

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Modelagem de dinâmicas sociais interagentes em redes complexas**

**Aruane Mello Pineda**

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-CCMC)



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Aruane Mello Pineda**

## Modelagem de dinâmicas sociais interagentes em redes complexas

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Francisco Aparecido Rodrigues

**USP – São Carlos**  
**Dezembro de 2023**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M527m Mello Pineda, Aruane  
Modelagem de dinâmicas sociais interagentes em  
redes complexa / Aruane Mello Pineda; orientador  
Francisco Aparecido Rodrigues. -- São Carlos, 2023.  
100 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em  
Ciências de Computação e Matemática Computacional) --  
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,  
Universidade de São Paulo, 2023.

1. Q-votante. 2. Modelo de Axelrod. 3. Modelo de  
Rumor. 4. Sistemas Complexos. 5. Sistemas Sociais.  
I. Aparecido Rodrigues, Francisco, orient. II.  
Título.

**Aruane Mello Pineda**

# Modeling interacting social dynamics in complex networks

Doctoral dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Computer Science and Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Francisco Aparecido Rodrigues

**USP – São Carlos**  
**December 2023**



*O negacionismo pode custar vidas, mas a ciência é a luz que guia o caminho da verdade e, consequentemente, as salvam.*

*Este trabalho é dedicado ao meu sogro, Claudio José Pertinhez, que na luta contra a COVID-19 não sobreviveu.*



# AGRADECIMENTOS

---

---

Gostaria de expressar meus agradecimentos a Deus por todas as bênçãos que recebo na vida. Além disso, agradeço a todos que contribuíram para a conclusão deste trabalho e realização deste sonho. Em especial, quero agradecer a minha família: meus pais, Dora e Antônio, minha irmã Fernanda, e meu namorado Claudio, que tem sido super paciente ao meu lado durante toda uma década.

Também quero expressar minha gratidão ao meu orientador, Dr. Francisco A. Rodrigues, pela oportunidade de pesquisa, orientação e compreensão durante este período. Definitivamente, ter um orientador como Francisco, que é sempre muito paciente, faz toda a diferença no doutorado. Agradeço também ao meu orientador no exterior, Dr. Colm Connaughton, pela oportunidade de realizar um ano do meu doutorado em Coventry, na Inglaterra.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão à Universidade de São Paulo (USP) pelo apoio e pela infraestrutura excepcional que proporcionaram um ambiente propício para a realização deste projeto de pesquisa. A minha pesquisa foi totalmente desenvolvida com o suporte dos recursos computacionais disponibilizados pelo Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (CeMEAI), um centro cujo financiamento foi possível graças ao suporte da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), sob o processo 2013/07375-0. Além disso, gostaria de estender meus agradecimentos ao dedicado funcionário Leonardo, cuja assistência e orientação na utilização do cluster foram fundamentais para o sucesso desta tese.

Não posso deixar de agradecer ao meu colega Sandro M. Reia, por toda a ajuda, paciência, ensinamentos e reuniões que contribuíram enormemente para o meu crescimento profissional e pessoal. Sou grata também ao Professor Dr. José F. Fontanari pelas correções e sugestões para publicação de artigos oriundos dessa tese, e à minha colega Caroline L. Alves, por todos os projetos e artigos desenvolvidos na área de predição e classificação de doenças.

Por fim, gostaria de agradecer à banca pelas sugestões para o aprimoramento deste trabalho, bem como à CAPES e à FAPESP pelo financiamento desta pesquisa. O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Além disso, foi financiado pela Bolsa Regular da FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), sob o número de processo 2019/22277-0, e pela Bolsa de Estágio de Pesquisa no Exterior (BEPE), com o número de processo 2021/13843-2. A FAPESP desempenhou um papel fundamental no suporte à pesquisa, tornando possível a realização deste estudo.



*“Talento é 1% inspiração  
e 99% transpiração.”  
(Thomas Edison)*



# RESUMO

PINEDA, A. M. **Modelagem de dinâmicas sociais interagentes em redes complexas**. 2023. 100 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Nesta tese, investigamos dinâmicas sociais complexas e sua relação com a difusão de informações e a polarização. No primeiro estudo, aplicamos algoritmos de aprendizado de máquina para prever o tempo de consenso ( $Y_i$ ) e a frequência de mudanças de opinião ( $C_i$ ) em redes complexas utilizando o modelo  $Q$ -votantes. Identificamos que o coeficiente de agrupamento ( $C$ ) e a centralidade da informação ( $IC$ ) são medidas topológicas cruciais para essas previsões, destacando a importância da estrutura da rede na dinâmica de polarização e outros padrões em sistemas sociais. No segundo estudo, exploramos como a heterogeneidade cultural afeta a propagação de rumores em sociedades de agentes interativos. Descobrimos que a heterogeneidade cultural pode limitar a difusão de informações em sociedades maiores, resultando em uma limitação natural na propagação de notícias verdadeiras ou falsas.

Em ambos os estudos, a compreensão da complexa interação entre a estrutura da rede e a dinâmica social é fundamental, revelando como a heterogeneidade cultural e a topologia da rede desempenham papéis críticos na disseminação de informações e na formação de opiniões. Essas pesquisas contribuem para uma compreensão mais profunda dos mecanismos subjacentes à polarização e à dinâmica em sociedades contemporâneas. É relevante salientar que, nesta tese, em consequência dos nossos resultados, que foram relacionados à teoria de Everett Rogers sobre inovações, os vocábulos inovações, informações, rumores e boatos são utilizados como sinônimos.

**Palavras-chave:**  $Q$ -votantes, Polarização, Aprendizado de Máquina, Modelo de Axelrod, Modelo de Rumor, Sistemas Complexos, Sistemas Sociais, Modelagem Baseada em Agentes.



# ABSTRACT

PINEDA, A. M. **Modeling interacting social dynamics in complex networks**. 2023. 100 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

In this thesis, we investigate complex social dynamics and their relationship with information diffusion and polarization. In the first study, we apply machine learning algorithms to predict consensus time and the frequency of opinion changes in complex networks using the  $Q$ -voter model. We identify that the clustering coefficient ( $C$ ) and information centrality ( $IC$ ) are crucial factors for these predictions, emphasizing the importance of network structure in the dynamics of polarization and other patterns in social systems. In the second study, we explore how cultural heterogeneity impacts the spread of rumors in societies of interactive agents. We find that cultural heterogeneity can limit information diffusion in larger societies, resulting in a natural constraint on the spread of both true and false news.

In both studies, understanding the complex interplay between network structure and social dynamics is essential, revealing how cultural heterogeneity and network topology play critical roles in information dissemination and opinion formation. These research findings contribute to a deeper understanding of the underlying mechanisms of polarization and dynamics in contemporary societies. It is worth noting that, in this thesis, as a result of our findings, which were related to Everett Rogers' theory on innovations, the terms innovations, information, rumors, and gossip are used interchangeably.

**Keywords:**  $Q$ -voter, Polarization, Machine Learning, Axelrod Model, Rumor Model, Complex Systems, Social Systems, Agent-Based Modeling.



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

---

- Figura 1 – Ilustração do modelo de votação  $Q = 2$ . Todos os agentes têm uma opinião binária, representada aqui pelas cores vermelha e azul. Suponha que um agente seja da cor vermelha, então sua cor poderá ser alterada com base na seguinte resposta social: a probabilidade de não conformidade, ou seja, a relutância em ceder à pressão do grupo, denotada como  $\epsilon$ . Ou conformidade ( $1-\epsilon$ ), que é a probabilidade de agir como seus vizinhos. Se os vizinhos tiverem um consenso de opinião, ou seja, todos eles têm a mesma opinião, o agente mudará para a cor respectiva. Se não houver consenso entre os vizinhos, com uma probabilidade  $\beta$ , o agente mudará para a cor azul, e com uma probabilidade de  $1-\beta$ , ele manterá sua cor vermelha. . . . . 37
- Figura 2 – Simulação do modelo  $Q$ -votantes com  $N=25$  agentes. O eixo x varia  $Q$  (vizinhos influenciando), e o eixo y mostra o tempo médio até o modelo atingir o consenso ( $Y_i$ ). . . . . 38
- Figura 3 – Ilustração da dinâmica de propagação de rumores em uma rede de grade quadrada com dimensões  $L = 20$  ou  $N = 400$ . Nesta simulação, a taxa de infecção foi configurada como 0,5, representando a probabilidade de um indivíduo suscetível se tornar infectado ao interagir com um vizinho infectado. A taxa de recuperação foi estabelecida em 0,01, indicando a probabilidade de um indivíduo infectado se recuperar e tornar-se recuperado. As curvas no gráfico representam as proporções médias de nós suscetíveis (curva verde), infectados (curva vermelha) e recuperados (curva azul) em relação ao tempo. A dinâmica começa com todos os indivíduos suscetíveis, e ao longo do tempo, o rumor se espalha pela rede até que todos se tornem recuperados, marcando o critério de parada da simulação. . . . . 39
- Figura 4 – Ilustração da relação entre a fração de indivíduos recuperados ( $\langle R \rangle$ ) e os parâmetros  $\lambda$  e  $\alpha$  em uma rede quadrada de lado  $L = 30$ . O parâmetro  $\lambda$  representa a probabilidade de transmissão do rumor, enquanto  $\alpha$  indica a probabilidade de remissão do rumor. É notável que a fração de indivíduos recuperados ( $\langle R \rangle$ ) aumenta consistentemente à medida que a razão  $\frac{\lambda}{\alpha}$  é incrementada. . . . . 40
- Figura 5 – Figuras retiradas de (REIA, 2015). . . . . 42

Figura 6 – Ilustração das simulações computacionais do tamanho médio do maior *cluster* ( $\langle S \rangle$ ) em função do número de traços culturais ou características do agente ( $Q$  variando de 1 a 50), para valores fixos de  $F$  igual a 2 e 5, respectivamente. As simulações foram realizadas em uma rede quadrada bidimensional com  $L = 10$ . Os resultados indicam como o tamanho do maior *cluster* varia com o número de traços culturais e características dos agentes em diferentes regimes culturais. . . . . 43

Figura 7 – Ilustração das simulações computacionais do modelo de Axelrod em uma rede bidimensional com  $L = 10$ , para  $F = 3$ . A curva ilustra a relação entre o tamanho médio do maior *cluster*  $\langle S \rangle$  e o número de traços culturais ou características do agente ( $Q$ ), variando de 1 a 50. Observa-se que para valores pequenos de  $Q$  o tamanho do *cluster* é maior, e à medida que  $Q$  aumenta, o tamanho do *cluster* diminui, indicando a transição da fase multicultural para monocultural. A figura também apresenta o cálculo da maior variância  $\sigma^2$  em relação a diferentes valores de  $Q$ , para  $L = 10$ . A partir da curva obtida, é possível identificar o valor do  $Q$  crítico, que é o valor de maior variância. Nessa figura, é possível observar que o valor de  $Q_c$  é igual a 9. Essa informação é importante para entender a transição de fase do modelo de Axelrod, que ocorre quando  $Q$  atinge esse valor crítico. . . . . 44

Figura 8 – O problema das sete pontes de Königsberg representado por meio de um grafo utilizando a formulação de Euler. Fonte: (RODRIGUES, 2007). . . . . 46

Figura 9 – Redes complexas podem ser representadas por matrizes de adjacência. Em (a) temos uma rede não-dirigida e em (b) uma rede dirigida. No caso (a), os elementos  $a_{ij}$  da matriz são iguais a 1 se há uma ligação entre os vértices  $i$  e  $j$  e iguais a zero, caso contrário. Já no caso (b), os elementos da matriz  $a_{ij}$  são iguais a 1 se existe uma conexão dirigida do vértice  $i$  para o vértice  $j$ . . . . . 47

Figura 10 – *a)* Geração de redes complexas: Nesta etapa inicial, criamos redes complexas para análise. Neste exemplo ilustrativo, geramos quatro redes rotuladas como  $i = 1$ ,  $i = 2$ ,  $i = 3$  e  $i = 4$ , cada uma consistindo de um total de 10 nós. Vale a pena observar que em nossos resultados, geramos um conjunto de 800 redes complexas. *b<sub>1</sub>)* Cálculo de medidas topológicas: Nesta etapa, calculamos diversas medidas topológicas para todas as redes complexas previamente geradas. No entanto, para simplificar esta ilustração, focamos em uma única medida: Centralidade de Intermediação (BC). Aplicamos esse cálculo a uma das quatro redes, especificamente a rede  $i = 4$ . *b<sub>2</sub>)* Implementação do modelo  $Q$ -votantes: Nesta fase, implementamos o modelo  $Q$ -votantes em cada uma das redes complexas usando três métodos distintos de inicialização representados por círculos coloridos: alto grau (roxo), baixo grau (verde) e seleção aleatória (laranja). Esta análise é realizada tanto para  $Y_i$  (tempo de consenso) quanto para  $C_i$  (frequência de mudanças de opinião). Para simplificação, selecionamos apenas a rede  $i = 4$  para ilustrar esse processo. *c)* Criação do conjunto de dados: Nesta etapa, construímos o conjunto de dados que contém informações de todas as redes geradas. Cada linha da tabela representa uma rede específica, e as colunas contêm os cálculos de medidas topológicas para essas redes complexas. Além disso, incluímos os valores correspondentes aos métodos de inicialização (alto grau, baixo grau e seleção aleatória) em relação a  $Y_i$  e  $C_i$ . Para fins de ilustração, apresentamos informações apenas para a rede  $i = 4$ , incluindo BC e  $Y_i$ . No entanto, nos resultados completo, nossa tabela abrange 800 linhas e 15 colunas, compreendendo nove medidas topológicas, juntamente com três variações de métodos de inicialização para  $Y_i$  e  $C_i$ . *d)* Aplicação de algoritmos de aprendizado de máquina: Finalmente, com base nas informações coletadas, aplicamos algoritmos de aprendizado de máquina para realizar análises adicionais e obter insights significativos e estatísticas resumidas a partir dos dados gerados nas etapas anteriores. Figura adaptada de (PINEDA *et al.*, 2023a). . . . . 51

Figura 11 – Cada boxplot representa a distribuição dos valores de R2 ajustado para os respectivos algoritmos de aprendizado de máquina (LASSO, RF, XGBoost e MLP), considerando diferentes métodos de inicialização (alto grau, baixo grau e seleção aleatória) para prever  $Y_i$ . Entre os algoritmos, a caixa 2 e a caixa 3 correspondem aos algoritmos RF e XGBoost, respectivamente, e mostram os valores mais altos de R2 ajustado. Isso indica que, em média, os algoritmos RF e XGBoost superam os outros algoritmos (LASSO e MLP) em termos de precisão preditiva. Figura de (PINEDA *et al.*, 2023a). . . . . 53

Figura 12 – Cada boxplot representa a distribuição dos valores de R2 ajustado para o respectivo algoritmo de aprendizado de máquina (LASSO, RF e XGBoost), considerando diferentes métodos de inicialização (alto grau, baixo grau e seleção aleatória) para prever  $C_i$ . A caixa 1, que corresponde ao algoritmo LASSO, é a mais alta. Isso indica que, em média, os valores de R2 ajustado para o algoritmo LASSO são mais altos em comparação com os outros algoritmos (RF e XGBoost) considerados. Figura de (PINEDA *et al.*, 2023a). 54

Figura 13 – Ilustração mostrando a relação entre seus valores originais correspondentes ( $y$ ) e valores previstos ( $\hat{y}$ ) para (A) Tempo e (B) Frequência em relação à seleção de agentes com alto grau (pontos roxos), baixo grau (pontos verdes) e seleção aleatória (pontos laranjas) para a inicialização da dinâmica. Esta análise foi conduzida usando o algoritmo RF. Esta análise foi conduzida usando o algoritmo RF. Figura de (PINEDA *et al.*, 2023a). . . . . 55

Figura 14 – A análise das características mais cruciais, determinadas com base na importância média de medidas complexas de rede, foi conduzida para prever tanto (A)  $Y_i$  quanto (B)  $C_i$  usando vários métodos de inicialização. Esses métodos abrangiam a seleção de agentes com o maior grau (barras roxas), o menor grau (barras verdes) e seleção aleatória (barras laranjas) para iniciar a dinâmica. Notavelmente, o coeficiente de agrupamento (C) e a centralidade da informação (IC) consistentemente emergiram como as duas medidas mais significativas em ambos os cenários. Esta análise foi realizada empregando o algoritmo RF. Figura de (PINEDA *et al.*, 2023a). . . . . 56

Figura 15 – Mecanismos de assimilação cultural e propagação de boatos. Um agente  $i$  participa da dinâmica cultural com probabilidade  $p$  e na propagação do boato com probabilidade  $1 - p$ . Na dinâmica cultural, o agente  $i$  seleciona um vizinho aleatório  $j$  e assimila uma característica divergente com probabilidade  $P_{ij}$ . Na dinâmica de boatos, parcialmente representada aqui, um agente propagador  $i$  transmite o boato para um de seus vizinhos ignorantes  $j$  com probabilidade  $\lambda P_{ij}$ . Figura de (PINEDA *et al.*, 2023b). . . . . 59

Figura 16 – Exemplos de configurações absorventes do modelo acoplado. O painel superior mostra os estados culturais iniciais (a) e finais (b) dos agentes para $F = 3$ e $Q = 4$ . Cada cor corresponde a um vetor cultural, e podemos observar o efeito ordenador da dinâmica cultural sobre a configuração inicial desordenada. O painel (c) mostra que todos os agentes ficaram recuperados (azul) no estado final. O painel inferior mostra os estados culturais iniciais (d) e finais (e) dos agentes para $F = 3$ e $Q = 14$ . Vemos que o efeito de ordem da dinâmica cultural não é suficientemente forte para homogeneizar os estados culturais dos agentes. Curiosamente, o painel (f) mostra que o boato se espalhou entre agentes pertencentes a diferentes domínios culturais no estado estacionário. Em ambas as situações, $L = 10$ , $\lambda = 1,0$ , $\alpha = 0,01$ e $p = 0,1$ . Figura de (PINEDA <i>et al.</i> , 2023b).	60
Figura 17 –	62
Figura 18 – a) Fração de recuperados $\langle R \rangle$ versus o número de estados $Q$ ; b) Variância ( $\sigma^2$ ) versus o número de estados $Q$ ; c) Fração de recuperados $\langle R \rangle$ versus $\frac{1}{L}$ , onde $L$ é o tamanho das redes quadradas em estudo. Para todos os três gráficos, $p$ foi fixado em 0,00.	64
Figura 19 – a) Fração de recuperados $\langle R \rangle$ versus o número de estados $Q$ ; b) Variância ( $\sigma^2$ ) versus o número de estados $Q$ ; c) Fração de recuperados $\langle R \rangle$ versus $\frac{1}{L}$ , onde $L$ é o tamanho das redes quadradas em estudo. Para todos os três gráficos, $p$ foi fixado em 1,00.	66
Figura 20 – a) Fração de recuperados $\langle R \rangle$ versus o número de estados $Q$ ; b) Variância ( $\sigma^2$ ) versus o número de estados $Q$ ; c) Fração de recuperados $\langle R \rangle$ versus $\frac{1}{L}$ , onde $L$ é o tamanho das redes quadradas em estudo. Para todos os três gráficos, $p$ foi fixado em 0,50.	68
Figura 21 –	70
Figura 22 – Os painéis superior e inferior à esquerda mostram a média e a variância, respectivamente, dos parâmetros de ordem $\langle R \rangle$ e $\langle S \rangle$ em função do parâmetro de controle $Q$ , que controla o nível de heterogeneidade no sistema, em um sistema com $L = 10$ . Os painéis superior e inferior central mostram a média e a variância, respectivamente, dos parâmetros de ordem $\langle R \rangle$ e $\langle S \rangle$ em função do parâmetro de controle $Q$ em um sistema com $L = 20$ , e os painéis superior e inferior à direita mostram a média e a variância, respectivamente, dos parâmetros de ordem $\langle R \rangle$ e $\langle S \rangle$ em função do parâmetro de controle $Q$ em um sistema com $L = 30$ . Os resultados foram obtidos para o modelo com $F = 3$ , $p = 0,50$ , $\lambda = 1,00$ e $\alpha = 0,01$ .	72

Figura 23 – Os painéis superior e inferior à esquerda mostram a média e a variância, respectivamente, dos parâmetros de ordem $\langle R \rangle$ e $\langle S \rangle$ em função do parâmetro de controle $Q$ , em um sistema com $L = 50$ com $F = 3$ , $p = 0,50$ , $\lambda = 1,00$ e $\alpha = 0,01$ . Os painéis superior e inferior à direita mostram a média e a variância, respectivamente, dos parâmetros de ordem $\langle R \rangle$ e $\langle S \rangle$ em função do parâmetro de controle $Q$ , em um sistema com $L = 50$ , com $F = 3$ , $p = 0,50$ , $\lambda = 1,00$ e $\alpha = 0,0001$ . . . . .	73
Figura 24 – Ilustração de uma rede de Watts-Strogatz com $N = 20$ , $k = 2$ e $p_w = 0$ , $p_w = 0,1$ e $p_w = 1$ , respectivamente. . . . .	76
Figura 25 – Os quatro painéis mostram os parâmetros de ordem $\langle R \rangle$ e $\langle S \rangle$ em função de $Q$ para diferentes valores de $p_w$ (0, 0,10, 0,50 e 1,0) em uma rede de Watts-Strogatz com $N = 50$ , $F = 3$ , $p = 0,50$ , $\lambda = 1,00$ e $\alpha = 0,01$ . . . . .	77
Figura 26 – Os quatro painéis mostram os parâmetros de ordem $\langle S \rangle$ e $\langle R \rangle$ em função de $Q$ para diferentes valores de $p_w$ (0, 0,10, 0,50 e 1,0) em uma rede de Watts-Strogatz com $N = 100$ , $F = 3$ , $p = 0,50$ , $\lambda = 1,00$ e $\alpha = 0,01$ . . . . .	78
Figura 27 – Os quatro painéis mostram os parâmetros de ordem $\langle S \rangle$ e $\langle R \rangle$ em função de $Q$ para diferentes valores de $p_w$ (0, 0,10, 0,50 e 1,0) em uma rede de Watts-Strogatz com $N = 200$ , $F = 3$ , $p = 0,50$ , $\lambda = 1,00$ e $\alpha = 0,01$ . . . . .	79
Figura 28 – O parâmetro $p_w$ das redes de Watts-Strogatz é ilustrado em relação aos valores das áreas $\langle R \rangle - \langle S \rangle$ para redes de tamanho $N=50$ (curva pontilhada roxa), $N=100$ (curva pontilhada vermelha) e $N=200$ (curva pontilhada verde) com $k = 4$ vizinhos mais próximos. Os parâmetros do modelo acoplado foram fixados em $F = 3$ , $p = 0,50$ , $\lambda = 1,00$ , e $\alpha = 0,01$ . . . . .	80
Figura 29 – Ilustração do parâmetro $p_w$ das redes de Watts-Strogatz em relação aos valores das áreas $\langle R \rangle - \langle S \rangle$ para uma rede de tamanho $N = 100$ para $k = 4$ (curva pontilhada vermelha) e $k = 8$ (curva pontilhada laranjada) vizinhos mais próximos. Os parâmetros do modelo acoplado foram fixados em $F = 3$ , $p = 0,50$ , $\lambda = 1,00$ , e $\alpha = 0,01$ . . . . .	81
Figura 30 – Os quatro painéis ilustram a variação dos parâmetros de ordem, $\langle R \rangle$ e $\langle S \rangle$ , em relação ao valor de $Q$ , para diferentes valores do campo estático $p_{cee}$ (0,20, 0,40, 0,80 e 1,0), em uma rede com dimensões de lado $L = 10$ , $F = 3$ , $p = 0,50$ , $\lambda = 1,00$ e $\alpha = 0,01$ . . . . .	85
Figura 31 – Os quatro painéis ilustram a variação dos parâmetros de ordem, $\langle R \rangle$ e $\langle S \rangle$ , em relação ao valor de $Q$ , para diferentes valores do campo estático $p_{cee}$ (0,20, 0,40, 0,80 e 1,0), em uma rede de Watts-Strogatz com dimensões $N = 50$ , $F = 3$ , $p = 0,50$ , $p_w = 0,50$ , $\lambda = 1,00$ e $\alpha = 0,01$ . . . . .	86

Figura 32 – Os quatro painéis ilustram a variação dos parâmetros de ordem,  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$ , em relação ao valor de  $Q$ , para diferentes valores do campo estático  $p_{cee}$  (0,20, 0,40, 0,80 e 1,0), em uma rede de Watts-Strogatz com dimensões  $N = 100$ ,  $F = 3$ ,  $p = 0,50$ ,  $p_w = 0,50$ ,  $\lambda = 1,00$  e  $\alpha = 0,01$ . . . . . 87

Figura 33 – A probabilidade de atualização do campo externo estático,  $p_{cee}$ , é ilustrada em relação aos valores das áreas  $\langle R \rangle - \langle S \rangle$  para redes de Watts-Strogatz de tamanho  $N=50$  (curva pontilhada roxa) e  $N=100$  (curva pontilhada vermelha) com  $k = 4$  vizinhos mais próximos e  $p_w = 0,50$ . Os parâmetros do modelo acoplado foram fixados em  $F = 3$ ,  $p = 0,50$ ,  $\lambda = 1,00$  e  $\alpha = 0,01$ . . . . . 88



# LISTA DE TABELAS

---

---

Tabela 1 – Parâmetros e valores usados no modelo $Q$ -votantes. . . . .	46
Tabela 2 – Medidas de redes complexas usadas aqui. . . . .	49
Tabela 3 – Hiperparâmetros para cada algoritmo de aprendizado de máquina otimizado pelo otimizador de busca em grade. . . . .	50
Tabela 4 – Parâmetros utilizados no modelo e seus respectivos significados . . . . .	60



# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	27
2	MODELOS DE DINÂMICAS SOCIAL . . . . .	35
2.1	Q-votantes . . . . .	35
2.2	Propagação de rumor . . . . .	36
2.3	Modelo de Axelrod . . . . .	38
3	PREDIÇÃO BASEADA EM APRENDIZADO DE MÁQUINA DO MODELO Q-VOTANTES . . . . .	45
3.0.1	<i>Redes Complexas</i> . . . . .	45
3.0.2	<i>Medidas de Rede</i> . . . . .	47
3.0.3	<i>Algoritmos de Aprendizado de Máquina</i> . . . . .	49
3.1	Resultados . . . . .	50
4	MODELO ACOPLADO . . . . .	57
4.0.1	<i>Axelrod</i> . . . . .	57
4.0.2	<i>Rumor</i> . . . . .	58
4.0.3	<i>Simulações e Discussões</i> . . . . .	59
5	CONECTIVIDADE . . . . .	75
5.0.1	<i>O efeito da conectividade nas redes de Watts-Strogatz</i> . . . . .	75
6	CAMPO EXTERNO ESTÁTICO . . . . .	83
6.1	Campo Externo Estático . . . . .	83
7	CONCLUSÕES . . . . .	89
	REFERÊNCIAS . . . . .	93



---

## INTRODUÇÃO

---

Com a proliferação das redes sociais online, o contínuo avanço da tecnologia da computação e a crescente disponibilidade de recursos, surge uma necessidade premente de desenvolver modelos e métodos matemáticos capazes de prever comportamentos coletivos e regular a disseminação de informações (CASTELLANO; FORTUNATO; LORETO, 2009; BANKES, 2002; MACAL; NORTH, 2005). Isso ocorre porque a dinâmica das opiniões e a propagação de informações são fenômenos cruciais que permeiam inúmeros aspectos da sociedade moderna. À medida que a comunicação se globaliza e instantaneamente conecta pessoas em todo o mundo, compreender como as opiniões se formam e se disseminam torna-se um imperativo fundamental. Além disso, as interações complexas entre agentes, grupos e instituições podem levar à polarização social, na qual os agentes desenvolvem opiniões cada vez mais extremas e demonstram uma tolerância diminuída às visões opostas, o que pode resultar em divisões na sociedade. Estudos associaram o fenômeno a resultados negativos em contextos políticos, como visto nas recentes eleições tanto no Brasil quanto nos Estados Unidos (VICARIO *et al.*, 2016; FLAXMAN; GOEL; RAO, 2016; BARBERÁ *et al.*, 2015; CONOVER *et al.*, 2011). No Brasil, a polarização intensificada culminou em um evento significativo em 8 de janeiro de 2023, quando importantes instituições em Brasília, a capital do Brasil, foram invadidas. Esse evento foi resultado de tensões crescentes decorrentes do discurso político polarizado. O Supremo Tribunal Federal, o edifício do Congresso Nacional e o Palácio do Planalto estavam entre as instituições visadas. Da mesma forma, os Estados Unidos também enfrentaram seus próprios desafios associados à polarização. Um incidente notável ocorreu em 6 de janeiro de 2021, quando uma multidão invadiu o Capitólio dos Estados Unidos na tentativa de reverter os resultados das eleições presidenciais.

Modelos de dinâmicas sociais têm sido utilizados por cientistas para estudar uma ampla variedade de fenômenos sociais, desde o estudo de epidemias e, posteriormente, no estudo da propagação de informações, como o espalhamento de rumores (KEELING; ROHANI, 2011; DALEY; KENDALL, 1964). Além disso, os modelos de dinâmica social têm sido utilizados para estudar como as opiniões e atitudes das pessoas são formadas e influenciadas pelas interações

sociais (AXELROD, 1997; DEFFUANT *et al.*, 2000; HEGSELMANN; KRAUSE, 2002). Esses modelos ajudaram a esclarecer como as relações sociais podem levar à polarização e à formação de grupos de opinião (CASTELLANO; FORTUNATO; LORETO, 2009). A polarização, em particular, é um fenômeno de interesse, pois esses modelos têm demonstrado como as interações sociais podem levar a uma divisão mais acentuada das opiniões em uma sociedade. Outra aplicação importante dos modelos de dinâmica social é no estudo da tomada de decisões coletivas (WEIDLICH; HAAG, 1998; HEGSELMANN; KRAUSE, 2002). Esses modelos exploram como as preferências e opiniões individuais podem influenciar o resultado final de um processo de tomada de decisão e como a comunicação e o debate podem levar a mudanças nas opiniões e, portanto, no resultado final da decisão.

Castellano *et al.* propuseram em (CASTELLANO; FORTUNATO; LORETO, 2009) uma revisão abrangente dos principais modelos de dinâmicas sociais estudados na física estatística. Cada um desses modelos tem como objetivo descrever um aspecto diferente da dinâmica social, desde a difusão de opiniões e informação até a formação de redes sociais e evolução cultural. Esses modelos foram desenvolvidos dentro do campo da física estatística e buscam encontrar padrões e leis que governam o comportamento coletivo em sociedades humanas e outros sistemas complexos.

O primeiro deles é o modelo de Ising, proposto em 1925 por Ernst Ising para descrever o comportamento magnético de um sólido (ISING, 1925). Embora o modelo de Ising tenha sido inicialmente desenvolvido para entender sistemas magnéticos, ele foi posteriormente utilizado para estudar uma ampla gama de fenômenos físicos e não físicos, incluindo a dinâmica social. Esse modelo descreve a dinâmica de um sistema magnético em equilíbrio térmico. Cada ímã no sistema tem um spin, que pode estar virado para cima ou para baixo. Os spins interagem com seus vizinhos e o sistema evolui para um estado de equilíbrio.

