Modelos matemáticos para um problema de caminho de corte

Everton Fernandes da Silva

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:_____

Everton Fernandes da Silva

Modelos matemáticos para um problema de caminho de corte

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientadora: Profa. Dra. Franklina Maria Bragion de Toledo
Coorientador: Prof. Dr. José Fernando da Costa Oliveira

USP – São Carlos
Abril de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586m Silva, Everton Fernandes da
Modelos matemáticos para um problema de caminho de corte / Everton Fernandes da Silva; orientadora Franklina Maria Bragion de Toledo; co-orientador José Fernando da Costa Oliveira. -- São Carlos, 2016.
122 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. caminho de corte. 2. modelo matemático. 3. corte e empacotamento. I. Toledo, Franklina Maria Bragion de, orient. II. Oliveira, José Fernando da Costa, co-orient. III. Título.

Everton Fernandes da Silva

Mathematical models to a cutting path determination problem

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Computer Science and Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Franklina Maria Bragion de Toledo
Coadvisor: Prof. Dr. José Fernando da Costa Oliveira

USP – São Carlos
April 2016

Agradecimentos

À minha orientadora Profa. Dra. Franklina Maria Bragion de Toledo por todas as críticas, ensinamentos, conselhos e empenho que resultaram neste trabalho.

Ao meu coorientador Prof. Dr. José Fernando de Oliveira por toda a atenção, ideias e sugestões que enriqueceram o trabalho.

Aos meus pais, Edinaldo e Edina, por sempre me apoiarem e serem minha base para chegar até aqui.

À Larissa Tebaldi de Oliveira pela parceria e todas as contribuições neste projeto.

À Profa. Dra. Adriana Cristina Cherri por ter me dado oportunidade nas iniciações científicas e pelo incentivo para me aventurar na área acadêmica.

A todos os alunos do Laboratório de Otimização (LOt) pelo apoio e pelas risadas durante todo o mestrado.

À Universidade de São Paulo (USP) e seus funcionários pelas condições de trabalho e a infraestrutura fornecida.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro da bolsa de mestrado (processos 13/27162-0) e da bolsa BEPE concedidas (processo 15/09109-0).

Resumo

SILVA, E. F. **Modelos matemáticos para um problema de caminho de corte.** 2016. 122 f. Dissertação (Mestrado em Ciências - Ciências de Computação e Matemática Computacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos - SP.

Os problemas de corte e empacotamento são frequentes em diferentes processos produtivos, por exemplo, na produção de roupas, de calçados, de peças metálicas e de móveis. Seu objetivo mais frequente é a minimização do desperdício de matéria-prima. No entanto, em algumas situações, o problema de determinação do caminho de corte é fundamental para eficiência do planejamento da produção. Este problema consiste em determinar a trajetória de corte que minimize, por exemplo, o tempo total de corte de um plano de corte previamente estabelecido. Devido a existência de poucas abordagens para este problema, nosso objetivo é propor modelos matemáticos para resolver o problema de determinação do caminho de corte. Além disso, uma variação do problema que considera a utilização de grafos dinâmicos também é abordada. Os resultados obtidos são comparados com resultados da literatura.

Palavras-chave: caminho de corte; modelo matemático; corte e empacotamento.

Abstract

SILVA, E. F. **Modelos matemáticos para um problema de caminho de corte.** 2016. 122 f. Dissertação (Mestrado em Ciências - Ciências de Computação e Matemática Computacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos - SP.

Cutting and packing problems are frequent in different productive process, for example, in the garment, shoe, metallic pieces and furniture production. Its most common objective is the minimization of the raw material waste. However, in some situations, the cutting path determination problem is fundamental to the efficiency of the production planning. This problem consists in determining the cutting trajectory that minimizes, for example, the total cutting time of a previously established cutting plane. Due to the few existing approaches to this problem, our objective is to propose mathematical models to solve the cutting path determination problem. Furthermore, a variation of the problem that considers the use of dynamic graphs is also adressed. The obtained results are compared with those from the literature.

Keywords: cutting path; mathematical model; cutting and packing.

Lista de Siglas

ARP	*Arc Routing Problem* (Problema de Roteamento em Arcos)
CARP	*Capacitated Arc Routing Problem* (Problema de Roteamento em Arcos Capacitado)
CPDP	*Cutting Path Determination Problem* (Problema de Determinação do Caminho de Corte)
CVRP	*Capacitated Vehicle Routing Problem* (Problema de Roteamento de Veículos Capacitados)
DRPP	*Dynamic Rural Postman Problem* (Problema do Carteiro Rural Dinâmico)
DTSP	*Dynamic Traveling Salesman Problem* (Problema do Caixeiro Viajanta Dinâmico)
GTSP	*Generalized Traveling Salesman Problem* (Problema do Caixeiro Viajante Generalizado)
LKH	*Lin-Kernighan Heuristic* (Heurística Lin-Kernighan)
OCARP	*Open Capacitated Arc Routing Problem* (Problema de Roteamento em Arcos Capacitado Aberto)
RPP	*Rural Postman Problem* (Problema do Carteiro Rural)
TSP	*Traveling Salesman Problem* (Problema do Caixeiro Viajante)
UCARP	*Undirected Capacitated Arc Routing Problem* (Problema de Roteamento em Arcos Capacitado Não-Direcionado)
URPP	*Undirected Rural Postman Problem* (Problema do Carteiro Rural Não-Direcionado)
VRP	*Vehicle Routing Problem* (Problema de Roteamento de Veículos)

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo

1

Introdução

O problema de reduzir a perda de material durante a etapa de corte surge em diferentes processos produtivos, como na produção de roupas, de calçados, de peças metálicas e de móveis. Frequentemente, a necessidade de reduzir a perda de material é modelada como um problema de corte e empacotamento, que consiste em, dada uma superfície a ser cortada, determinar o posicionamento das peças que serão originadas do corte desta superfície. O objetivo do problema é minimizar a perda de material da superfície. A busca por bons planos de corte, isto é, boas soluções do problema de corte e empacotamento, é o foco de muitas pesquisas. Para uma revisão sugerimos os artigos de Dyckhoff e Finke (1992), Wäscher, Haußner e Schumann (2007) e Bennell e Oliveira (2009).

Uma vez resolvido o problema de corte e empacotamento, em muitas aplicações reais, surge a necessidade de determinar o caminho de corte a ser seguido. A escolha do caminho a ser seguido pela máquina de corte para executar um plano de corte tem influência significativa na eficiência do planejamento da produção, em especial em dois casos: a) quando a ferramenta de corte (p.e. diamante artificial) tem custo elevado e se desgasta ao longo do processo de corte; e b) quando o tempo necessário para o corte é significativo, pois a escolha de um caminho de corte adequado pode aumentar o número de planos de corte concluídos ao longo de um dia de trabalho.

O problema de determinação do caminho de corte (*cutting path determination problem* - CPDP) consiste em definir uma trajetória de uma ou mais ferramentas de corte de forma a cumprir um padrão de corte preestabelecido. As cabeças de corte podem possuir capacidade limitada e não podem cortar partes internas das peças demandadas. Este problema vem sendo estudado há algumas décadas. Diferentes abordagens foram utilizadas para representá-lo, dentre elas destacamos as apresentadas em Manber e Israni (1984), Han e Na (1999), Moreira et al.

(2007), Rodrigues e Ferreira (2011) e Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2011). Devido a sua dificuldade de solução, diversos métodos heurísticos foram propostos, como podem ser vistos em Han e Na (1999), Lee e Kwon (2006), Moreira et al. (2007), Rodrigues e Ferreira (2011) e Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2014).

Apesar do avanço dos computadores e dos softwares de otimização, até o momento, apenas Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2011) e sua recente extensão Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2014) propuseram modelos matemáticos lineares para o CPDP. Logo, nosso objetivo neste trabalho é propor novos modelos matemáticos para representação do problema. Buscamos, em seguida, a solução do problema com base nos modelos propostos e também em uma heurística.

Este trabalho está estruturado como segue. No Capítulo 2 descrevemos o problema estudado e alguns conceitos básicos relevantes para o entendimento dos termos abordados nessa dissertação. Uma revisão dos trabalhos da literatura abordando o CPDP é apresentada no Capítulo 3. Os objetivos e a metodologia empregada são detalhados no Capítulo 4. O Capítulo 5 apresenta os resultados obtidos nos testes realizados para avaliar as abordagens propostas. Finalmente, as conclusões obtidas e possibilidades de trabalhos futuros são definidos no Capítulo 6.

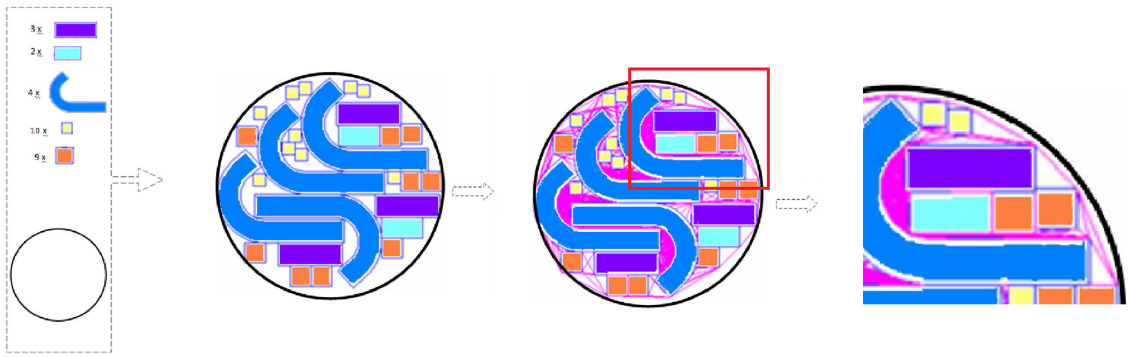
Capítulo

2

O problema de determinação do caminho de corte

O problema de determinação do caminho de corte (CPDP) tem por objetivo escolher o trajeto mínimo que uma ou mais ferramentas devem percorrer a fim de cumprir um plano de corte previamente definido. A união do CPDP com o problema de empacotamento compõem o que é conhecido como plano de produção. A Figura 2.1 ilustra este processo, desde a escolha das peças e da placa a ser cortada (Figura 2.1(a)), até a determinação de um plano de corte (Figura 2.1(b)) e a definição de uma trajetória de corte (Figuras 2.1(c) e 2.1(d)).

Figura 2.1 – Fases de um plano de produção.



(a) Peças e placa. (b) Plano de corte. (c) Trajetória de corte. (d) Detalhe da trajetória.

Fonte: Adaptado de Rodrigues e Ferreira (2011).

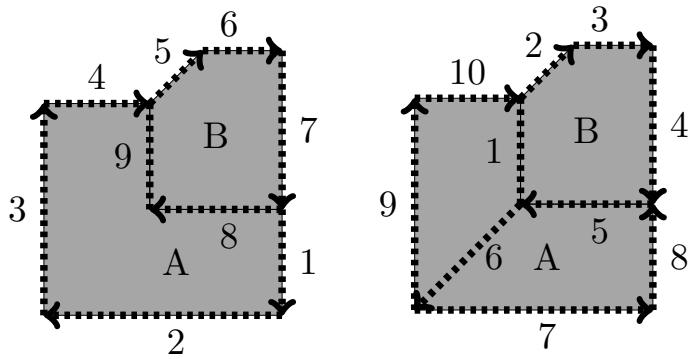
2.1 Conceitos básicos

Para o bom entendimento dos termos utilizados no decorrer desta dissertação, são definidos alguns conceitos básicos envolvendo o CPDP, tais como, perfuração, pré-corte, tipos de corte, entre outros.

2.1.1 Locomoção da cabeça de corte

O CPDP tem basicamente dois grupos de restrições: a) capacidade da ferramenta de corte; e b) preservação da integridade das peças no decorrer do processo de corte. A primeira restrição está associada a vida útil da ferramenta, por exemplo, no caso do corte com diamante artificial, ao seu desgaste. Enquanto a segunda está relacionada a preservação da integridade das peças a serem cortadas, impedindo, por exemplo, que uma peça seja fragmentada durante o processo de corte, como ilustra a Figura 2.2(b), em que as linhas pontilhadas indicam o caminho de corte seguido pela ferramenta e os números a sequência da trajetória de corte. Note que seguindo esta trajetória a Peça A seria fracionada pela linha de corte 6. Já na trajetória ilustrada na Figura 2.2(a) a integridade das peças é preservada.

Figura 2.2 – Exemplo de corte da Peça A.



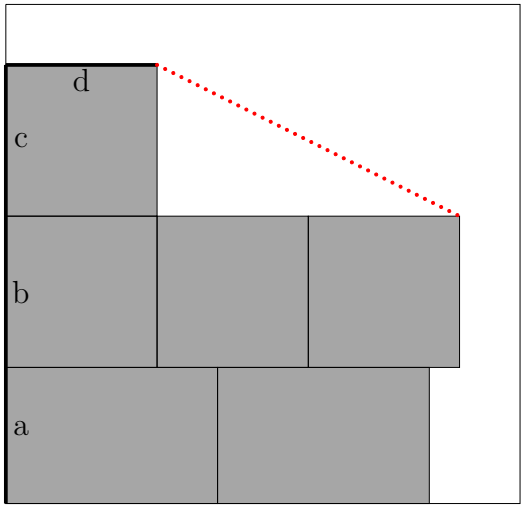
(a) Sem fragmentação. (b) Com fragmentação.

Observe que o caminho de corte ilustrado na Figura 2.2(b) seria viável se a ferramenta de corte pudesse ser deslocada acima do nível da placa, ou seja, na Etapa 6 da trajetória de corte a ferramenta seria articulada para cima e o processo de corte interrompido, logo ela seria deslocada sem que o Corte 6 fosse efetivamente realizado, mantendo assim a integridade da Peça A. Para a retomada do processo de corte é necessário perfurar novamente a placa. Vale ressaltar que se houver peças com buracos, a articulação da ferramenta de corte para cima e para baixo é necessária para completar um plano de corte.

