear, na sua forma geral, pode ser escrito da seguinte maneira:

seja : $\mathbb{S} = \{ x \mid A x = b, 0 \leqslant x \leqslant u \}$,
onde A é uma matriz m x n com posto m.

$$\underline{\text{minimizar}} : \quad \phi = c^t x$$
$$\underline{\text{sujeito à}} : \quad x \in \mathbb{S}$$

restrições $A\,x = b$

$A = [\ B \mid N\ ]$, onde B é m x m não-singular

$x^t = [\ x_B^t \mid x_N^t\ ]$

$A\,x = b \implies B\,x_B = b - N\,x_N \implies x_B = B^{-1}(\ b - N\,x_N\ )$

função objetivo $\phi = c^t x$

$c^t = [\ c_B^t \mid c_N^t\ ]$

$\phi = c^t x \implies \phi = c_B^t\,x_B + c_N^t\,x_N$, mas

$x_B = B^{-1}(\ b - N\,x_N\ )$, logo

$\phi = c_B^t\,B^{-1}b - c_B^t\,B^{-1}N\,x_N + c_N^t\,x_N$

seja : $p^t = c_B^t\,B^{-1}$, logo

$\phi = p^t b + (\ c_N^t - p^t N\ )\,x_N$

seja : $\mathbb{N} = \{$ índices $j \mid x_j$ é componente do vetor $x_N \}$, logo

$\phi = p^t b + \sum_{j \in \mathbb{N}} (\ c_j - p^t a_j\ )\,x_j$, onde a_j é coluna de A

estratégia simplex:

Definição 1 : Uma *matriz básica* é uma matriz não-singular m x m formada de m colunas da matriz A.

Definição 2 : Uma *solução básica factível* é um ponto $x \in \mathbb{S}$ para o qual n - m componentes são ou zero ou u_j enquanto as restantes m estão associadas com uma matriz básica.

Teorema Fundamental : Se existe uma solução factível ótima, existe uma solução básica factível ótima.

Supondo uma solução básica factível inicial, verificar se o valor de ϕ pode ser diminuido passando para uma nova solução básica factível. Quando o valor de ϕ não puder ser diminuido, a solução então é ótima. É fácil verificar que o valor de ϕ pode ser diminuido se para algum $j \in \mathbb{N}$ ocorrer:

$$(c_j - p^t a_j) < 0 \quad e \quad x_j = 0$$

ou

$$(c_j - p^t a_j) > 0 \quad e \quad x_j = u_j$$

Supondo um certo $l \in \mathbb{N}$ onde isto acontece, o novo valor da função objetivo, pela alteração de somente x_l (característica do algoritmo simplex), pode ser calculado como seguinte:

aumentar somente x_l ($x_l = 0$, $l \in \mathbb{N}$)

$x_l' = x_l + \delta \implies x_N' = x_N + \delta\, e$, onde e é um vetor de dimensão $(n - m)$, com componentes iguais a zero exceto a componente k tal que $N_k = l$ que é igual a um.

$x_B = B^{-1}(b - N x_N) \implies x_B' = x_B - \delta B^{-1} a_l$

seja : $q = -B^{-1} a_l$, logo

$x_B' = x_B + \delta q$

diminuir somente x_l ($x_l = u_l$, $l \in \mathbb{N}$)

$x_l' = x_l - \delta \implies x_N' = x_N - \delta\, e$, onde e é um vetor de dimensão $(n - m)$, com componentes iguais a zero exceto a componente k tal que $N_k = l$ que é igual a um.

$x_B = B^{-1}(b - N x_N) \Longrightarrow x_B' = x_B + \delta B^{-1}a_l$

<u>seja</u> : $q = -B^{-1}a_l$, <u>logo</u>

$x_B' = x_B - \delta q$

Para os dois casos anteriores, pode ser escrito

$x' = x \pm \delta v$, <u>onde</u> $v^t = [q^t \mid e^t]$

<u>logo</u>

$$\phi' = \phi \pm \delta c^t v$$

<u>derivada</u> <u>direcional</u>:

Considere as particulares direções dadas pelos vetores abaixo (direções simplex) :

$$v^t = [q^t \mid e^t] \quad , \quad \kappa = 1, \ldots ,(n - m)$$

$\|v\| = (q^t q + 1)^{1/2}$

$\nabla\phi^t v = c_B^t q + c_N^t e = -p^t a_l + c_l$

$\nabla_v \phi = (c_l - p^t a_l) / (q^t q + 1)^{1/2}$, $\imath \in \mathbb{N}$

Como estratégia geral, é desejável caminhar na direção simplex de máximo decrescimento da função ϕ. Entretanto, deve ser observado que calcular tal direção é muito dispendioso do ponto de vista computacional (basta olhar para o denominador da expressão da derivada direcional) e também pode ser notado que esta direção não conduz necessariamente ao maior decréscimo possível no valor de ϕ.

Com a finalidade de escolher uma direção simplex, obviamente de descida, pode ser utilizada a heurística que consiste em dar preferência à direção onde ocorrer o seguinte:

$$\lambda = \underset{j \in \mathbb{N}}{\text{mínimo}} \left\{ \begin{array}{ll} \text{mínimo } \{ c_j - p^t a_j \} \quad , & \text{mínimo } \{ p^t a_j - c_j \} \\ \mid x_j = 0 & \mid x_j = u_j \end{array} \right\}$$

e <u>seja</u> l o índice associado a tal direção.

Observe que, uma vez calculado λ, é fácil verificar se a solução é ótima, ou seja: $\lambda \geqslant 0 \implies$ solução ótima.

<u>canalização</u> <u>das</u> <u>variáveis</u> $0 \leqslant x \leqslant u$

Como o novo ponto x deve pertencer a $\mathbb{S}$, deve ser imposto para cada um dos dois possíveis casos, que: $0 \leqslant x' \leqslant u$

<u>aumentar</u> <u>somente</u> x_l ($x_l = 0$, $l \in \mathbb{N}$)

$x_B' = x_B + \delta\, q$

$x_B + \delta\, q \geqslant 0 \implies \delta \leqslant -x_{B_i}/q_i \quad \mid q_i < 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, m$

$x_B + \delta\, q \leqslant u_B \implies \delta \leqslant (u_{B_i} - x_{B_i})/q_i \quad \mid q_i > 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, m$

$x_l' \leqslant u_l \implies \delta \leqslant u_l$ (não muda a matriz básica).