Em 1927 os matemáticos Kermack e McKendrick propuseram o modelo de espalhamento de epidemias (SIR) (KERMACK; MCKENDRICK, 1927). Esse modelo é considerado um dos primeiros modelos matemáticos para a propagação de doenças infecciosas e, embora o modelo se enquadre na categoria de modelos de dinâmica de populações, a propagação de doenças infecciosas pode ser influenciada por fatores sociais, como comportamento humano e interações sociais, e, portanto, pode ser visto como um exemplo de dinâmica social. O modelo SIR descreve a propagação de doenças infecciosas em uma população e divide a população em três compartimentos: suscetíveis, infectados e recuperados.

Um outro modelo bastante conhecido é o modelo de percolação (BROADBENT; HAMMERSLEY, 1957) que foi desenvolvido por matemáticos e físicos para estudar fenômenos como a condutividade elétrica de materiais. O modelo de percolação foi proposto em 1957 e descreve a conectividade em uma rede. Cada nó pode ser ativo ou inativo e a ativação dos nós pode ser determinada por um processo aleatório. Inicialmente, alguns nós são escolhidos aleatoriamente para serem ativados. Em seguida, o modelo examina as conexões entre os nós e decide se os nós

vizinhos devem ser ativados ou não. O processo de ativação continua até que todos os nós que podem ser ativados sejam ativados ou até que um determinado número de iterações seja atingido.

O modelo padrão para propagação de rumor foi proposto há algumas décadas por Daley e Kendall (DALEY; KENDALL, 1964), chamado modelo DK. Este modelo possui três estados, denotados por I (ignorante), S (informantes, do inglês spreader) e R (contidos, do inglês stifler). Os ignorantes são aqueles indivíduos que não ouviram o rumor e são susceptíveis à informação. Os espalhadores são aqueles que já ouviram o rumor e estão espalhando o mesmo. Finalmente, contidos são aqueles que conhecem o rumor, mas não o espalham mais, ou seja, já perderam interesse por tal rumor. O processo de propagação evolui pelo contato entre informantes e ignorantes. Quando um ignorante encontra um informante ele passa a ser um informante a uma taxa  $\lambda$ . O decaimento deste ocorre por meio do esquecimento ou pela perda do interesse no rumor, assim os informantes tornam-se contidos com uma probabilidade  $\alpha$  se estiverem em contato com outros informantes ou contidos. Esta dinâmica é semelhante à propagação de epidemias SIR, porém, neste caso a recuperação é substituída pela perda de interesse no rumor e isto não ocorre de maneira espontânea, mas sim pelo contato entre informante e outros informantes ou informantes e indivíduos contidos.

O modelo de Schelling é considerado um dos primeiros modelos de dinâmica social a ser desenvolvido (SCHELLING, 1971). Ele foi proposto por Thomas C. Schelling em 1971 e teve como objetivo explicar o fenômeno da segregação residencial em cidades americanas. O modelo mostrou que a segregação pode surgir a partir de interações sociais simples, mesmo quando os indivíduos não têm preferências explícitas por viver com pessoas de sua própria raça ou etnia. Esse modelo descreve a segregação em uma população. Os indivíduos são colocados em uma grade e têm preferências por viver em vizinhanças com pessoas semelhantes. Quando a proporção de pessoas diferentes em sua vizinhança excede um certo limiar, os indivíduos se mudam para uma vizinhança mais homogênea.

Em 1975 um modelo clássico de dinâmica social foi proposto por Holley e Liggett, o modelo votante (HOLLEY; LIGGETT, 1975). Esse modelo descreve como as opiniões evoluem em uma comunidade de indivíduos. Os indivíduos podem ter uma opinião binária (por exemplo, sim ou não) e a interação social é modelada através de votações locais.

O modelo de Axelrod é uma proposta de Robert Axelrod, apresentada em 1997. Ele utiliza uma rede quadrada de lado  $L$  para posicionar os agentes, que permanecem em locais fixos (AXELROD, 1997). A ideia central é que, quanto mais semelhante um agente é a um vizinho, maior a probabilidade de que esse agente adote uma das características culturais do vizinho. Diferentemente dos modelos anteriores de influência social e mudança cultural, que tratam as características uma de cada vez, o modelo proposto por Axelrod leva em conta a interação entre diferentes características.

O modelo de Sznajd (SZNAJD-WERON; SZNAJD, 2000) foi proposto em 2000 por Katarzyna Sznajd-Weron e Józef Sznajd. Ele é um modelo de dinâmica social baseado em

agentes que descreve a difusão de opiniões em uma rede. O modelo consiste em uma rede em que cada nó representa um indivíduo com uma opinião binária (+1 ou -1). Em cada etapa, dois nós vizinhos são escolhidos aleatoriamente e, se eles compartilham a mesma opinião, seus vizinhos também adotam essa opinião. Se eles têm opiniões diferentes, nada acontece. O modelo pode ser visto como uma variação do modelo de Ising, com a diferença de que a interação não é magnética, mas é baseada em opiniões.

Introduzido em (CASTELLANO; MUÑOZ; PASTOR-SATORRAS, 2009), o modelo  $Q$ -votantes apresenta uma abordagem para simular decisões coletivas entre grupos de indivíduos. Nesse modelo, cada agente adota a opinião de um de seus  $Q$  vizinhos, escolhidos aleatoriamente. Esses  $Q$  vizinhos representam um subconjunto dos agentes próximos, e a quantidade desse subconjunto, representada por  $Q$ , exerce uma influência significativa na dinâmica da difusão de opiniões. Esse modelo explora como a conectividade e a troca de informações entre os indivíduos afetam o processo de formação de consenso.

Para uma compreensão mais abrangente da polarização social, é crucial ressaltar que dentre os modelos matemáticos previamente mencionados, os mais sofisticados são aqueles que incorporam a dinâmica das interações entre os agentes e sua estrutura subjacente. Na verdade, para maior realismo, a simulação de modelos de consenso deve ser realizada em redes complexas, uma vez que a topologia da rede exerce um impacto significativo tanto na dinâmica quanto no resultado final do processo de geração de consenso, como indicado por Soares em sua pesquisa (SOARES; OLIVEIRA; CARVALHO, 2021). Investigações empíricas consistentemente forneceram evidências convincentes de que diferentes topologias de redes exibem graus variados de polarização e formação de consenso (SOARES; FONTANARI, 2021; FERNÁNDEZ-GRACIA; EGUÍLUZ; MIGUEL, 2014; SANCTIS; GONÇALVES; PINTO, 2013; LIU *et al.*, 2020). Por exemplo, estudos recentes mostraram que a adoção do modelo  $Q$ -votantes em redes modulares pode resultar em opiniões públicas altamente polarizadas (SOARES; FONTANARI, 2021). Por outro lado, em redes livres de escala, agentes altamente conectados podem acelerar o processo de formação de consenso, ao mesmo tempo em que potencialmente amplificam a polarização extrema (FERNÁNDEZ-GRACIA; EGUÍLUZ; MIGUEL, 2014). Além disso, estudos têm explorado a influência do agrupamento de rede, distribuição de grau e outras propriedades de rede na dinâmica de formação de consenso (CASTELLANO; FORTUNATO; LORETO, 2009), destacando o papel crucial da topologia da rede no desenvolvimento de modelos realistas para a compreensão da formação de consenso em redes complexas. Ao considerar a interação intrincada entre a estrutura da rede e a dinâmica de opinião, os pesquisadores podem obter uma compreensão mais abrangente dos fatores que moldam o surgimento de consenso e polarização. Dada a influência significativa da topologia da rede no surgimento de consenso, uma pergunta essencial é se é viável desenvolver um modelo de aprendizado de máquina que possa prever variáveis dinâmicas com base nas propriedades da rede. Essa pergunta tem sido amplamente explorada em diversos campos, incluindo a previsão de epidemias em redes de contato humano (KEELING, 2005; RODRIGUES *et al.*, 2019) e a sincronização em sistemas de osciladores

acoplados (PECORA; CARROLL, 1998; RODRIGUES *et al.*, 2019). As investigações não apenas demonstraram a possibilidade de prever o comportamento de sistemas dinâmicos a partir da topologia da rede, mas também destacaram a importância de compreender a relação entre a estrutura da rede e a dinâmica nesses sistemas.

A aplicação de algoritmos de aprendizado de máquina no estudo da previsão do tempo de consenso ( $Y_i$ ) e da frequência de mudanças de opinião ( $C_i$ ) no modelo de  $Q$ -votantes oferece várias vantagens. O aprendizado de máquina promove a captura de padrões complexos, aprendizado a partir de dados históricos e adaptação a dinâmicas em evolução; é uma ferramenta poderosa para descobrir relacionamentos intrincados e aumentar a precisão das previsões. Além disso, seu uso no contexto do  $Q$ -votantes representa uma abordagem inovadora, ampliando os limites da análise tradicional e fornecendo novos insights sobre os mecanismos que impulsionam a dinâmica de opinião em sistemas sociais complexos. O consenso é uma métrica significativa que indica o nível de concordância entre os agentes em uma rede. Por outro lado, a frequência de mudanças de opinião reflete a capacidade de uma rede de manter suas crenças e mostra o nível de volatilidade no sistema. Compreender e mitigar os efeitos da polarização em sistemas de redes complexas é de extrema importância, pois pode impactar significativamente tanto o processo de formação de consenso quanto a estabilidade das opiniões dentro de uma rede. Ambas as métricas desempenham um papel crucial na compreensão do comportamento de sistemas sociais e oferecem insights sobre os fatores que contribuem para a estabilidade ou instabilidade nesses sistemas (MORETTI *et al.*, 2013).

A seção dedicada ao emprego do aprendizado de máquina na previsão do modelo  $Q$ -votantes em redes complexas está estreitamente relacionada ao nosso artigo publicado no Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment (JSTAT) (PINEDA *et al.*, 2023a), fornecendo perspicácia valiosa acerca da relação entre a estrutura da rede e a dinâmica social. Este estudo ressalta o potencial das métricas de redes complexas para analisar sistemas dinâmicos e demonstra a eficácia das estruturas de redes complexas na previsão precisa do tempo de consenso ( $Y_i$ ) e da frequência de mudanças de opinião ( $C_i$ ) no contexto do modelo  $Q$ -votantes, utilizando algoritmos de aprendizado de máquina. Adicionalmente, foram avaliadas as contribuições individuais de diversas características da rede para tais previsões, revelando que o coeficiente de agrupamento ( $C$ ) e a centralidade da informação (IC) se destacam como as métricas mais influentes na antecipação desses resultados. Para garantir a robustez dessas previsões, foram aplicados três métodos de inicialização distintos no modelo  $Q$ -votantes, com uma avaliação específica do comportamento do modelo quando iniciado com alto grau, baixo grau e uma seleção aleatória de agentes com opiniões positivas. É importante destacar que, no modelo original, os vértices selecionados para iniciar a dinâmica são selecionados de forma aleatória. No entanto, neste contexto, incorporaremos mais duas estratégias de inicialização.

Os modelos de dinâmica social são ferramentas poderosas para a compreensão e previsão do comportamento coletivo, bem como para entender como as interações sociais podem

desencadear mudanças em uma rede social. No entanto para facilitar a análise matemática, a heterogeneidade individual geralmente não é considerada, o que significa que os modelos assumem que todos os indivíduos da população são iguais em termos de comportamento, opiniões e influências, ou seja, o modelo  $Q$ -votantes, por sua própria natureza, não incorpora características culturais essenciais, que desempenham um papel significativo em dinâmicas sociais complexas. Como resultado, as características desses modelos são limitadas, não incluindo a estrutura de conexões observadas na sociedade, que é altamente irregular. Além disso, em geral, a probabilidade de receber e retransmitir uma determinada informação é fixa e homogênea entre os agentes, o que pode não representar totalmente a heterogeneidade de comportamento observada no mundo real (JOLLES; KING; KILLEN, 2020). Assim, com o objetivo de abordar essa variabilidade, estamos empenhados em oferecer uma abordagem que ajude a preencher essa lacuna. Por isso, a seção dedicada ao acoplamento dos modelos de dinâmica social está estreitamente vinculada ao nosso artigo publicado na revista *Europhysics Letters - EPL* (PINEDA *et al.*, 2023b).

Dessa maneira, investigamos a disseminação de informações em um sistema que considera a heterogeneidade dos agentes, refletindo de forma mais precisa a disseminação de informações entre indivíduos no mundo real. Para atingir esse objetivo, acoplamos ao modelo de propagação de rumores o modelo de Axelrod, que pressupõe que os indivíduos sejam representados por vetores (que capturam seu conjunto de crenças) que podem evoluir ao longo do tempo devido às interações com seus pares. Isso nos permite incorporar dois mecanismos fundamentais que impulsionam o comportamento humano: a homofilia e a influência social (CENTOLA, 2011; MA; KRISHNAN; MONTGOMERY, 2015; EFFERSON; VOGT; FEHR, 2020). Propomos um modelo baseado em agentes em que a heterogeneidade dinâmica dos agentes é retratada pelo modelo de Axelrod, de modo que a similaridade cultural entre agentes vizinhos modula a propagação do rumor. A taxa em que a dinâmica cultural é atualizada é dada pelo parâmetro  $p$ , e  $1 - p$  é a taxa em que a dinâmica do rumor é atualizada. Dado que as atualizações nos estados dos agentes são controladas por  $p$ , podemos interpretar  $p$  como um proxy para a abertura dos agentes à influência social. Com isso, temos dois parâmetros de ordem para acessar o estado final do sistema: a fração de agentes  $\langle S \rangle$  pertencentes ao maior agrupamento cultural e a fração de agentes mais resistentes  $\langle R \rangle$  que não estão mais propagando o rumor.

Nossos resultados indicam que, para sistemas com pequenos valores de  $N$ , podemos encontrar  $Q$  (possíveis estados culturais de cada agente) e  $p$  em que  $\langle R \rangle > \langle S \rangle$ , sugerindo que os rumores foram capazes de superar as barreiras culturais e se espalhar entre agentes que pertencem a diferentes domínios culturais. No entanto, observamos que  $\langle R \rangle \leq \langle S \rangle$  à medida que  $N$  aumenta, independentemente de  $p$  e  $Q$ , os rumores são limitados aos domínios de agentes semelhantes em sistemas grandes. Além disso, padrões semelhantes são observados para agentes ligados entre si de acordo com redes sociais do mundo real. No geral, mostramos que a propagação da informação é naturalmente limitada em sistemas onde os agentes são heterogêneos, de modo que "bolhas" de agentes que compartilham narrativas diferentes emergem sem a ajuda de mudanças topológicas (HOLME; NEWMAN, 2006; FU; WANG, 2008; INIGUEZ *et al.*, 2009).

---

Além disso, ao simularmos o nosso modelo acoplado em redes do tipo Watts-Strogatz e aumentarmos a conectividade de longo alcance ( $pw$ ), notamos que os rumores conseguem ultrapassar as barreiras do modelo de Axelrod. Esse achado nos leva a inferir que, nesse contexto, indivíduos com perspectivas divergentes podem estabelecer conexões com outros indivíduos que, em uma rede estritamente local, estariam normalmente distantes, como é o caso em redes do tipo Watts-Strogatz com elementos de conectividade aleatória de longo alcance. Essas conexões de longo alcance funcionam como vias para a disseminação acelerada de informações e boatos entre grupos que anteriormente estavam isolados em suas próprias bolhas culturais. Portanto, tanto a conectividade de longo alcance ( $pw$ ) quanto o número de vizinhos ( $k$ ) podem servir como elementos de ligação entre grupos que, de outra forma, teriam interações limitadas. Isso, por sua vez, facilita a fluidez da circulação de informações e ideias entre as diversas subpopulações, aumentando, assim, a probabilidade de disseminação de boatos para além das bolhas culturais inerentes ao modelo de Axelrod. Contudo, é crucial ressaltar que a relação entre a conectividade de longo alcance e a disseminação de boatos é influenciada por uma série de fatores adicionais, incluindo a própria natureza do boato e o comportamento dos indivíduos em relação à sua propagação. Portanto, embora a conectividade de longo alcance seja um fator relevante, não constitui o único determinante na disseminação de boatos dentro de uma rede. Em contrapartida foi identificado que o conceito de campo externo estático ( $pcee$ ), caracterizado como um agente fictício adicional que se conecta a cada elemento da rede afeta a estabilidade da homogeneidade cultural. Em resumo, a inclusão desse parâmetro dificulta a propagação do rumor.

Essa tese está estruturada da seguinte maneira: no segundo capítulo, oferecemos uma breve introdução aos modelos de dinâmica social que despertaram nosso interesse (Q-votantes, propagação de rumores e Axelrod). Em seguida, no terceiro capítulo, apresentamos os resultados iniciais relacionados à predição baseada em aprendizado de máquina do modelo Q-votantes. O quarto capítulo introduz o modelo acoplado (Axelrod + rumor), enquanto o quinto capítulo explora o efeito da conectividade nas redes de Watts-Strogatz no contexto desse modelo combinado. Finalmente, concluímos com a introdução da ideia do campo externo estático, também aplicado ao modelo acoplado.



---

## MODELOS DE DINÂMICAS SOCIAL

---

Nesta seção, apresentaremos uma breve descrição dos três modelos abordados nesta tese, a saber: o modelo  $Q$ -votantes, a propagação de rumores e o modelo de Axelrod.

### 2.1 $Q$ -votantes

No contexto do modelo de  $Q$ -votantes, um grupo de  $Q$  agentes ( $Q$ -votantes) influencia a opinião de um único agente. Essa interação determina o número de vizinhos considerados por um agente para a tomada de decisões, conforme ditado pelo parâmetro  $Q$ . Esse modelo é particularmente interessante para estudos de dinâmica social, pois captura o impacto da influência do grupo, conformidade e reforço social na dinâmica de opiniões. Além disso, ele exibe um comportamento de transição de fase, dependendo do valor de  $Q$  e da topologia da rede, levando a diversos resultados, como consenso, fragmentação e coexistência de opiniões (LORENZ, 2007; MORETTI; MUNOZ, 2013; GUERRA; EGUÍLUZ; MIGUEL, 2004; MOBILIA, 2003; GALAM, 2002). Introduzido em (CASTELLANO; MUÑOZ; PASTOR-SATORRAS, 2009), sua aplicabilidade se estende a todos os valores inteiros de  $Q > 0$ . Além disso, definindo  $Q=1$ , retornamos diretamente ao modelo votante padrão. Nesse modelo, é considerado a possibilidade de repetição, o que implica que um vizinho específico pode ser selecionado várias vezes. Assim, quando  $Q$  é maior ou igual ao número de vizinhos (o grau de um nó), a opinião do mesmo vizinho será levada em consideração mais de uma vez.

Considere uma rede de  $N$  votantes (também conhecidos como agentes, nós, spins ou indivíduos). Cada um é definido por uma única variável binária dinâmica  $s(x, t) = j$ , onde  $j = +1$  ou  $j = -1$ ,  $x = 1, \dots, N$ , e  $t$  representa o tempo. Do ponto de vista social,  $s(x, t)$  representa uma escala psicométrica de dois pontos (sim/não, concordo/discordo) da opinião de um agente localizado no nó  $x$  no tempo  $t$  sobre um assunto específico.

A fração inicial de agentes com opiniões positivas ( $p+$ ) é fixa no início da simulação e

distribuída aleatoriamente pelos nós da rede. O parâmetro  $\varepsilon$  representa a probabilidade de um agente  $x$  agir independentemente de seus vizinhos, indicando sua relutância em ceder à pressão do grupo. Consequentemente,  $(1 - \varepsilon)$  representa a conformidade, influenciando a probabilidade de um agente adotar a opinião majoritária de seus  $Q$  vizinhos. Note que a opinião individual do agente selecionado  $x$  não é levada em consideração na probabilidade de mudança ou retenção de opinião na dinâmica.

A seguir, ilustramos na Figura 1 o modelo  $Q = 2$ -votantes. Todos os agentes têm uma opinião binária (+1 ou -1), representada aqui pelas cores vermelha e azul. Suponha que um agente seja da cor vermelha; então, sua opinião pode ser alterada com base na seguinte resposta social: a probabilidade de não conformidade, ou seja, relutância em ceder à pressão do grupo, associado a uma probabilidade  $\varepsilon$  de mudar sua opinião contrária a opinião dos vizinhos. Alternativamente, a conformidade  $(1-\varepsilon)$  representa a probabilidade de se comportar como seus vizinhos. Se os vizinhos compartilharem um consenso de opinião, o agente mudará para a opinião dos respectivos vizinhos. No entanto, se não houver consenso entre os vizinhos, com probabilidade  $\beta$ , o agente irá mudar de opinião, e com probabilidade de  $1-\beta$ , ele manterá sua opinião. A Figura 2 exemplifica uma simulação do modelo  $Q$ -votantes para uma rede com  $N=25$  agentes,  $\beta = 0,20$  e  $\varepsilon$  igual a  $0,01$ . No eixo  $x$ , variamos os valores de  $Q$ , que indicam o número de vizinhos que influenciam a opinião do agente selecionado aleatoriamente. O eixo  $y$  representa o tempo médio necessário para alcançar o consenso, denotado como  $Y_i$ . É importante observar que, à medida que aumentamos os valores de  $Q$ , o modelo demora mais para atingir o consenso, devido ao aumento da dificuldade de um agente ser influenciado por todos os seus vizinhos.

## 2.2 Propagação de rumor

Há décadas, o modelo proposto por Daley e Kendall (DK) é um dos mais clássicos e amplamente utilizado para estudar a propagação de epidemias e doenças infecciosas (DALEY; KENDALL, 1964). Neste modelo, cada agente pode assumir um dos três estados possíveis: ignorante ( $S$ ), propagador ( $I$ ) ou supressor ( $R$ ). Os agentes ignorantes ainda não ouviram o boato e estão suscetíveis a ouvi-lo, se interessar por ele e, posteriormente, divulgá-lo. Os propagadores, por sua vez, são aqueles que já ouviram o boato, se interessaram por ele e decidiram espalhá-lo. Finalmente, os agentes supressores são indivíduos que já ouviram o boato antes, mas não estão mais interessados em espalhá-lo.

No entanto, uma variação do modelo DK, proposta por Maki e Thompson (MT) (MAKI *et al.*, 1973), introduz uma pequena mudança no processo de atualização de estado dos agentes. Enquanto no modelo DK ambos os agentes podem ter seus estados atualizados em uma única interação, no modelo MT apenas um agente pode ter seu estado atualizado por interação. Embora os modelos DK e MT apresentem algumas diferenças, eles produzem resultados semelhantes que podem ser bem descritos por uma abordagem de campo médio. No entanto, o modelo DK tem

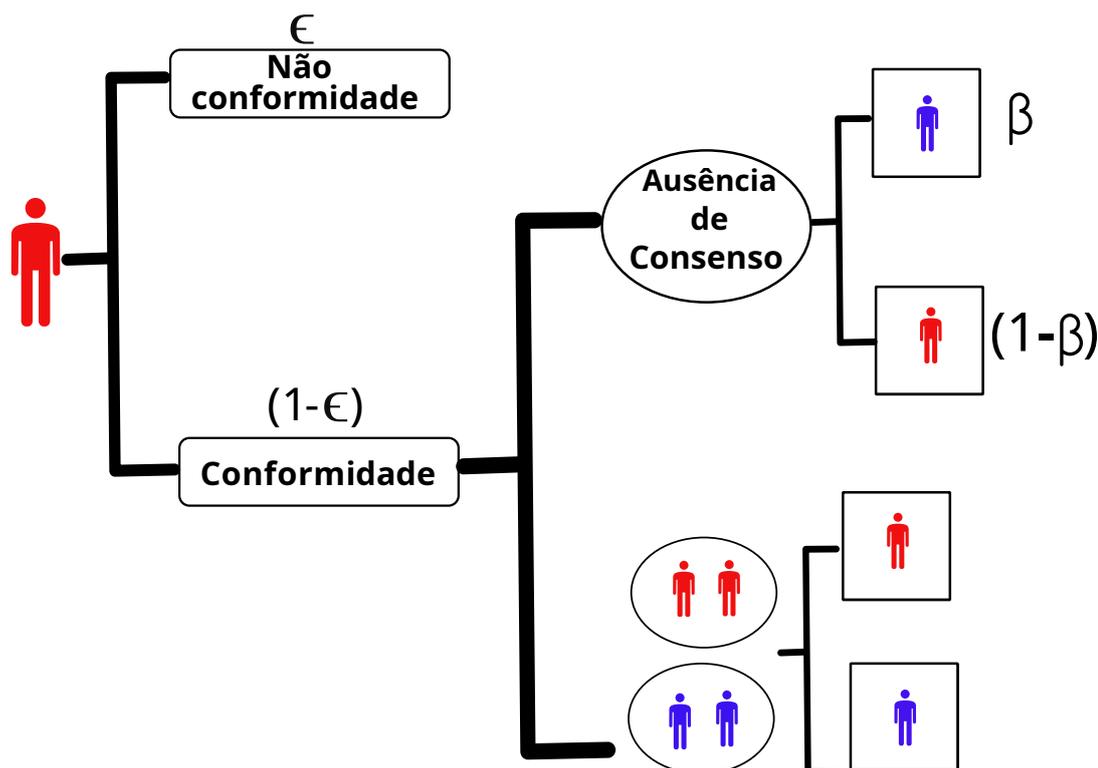


Figura 1 – Ilustração do modelo de votação  $Q = 2$ . Todos os agentes têm uma opinião binária, representada aqui pelas cores vermelha e azul. Suponha que um agente seja da cor vermelha, então sua cor poderá ser alterada com base na seguinte resposta social: a probabilidade de não conformidade, ou seja, a relutância em ceder à pressão do grupo, denotada como  $\epsilon$ . Ou conformidade  $(1-\epsilon)$ , que é a probabilidade de agir como seus vizinhos. Se os vizinhos tiverem um consenso de opinião, ou seja, todos eles têm a mesma opinião, o agente mudará para a cor respectiva. Se não houver consenso entre os vizinhos, com uma probabilidade  $\beta$ , o agente mudará para a cor azul, e com uma probabilidade de  $1-\beta$ , ele manterá sua cor vermelha.

uma dispersão de valores médios maior do que o modelo MT (LEBENSZTAYN; MACHADO; RODRÍGUEZ, 2011). Além disso, em ambos os modelos, os agentes são homogêneos, o que significa que eles possuem a mesma probabilidade de receber e retransmitir o boato quando se tornam propagadores, bem como a mesma probabilidade de se recuperar.

A Figura 3 ilustra a dinâmica de propagação de rumores em uma rede quadrada de lado  $L = 20$ . A taxa de infecção, que representa a probabilidade de um indivíduo suscetível se tornar infectado quando interage com um vizinho infectado, foi configurada para 0,5. A taxa de recuperação, que indica a probabilidade de um indivíduo infectado se recuperar e tornar-se recuperado, foi estabelecida em 0,01. As curvas no gráfico representam a média das proporções de nós suscetíveis, infectados e recuperados em relação ao tempo. A curva azul está relacionada aos indivíduos recuperados, ou seja, aqueles que já se recuperaram do rumor e não estão mais espalhando a informação. A curva vermelha representa os indivíduos ainda infectados e responsáveis por propagar o rumor. Por fim, a curva verde representa os indivíduos suscetíveis, que estão em risco de serem infectados novamente. É importante notar que a curva verde começa no topo do gráfico, pois inicialmente todos os indivíduos estão suscetíveis à informação. À

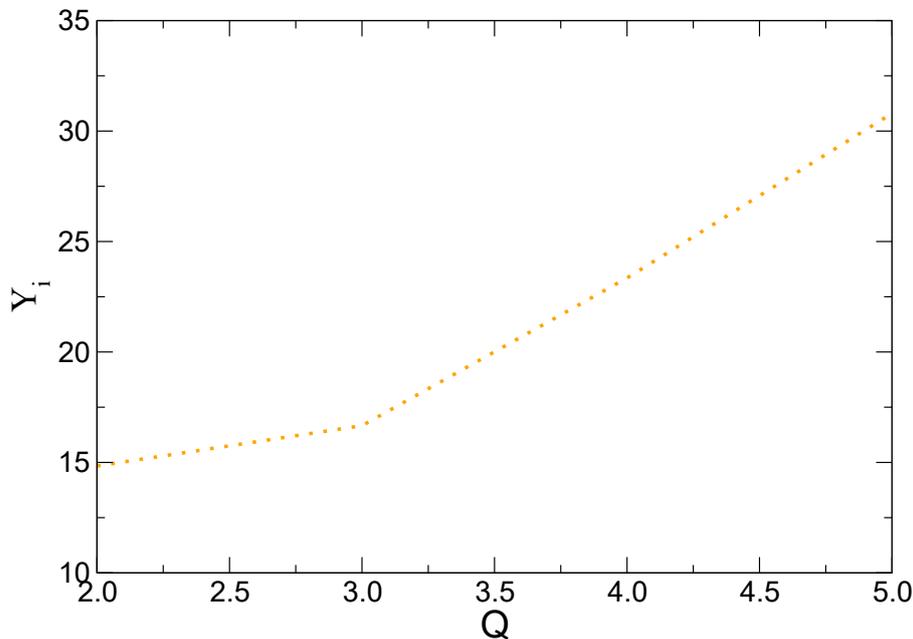


Figura 2 – Simulação do modelo  $Q$ -votantes com  $N=25$  agentes. O eixo  $x$  varia  $Q$  (vizinhos influenciando), e o eixo  $y$  mostra o tempo médio até o modelo atingir o consenso ( $Y_i$ ).

medida que a dinâmica progride e o boato se espalha pela rede, a curva verde diminui, a curva vermelha cresce até atingir um pico e, finalmente, a curva azul começa a aumentar à medida que os indivíduos se recuperam do rumor. A dinâmica continua até que todos os indivíduos se tornem recuperados, que é o critério de parada desta simulação.

A Figura 4 exibe um gráfico que representa a relação entre a fração de indivíduos recuperados ( $\langle R \rangle$ ) e os parâmetros  $\lambda$  e  $\alpha$ . O parâmetro  $\lambda$  denota a probabilidade de transmissão do rumor, enquanto  $\alpha$  representa a probabilidade de remissão do rumor. Este gráfico foi construído em uma rede quadrada de lado  $L = 30$ . É notável que a fração de indivíduos recuperados ( $\langle R \rangle$ ) demonstra um aumento constante à medida que a razão  $\frac{\lambda}{\alpha}$  é incrementada.