2.1.2 Tipos de corte

Existem dois tipos de corte que podem ser realizados na placa: a) cortes efetivos; e b) cortes não efetivos. Os cortes efetivos correspondem aos cortes realizados nas bordas que representam as peças empacotadas enquanto que os cortes não efetivos correspondem aos cortes de qualquer pedaço da placa que não seja uma borda de alguma peça, ou seja, é um corte relacionado a locomoção da cabeça de corte e não ao plano de corte das peças. É comum a utilização de cortes não efetivos entre duas bordas de peças diferentes quando o custo para realizá-lo é menor do que o custo de uma locomoção acima do nível da placa combinado a uma nova perfuração. Na Figura 2.3, é possível observar a diferença entre os dois tipos de corte, sendo o corte efetivo representado pelos segmentos a, b, c e d em destaque (linhas em negrito) e o corte não efetivo representado pelo segmento pontilhado.

Figura 2.3 – Corte efetivo e não efetivo.

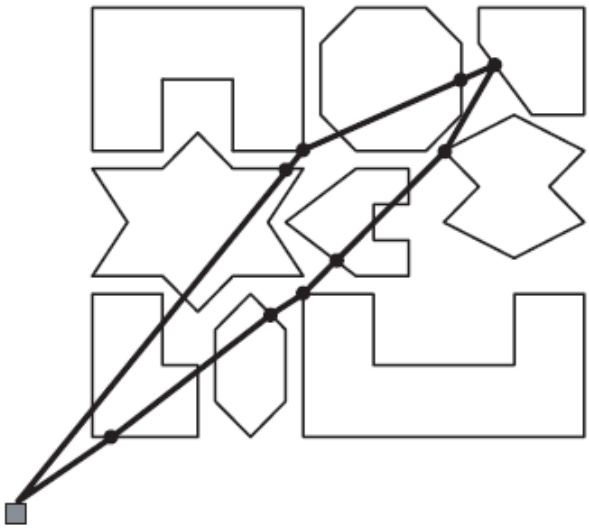


Além dos tipos de corte efetivo e não efetivo, as estratégias de corte do ponto de vista geométrico são os cortes por arestas ou por peças. Os cortes por arestas não consideram as peças como um todo, mas sim como um conjunto de arestas independentes que as compõem, permitindo o seu corte individual sem nenhuma sequência específica (Rodrigues e Ferreira (2011)). Já nos casos em que a peça é considerada como um todo, cada peça possui somente um ou mais pontos de referência no qual a ferramenta pode iniciar o corte, percorre todas as arestas que a compõem numa sequência preestabelecida e finaliza o corte saindo pelo mesmo ponto de início. Depois, caminha para o corte de outra peça na placa (Lee e Kwon (2006)). A Figura 2.4 ilustra um caminho de corte feito por peça, em que cada peça possui somente um ponto de referência.

2.1.3 Perfuração e pré-corte

A perfuração, como o próprio nome diz, corresponde ao procedimento realizado pela cabeça de corte para furar a placa. Este procedimento ocorre no início do processo de corte após a cabeça de corte realizar um movimento aéreo. Depois de um movimento aéreo é necessário perfurar

Figura 2.4 – Caminho de corte por peça.



Fonte: Lee e Kwon (2006).

novamente a placa se este local não tiver sido perfurado anteriormente, uma vez que para que o processo de corte seja retomado há a necessidade de que uma nova perfuração seja realizada para que a ferramenta de corte fique novamente no nível da placa e o processo de corte continue.

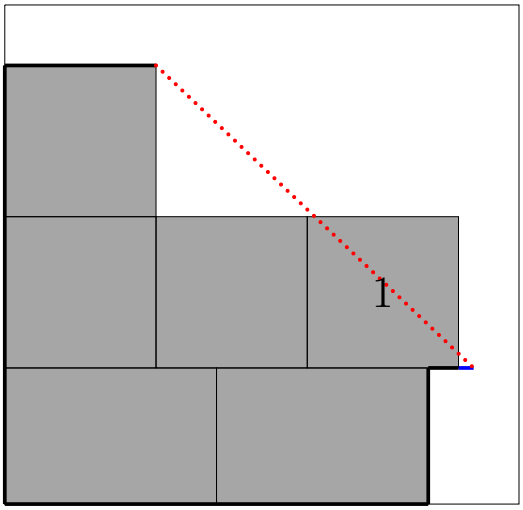
Vale ressaltar que, dependendo da composição da placa, a perfuração pode levar um tempo considerável para ser realizada, tornando-se um processo custoso. Para contornar este custo extra, existe o processo de pré-corte que consiste em realizar um corte de comprimento um pouco maior do que a aresta que está sendo cortada na placa. Este corte é utilizado como ponto de entrada para a ferramenta de corte após realizar um movimento aéreo, tornando desnecessária a perfuração. A Figura 2.5 ilustra um exemplo de pré-corte. Pode ser observado que na Peça 1 existe um segmento de aresta em destaque posicionado fora do contorno de qualquer peça (segmento horizontal mais grosso) que representa um pré-corte, permitindo que quando a ferramenta de corte finalizar seu movimento aéreo (linha pontilhada), o procedimento de corte seja retomado a partir do pré-corte sem a necessidade de uma nova perfuração.

2.1.4 Processos de corte

Existem diversos processos de corte na indústria, variando de acordo com o tipo de placa na qual as peças estão empacotadas, o tipo de ferramenta de corte utilizada e o tipo de corte que é aplicado. Por exemplo, o corte pode ser feito por plasma, laser, jato de água, guilhotina, entre outros, ao passo que a placa pode ser composta por uma diversificada gama de materiais, destacando-se metal, tecido, couro, plástico e rocha.

A principal característica a ser analisada quando se trata da ferramenta de corte é o tipo de material que será cortado. Cada material possui um conjunto de características específicas, por exemplo, ao se utilizar uma tocha como ferramenta de corte, se a placa possuir espessura

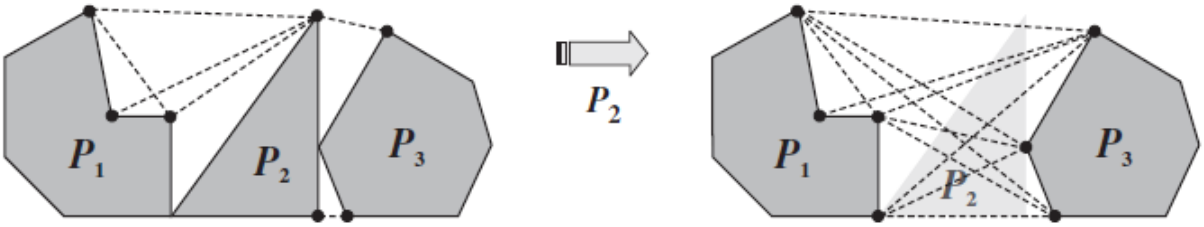
Figura 2.5 – Exemplo de pré-corte.



fina é preciso considerar a possibilidade de superaquecimento da placa, pois as peças podem ser danificadas (Han e Na (1999)); ou ao se utilizar jato de água como composto, o sentido do corte deve ser considerado devido a inclinação do jato durante o processo de corte.

Outra característica relevante é a altura na qual a placa se encontra durante o processo de corte. Por exemplo, a placa pode estar suspensa, fazendo com que as peças cortadas caiam em um recipiente abaixo da placa. Neste caso, a ferramenta de corte pode atravessar a área antes preenchida por uma peça, como em Moreira et al. (2007). A Figura 2.6 ilustra um exemplo no qual a Peça 2 (P_2) ao ser cortada permite que a cabeça de corte atravesse a região na placa que antes correspondia a uma peça cortada.

Figura 2.6 – Exemplo de corte numa placa suspensa.



Fonte: Moreira et al. (2007).

Também é possível que a placa esteja suspensa, porém permaneça próxima do recipiente no qual as peças cortadas caem. Neste caso, a peça completamente cortada, apesar de desprendida da placa ainda se encontra próxima da mesma, obrigando a cabeça de corte a tratá-la da mesma forma que as demais peças ainda não cortadas. Desta forma, a ferramenta continua se locomovendo acima do nível da placa na área anteriormente ocupada pela peça pois, devido à

proximidade da peça cortada com a placa, caso a cabeça de corte se locomova na altura da placa nesta região, a peça já cortada será danificada.

Apesar da grande maioria das ferramentas de corte possuírem a capacidade de se locomover verticalmente, existem casos em que a ferramenta de corte não realiza movimentos para cima do nível da placa, ou seja, qualquer movimento da ferramenta na superfície a ser cortada resulta em um corte na placa (Moreira et al. (2007)).

2.1.5 Tipos de placa

O tipo de placa pode ser analisado considerando o material que compõe a superfície a ser cortada e a espessura da placa. O material que compõe a placa pode ser composto por qualquer sólido, alterando o tipo de corte que deve ser realizado dependendo do material, por exemplo, um corte executado em pedras naturais depende do posicionamento dos veios e imperfeições; no caso de tecidos, depende do desenho da estampa, entre outros.

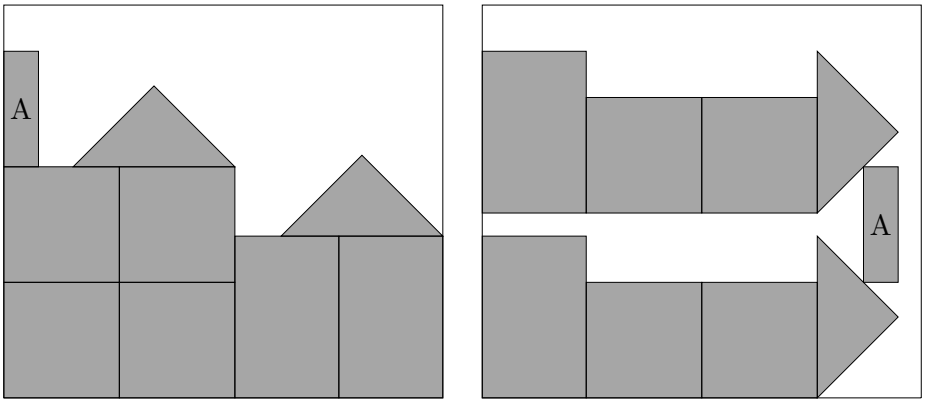
As placas podem ser de espessura fina ou grossa, dependendo do material que as compõem e da necessidade de uso das peças empacotadas. A principal diferença entre os dois tipos de espessura, no processo de corte, é que placas finas, segundo Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2014), possuem um tempo de perfuração pequeno que pode ser desconsiderado.

2.1.6 Cabeças de corte

A quantidade de cabeças de corte que a máquina possui influencia diretamente em todo o processo de produção, começando no empacotamento das peças. Nos casos em que várias cabeças de corte são utilizadas ao mesmo tempo na mesma placa, o problema de empacotamento deve considerar as restrições de mobilidade de cada uma das ferramentas durante sua solução. Por exemplo, na maioria dos casos de múltiplas cabeças de corte, todas as cabeças ficam presas num mesmo eixo, sendo que uma das ferramentas é considerada como a cabeça de corte mestre para a qual os movimentos de corte são definidos e, como todas as ferramentas estão no mesmo eixo, os movimentos de todas as cabeças de corte são sempre iguais ao movimento da mestre.

Essa situação obriga que as peças sejam empacotadas seguindo padrões (posicionamento das peças) semelhantes para que, quando as cabeças de corte iniciem a sua movimentação, peças do mesmo tipo sejam cortadas ao mesmo tempo, caso contrário, as cabeças de corte seguindo a mestre podem realizar algum corte que invalide a peça que não é semelhante as demais. A Figura 2.7(a) apresenta uma possibilidade de empacotamento para uma ferramenta com apenas uma cabeça de corte, enquanto que a Figura 2.7(b) representa as mesmas peças empacotadas para uma ferramenta com duas cabeças de corte no mesmo eixo. Nesta última imagem é importante observar que, para o corte da Peça A, é necessário que uma das cabeças de corte seja desligada para que a placa não seja danificada em regiões que podem ser futuramente aproveitadas.

Figura 2.7 – Exemplo de empacotamento.



(a) Máquina com uma cabeça de corte. (b) Máquina com duas cabeças de corte.

2.2 Considerações finais

O problema de determinação do caminho de corte é muito relevante no planejamento de produção. Como visto anteriormente, existem várias características que combinadas definem diferentes CPDP. No próximo capítulo, apresentamos uma revisão bibliográfica do CPDP.

Capítulo

3

Revisão bibliográfica

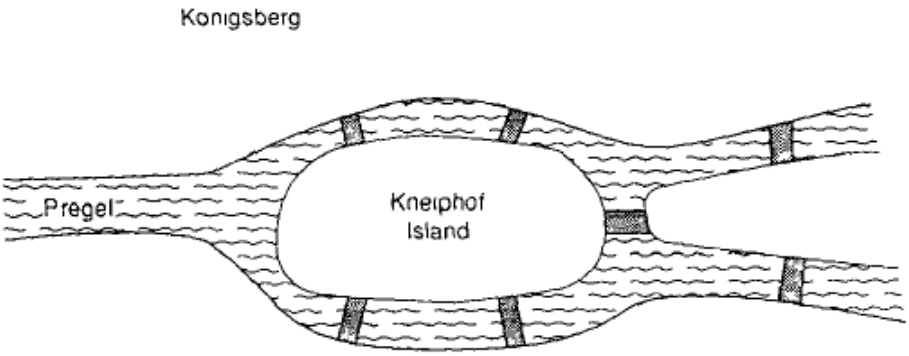
De acordo com a literatura, o problema de determinação do caminho de corte foi modelado utilizando duas abordagens. A primeira trata o CPDP como um problema de roteamento em arcos (*arc routing problem* - ARP). Na segunda, o CPDP é modelado como um problema do caixeiro viajante (*traveling salesman problem* - TSP). Este capítulo está dividido da seguinte forma: na Seção 3.1 é descrito o ARP, em seguida são resumidos alguns dos trabalhos que tratam desta abordagem; na Seção 3.2 é descrito o TSP e alguns trabalhos que o abordam e, por fim, na Seção 3.3 são apresentados os trabalhos que modelam o CPDP baseados nas abordagens ARP e TSP.

3.1 Problema de roteamento em arcos

O problema de roteamento em arcos consiste em definir o caminho mínimo que atravessa um subconjunto de arestas em um grafo. O ARP foi originalmente baseado em um dos problemas mais famosos da matemática, o Problema das Pontes de Königsberg, que consiste em encontrar uma ou mais rotas que percorram exatamente uma vez todas as sete pontes da cidade (Figura 3.1). As pontes são representadas por arestas e suas intersecções por vértices, formando-se assim um grafo. A solução do problema, encontrada pelo matemático Leonhard Euler, deu origem ao conceito de circuito euleriano, que consiste em atravessar cada aresta de um grafo exatamente uma vez, começando e terminando o percurso no mesmo vértice.