Considerando que quanto maior for o valor de δ, maior será o decréscimo no valor de ϕ, δ deve ser escolhido como seguinte:

$$\delta = \text{mín} \left\{ \begin{array}{lll} \text{mín } \{ -x_{B_i}/q_i \} \quad , & \text{mín } \{ (u_{B_i} - x_{B_i})/q_i \} \quad , & u_l \\ \mid q_i < 0 & \cap \mid q_i > 0 & \end{array} \right\}$$

e <u>seja</u> d o índice associado a δ , ($\delta = \infty \implies \phi$ é ilimitada).

diminuir somente x_l ($x_l = u_l$, $l \in \mathbb{N}$)

$x_B' = x_B - \delta q$

$x_B - \delta q \geqslant 0 \implies \delta \leqslant x_{B_i}/q_i \;\; | \; q_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$

$x_B - \delta q \leqslant u_B \implies \delta \leqslant (x_{B_i} - u_{B_i})/q_i \;\; | \; q_i < 0$, $i = 1, \ldots, m$

$x_l' \geqslant 0 \implies \delta \leqslant u_l$ (não muda a matriz básica).

Considerando que quanto maior for o valor de δ, maior será o decréscimo no valor de ϕ, δ deve ser escolhido como seguinte:

$$\delta = \min \left\{ \min_{| q_i > 0} \{ x_{B_i}/q_i \} \;,\; \min_{\Pi \, | \, q_i < 0} \{ (x_{B_i} - u_{B_i})/q_i \} \;,\; u_l \right\}$$

e seja d o índice associado a δ.

nova matriz básica

Considerando a expressão $a_l = -B\,q$, é fácil mostrar que $q_d \neq 0 \implies$ os vetores $a_{B_1}, a_{B_2}, \ldots, a_{B_{d-1}}, a_l, a_{B_{d+1}}, \ldots, a_{B_m}$ são linearmente independentes e portanto formam uma nova matriz básica.

esforço computacional

Para resolver um problema de programação linear pelo método simplex, uma solução básica factível deve ser primeiramente encontrada. A tarefa de encontrar uma solução básica factível inicial pode ser formulada como um problema de programação linear, para o qual uma primeira solução básica factível é conhecida (método das variáveis artificiais). O método simplex deve ser executado em duas fases, cada uma consistindo na aplicação de sucessivas iterações nas quais o maior custo computacional está associado à resolução dos três seguintes sistemas lineares:

$$x_B = B^{-1}(b - N x_N) \implies B x_B = (b - N x_N)$$

$$p^t = c_B^t B^{-1} \implies B^t p = c_B$$

$$q = -B^{-1} a_l \implies B q = -a_l \ , \ l \in \mathbb{N}$$

Estes sistemas lineares devem, em geral, ser resolvidos pela decomposição da matriz B num produto de uma matriz triangular inferior por uma matriz triangular superior (B = L U). Tal decomposição é sempre possível se forem permitidas trocas de linhas (colunas também, mas no contexto do método simplex isto é inconveniente).

Maiores detalhes, suficientes para uma implementação, podem ser buscados no clássico artigo de Bartels [1971].

<u>algoritmo</u> <u>simplex</u>

```
enquanto λ < 0 faça
     começo
     { calcula q }
     { encontra δ }
     { testa objetivo ilimitado }
     se nova-matriz-básica então
          começo
          { atualiza B }
          { calcula p }
          fim
     { calcula x_B }
     fim
```

programação linear

```
{ leitura dos dados }
{ adiciona as variáveis de folga }
{ adiciona as variáveis artificiais }
{ inicializa: B, p, x_B }
se fase1-necessária então
     começo
     { simplex - fase1 - problema artificial }
     { verifica factibilidade }
     { elimina possíveis variáveis artificiais básicas }
     { inicializa: B, p, x_B }
     fim
{ simplex - fase2 - problema original }
{ imprime respostas }
```

variáveis duais

Em várias aplicações práticas é muito interessante saber o que acontece com o valor ótimo da função objetivo quando ocorre uma pequena perturbação no vetor segundo membro das restrições. Tal tendência da função objetivo pode ser mostrada pelos valores das variáveis duais.

$$\phi = p^t b + (c_N^t - p^t N) x_N \implies \partial\phi/\partial b_i = p_i \quad , \quad i = 1, \ldots ,m$$

variáveis artificiais

Para encontrar uma solução básica factível inicial para:

minimizar : $\phi = c^t x$

sujeito à : $A\,x = b$

$0 \leqslant x \leqslant u$

considere o seguinte problema auxiliar:

minimizar : $\phi = 0^t x + \sum_{i=1}^{m} y_i$

sujeito à : $A\,x + E\,y = b$

$0 \leqslant x \leqslant u$

$0 \leqslant y \leqslant \infty$

<u>onde</u>

e_i é coluna de E com componentes iguais a zero exceto a componente i que é igual a ± 1 (-1 para $b_i < 0$).

Observe que o problema auxiliar tem facilmente disponível uma solução básica factível inicial com $x = 0$ e $y_i = |\,b_i|$.

É fácil verificar que se o problema auxiliar tem um valor mínimo de zero com $y = 0$, então o problema original tem uma solução factível. Por outro lado, se o problema auxiliar tem um valor mínimo maior do que zero, então o problema original não tem solução factível.

É possível, ao final da resolução do problema auxiliar, ter presente na matriz básica colunas da matriz E. Para prosseguir com a resolução do problema original, basta trocar as colunas da matriz básica associadas a variáveis y (artificiais) com colunas associadas a variáveis x (não artificiais) de maneira que a nova matriz básica continue não singular. Observe que sem alterar os valores das variáveis x ou y, a solução continuará factível. Para encontrar uma nova matriz básica, mantendo a solução sem alteração, basta considerar o seguinte:

a_l uma coluna associada a variável $x \mid l \in \mathbb{N}$,

e_{B_d} uma coluna da matriz básica associada a variável y.

Lembre que partindo da expressão $a_l = -B\,q$ com

$q_d \neq 0 \implies$ os vetores $a_{B_1}, a_{B_2}, \ldots, a_{B_{d-1}}, a_l, a_{B_{d+1}}, \ldots, a_{B_m}$ são linearmente independentes.