## 2.3 Modelo de Axelrod

No artigo seminal de Axelrod (AXELROD, 1997), ele questiona por que as diferenças entre as pessoas não desaparecem, apesar da tendência de se tornarem mais parecidas em suas crenças, atitudes e comportamentos quando interagem. Essa questão reflete a notável observação de que os agentes são heterogêneos em nossa sociedade, independentemente de suas interações contínuas. Surpreendentemente, Axelrod descobriu que os estados heterogêneos são resultados naturais de um sistema onde os agentes interagem e se tornam mais parecidos quando eles interagem. Esses estados são capturados por configurações finais com a presença de diferentes

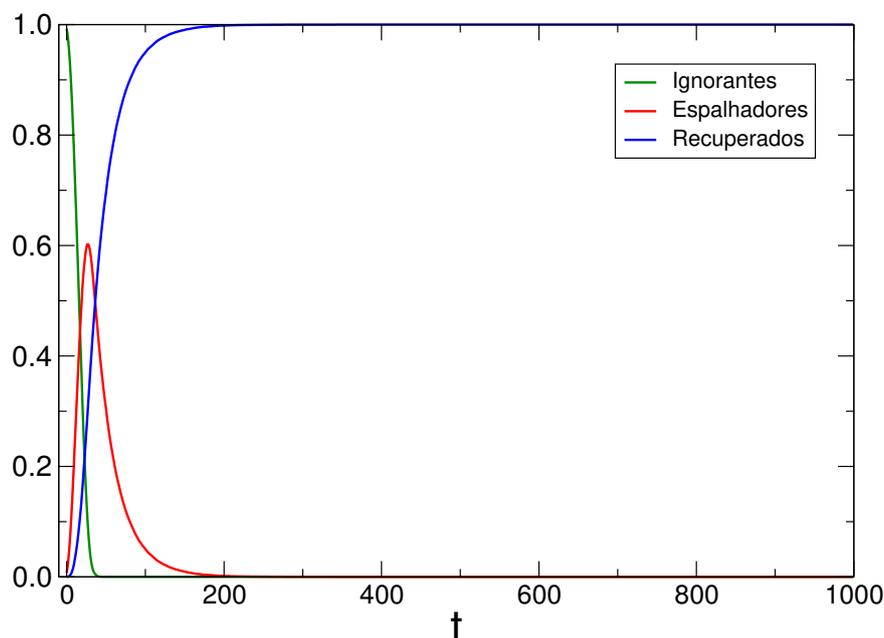


Figura 3 – Ilustração da dinâmica de propagação de rumores em uma rede de grade quadrada com dimensões  $L = 20$  ou  $N = 400$ . Nesta simulação, a taxa de infecção foi configurada como 0,5, representando a probabilidade de um indivíduo suscetível se tornar infectado ao interagir com um vizinho infectado. A taxa de recuperação foi estabelecida em 0,01, indicando a probabilidade de um indivíduo infectado se recuperar e tornar-se recuperado. As curvas no gráfico representam as proporções médias de nós suscetíveis (curva verde), infectados (curva vermelha) e recuperados (curva azul) em relação ao tempo. A dinâmica começa com todos os indivíduos suscetíveis, e ao longo do tempo, o rumor se espalha pela rede até que todos se tornem recuperados, marcando o critério de parada da simulação.

domínios de agentes que compartilham o mesmo conjunto de crenças (vizinhança de vetores culturais).

No modelo original proposto por Axelrod, os agentes estão dispostos em uma rede quadrada e interagem apenas com seus quatro vizinhos mais próximos (vizinhança de von Neumann (TOFFOLI; MARGOLUS, 1987)). A dinâmica ocorre em etapas sequenciais. A cada iteração, um agente é selecionado aleatoriamente junto com um de seus vizinhos. Esses dois agentes interagem com uma probabilidade que é determinada pela fração de características culturais que eles compartilham. Se ocorrer uma interação, o agente seleciona uma característica cultural que difere daquela de seu vizinho e a copia dele. Esse processo é repetido até que os estados culturais de todos os agentes na rede não possam mais ser alterados (TILLES; FONTANARI, 2015).

O modelo cultural proposto por Axelrod apresenta duas configurações de equilíbrio: uma ordenada, também conhecida como monocultural, na qual todos os agentes têm o mesmo vetor cultural e, portanto, a fração de agentes pertencentes ao maior grupo cultural converge

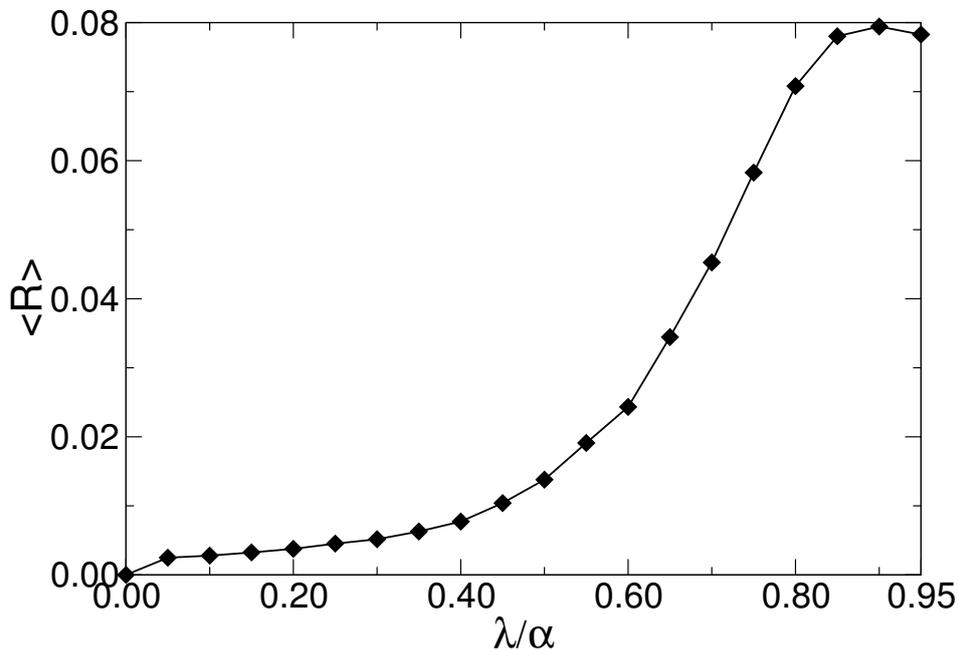


Figura 4 – Ilustração da relação entre a fração de indivíduos recuperados ( $\langle R \rangle$ ) e os parâmetros  $\lambda$  e  $\alpha$  em uma rede quadrada de lado  $L = 30$ . O parâmetro  $\lambda$  representa a probabilidade de transmissão do rumor, enquanto  $\alpha$  indica a probabilidade de remissão do rumor. É notável que a fração de indivíduos recuperados ( $\langle R \rangle$ ) aumenta consistentemente à medida que a razão  $\frac{\lambda}{\alpha}$  é incrementada.

para um valor máximo ( $\langle S \rangle \rightarrow 1$ ); e uma desordenada, ou multicultural, na qual a configuração final apresenta múltiplos vetores culturais, e, portanto, a fração de agentes no maior cluster cultural converge para um valor mínimo ( $\langle S \rangle \rightarrow 0$ ) à medida que o número de agentes  $N$  cresce infinitamente. Cada agente na rede possui um vetor de  $F$  elementos inteiros, denominados fatores culturais, que variam de 1 a  $Q$ , indicando os possíveis estados culturais do agente. Esses fatores determinam a posição do agente em relação a uma determinada característica, como por exemplo, religião, onde cada estado  $Q$  representa uma possível religião, como catolicismo, protestantismo, adventismo e espiritismo.

A configuração final do modelo de Axelrod é resultado da interação entre a desordem da configuração inicial, sintonizada pelos dois parâmetros do modelo - o comprimento do vetor cultural  $F$  e o número de estados inteiros disponíveis para cada componente do vetor cultural  $Q$  - e a dinâmica de ordenação, em que os agentes se tornam mais semelhantes quando interagem. Foi demonstrado que, para um determinado valor de  $F$ , existe um ponto crítico  $Q_c$  que divide o sistema em estados ordenados e desordenados. A robustez dessa transição de fase foi extensivamente estudada em relação a várias propriedades do sistema, como a dimensionalidade da rede (VILONE; VESPIGNANI; CASTELLANO, 2002; KLEMM *et al.*, 2003), topologia da rede (CASTELLANO; MARSILI; VESPIGNANI, 2000; REIA; FONTANARI, 2016), efeito

de mídia (PERES; FONTANARI, 2010), mobilidade (REIA; GOMES; FONTANARI, 2020), teimosia dos agentes (REIA; NEVES, 2016), entre outras. O modelo de Axelrod é amplamente estudado na literatura devido à sua capacidade de capturar fenômenos complexos, tais como a emergência de estados monoculturais e multiculturais, a disseminação de ideias, a formação de grupos de opinião, entre outros.

O modelo de Axelrod pode ser visualizado em diferentes regimes, como mostrado nas Figuras 5a, 5b e 5c. A Figura 5a corresponde ao regime multicultural da rede, em que existem muitas culturas no modelo. Na figura, apresentada para uma rede de lado  $L = 30$ ,  $F = 3$  e  $Q = 24$ , observamos no painel à esquerda a configuração inicial do modelo e, no painel à direita, a configuração final do modelo com pequenas “bolhas ideológicas” (agrupamento das mesmas cores) formadas na rede. A Figura 5b ilustra o regime de transição de fase que separa o regime monocultural do regime multicultural. Após o início da dinâmica do modelo, a configuração final (painel da direita) apresenta grandes “bolhas ideológicas” misturadas com “bolhas” menores. As simulações foram realizadas em uma rede de lado  $L=30$ , com  $Q=14$  possíveis estados culturais e um vetor de fatores culturais de comprimento  $F=3$ . Por fim, a Figura 5c ilustra o regime monocultural da rede, no qual apenas uma cultura sobressai na configuração final do modelo, resultando em uma grande “bolha ideológica” (painel direito). As simulações foram realizadas para uma rede de lado  $L = 30$ , com  $Q = 4$  e  $F = 3$ .

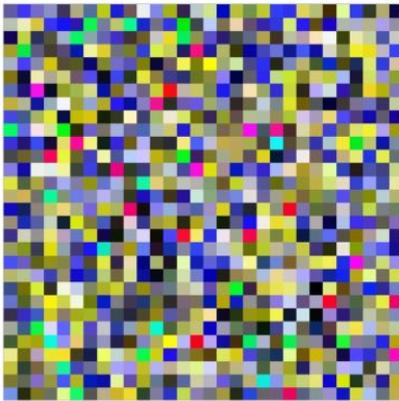
A Figura 6 apresenta os resultados das simulações do modelo original de Axelrod em uma rede quadrada bidimensional com  $N = L^2 = 100$  agentes e  $Q = 1, \dots, 50$ . Os painéis superior e inferior correspondem a  $F = 2$  e  $F = 5$ , respectivamente. Para caracterizar as configurações absorventes do modelo, utilizamos a proposta de Castellano *et al.* (CASTELLANO; MARSILI; VESPIGNANI, 2000) que se baseia no tamanho do maior *cluster* ( $\langle S \rangle$ ), ou seja, os agentes vizinhos que compartilham o mesmo vetor cultural, normalizado pelo número total de agentes da rede ( $L^2$ ). As simulações foram executadas para  $L = 10^2$ ,  $Q = 1, 2, \dots, 50$ ,  $F = 2$  (Fig. 6, painel superior),  $F = 3$  (Fig. 6, painel inferior) e  $F = 5$  (Fig. 7, painel superior).

Observamos que a transição de fase do modelo ocorre na separação do regime monocultural do regime multicultural, onde  $\langle S \rangle$  é próximo de 1 e 0, respectivamente. Como discutido em (CASTELLANO; FORTUNATO; LORETO, 2009; CASTELLANO; MARSILI; VESPIGNANI, 2000), para  $F = 2$  a curva de transição é contínua (Fig.6, painel superior) e para  $F \geq 3$  (Fig. 6, painel inferior) a curva é descontínua. Além disso, o ponto de transição ( $Q_c$ ) depende do tamanho de  $F$  e aumenta com o aumento desse parâmetro.

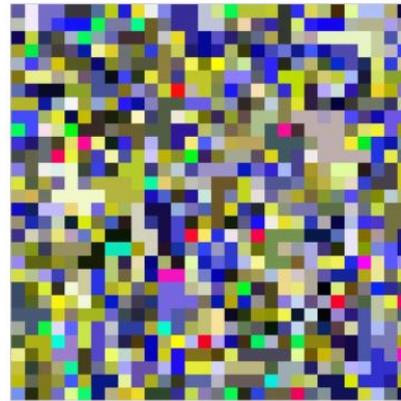
Observamos que à medida que  $Q$  aumenta,  $\langle S \rangle$  tende a zero, indicando que é menos provável que cada característica ( $F$ ) tenha um valor comum entre dois agentes, isto é, eles interagem com probabilidade menor. Ainda, quando mais características ( $F$ ) estão presentes (com  $Q$  fixo), há uma chance maior de que dois agentes vizinhos compartilhem pelo menos uma delas, aumentando a probabilidade de interação.

Utilizando a Figura 7 no painel inferior, é possível obter uma medida mais precisa

### Regime multicultural



Configuração inicial

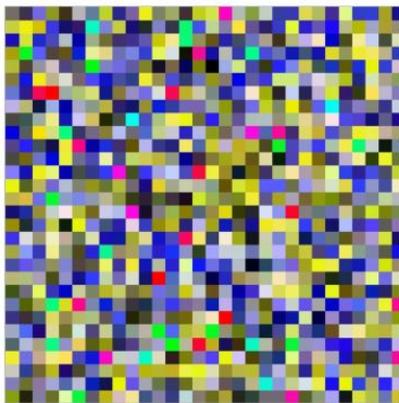


Configuração final

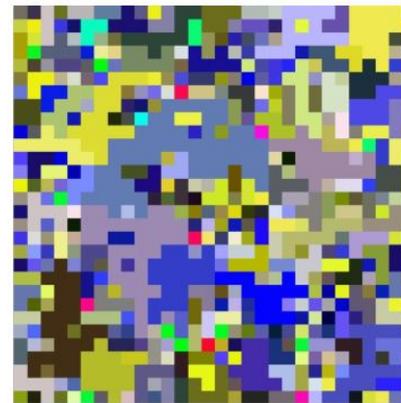
Resultados para  $F = 3$  e  $Q = 24$  em uma rede quadrada de lado  $L = 30$ .

(a) Regime multicultural do modelo de Axelrod.

### Regime de transição



Configuração inicial

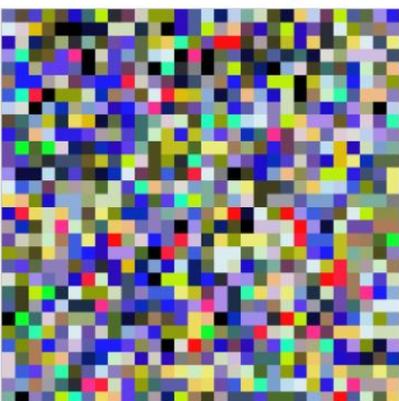


Configuração final

Resultados para  $F = 3$  e  $Q = 14$  em uma rede quadrada de lado  $L = 30$ .

(b) Regime de transição do modelo de Axelrod.

### Regime monocultural



Configuração inicial



Configuração final

Resultados para  $F = 3$  e  $Q = 4$  em uma rede quadrada de lado  $L = 30$ .

(c) Regime monocultural do modelo de Axelrod.

Figura 5 – Figuras retiradas de (REIA, 2015).

do ponto de transição ( $Q_c$ ) para o valor de  $F = 3$ ,  $Q = 1...50$  e  $L = 10^2$ . Para determinar o valor crítico de  $Q$ , utilizamos o cálculo da maior variância proposto em (PRIVMAN, 1990). Observando essa Figura (Fig. 7, painel inferior), foi obtido o valor máximo de variância em  $Q_c = 9$ . É importante ressaltar que esse valor crítico pode ser influenciado por diferentes fatores, como tamanho da rede e parâmetros do modelo.

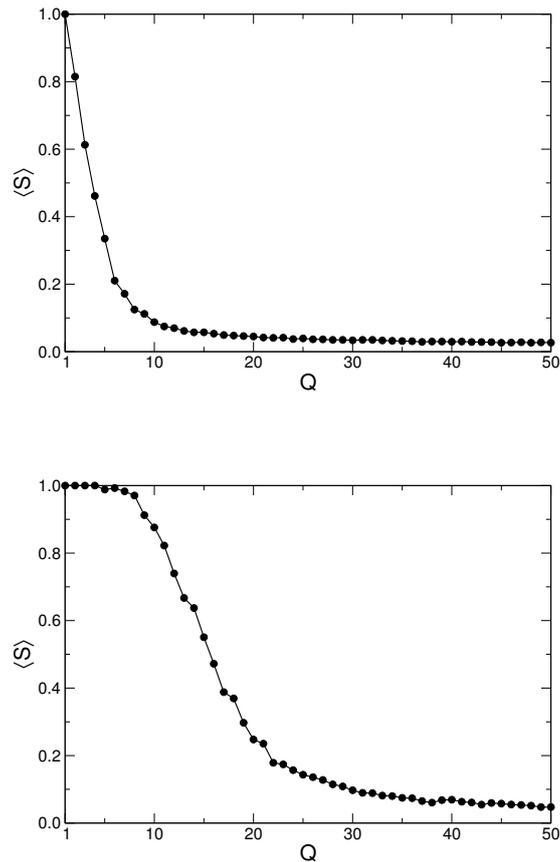


Figura 6 – Ilustração das simulações computacionais do tamanho médio do maior *cluster* ( $\langle S \rangle$ ) em função do número de traços culturais ou características do agente ( $Q$  variando de 1 a 50), para valores fixos de  $F$  igual a 2 e 5, respectivamente. As simulações foram realizadas em uma rede quadrada bidimensional com  $L = 10$ . Os resultados indicam como o tamanho do maior *cluster* varia com o número de traços culturais e características dos agentes em diferentes regimes culturais.

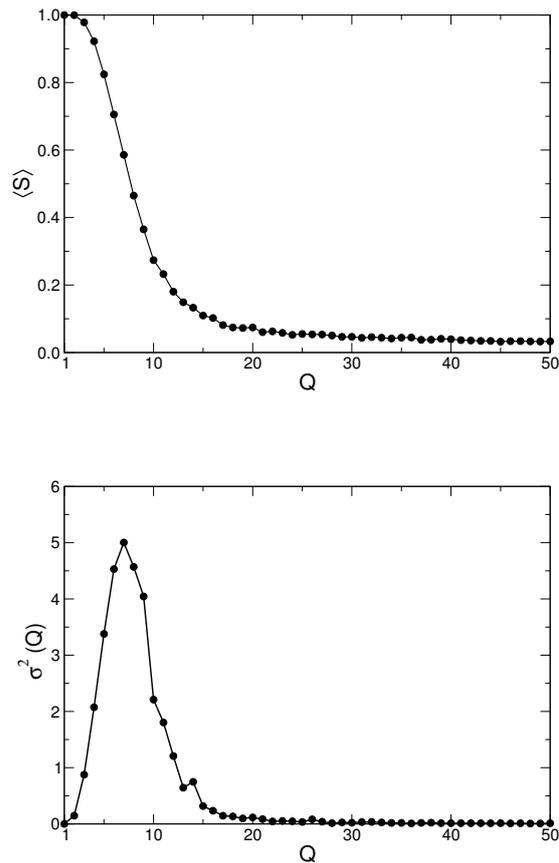


Figura 7 – Ilustração das simulações computacionais do modelo de Axelrod em uma rede bidimensional com  $L = 10$ , para  $F = 3$ . A curva ilustra a relação entre o tamanho médio do maior *cluster*  $\langle S \rangle$  e o número de traços culturais ou características do agente ( $Q$ ), variando de 1 a 50. Observa-se que para valores pequenos de  $Q$  o tamanho do *cluster* é maior, e à medida que  $Q$  aumenta, o tamanho do *cluster* diminui, indicando a transição da fase multicultural para monocultural. A figura também apresenta o cálculo da maior variância  $\sigma^2$  em relação a diferentes valores de  $Q$ , para  $L = 10$ . A partir da curva obtida, é possível identificar o valor do  $Q$  crítico, que é o valor de maior variância. Nessa figura, é possível observar que o valor de  $Q_c$  é igual a 9. Essa informação é importante para entender a transição de fase do modelo de Axelrod, que ocorre quando  $Q$  atinge esse valor crítico.

---

# PREDIÇÃO BASEADA EM APRENDIZADO DE MÁQUINA DO MODELO Q-VOTANTES

---

Este capítulo está baseado em nosso artigo publicado em (PINEDA *et al.*, 2023a), e concentra-se na utilização de algoritmos de aprendizado de máquina e medidas topológicas de redes complexas para prever duas características do modelo  $Q$ -votantes. São elas: o tempo médio necessário para alcançar o consenso ( $Y_i$ ) e a frequência de mudanças de opinião ( $C_i$ ). O consenso é uma métrica significativa que indica o grau de concordância entre os agentes em uma rede. Em contrapartida, a frequência de mudanças de opinião reflete a capacidade de uma rede em manter suas crenças e demonstra o nível de volatilidade presente no sistema.

Os parâmetros do modelo  $Q$ -votantes foram fixados para estabelecer uma base consistente para nossa previsão. Mantendo-os constantes, nossa exploração pode se concentrar no impacto de outras variáveis, e uma análise mais detalhada do desempenho preditivo de nosso modelo de aprendizado de máquina em relação aos resultados desejados pode ser realizada. A porcentagem inicial de agentes selecionados com opinião positiva ( $p+$ ) foi modificada de três maneiras: por seleção aleatória de agentes (maneira original do modelo) e por seleção de agentes com alto e baixo grau de conectividade. Na Tabela 1 apresentamos os parâmetros fixos do modelo, incluindo o número de nós das redes complexas ( $N = 1.000$ ), a probabilidade de um agente agir independentemente ( $\varepsilon = 0,01$ ), a fração inicial de agentes com opiniões positivas ( $p+ = 0,20$ ) e o número de vizinhos ( $Q = 2$ ). O valor de  $\beta$  ( $\beta = 0,20$ ) representa a probabilidade de um agente mudar de opinião para o oposto quando não há consenso entre seus vizinhos.

## 3.0.1 Redes Complexas

No ano de 1736, o matemático Leonard Euler desenvolveu a teoria dos grafos ao resolver o problema das sete pontes de Königsberg (Figura 8). Esse problema consistia em determinar se seria possível atravessar as sete pontes da cidade, visitando quatro regiões de terra sem repetir

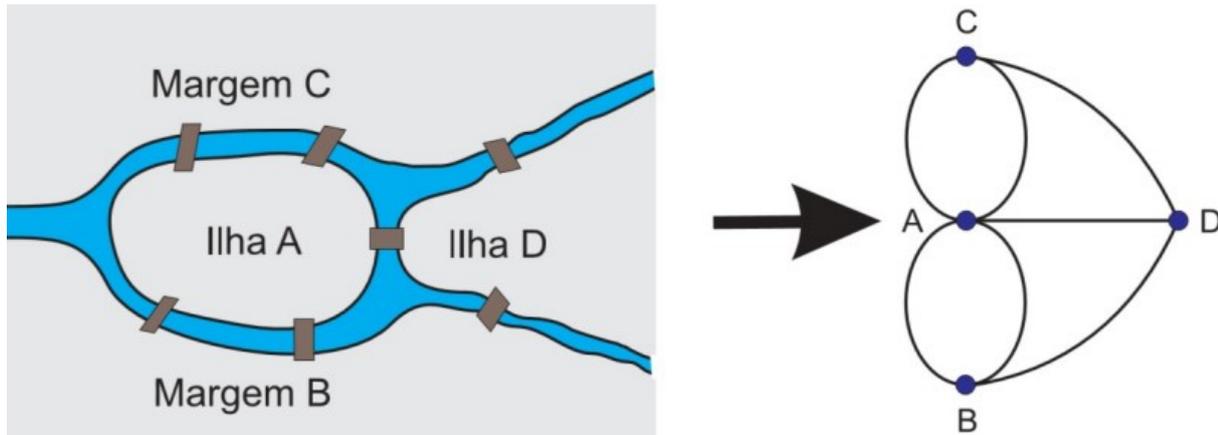


Figura 8 – O problema das sete pontes de Königsberg representado por meio de um grafo utilizando a formulação de Euler. Fonte: (RODRIGUES, 2007).

uma ponte já cruzada. Euler modelou o problema como um grafo, no qual as regiões de terra eram os vértices e as pontes eram as arestas. Ao solucionar o problema, Euler demonstrou que não havia solução possível para essa situação (RODRIGUES, 2007). Desde então, a teoria dos grafos tem sido amplamente utilizada em diversos campos, incluindo a ciência da computação, a matemática e a física, como uma ferramenta para representar e analisar relações entre elementos interconectados.

A teoria das redes complexas representa a topologia de sistemas complexos por meio de grafos. Um grafo  $G = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$ , consiste de dois conjuntos: um de nós (vértices),  $\mathcal{N}$ , e outro de arestas,  $\mathcal{E}$ . Ou seja,  $\mathcal{N}$  vértices conectados por  $\mathcal{E}$  arestas. Em termos computacionais, esta estrutura pode ser representada por meio de uma matriz ou uma lista de conexões. No caso da lista, apenas os pares de vértices  $(i, j)$  que possuem ligações são armazenados. Já no caso de uma matriz de adjacência  $A$ , se dois vértices  $i$  e  $j$  estão ligados, a entrada  $a_{ij}$  na matriz será igual a 1 e igual a 0, caso contrário. A Figura 9 mostra um exemplo de mapeamento de uma rede não-dirigida e de uma dirigida em matrizes de adjacência.

Nove medidas de redes complexas foram examinadas, como será discutido na Subseção 3.0.2. A análise envolveu oito estruturas topológicas distintas, incluindo Erdős–Rényi (ERDŐS; RÉNYI *et al.*, 1960), Barabási–Albert linear (BARABÁSI; ALBERT, 1999), Barabási–Albert não-linear com  $\alpha = 0,5$  e  $\alpha = 1,5$  (ONODY; CASTRO, 2004), grafos de Lancichinetti-Fortunato-

Tabela 1 – Parâmetros e valores usados no modelo  $Q$ -votantes.

Parâmetro	Valor Padrão	Descrição
$N$	1.000	Número de nós
$\varepsilon$	0,01	Probabilidade de um agente agir de forma independente (não conformidade)
$Q$	2	Consideração dos vizinhos para tomada de decisão
$p_+$	0,20	Fração inicial de agentes com opiniões positivas
$\beta$	0,20	Probabilidade de alterar a opinião sem consenso entre os vizinhos

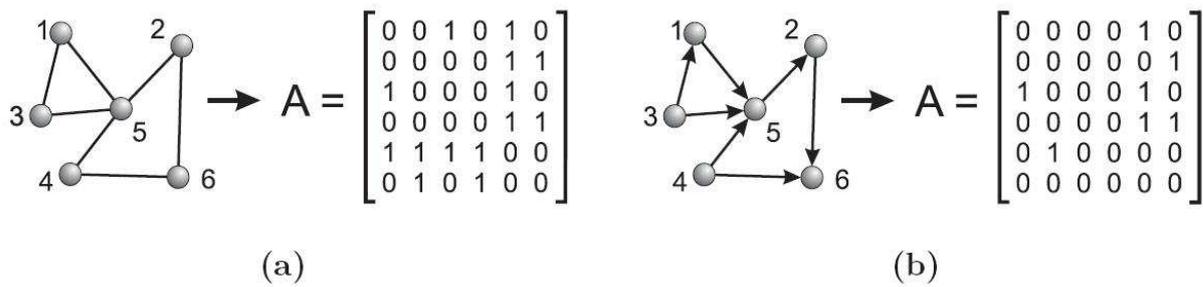


Figura 9 – Redes complexas podem ser representadas por matrizes de adjacência. Em (a) temos uma rede não-dirigida e em (b) uma rede dirigida. No caso (a), os elementos  $a_{ij}$  da matriz são iguais a 1 se há uma ligação entre os vértices  $i$  e  $j$  e iguais a zero, caso contrário. Já no caso (b), os elementos da matriz  $a_{ij}$  são iguais a 1 se existe uma conexão dirigida do vértice  $i$  para o vértice  $j$ .

Radicchi (LFR) (LANCICHINETTI; FORTUNATO; RADICCHI, 2008), Watts–Strogatz (WATTS; STROGATZ, 1998), Waxman (WAXMAN, 1988) e grafo de caminho (HAGBERG; SWART; CHULT, 2014). O modelo de rede Erdős-Rényi é gerado adicionando aleatoriamente conexões entre nós com uma probabilidade uniforme. Em contraste, o modelo Barabási-Albert não-linear é construído de forma iterativa, incorporando a preferência por conexões de novos nós aos já existentes por meio de uma função não-linear que leva em consideração as conexões do nó. O modelo LFR é amplamente utilizado para criar redes com estruturas de comunidade realistas, atribuindo nós a comunidades com base em distribuições de grau e tamanho da comunidade e estabelecendo conexões que consideram tanto links intra quanto intercomunitários. O modelo Watts-Strogatz introduz o conceito de redes de mundo pequeno, reconfigurando aleatoriamente uma parte das conexões em uma rede regular. O modelo Waxman leva em consideração a proximidade geográfica e a atratividade do nó para determinar a formação de conexões, considerando tanto as distâncias físicas quanto o apelo aleatório. Por fim um grafo de caminho (conhecido como *Path Graph*) é criado definindo os nós na ordem desejada e conectando-os sequencialmente com arestas. Para cada uma das redes mencionadas 100 instâncias únicas foram geradas, com cada rede consistindo de  $N = 1.000$  nós e um grau médio variando de 9 a 10, ou seja, o conjunto de dados criado compreende 800 instâncias de redes complexas (denotadas como  $i$ ).

### 3.0.2 Medidas de Rede

O modelo  $Q$ -votantes foi simulado em cada uma das estruturas de redes complexas citadas para medir o tempo necessário para alcançar o consenso ( $Y_i$ ) e o número total de mudanças de opinião que ocorreram no modelo ( $C_i$ ). A hipótese é que tanto  $Y_i$  quanto  $C_i$  podem ser previstos usando um vetor de características derivado da estrutura da rede, denominado  $\mathbf{X}_i = X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ik}$ , onde  $X_{ik}$  representa a  $k$ -ésima medida extraída da rede  $i$ . A explicação subsequente foca principalmente na previsão de  $Y_i$ , embora o mesmo processo seja aplicado à

previsão de  $C_i$ . Portanto, o modelo de aprendizado é definido por

$$Y_i = f(\mathbf{X}_i) + \delta. \quad (3.1)$$

O objetivo é inferir a função  $f()$  que relaciona  $Y_i$  com as medidas de redes complexas apresentadas na Tabela 2. Estimar  $Y_i$  é tratado como um problema de regressão, onde  $\delta$  representa um termo de erro aleatório independente de  $\mathbf{X}_i$ , seguindo uma distribuição normal com média zero e desvio padrão  $\sigma$ . Embora algoritmos de seleção de características e comparação de modelos possam ser usados para identificar componentes de  $\mathbf{X}_i$  que contribuem para a previsão de  $Y_i$ , este estudo utilizou medidas de redes complexas convencionais (veja Tabela 2).

A primeira medida utilizada neste estudo foi o coeficiente de agrupamento (C), uma medida local que quantifica a tendência de nós em uma rede a formar grupos bem conectados. Ele avalia a probabilidade de dois vizinhos de um nó estarem conectados, refletindo os padrões de agrupamento local na rede (WATTS; STROGATZ, 1998). A centralidade de proximidade (CLC), outra medida local, foi usada para calcular a proximidade de um nó com todos os outros nós na rede. Ela reflete a distância média entre um nó e todos os outros nós, indicando a eficiência do fluxo de informação ou recursos dentro do bairro local de um nó (FREEMAN, 1979). A centralidade de intermediação (BC) é uma medida que identifica nós que atuam como intermediários críticos na rede. BC quantifica o grau em que um nó está nas trajetórias mais curtas entre outros pares de nós, indicando sua influência sobre o fluxo de informação ou recursos em sua vizinhança (FREEMAN, 1977). O comprimento do caminho mais curto (SPL) mede o número mínimo de arestas necessárias para percorrer entre dois nós na rede, fornecendo informações sobre a conectividade da rede e a eficiência da transferência de informação ou recursos em regiões locais da rede (NEWMAN, 2010). O coeficiente de correlação de grau de Pearson (PC) examina a correlação entre os graus de nós conectados, capturando a tendência de nós com graus semelhantes a se conectarem e indicando a presença de assortatividade ou disassortatividade na rede (NEWMAN, 2018). A centralidade de informação (IC) avalia a importância de um nó com base em sua capacidade de controlar o fluxo de informação na rede, considerando o número de trajetos mais curtos que passam pelo nó (STEPHENSON; ZELIN, 1989). A centralidade de subgrafo (SC) mede a importância de um nó dentro de seu subgrafo local considerando os caminhos fechados que passam pelo nó, capturando sua influência em bairros específicos da rede (ESTRADA; HATANO, 2008). A centralidade de intermediação de fluxo atual aproximado (AC) quantifica o grau em que um nó controla o fluxo de corrente elétrica na rede, considerando os caminhos de corrente entre todos os pares de nós (BRANDES *et al.*, 2005). Por fim, a centralidade de vetor próprio (EC) determina a importância de um nó com base na centralidade de seus nós vizinhos, atribuindo maior importância aos nós conectados a outros nós importantes e capturando o conceito de influência (BONACICH, 1987). Tais medidas, usadas em conjunto, fornecem insights valiosos sobre estruturas de redes complexas, conectividade, eficiência, influência e organização comunitária (COSTA *et al.*, 2007).