A partir da formalização deste problema, diversas variantes foram propostas com base em problemas reais de roteamento em arcos, destacamos a seguir as que estão relacionadas ao problema estudado.

Figura 3.1 – O Problema das Pontes de Königsberg.



Fonte: Eiselt, Gendreau e Laporte (1995a).

O problema do carteiro rural (*rural postman problem* - RPP) é um problema que, dado um grafo $G(V, E)$ composto por um conjunto de vértices V, arestas E e um subconjunto de arestas $E_R \subseteq E$, consiste em encontrar um circuito de custo mínimo que atravesse todas as arestas do subconjunto E_R pelo menos uma vez. Devido à sua relevância, este problema foi bastante estudado. Para uma revisão sugere-se Eiselt, Gendreau e Laporte (1995b), em que os autores destacam exemplos reais que podem ser caracterizados por este problema. Alguns trabalhos mais recentes são Kang e Han (1998) que propuseram um algoritmo genético para o RPP, Peña (2004) que apresenta uma abordagem híbrida para o mesmo problema e Groves e Vuuren (2005) que propõem uma heurística baseada em busca local para o RPP.

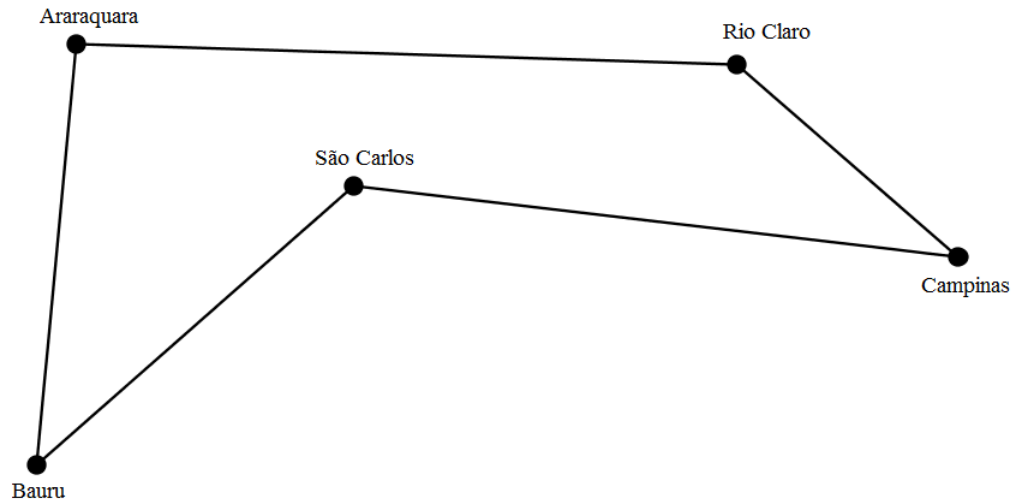
Outro problema importante derivado do ARP é o problema de roteamento em arcos capacitados (*capacitated arc routing problem* - CARP). Originalmente proposto por Golden e Wong (1981), o CARP consiste em, dado um grafo G, um subconjunto de arestas E_R em que cada aresta possui uma demanda específica e um conjunto de veículos idênticos com capacidade limitada q saindo de um depósito, encontrar um conjunto de circuitos com custo mínimo que atenda toda a demanda das arestas sem exceder a capacidade de cada veículo. Belenguer e Benavent (2003) desenvolveram um algoritmo de planos de corte para resolver o CARP enquanto Usberti, França e França (2013) propuseram uma meta-heurística para solução do problema. Wøhlk (2008) fez um levantamento sobre os trabalhos da literatura envolvendo o CARP e algumas de suas variações.

Devido a sua relevância, vários autores investigaram a literatura envolvendo diferentes abordagens do ARP, analisando seus modelos e os métodos propostos para sua resolução. Corberán e Prins (2010) realizaram um levantamento sobre a literatura envolvendo algumas das categorias do ARP, como o CARP, RPP, entre outros. Hertz (2005) apresenta os algoritmos exatos e heurísticas recentemente desenvolvidos para duas categorias específicas do ARP que envolvem grafos com arestas não-direcionadas: o problema do carteiro rural não-direcionado (URPP); e o problema de roteamento em arcos capacitados não-direcionado (UCARP).

3.2 Problema de roteamento em nós

O problema do caixeiro viajante é um problema clássico de roteamento em nós que é baseado na situação prática que os mercadores enfrentavam ao decidir qual a rota mais econômica entre seus clientes. A Figura 3.2 ilustra um exemplo de rota que um mercador faria para percorrer todas as cidades clientes. O TSP consiste em, dado um grafo G, encontrar o caminho mínimo que percorre todos os vértices (cidades) do grafo uma única vez e retorne ao vértice inicial. Öncan, Altinel e Laporte (2009) realizaram um levantamento das diferentes formulações existentes na literatura para tratar o TSP.

Figura 3.2 – O Problema do Caixeiro Viajante.



Uma variante do TSP estudada na literatura é o problema do caixeiro viajante generalizado (*generalized traveling salesman problem* - GTSP). O GTSP consiste em, dado um conjunto de cidades, divididas em distritos, encontrar um caminho mais curto visitando exatamente uma cidade de cada distrito.

Uma outra generalização do TSP é o problema de roteamento de veículos (*vehicle routing problem* - VRP), originalmente chamado de problema de despacho de caminhão. Este problema consiste em, dado um conjunto de vértices, cada um com uma demanda específica, e um veículo com capacidade menor do que a demanda total do conjunto de vértices, definir um conjunto de trajetos necessários para atender toda a demanda percorrendo o menor caminho. Cada trajeto consiste em sair de um depósito predefinido, atender um subconjunto de vértices sem violar a capacidade do veículo e retornar ao depósito.

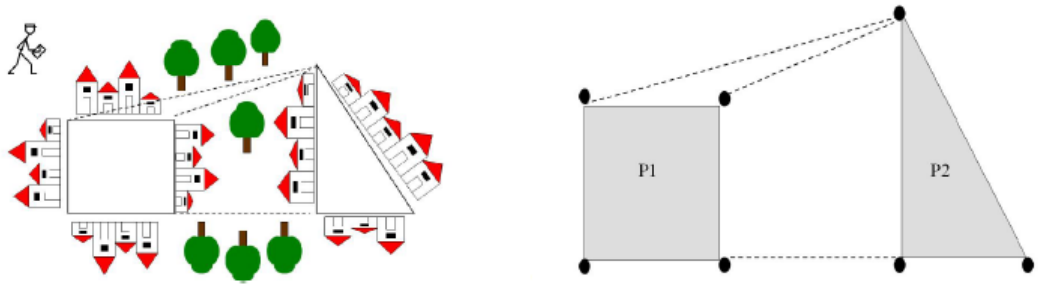
3.3 Abordagens para o CPDP

Manber e Israni (1984) representam o CPDP como um grafo, em que, adotando uma abordagem por arestas, o objetivo é reduzir o número de perfurações utilizando a ideia de circuito euleri-

ano. Os autores consideram especificamente o caminho de corte feito por uma tocha em que a minimização do número de perfurações é importante devido ao tempo desperdiçado toda vez que a tocha precisa ser ligada após um movimento aéreo da ferramenta.

Rodrigues e Ferreira (2011) tratam o CPDP como um problema do carteiro rural (RPP). Analisando esta adaptação do problema, o subconjunto E_R é formado pelas arestas de corte obrigatório, ou seja, o contorno das peças alocadas na placa, enquanto as demais arestas correspondem a outros movimentos possíveis da ferramenta de corte (cortes não efetivos na placa ou movimentos aéreos, por exemplo). A Figura 3.3(a) ilustra o RPP enquanto a Figura 3.3(b) ilustra o CPDP correspondente. É importante destacar que as arestas pontilhadas correspondem a caminhos de cortes não efetivos que podem ser realizados na placa.

Figura 3.3 – Adaptação do CPDP como um RPP.



(a) RPP (b) CPDP

Fonte: Rodrigues e Ferreira (2011).

Moreira et al. (2007) trataram o CPDP como um problema do carteiro rural dinâmico (*dynamic rural postman problem* - DRPP) que consiste num problema com a mesma definição do RPP, porém as arestas existentes no grafo variam de acordo com as peças que foram completamente cortadas. O uso do DRPP acontece pois, na aplicação estudada pelos autores, a placa está suspensa e as peças caem a medida que são cortadas, o que torna dinâmica a configuração do grafo associado ao problema (Figura 2.6).

Apesar do CPDP não ter sido abordado como um CARP, é possível associar este problema com um CPDP que envolva várias cabeças de corte e cada ferramenta possua uma capacidade limitada de corte (diamante artificial, por exemplo). Usberti, França e França (2011) propuseram um problema baseado no CARP, chamado de problema de roteamento em arcos capacitados aberto (*open capacitated arc routing problem* - OCARP). A diferença entre estes dois problemas é que o OCARP não considera a existência de um depósito, tornando possível que cada rota seja iniciada em qualquer ponto no grafo. Os autores mostraram que, uma vez realizadas algumas adaptações, o CPDP pode ser modelado como um OCARP. Neste caso, temos que:

1. os vértices do grafo do OCARP correspondem aos vértices das peças a serem cortadas (polígonos);

2. as arestas do grafo correspondem as arestas das peças;

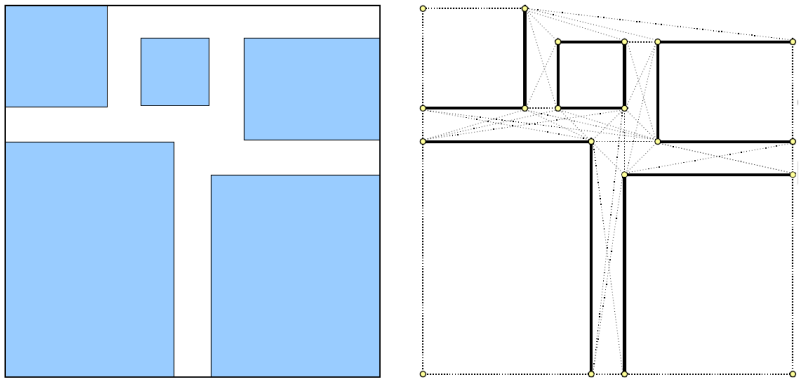
3. o custo de cada aresta é correspondente ao tempo gasto para cortá-la;
4. a demanda representa a energia gasta para realizar o corte; e
5. os veículos correspondem às ferramentas de corte, cuja capacidade é equivalente a vida útil da ferramenta.

Os autores consideram que além das arestas das peças, a ferramenta de corte, em geral, realiza outros deslocamentos sobre a placa que são representados por dois tipos de arestas:

1. arestas que não atravessam o interior de nenhuma peça na superfície da placa; e
2. arestas que representam deslocamentos das cabeças de corte acima da superfície da placa, pois atravessariam o interior de alguma peça.

O objetivo do problema é minimizar o tempo total gasto por uma ou mais ferramentas de corte durante o processo de corte da placa. Na Figura 3.4, os autores ilustram a adaptação do OCARP para representar o CPDP em que as arestas pontilhadas representam os caminhos que a ferramenta de corte pode percorrer e as arestas cheias representam os caminhos que devem ser percorridos por elas.

Figura 3.4 – Adaptação de um exemplo do OCARP para o CPDP.



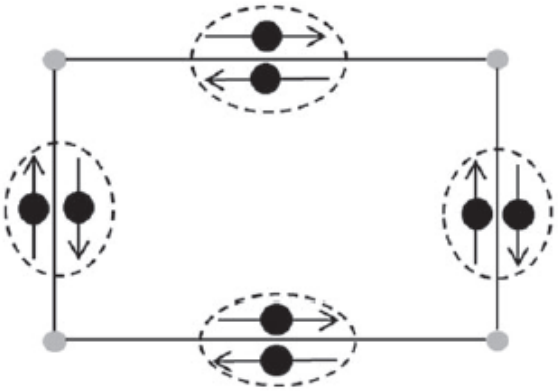
Fonte: Usberti, França e França (2011).

Han e Na (1999) utilizam a abordagem do problema do caixeiro viajante (TSP) para o CPDP. Neste caso, como ilustra a Figura 2.4, as peças tem um ponto de referência pelo qual seu corte deve iniciar e uma vez iniciado a peça deve ser completamente cortada. Os vértices representam o ponto de referência de cada uma das peças e as linhas representam a movimentação da ferramenta entre elas. Os autores consideram dois objetivos conflitantes, minimizar o caminho de corte e o efeito de aquecimento da placa. Lee e Kwon (2006) também utilizaram esta modelagem, no entanto, não consideram a possibilidade de aquecimento da placa. Um modelo matemático não linear é proposto pelos autores e um algoritmo genético é utilizado para sua solução.

Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2011) e Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2014) abordam o CPDP como um problema do caixeiro viajante generalizado (GTSP). Cada sentido de

corte de uma aresta representa uma cidade e a partir das cidades são criados distritos com os pares de cidades que representam as arestas. Além da representação do sentido de corte de cada aresta, os distritos também são utilizados para representar perfurações e pré-cortes. A Figura 3.5 ilustra a transformação das arestas de uma peça em distritos (círculos tracejados) com duas cidades, cada uma representando um sentido de corte. Os autores foram os únicos a publicar até o momento um modelo matemático linear que trata o CPDP como um problema de roteamento em nós. A descrição do modelo e as características do problema abordado são apresentadas na Seção 4.2.

Figura 3.5 – CPDP como um GTSP.



Fonte: Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2014).

Por fim, o problema de roteamento de veículos capacitados (CVRP) também pode ser utilizado para tratar do CPDP. O CVRP possui o objetivo de, dada uma frota de veículos idênticos e um conjunto de vértices demandados (clientes), definir rotas com início e fim num depósito preestabelecido que atendam toda a demanda dos vértices, sem exceder a capacidade de cada veículo e minimizando o custo da travessia. Devido aos poucos trabalhos da literatura que lidam com o CARP e a literatura bem mais estabelecida para o CVRP, formas de conversão do CARP para o CVRP têm sido desenvolvidas, por exemplo, Pearn, Assad e Golden (1987), Longo, Aragão e Uchoa (2006), Baldacci e Maniezzo (2006) e Foulds, Longo e Martins (2014). Isto permite que abordagens para o CPDP baseadas no CARP possam ser resolvidas utilizando os mais elaborados e eficientes métodos de solução do CVRP existentes na literatura, como pode ser visto no próximo capítulo.