<u>problema</u> <u>com</u> <u>solução</u> <u>conhecida</u>

É evidente que existe a necessidade de avaliação de uma implementação do algoritmo simplex, mas como raramente estão disponíveis grandes problemas com soluções conhecidas, torna-se indispensável uma maneira de gerar problemas de tamanho arbitrário como, por exemplo, o exposto a seguir.

considere o seguinte problema:

maximizar : $\phi = d^t y$

sujeito à : $e^t y = \beta$

$0 \leqslant y \leqslant u$

<u>onde</u>

e : vetor r x 1 $|$ $e_i = 1$ para $i = 1, \ldots, r$

$d_1 > d_2 > d_3 > \ldots > d_r > 0$

Uma solução ótima y^*, para este problema, é facilmente obtida por inspeção da seguinte maneira:

$$y_i^* = \min\left(\left(\beta - \sum_{k=1}^{i-1} y_k^* \right), u_i \right) \quad , \quad i = 1, \ldots, r$$

Adicionando variáveis de folga é possível reescrever o problema original como:

maximizar : $\phi = d^t y + 0^t s$

sujeito à : $e^t y + 0^t s = \beta$

$I\, y + I\, s = u$

$y \geqslant 0 \; , \; s \geqslant 0$

cuja solução é dada por y^* e s^* , <u>onde</u>

$s_i^* = u_i - y_i^*$, $i = 1, \ldots, r$

Considerando uma matriz arbitrária H (r x r) não-singular, o problema original pode novamente ser reescrito como:

maximizar : $\phi = d^t y + 0^t s$

sujeito à : $e^t y + 0^t s = \beta$

$H\,y + H\,s = H\,u$

$y \geqslant 0 \;,\; s \geqslant 0$

ou finalmente,

minimizar : $\phi = c^t x$

sujeito à : $A\,x = b$

$0 \leqslant x \leqslant \infty$

onde

$$c^t = [-d^t \mid 0^t\,]$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} e^t & 0^t \\ \hline H & H \end{array}\right] \qquad\qquad b = \left[\begin{array}{c} \beta \\ \hline H\,u \end{array}\right]$$

algoritmo

{ gerar através de números aleatórios vetor d }

{ ordenar vetor d }

{ completar vetor c }

{ gerar através de números aleatórios vetor u }

{ calcular β para uma certa % de números não nulos em y^* }

{ calcular solução y^* }

{ calcular folgas s^* }

{ gerar através de números aleatórios matriz H }

{ completar matriz A }

{ calcular vetor b }

O PROBLEMA DA MOCHILA

INTRODUÇÃO

A capacidade de carga da mochila e a escolha do carregamento potencial são os dados do problema, cujo objetivo é encontrar o carregamento de máxima utilidade. Especificamente, existe um número ilimitado de cada um dos n tipos de itens com cada item do tipo i tendo peso a_i e utilidade c_i. É evidente que existe a restrição de um número inteiro x_i de itens do tipo i, e é exatamente neste ponto que está todo o problema.

Supondo β a capacidade de carga da mochila, e assumindo a_i positivo, o problema pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\underline{\text{maximizar}} : \quad \phi = c^t x$$
$$\underline{\text{sujeito à}} : \quad a^t x \leqslant \beta \mid x_i \text{ é inteiro não-negativo}$$

Os algoritmos existentes para a solução deste problema são principalmente de dois tipos: O primeiro está baseado na abordagem pela *programação dinâmica* (Dreyfus [1977]) que é eficiente para valores relativamente pequenos de β. O segundo está baseado na abordagem *enumerativa* (Akinc [1983]) permitindo tratar valores relativamente grandes de β.

Neste capítulo será adotada a primeira abordagem, sendo conveniente lembrar, como bem observou Dreyfus, que programação dinâmica é mais arte do que ciência e o fundamental é utilizar, de uma maneira eficiente, o bom senso, a coisa do mundo melhor partilhada nas palavras de Descartes, e não a manipulação lógica.

ALGORITMO

Considere uma solução ótima x^*. Se $c_i \geqslant c_k$ para $a_i \leqslant a_k$ então $x^*_k = 0$, pois caso contrário a_i pode substituir a_k mantendo ou aumentando o valor de ϕ, portanto o problema original pode ser reduzido de maneira que se tenha somente $c_i < c_k$ para $a_i \leqslant a_k$. Entretanto, se existir $a_i = a_k$ a variável correspondente ao menor valor entre { c_i , c_k } pode ser anulada. Também é evidente que se existir $c_i < 0$, $x^*_i = 0$. Logo, pode ser assumido, sem perda de generalidade, que:

- $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.
- $0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n$.

Por uma escolha adequada das unidades, os valores a_i podem ser convertidos em números inteiros. Seja δ o máximo-divisor-comum de a_1, a_2, ... , a_n. No caso de $\delta > 1$, o problema pode ser transformado num outro problema equivalente fazendo $a_i \leftarrow a_i/\delta$ e também $\beta \leftarrow [\beta/\delta]$. O algoritmo de Euclides deve ser utilizado para o calculo de δ. Logo, também pode ser assumido que:

- Os valores a_i são inteiros.
- O máximo-divisor-comum dos valores a_i é um ($\delta = 1$).

relação de recorrência

Suponha que já existam alguns itens na mochila e que a capacidade restante deva ser preenchida de uma maneira ótima com a escolha de um item por vez. Para executar esta tarefa, somente é necessário o conhecimento da capacidade restante, uma vez que com a adição de um item do tipo i, o acréscimo na função objetivo será (independentemente do que já estiver na mochila) c_i. Portanto a capacidade restante ξ é a variável de estado e pode ser definida a função utilidade ótima por:

$\phi(\xi)$ = a máxima utilidade alcançável com capacidade ξ

Tornando claro a seguinte relação de recorrência para os valores de $\xi = 0, 1, \ldots, \beta$:

$$\phi(\xi) = \text{máximo} \left\{ c_i + \phi(\xi - a_i) \right\} , \quad i = 1, \ldots, n$$

com condição de contorno dada por:

$$\phi(\xi) = 0 \quad \text{para} \quad \xi = 0, 1, \ldots, (a_1 - 1)$$

Observe que para a dedução da solução ótima x^*, deve ser guardada, para cada valor de ξ, qual a escolha que maximiza $\phi(\xi)$. Esta escolha será denotada por $\pi(\xi)$. No caso de empate $\pi(\xi)$ terá vários valores.

múltiplas soluções

Para evitar representações diferentes da mesma solução ótima, basta estipular que os itens serão colocados na mochila somente em uma ordem tal que a designação do tipo do item é não-crescente, ou seja, serão colocados os itens mais pesados em primeiro lugar. Obviamente, cada solução ótima x^* tem somente uma tal enumeração.

Com o propósito de limitar-se a somente tais representações, basta que durante a escolha que maximiza $\phi(\xi)$, quando for considerada a colocação de um item do tipo i, seja examinado o menor valor de $\pi(\xi - a_i)$ (pode não ser único). Se mín $\pi(\xi - a_i)$ > i, então esta não é uma enumeração não-crescente e portanto este particular item i não deve ser considerado, podendo ser verificado o próximo tipo de item.