### 3.0.3 Algoritmos de Aprendizado de Máquina

Os algoritmos de aprendizado de máquina utilizados, como o operador de encolhimento e seleção de coeficiente absoluto mínimo (LASSO), o regressor de perceptron de múltiplas camadas (MLP), a floresta aleatória (RF) e o aumento do gradiente extremo (XGBoost), foram escolhidos devido à sua eficácia nos meus dados, sem apresentar um custo computacional elevado. Dentre as diversas técnicas usadas para melhorar os algoritmos de aprendizado de máquina propostos, destacam-se a validação cruzada aninhada, embaralhamento e busca em grade. A primeira é um procedimento de validação cruzada múltipla adotado em aprendizado de máquina para seleção de modelo e avaliação de desempenho (WAINER; CAWLEY, 2021). É uma seleção de modelo e avaliação de desempenho mais rigorosa do que a validação cruzada tradicional, pois reduz o risco de *overfitting* e fornece uma estimativa mais precisa do desempenho do modelo em dados não vistos (CAWLEY; TALBOT, 2010). Sua principal ideia é a existência de um loop externo, que divide os dados em conjuntos de treinamento e teste, e um loop interno, que usa a validação cruzada para determinar os valores ótimos para os hiperparâmetros do modelo. O embaralhamento foi usado durante a validação cruzada aninhada para evitar possíveis vieses na seleção de dados de treinamento e teste, garantindo que o modelo aprendesse de forma equilibrada ao longo da gama de dados. Por fim, a busca em grade procurou os melhores hiperparâmetros do modelo explorando sistematicamente diferentes combinações de valores possíveis para eles. O conjunto de técnicas usadas contribuiu significativamente para o desenvolvimento de um modelo mais robusto e preciso. Uma validação cruzada externa com embaralhamento de 5 folds e uma validação cruzada interna com 5 folds também foram adotadas, seguindo abordagens semelhantes descritas em estudos anteriores (LEAVER *et al.*, 2018). Durante as dobras internas, foi realizada uma otimização de hiperparâmetros com busca em grade - detalhes específicos podem ser encontrados na Tabela 3.

O coeficiente de determinação, R<sup>2</sup>, é uma métrica usada para medir o quão bem um modelo de regressão se ajusta aos dados (NAKAGAWA; JOHNSON; SCHIELZETH, 2017). No entanto, quando adicionamos mais preditores ao modelo, o R<sup>2</sup> pode aumentar mesmo que esses novos preditores não ajudem realmente a explicar a variação na variável dependente. Para lidar

Tabela 2 – Medidas de redes complexas usadas aqui.

	Medidas de Rede	Sigla
X <sub>1</sub>	Coeficiente de agrupamento local	C
X <sub>2</sub>	Centralidade de proximidade	CLC
X <sub>3</sub>	Centralidade de Intermediação	BC
X <sub>4</sub>	Comprimento do caminho mais curto	SPL
X <sub>5</sub>	Coeficiente de correlação de grau de Pearson	PC
X <sub>6</sub>	Centralidade de informação	IC
X <sub>7</sub>	Centralidade de subgrafo	SC
X <sub>8</sub>	Centralidade de Intermediação de Fluxo Atual Aproximado	AC
X <sub>9</sub>	Centralidade de vetor próprio	EC

Tabela 3 – Hiperparâmetros para cada algoritmo de aprendizado de máquina otimizado pelo otimizador de busca em grade.

Preditor	Hiperparâmetros e descrição	Valores
RF	- max_depth: Profundidade máxima da árvore.	[10,20,30,40,50]
	- max_features: Número de características a serem consideradas para a melhor divisão.	[2,3,4]
	- min_samples_leaf: Número mínimo de amostras necessárias para estar em um nó folha.	[1,2,4]
	- min_samples_split: Número mínimo de amostras para a divisão de um nó interno.	[2,5,10]
	- n_estimators: Número de árvores na floresta.	[100,200,300]
LASSO	- parâmetro de regularização.	intervalo de 0,0001 a 0,0005
MLP	- ativação: Função de ativação para a camada oculta.	[identidade, logística, tangente hiperbólica, relu]
	- solver: Solucionador para a otimização de pesos.	[lbfgs, sgd, adam]
	- alpha: Parâmetro de penalização L2 (termo de regularização).	[0,0001,1e-5,0,01,0,001]
	- batch_size: Tamanho dos mini-lotes para otimizadores estocásticos.	[1000,5000]
	- learning_rate: Taxa de aprendizado para atualizações de peso.	[constante, invscaling, adaptativo]
XGBoost	- learning_rate_init: Taxa de aprendizado inicial utilizada.	[0,001,0,01,0,1,0,2,0,3]
	- subsample: Fração de observações a serem amostradas aleatoriamente em cada árvore.	[0,6,0,8,1,0]
	- max_depth: Profundidade máxima de cada árvore.	[3,4,5]

com isso, usamos o  $R^2$  ajustado, que leva em consideração o número de preditores e penaliza a inclusão daqueles irrelevantes. Esse ajuste nos dá uma avaliação mais precisa de quão bem nosso modelo prevê o resultado. Em termos mais simples, preferimos o  $R^2$  ajustado ao  $R^2$  porque evita que os valores sejam inflados artificialmente pela inclusão de preditores desnecessários. Isso garante uma avaliação mais confiável do desempenho do nosso modelo.

O esquema na Figura 10 fornece uma visão geral do processo abrangente delineado neste capítulo, que engloba várias etapas:

*a)* Geração de redes complexas: Geramos os oito tipos de redes em estudo. *b<sub>1</sub>)* Cálculo de medidas topológicas: Nesta etapa, calculamos as nove medidas topológicas para todas as redes complexas previamente geradas. *b<sub>2</sub>)* Implementação do modelo  $Q$ -votantes: Nesta fase, implementamos o modelo  $Q$ -votantes em cada uma das redes complexas usando três métodos de inicialização distintos representados por círculos coloridos: alto grau (roxo), baixo grau (verde) e seleção aleatória (laranja). Essa análise é realizada tanto para  $Y_i$  (tempo de consenso) quanto para  $C_i$  (frequência de mudanças de opinião). *c)* Criação do conjunto de dados: O conjunto de dados é construído contendo informações de todas as redes geradas. Cada linha representa uma rede específica, e as colunas contêm cálculos de medidas topológicas. O conjunto de dados também inclui valores para os métodos de inicialização (alto grau, baixo grau e seleção aleatória) tanto para  $Y_i$  (tempo de consenso) quanto para  $C_i$  (frequência de mudanças de opinião). *d)* Aplicação de algoritmos de aprendizado de máquina: Com base nas informações coletadas, algoritmos de aprendizado de máquina são usados para realizar análises adicionais e extrair informações significativas e estatísticas resumidas dos dados gerados.

### 3.1 Resultados

A Figura 11 apresenta boxplots ilustrando quatro algoritmos de aprendizado de máquina: LASSO (caixa marrom clara), RF (caixa rosa), XGBoost (caixa azul) e MLP (caixa amarela)

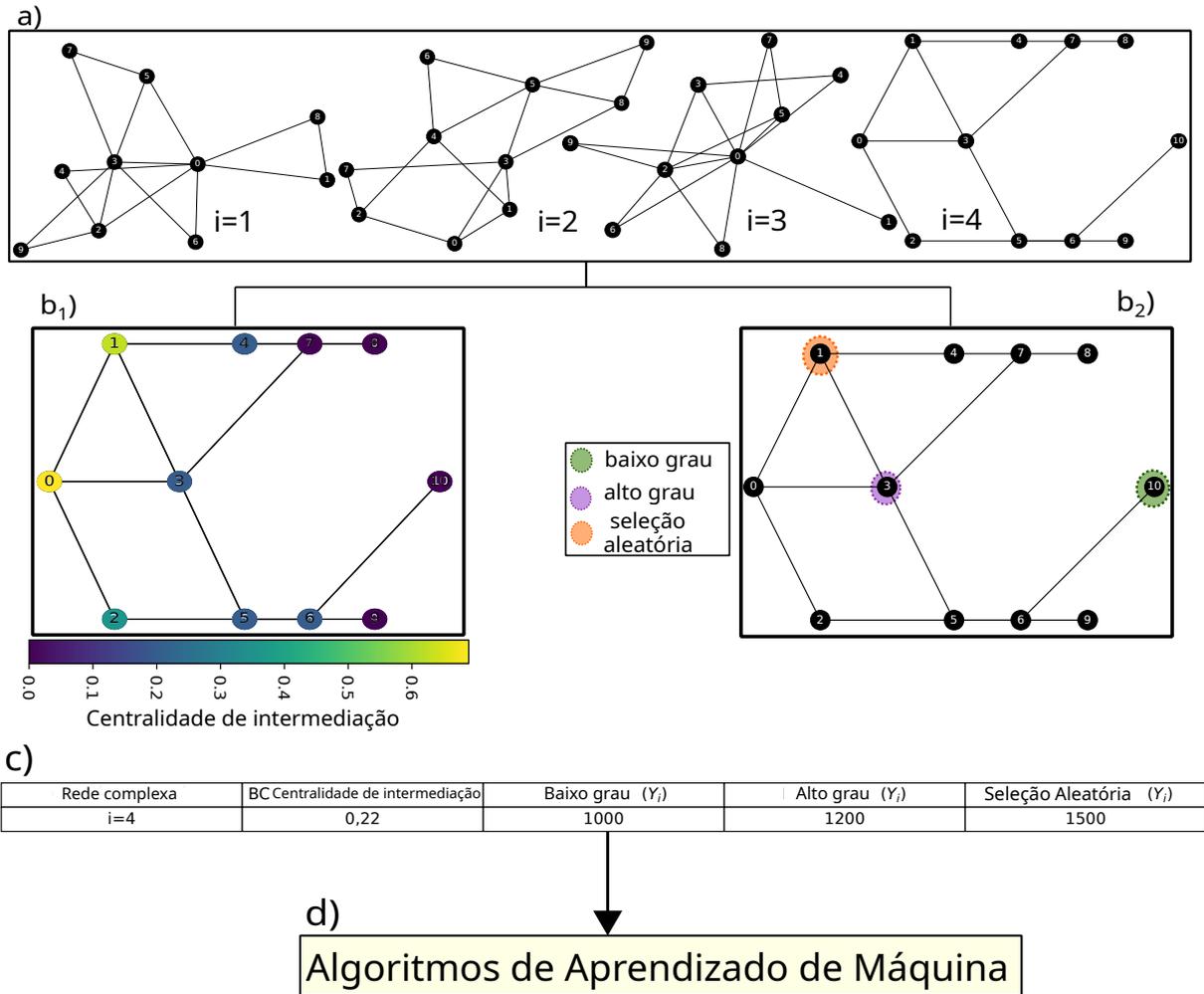


Figura 10 – a) Geração de redes complexas: Nesta etapa inicial, criamos redes complexas para análise. Neste exemplo ilustrativo, geramos quatro redes rotuladas como  $i = 1$ ,  $i = 2$ ,  $i = 3$  e  $i = 4$ , cada uma consistindo de um total de 10 nós. Vale a pena observar que em nossos resultados, geramos um conjunto de 800 redes complexas. b<sub>1</sub>) Cálculo de medidas topológicas: Nesta etapa, calculamos diversas medidas topológicas para todas as redes complexas previamente geradas. No entanto, para simplificar esta ilustração, focamos em uma única medida: Centralidade de Intermediação (BC). Aplicamos esse cálculo a uma das quatro redes, especificamente a rede  $i = 4$ . b<sub>2</sub>) Implementação do modelo  $Q$ -votantes: Nesta fase, implementamos o modelo  $Q$ -votantes em cada uma das redes complexas usando três métodos distintos de inicialização representados por círculos coloridos: alto grau (roxo), baixo grau (verde) e seleção aleatória (laranja). Esta análise é realizada tanto para  $Y_i$  (tempo de consenso) quanto para  $C_i$  (frequência de mudanças de opinião). Para simplificação, selecionamos apenas a rede  $i = 4$  para ilustrar esse processo. c) Criação do conjunto de dados: Nesta etapa, construímos o conjunto de dados que contém informações de todas as redes geradas. Cada linha da tabela representa uma rede específica, e as colunas contêm os cálculos de medidas topológicas para essas redes complexas. Além disso, incluímos os valores correspondentes aos métodos de inicialização (alto grau, baixo grau e seleção aleatória) em relação a  $Y_i$  e  $C_i$ . Para fins de ilustração, apresentamos informações apenas para a rede  $i = 4$ , incluindo BC e  $Y_i$ . No entanto, nos resultados completo, nossa tabela abrange 800 linhas e 15 colunas, compreendendo nove medidas topológicas, juntamente com três variações de métodos de inicialização para  $Y_i$  e  $C_i$ . d) Aplicação de algoritmos de aprendizado de máquina: Finalmente, com base nas informações coletadas, aplicamos algoritmos de aprendizado de máquina para realizar análises adicionais e obter insights significativos e estatísticas resumidas a partir dos dados gerados nas etapas anteriores. Figura adaptada de (PINEDA *et al.*, 2023a).

para prever  $Y_i$ . Vale ressaltar que RF (caixa 2, rosa) e XGBoost (caixa 3, azul) exibem as caixas mais altas, indicando sua tendência a produzir valores médios mais altos de R2 ajustado em comparação com os outros algoritmos. Além disso, LASSO, RF e XGBoost consistentemente produzem os melhores resultados em todos os métodos de inicialização, incluindo alto grau, baixo grau e seleção aleatória. Esses três algoritmos foram selecionados para análise adicional para prever  $C_i$ , e os resultados são apresentados na Figura 12. Notavelmente, LASSO (caixa 1, marrom claro) e RF (caixa 2, rosa) emergem como as caixas mais altas, sugerindo sua inclinação para produzir valores médios mais altos de R2 ajustado em comparação com XGBoost. Por esse motivo, escolhemos o algoritmo RF, que se destacou como o melhor em ambas as figuras, para ilustrar as seguintes figuras (Figura 13 e Figura 14).

Nas Figuras 13-A e B, referimos às variáveis  $Y_i$  e  $C_i$ , respectivamente, e ilustramos a relação entre os valores previstos ( $\hat{y}$ ) no eixo y e seus valores originais correspondentes ( $y$ ) no eixo x. Cada ponto no gráfico representa uma instância de dados específica, onde a coordenada x indica o valor real e a coordenada y representa o valor previsto. A linha vermelha tracejada representa um modelo de regressão linear, que fornece uma aproximação da tendência geral nos dados, auxiliando na visualização do desempenho preditivo de nosso modelo. Para  $Y_i$  (Figura 13-(A)), calculamos os coeficientes de correlação de Pearson, resultando em valores de 0,998 para inicialização de alto grau (pontos roxos), 0,991 para inicialização de baixo grau (pontos verdes) e 0,990 para seleção aleatória (pontos laranjas). Além disso, calculamos os valores de R2 ajustado, que foram 0,996, 0,982 e 0,968, respectivamente, para os mesmos métodos de inicialização. Para  $C_i$  (Figura 13-(B)), também calculamos os coeficientes de correlação de Pearson, resultando em valores de 0,999 para inicialização de alto grau, 0,991 para inicialização de baixo grau e 0,991 para seleção aleatória. Os valores de R2 ajustado foram 0,997, 0,983 e 0,945, respectivamente. Esses resultados destacam as correlações observadas entre os valores originais e previstos tanto para  $Y_i$  quanto para  $C_i$ , independentemente do método de inicialização utilizado.

O algoritmo RF avaliou as variáveis de entrada (características da rede) em nosso modelo. Ele avalia a significância das variáveis observando a melhoria que elas proporcionam ao modelo quando incorporadas às árvores de decisão. A priorização das características da rede com base em sua importância média entre diferentes métodos de inicialização, como representado na Figura 14, fornece insights valiosos sobre suas capacidades preditivas. Nessa análise, as características foram classificadas de acordo com sua importância média, considerando três métodos de inicialização: alto grau (barra roxa), baixo grau (barra verde) e seleção aleatória (barra laranja). Ao analisar o gráfico de barras (Figura 14), fica evidente que as características da rede com maior importância média ocupam as primeiras posições. Notavelmente, ao tentar prever  $Y_i$ , o coeficiente de agrupamento (C) emerge como a medida mais significativa (Figura 14-A). Isso indica que a estrutura da rede, especialmente a formação de grupos coesos, desempenha um papel crucial na rapidez da obtenção de consenso dentro do modelo de votação  $Q$ . Em relação a  $C_i$ , a centralidade da informação (IC) se destaca como a medida de rede mais relevante (Figura 14-B).

Isso sugere que a disseminação e a influência da informação na rede desempenham um papel fundamental na dinâmica das mudanças de opinião. Essas medidas de rede desempenham papéis vitais na previsão de diferentes aspectos do modelo de votação  $Q$ . Essas inferências destacam a importância de diferentes aspectos da rede em relação aos vários fenômenos em estudo. Enquanto  $C$  se concentra na formação de consenso,  $IC$  se relaciona às mudanças de opinião. Em contraste, medidas como centralidade de vetor próprio ( $EC$ ), coeficiente de correlação de grau de Pearson ( $PC$ ) e centralidade de subgrafo ( $SC$ ) não demonstram capacidades preditivas significativas nesses cenários.

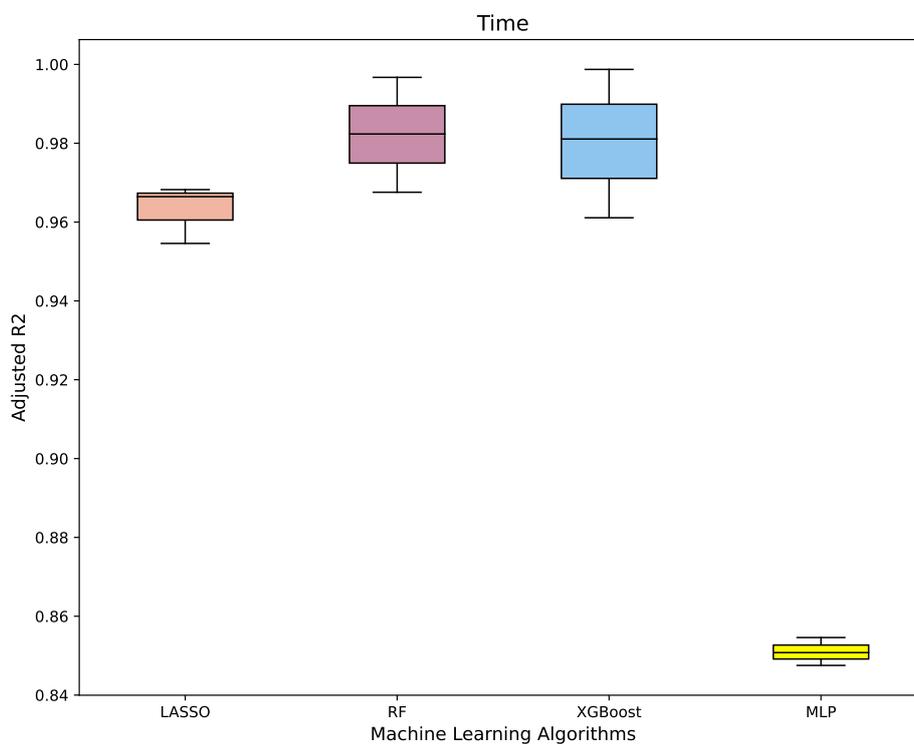


Figura 11 – Cada boxplot representa a distribuição dos valores de R2 ajustado para os respectivos algoritmos de aprendizado de máquina (LASSO, RF, XGBoost e MLP), considerando diferentes métodos de inicialização (alto grau, baixo grau e seleção aleatória) para prever  $Y_i$ . Entre os algoritmos, a caixa 2 e a caixa 3 correspondem aos algoritmos RF e XGBoost, respectivamente, e mostram os valores mais altos de R2 ajustado. Isso indica que, em média, os algoritmos RF e XGBoost superam os outros algoritmos (LASSO e MLP) em termos de precisão preditiva. Figura de (PINEDA *et al.*, 2023a).

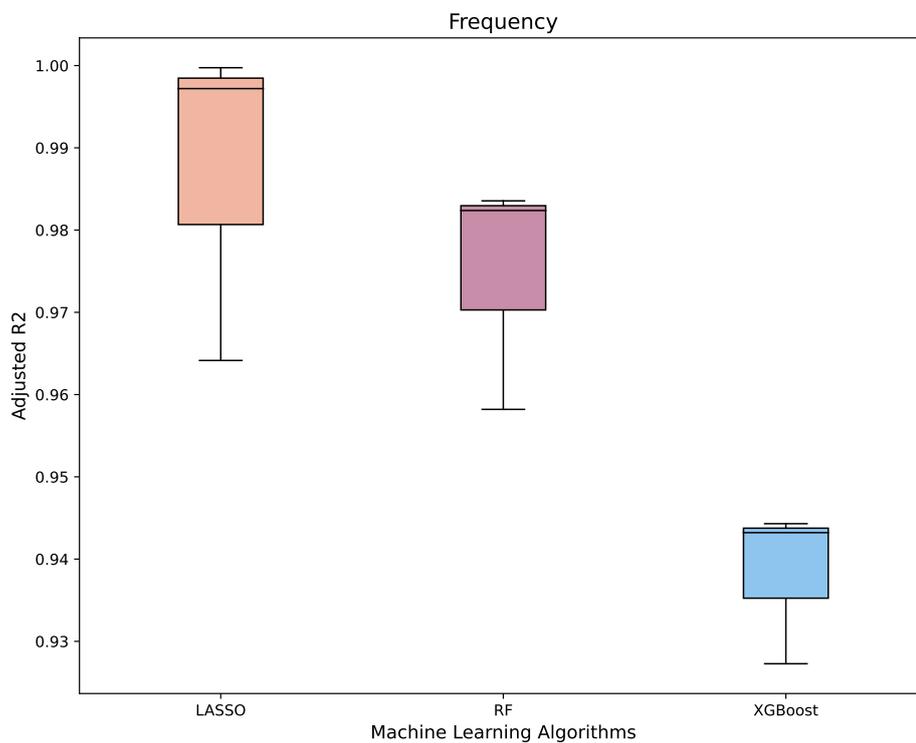


Figura 12 – Cada boxplot representa a distribuição dos valores de R2 ajustado para o respectivo algoritmo de aprendizado de máquina (LASSO, RF e XGBoost), considerando diferentes métodos de inicialização (alto grau, baixo grau e seleção aleatória) para prever  $C_i$ . A caixa 1, que corresponde ao algoritmo LASSO, é a mais alta. Isso indica que, em média, os valores de R2 ajustado para o algoritmo LASSO são mais altos em comparação com os outros algoritmos (RF e XGBoost) considerados. Figura de (PINEDA *et al.*, 2023a).

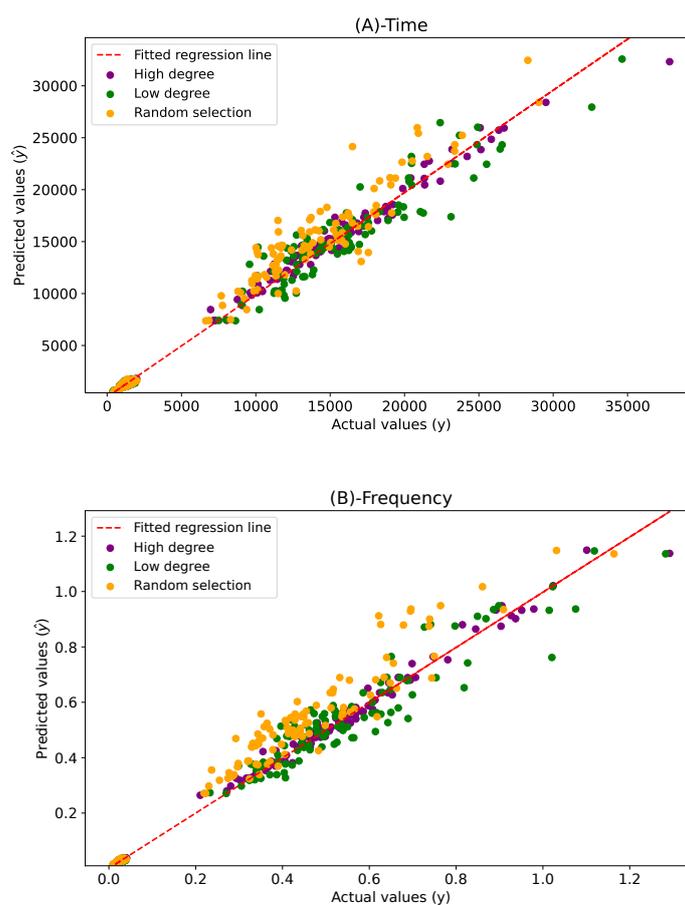


Figura 13 – Ilustração mostrando a relação entre seus valores originais correspondentes ( $y$ ) e valores previstos ( $\hat{y}$ ) para (A) Tempo e (B) Frequência em relação à seleção de agentes com alto grau (pontos roxos), baixo grau (pontos verdes) e seleção aleatória (pontos laranjas) para a inicialização da dinâmica. Esta análise foi conduzida usando o algoritmo RF. Esta análise foi conduzida usando o algoritmo RF. Figura de (PINEDA *et al.*, 2023a).

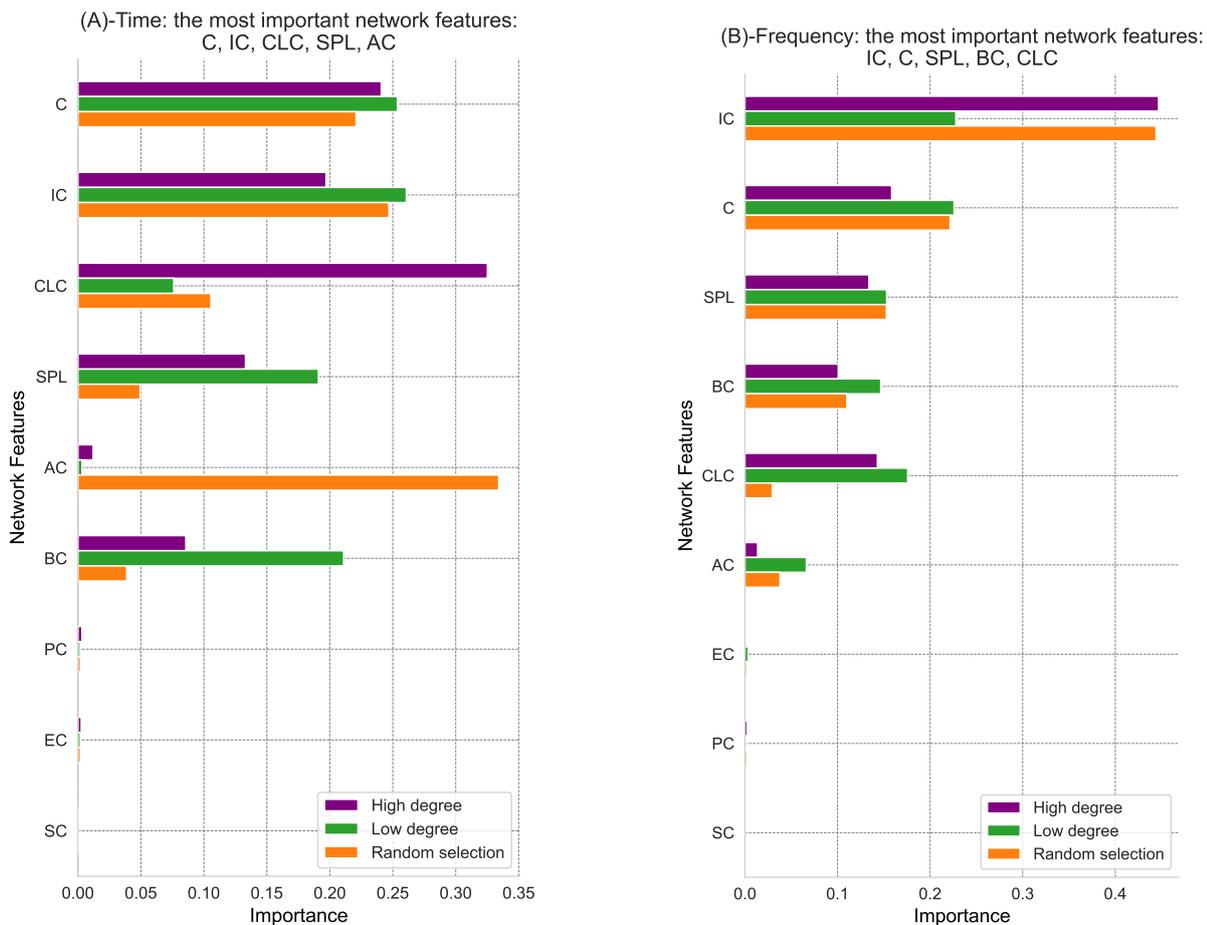


Figura 14 – A análise das características mais cruciais, determinadas com base na importância média de medidas complexas de rede, foi conduzida para prever tanto (A)  $Y_i$  quanto (B)  $C_i$  usando vários métodos de inicialização. Esses métodos abrangiam a seleção de agentes com o maior grau (barras roxas), o menor grau (barras verdes) e seleção aleatória (barras laranjas) para iniciar a dinâmica. Notavelmente, o coeficiente de agrupamento (C) e a centralidade da informação (IC) consistentemente emergiram como as duas medidas mais significativas em ambos os cenários. Esta análise foi realizada empregando o algoritmo RF. Figura de (PINEDA *et al.*, 2023a).

---

## MODELO ACOPLADO

---

O modelo proposto neste capítulo está baseado em nosso artigo publicado em (PINEDA *et al.*, 2023b) e tem como objetivo analisar a propagação de boatos em um sistema que melhor representa a heterogeneidade dos agentes. Para isso, apresentamos um modelo baseado em agentes que combina o modelo de Axelrod (AXELROD, 1997) com o modelo de difusão de rumores proposto por Nekovee (NEKOVEE *et al.*, 2007). Na Figura 15, podemos visualizar uma ilustração do modelo acoplado, que consiste em dois processos dinâmicos que representam a evolução das relações culturais e a dinâmica de propagação de boatos, respectivamente. Ambos os processos ocorrem simultaneamente em diferentes níveis, onde o modelo de Axelrod é usado para descrever a evolução das relações culturais dos agentes, enquanto o modelo de difusão de rumores é usado para descrever a propagação de boatos entre os mesmos agentes. A similaridade cultural entre os agentes modula a probabilidade de propagação de boatos. Portanto, para que o boato seja disseminado, torna-se essencial a interação entre os agentes no modelo de Axelrod. O parâmetro  $p$  controla a taxa de atualização dos estados dos agentes, enquanto  $1 - p$  controla a dinâmica de propagação de boatos. Usando essa estrutura, podemos avaliar o estado final do sistema por meio de dois parâmetros de ordem: a fração de agentes  $\langle S \rangle$  no maior cluster cultural e a fração de agentes mais resistentes  $\langle R \rangle$  que não estão mais espalhando boatos.