Capítulo

4

Modelos propostos

O objetivo de pesquisa deste mestrado é modelar e resolver o problema de determinação do caminho de corte. Como descrito no Capítulo 2, existem inúmeras características que definem um CPDP, tais como, ferramenta de corte e o material a ser cortado. Cada combinação de características retrata um problema diferente. Logo, no início deste capítulo é definido o problema a ser investigado (Seção 4.1). Em seguida, são apresentados três modelos para o problema estudado. O primeiro é uma adaptação do modelo CPDP proposto por Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2011) considerando as características do problema sob investigação (Seção 4.2). Já o segundo modelo para o CPDP tem como base o modelo para o problema do carteiro rural proposto por Christofides et al. (1981) (Seção 4.3). Também é proposto um modelo que tem por base o problema do caixeiro viajante, criado a partir da conversão do CVRP para o CARP, proposta por Baldacci e Maniezzo (2006), e a heurística de Lin e Kernighan (1973) (Seção 4.4). Por fim, uma variante do problema estudado considerando o problema de determinação do caminho de corte dinâmico é tratada[1] e dois modelos matemáticos são propostos (Seção 4.5).

4.1 Características do problema estudado

Neste trabalho, é abordado o corte a laser de chapas finas cujas características foram definidas com base em casos reais. Para a ferramenta de corte é considerado que:

[1]Este trabalho foi desenvolvido durante o estágio de pesquisa na Universidade do Porto (Faculdade de Engenharia) sob orientação do coorientador Prof. José Fernando Oliveira, com apoio da FAPESP (Processo nº 15/09109-0).

- a ferramenta de corte não se desgasta ao longo do corte, ou seja, a capacidade da ferramenta é suficiente para cortar todo o conteúdo da placa;
- a ferramenta possui somente uma cabeça de corte;
- são considerados 3 situações possíveis para a ferramenta:
  - desligada (se locomovendo longe da placa);
  - ligada cortando;
  - ligada perfurando;
- o diâmetro de corte da ferramenta é pequeno, ou seja, não há espaço para que uma peça ao ser cortada se desloque na placa;
- a cabeça de corte sempre começará de uma origem predefinida (depósito) e ao finalizar o caminho de corte retornará ao depósito.

Com relação as características da placa e das peças a serem cortadas, tem-se que:

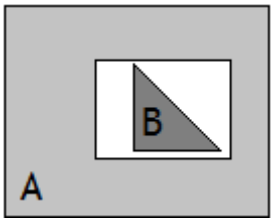
- não há sentido obrigatório para o corte de partes das peças;
- a placa possui espessura fina, portanto o tempo de perfuração pode ser desconsiderado;
- a placa não é afetada pelo calor gerado durante o processo de corte;
- o corte das peças pode ser realizado em etapas, ou seja, não é necessário que a peça inteira seja cortada em uma vez;
- caso necessário, as peças são aproximadas por polígonos.

Após um estudo sobre os diferentes modelos encontrados na literatura e suas possíveis adaptações para as características descritas acima, conclui-se que o problema do carteiro rural (RPP), proposto por Christofides et al. (1981), é o modelo mais simples capaz de representar o problema estudado. Devido às possíveis vantagens de se utilizar uma modelagem baseada no problema de roteamento de veículos capacitado (CVRP), descritas no Capítulo 3, uma outra proposta estudada foi a conversão do CARP para o CVRP, como apresentado por Baldacci e Maniezzo (2006). Além disso, também foi estudado um modelo proposto na literatura para um CPDP com características semelhantes as descritas nesta seção (Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2011)). Estas propostas de modelagem são descritas a seguir.

4.2 Abordagem baseada na literatura

Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2011) analisam o problema de corte de peças irregulares posicionadas em uma superfície de metal. Além das características do problema aqui estudado, os autores também consideram a existência de peças irregulares com buracos, ou seja, no seu interior é possível que outra peça seja posicionada como ilustra a Figura 4.1. Além disso, quando um contorno é completamente cortado, o pedaço da placa correspondente a peça cortada se separa do restante da placa, tornando impossíveis novos cortes de elementos ou peças na parte separada, obrigando a existência de restrições de precedência entre o corte de peças que estejam no interior de outras. Também é preciso tratar de forma especial peças que possuem arestas em comum. Neste caso, os elementos em comum devem ser cortados antes que as peças as quais eles estejam conectados sejam completamente cortados.

Figura 4.1 – Peças posicionadas no interior de outras peças.

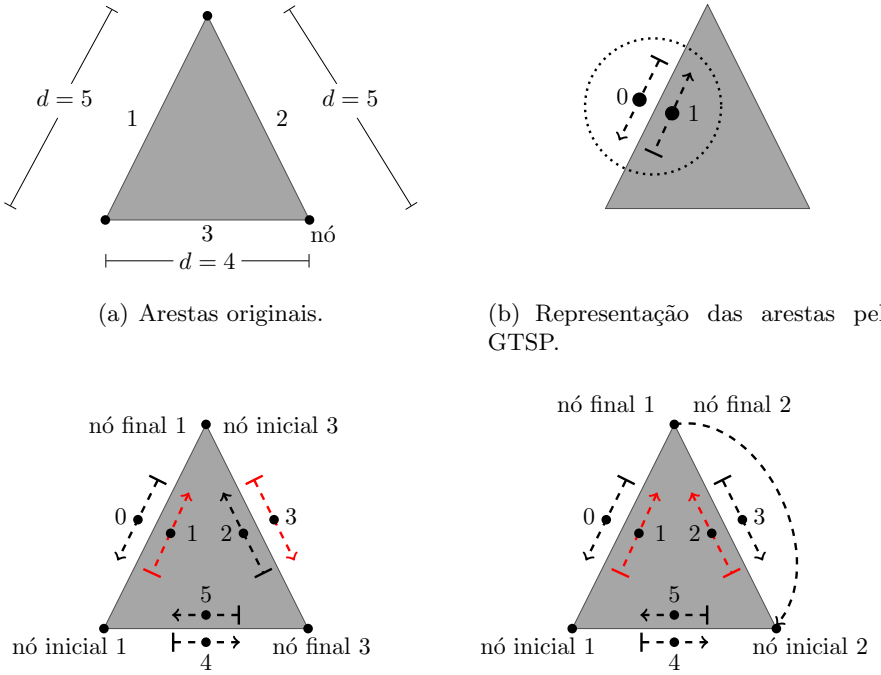


Para a modelagem matemática, os autores utilizaram uma abordagem do problema do caixeiro viajante generalizado (GTSP), considerando cada aresta que compõe as peças como um distrito com duas cidades, sendo cada cidade um sentido possível de corte da aresta. Para representar as cidades correspondentes as arestas, os autores enumeraram as arestas de forma que uma aresta e é composta pelas cidades $2e-2$ e $2e-1$, $e \geq 1$, por exemplo, a aresta 1 da Figura 4.2(a) corresponde as cidades 0 e 1 na Figura 4.2(b). O custo para ir da cidade i para a cidade j é calculado com base nas arestas originais, ou seja, é dado pela distância entre o nó final da aresta que corresponde a cidade i até o nó inicial da aresta que corresponde ao nó j. Nas Figuras 4.2(c) e 4.2(d) são ilustrados, respectivamente, a distância entre as cidades 1 e 3, que é igual a zero, e a distância entre as cidades 1 e 2, que é igual a 5. Na modelagem é considerado que o ponto de partida para o trajeto é sempre representado pela aresta $e = 1$.

Com exceção das restrições de precedência, as demais características que compõem o problema proposto pelos autores se assemelham com as características do problema aqui estudado, ou seja, as placas de corte consideradas são de espessura fina, portanto o tempo gasto durante o processo de perfuração é desconsiderado, as peças são tratadas por arestas, sem a necessidade de que as arestas que formam uma peça sejam cortadas em sequência, existe somente uma cabeça de corte e a placa não é afetada pelo calor durante o processo de corte.

Considerando apenas as características do problema estudado, ou seja, que as peças não contêm buracos e que seu corte não causa movimentos de peça, escrevemos a seguir o modelo de Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2011) simplificado.

Figura 4.2 – Exemplo de abordagem do GTSP.



(a) Arestas originais.

(b) Representação das arestas pelo GTSP.

(c) Distância entre as cidades 1 e 3.

(d) Distância entre as cidades 1 e 2.

Parâmetros:

$dist_{ij}$ - distância para atravessar da cidade i até a cidade j;

a - quantidade de cidades (sentido de corte numa aresta) no grafo;

n - quantidade de arestas no grafo.

Variáveis:

x_{ij} - recebe valor 1 se o trajeto possui um movimento indo da cidade i para a cidade j, 0 caso contrário;

y_{de} - recebe valor 1 quando a aresta d precede (não necessariamente de forma imediata) a aresta e, 0 caso contrário.

$$min \sum_{i} \sum_{j} dist_{ij} x_{ij} \tag{4.1}$$

$$s.a: \sum_{i=1}^{a} (x_{2e-2,i} + x_{2e-1,i}) = 1, \qquad \forall e = 2, \ldots, n, \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{a} (x_{i,2e-2} + x_{i,2e-1}) = 1, \qquad \forall e = 2, \ldots, n, \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1}^{a} x_{ij} = \sum_{k=1}^{a} x_{jk}, \qquad \forall j = 1, \ldots, a, \tag{4.4}$$

$$y_{de} \geq x_{2d-2,2e-2} + x_{2d-2,2e-1} + x_{2d-1,2e-2} + x_{2d-1,2e-1}, \qquad \forall d, e = 2, \ldots, n | d \neq e, \tag{4.5}$$

$$y_{de} + y_{ed} = 1, \qquad \forall d, e = 2, \ldots, n | d \neq e, \tag{4.6}$$

$$y_{de} + y_{ef} + y_{fd} + (x_{2e-2,2d-2} + x_{2e-2,2d-1} + x_{2e-1,2d-2} + x_{2e-1,2d-1}) \leq 2, \qquad \forall d, e, f = 2, \ldots, n | d \neq e \neq f, \tag{4.7}$$

$$y_{1e} = 1, \qquad \forall e = 2, \ldots, n, \tag{4.8}$$

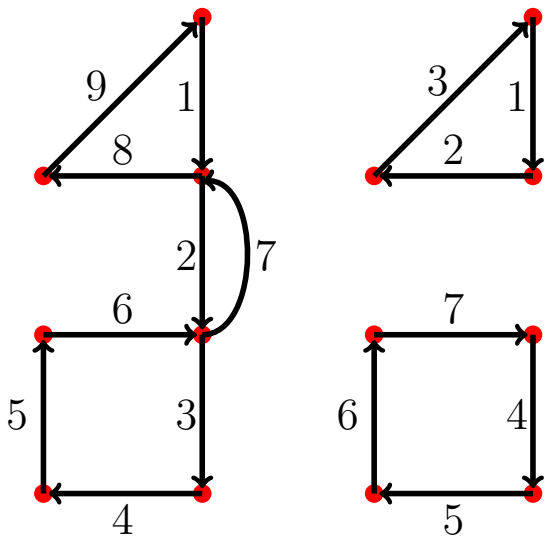
$$y_{de} \geq 0, \qquad \forall d, e = 2, \ldots, n, \tag{4.9}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i, j = 1, \ldots, a | i \neq j. \tag{4.10}$$

A função objetivo (4.1) visa minimizar a distância total percorrida. As restrições (4.2) e (4.3) garantem que cada aresta é visitada exatamente uma vez, enquanto que as restrições (4.4) garantem a continuidade do percurso. Restrições (4.5) garantem que no máximo um movimento seja permitido entre as arestas d e e. Restrições (4.6) garantem que se a aresta d precede a aresta e, o inverso não é possível e vice-versa, impossibilitando a criação de um ciclo entre essas arestas. Já as restrições (4.7) garantem que a cada 3 arestas um ciclo nunca seja formado enquanto que as restrições (4.8) garantem que o trajeto sempre seja iniciado do depósito. Esse conjunto de restrições (4.5) - (4.8) impõe a eliminação de subciclos ilegais, ou seja, eliminam as soluções que possuem subconjuntos de vértices com um conjunto de arcos percorridos que formam um subciclo e que não tenham um arco ligando este subconjunto com o restante do grafo. Por fim, as restrições (4.9) e (4.10) definem o domínio das variáveis.

Para facilitar a compreensão sobre subciclos ilegais, a Figura 4.3 ilustra os dois tipos possíveis de subciclo. Na Figura 4.3(a) um subciclo permitido é ilustrado. Observe que as arestas 2 e 7 garantem que o caminho não fique dividido entre dois ciclos menores. Já na Figura 4.3(b) o mesmo não pode ser observado. É importante ressaltar que sem as restrições de eliminação de subciclos ilegais as demais restrições do modelo permitiriam a existência de caminhos como esse.

Figura 4.3 – Tipos de subciclos.



(a) Subciclo permitido. (b) Subciclo ilegal.

4.3 Abordagem por roteamento em arcos

Como foi definido no Capítulo 3, o RPP (*rural postman problem*) consiste em, dado um grafo $G(V, E)$ e um subconjunto de arestas $E_R \subseteq E$, encontrar um circuito de custo mínimo que atravesse todas as arestas do subconjunto E_R conhecidas como arestas obrigatórias. O modelo utilizado neste trabalho, proposto por Christofides et al. (1981), apresenta uma formulação simples e eficiente para o problema estudado.

Para utilização do modelo proposto, é necessário um pré-processamento das informações do problema para elaborar o grafo que o represente, porém, no problema aqui abordado suas características tornam desnecessário tal pré-processamento. No CPDP, a construção do grafo é feita de forma que os vértices representam os vértices das peças a serem cortadas, enquanto que as arestas obrigatórias correspondem aos lados das peças e as demais arestas correspondem aos possíveis movimentos da ferramenta de corte entre os vértices. Para mais informações sobre o pré-processamento sugere-se a leitura do artigo de Christofides et al. (1981).