Para restringir-se a uma única solução ótima não-crescente, é suficiente guardar somente o menor valor de $\pi(\xi)$.

<u>critério de parada</u>

Para a determinação da solução ótima, pode ser desnecessário o cálculo de $\phi(\xi)$ para todo ξ menor ou igual a β. Primeiramente, deve ser notado que o item (assumido único) com a maior razão utilidade/peso desempenha um papel especial. Seja r o tipo deste item. Sempre que ξ é um múltiplo inteiro de a_r, a solução ótima consiste somente de itens do tipo r. Quando ξ é tal que o item r não pode ser usado sem alguma folga é que outros itens entram na solução ótima, possivelmente substituindo completamente o item tipo r. Seja $\alpha_r = c_r/a_r$, é claro que:

$$\alpha_r \xi - c_r \leqslant c_r [\xi/a_r] \leqslant \phi(\xi) \leqslant \alpha_r \xi$$

Seja s o tipo do item de segunda maior razão utilidade/peso dada por α_s. Note que para o problema auxiliar, onde o tipo r não é permitido, $\phi'(\xi) \leqslant \alpha_s \xi$. Pela imposição de:

$$\alpha_s \xi < \alpha_r \xi - c_r \iff \xi > c_r/(\alpha_r - \alpha_s)$$

conclui-se que existe um ξ' tal que para todo $\xi \geqslant \xi'$, $\phi'(\xi) < \phi(\xi)$ e portanto para todo $\xi \geqslant \xi'$ o item tipo r está presente na solução ótima.

Seja ζ o maior valor de ξ tal que ocorra pela primeira vez a_n valores consecutivos de ξ tendo o item r presente numa de suas soluções ótimas. É claro que $\phi(\zeta+1)$ terá o item tipo r numa de suas soluções ótimas. O mesmo argumento pode ser aplicado para os valores de $\xi = \zeta+1, \ \zeta+2, \ \ldots \ , \beta$. Portanto o cálculo pode ser interrompido após a ocorrência de a_n valores consectivos de ξ tendo o item r presente numa de suas soluções ótimas. A solução ótima para qualquer $\beta > \zeta$ terá $x_r = [(\beta - \zeta + a_n)/a_r]$ e para completar a solução ótima, $\pi(\xi)$ pode ser utilizado partindo-se de $\xi = \beta - a_r x_r$.

<u>algoritmo</u>

```
{ ordenar vetores: a, c }
{ encolher vetores: a, c }
{ calcular máximo-divisor-comum das componentes do vetor a }
{ divisão pelo máximo-divisor-comum }
{ determinar: a_r, c_r }
{ inicializar vetores: φ, π }
para ξ = 0 até (a_1 - 1) faça
        começo
        para i = 1 até n faça se c_i ≥ φ(ξ + a_i)
        então   começo
                φ(ξ + a_i) ← c_i;
                π(ξ + a_i) ← i
                fim
        fim;
para ξ = a_1 até (a_r - 1) faça
        começo
        para i = π(ξ) até n faça se c_i + φ(ξ) ≥ φ(ξ + a_i)
        então   começo
                φ(ξ + a_i) ← c_i + φ(ξ);
                π(ξ + a_i) ← i
                fim
        fim;
```

```
λ ← 0; ξ ← a_r - 1;
enquanto (ξ < β) e (λ < a_n) faça
        começo
        ξ ← ξ + 1;
        para i = π(ξ) até n faça se c_i + φ(ξ) ⩾ φ(ξ + a_i)
        então   começo
                φ(ξ + a_i) ← c_i + φ(ξ);
                π(ξ + a_i) ← i
                fim;
        se c_r + φ(ξ - a_r) = φ(ξ) então λ ← λ + 1 senão λ ← 0
        fim;
ζ ← ξ;
{ determinar a solução ótima }
```

RECORTE DE ESTOQUE PELA PROGRAMAÇÃO LINEAR

INTRODUÇÃO

Para uma justificativa da função objetivo proposta, não se pode dispensar um claro entendimento do que significa o *preço* de uma mercadoria. Com a finalidade deste esclarecimento, apresento um pequeno resumo de como deve ser entendido o *sistema de preços*, como proposto originalmente por Hayek [1945].

O SISTEMA DE PREÇOS

É de fundamental importância a distinção entre dois tipos de conhecimentos existentes em nossa sociedade. O primeiro tipo, que poderia ser classificado de científico segundo Hayek, como sendo o conhecimento de leis gerais e um segundo tipo como sendo o conhecimento das particulares circunstâncias de tempo e lugar. É neste segundo tipo que praticamente todo indivíduo tem alguma vantagem sobre todos os outros pois ele possue informaçõs únicas das quais um uso benéfico pode ser feito, desde que as decisões sobre tal uso sejam tomadas por ele ou com sua participação.

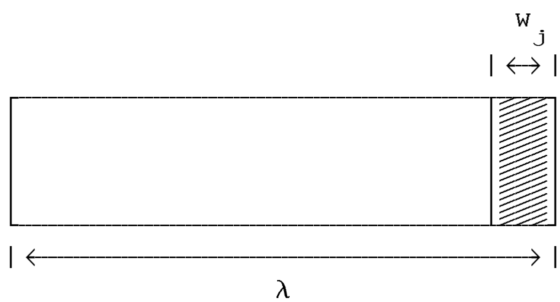
Seguindo o pensamento de Hayek, que considera o problema econômico da sociedade como sendo principalmente de adaptação às alterações nas particulares circunstâncias de tempo e lugar é claro que as decisões finais devem ser deixadas às pessoas que estejam familiarizadas com estas circunstâncias, que conhecem diretamente as alterações relevantes e também os quais os recursos disponíveis para a necessária adaptação. A descentralização é necessária para assegurar que o conhecimento das particulares circunstâncias de tempo e lugar sejam prontamente utilizadas, mas resta ainda garantir que as decisões de um particular indivíduo sejam coerentes com o resto do sistema econômico.

Num sistema econômico no qual o conhecimento dos fatos relevantes está disperso entre muitas pessoas, é necessário associar a cada tipo de recurso escasso um valor numérico que reflita a *relativa importância* de cada particular recurso dentro da estrutura global deste sistema. Desta maneira as decisões de um determinado indivíduo podem ser tomadas, com base nestes valores (*preços*), em concordância com o resto do sistema econômico.

O sistema de preços coordena as ações separadas das pessoas, fazendo com que o sistema econômico atue de uma maneira organizada como um todo, não porque os indivíduos possuam pleno conhecimento, mas porque o limitado conhecimento de cada um sobrepõe-se de uma maneira tal que através de muitos intermediários a informação relevante é comunicada a todos.