### 4.0.1 Axelrod

Quando nos referimos ao modelo de Axelrod, cada nó  $k$  é representado por um vetor cultural  $\Phi_k = (\phi_{k,1}, \phi_{k,2}, \dots, \phi_{k,F})$  de tamanho  $F$ , onde  $F$  é o número de características culturais dos agentes e os estados  $\phi \in (1, Q)$  representam os estados disponíveis para cada característica. Note que os  $Q$  estados de cada característica denotam as possibilidades/valores diferentes que essa característica pode assumir. A dinâmica de evolução cultural neste modelo ocorre da seguinte maneira:

- Escolhe-se aleatoriamente um agente  $i$ ;

- Escolhe-se aleatoriamente um agente  $j$  tal que  $j \in V_i$ , em que  $V_i$  é o conjunto de agentes vizinhos de  $i$ ;
- Calcula-se a probabilidade de interação  $P_{i,j}$  entre os dois agentes, em que  $P_{i,j}$  é dado pela razão entre o número de características culturais compartilhadas por  $i$  e  $j$  e  $F$  que é o número de características culturais;
- Com probabilidade  $P_{i,j}$ , escolhe-se aleatoriamente  $m'$  do conjunto de valores  $m$  tais que  $\phi_{i,m} \neq \phi_{j,m}$ , de modo que  $\phi_{j,m'} \rightarrow \phi_{i,m'}$ ;
- A sequência de itens acima é repetida até o estado de equilíbrio, em que qualquer par agente-vizinho não possa mais interagir ( $P_{i,j} = 0$  ou  $P_{i,j} = 1$ ), também conhecido como o estado absorvente do modelo.

### 4.0.2 Rumor

No modelo de propagação de rumor, cada agente de uma população de  $N$  agentes pode estar em uma das seguintes categorias: suscetível, infectado e recuperado. Esta modelagem assume que o rumor é um processo de contato, sendo transmitido pelo contato direto entre infectados e suscetíveis. Neste trabalho, a dinâmica de difusão de rumor é dirigida pelo seguinte conjunto de regras:

- Escolhe-se aleatoriamente um agente  $i$ ;
- Se o agente  $i$  estiver infectado, escolhe-se aleatoriamente um agente  $j$  tal que  $j \in W_i$ , em que  $W_i$  é o conjunto de agentes vizinhos de  $i$ ;
- Calcula-se a probabilidade de interação  $P_{i,j}$  (do modelo de Axelrod) entre os dois agentes, onde  $P_{i,j}$  é dado pela razão entre o número de características culturais compartilhadas por  $i$  e  $j$  e o número de características culturais  $F$ ;
- A probabilidade  $P_{i,j}$ , que nos fornece a probabilidade de interação social entre dois agentes vizinhos, condiciona a transmissão de rumores, de modo que, com  $P_{i,j}$ :
  - Se o agente vizinho  $j$  estiver suscetível,  $j$  se torna infectado com probabilidade  $\lambda$ ;
  - Se o agente vizinho  $j$  estiver infectado,  $i$  se torna recuperado com probabilidade  $\alpha$ .

A sequência de passos acima é reproduzida até que não exista mais agentes infectados na rede. Para garantir a convergência da dinâmica, seguimos Nekovee (NEKOVEE *et al.*, 2007) e introduzimos uma probabilidade espontânea de recuperação  $\delta = 10^{-6}$ . A inserção desse parâmetro é crucial, pois na ausência de características culturais semelhantes entre os agentes, a disseminação do boato não ocorrerá. Como consequência, o agente infectado não se recupera, levando à instabilidade do modelo de rumor.

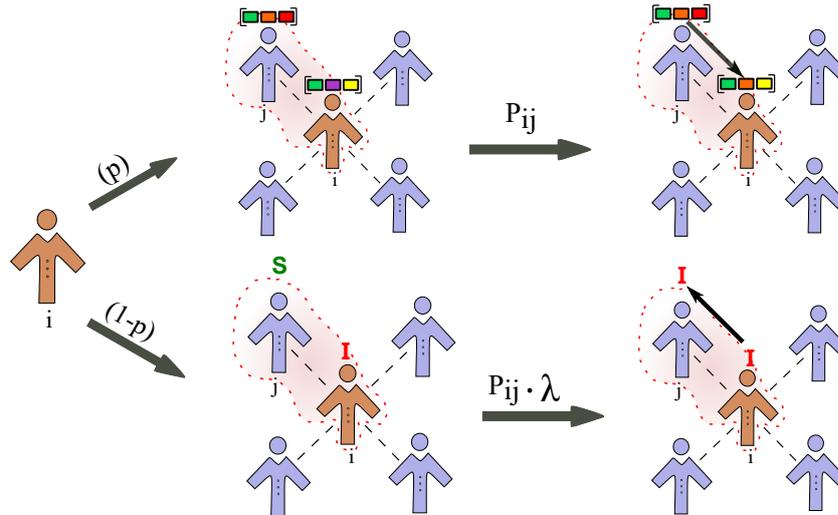


Figura 15 – Mecanismos de assimilação cultural e propagação de boatos. Um agente  $i$  participa da dinâmica cultural com probabilidade  $p$  e na propagação do boato com probabilidade  $1 - p$ . Na dinâmica cultural, o agente  $i$  seleciona um vizinho aleatório  $j$  e assimila uma característica divergente com probabilidade  $P_{ij}$ . Na dinâmica de boatos, parcialmente representada aqui, um agente propagador  $i$  transmite o boato para um de seus vizinhos ignorantes  $j$  com probabilidade  $\lambda P_{ij}$ . Figura de (PINEDA *et al.*, 2023b).

A dinâmica cultural é controlada por  $F$  e  $Q$ , e os parâmetros  $\lambda$ ,  $\alpha$  podem ser ajustados para controlar a dinâmica do boato. Dependendo de  $F$  e  $Q$ , a dinâmica cultural pode levar o sistema a um estado absorvente monocultural ou multicultural (Figura 16). Para qualquer  $F$  dado, há transição de fase do estado monocultural para o multicultural à medida que a heterogeneidade do sistema ( $\sim F^Q$ ) aumenta.

A Figura 16 sugere que  $\langle R \rangle$  também pode depender da heterogeneidade do sistema. Existem dois regimes no sistema: um regime em que o boato se espalhou por quase toda a rede ( $\langle R \rangle \rightarrow 1$ ), e um regime em que o boato não se propagou com sucesso ( $\langle R \rangle \rightarrow 0$ ). A transição de um regime para outro depende dos parâmetros culturais e ‘epidemiológicos’ do modelo acoplado. Para focar nossa atenção nos efeitos da heterogeneidade cultural na disseminação do boato, fixamos  $\lambda = 1$  e  $\alpha = 0,01$ .

### 4.0.3 Simulações e Discussões

Note que ambas dinâmicas estão vinculadas pela influência da similaridade cultural do modelo de Axelrod na determinação de um contato entre dois agentes vizinhos quaisquer no modelo de rumor, isso é fundamental para nos dizer se é pouco ou muito provável que haja contato entre dois agentes e, havendo o contato, determinar se ocorrerá a transmissão (com  $\lambda$ ) ou remissão (com  $\alpha$ ) da propagação rumor.

A duas dinâmicas são, a princípio, independentes. O parâmetro  $p$ , aqui chamado de proxy, determina com qual probabilidade ocorre uma iteração no modelo de Axelrod, de modo que atualizações são realizadas no modelo de rumor com  $1 - p$ . As topologias das redes nas duas

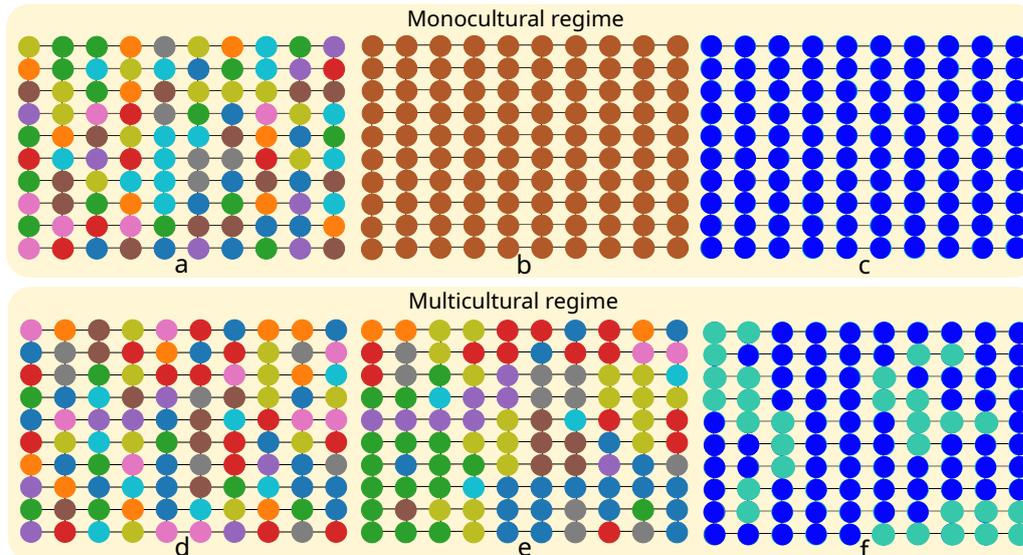


Figura 16 – Exemplos de configurações absorventes do modelo acoplado. O painel superior mostra os estados culturais iniciais (a) e finais (b) dos agentes para  $F = 3$  e  $Q = 4$ . Cada cor corresponde a um vetor cultural, e podemos observar o efeito ordenador da dinâmica cultural sobre a configuração inicial desordenada. O painel (c) mostra que todos os agentes ficaram recuperados (azul) no estado final. O painel inferior mostra os estados culturais iniciais (d) e finais (e) dos agentes para  $F = 3$  e  $Q = 14$ . Vemos que o efeito de ordem da dinâmica cultural não é suficientemente forte para homogeneizar os estados culturais dos agentes. Curiosamente, o painel (f) mostra que o boato se espalhou entre agentes pertencentes a diferentes domínios culturais no estado estacionário. Em ambas as situações,  $L = 10$ ,  $\lambda = 1,0$ ,  $\alpha = 0,01$  e  $p = 0,1$ . Figura de (PINEDA *et al.*, 2023b).

dinâmicas também são independentes. Aqui, para os primeiros resultados, consideramos que as redes são quadradas de lado  $L$ , de modo que o número total de agentes  $N = L^2$ .

Para facilitar a interpretação dos resultados reunimos as variáveis do modelo acoplado na Tabela 4.

Tabela 4 – Parâmetros utilizados no modelo e seus respectivos significados

variável	significado
$F$	número de características culturais
$Q$	número de estados culturais
$p$	probabilidade de atualização no modelo de Axelrod
$\lambda$	probabilidade de transmissão do rumor
$\alpha$	probabilidade de remissão do rumor
$L$	lado da rede quadrada
$R$	fração de agentes recuperados
$S$	fração de agentes que pertencem ao maior cluster

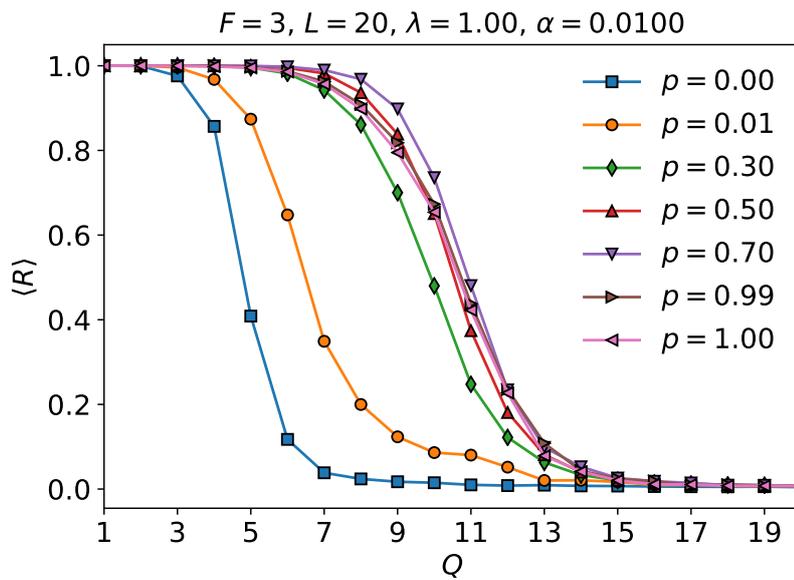
As Figuras 17a e 17b apresentam gráficos que ilustram a relação entre a fração de agentes recuperados, representada pelo parâmetro de ordem  $\langle R \rangle$ , e o número de estados  $Q$  para diferentes valores de  $p$ . Vale ressaltar que o número de agentes recuperados no estado estacionário é

frequentemente usado como um parâmetro de ordem em modelos epidêmicos (KERMACK; MCKENDRICK, 1927), e em nosso modelo acoplado, essa medida é essencial para caracterizar a dinâmica da propagação de boatos.

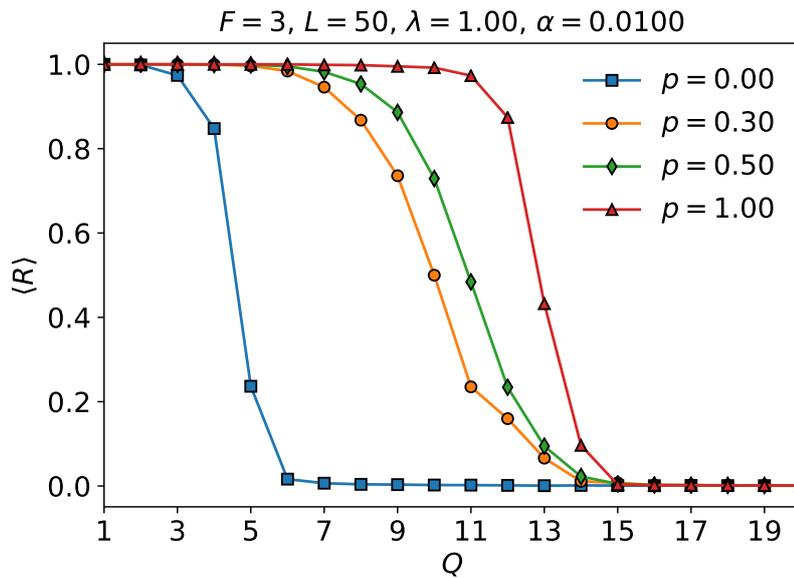
Na Figura 17a, é possível observar que a curva correspondente a  $p = 0,00$  (curva azul) está mais à esquerda do que as outras curvas. Isso ocorre porque, nesse caso, o modelo de Axelrod não é atualizado e o rumor se propaga apenas na configuração inicial desse modelo. Já quando  $p = 1,00$  (curva rosa), apenas o modelo de Axelrod é atualizado e a dinâmica do rumor ocorre após a estabilização da configuração final do modelo cultural. Como resultado, o modelo de rumor apresenta valores de  $\langle R \rangle = 1,00$  para um conjunto maior de valores de  $Q$ .

No entanto, para valores intermediários de  $p$ , por exemplo,  $p = 0,70$  (curva roxa), é possível notar uma propagação mais eficiente do rumor. Nesse caso, a curva correspondente está mais à direita do que todas as outras curvas, indicando que existem mais pessoas infectadas pelo rumor para  $p = 0,70$  do que para  $p = 1,00$ . Portanto, podemos inferir que o rumor é capaz de ultrapassar os domínios culturais do modelo de Axelrod, o que não ocorre nos extremos  $p = 0,00$  e  $p = 1,00$ .

A Figura 17b apresenta os resultados obtidos para uma rede maior, de lado  $L = 50$ . Nesta figura, as curvas estão ordenadas de forma crescente dos valores de  $p$ , começando com a curva azul para  $p = 0,00$ , seguida pela curva laranja para  $p = 0,30$ , a curva verde para  $p = 0,50$  e, finalmente, a curva rosa para  $p = 1,00$ . Observa-se que, com o aumento do tamanho da rede, o rumor não consegue mais ultrapassar os domínios culturais do modelo de Axelrod. Portanto, podemos destacar que o tamanho do sistema desempenha um papel fundamental no processo de difusão de rumores.



(a) Ilustração da relação entre a fração de agentes recuperados  $\langle R \rangle$  e o número de estados culturais  $Q$ , para diferentes valores de  $p$  em uma rede de lado  $L = 20$ .



(b) Ilustração da relação entre a fração de agentes recuperados  $\langle R \rangle$  e o número de estados culturais  $Q$ , para diferentes valores de  $p$  em uma rede de lado  $L = 50$ .

Figura 17

Em seguida, examinamos como o tamanho da rede afeta a propagação de rumores em nosso modelo acoplado. Para investigar essa questão, foram analisadas três métricas para avaliar o comportamento da rede quadrada em relação ao número de estados  $Q$  e ao tamanho  $L$ . Os resultados foram apresentados por meio de gráficos, apresentados a seguir:

A Figura 18-(a) ilustra a fração de recuperados  $\langle R \rangle$  em relação ao número de estados  $Q$ , para diversos valores da rede  $L$  e  $p = 0,00$ . É possível observar que  $\langle R \rangle$  tem um valor próximo de 1,00 para baixos valores de  $Q$ , e diminui à medida que aumentamos os valores de  $Q$ . O ponto de transição entre as fases  $\langle R \rangle = 1,00$  (regime monocultural) e  $\langle R \rangle = 0,00$  (regime multicultural) foi determinado pelo valor máximo da variância ( $\sigma^2$ ) do parâmetro de ordem  $\langle R \rangle = 1,00$ . Portanto, na Figura 18-(b), ilustramos a variância ( $\sigma^2$ ) em relação ao número de estados  $Q$ . Ao analisarmos o valor máximo da variância, podemos verificar a existência do ponto de transição. Por exemplo, para a rede  $L = 400$  (curva cinza), o pico da curva está em  $Q_c = 4$ .

A Figura 18-(c) ilustra outra maneira de verificar a transição de fase do modelo. Nesta figura, mostramos como o número de recuperados  $\langle R \rangle$  se comporta ao aumentarmos o tamanho da rede  $L$ . Observamos que, para as curvas  $Q = 2$  (curva azul),  $Q = 3$  (curva verde) e  $Q = 4$  (curva vermelha), o número de recuperados  $\langle R \rangle$  se mantém constante à medida que aumentamos  $L$ . Entretanto, após a transição de fase em  $Q = 5$  (curva laranjada) e  $Q = 6$  (curva marrom),  $\langle R \rangle$  converge para 0 à medida que  $L$  converge para  $\infty$ . Concluímos, portanto, que as fases  $Q = 2$  e  $Q = 6$  são distintas e que há duas fases diferentes no limite termodinâmico.

É interessante notar que, para o caso em que  $p = 0,00$ , a transição de fase do modelo de Axelrod é idêntica ao problema de percolação por links. Na percolação por links, os nós vizinhos têm uma probabilidade  $p$  de estarem conectados e  $(1 - p)$  de estarem desconectados. Conforme proposto originalmente, a conexão entre nós adjacentes permite que ocorra um fluxo de informações (ou água) entre eles (para mais informações, consulte (HAMMERSLEY, 2013)). No problema de percolação por links, há um limiar, dado por  $p_c = \frac{1}{2}$ , que define o ponto no qual a informação (ou água) é transmitida de um extremo a outro de uma rede regular bidimensional. Esse problema é semelhante à difusão de rumor no modelo de Axelrod para  $p = 0,00$ . Ao calcular a expressão  $1 - (\frac{1}{Q})^F$  no modelo de Axerold, estamos calculando a probabilidade de dois vizinhos não interagirem, ou seja, a probabilidade do rumor não se espalhar. Ao substituímos  $p_c = \frac{1}{2}$  na expressão  $p_c = 1 - (\frac{1}{Q})^3$ , obtemos que o valor crítico de  $Q$  para o modelo de Axelrod deve ser igual a 4,85. Esse valor está entre 4 e 5, o que é consistente com os resultados apresentados na Figura 18-(b).

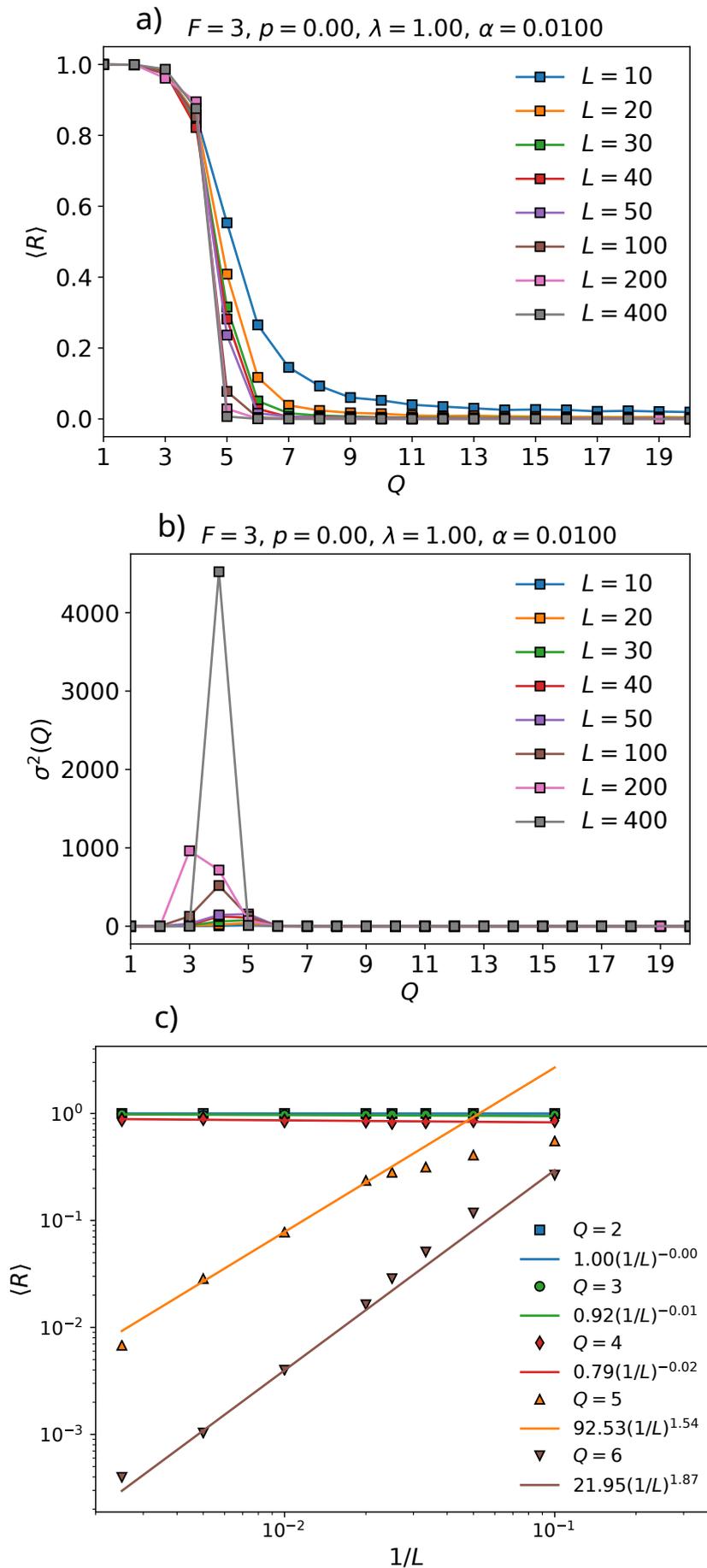


Figura 18 – a) Fração de recuperados  $\langle R \rangle$  versus o número de estados  $Q$ ; b) Variância ( $\sigma^2$ ) versus o número de estados  $Q$ ; c) Fração de recuperados  $\langle R \rangle$  versus  $\frac{1}{L}$ , onde  $L$  é o tamanho das redes quadradas em estudo. Para todos os três gráficos,  $p$  foi fixado em 0,00.

---

A seguir, ampliamos as análises da transição de fases para o valor  $p = 1,00$ . A Figura 19-(a) ilustra a fração de recuperados  $\langle R \rangle$  em função do número de estados  $Q$ , para diferentes tamanhos de rede  $L$ , considerando  $p = 1,00$ .

Note que  $\langle R \rangle$  é aproximadamente 1,00 para baixos valores de  $Q$ , e à medida que aumentamos os valores de  $Q$ , os valores de  $\langle R \rangle$  diminuem. Na Figura 19-(b), ilustramos a variância ( $\sigma^2$ ) em função do número de estados  $Q$ . Ao analisarmos o valor máximo da variância, verificamos a existência do ponto de transição. Por exemplo, observe que para a rede  $L = 50$  (curva roxa), o pico da curva ocorre em  $Q_c = 13$ . Também foi possível verificar a transição de fase na Figura 19-(c). Note que para  $Q = 10$  (curva azul),  $Q = 11$  (curva verde),  $Q = 12$  (curva vermelha) e  $Q = 13$  (curva laranja), os valores de  $\langle R \rangle$  convergem para 1,00 à medida que aumentamos o tamanho da rede  $L$ , enquanto para  $Q = 15$  (curva marrom), os valores de  $\langle R \rangle$  convergem para 0,00 com o aumento de  $L$ . Portanto, concluímos que  $Q = 13$  e  $Q = 15$  representam fases distintas do modelo acoplado. Dessa forma, podemos afirmar que para  $p = 1,00$  também existem duas fases distintas no limite termodinâmico.

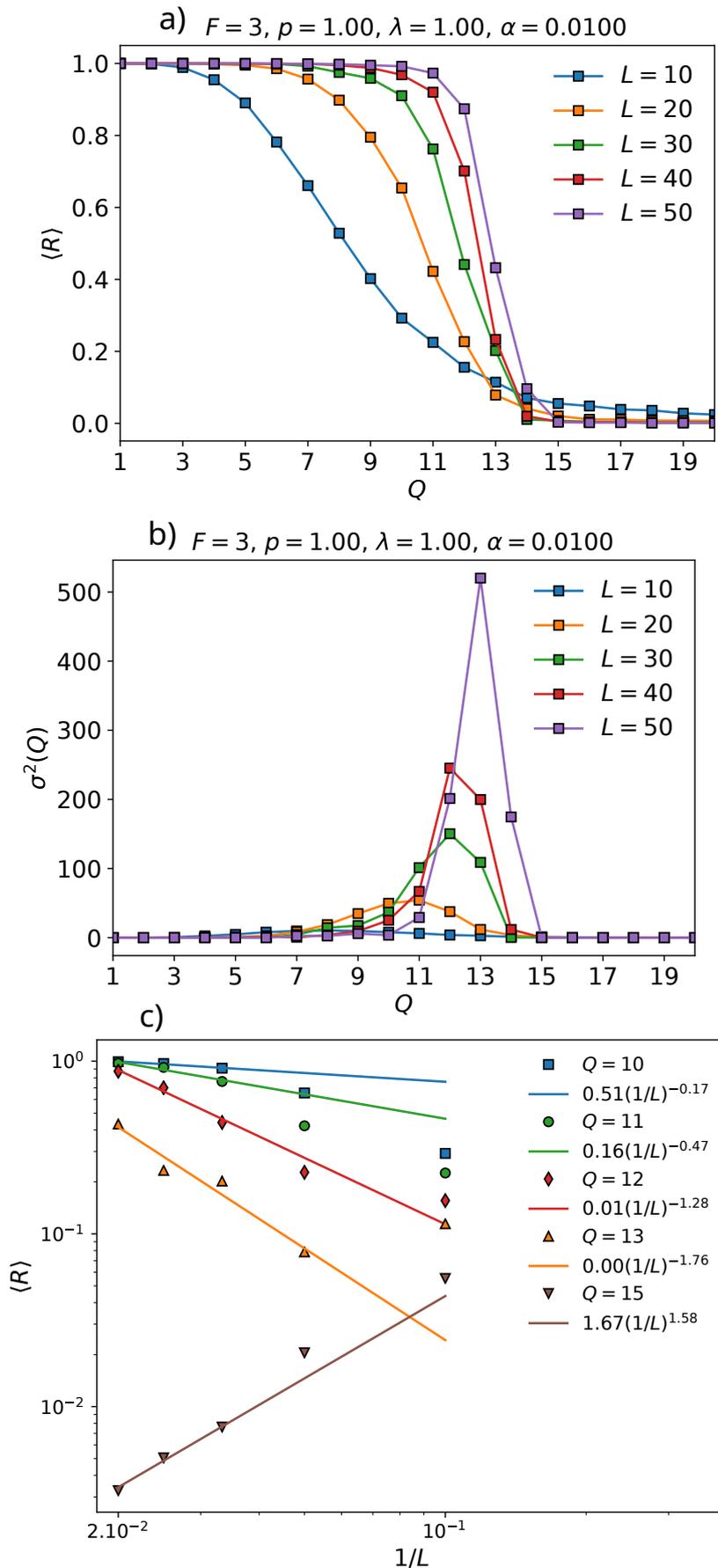


Figura 19 – a) Fração de recuperados  $\langle R \rangle$  versus o número de estados  $Q$ ; b) Variância ( $\sigma^2$ ) versus o número de estados  $Q$ ; c) Fração de recuperados  $\langle R \rangle$  versus  $\frac{1}{L}$ , onde  $L$  é o tamanho das redes quadradas em estudo. Para todos os três gráficos,  $p$  foi fixado em 1,00.

---

Finalmente, foi analisada a existência da transição de fases para um valor intermediário de  $p$ , ou seja,  $p = 0,50$ . A Figura 20-(a) apresenta a fração de recuperados  $\langle R \rangle$  em função do número de estados  $Q$ , para diferentes tamanhos de rede  $L$ . Observa-se que, à medida que aumentamos o tamanho da rede  $L$ , a maioria das curvas se sobrepõe. Por exemplo, para a rede  $L = 40$  (curva vermelha) e  $L = 50$  (curva roxa), não há diferença entre as curvas. Na Figura 20-(b), observa-se o pico da curva  $L=50$  em  $Q_c=11$ . Finalmente, na Figura 20-(c), observa-se que, ao aumentarmos o tamanho da rede  $L$ , o número de recuperados  $\langle R \rangle$  se mantém constante para  $Q = 9$  (curva azul),  $Q = 10$  (curva verde) e  $Q = 11$  (curva vermelha). Já para  $Q = 16$  (curva laranjada) e  $Q = 17$  (curva marrom), os valores de  $\langle R \rangle$  convergem para 0,00 à medida que  $L$  tende a  $\infty$ . Dessa forma, concluímos que também existem duas fases distintas no limite termodinâmico para  $p = 0,50$ .