O modelo proposto para o RPP é dado a seguir. Antes, no entanto, parâmetros e variáveis são descritos:

Parâmetros:

$G(V, E)$ - grafo G composto pelo conjunto de vértices V e conjunto de arestas E;

V_{k_1} - conjunto de vértices da componente $k_1 \in P$;

E_R - conjunto de arestas obrigatórias, $E_R \subseteq E$;

P - conjunto de componentes conexas no subgrafo gerado por E_R;

c_e - custo de atravessar a aresta e;

$\delta(i)$ - conjunto de arestas que possuem uma extremidade no vértice i.

Variáveis:

x_e - recebe valor 1 se o trajeto atravessa a aresta e, 0 caso contrário;

w_i - variável utilizada para manter a cardinalidade par do vértice i.

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e \tag{4.11}$$

$$s.a : |E_R \cap \delta(i)| + \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2w_i, \qquad \forall i \in V, \tag{4.12}$$

$$\sum_{i \in V_{k_1}} \sum_{\substack{k_2 \in P \\ k_1 \neq k_2}} \sum_{j \in V_{k_2}} \sum_{e \in \delta(i) \cap \delta(j)} x_e \geq 2, \qquad k_1 \in P, \tag{4.13}$$

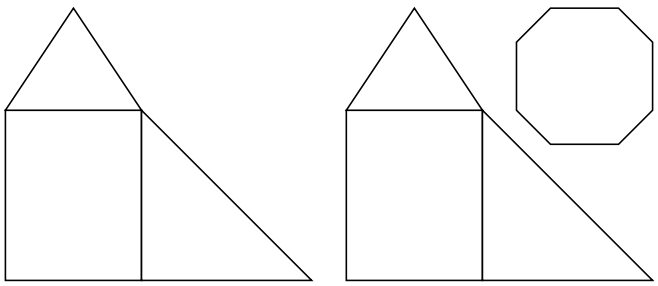
$$x_e \in \mathbb{Z}_+, \qquad \forall e \in E, \tag{4.14}$$

$$w_i \in \mathbb{Z}_+, \qquad \forall i \in V. \tag{4.15}$$

A função objetivo (4.11) busca minimizar o custo do caminho percorrido. As restrições (4.12) garantem que cada vértice incluso na solução possua grau par. Já as restrições (4.13) garantem a inexistência de subciclos ilegais na solução, ou seja, cada subconjunto k ($k \in P$) de vértices que se conectem por arestas obrigatórias devem possuir pelo menos duas arestas conectando este subconjunto com o restante do grafo. Desta forma, as restrições (4.12) em conjunto com as restrições (4.13) garantem que o trajeto necessariamente seja um ciclo (caminho fechado). Por fim, (4.14) e (4.15) definem o domínio das variáveis do modelo.

Apesar do RPP ser um problema NP-difícil, é importante ressaltar que existe uma situação para qual o problema pode ser resolvido em tempo polinomial. Quando o subconjunto E_R gera um grafo conectado, o problema deixa de ser NP-difícil. Além disso, as restrições de eliminação de subciclos ilegais (4.13) tornam-se desnecessárias. A Figura 4.4 ilustra um caso em que o RPP apresenta complexidade polinomial e outro onde o RPP é NP-difícil.

Figura 4.4 – Complexidade do RPP.



(a) Polinomial. (b) NP-difícil.

Para efeitos de implementação, nos testes realizados é realizada uma verificação da conectividade das arestas obrigatórias durante o preprocessamento. Se a instância apresenta um grafo que pode ser resolvido em tempo polinomial, o modelo matemático do RPP gerado baseado nessa instância não possui as restrições de subciclo ilegais (4.13).

4.4 Abordagem por roteamento em nós

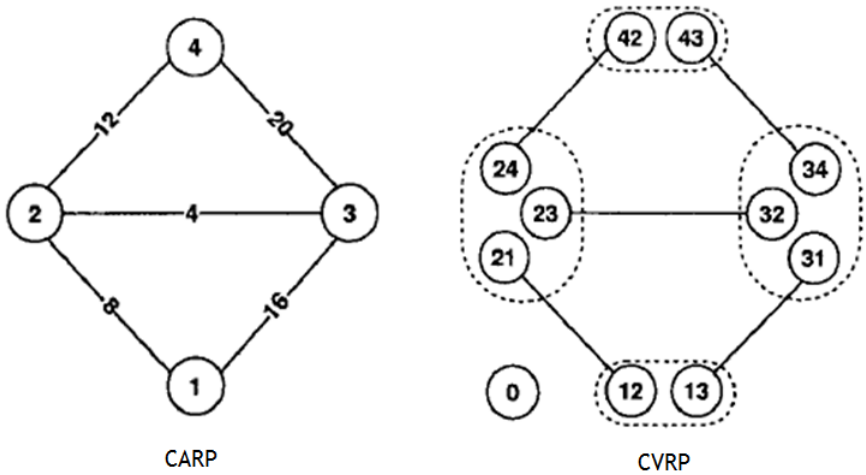
Na literatura, alguns problemas de roteamento em arcos são tratados com eficiência por métodos de roteamento em nós. Uma das vantagens de usar esta abordagem é a existência, na literatura, de um conjunto vasto e bem elaborado de técnicas de solução para estes problemas. Por exemplo, comparando os resultados mais recentes para o CVRP e o CARP, o CARP possui soluções ótimas para instâncias com até aproximadamente 30 arestas, enquanto que os métodos de solução do CVRP resolvem problemas com até aproximadamente 130 vértices.

Neste sentido, vários autores estudaram formas de conversão do CARP para o CVRP. Pearn, Assad e Golden (1987) propuseram o primeiro modelo de conversão, transformando um grafo com R arestas obrigatórias do CARP num grafo com $3R + 1$ vértices a serem atendidos no CVRP. Longo, Aragão e Uchoa (2006) e Baldacci e Maniezzo (2006) apresentam melhorias nos modelos de conversão, gerando grafos com $2R + 1$ vértices para o CVRP. Mais recentemente, Foulds, Longo e Martins (2014) desenvolveram um modelo de conversão que gera um grafo do CVRP com apenas $R + 1$ vértices.

Analisando as instâncias em comum resolvidas pelos autores citados, além da própria simplicidade de cada modelo, observou-se que o trabalho de Baldacci e Maniezzo (2006) apresentou melhor desempenho. A ideia de conversão proposta mantem somente as arestas obrigatórias do grafo original, transformando cada extremo de uma aresta obrigatória em um vértice que não tem ligação com as demais arestas obrigatórias do grafo. Cada vértice gerado é ligado com os demais formando um grafo completamente conectado com $2R$ vértices, além do vértice depósito. A criação de um grafo completamente conectado é feita para que seja possível, a partir de uma aresta, seguir para qualquer outra diretamente, sem a necessidade de percorrer outras arestas intermediárias.

A Figura 4.5 ilustra um exemplo de conversão de um grafo do CARP para o CVRP. A imagem a esquerda representa o grafo original com seus respectivos vértices e as arestas obrigatórias, enquanto que a imagem a direita representa o mesmo grafo convertido para o CVRP com $2R+1$ vértices, apresentando somente as arestas obrigatórias. Por exemplo, a aresta $(2, 4)$ é formada pelos nós 24 e 42, representando os nós 2 e 4 do grafo original. Cada conjunto de vértices, por exemplo, vértices 21, 23 e 24, representam vértices que estão posicionados na mesma coordenada no grafo. Como o grafo convertido é um grafo completamente conectado, para facilitar sua visualização, as arestas não obrigatórias foram omitidas na imagem. O depósito (Vértice 0) utilizado no CVRP corresponde a qualquer um dos vértices no grafo original que seria utilizado como ponto de início.

Figura 4.5 – Grafo original e convertido para o CVRP.



Fonte: Baldacci e Maniezzo (2006).

O custo de travessia de cada aresta também deve ser convertido, uma vez que os vértices do CVRP não são os mesmos vértices do CARP. Dado que um vértice i que faz parte de uma aresta (i, k) no CARP é representado pelo vértice s_{ik} no CVRP e uma aresta (i, j) no CARP é representada por (s_{ij}, s_{ji}) no CVRP, o cálculo dos novos custos se dá da seguinte forma:

$$\hat{c}_{s_{ij}s_{kl}} = \begin{cases} 0, & se\ (s_{ij}, s_{kl}) \in \hat{R}, \\ \frac{1}{2}c_{ij} + dist(i,k) + \frac{1}{2}c_{kl}, & c.c., \end{cases} \tag{4.16}$$

$$\hat{c}_{0s_{ij}} = dist(0, i) + \frac{1}{2}c_{ij}, \tag{4.17}$$

em que:

$\hat{c}_{s_{ij}s_{kl}}$ - custo da aresta (ij, kl) no CVRP;

c_{ij} - custo da aresta (i, j) no CARP;

dist(i, k) - caminho mais curto entre os vértice i e k no CARP;

$\hat{R}$ - conjunto das arestas obrigatórias do CARP.

A função (4.16) impõe custo zero na travessia das arestas obrigatórias, enquanto que para as demais arestas o custo no grafo original é dividido em duas partes, sendo cada metade atribuída para cada vértice que compõe a aresta. Desta forma, o custo de travessia na aresta $\hat{c}_{s_{ij}s_{kl}}$ tem valor equivalente a metade do custo da aresta original (i, j) por ter sido atravessado o vértice s_{ij} da aresta (s_{ij}, s_{ji}), assim como é somado metade do custo da aresta original (k, l) além do custo do caminho mais curto que liga os dois vértices em questão (dist(i, k)). Da mesma forma, em (4.17) calcula-se o custo das arestas não demandadas que saem do depósito.

Os autores afirmam que os custos devem ser calculados desta maneira para garantir a equivalência entre os dois problemas, ou seja, se o mesmo trajeto for percorrido tanto no grafo CARP quanto no grafo CVRP, o custo dos dois trajetos deve ser igual. Para exemplificar, considere que são utilizados dois veículos para percorrer o grafo convertido para o CVRP (Figura 4.5). Considere também que o vértice depósito (Vértice 0) corresponde ao Vértice 2 do grafo CARP. Cada veículo percorre o seguinte trajeto, respectivamente:

Veículo 1: $0 \rightarrow 23 \rightarrow 32 \rightarrow 31 \rightarrow 13 \rightarrow 12 \rightarrow 21 \rightarrow 0$

Veículo 2: $0 \rightarrow 24 \rightarrow 42 \rightarrow 43 \rightarrow 34 \rightarrow 0$

Calculando os custos de acordo com as funções (4.16) e (4.17) os valores obtidos para percorrer os dois trajetos no CVRP seriam, respectivamente, 28 e 36. Analisando os mesmos trajetos no grafo CARP (Figura 4.5), a sequência de vértices correspondente seria:

Veículo 1: $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$

Veículo 2: $2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$

Calculando os custos de travessia das arestas, os valores obtidos dos trajetos foram 28 e 36, respectivamente. Portanto, nos dois casos percorrer o mesmo conjunto de arestas corresponde ao mesmo custo de travessia, mantendo os dois grafos equivalentes.

A demanda das arestas também deve ser convertida seguindo o mesmo raciocínio do custo. Neste caso, a demanda da aresta é dividida entre os dois vértices que a formam, não sendo necessária uma divisão exata, contanto que a soma das demandas dos dois vértices seja igual a demanda original da aresta formada por eles:

$$\hat{q}_{s_{ij}} = \hat{q}_{s_{ji}} = \frac{1}{2} q_{ij}, \qquad \forall (s_{ij}, s_{ji}) \in \hat{R}, \tag{4.18}$$

em que:

$\hat{q}_{s_{ij}}$ - demanda do vértice s_{ij} no CVRP;

q_{ij} - demanda da aresta (i, j) no CARP.

Uma vez convertidos todos os custos e demandas, os autores propõem um modelo matemático para solução do CVRP, chamado de *Edge* CVRP (ECVRP). Os parâmetros e variáveis do problema são:

Parâmetros:

$\hat{G}(\hat{V}, \hat{E})$ - grafo $\hat{G}$ composto pelo conjunto de vértices $\hat{V}$ e pelo conjunto de arestas $\hat{E}$;

$\hat{c}_{ij}$ - custo da aresta (i, j);

m - quantidade total de veículos;

V' - conjunto de vértices que compõem o grafo com exceção do vértice depósito.

Variáveis:

x_{ij} - variável que recebe valor 1 se a aresta (i, j) foi percorrida, 0 caso contrário;

$r(S)$ - número mínimo de veículos necessários para percorrer o subconjunto de arestas S sem que um subciclo ilegal seja formado.

O modelo apresentado em Baldacci e Maniezzo (2006) proposto originalmente por Laporte, Norbert e Desrochers (1985) é dado por (4.19) - (4.24):

$$min \sum_{(i,j)\in\hat{E}} \hat{c}_{ij}x_{ij} \tag{4.19}$$

$$s.a: \sum_{\substack{j\in\hat{V}\\ i<j}} x_{ij} + \sum_{\substack{j\in\hat{V}\\ i>j}} x_{ji} = 2, \qquad \forall i \in V', \tag{4.20}$$

$$\sum_{i\in S}\sum_{\substack{j\in\bar{S}\\ i<j}} x_{ij} + \sum_{i\in\bar{S}}\sum_{\substack{j\in S\\ i<j}} x_{ij} \geq 2r(S), \qquad \forall S \in \mathscr{S}, \tag{4.21}$$

$$\sum_{j\in V'} x_{0j} + x_{j0} = 2m, \tag{4.22}$$

$$x_{ij} = 1, \qquad \forall (i,j) \in \hat{R}, \tag{4.23}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall (i,j) \in \hat{E}. \tag{4.24}$$

A função objetivo (4.19) minimiza o custo de atender todos os vértices do grafo. As restrições (4.20) garantem a continuidade do trajeto, obrigando que cada vértice possua uma aresta incidindo e uma saindo durante o percurso, enquanto que as restrições (4.21) são responsáveis pela eliminação de subciclos ilegais, impondo que, para cada subconjunto de vértices S, é necessária uma quantidade mínima de arestas sendo percorridas neste subconjunto para garantir que um subciclo ilegal não seja formado. A restrição (4.22) define a quantidade de veículos necessários para atender todos os circuitos. Por fim, as restrições (4.23) garantem a travessia em todas as arestas obrigatórias enquanto que as restrições (4.24) definem o domínio das variáveis.