FORMULAÇÃO COMO UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Definição : Um *padrão-de-corte* é uma determinada maneira de recortar a largura λ do rolo de papel em pedaços dos tamanhos encomendados pelos clientes, ou seja, a_1 peças de largura l_1, a_2 peças de largura l_2, ... , a_m peças de largura l_m.



λ : largura do rolo de papel

w_j : largura de apara no padrão-de-corte j

l_i : largura da peça i

γ : peso de uma unidade de largura do rolo de papel

v_i : preço de uma unidade de peso da peça i

ν : preço de uma unidade de peso de apara

μ : custo de uma unidade de peso do rolo de papel

a_{ij} : número de peças i no padrão-de-corte j

z_j : número de rolos recortados no padrão-de-corte j

q_i : quantidade em peso encomendada da peça i

α_i : variação percentual aceitável na quantidade q_i

m_1 : número de encomendas com fibra especificada

m_2 : número de encomendas com fibra livre

$\mathbb{P}$: { índices j | a coluna a_j representa um padrão-de-corte }

<u>função</u> <u>objetivo</u>

$(\text{lucro})_j = (\sum_i \gamma\, v_i l_i a_{ij} + \gamma\, \nu\, w_j - \gamma\, \mu\, \lambda)\, z_j$, <u>mas</u>

$w_j = \lambda - \sum_i l_i a_{ij}$, <u>logo</u>

$(\text{lucro})_j = - (\mu - \nu)\, (\lambda - \sum_i r_i a_{ij})\, x_j$, <u>onde</u>

$x_j = \gamma\, z_j$

$r_i = (v_i - \nu)\, l_i / (\mu - \nu)$

É interessante observar que λx_j é o peso total de todos os rolos recortados no padrão-de-corte j, e também que o valor r_i não depende da unidade monetária escolhida.

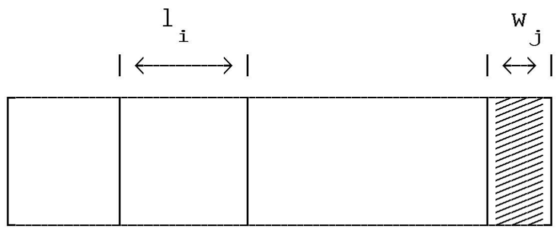
$$\text{lucro} = -(\mu - \nu) \sum_{j \in \mathbb{P}} (\lambda - \sum_{i} r_i a_{ij}) x_j$$

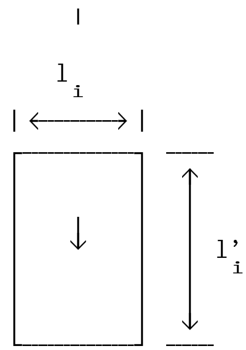
<u>seja</u> : $$\phi = \sum_{j \in \mathbb{P}} (\lambda - \sum_{i} r_i a_{ij}) x_j$$

Como o valor $(\mu - \nu)$ é positivo, minimizar ϕ é equivalente a maximizar o lucro. É claro que objetivos alternativos poderiam ser colocados, mesmo para o sistema capitalista, entretanto é oportuno observar que em muitas situações, incluindo firmas operando em sistemas não-capitalistas, a maximização do lucro é consistente com a realização de objetivos alternativos de longo prazo (Leland [1972]).

<u>restrições</u>

Uma das características especiais da indústria do papel é o fato de que as quantidades encomendadas não precisam ser satisfeitas exatamente. Isto é, se um cliente encomenda uma quantidade em peso q_i da largura l_i, ele aceitará qualquer quantidade entre os valores $(1 - \alpha_i) q_i$ e $(1 + \alpha_i) q_i$. Em geral, o valor α_i é função da quantidade q_i sendo comum encontrar α_i no intervalo de 0.05 até 0.15.





Cada padrão-de-corte produz um certo número de *bobinas* de largura l_i. Posteriormente cada bobina é cortada, ao longo de todo o seu comprimento, em pequenos retângulos de tamanho l_i por l'_i.

Na verdade, cada cliente especifica uma encomenda por uma quantidade em peso de *retângulos* medindo l_i por l'_i, indicando ainda qual o *sentido da fibra* dentro do retângulo (observe que o papel é ortotrópico). É importante ressaltar que para alguns clientes é *irrelevante* a orientação da fibra no retângulo, sendo perfeitamente aceitável uma parte da quantidade encomendada com uma orientação e o restante com outra orientação. Uma encomenda deste último tipo será referenciada como encomenda de *fibra livre*.

Imaginando cada encomenda de fibra livre como equivalente à soma de duas outras encomendas de fibra especificada (uma para cada lado do retângulo), as restrições podem ser escritas da seguinte maneira:

fibra especificada

$$\sum_{j \in \mathbb{P}} a_{ij} x_j = q_i (1 + \alpha_i)/l_i - x_i$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 2\alpha_i q_i / l_i$$

$$i = 1, \; \ldots \; , m_1$$

fibra livre

$$\sum_{j \in \mathbb{P}} a_{ij} x_j = (1 - x_{(i+m_2)}) \; q_i (1 + \alpha_i)/l_i - x_i$$

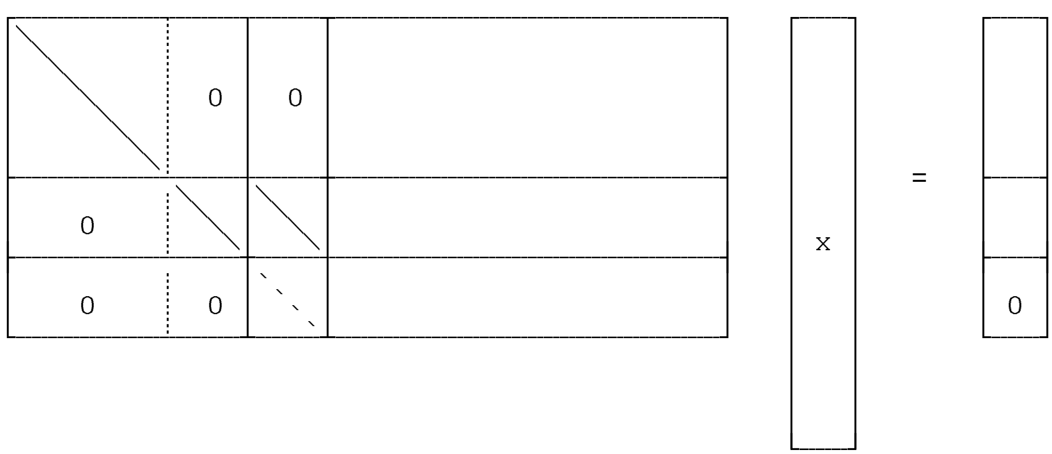
$$\sum_{j \in \mathbb{P}} a_{(i+m_2),j} x_j = x_{(i+m_2)} \; q_i (1 + \alpha_i)/l_{(i+m_2)}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 2\alpha_i q_i / l_i$$

$$0 \leqslant x_{(i+m_2)} \leqslant 1$$

$$i = (m_1+1), \; \ldots \; , (m_1+m_2)$$

,resultando num sistema de equações lineares, com canalização nas incógnitas, da forma:



Observe que o número total de equações é igual a (m_1+2m_2), isto é $m = m_1+2m_2$.

geração de colunas

O problema de programação linear pode ser escrito na seguinte forma:

minimizar : $\phi = c^t x$

sujeito à : $A x = b$

$0 \leq x \leq u$

onde

$c_j = 0 \mid j = 1, \ldots, m$

$c_j = \lambda - \sum_{i=1}^{m} r_i a_{ij} \mid j \in \mathbb{P}$

$b_i = q_i(1 + \alpha_i)/l_i \mid i = 1, \ldots, (m_1+m_2)$

$b_i = 0 \mid i = (m_1+m_2+1), \ldots, m$

$u_j = 2\alpha_j q_j / l_j \mid j = 1, \ldots, (m_1+m_2)$

$u_j = 1 \mid j = (m_1+m_2+1), \ldots, m$

$u_j = \infty \mid j \in \mathbb{P}$

A dificuldade para encontrar a solução através da utilização do algoritmo simplex na sua forma normal, está no fato de que em problemas práticos, o número de padrões de corte possíveis é da ordem de milhões. Esta dificuldade pode ser superada simplesmente *gerando* uma nova coluna quando necessário, ou seja, no momento em que for procurada uma nova solução basica factível que possivelmente diminua o valor da função objetivo.

Lembre que, com a finalidade de escolher uma direção simplex obviamente de descida, pode ser utilizada a heurística que consiste em dar preferência à direção onde ocorrer o seguinte:

$$\underset{j \in \mathbb{N}}{\text{mínimo}} \left\{ \underset{\mid x_j = 0}{\text{mínimo}} \{ c_j - p^t a_j \} \;,\; \underset{\mid x_j = u_j}{\text{mínimo}} \{ p^t a_j - c_j \} \right\}$$

Observe que para as colunas que *não estão* associadas com padrões de corte, ou seja para as primeiras m colunas da matriz A, a expressão anterior não representa problema algum. Entretanto, para as colunas que *estão* associadas com padrões de corte, deve ser resolvido o seguinte problema auxiliar:

$$\text{mínimo } \{ c_j - p^t a_j \} \mid j \in \mathbb{N}$$

ou

maximizar : $\psi = (p + r)^t a_j - \lambda$

sujeito à : $1^t a_j \leqslant \lambda \mid$ componentes de a_j inteiros não-negativos

<u>solução básica factível inicial</u>

Considere os seguintes padrões de corte representados pelas colunas a_{P_j} da matriz A, para $j = 1, \ldots ,(m_1+m_2) \mid P_j \in \mathbb{P}$,

<u>onde</u>

$a_{i,P_j} = 0 \mid i \neq j$

$a_{j,P_j} = [b_j]$

e também as colunas a_j da matriz A, para $j = (m_1+m_2+1), \ldots ,m$.

A matriz formada por estas colunas anteriores, ou seja, por $a_{P_1}, a_{P_2}, \ldots , a_{P_{(m_1+m_2)}}, a_{(m_1+m_2+1)}, a_{(m_1+m_2+2)}, \ldots , a_m$ é uma matriz triangular superior com determinante diferente de zero, e é portanto uma *matriz básica.* É fácil verificar que o ponto x dado por componentes iguais a zero, exceto:

$x_{P_j} = b_j/a_{j,P_j}$, $j = 1, \ldots ,(m_1+m_2) \mid P_j \in \mathbb{P}$

$x_j = 0$, $j = (m_1+m_2+1), \ldots , m$

, é uma *solução básica factível*, associada evidentemente, à matriz básica anterior.

tendência do lucro na solução ótima

É muito interessante, para a *formação de preços*, ou para o estabelecimento de uma *política de descontos* diferenciados em função do cliente, saber qual a tendência do lucro para pequenas alterações nas quantidades encomendadas. Tal tendência pode ser mostrada com a ajuda dos valores das variáveis duais.

lucro = $-(\mu - \nu)\ \phi$

$\partial(\text{lucro})/\partial q_i = -(\mu - \nu)\ p_i\ \partial b_i/\partial q_i$, mas

$\partial b_i/\partial q_i = (1 + \alpha_i)/l_i$, $i = 1, \ldots, (m_1+m_2)$

logo

$\partial(\text{lucro})/\partial q_i = -(\mu - \nu)\ p_i\ (1 + \alpha_i)/l_i$, $i = 1, \ldots, (m_1+m_2)$

FORMULAÇÃO COMO UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO FRACIONÁRIA LINEAR

Considerando que *perda percentual total* representa uma medida da *eficiência técnica* da operação de recorte de estoques, Gilmore e Gomory [1963] introduzem-na como função objetivo.

$$\phi = \sum_{j \in \mathbb{P}} w_j x_j \Big/ \sum_{j \in \mathbb{P}} \lambda\ x_j$$

Desta maneira, o problema de programação fracionária linear pode ser escrito na seguinte forma:

minimizar : $\phi = w^t x \,/\, d^t x$

sujeito à : $A\,x = b$

$0 \leqslant x \leqslant u$

onde

$w_j = 0 \mid j = 1, \ldots, m$

$w_j = \lambda - \sum_i l_i a_{ij} \mid j \in \mathbb{P}$

$d_j = 0 \mid j = 1, \ldots, m$

$d_j = \lambda \mid j \in \mathbb{P}$

$b_i = q_i(1 + \alpha_i)/l_i \mid i = 1, \ldots, (m_1+m_2)$

$b_i = 0 \mid i = (m_1+m_2+1), \ldots, m$

$u_j = 2\alpha_j q_j / l_j \mid j = 1, \ldots, (m_1+m_2)$

$u_j = 1 \mid j = (m_1+m_2+1), \ldots, m$

$u_j = \infty \mid j \in \mathbb{P}$

<u>estratégia simplex</u>

Considerando que o denominador de ϕ é positivo para todo $x \in \mathbb{S} = \{ x \mid A x = b,\ 0 \leqslant x \leqslant u \}$, pode ser mostrado que ϕ é estritamente quasiconvexa e portanto um mínimo local de ϕ em $\mathbb{S}$ é também global. Considerando ainda que $\mathbb{S}$ é limitado, pode ser mostrado que o valor mínimo de ϕ é obtido numa solução básica factível de $\mathbb{S}$. Finalmente, é simples mostrar que o sinal da *derivada direcional* de ϕ é constante ao longo de qualquer reta, desde que calculada em pontos onde o denominador é diferente de zero. Portanto, a estratégia simplex pode ser utilizada para encontrar o mínimo de ϕ em $\mathbb{S}$ (Lasdon [1972]).