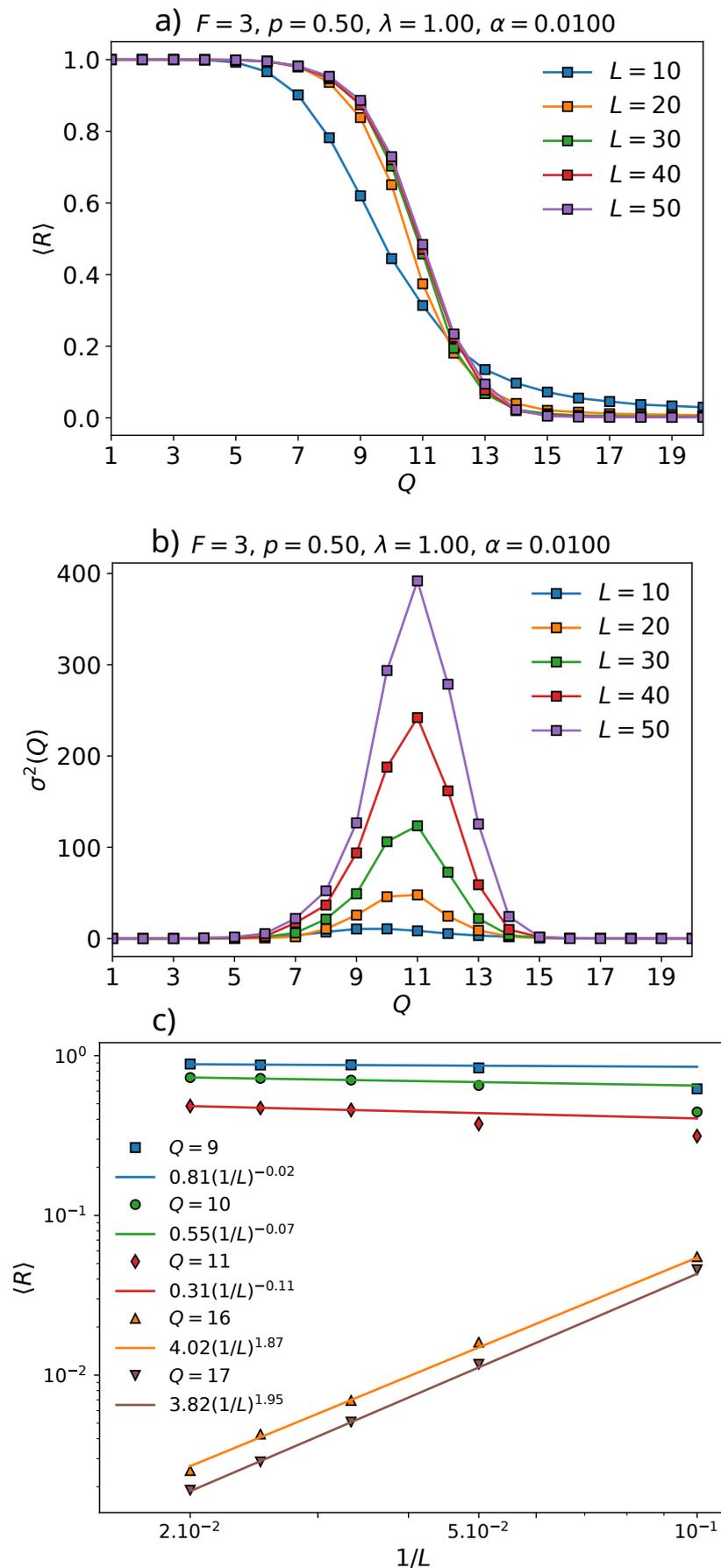
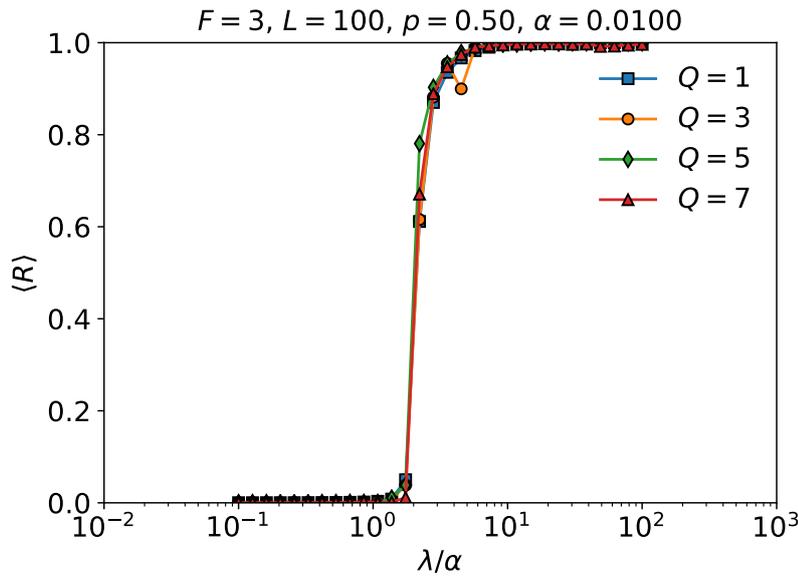


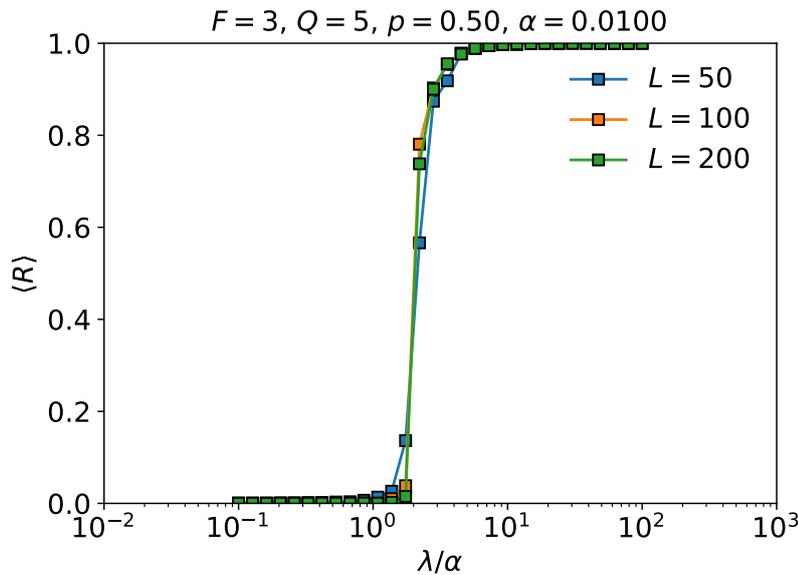
Figura 20 – a) Fração de recuperados  $\langle R \rangle$  versus o número de estados  $Q$ ; b) Variância ( $\sigma^2$ ) versus o número de estados  $Q$ ; c) Fração de recuperados  $\langle R \rangle$  versus  $1/L$ , onde  $L$  é o tamanho das redes quadradas em estudo. Para todos os três gráficos,  $p$  foi fixado em 0,50.

---

A Figura 21a ilustra a fração de recuperados  $\langle R \rangle$  versus a razão  $\lambda/\alpha$  variando o número de culturas  $Q$  para uma rede  $L = 100$  e  $p = 0,50$ . Observamos que a transição de fase não depende dos valores de  $Q$ , contanto que esses valores pertençam ao regime monocultural ( $Q = 1, 3, 5$  e  $7$ ). Isso ocorre porque, para que todos os indivíduos da rede se recuperem, é necessário que a rede seja monocultural, devido às restrições impostas pelo modelo de Axelrod. Além disso, à medida que aumentamos a razão  $\lambda/\alpha$ , a propagação do rumor se propaga mais fácil, as curvas de  $\langle R \rangle$  crescem e seus valores se aproximam de 1,00. Na Figura 21b, apresentamos a fração de recuperados  $\langle R \rangle$  em função de  $\frac{\lambda}{\alpha}$  para  $Q = 5$  (regime monocultural) e  $p = 0,50$ , considerando três valores de tamanho da rede:  $L = 50, 100$  e  $200$ . É notável que a transição de fase não é influenciada pelos valores de  $L$  para o regime monocultural ( $Q = 5$ ). Além disso, à medida que a razão  $\frac{\lambda}{\alpha}$  aumenta, o rumor se dissemina com mais facilidade, resultando em um crescimento das curvas e uma aproximação dos valores de  $\langle R \rangle$  a 1,00.



(a) Ilustração da fração de recuperados  $\langle R \rangle$  e a razão  $\lambda/\alpha$  para um valor fixo de  $p = 0,50$ , uma rede com tamanho  $L = 100$  e para quatro valores diferentes de  $Q$  pertencentes ao regime monocultural:  $Q = 1, 3, 5$  e  $7$ .



(b) Ilustração da fração de recuperados  $\langle R \rangle$  e a razão  $\lambda/\alpha$  para um valor fixo de  $p = 0,50$ , uma rede com tamanho  $L = 50, 100$ , e  $200$ , e com  $Q = 5$  (regime monocultural).

Figura 21

É curioso observar que, em nossos resultados, a transmissibilidade do rumor ocorre quando a taxa  $\lambda$  é maior que 1. Na literatura, é conhecido que  $R_0 > 1$  é um parâmetro epidemiológico que representa o risco de difusão de uma doença infecciosa sobre uma população suscetível (REIA; FONTANARI, 2021; MURRAY, 2007). No entanto, é importante ressaltar

que, assim como no caso de doenças infecciosas, nem todos os agentes serão afetados pelo rumor quando  $R_0 > 1$  (REIA; FONTANARI, 2021). Nesse sentido, nossos resultados são promissores, já que a transmissão do rumor ocorre quando  $\frac{\lambda}{\alpha} > 1$ .

Para finalizar este capítulo, realizamos uma comparação entre os parâmetros de ordem utilizados aqui:  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$ . A escolha entre os parâmetros depende da informação que se deseja extrair do sistema. Enquanto  $\langle R \rangle$  captura a fração de agentes que foram propagadores em algum momento da dinâmica,  $\langle S \rangle$  capta a formação de domínios culturais resultantes da influência social e da homofilia, que impulsionam a interação entre agentes vizinhos. Como apontado em (REIA; NEVES, 2015), os agentes pertencentes aos mesmos *clusters* culturais interagem e trocam mais informações durante a dinâmica, e o nível de troca cresce com o tamanho do domínio cultural.

A Figura 22 compara as curvas de transição de  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$  para diferentes tamanhos da rede,  $L = 10$ ,  $L = 20$  e  $L = 30$ , respectivamente. Curiosamente, observamos que, para  $L = 10$ ,  $\langle R \rangle > \langle S \rangle$  para um intervalo de  $Q$ . Este resultado significa que a propagação do boato não é limitada pelo conjunto de agentes que pertencem aos maiores *clusters* culturais, apesar das interações culturais mais intensas entre esses agentes aumentarem a sua similaridade cultural, facilitando assim a propagação do boato. Desde  $\langle R \rangle > \langle S \rangle$  e  $\langle S \rangle > 0,5$ , o boato conseguiu se espalhar não apenas para agentes pertencentes ao maior *cluster* cultural, mas também para *clusters* vizinhos. Além disso, parece que a difusão de boatos é mais sensível à heterogeneidade do que à dinâmica cultural. À medida que o nível de heterogeneidade aumenta com  $Q$ ,  $\langle R \rangle \rightarrow 0$  mais rápido que  $\langle S \rangle$ , embora o ponto de transição ( $Q_c^R(L = 10) = 10$ ) para  $\langle R \rangle$  é maior que o ponto de transição ( $Q_c^S(L = 10) = 9$ ) para  $\langle S \rangle$ .

O padrão acima mencionado muda à medida que o tamanho do sistema aumenta. Para  $L = 20$  (Fig. 22, painel central), observamos que  $Q_c^R(L = 20) = Q_c^S(L = 20) = 11$ , de modo que as transições capturadas por ambos os parâmetros tenham o mesmo ponto de transição. Também observamos que  $\langle R \rangle \leq \langle S \rangle \forall Q$ , o que significa que a disseminação de rumores é sempre limitada pelo maior *cluster* cultural. Achados semelhantes são observados para  $L = 30$  (Fig. 22, painel à direita), onde  $\langle R \rangle \leq \langle S \rangle \forall Q$ , em que  $Q_c^R(L = 30) = 11$  e  $Q_c^S(L = 30) = 12$ . À medida que o tamanho do sistema aumenta,  $Q_c^R(L \rightarrow \infty) = 11$  e  $Q_c^S(L \rightarrow \infty) = 14$  para  $p = 0,50$ ,  $\lambda = 1,00$ ,  $\alpha = 0,01$ , de forma que a transição para  $\langle R \rangle$  ocorra antes da transição para  $\langle S \rangle$  indicando que a propagação de boatos é de fato limitada por  $\langle S \rangle$  no limite termodinâmico.

Em nosso modelo, a dinâmica do rumor é limitada pelo tamanho do maior *cluster* cultural. No entanto, a propagação do rumor em uma região monocultural não implica que todos os agentes serão contaminados. Para atingir a contaminação total, é necessário que a taxa  $\frac{\lambda}{\alpha}$  seja maior, ou seja, que o rumor seja altamente infeccioso. Por essa razão, apresentamos a Figura 23, na qual aumentamos a razão  $\frac{\lambda}{\alpha}$  no painel à direita. À medida que aumentamos essa razão, note que  $\alpha = 0,0001$ , as curvas de  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$  se sobrepõem, e o ponto de transição ocorre para o mesmo valor crítico  $Q_c = 13$ . Portanto, podemos inferir que um rumor altamente infeccioso se

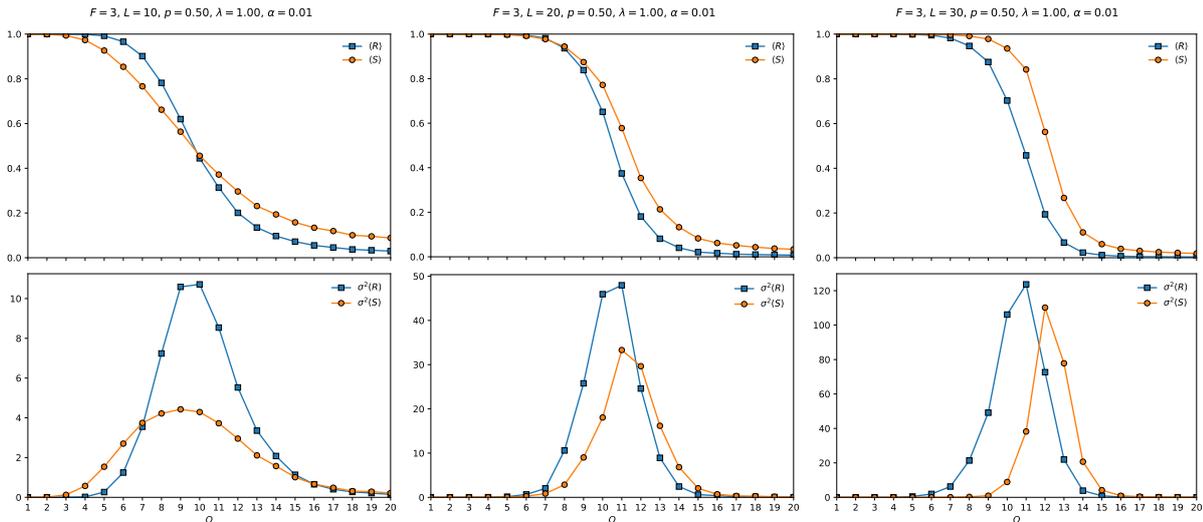


Figura 22 – Os painéis superior e inferior à esquerda mostram a média e a variância, respectivamente, dos parâmetros de ordem  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$  em função do parâmetro de controle  $Q$ , que controla o nível de heterogeneidade no sistema, em um sistema com  $L = 10$ . Os painéis superior e inferior central mostram a média e a variância, respectivamente, dos parâmetros de ordem  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$  em função do parâmetro de controle  $Q$  em um sistema com  $L = 20$ , e os painéis superior e inferior à direita mostram a média e a variância, respectivamente, dos parâmetros de ordem  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$  em função do parâmetro de controle  $Q$  em um sistema com  $L = 30$ . Os resultados foram obtidos para o modelo com  $F = 3$ ,  $p = 0,50$ ,  $\lambda = 1,00$  e  $\alpha = 0,01$ .

propagará ainda mais.

Nossos resultados indicam que, em sistemas com baixos valores de  $N$ , podemos encontrar valores de  $Q$  e  $p$  nos quais  $\langle R \rangle > \langle S \rangle$ . Isso sugere que os rumores foram capazes de ultrapassar as barreiras culturais do modelo de Axelrod, espalhando-se assim entre agentes pertencentes a diferentes domínios culturais. No entanto, nossas observações indicam que, à medida que  $N$  aumenta, independentemente de  $p$  e  $Q$ , a relação  $\langle R \rangle \leq \langle S \rangle$  se mantém, sugerindo que os rumores são restringidos a domínios de agentes semelhantes em sistemas grandes.

Neste capítulo, foi ilustrado que a propagação da informação é intrinsecamente limitada em sistemas que contêm agentes com características distintas. Isso conduz à formação de agrupamentos de agentes que adotam perspectivas diversas sem que haja a necessidade de ajustes na estrutura subjacente (HOLME; NEWMAN, 2006; FU; WANG, 2008; INIGUEZ *et al.*, 2009). Esses resultados sublinham a importância da heterogeneidade na origem e na manutenção de opiniões polarizadas em uma dada população.

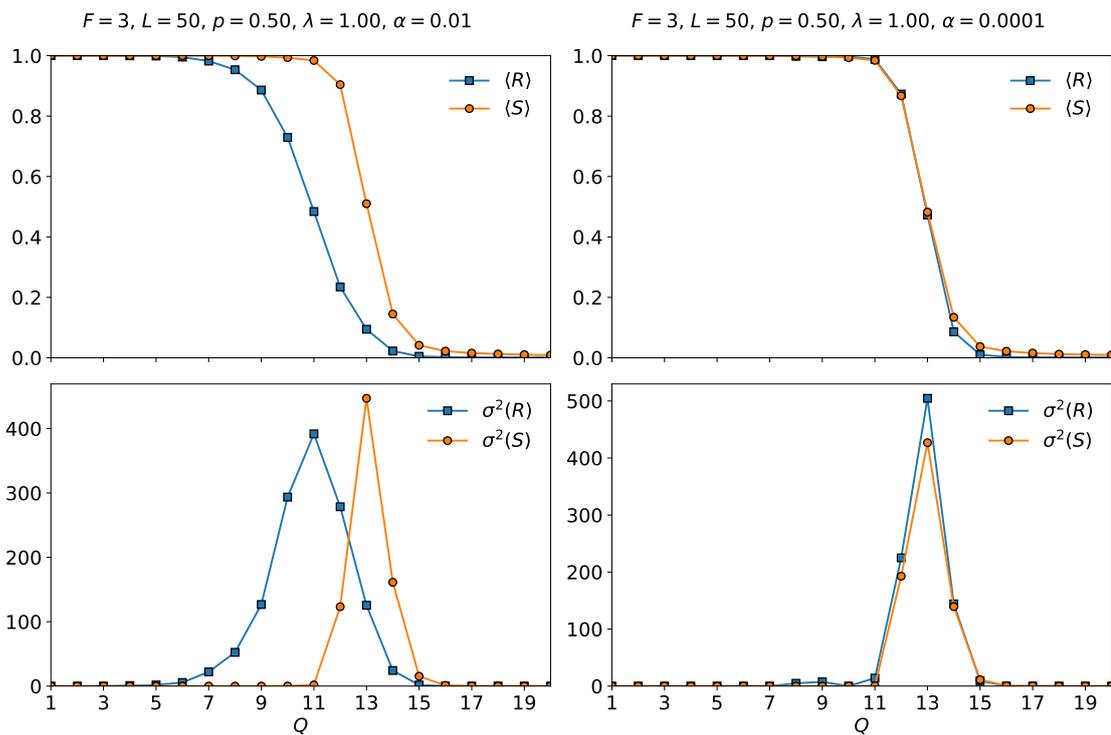


Figura 23 – Os painéis superior e inferior à esquerda mostram a média e a variância, respectivamente, dos parâmetros de ordem  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$  em função do parâmetro de controle  $Q$ , em um sistema com  $L = 50$  com  $F = 3$ ,  $p = 0,50$ ,  $\lambda = 1,00$  e  $\alpha = 0,01$ . Os painéis superior e inferior à direita mostram a média e a variância, respectivamente, dos parâmetros de ordem  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$  em função do parâmetro de controle  $Q$ , em um sistema com  $L = 50$ , com  $F = 3$ ,  $p = 0,50$ ,  $\lambda = 1,00$  e  $\alpha = 0,0001$ .



---

## CONECTIVIDADE

---

### 5.0.1 O efeito da conectividade nas redes de Watts-Strogatz

No capítulo 4 desta tese foram apresentados estudos sobre a propagação de informações, resultantes da combinação do modelo de Axelrod com o modelo de rumor. Observamos que, em redes pequenas, as informações são capazes de ultrapassar as barreiras culturais do modelo de Axelrod. No entanto, conforme aumentamos o número de agentes na rede, esse fenômeno deixa de ocorrer. Portanto, o objetivo deste capítulo é investigar possíveis estratégias e mecanismos que possam permitir a transposição das barreiras culturais impostas pelo modelo de Axelrod em redes maiores.

Uma das redes complexas mais estudadas (também utilizada no capítulo 3) é a rede de Watts-Strogatz, conhecidas também como redes de mundo pequeno em inglês, por *small world*, proposta pelos físicos Duncan Watts e Steven Strogatz, em 1998 (WATTS; STROGATZ, 1998). Essa rede é formada por um anel de nós (ou vértices) interconectados, onde cada nó está conectado aos seus  $k$  vizinhos mais próximos (WATTS; STROGATZ, 1998). No entanto, a rede também possui arestas "aleatórias" adicionadas com probabilidade  $p_w$ , que conectam nós distantes. Essa propriedade de aleatoriedade é importante, pois permite que a rede tenha uma alta eficiência de comunicação, mas também uma alta capacidade de tolerância a falhas (BARABÁSI, 2016). Além disso, tais redes possuem a distância entre os vértices curtas e o agrupamento local alto (NEWMAN, 2010). As redes de Watts-Strogatz têm sido amplamente utilizadas como modelos para estudar diversos fenômenos em sistemas complexos, tais como propagação de doenças (PASTOR-SATORRAS; VESPIGNANI, 2001), difusão de informações (WENG; MENCZER; AHN, 2013) e sincronização de osciladores (ACEBRÓN *et al.*, 2005).

As redes de Watts-Strogatz são conectadas de uma forma específica que envolve a criação de um anel de nós interconectados, com cada nó conectado aos seus  $k$  vizinhos mais próximos, e a adição de arestas aleatórias com probabilidade  $p_w$ . Esse processo é realizado da seguinte maneira:

1. Começa-se com um anel de  $N$  nós, onde cada nó está conectado aos seus  $k$  vizinhos mais próximos;
2. Para cada nó  $i$  no anel, escolhe-se um vizinho  $j$  que esteja a uma distância maior que  $k$ , com probabilidade  $pw$ ;
3. Adiciona-se uma aresta que conecta  $i$  a  $j$ ;
4. Repete-se o passo 2 e 3 para cada nó  $i$ , até que todas as arestas aleatórias tenham sido adicionadas.

O parâmetro  $pw$  das redes de Watts-Strogatz é uma medida da probabilidade de que uma aresta aleatória seja adicionada em relação ao número total de arestas da rede. Esse parâmetro afeta a topologia da rede e pode influenciar suas propriedades, como a eficiência da comunicação da rede.

Quando  $pw$  é próximo de zero, a rede tende a ser altamente regular, com cada nó conectado aos seus  $k$  vizinhos mais próximos. Isso resulta em uma rede com alta eficiência de comunicação local, mas com baixa capacidade de comunicação global. Por outro lado, quando  $pw$  é próximo de um, a rede tende a ser altamente aleatória, com muitas arestas aleatórias adicionadas. Isso resulta em uma rede com alta capacidade de comunicação global, mas com baixa eficiência de comunicação local. A Figura 24 exemplifica a construção das redes de Watts-Strogatz com  $N = 20$  nós,  $k = 2$  e variando os valores de  $pw$  entre 0, 0,1 e 1.

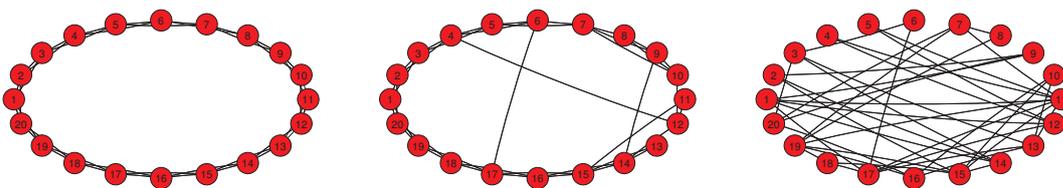


Figura 24 – Ilustração de uma rede de Watts-Strogatz com  $N = 20$ ,  $k = 2$  e  $pw = 0$ ,  $pw = 0,1$  e  $pw = 1$ , respectivamente.

As Figuras 25, 26 e 27 apresentam as curvas de  $\langle R \rangle$  (em azul) e  $\langle S \rangle$  (em laranja) em função de  $Q$  para diferentes valores de  $pw$  (0, 0,10, 0,50 e 1,0) em redes de Watts-Strogatz com tamanhos  $N=50$ ,  $N=100$  e  $N=200$ , respectivamente. Os significados de tais parâmetros podem ser lembrados na tabela 4. Notamos que, em todas as três redes de tamanhos diferentes, à medida que aumentamos o valor de  $pw$ , a diferença entre as curvas  $\langle R \rangle$  (azul) e  $\langle S \rangle$  (laranja) aumenta. Isso significa que a curva azul, que representa o parâmetro de ordem do modelo de propagação de rumores, supera a curva laranja, que se refere ao parâmetro de ordem do modelo de Axelrod para alguns valores de  $Q$ . Para uma análise e visualização mais precisa, calculamos a área entre as curvas  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$  usando o método dos retângulos (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2008). A Figura 28 mostra como o parâmetro  $pw$  nas redes de Watts-Strogatz se relaciona com as áreas  $\langle R \rangle - \langle S \rangle$

para redes de tamanho  $N = 50$  (linha pontilhada roxa),  $N = 100$  (linha pontilhada vermelha) e  $N = 200$  (linha pontilhada verde) com  $k = 4$  vizinhos mais próximos. Os parâmetros do modelo acoplado foram mantidos constantes em  $F = 3$ ,  $p = 0,50$ ,  $\lambda = 1,00$ , e  $\alpha = 0,01$ . Observamos que, à medida que  $pw$  aumenta, os valores das áreas  $\langle R \rangle$  -  $\langle S \rangle$  também aumentam.

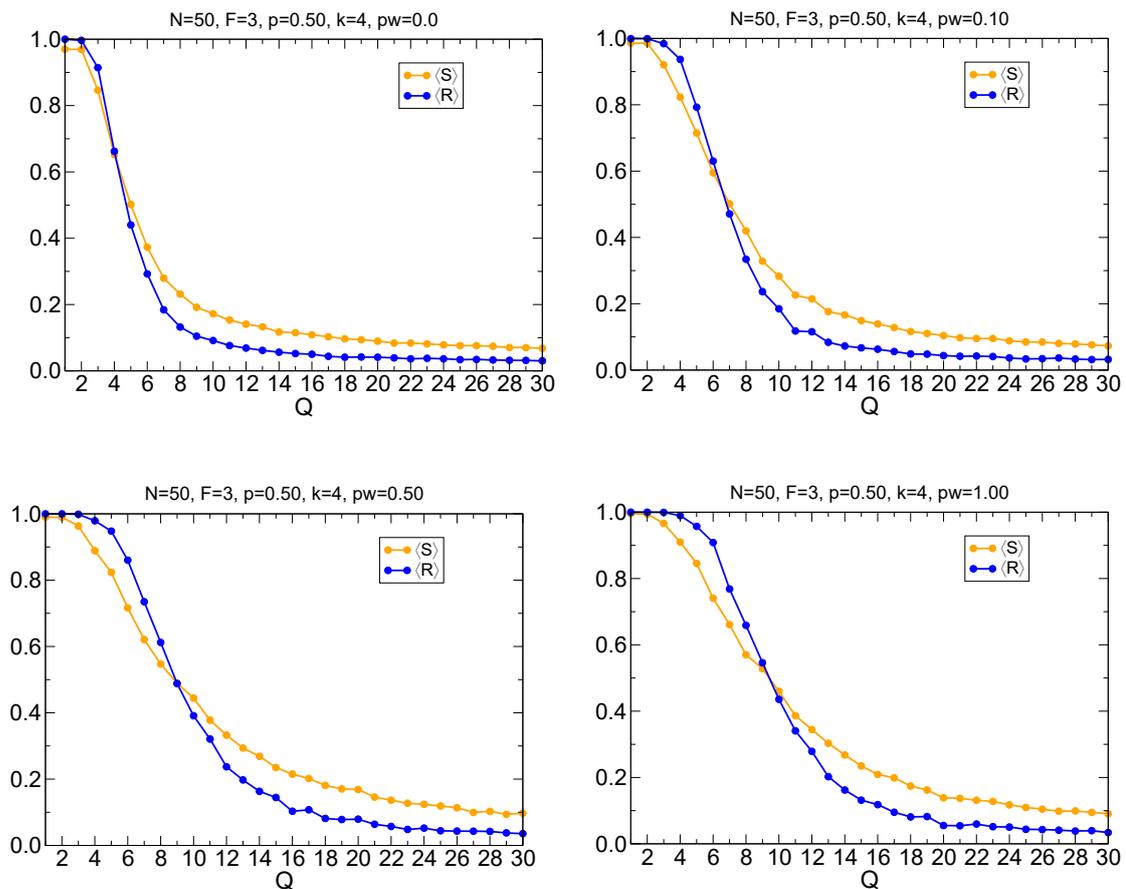


Figura 25 – Os quatro painéis mostram os parâmetros de ordem  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$  em função de  $Q$  para diferentes valores de  $pw$  (0, 0,10, 0,50 e 1,0) em uma rede de Watts-Strogatz com  $N = 50$ ,  $F = 3$ ,  $p = 0,50$ ,  $\lambda = 1,00$  e  $\alpha = 0,01$ .

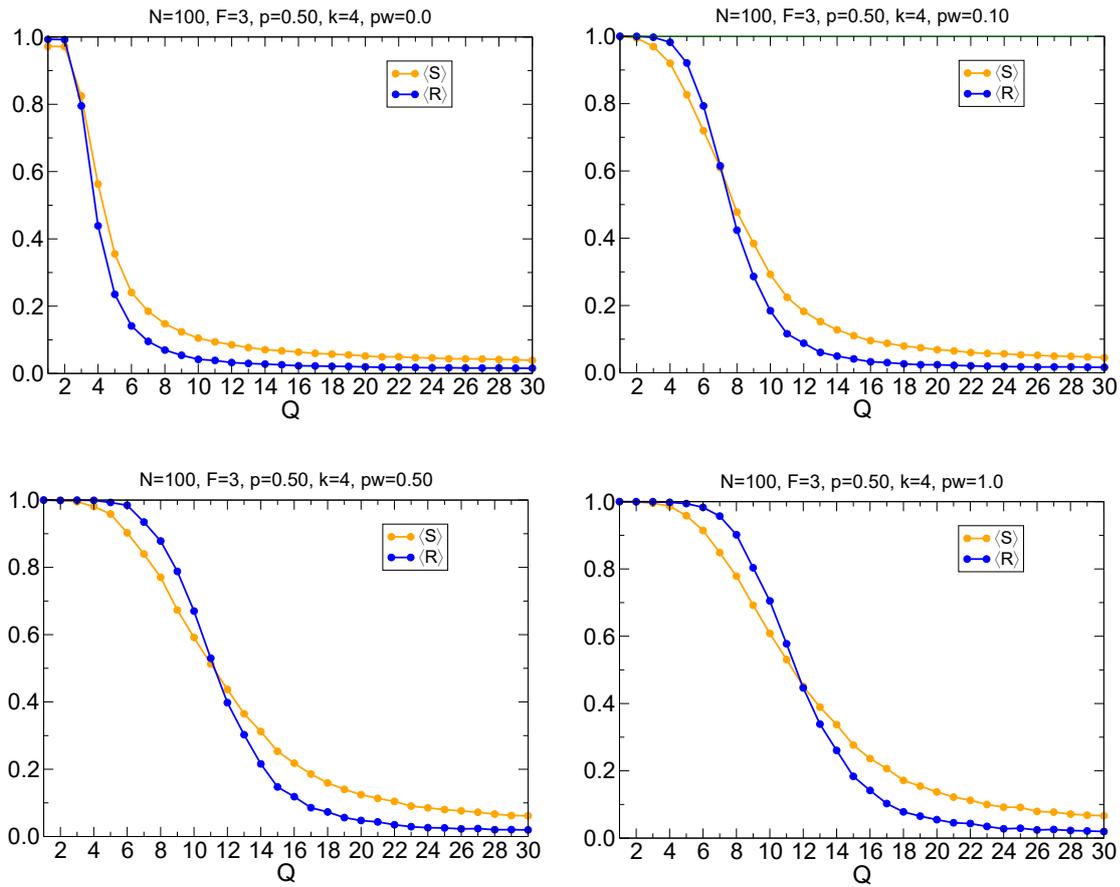


Figura 26 – Os quatro painéis mostram os parâmetros de ordem  $\langle S \rangle$  e  $\langle R \rangle$  em função de  $Q$  para diferentes valores de  $pw$  (0, 0,10, 0,50 e 1,0) em uma rede de Watts-Strogatz com  $N = 100$ ,  $F = 3$ ,  $p = 0,50$ ,  $\lambda = 1,00$  e  $\alpha = 0,01$ .