Devido ao alto custo computacional das restrições (4.21), responsáveis pela eliminação de subciclos ilegais, foi decidida a utilização da formulação MTZ proposta por Miller, Tucker e Zemlin (1960). Estas restrições fazem uso de uma variável para representar a ordem na qual os vértices são visitados no percurso. Desta forma, as restrições de eliminação de subciclo são reescritas como:

$$u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \leq n-2, \quad i,j = 2,\ldots,n, \tag{4.25}$$

$$1 \leq u_i \leq n-1, \quad i = 2,\ldots,n, \tag{4.26}$$

em que:

n - número de vértices do grafo,

u_i - posição em que o vértice i foi visitado durante o percurso.

Adaptando o CVRP para o CPDP com as características abordadas neste trabalho, observa-se que ao utilizar uma ferramenta de corte com capacidade "ilimitada" tem-se um VRP e ao utilizar somente uma ferramenta de corte (um veículo) a abordagem passa a ter as características que definem um TSP. Portanto, além do uso da formulação MTZ, optou-se por utilizar restrições de continuidade de trajeto próprias do TSP (4.28) - (4.29) ao invés das restrições (4.20). É importante ressaltar também que ao considerar somente uma cabeça de corte a restrição (4.22) se torna desnecessária. Portanto, a abordagem do CPDP como um TSP é dada pelo modelo:

$$\min \sum_{\{i,j\}\in\hat{E}} \hat{c}_{ij}x_{ij} \tag{4.27}$$

$$s.a: \sum_{j\in\hat{V}} x_{ij} = 1, \qquad \forall i \in \hat{V}, \tag{4.28}$$

$$\sum_{j\in\hat{V}} x_{ji} = 1, \qquad \forall i \in \hat{V}, \tag{4.29}$$

$$u_i - u_j + (2|\hat{R}|-1)x_{ij} \leq 2|\hat{R}|-2, \qquad i,j = 1,\ldots,2|\hat{R}|, \tag{4.30}$$

$$1 \leq u_i \leq 2|\hat{R}|-1, \qquad i = 1,\ldots,2|\hat{R}|, \tag{4.31}$$

$$x_{ij} + x_{ji} = 1, \qquad \forall (i,j) \in \hat{R}, \tag{4.32}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall (i,j) \in \hat{E}, \tag{4.33}$$

$$u_i \in \mathbb{Z}_+, \qquad \forall i \in \hat{V}, \tag{4.34}$$

em que:

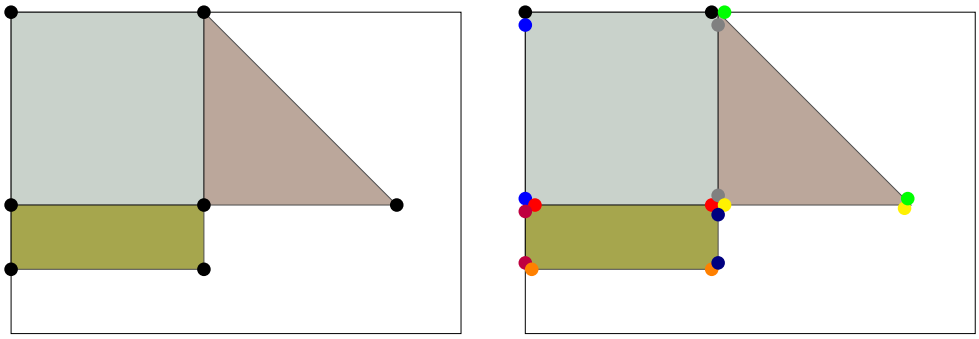
$\hat{R}$ - conjunto das arestas obrigatórias do grafo;

u_i - variável que indica a ordem na qual o vértice i é visitado no percurso.

É importante ressaltar que como o vértice depósito sempre será o primeiro vértice do caminho de corte, não é necessário considerá-lo nas restrições MTZ, por isso as restrições consideram somente $2|\hat{R}|$ vértices ao invés de $2|\hat{R}|+1$. A Figura 4.6 ilustra um exemplo do CPDP representado pela abordagem de roteamento em arcos e pela abordagem de roteamento em nós. A imagem a esquerda exibe duas peças representadas por um grafo criado para o modelo RPP. Já

a imagem a direita exibe o mesmo grafo após a conversão para o CVRP proposta por Baldacci e Maniezzo (2006) utilizada no modelo TSP proposto.

Figura 4.6 – Roteamento em arcos convertido para roteamento em nós.



Uma vez desenvolvido o modelo TSP, buscaram-se também na literatura métodos para resolução deste modelo, dentre eles a heurística Lin-Kernighan (LKH) é apontada na literatura como tendo o melhor desempenho para instâncias de grande porte. Esta heurística foi proposta por Lin e Kernighan (1973) e consiste num procedimento de melhoria de caminho. Definido um caminho inicial que passe por todos os vértices do grafo, o método realiza alterações neste caminho de forma que, caso o novo caminho possua um custo para ser percorrido menor que o caminho anterior, então o novo caminho é utilizado como solução. O procedimento é repetido até que o tempo limite de execução seja alcançado ou não seja possível encontrar um caminho com menor custo. Na última situação, um novo caminho inicial é gerado e novas alterações são aplicadas em busca de um caminho de menor custo.

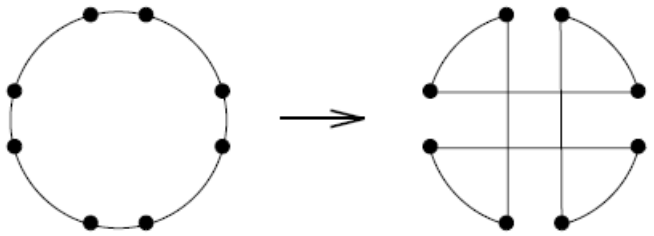
Assim como a bem conhecida heurística *2-opt*, a Lin-Kernighan busca no caminho atual possibilidades de alterações de arestas, ou seja, alterações na sequência dos vértices, que resultem num caminho com custo menor. Porém, ao invés de buscar uma única alteração, a ideia do método é encontrar uma sequência de modificações que quando aplicadas todas de uma vez resultem em um caminho melhor. Além disso, a principal diferença entre a *2-opt* e a Lin-Kernighan é que a LKH possibilita a existência de alterações intermediárias mais custosas no caminho na tentativa de evitar que somente ótimos locais sejam encontrados.

Diversos trabalhos foram realizados buscando melhorias na eficiência deste método de solução. Entre as principais implementações existentes, destaca-se o trabalho de Applegate, Cook e Rohe (2003) no qual é proposta uma modificação do método original, denominada, *Chained* Lin-Kernighan. Por meio de testes computacionais, os autores apontam a configuração mais adequada para se utilizar este método. Essa configuração padrão é a utilizada neste trabalho. A implementação está disponível para uso acadêmico no site <http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde/index.html>.

A diferença entre o método Lin-Kernighan padrão e o método *Chained* Lin-Kernighan se dá na utilização do método. No método original quando não encontrado um caminho melhor, o método é novamente aplicado para um novo caminho inicial, na *Chained* Lin-Kernighan uma

"perturbação" no caminho atual é realizada e a partir do caminho modificado a busca segue alterações de melhoria. Esta perturbação no caminho pode ser realizada das mais diversas formas. Na implementação em questão, os autores utilizam uma técnica chamada de *double bridge* ilustrada na Figura 4.7, que consiste na troca de 4 arestas por outras 4 no caminho.

Figura 4.7 – *Double bridge* utilizada na *Chained* Lin-Kernighan.



Fonte: Applegate, Cook e Rohe (2003).

Por fim, é importante ressaltar que a LKH foi desenvolvida para o TSP padrão, ou seja, um problema que busca minimizar o tamanho do trajeto total (4.27), sujeito as restrições que garantem a continuidade do grafo (4.28) - (4.29) e as restrições de eliminação de subciclos ilegais (4.30) - (4.31). No modelo proposto na Seção 4.4 também são necessárias as restrições (4.32) que garantem que as arestas obrigatórias sejam atravessadas. Para contornar esta diferença entre os modelos, durante a geração das instâncias para serem executadas pela LKH a matriz de custos da função objetivo foi alterada para garantir que as arestas obrigatórias sejam atravessadas, atribuindo a estas arestas um custo negativo. As demais arestas continuam com seus custos sendo calculados de acordo com a conversão do CARP para o CVRP utilizada (4.16) - (4.17).

4.5 Problema de determinação do caminho de corte dinâmico

Como definido no Capítulo 2, o CPDP tem por objetivo determinar um trajeto mínimo que uma ou mais ferramentas devem percorrer a fim de cumprir um plano de corte previamente definido. Entre as diversas variantes do problema apresentadas na literatura, Moreira et al. (2007) trataram o corte de uma empresa de ferramentas de alta precisão. Na aplicação estudada pelos autores, a ferramenta de corte consiste num fio de cobre eletrizado que transpassa a placa, logo a ferramenta não pode executar nenhum movimento aéreo. Portanto, somente cortes efetivos e cortes não efetivos são possíveis. A Figura 4.8 ilustra um exemplo de corte.

Além disso, a placa é suspensa e as peças caem em um recipiente abaixo da placa a medida que são completamente cortadas. Neste caso, a ferramenta de corte pode atravessar a área antes preenchida por uma peça, o que torna a configuração do grafo associado ao problema dinâmica, logo o problema foi abordado pelos autores como um RPP dinâmico (DRPP). Este problema é ilustrado na Figura 4.9, em que as arestas tracejadas consistem nos trajetos viáveis para a ferramenta de corte. Note que, na Figura 4.9(b) após o corte da Peça 2 (P_2), um conjunto maior de trajetos é possível.

Figura 4.8 – Fio de cobre eletrizado.

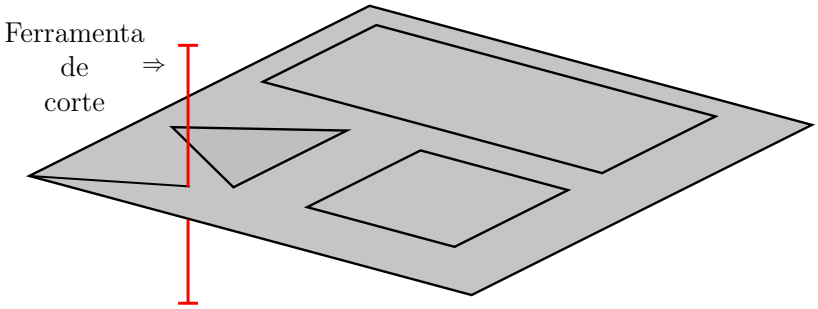
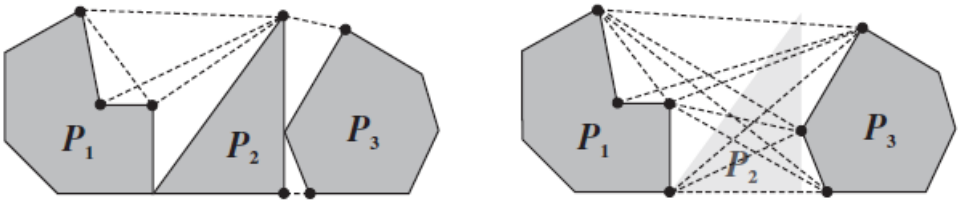


Figura 4.9 – Exemplo de corte numa placa suspensa.



(a) Nenhuma peça cortada. (b) Peça 2 cortada.

Fonte: Moreira et al. (2007).

Do ponto de vista geométrico, entre as estratégias de corte possíveis, os autores utilizam o corte por arestas. Neste caso, o fio de cobre não possui como característica a necessidade de que o corte em cada aresta seja feito num sentido específico, portanto é permitido o corte por arestas nos dois sentidos possíveis.

É importante ressaltar que entre os trabalhos da literatura, Moreira et al. (2007) são os pioneiros e os únicos a abordarem o CPDP com estas características. Os autores propõem métodos heurísticos para resolução do problema.

4.5.1 Características do CPDP dinâmico estudado

Comparando as características do CPDP estudado (Seção 4.1 com as características do CPDP dinâmico descrito, as principais diferenças entre eles são: a) a ferramenta de corte não pode realizar movimentos aéreos; e b) a placa fica suspensa de tal forma que as peças ao serem totalmente cortadas não interferem no restante do processo de corte. Estas diferenças tornam o grafo que representa a posição das peças dinâmico, pois quando o corte de uma peça é concluído, ela se desprende da placa, viabilizando novos caminhos para a ferramenta de corte.

Após uma análise detalhada dos modelos propostos para o CPDP estático, mostrou-se mais adequado adaptar o modelo baseado no TSP para o problema dinâmico. Dois modelos foram elaborados, um considerando instâncias com 2 peças e outro considerando instâncias com 3 peças. Os modelos propostos são detalhados na Seção 4.5.2.1 e na Seção 4.5.2.2, respectivamente.

4.5.2 Modelo proposto para o CPDP dinâmico

A forma normalmente utilizada para representar um TSP é através de grafos, os quais representam as cidades a serem visitadas e os caminhos existentes entre elas. Portanto, para modelar um CPDP como um TSP é necessário que as peças a serem cortadas sejam transformadas em vértices (cidades) e arestas (caminhos). Neste caso, os vértices do grafo representam os vértices das peças e os lados que formam as peças são representados pelas arestas a serem cortadas. Além das arestas que correspondem as peças, deve-se levar em conta os movimentos que a ferramenta de corte pode realizar na placa. Desta forma, arestas que não necessariamente devem ser cortadas também são acrescentadas ao grafo para representar os demais movimentos viáveis para a ferramenta. É importante ressaltar que para o problema abordado, não é possível que a ferramenta de corte realize movimentos aéreos, portanto arestas que poderiam representar este tipo de movimento não são acrescentadas ao grafo inicial.

A existência ou não de uma aresta pode estar associada ao fato de uma peça ter sido inteiramente cortada ou não, ou seja, se uma determinada peça ainda não foi completamente cortada, não é possível que a ferramenta execute um movimento entre dois vértices desta peça que estejam em lados opostos, pois resultaria num corte dentro da peça, invalidando-a (Figura 4.10). Por outro lado, se a peça foi completamente cortada, como não há mais interferência com a placa, é possível que agora a ferramenta de corte atravesse a região onde antes era ocupada por essa peça (Figura 4.9(b)).