<u>geração de colunas</u>

A *derivada direcional* de ϕ na *direção simplex* dada pelo vetor h, pode ser escrita como:

$$\nabla_h \phi = (w_j - \rho\, d_j - p^t a_j)/\delta / \, \|h\| \quad | \; j \in \mathbb{N}$$

<u>onde</u>

$p^t = (w_B - \rho\, d_B)^t B^{-1}$

$\omega = w^t x$

$\delta = d^t x$

$\rho = \omega/\delta$

Observe que $w^t x = w_B^t x_B$ e também $d^t x = d_B^t x_B$, pois apesar de poderem existir variaveis $x_j = u_j \;|\; j \in \mathbb{N}$, o correspondente w_j ou d_j é igual a zero.

Com a finalidade de escolher uma direção simplex, obviamente de descida, pode ser utilizada a heurística que consiste em dar preferência à direção onde ocorrer o mínimo, para $j \in \mathbb{N}$, entre os dois valores seguintes:

$$\text{mínimo } \{ (w_j - \rho\, d_j - p^t a_j)/\delta \} \quad | \quad x_j = 0$$

$$\text{mínimo } \{ (-w_j + \rho\, d_j + p^t a_j)/\delta \} \quad | \quad x_j = u_j$$

Observe que para as colunas que *não estão* associadas com padrões de corte, ou seja para as primeiras m colunas da matriz A, a expressão anterior não representa problema algum. Entretanto, para as colunas que *estão* associadas com padrões de corte, deve ser resolvido o seguinte problema auxiliar:

$$\text{mínimo } \{ (w_j - \rho\, d_j - p^t a_j)/\delta \} \quad | \quad j \in \mathbb{N}$$

ou

maximizar : $\psi = ((p + 1)^t a_j - \lambda(1 - \rho))/\delta$

sujeito à : $1^t a_j \leqslant \lambda$ | componentes de a_j inteiros não-negativos tendência da perda percentual total na solução ótima

É interessante saber qual a tendência da perda percentual total para pequenas alterações nas quantidades encomendadas. Tal tendência pode ser calculada como a seguir:

$$\partial\phi/\partial b_i = p_i/\delta$$

$$\partial b_i/\partial q_i = (1 + \alpha_i)/l_i \quad , \quad i = 1, \ldots ,(m_1+m_2)$$

logo

$$\partial\phi/\partial q_i = p_i(1 + \alpha_i)/l_i/\delta \quad , \quad i = 1, \ldots ,(m_1+m_2)$$

EXEMPLOS E CONCLUSÃO

INTRODUÇÃO

Os programas de computador foram codificados na linguagem de programação PASCAL e os tempos de execução referem-se à utilização de um micro-computador do tipo IBM-PC.

Os três exemplos, que serão mostrados a seguir, são extraidos de casos reais e foram escolhidos por bem representarem os limites (mínimo e máximo) do tempo de execução para a resolução de um típico problema mensal encontrado na prática. A unidade utilizada para comprimento é o centímetro e a unidade utilizada para peso é o kilograma-força (denotado abreviadamente por Kg). Os preços empregados nestes exemplos estão dispostos na tabela abaixo.

Preços em junho de 1987 (Cz$ / Kg)	
Preço do Rolo de Papel	30.00
Preço da Apara	6.00
Custo do Rolo de Papel	15.00

É importante lembrar que no caso do objetivo ser *maximizar o lucro*, é facultada a imposição de preços diferenciados, que poderiam ser consequência por exemplo, de uma política de *descontos* em função da quantidade encomendada. Uma tal política é exemplificada na tabela abaixo.

Política de Descontos	
Toneladas	Desconto
11 - 20	2.00%
21 - 30	4.00%
31 - 40	6.00%
41 - 50	8.00%
51 -	10.00%

As três tabelas seguintes mostram os dados particulares do correspondente exemplo.

Exemplo 1		(λ = 246.0)	
l	l'	q	α
66.0	-	52263.0	0.05
71.0	-	5958.0	0.15
72.0	-	16358.0	0.10
73.0	-	6126.0	0.15
74.0	-	6210.0	0.15
77.0	-	64618.0	0.05
78.0	-	6545.0	0.15
81.0	-	7074.0	0.15
83.0	-	6966.0	0.15
85.0	-	13079.0	0.10
86.0	-	6744.0	0.15
88.5	-	11142.0	0.10
90.0	-	65468.0	0.05
92.0	-	6300.0	0.15
93.0	-	53274.0	0.05
94.0	-	6575.0	0.15
107.0	-	11976.0	0.10

Exemplo 2		(λ = 250.0)	
l	l’	q	α
48.0	-	5000.0	0.10
50.0	-	30000.0	0.10
60.0	-	8500.0	0.10
61.0	-	4000.0	0.10
63.0	-	5000.0	0.10
70.0	-	6000.0	0.10
72.0	-	5000.0	0.10
77.0	-	8500.0	0.10
84.0	-	10000.0	0.10
85.0	-	6000.0	0.10
86.0	-	46000.0	0.10
87.0	-	5000.0	0.10
93.0	-	30000.0	0.10
100.0	-	4000.0	0.10
104.0	-	13000.0	0.10
96.0	66.0	72000.0	0.10
100.0	70.0	7800.0	0.10
113.0	77.0	21000.0	0.10

Exemplo 3		(λ = 414.0)	
l	l'	q	α
25.0	-	15000.0	0.05
27.0	-	10000.0	0.05
27.9	-	9200.0	0.05
29.5	-	15000.0	0.05
31.8	-	5700.0	0.05
35.5	-	4900.0	0.05
38.0	-	30000.0	0.05
39.0	-	5400.0	0.05
42.0	-	20000.0	0.05
43.2	-	5400.0	0.05
46.0	-	20000.0	0.05
46.5	-	30000.0	0.05
47.0	-	344000.0	0.05
47.5	-	30000.0	0.05
48.0	-	170000.0	0.05
51.0	-	5000.0	0.05
55.0	-	4000.0	0.05
55.9	-	5000.0	0.05
66.0	-	120000.0	0.05
75.0	-	30000.0	0.05
80.0	-	65000.0	0.05
89.0	-	10000.0	0.05
102.5	-	15600.0	0.05
110.0	-	70000.0	0.05
90.0	56.0	10000.0	0.05
96.0	66.0	41000.0	0.05
92.0	75.0	5000.0	0.05
112.0	76.0	10000.0	0.05
112.0	92.0	10000.0	0.05