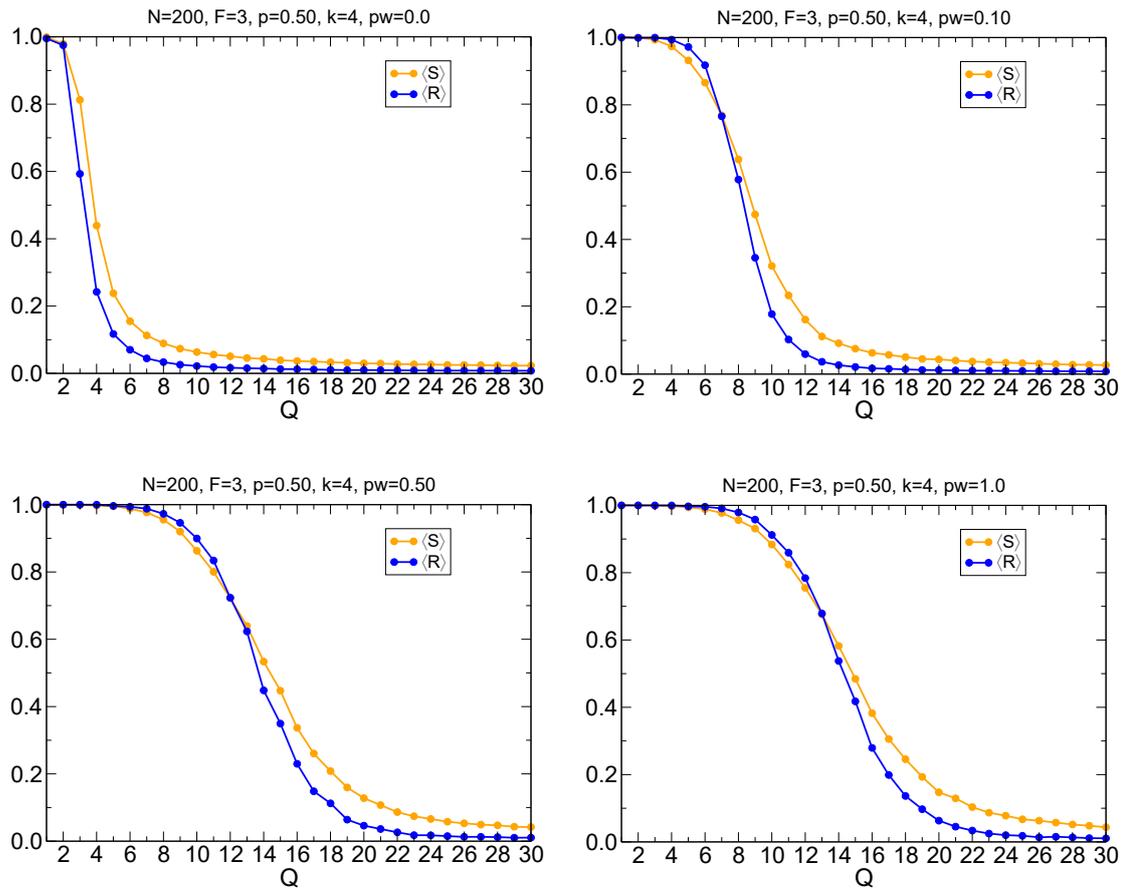


Figura 27 – Os quatro painéis mostram os parâmetros de ordem  $\langle S \rangle$  e  $\langle R \rangle$  em função de  $Q$  para diferentes valores de  $pw$  (0, 0,10, 0,50 e 1,0) em uma rede de Watts-Strogatz com  $N = 200$ ,  $F = 3$ ,  $p = 0,50$ ,  $\lambda = 1,00$  e  $\alpha = 0,01$ .

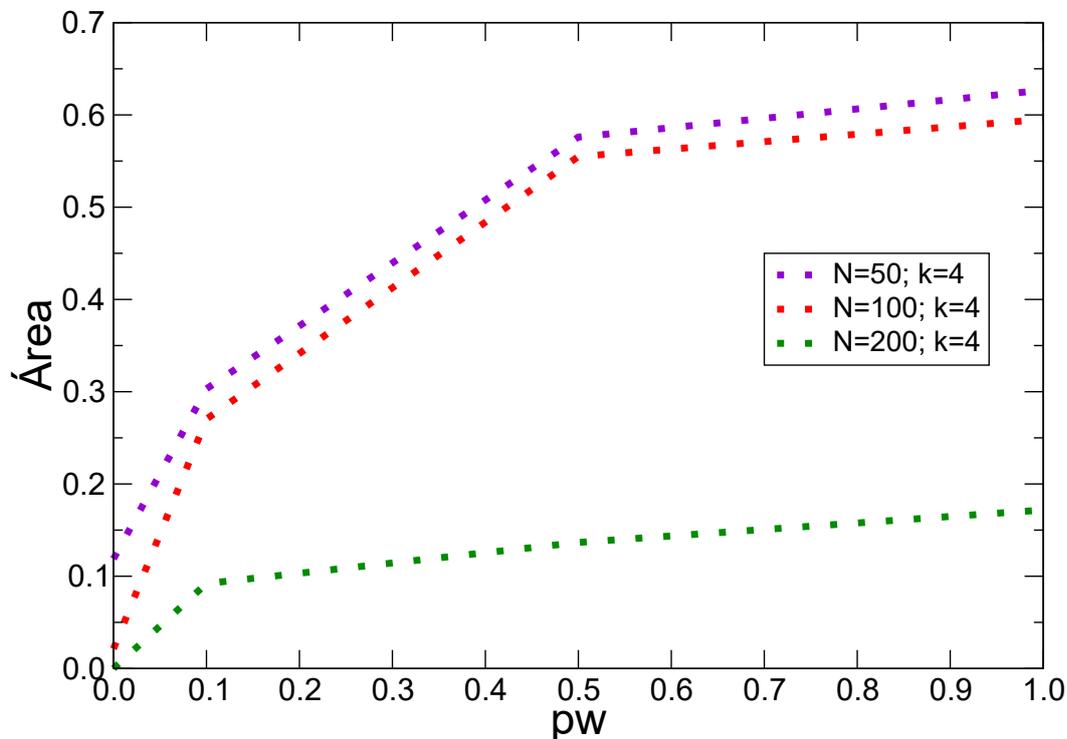


Figura 28 – O parâmetro  $pw$  das redes de Watts-Strogatz é ilustrado em relação aos valores das áreas  $\langle R \rangle - \langle S \rangle$  para redes de tamanho  $N=50$  (curva pontilhada roxa),  $N=100$  (curva pontilhada vermelha) e  $N=200$  (curva pontilhada verde) com  $k = 4$  vizinhos mais próximos. Os parâmetros do modelo acoplado foram fixados em  $F = 3$ ,  $p = 0,50$ ,  $\lambda = 1,00$ , e  $\alpha = 0,01$ .

Artigos exploram diversos aspectos relacionados à propagação de doenças em redes complexas, examinando de que forma a conectividade dessas redes influencia tanto a velocidade quanto o alcance da disseminação. (PASTOR-SATORRAS; VESPIGNANI, 2001; NEWMAN, 2002; KEELING, 2005; NEWMAN, 2003; BARABÁSI; ALBERT, 1999). Portanto, é amplamente conhecido que a estrutura da rede de contatos desempenha um papel crucial na propagação de doenças. Redes com maior conectividade, em que os indivíduos têm mais vizinhos ou contatos próximos, geralmente facilitam a rápida disseminação de doenças e esse comportamento também ocorre em nosso modelo acoplado. A Figura 29 ilustra o parâmetro  $pw$  das redes de Watts-Strogatz em relação aos valores das áreas  $\langle R \rangle - \langle S \rangle$  para uma rede de tamanho  $N = 100$  com  $k = 4$  (curva pontilhada vermelha) e  $k = 8$  (curva pontilhada laranjada) vizinhos mais próximos. Os parâmetros do modelo acoplado foram fixados em  $F = 3$ ,  $p = 0,50$ ,  $\lambda = 1,00$ , e  $\alpha = 0,01$ . Observamos que, com o aumento de  $k$  de 4 para 8, os valores entre as áreas  $\langle R \rangle - \langle S \rangle$  também aumentam.

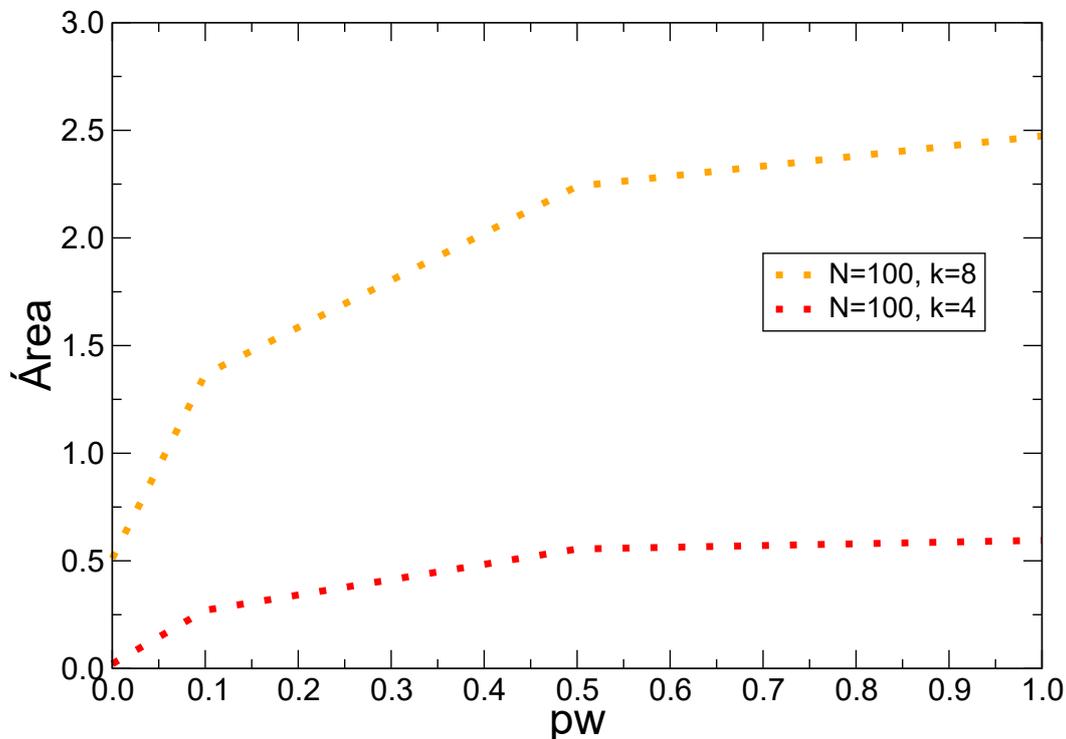


Figura 29 – Ilustração do parâmetro  $pw$  das redes de Watts-Strogatz em relação aos valores das áreas  $\langle R \rangle - \langle S \rangle$  para uma rede de tamanho  $N = 100$  para  $k = 4$  (curva pontilhada vermelha) e  $k = 8$  (curva pontilhada laranjada) vizinhos mais próximos. Os parâmetros do modelo acoplado foram fixados em  $F = 3$ ,  $p = 0,50$ ,  $\lambda = 1,00$ , e  $\alpha = 0,01$ .

Ao aumentar a conectividade de longo alcance ( $pw$ ) nas redes de Watts-Strogatz, observamos um aumento nos valores das áreas. Essa descoberta nos leva a inferir que, nessas redes, indivíduos com opiniões diferentes podem se conectar a outros indivíduos que normalmente estariam distantes em uma rede estritamente local, como ocorre nas redes de Watts-Strogatz com conectividade aleatória de longo alcance. Essas conexões de longo alcance podem criar atalhos para a disseminação de informações e rumores entre grupos que antes estavam isolados em suas próprias bolhas culturais. Dessa forma, tanto a conectividade de longo alcance ( $pw$ ) quanto o número de vizinhos ( $k$ ) podem funcionar como pontes entre grupos que, de outra forma, teriam pouca ou nenhuma interação. Isso permite que informações e ideias fluam mais livremente entre as diferentes subpopulações, aumentando assim a probabilidade de propagação de rumores para além das bolhas culturais presentes no modelo de Axelrod. No entanto, é importante notar que a relação entre a conectividade de longo alcance e a disseminação de rumores depende de muitos outros fatores, incluindo a natureza do rumor em si e o comportamento dos indivíduos em relação à propagação do rumor. Portanto, embora a conectividade de longo alcance possa ser um fator importante, ela não é o único fator determinante na disseminação de rumores em uma rede.



---

## CAMPO EXTERNO ESTÁTICO

---

### 6.1 Campo Externo Estático

O campo externo estático é uma extensão do modelo de Axelrod que incorpora a influência de fatores culturais externos que afetam a dinâmica da disseminação de informações na rede. Esses fatores culturais podem ser qualquer característica que influencie as opiniões dos agentes, como religião, etnia ou filiação política. Ao introduzir o campo externo estático, adicionamos uma camada adicional de complexidade ao modelo de Axelrod, permitindo uma análise mais abrangente da propagação de informações em sistemas heterogêneos. A inclusão do campo externo estático é particularmente útil para entender como as informações se propagam em ambientes onde os agentes têm características culturais diferentes. Ele é fixado no início da simulação e permanece constante ao longo do tempo, permitindo o estudo do impacto de fatores culturais fixos na disseminação de informações. Ele é definido como um agente fictício adicional conectado a cada agente na rede, com uma probabilidade  $p_{cee}$  de interação. Quando um agente é selecionado ele tem uma probabilidade  $p_{cee}$  de interagir com o campo externo e uma probabilidade  $1 - p_{cee}$  de interagir com um agente em sua vizinhança. O parâmetro  $p_{cee}$  representa a intensidade do campo externo, onde  $p_{cee} = 0$  indica que não há interação com o campo externo e  $p_{cee} = 1$  indica que os agentes só interagem com o campo externo. O campo externo é incorporado ao modelo considerando-o como um vizinho comum a todos os agentes da rede.

No artigo ([PERES; FONTANARI, 2010](#)) os autores estudam o efeito do campo externo estático denominando o termo como "mass media" (mídia de massa) para se referir aos meios de comunicação de ampla disseminação, como televisão, rádio, jornais, revistas e internet, especificamente para estudar como a mídia de massa pode influenciar a dinâmica cultural. Neste artigo é explorado o impacto da mídia de massa na estabilidade da homogeneidade cultural dentro do modelo de Axelrod. Eles introduzem o conceito de mídia de massa como um fator adicional

no modelo, permitindo a disseminação de informações e ideias culturais além das interações locais. Ao incorporar a mídia de massa ao modelo de Axelrod, os autores investigaram como a presença da mídia influencia a estabilidade da homogeneidade cultural. Eles analisaram como a introdução da mídia de massa afetou a formação e a manutenção de agrupamentos culturais, o surgimento da diversidade cultural e a dinâmica de assimilação ou polarização cultural. Os autores demonstraram que a presença da mídia de massa pode de fato desestabilizar o regime cultural homogêneo descrito no modelo de Axelrod. Eles descobriram que a interação entre as interações locais e a disseminação global de informações culturais por meio de plataformas de mídia leva a um aumento da diversidade e a uma redução da convergência cultural. Nossos resultados do modelo acoplado se alinham com os deste estudo, pois encontramos que o campo externo estático inserido no modelo tem a capacidade de perturbar a homogeneidade cultural. Assim, a inclusão desse parâmetro dificulta a transmissão do rumor em nosso modelo acoplado.

A Figura 30 exibe as curvas de  $\langle R \rangle$  (representada em azul) e  $\langle S \rangle$  (em laranja) em relação a  $Q$ , considerando uma rede quadrada de lado  $L = 10$  com  $p = 0,50$ . Observamos que, à medida que aumentamos os valores de  $p_{cee}$  para 0,40, 0,60 e 0,80, a diferença entre as curvas  $\langle R \rangle$  (azul) e  $\langle S \rangle$  (laranja) não existem mais. Esse fenômeno indica que a curva azul, que corresponde ao parâmetro de ordem do modelo de propagação de rumores, supera a curva laranja, que representa o parâmetro de ordem do modelo de Axelrod, apenas para  $p_{cee} = 0,20$  e em poucos valores de  $Q$ . Na sequência das figuras, observamos que o aumento do parâmetro  $p_{cee}$  não resulta mais nesse comportamento.

Nas Figuras 31 e 32 realizamos uma análise similar, porém em redes de Watts-Strogatz com tamanhos de  $N=50$  e  $N=100$ , respectivamente. Na Figura 33, apresentamos uma representação gráfica dos valores do campo externo  $p_{cee}$  em relação às áreas entre as curvas  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$ , proporcionando uma visualização mais clara desse comportamento. Isso nos permite perceber que, à medida que aumentamos os valores do campo externo, a propagação do rumor para além das barreiras culturais do modelo de Axelrod diminui significativamente. Concluímos, portanto, que o campo externo efetivamente dificulta a transmissão do rumor em nosso modelo acoplado.

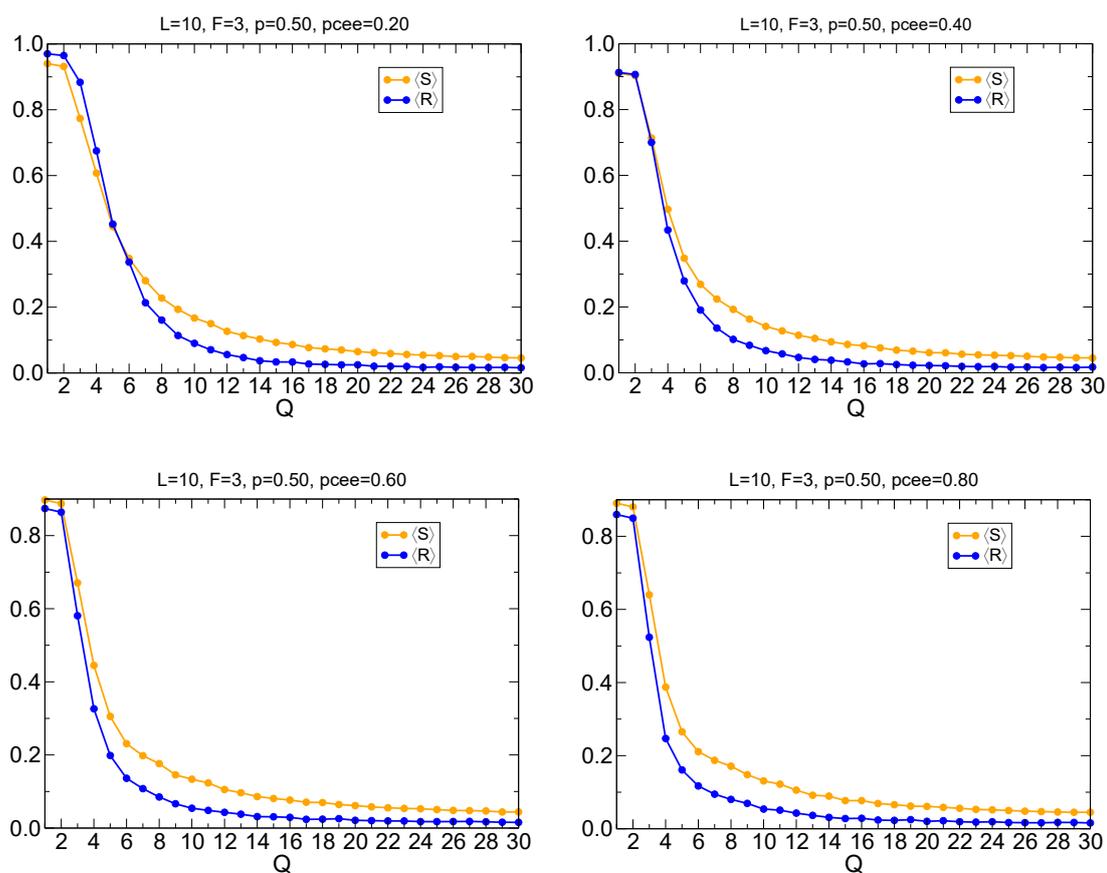


Figura 30 – Os quatro painéis ilustram a variação dos parâmetros de ordem,  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$ , em relação ao valor de  $Q$ , para diferentes valores do campo estático  $p_{cee}$  (0,20, 0,40, 0,80 e 1,0), em uma rede com dimensões de lado  $L = 10$ ,  $F = 3$ ,  $p = 0,50$ ,  $\lambda = 1,00$  e  $\alpha = 0,01$ .

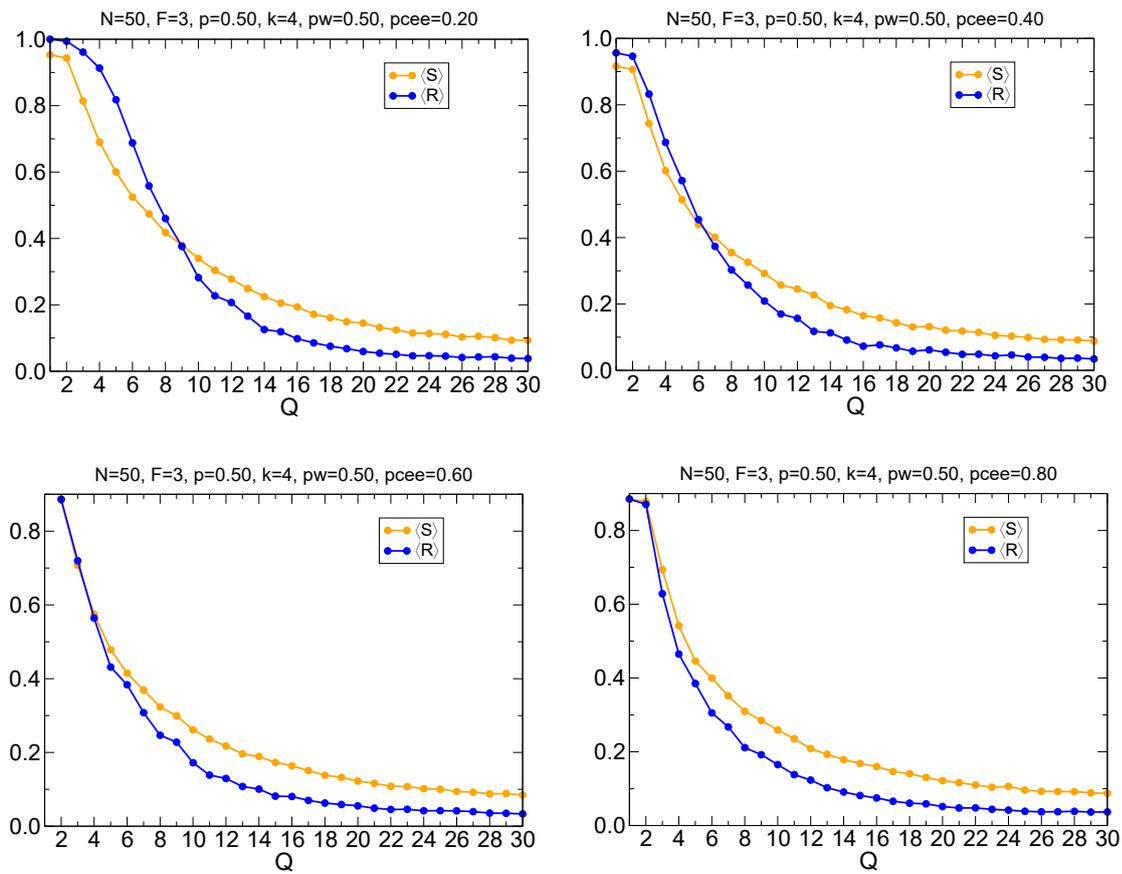


Figura 31 – Os quatro painéis ilustram a variação dos parâmetros de ordem,  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$ , em relação ao valor de  $Q$ , para diferentes valores do campo estático  $p_{cee}$  (0,20, 0,40, 0,80 e 1,0), em uma rede de Watts-Strogatz com dimensões  $N = 50$ ,  $F = 3$ ,  $p = 0,50$ ,  $p_w = 0,50$ ,  $\lambda = 1,00$  e  $\alpha = 0,01$ .

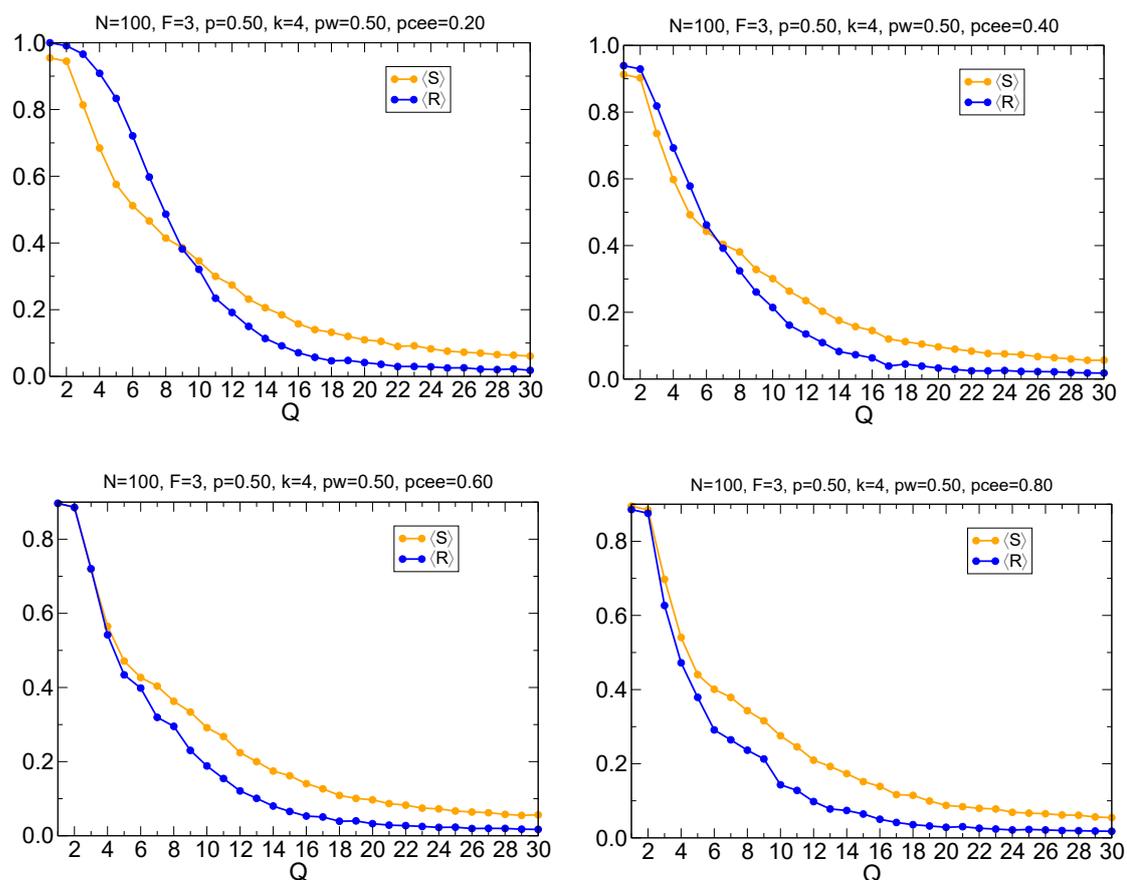


Figura 32 – Os quatro painéis ilustram a variação dos parâmetros de ordem,  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$ , em relação ao valor de  $Q$ , para diferentes valores do campo estático  $p_{cee}$  (0,20, 0,40, 0,80 e 1,0), em uma rede de Watts-Strogatz com dimensões  $N = 100$ ,  $F = 3$ ,  $p = 0,50$ ,  $pw = 0,50$ ,  $\lambda = 1,00$  e  $\alpha = 0,01$ .

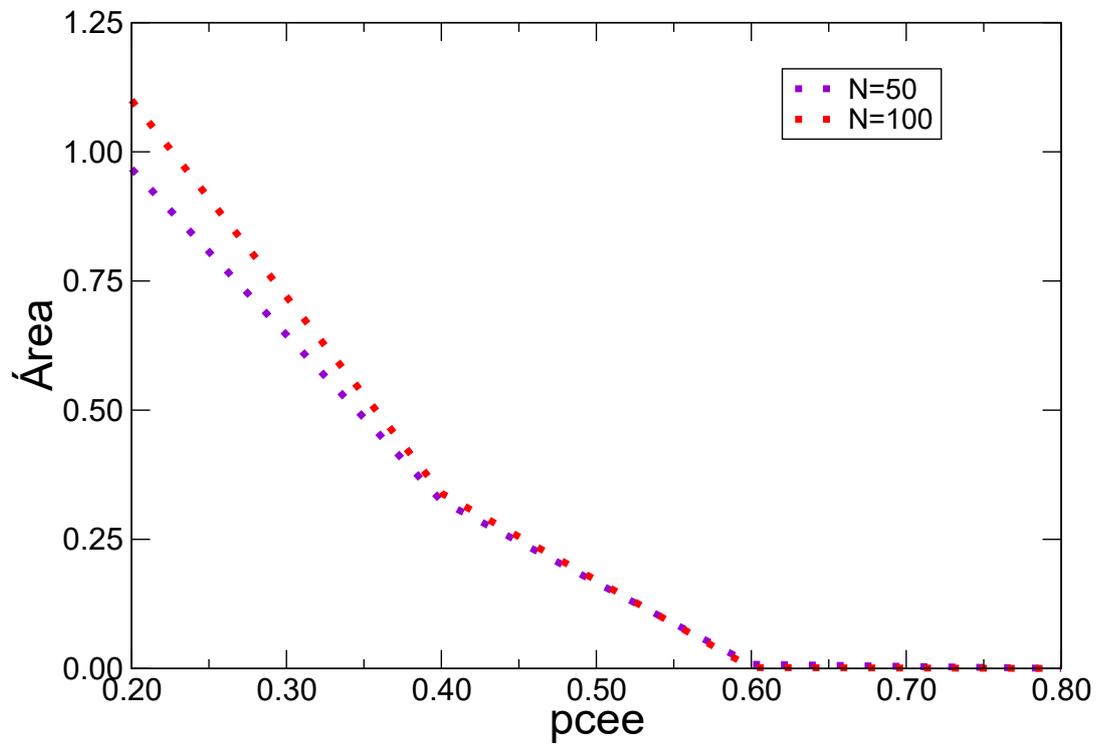


Figura 33 – A probabilidade de atualização do campo externo estático,  $p_{cee}$ , é ilustrada em relação aos valores das áreas  $\langle R \rangle - \langle S \rangle$  para redes de Watts-Strogatz de tamanho  $N=50$  (curva pontilhada roxa) e  $N=100$  (curva pontilhada vermelha) com  $k = 4$  vizinhos mais próximos e  $p_w = 0,50$ . Os parâmetros do modelo acoplado foram fixados em  $F = 3$ ,  $p = 0,50$ ,  $\lambda = 1,00$  e  $\alpha = 0,01$ .