Em resumo, o modelo matemático deve considerar todos os casos possíveis de combinações entre as peças a serem cortadas, por exemplo, numa placa que possui duas peças alocadas, deve-se verificar quais movimentos são possíveis quando: a) nenhuma peça foi completamente cortada; b) a primeira peça foi completamente cortada; c) a segunda peça foi completamente cortada; e d) quando ambas as peças foram completamente cortadas. Esta análise é necessária para que todos os custos entre os vértices em cada um destes casos seja conhecido. Para que as verificações possam ser realizadas, algumas manipulações geométricas, chamadas de análise de visibilidade, são necessárias.

A análise de visibilidade consiste em verificar a intervisibilidade entre dois vértices, ou seja, se para realizar um movimento direto entre os dois vértices nenhuma peça seria destruída. Os casos em que alguma peça é danificada ocorre é chamado de invisibilidade. Existem dois tipos de invisibilidade: a direta e indireta. A invisibilidade direta ocorre quando uma aresta conectando dois vértices intersecta outra aresta. A Figura 4.10 exemplifica a invisibilidade direta entre os vértices v_i e v_j. Neste caso, a aresta (v_i, v_j) violaria a aresta (a, b) e a Peça 2.

Já o segundo caso, invisibilidade indireta, ocorre quando os dois vértices pertencem a mesma peça e a aresta que os conecta passa por dentro da região onde está a peça, invalidando-a. A Figura 4.11 exemplifica a invisibilidade indireta entre os vértices v_i e v_j. Neste caso, o interior da Peça 2 seria violado.

Devido a maior complexidade de execução do segundo caso, primeiro é realizada a verificação da invisibilidade direta e caso não seja encontrada nenhuma intersecção entre arestas então

Figura 4.10 – Invisibilidade direta.

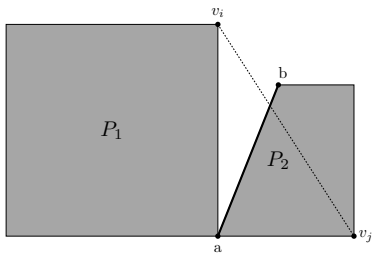
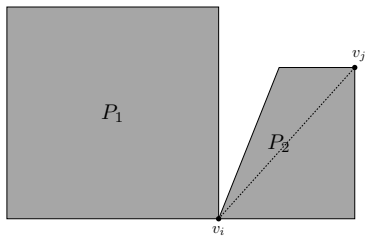


Figura 4.11 – Invisibilidade indireta.



é realizada a verificação da invisibilidade indireta. Os casos em que alguma invisibilidade é constatada são tratados através dos custos na função objetivo. Desta forma, o processo de geração dos custos é dado por:

- para toda combinação possível entre peças completamente cortadas (todas as peças, somente uma das peças, entre outros):
  - verifica-se quais peças não foram completamente cortadas;
  - para cada vértice do grafo, é analisada sua visibilidade com todos os demais vértices do grafo;
  - se um vértice é visível ao outro, o custo da distância da aresta que os conecta é calculado pela distância entre as coordenadas dos vértices;
  - se um vértice não é visível ao outro, o custo da distância entre os dois vértices é calculado pelo algoritmo de Dijkstra (algoritmo de caminho mínimo).

Dessa forma é possível definir a distância entre quaisquer dois vértices do grafo. O uso do algoritmo de caminho mínimo retorna como solução quais arestas devem ser percorridas pelo caminho de menor distância entre os dois vértices, uma vez que não há uma aresta que liga diretamente os dois vértices. É importante ressaltar que a distância calculada não é o custo final das arestas, pois é necessário ser realizada a conversão de custo (4.16) - (4.17) do grafo original para o grafo transformado para o TSP. A distância calculada corresponde ao parâmetro $dist(i, k)$ utilizado na conversão.

Com o grafo convertido e todos os custos devidamente calculados é necessário adaptar o modelo TSP proposto (4.27) - (4.34) para que os diferentes custos sejam corretamente utilizados.

Para isso, são acrescentadas algumas variáveis de decisão ao modelo. O primeiro conjunto de variáveis é responsável por indicar se um vértice foi visitado antes de outro vértice. Em conjunto com as restrições MTZ que fornecem a ordem na qual os vértices são visitados, estas variáveis são utilizadas para, dado um conjunto de arestas que formam uma peça, definir se a peça foi completamente cortada ou não.

O segundo conjunto de variáveis é responsável por armazenar a informação correspondente a uma peça ter sido completamente cortada ou não. Desta forma a escolha do custo entre dois vértices é definida. Por exemplo, durante a solução de um problema, para calcular o custo de um trecho do caminho que parte de um vértice i para um vértice j estes dois conjuntos de variáveis possuem as informações sobre quais peças foram cortadas antes do caminho a ser percorrido atravessar o vértice j. Com a definição dos grupos de restrições necessários para modelar o problema, dois modelos matemáticos, um considerando uma placa com 2 peças a serem cortadas e outro considerando uma placa com 3 peças são apresentados a seguir.

4.5.2.1 Modelo CPDP dinâmico - 2 peças

Considerando uma placa com duas peças a serem cortadas, uma vez estabelecidas as estratégias necessárias de pré-processamento e as variáveis a serem acrescentadas, os parâmetros e variáveis do modelo podem ser definidos como:

Parâmetros:

$G(V, E)$ - grafo G composto pelo conjunto de vértices V e pelo conjunto de arestas E;

R - subconjunto de arestas obrigatórias;

p_{ijk} - custo do caminho entre os vértices i e j quando a peça k foi completamente cortada;

q_{ij} - custo do caminho entre os vértices i e j quando nenhuma peça foi completamente cortada;

r_{ij} - custo do caminho entre os vértices i e j quando ambas as peças foram completamente cortadas;

M - número suficientemente grande;

V_k - conjunto de vértices que compõem a peça k;

n_k - quantidade de vértices que compõem a peça k ($n_k = |V_k|$);

Variáveis:

c_{ij} - variável que define o custo para percorrer a aresta (i, j);

x_{ij} - recebe valor 1 se a aresta (i, j) foi percorrida, 0 caso contrário;

u_i - indica a ordem na qual o vértice i foi visitado;

t_{ij} - recebe valor 1 se o vértice i foi visitado antes do vértice j, 0 caso contrário;

α_{ijk} - recebe valor 1 se a peça k foi completamente cortada antes da aresta (i, j) ser percorrida, 0 caso contrário;

β_{ij} - recebe valor 1 se nenhuma peça foi completamente cortada antes da aresta (i, j) ser percorrida, 0 caso contrário.

O modelo chamado de caixeiro viajante dinâmico para duas peças (*dynamic traveling salesman problem*, 2 - DTSP) pode ser escrito como:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ij} \tag{4.35}$$

$$s.a: (4.28) - (4.32)$$

$$Mt_{ij} \geq u_j - u_i, \qquad i, j = 1, \ldots, 2|R|, i \neq j, \tag{4.36}$$

$$t_{ij} + t_{ji} = 1, \qquad i, j = 1, \ldots, 2|R|, i \neq j, \tag{4.37}$$

$$1 - \alpha_{ijk} \leq n_k - \sum_{m \in V_k} t_{mi}, \qquad \forall i, j \in V, k = 1, 2, \tag{4.38}$$

$$M(1 - \alpha_{ijk}) \geq n_k - \sum_{m \in V_k} t_{mi}, \qquad \forall i, j \in V, k = 1, 2, \tag{4.39}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \alpha_{ijk} + \beta_{ij} \geq 1, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.40}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{2} p_{ijk} \alpha_{ijk} + q_{ij} \beta_{ij} + (r_{ij} - \sum_{k=1}^{2} p_{ijk})(\sum_{k=1}^{2} \alpha_{ijk} + b_{ij} - 1), \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.41}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, t_{ij} \in \{0, 1\}, \beta_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.42}$$

$$\alpha_{ijk} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i, j \in V, k = 1, 2, \tag{4.43}$$

$$u_i \in \mathbb{Z}_+, \qquad \forall i \in V. \tag{4.44}$$

A função objetivo (4.35) visa minimizar o custo total de corte, que considera a situação de cada peça no processo de corte, ou seja, para cada aresta (i, j) seu custo (convertido durante a adaptação do grafo para o TSP) varia de acordo com quais peças já foram completamente cortadas. As primeiras restrições do modelo são exatamente as mesmas restrições do modelo proposto nesta dissertação (Seção 4.4), correspondendo ao modelo TSP original utilizando as restrições MTZ além das restrições (4.32) que garantem que todas as arestas obrigatórias sejam visitadas. Já as restrições (4.36) - (4.37) são responsáveis por definir para cada vértice i se o vértice j foi visitado antes dele ou não. As restrições (4.38) - (4.40) definem quais peças já foram completamente cortadas para que o custo p_{ijk} definido nas restrições (4.41) seja adequado a cada caso. Por fim, as restrições (4.42) - (4.44) definem os domínios das variáveis do modelo.

Como a função objetivo (4.35) depende das variáveis c_{ij} e x_{ij}, tornando-se não-linear, é necessária uma linearização da mesma. Desta forma, com o acréscimo da variável de decisão contínua z_{ij}, o modelo linear (2-DTSP) é dado por:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} z_{ij} \tag{4.45}$$

$$s.a: (4.28) - (4.32)$$

$$(4.36) - (4.41)$$

$$z_{ij} \leq M x_{ij}, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.46}$$

$$z_{ij} \leq c_{ij}, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.47}$$

$$z_{ij} \geq c_{ij} - (1 - x_{ij})M, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.48}$$

$$z_{ij} \in \mathbb{R}_+, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.49}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, t_{ij} \in \{0,1\}, \beta_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.50}$$

$$\alpha_{ijk} \in \{0,1\}, \qquad \forall i, j \in V, k = 1, 2, \tag{4.51}$$

$$u_i \in \mathbb{Z}_+, \qquad \forall i \in V. \tag{4.52}$$

4.5.2.2 Modelo CPDP dinâmico - 3 peças

A diferença entre o modelo para duas peças e um modelo com uma quantidade maior de peças pode ser resumida no número maior de combinações entre as peças. Portanto, considerando uma placa com 3 peças, devido a maior quantidade de combinações possíveis, os conjuntos de parâmetros e variáveis que devem ser adicionados são:

Parâmetros adicionais:

s_{ijmn} - custo do caminho entre os vértices i e j quando somente a peça m e a peça n foram completamente cortadas;

r_{ij} - custo do caminho entre os vértices i e j quando todas as peças foram completamente cortadas.

Variáveis adicionais:

h_{ijmn} - recebe valor 1 se somente a peça m e a peça n foram completamente cortadas antes da aresta (i, j) ser percorrida, 0 caso contrário;

f_{ij} - recebe valor 1 se todas as peças foram completamente cortadas antes da aresta (i, j) ser percorrida, 0 caso contrário.

O modelo DTSP para três peças (3-DTSP) pode ser escrito como:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} z_{ij} \tag{4.53}$$

$$s.a: (4.28) - (4.32)$$

$$(4.36) - (4.37)$$

$$1 - \alpha_{ijk} \leq n_k - \sum_{m \in V_k} t_{mi}, \qquad \forall i, j \in V, k = 1, \ldots, 3, \tag{4.54}$$

$$M(1 - \alpha_{ijk}) \geq n_k - \sum_{m \in V_k} t_{mi}, \qquad \forall i, j \in V, k = 1, \ldots, 3, \tag{4.55}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_{ijk} + 3\beta_{ij} \leq 3, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.56}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_{ijk} + \beta_{ij} \geq 1, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.57}$$

$$(1 - \alpha_{ij1}) + (1 - \alpha_{ij2}) + \alpha_{ij3} + 3h_{ij12} \leq 3, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.58}$$

$$(1 - \alpha_{ij1}) + (1 - \alpha_{ij2}) + \alpha_{ij3} + h_{ij12} \geq 1, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.59}$$

$$(1 - \alpha_{ij1}) + \alpha_{ij2} + (1 - \alpha_{ij3}) + 3h_{ij13} \leq 3, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.60}$$

$$(1 - \alpha_{ij1}) + \alpha_{ij2} + (1 - \alpha_{ij3}) + h_{ij13} \geq 1, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.61}$$

$$\alpha_{ij1} + (1 - \alpha_{ij2}) + (1 - \alpha_{ij3}) + 3h_{ij23} \leq 3, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.62}$$

$$\alpha_{ij1} + (1 - \alpha_{ij2}) + (1 - \alpha_{ij3}) + h_{ij23} \geq 1, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.63}$$

$$(1 - \alpha_{ij1}) + (1 - \alpha_{ij2}) + (1 - \alpha_{ij3}) + 3f_{ij} \leq 3, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.64}$$

$$(1 - \alpha_{ij1}) + (1 - \alpha_{ij2}) + (1 - \alpha_{ij3}) + f_{ij} \geq 1, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned} c_{ij} = & \sum_{k=1}^{3} p_{ijk} a_{ijk} + q_{ij}\beta_{ij} \; + \\ & (s_{ij12} - p_{ij1} - p_{ij2})h_{ij12} + (s_{ij13} - p_{ij1} - p_{ij3})h_{ij13} \; + \\ & (s_{ij23} - p_{ij2} - p_{ij3})h_{ij23} + (r_{ij} - p_{ij1} - p_{ij2} - p_{ij3})f_{ij}, \qquad \forall i, j \in V, \end{aligned} \tag{4.66}$$

$$z_{ij} \leq M x_{ij}, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.67}$$

$$z_{ij} \leq c_{ij}, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.68}$$

$$z_{ij} \geq c_{ij} - (1 - x_{ij})M, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.69}$$

$$z_{ij} \in \mathbb{R}_+, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.70}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, t_{ij} \in \{0, 1\}, \beta_{ij} \in \{0, 1\}, f_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i, j \in V, \tag{4.71}$$

$$a_{ijk} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i, j \in V, k = 1, \ldots, 3, \tag{4.72}$$

$$h_{ijmn} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i, j \in V, m, n = 1, \ldots, 3, \tag{4.73}$$

$$u_i \in \mathbb{Z}_+, \qquad \forall i \in V. \tag{4.74}$$

A função objetivo (4.53) possui um custo que varia de acordo com a situação, ou seja, para cada aresta (i, j) seu custo (distância entre os vértices) varia de acordo com quais peças já foram completamente cortadas. As restrições do modelo originalmente proposto (4.28) - (4.32) permanecem inalteradas, correspondendo ao modelo TSP padrão utilizando as restrições MTZ e garantindo que todas as arestas obrigatórias sejam atravessadas. Assim como no modelo 2-DTSP, as restrições (4.36) - (4.37) são responsáveis por definir para cada vértice i se o vértice j foi visitado antes dele ou não. As restrições (4.54) - (4.65) definem quais peças já foram completamente cortadas para que o custo p_{ijk} definido nas restrições (4.66) seja adequado para a situação. Já as restrições (4.67) - (4.69) são responsáveis por linearizar a função objetivo. Por fim, as restrições (4.70) - (4.74) definem os domínios das variáveis do modelo.