RESULTADOS SEM DESCONTOS

Tempo de Execução (minutos) / Iterações				
Exemplo	Pedidos	λ (mm)	Perda%	Lucro
1	17	2460	0.5 / 120	0.2 / 34
2	21	2500	0.7 / 121	0.4 / 42
3	34	4140	8.6 / 173	5.5 / 48

Eficiência Técnica (%)			
Exemplo	Perda%	Lucro	Variação
1	99.43	98.94	-0.49%
2	99.89	99.79	-0.10%
3	100.00	99.98	-0.02%

Lucro (Milhares de Cruzados)			
Exemplo	Perda%	Lucro	Variação
1	5161.72	5551.54	7.55%
2	4268.67	4726.33	10.72%
3	17038.80	17562.55	3.07%

RESULTADOS COM DESCONTOS

Tempo de Execução (minutos) / Iterações				
Exemplo	Pedidos	λ (mm)	Perda%	Lucro
1	17	2460	0.5 / 120	0.2 / 32
2	21	2500	0.7 / 121	0.5 / 50
3	34	4140	8.6 / 173	5.8 / 48

Eficiência Técnica (%)			
Exemplo	Perda%	Lucro	Variação
1	99.43	98.94	-0.49%
2	99.89	99.73	-0.16%
3	100.00	99.98	-0.02%

Lucro (Milhares de Cruzados)			
Exemplo	Perda%	Lucro	Variação
1	4437.83	4774.64	7.59%
2	3866.61	4249.88	9.91%
3	14376.71	14831.91	3.17%

CONCLUSÃO

Deve ser lembrado que em qualquer sistema econômico no qual a firma é responsável por suas dívidas, *lucro* desempenha o papel único de prover os meios pelos quais a firma pode aumentar seu estoque de capital. Portanto, *lucro* pode tornar-se um importante objetivo indireto, se crescimento ajudar no alcance dos objetivos da firma no futuro. Este papel dinâmico do lucro é evidentemente negligenciado num modelo estático da firma. No caso de *maximização de lucro a longo prazo*, um modelo estático da firma é uma descrição precisa, pois os objetivos diretos e indiretos coincidem, e o comportamento baseado na miopia do máximo lucro é ótimo. Mas no caso de objetivos alternativos a longo prazo, modelos estáticos não podem ser usados para descrever o comportamento ótimo da firma até mesmo no período corrente (Leland [1972]).

O modelo proposto, tendo como objetivo *maximizar o lucro*, é muito mais adequado de um ponto vista econômico, pois aproveita a variação aceitável nas quantidades das encomendas para *aumentar* o lucro da firma e não para *diminuir* a perda percentual de sua produção. Neste modelo também é permitida a inclusão de uma política de descontos, que pode ser realizada da forma descrita anteriormente, ou através de outras formas como por exemplo *descontos para clientes especiais*, ou *prazos de pagamentos diferenciados*.

Por outro lado, de um ponto de vista puramente platônico, o modelo proposto é mais eficiente, pois é capaz de atingir a solução ótima em aproximadamente um terço do número de iterações necessárias ao modelo comparativo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Akink, Umit [1983], An Algorithm for the knapsack Problem, IIE Transactions 15 (1983) 31-36.

Bartels, Richard H. [1971], A Stabilization of the Simplex Method, Numer. Math. 16 (1971) 414-434.

Becker, Ernest [1973], The Denial of Death, MacMillan, New York, 1973.

Dreyfus, Stuart E. [1977], The Art and Theory of Dynamic Programming, Academic Press, New York, 1977.

Dyckhoff, Harald [1981], A New Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem, Operations Research 29 (1981) 1092-1104.

Gilmore, P. C. e Gomory, R. E. [1961], A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem, Operations Research 9 (1961) 849-859.

Gilmore, P. C. e Gomory, R. E. [1963], A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem-Part II, Operations Research 11 (1963) 863-888.

Haessler, Robert W. [1971], An Heuristic Programming Solution to a Non-Linear Cutting Stock Problem, Management Science 17 (1971) B793-B802.

Haessler, Robert W. [1980], A note on Computational Modifications to the Gilmore-Gomory Cutting Stock Algorithm, Operations Research 28 (1980) 1001-1005.

Hayek, Friederich A. Von [1945], The Use of Knowledge in Society, American Economic Review, XXXV (1945) 519-530.

Kantorovich, L. V. [1960 - reedição], Mathematical Methods of Organizing and Planning Production, Management Science 6 (1960) 366-422.

Lasdon, Leon S. [1972], Optimization Theory for Large Systems, MacMillan, New York, 1970.

Leland, Hayne E. [1972], Why Profit Maximization May Be a Better Assumption Than You Think, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences - Stanford University - Report 80, Stanford, 1972.

Marconi, R. [1971], Heuristic Method for Minimizing Trim Loss in the Paper Industry, IBM Technical Disclosure Bulletin 14 (1971) 325-327.

Paull, A. E. e Wallter J. R. [1955], The Trim Problem: An Application of Linear Programming to the Manufacture of Newsprint Paper, Econometrica 23 (1955) 336.

Pierce, J. F. [1964], Some Large Scale Production Scheduling Problems in The Paper Industry, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1964.

Pierce, J. F. [1966], On the Solution of Integer Cutting Stock Problems by Combinatorial Programming-Part I, IBM Technical Report 36.Y02, Cambridge Scientific Center, Cambridge, 1966.

Roodman Gary M. [1986], Near-Optimal Solutions to One Dimensional Cutting Stock Problems, Comput. & Ops. Res. 13 (1986) 713-719.

Stainton, R. S. [1977], The Cutting Stock Problem for the Stockholder of Steel Reinforcement Bars, Operational Res. Quart. 28 (1977) 139-149.

Sumichrast, Robert T. [1986], A New Cutting Stock Heuristic for Scheduling Production, Comput. & Ops. Res. 13 (1986) 403-410.

Tilanus C. B. e Gerhardt C. [1976], An Application of Cutting Stock in the Steel Industry, Operational Research 75 (1976) 669-675.