---

## CONCLUSÕES

---

Nesta tese, no capítulo 2, apresentamos de forma sucinta os três modelos de dinâmicas sociais utilizados: o modelo  $Q$ -votantes, o modelo de Axelrod e o modelo de propagação de rumores. Posteriormente, no capítulo 3, previmos variáveis dinâmicas associadas ao modelo de votação  $Q$  com base em medidas topológicas de redes complexas. Verificamos que a previsão é muito precisa e determinamos quais medidas das redes mais contribuem para isso. Principalmente, mostramos que o coeficiente de agrupamento ( $C$ ) e a centralidade da informação ( $IC$ ) foram as medidas mais importantes para alcançarmos os resultados. Além disso, realizamos variações no método de inicialização, para iniciar a dinâmica do modelo  $Q$ -votantes com opiniões positivas ( $+1$ ), a fim de prever o consenso ao longo do tempo ( $Y_i$ ) e a frequência das mudanças de opinião ( $C_i$ ). Inicialmente, os agentes foram selecionados aleatoriamente, seguindo o método original do modelo. Posteriormente, identificamos os agentes com maior grau de conexão e os selecionamos para investigar seu potencial para influenciar fortemente a dinâmica geral da opinião devido às suas extensas conexões. Por fim, consideramos os agentes com menor grau de conectividade como iniciadores da dinâmica para explorar o impacto potencial de agentes menos influentes na evolução das opiniões. Embora as modificações nos métodos de inicialização de opiniões positivas afetem os resultados, seu impacto é relativamente pequeno. De fato, as interações subsequentes e a troca de informações entre os agentes tendem a superar a influência dos agentes inicialmente selecionados, levando a um consenso de opiniões e a um impacto limitado a longo prazo da seleção inicial de agentes. No entanto, a exploração do papel tanto de agentes altamente conectados quanto de agentes menos conectados forneceu insights valiosos sobre a complexa dinâmica da formação de opiniões e o surgimento de consenso no modelo  $Q$ -votantes. Descobrimos que, independentemente do método de inicialização usado para iniciar o modelo  $Q$ -votantes, a influência inicial dos agentes selecionados tende a diminuir ao longo do tempo. Isso ocorre porque, à medida que os agentes interagem e trocam informações, suas opiniões são influenciadas por outros. Com o tempo, as opiniões começam a convergir em direção a um consenso, e a influência inicial de agentes selecionados aleatoriamente, com alta ou baixa conec-

tividade, se torna equivalente, já que não existe um método de inicialização significativamente superior aos outros; todos eles produzem resultados igualmente bons. Portanto a ausência de agentes influentes contribui para um consenso mais eficiente, ou seja, a ausência de agentes com influência desproporcional na rede implica que cada agente desempenha um papel semelhante na formação da opinião coletiva. Isso é importante porque a polarização frequentemente ocorre quando alguns agentes extremamente influentes têm um impacto desproporcional nas opiniões dos outros. Se todos os agentes têm influência semelhante, é menos provável que alguns agentes altamente influentes dominem a conversa e puxem a opinião coletiva para extremos opostos. Portanto, a ausência de agentes altamente influentes pode contribuir para um processo de tomada de decisão mais equilibrado e menos polarizado.

Um traço fundamental dos sistemas complexos é a ocorrência de fenômenos emergentes, que resultam das intrincadas interações entre seus componentes. Nesse contexto, ao empregar algoritmos de aprendizado de máquina e explorar as características das redes complexas, as pesquisas podem avançar consideravelmente no campo dos sistemas complexos. Isso abre portas para investigações futuras sobre a dinâmica da polarização em diversos cenários sociais. Em suma, a sinergia entre algoritmos de aprendizado de máquina, análise de redes complexas e modelos de dinâmica social detém um potencial revolucionário para ampliar nossa compreensão dos sistemas sociais, proporcionando uma visão mais profunda do comportamento humano e promovendo o desenvolvimento de estratégias voltadas para resultados sociais positivos.

Everett Rogers propôs em 1962 uma teoria para a difusão de inovações que explicava como informações novas se espalham e são percebidas por indivíduos em uma comunidade (ROGERS, 1983). Entre os objetivos do ambicioso empreendimento de Rogers estava a identificação dos elementos que determinam como as inovações se espalham entre indivíduos, comunidades, sociedades e nações. A estrutura social, ou as relações e conexões que os indivíduos estabelecem entre si, é um desses elementos: Rogers descobriu que o grau de heterogeneidade cultural de uma comunidade influencia até que ponto as inovações se espalham entre seus membros, concluindo que semelhanças culturais facilitam a difusão de inovações, ou seja, inovações têm maior probabilidade de se espalhar entre indivíduos que compartilham crenças similares. Assim sendo, as implicações desta teoria foram devidamente corroboradas por nossos resultados. No capítulo 4, exploramos um cenário em que a heterogeneidade cultural da comunidade é descrita pelo modelo de disseminação cultural de Axelrod e a difusão da inovação é descrita por uma variante do modelo de propagação de rumores de Daley e Kendall. Nossos resultados sugerem que frear a propagação de informações não necessariamente requer mudanças na estrutura social, ou seja, mudanças na topologia das redes de interação dos agentes (HOLME; NEWMAN, 2006; FU; WANG, 2008; INIGUEZ *et al.*, 2009). Na verdade, esse resultado ocorre naturalmente em comunidades de agentes heterogêneos que podem ter opiniões e crenças diferentes, fornecendo assim suporte teórico para as observações empíricas de Rogers. Especificamente, descobrimos que a heterogeneidade cultural sempre prejudica a propagação de informações e que, além de um nível crítico de heterogeneidade, o rumor fica limitado nas proximidades de seu criador.

O estudo da dinâmica cultural-rumor acoplada contribui para a literatura em rápido crescimento sobre física social (JUSUP *et al.*, 2022). Na verdade, a disponibilidade de dados de alta qualidade sobre padrões sociais e atividade humana (veja, por exemplo, (SocioPatterns, )), bem como o grande apelo e relevância das questões sociais, estimulou as contribuições dos físicos para várias áreas interdisciplinares, incluindo (mas não se limitando a) inteligência coletiva (REIA; AMADO; FONTANARI, 2019; PERC *et al.*, 2017), polarização cultural (BAUMANN *et al.*, 2020), comportamento criminoso (D'ORSOGNA; PERC, 2015), mobilidade humana (GONZALEZ; HIDALGO; BARABASI, 2008), dinâmica urbana (LOUF; BARTHELEMY, 2013; REIA *et al.*, 2022; REIA; RAO; UKKUSURI, 2022), fluxo de tráfego (NAGATANI, 2002; SCHADSCHNEIDER, 2002), redes sociais (WATTS; STROGATZ, 1998; GOH *et al.*, 2007), e comportamento moral (CAPRARO; PERC; VILONE, 2019; FONTANARI, 2023). Esses avanços foram possibilitados pelo amadurecimento dos sistemas complexos como campo de pesquisa, como atestado pelo Prêmio Nobel de Física de 2021 (BIANCONI *et al.*, 2023). Talvez a característica chave de um sistema complexo seja os fenômenos emergentes resultantes de seus componentes interagindo. Na dinâmica cultural-rumor acoplada, o fenômeno emergente é a transição de fase descontínua que separa o regime em que o rumor se espalha pela comunidade do regime em que ele morre perto de seu criador. A existência dessa transição só poderia ser revelada por meio de modelagem matemática e computacional, daí a importância de avaliar teorias para a difusão de inovações e polarização usando as ferramentas da mecânica estatística, como as sugeridas nessa tese, em ambos os estudos. Finalmente, no capítulo 5, investigamos o impacto da conectividade das redes de Watts-Strogatz na nossa dinâmica cultural-rumor acoplada. Notamos que o parâmetro de reconexão dessas redes sugere uma facilitação no espalhamento dos rumores; no entanto, à medida que o tamanho do sistema aumenta, esse comportamento deixa de ocorrer. Por outro lado, no capítulo 6, introduzimos um campo externo estático no modelo acoplado. Observamos que esse parâmetro contribui para a desordem do sistema, dificultando assim a propagação do rumor além das bolhas culturais do modelo de Axelrod.

No decorrer de trabalhos futuros, conduzindo pesquisas em nível de pós-doutorado, temos a intenção de realizar uma análise abrangente do modelo acoplado (Axelrod+rumores) em redes complexas. Nossa proposta de aprimoramento envolve a inclusão de elementos de redes temporais e multilayer para enriquecer a compreensão do comportamento dinâmico do modelo. A introdução de redes temporais permitirá uma análise mais aprofundada das dinâmicas de evolução ao longo do tempo, enquanto a consideração de estruturas multilayer oferecerá insights sobre como diferentes camadas de conexões podem influenciar a disseminação de informações e a formação de opiniões. Vale ressaltar que, devido a restrições de tempo, o modelo ainda não foi explorado em diversas topologias de redes, sendo este um aspecto que merece investigação. Essa abordagem mais abrangente proporcionará uma visão mais completa e realista do comportamento do sistema em ambientes complexos e dinâmicos, contribuindo significativamente para o avanço do conhecimento nessa área.



## REFERÊNCIAS

---

---

ACEBRÓN, J. A.; BONILLA, L. L.; VICENTE, C. J. P.; RITORT, F. The kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 77, n. 1, p. 137, 2005. Citado na página 75.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo: Um Curso Moderno e suas Aplicações**. [S.l.]: Editora, 2008. Citado na página 76.

AXELROD, R. The dissemination of culture: A model with local convergence and global polarization. **Journal of conflict resolution**, Sage Periodicals Press 2455 Teller Road, Thousand Oaks, CA 91320, v. 41, n. 2, p. 203–226, 1997. Citado nas páginas 28, 29, 38 e 57.

BANKES, S. C. Agent-based modeling: A revolution? **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 99, n. suppl\_3, p. 7199–7200, 2002. Citado na página 27.

BARABÁSI, A.-L. Network science. **Cambridge university press**, 2016. Citado na página 75.

BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks. **science**, American Association for the Advancement of Science, v. 286, n. 5439, p. 509–512, 1999. Citado nas páginas 46 e 80.

BARBERÁ, P.; JOST, J. T.; NAGLER, J.; TUCKER, J. A.; BONNEAU, R. Tweeting from left to right: Is online political communication more than an echo chamber? **Psychological science**, Sage Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 26, n. 10, p. 1531–1542, 2015. Citado na página 27.

BAUMANN, F.; LORENZ-SPREEN, P.; SOKOLOV, I. M.; STARNINI, M. Modeling echo chambers and polarization dynamics in social networks. **Physical Review Letters**, APS, v. 124, n. 4, p. 048301, 2020. Citado na página 91.

BIANCONI, G. *et al.* Complex systems in the spotlight: Next steps after the 2021 nobel prize in physics. **Journal of Physics Complexity**, IOP Publishing, v. 4, p. 010201, 2023. Citado na página 91.

BONACICH, P. Power and centrality: A family of measures. **American Journal of Sociology**, The University of Chicago Press, v. 92, n. 5, p. 1170–1182, 1987. Citado na página 48.

BRANDES, U.; DELLING, D.; GAERTLER, M.; GOERKE, R.; HOEFER, M.; NIKOLOSKI, Z.; WAGNER, D. On modularity clustering. **IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering**, IEEE, v. 17, n. 6, p. 754–767, 2005. Citado na página 48.

BROADBENT, S.; HAMMERSLEY, J. Percolation processes. i. crystals and mazes. **Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 53, n. 3, p. 629–641, 1957. Citado na página 28.

CAPRARO, V.; PERC, M.; VILONE, D. The evolution of lying in well-mixed populations. **J. R. Soc. Interface**, Royal Society Publishing, v. 16, p. 20190211, 2019. Citado na página 91.

- CASTELLANO, C.; FORTUNATO, S.; LORETO, V. Statistical physics of social dynamics. **Reviews of modern physics**, APS, v. 81, n. 2, p. 591, 2009. Citado nas páginas 27, 28, 30 e 41.
- CASTELLANO, C.; MARSILI, M.; VESPIGNANI, A. Nonequilibrium phase transition in a model for social influence. **Physical Review Letters**, APS, v. 85, n. 16, p. 3536, 2000. Citado nas páginas 40 e 41.
- CASTELLANO, C.; MUÑOZ, M. A.; PASTOR-SATORRAS, R. Nonlinear q-voter model. **Physical Review E**, APS, v. 80, n. 4, p. 041129, 2009. Citado nas páginas 30 e 35.
- CAWLEY, G. C.; TALBOT, N. L. On over-fitting in model selection and subsequent selection bias in performance evaluation. **The Journal of Machine Learning Research**, JMLR. org, v. 11, p. 2079–2107, 2010. Citado na página 49.
- CENTOLA, D. An experimental study of homophily in the adoption of health behavior. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 334, n. 6060, p. 1269–1272, 2011. Citado na página 32.
- CONOVER, M. D.; RATKIEWICZ, J.; FRANCISCO, M.; GONCALVES, B.; MENCZER, F.; FLAMMINI, A. Political polarization on twitter. **ICWSM**, v. 133, p. 89–96, 2011. Citado na página 27.
- COSTA, L.; RODRIGUES, F.; TRAVIESO, G.; BOAS, P. Characterization of complex networks: A survey of measurements. **Advances in Physics**, Taylor & Francis, v. 56, n. 1, p. 167–242, 2007. ISSN 0001-8732. Citado na página 48.
- DALEY, D.; KENDALL, D. Epidemics and rumours. Nature Publishing Group, 1964. Citado nas páginas 27, 29 e 36.
- DEFFUANT, G.; NEAU, D.; AMBLARD, F.; WEISBUCH, G. Mixing beliefs among interacting agents. **Advances in complex systems**, World Scientific, v. 3, n. 01n04, p. 87–98, 2000. Citado na página 28.
- D'ORSOGNA, M. R.; PERC, M. Statistical physics of crime: A review. **Physics of life reviews**, Elsevier, v. 12, p. 1–21, 2015. Citado na página 91.
- EFFERSON, C.; VOGT, S.; FEHR, E. The promise and the peril of using social influence to reverse harmful traditions. **Nature human behaviour**, Nature Publishing Group, v. 4, n. 1, p. 55–68, 2020. Citado na página 32.
- ERDŐS, P.; RÉNYI, A. *et al.* On the evolution of random graphs. **Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.**, v. 5, n. 1, p. 17–60, 1960. Citado na página 46.
- ESTRADA, E.; HATANO, N. Communicability in complex networks. **Physical Review E**, APS, v. 77, n. 3, p. 036111, 2008. Citado na página 48.
- FERNÁNDEZ-GRACIA, J.; EGUÍLUZ, V. M.; MIGUEL, M. S. Effect of highly connected individuals in the voter model. **Physical Review E**, APS, v. 90, n. 1, p. 012811, 2014. Citado na página 30.
- FLAXMAN, S.; GOEL, S.; RAO, J. M. Filter bubbles, echo chambers, and online news consumption. **Public opinion quarterly**, Oxford University Press, v. 80, n. S1, p. 298–320, 2016. Citado na página 27.

FONTANARI, J. F. Kant's modal asymmetry between truth-telling and lying revisited. **Symmetry**, MDPI, v. 15, p. 555, 2023. Citado na página 91.

FREEMAN, L. C. A set of measures of centrality based on betweenness. **Sociometry**, JSTOR, p. 35–41, 1977. Citado na página 48.

\_\_\_\_\_. Centrality in social networks conceptual clarification. **Social Networks**, Elsevier, v. 1, n. 3, p. 215–239, 1979. Citado na página 48.

FU, F.; WANG, L. Coevolutionary dynamics of opinions and networks: From diversity to uniformity. **Physical Review E**, APS, v. 78, n. 1, p. 016104, 2008. Citado nas páginas 32, 72 e 90.

GALAM, S. Minority influence and possible paradoxes. **Journal of Statistical Physics**, Springer, v. 107, n. 1-2, p. 337–354, 2002. Citado na página 35.

GOH, K.-I.; CUSICK, M. E.; VALLE, D.; CHILDS, B.; VIDAL, M.; BARABÁSI, A.-L. The human disease network. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 104, n. 21, p. 8685–8690, 2007. Citado na página 91.

GONZALEZ, M. C.; HIDALGO, C. A.; BARABASI, A.-L. Understanding individual human mobility patterns. **nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 453, n. 7196, p. 779–782, 2008. Citado na página 91.

GUERRA, R. A.; EGUÍLUZ, V. M.; MIGUEL, M. S. Information retention in complex opinion dynamics. **Physical Review E**, APS, v. 70, n. 4, p. 046106, 2004. Citado na página 35.

HAGBERG, A. A.; SWART, P. J.; CHULT, D. B. **NetworkX**. 2014. <<https://networkx.github.io/>>. Version 1.9.1. Citado na página 47.

HAMMERSLEY, J. **Monte carlo methods**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 63.

HEGSELMANN, R.; KRAUSE, U. Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation. **Journal of artificial societies and social simulation**, Citeseer, v. 5, n. 3, 2002. Citado na página 28.

HOLLEY, R. A.; LIGGETT, T. M. Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model. **The Annals of Probability**, v. 3, n. 4, p. 643–663, 1975. Citado na página 29.

HOLME, P.; NEWMAN, M. E. Nonequilibrium phase transition in the coevolution of networks and opinions. **Physical Review E**, APS, v. 74, n. 5, p. 056108, 2006. Citado nas páginas 32, 72 e 90.

INIGUEZ, G.; KERTÉSZ, J.; KASKI, K. K.; BARRIO, R. A. Opinion and community formation in coevolving networks. **Physical Review E**, APS, v. 80, n. 6, p. 066119, 2009. Citado nas páginas 32, 72 e 90.

ISING, E. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. **Zeitschrift f"ur Physik**, v. 31, n. 1, p. 253–258, 1925. Citado na página 28.

JOLLES, J. W.; KING, A. J.; KILLEN, S. S. The role of individual heterogeneity in collective animal behaviour. **Trends in ecology & evolution**, Elsevier, v. 35, n. 3, p. 278–291, 2020. Citado na página 32.

JUSUP, M. *et al.* Social physics. **Physics Reports**, Elsevier, v. 948, p. 1–148, 2022. Citado na página 91.

KEELING, M. J. Networks and epidemic models. **Journal of The Royal Society Interface**, The Royal Society, v. 2, n. 4, p. 295–307, 2005. Citado nas páginas 30 e 80.

KEELING, M. J.; ROHANI, P. **Modeling infectious diseases in humans and animals**. [S.l.]: Princeton University Press, 2011. Citado na página 27.

KERMACK, W. O.; MCKENDRICK, A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. **Proceedings of the royal society of London. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character**, v. 115, n. 772, p. 700–721, 1927. Citado nas páginas 28 e 61.

KLEMM, K.; EGUILUZ, V. M.; TORAL, R.; MIGUEL, M. S. Role of dimensionality and topology for ordering and phase transitions in complex systems. **Physical Review E**, APS, v. 67, n. 2, p. 026120, 2003. Citado na página 40.

LANCICHINETTI, A.; FORTUNATO, S.; RADICCHI, F. Benchmark graphs for testing community detection algorithms. **Physical review E**, APS, v. 78, n. 4, p. 046110, 2008. Citado na página 47.

LEAVER, A. M.; WADE, B.; VASAVADA, M.; HELLEMANN, G.; JOSHI, S. H.; ESPINOZA, R.; NARR, K. L. Fronto-temporal connectivity predicts ect outcome in major depression. **Frontiers in psychiatry**, Frontiers Media SA, v. 9, p. 92, 2018. Citado na página 49.

LEBENSZTAYN, E.; MACHADO, F.; RODRÍGUEZ, P. Limit theorems for a general stochastic rumour model. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 71, n. 4, p. 1476–1486, 2011. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/100819588>>. Citado na página 37.

LIU, Z.; WANG, J.; REN, F.; WU, X. Effect of degree distribution on the voter model in complex networks. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 130, n. 2, p. 20001, 2020. Citado na página 30.

LORENZ, J. Continuous opinion dynamics under bounded confidence: A survey. **International Journal of Modern Physics C**, World Scientific, v. 18, n. 12, p. 1819–1838, 2007. Citado na página 35.

LOUF, R.; BARTHELEMY, M. Modeling the polycentric transition of cities. **Physical review letters**, APS, v. 111, n. 19, p. 198702, 2013. Citado na página 91.

MA, L.; KRISHNAN, R.; MONTGOMERY, A. L. Latent homophily or social influence? an empirical analysis of purchase within a social network. **Management Science**, INFORMS, v. 61, n. 2, p. 454–473, 2015. Citado na página 32.

MACAL, C. M.; NORTH, M. J. Tutorial on agent-based modeling and simulation. In: IEEE. **Proceedings of the Winter Simulation Conference, 2005**. [S.l.], 2005. p. 14–pp. Citado na página 27.

MAKI, D. P.; MAKI, D. P.; MALI, D.; THOMPSON, M.; THOMPSON, M. **Mathematical models and applications: with emphasis on the social, life, and management sciences**. [S.l.]: Prentice Hall, 1973. Citado na página 36.

MOBILIA, M. Does a single zealot affect an infinite group of voters? **Physical Review Letters**, APS, v. 91, n. 2, p. 028701, 2003. Citado na página 35.

MORETTI, P.; LIU, S.; CASTELLANO, C.; PASTOR-SATORRAS, R. Mean-field analysis of the q-voter model on networks. **Journal of statistical physics**, Springer, v. 151, p. 113–130, 2013. Citado na página 31.

MORETTI, P.; MUNOZ, M. A. Griffiths phases and the stretching of criticality in brain networks. **Nature communications**, Nature Publishing Group, v. 4, n. 1, p. 1–6, 2013. Citado na página 35.

MURRAY, J. D. **Mathematical biology: I. An introduction**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. v. 17. Citado na página 70.

NAGATANI, T. The physics of traffic jams. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 65, n. 9, p. 1331, 2002. Citado na página 91.

NAKAGAWA, S.; JOHNSON, P. C.; SCHIELZETH, H. The coefficient of determination  $r^2$  and intra-class correlation coefficient from generalized linear mixed-effects models revisited and expanded. **Journal of the Royal Society Interface**, The Royal Society, v. 14, n. 134, p. 20170213, 2017. Citado na página 49.

NEKOVEE, M.; MORENO, Y.; BIANCONI, G.; MARSILI, M. Theory of rumour spreading in complex social networks. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 374, n. 1, p. 457–470, 2007. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437106008090>>. Citado nas páginas 57 e 58.

NEWMAN, M. **Networks: an introduction**. [S.l.]: Oxford University Press, Inc., 2010. Citado nas páginas 48 e 75.

NEWMAN, M. E. Spread of epidemic disease on networks. **Physical Review E**, American Physical Society, v. 66, n. 1, p. 016128, 2002. Citado na página 80.

\_\_\_\_\_. The structure and function of complex networks. **SIAM Review**, SIAM, v. 45, n. 2, p. 167–256, 2003. Citado na página 80.

\_\_\_\_\_. **Networks: An Introduction**. [S.l.]: Oxford University Press, 2018. Citado na página 48.

ONODY, R. N.; CASTRO, P. A. de. Nonlinear barabási–albert network. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 336, n. 3-4, p. 491–502, 2004. Citado na página 46.

PASTOR-SATORRAS, R.; VESPIGNANI, A. Epidemic spreading in scale-free networks. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 86, n. 14, p. 3200–3203, 2001. Citado nas páginas 75 e 80.

PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Synchronization in chaotic systems. **Physical review letters**, APS, v. 80, n. 10, p. 2109, 1998. Citado na página 31.

PERC, M.; JORDAN, J. J.; RAND, D. G.; WANG, Z.; BOCCALETTI, S.; SZOLNOKI, A. Statistical physics of human cooperation. **Physics Reports**, Elsevier, v. 687, p. 1–51, 2017. Citado na página 91.

PERES, L. R.; FONTANARI, J. F. The mass media destabilizes the cultural homogenous regime in axelrod's model. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, IOP Publishing, v. 43, n. 5, p. 055003, 2010. Citado nas páginas 41 e 83.

PINEDA, A. M.; KENT, P.; CONNAUGHTON, C.; RODRIGUES, F. A. Machine learning-based prediction of q-voter model in complex networks. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**, IOP Publishing, v. 2023, n. 12, p. 123402, 2023. Citado nas páginas 17, 18, 31, 45, 51, 53, 54, 55 e 56.

PINEDA, A. M.; REIA, S. M.; CONNAUGHTON, C.; FONTANARI, J. F.; RODRIGUES, F. A. Cultural heterogeneity constrains diffusion of innovations. **Europhysics Letters**, IOP Publishing, v. 143, n. 4, p. 42003, 2023. Citado nas páginas 18, 19, 32, 57, 59 e 60.

PRIVMAN, V. **Finite size scaling and numerical simulation of statistical systems**. [S.l.]: World Scientific, 1990. Citado na página 43.

REIA, S. M. **Atividade, transição de fase e efeito de mídia em um modelo sociocultural**. Tese (Doutorado), 2015. Citado nas páginas 15 e 42.

REIA, S. M.; AMADO, A. C.; FONTANARI, J. F. Agent-based models of collective intelligence. **Physics of Life Reviews**, Elsevier, v. 31, p. 320–331, 2019. Citado na página 91.

REIA, S. M.; FONTANARI, J. F. Effect of long-range interactions on the phase transition of axelrod's model. **Physical Review E**, APS, v. 94, n. 5, p. 052149, 2016. Citado na página 40.

\_\_\_\_\_. A sir epidemic model for citation dynamics. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 136, n. 2, p. 1–11, 2021. Citado nas páginas 70 e 71.

REIA, S. M.; GOMES, P. F.; FONTANARI, J. F. Comfort-driven mobility produces spatial fragmentation in axelrod's model. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**, IOP Publishing, v. 2020, n. 3, p. 033402, 2020. Citado na página 41.

REIA, S. M.; NEVES, U. P. Activity of a social dynamics model. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 435, p. 36–43, 2015. Citado na página 71.

\_\_\_\_\_. Persistent agents in axelrod's social dynamics model. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 113, n. 1, p. 18003, 2016. Citado na página 41.

REIA, S. M.; RAO, P. S. C.; BARTHELEMY, M.; UKKUSURI, S. V. Spatial structure of city population growth. **Nature communications**, Nature Publishing Group UK London, v. 13, n. 1, p. 5931, 2022. Citado na página 91.

REIA, S. M.; RAO, P. S. C.; UKKUSURI, S. V. Modeling the dynamics and spatial heterogeneity of city growth. **npj Urban Sustainability**, Nature Publishing Group UK London, v. 2, n. 1, p. 31, 2022. Citado na página 91.

RODRIGUES, F. A. **Caracterizacao, classificac ao e analise de redes complexas**. Tese (Doutorado) — INSTITUTO DE Fisica DE Sao CARLOS, 2007. Citado nas páginas 16 e 46.

RODRIGUES, F. A.; PERON, T.; CONNAUGHTON, C.; KURTHS, J.; MORENO, Y. A machine learning approach to predicting dynamical observables from network structure. **arXiv preprint arXiv:1910.00544**, 2019. Citado nas páginas 30 e 31.

- ROGERS, E. M. **Diffusion of Innovation - Third Edition**. [S.l.]: The Free Press, 1983. Citado na página 90.
- SANCTIS, L. F. D.; GONÇALVES, B.; PINTO, S. S. Effects of clustering on the voter model on small-world networks. **Physical Review E**, APS, v. 87, n. 5, p. 052811, 2013. Citado na página 30.
- SCHADSCHNEIDER, A. Traffic flow: a statistical physics point of view. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 313, n. 1-2, p. 153–187, 2002. Citado na página 91.
- SCHELLING, T. C. Dynamic models of segregation. **Journal of mathematical sociology**, v. 1, n. 2, p. 143–186, 1971. Citado na página 29.
- SOARES, G.; OLIVEIRA, S.; CARVALHO, T. C. Empirical investigations have consistently demonstrated the influence of network topology on consensus formation in complex networks. **arXiv preprint arXiv:2103.14179**, 2021. Citado na página 30.
- SOARES, R. L.; FONTANARI, J. F. Modular structure drives polarization in the q-voter model. **Physical Review E**, APS, v. 103, n. 3, p. 032312, 2021. Citado na página 30.
- SocioPatterns. <<http://www.sociopatterns.org/>>. Accessed on 2023-07-29. Citado na página 91.
- STEPHENSON, K.; ZELEN, M. Rethinking centrality: Methods and examples. **Social Networks**, Elsevier, v. 11, n. 1, p. 1–37, 1989. Citado na página 48.
- SZNAJD-WERON, K.; SZNAJD, J. Sznajd model and its applications. **International Journal of Modern Physics C**, World Scientific, v. 11, n. 6, p. 1157–1165, 2000. Citado na página 29.
- TILLES, P. F.; FONTANARI, J. F. Diffusion of innovations in axelrod’s model. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**, IOP Publishing, v. 2015, n. 11, p. P11026, 2015. Citado na página 39.
- TOFFOLI, T.; MARGOLUS, N. **Cellular automata machines: a new environment for modeling**. [S.l.]: MIT press, 1987. Citado na página 39.
- VICARIO, M. D.; BESSI, A.; ZOLLO, F.; PETRONI, F.; SCALA, A.; CALDARELLI, G.; STANLEY, H. E.; QUATTROCIOCCI, W. Spreading of misinformation online. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 113, n. 3, p. 554–559, 2016. Citado na página 27.
- VILONE, D.; VESPIGNANI, A.; CASTELLANO, C. Ordering phase transition in the one-dimensional axelrod model. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, Springer, v. 30, n. 3, p. 399–406, 2002. Citado na página 40.
- WAINER, J.; CAWLEY, G. Nested cross-validation when selecting classifiers is overzealous for most practical applications. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 182, p. 115222, 2021. Citado na página 49.
- WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. **nature**, Nature Publishing Group, v. 393, n. 6684, p. 440–442, 1998. Citado nas páginas 47, 48, 75 e 91.
- WAXMAN, B. M. Routing of multipoint connections. **IEEE journal on selected areas in communications**, IEEE, v. 6, n. 9, p. 1617–1622, 1988. Citado na página 47.

WEIDLICH, W.; HAAG, G. **Sociodynamics: A systematic approach to mathematical modelling in the social sciences**. [S.l.]: Harwood academic publishers, 1998. Citado na página [28](#).

WENG, L.; MENCZER, F.; AHN, Y.-Y. Virality prediction and community structure in social networks. **Scientific reports**, Nature Publishing Group, v. 3, n. 1, p. 1–8, 2013. Citado na página [75](#).