4.5.3 Consideração sobre o CPDP dinâmico

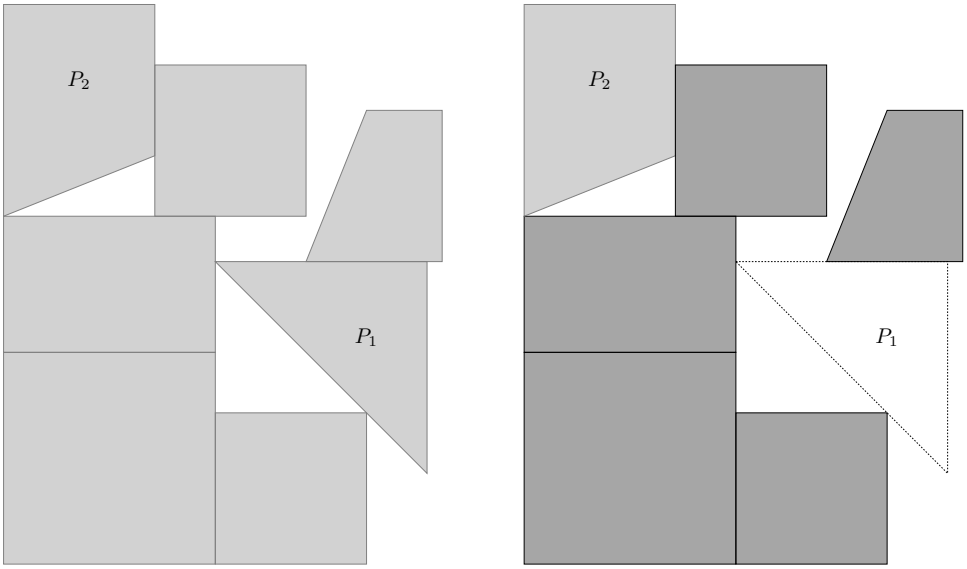
Dois modelos matemáticos foram propostos para este problema que não possui nenhuma abordagem por modelo que seja de conhecimento dos autores, um considerando problemas envolvendo duas peças a serem cortadas (2-DTSP) e outro considerando problemas envolvendo três peças a serem cortadas (3-DTSP). Os testes computacionais realizados são detalhados no Apêndice A, no entanto, os resultados obtidos mostraram que o modelo 2-DTSP proposto apresenta resultados satisfatórios para o problema, enquanto que o modelo 3-DTSP demonstra o quanto o crescimento no número de variáveis do modelo influencia na sua solução. Pode-se concluir que o modelo abordado é útil para a solução de problemas envolvendo uma placa com duas peças a serem cortadas. No entanto para situações reais em que um maior número de peças deve ser considerado, a abordagem proposta não é eficiente.

Conforme a quantidade de peças consideradas aumenta, o número de restrições e variáveis do modelo também aumenta. Este comportamento ocorre devido ao crescimento do número de combinações possíveis entre as peças. Para tentar reduzir este impacto existe a possibilidade de utilizar o conceito de área de influência.

A área de influência consiste em determinar, a partir de uma peça, quais outras peças são afetadas caso a peça analisada seja totalmente cortada. Portanto, cada peça possui sua área de influência, logo os cálculos de custo se tornam mais simples, uma vez que vértices que não fazem parte da área de influência de uma peça não têm seus custos alterados. A Figura 4.12(b) ilustra a área de influência da Peça 1 (peças mais escuras). Nesse caso, é possível observar que para todos os vértices da Peça 2 a visibilidade permanece a mesma em relação a Peça 1.

Do ponto de vista do modelo matemático, o uso da área de influência diminui o número de restrições do modelo, uma vez que para algumas arestas é necessário verificar apenas se as peças de seu conjunto de influência foram cortadas. Desta forma, as restrições (4.38)-(4.39) e (4.54)-(4.55) dos modelos 2-DTSP e 3-DTSP, respectivamente, podem ser reescritas como:

Figura 4.12 – Área de influência da Peça 1.



(a) Todas as peças posicionadas. (b) Peça 1 cortada.

$$1 - a_{ijm} \leq n_m - \sum_{k \in V_m} d_{ki}, \qquad \forall i, j \in A_m, m = 1, \ldots, n, \tag{4.75}$$

$$M(1 - a_{ijm}) \geq n_m - \sum_{k \in V_m} d_{ki}, \qquad \forall i, j \in A_m, m = 1, \ldots, n, \tag{4.76}$$

onde:

A_m - conjunto de vértices que fazem parte da área de influência da peça m;

n - número de peças.

Como pesquisa futura para situações envolvendo uma quantidade maior de peças, sugere-se o uso de métodos heurísticos em busca de resultados melhores. Além disso, os modelos poderiam ser adaptados para considerarem o conceito de regiões de influência, diminuindo a quantidade de restrições e variáveis.

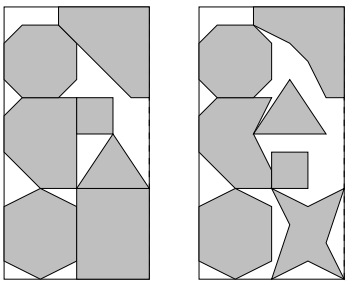
Capítulo

5

Experimentos computacionais

Para comparar o desempenho dos modelos propostos (TSP e RPP) e a simplificação do modelo proposto na literatura (GTSP) descritos no Capítulo 4 testes computacionais foram realizados. As instâncias utilizadas são planos de corte de instâncias da literatura de cortes e empacotamento. Os posicionamentos das peças na placa, ou seja, os planos de corte, são as soluções do problema de empacotamento de Rodrigues e Toledo (2016). A Figura 5.1 ilustra os planos de corte para as instâncias RCO1 e BLAZEWICZ1.

Figura 5.1 – Planos de corte das instâncias RCO1 e BLAZEWICZ1, obtidos por Rodrigues e Toledo (2016).



RCO1 BLAZEWICZ1

As Tabelas 5.1 - 5.6 detalham o nome de cada instância, a quantidade de arestas a serem cortadas ($|E_R|$) sem nenhum tratamento geométrico aplicado, a quantidade de vértices ($|V|$) considerando que, caso peças diferentes possuam vértices na mesma posição, somente um vértice é considerado, a quantidade de componentes conexas geradas pelas arestas a serem cortadas

($|P|$) sem nenhum tratamento geométrico aplicado e por quem foram propostas cada instância, respectivamente.

Tabela 5.1 – Instâncias ARTIF.

Instância	$\|E_R\|$	$\|V\|$	$\|P\|$	**Proposto por**
ARTIF1_2	93	76	1	Dowsland, Dowsland e Bennell (1998)
ARTIF2_4	186	150	1	
ARTIF3_6	279	218	1	
ARTIF4_8	372	285	1	
ARTIF5_10	465	375	1	
ARTIF6_12	558	437	1	
ARTIF7_14	651	502	1	
ARTIF	712	560	1	

Tabela 5.2 – Instâncias BLASZ2, BLAZEWICZ, DAGLI1 e FU.

Instância	$\|E_R\|$	$\|V\|$	$\|P\|$	**Proposto por**
BLASZ2	150	116	1	Błażewicz, Hawryluk e Walkowiak (1993)
BLAZEWICZ1	44	38	1	Błażewicz, Hawryluk e Walkowiak (1993)
BLAZEWICZ2	88	70	1	
BLAZEWICZ3	132	97	1	
BLAZEWICZ4	176	135	1	
BLAZEWICZ5	220	163	1	
DAGLI1	62	59	2	Ratanapan e Dagli (1997)
FU5	18	14	1	Fujita, Akagji e Kirokawa (1993)
FU6	22	18	1	
FU7	26	20	1	
FU8	30	23	1	
FU9	33	26	1	
FU10	37	29	1	
FU	40	32	1	

Tabela 5.3 – Instâncias J1.

Instância	$\|E_R\|$	$\|V\|$	$\|P\|$	**Proposto por**
J1-10-10-0	62	52	1	Álvarez-Valdés, Martinez e Tamarit (2013)
J1-10-10-1	46	34	1	
J1-10-10-2	58	42	1	
J1-10-10-3	58	38	1	
J1-10-10-4	63	48	1	
J1-12-20-0	72	56	1	
J1-12-20-1	69	56	1	
J1-12-20-2	70	56	1	
J1-12-20-3	70	58	1	
J1-12-20-4	73	62	1	
J1-14-20-0	81	58	1	
J1-14-20-1	77	61	1	
J1-14-20-2	84	66	1	
J1-14-20-3	87	65	1	
J1-14-20-4	85	64	1	

Os experimentos foram realizados em dois computadores diferentes. Inicialmente foi utilizado um computador com processador Intel Xeon (2,00 GHz), sistema operacional Linux e 64GB de memória RAM que possui poder de processamento superior ao das máquinas comuns

Tabela 5.4 – Instâncias J2.

Instância	$\|E_R\|$	$\|V\|$	$\|P\|$	**Proposto por**
J2-10-35-0	51	47	1	Álvarez-Valdés, Martinez e Tamarit (2013)
J2-10-35-1	53	50	1	
J2-10-35-2	50	43	1	
J2-10-35-3	57	50	2	
J2-10-35-4	58	53	1	
J2-12-35-0	62	55	1	
J2-12-35-1	59	50	3	
J2-12-35-2	64	55	2	
J2-12-35-3	72	62	1	
J2-12-35-4	65	58	1	
J2-14-35-0	73	66	1	
J2-14-35-1	71	66	1	
J2-14-35-2	73	65	2	
J2-14-35-3	79	73	1	
J2-14-35-4	67	59	2	

Tabela 5.5 – Instâncias JAKOBS1, POLY e RCO.

Instância	$\|E_R\|$	$\|V\|$	$\|P\|$	**Proposto por**
JAKOBS1	150	110	1	Jakobs (1996)
POLY1A	69	64	5	Hopper (2000)
POLY1B	79	73	7	
POLY1C	79	68	5	
POLY1D	74	65	5	
POLY1E	67	58	4	
RCO1	36	28	1	Ribeiro, Carravilla e Oliveira (1999)
RCO2	72	59	1	
RCO3	144	81	1	
RCO4	288	110	1	
RCO5	576	132	1	

Tabela 5.6 – Instâncias SHAPES, SHIRTS e THREE.

Instância	$\|E_R\|$	$\|V\|$	$\|P\|$	**Proposto por**
SHAPES2	70	67	1	Oliveira, Gomes e Ferreira (2000)
SHAPES4	140	130	1	
SHAPES5	175	153	1	
SHAPES7	245	213	1	
SHAPES8	70	64	1	
SHAPES9	307	276	1	
SHAPES15	391	304	1	
SHIRTS1_2	78	66	2	Dowsland, Dowsland e Bennell (1998)
SHIRTS2_4	156	130	2	
SHIRTS3_6	234	174	1	
SHIRTS4_8	312	253	1	
SHIRTS5_10	390	317	2	
THREE	11	10	1	Álvarez-Valdés, Martinez e Tamarit (2013)
THREEP2	22	19	2	
THREEP2W9	22	19	1	
THREEP3	33	24	2	
THREEP3W9	33	21	1	

encontradas no mercado atualmente. Desta forma esperava-se que os modelos encontrassem so-

lução para todas as instâncias avaliadas. Para facilitar a compreensão das tabelas de resultados, chamaremos este computador de Configuração 1.

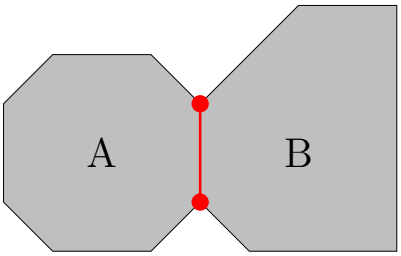
Já o segundo computador utilizado possui um processador Intel Core i7 (1,80 GHz), sistema operacional Windows 10 e 8GB de memória RAM. Este computador, chamado de Configuração 2, foi utilizado para realizar os mesmos testes executados com a Configuração 1, porém somente o modelo que apresentou os melhores resultados nos testes anteriores foi utilizado. A ideia foi simular a execução dos testes num computador de porte comum que poderia ser encontrado numa fábrica, por exemplo.

Em ambos os testes os modelos foram resolvidos utilizando o *software* de otimização ILOG CPLEX 12.6, sendo que cada teste teve seu tempo de execução limitado a 1 hora (TL - 3600s). No caso dos testes realizados com a Configuração 2, além do CPLEX, também foi utilizado o *software* de otimização gratuito SYMPHONY 5.6.13. Dado que as licenças de uso do CPLEX possuem alto custo que poderia ser considerado proibitivo para uma empresa de pequeno porte, em resumo, buscou-se verificar o desempenho do *software* gratuito numa máquina de porte comum.

5.1 Tratamento geométrico

Na etapa de preprocessamento das instâncias de teste, durante a conversão das peças do plano de corte em vértices e arestas, formando o grafo de cada instância a ser resolvida, algumas situações precisaram ser tratadas. Primeiramente, todos os casos de arestas e vértices duplicados foram resolvidos mantendo somente uma aresta e um vértice em cada situação. A Figura 5.2 ilustra um exemplo onde as Peças A e B apresentam uma aresta e dois vértices em comum.

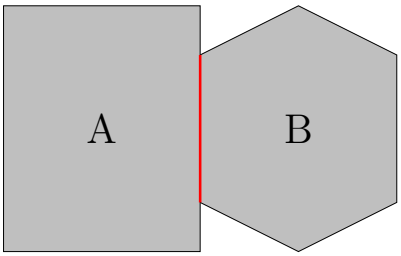
Figura 5.2 – Arestas e vértices duplicados.



Outra situação que surge é quando existem arestas menores posicionadas no mesmo segmento de reta que outras arestas. Nestes casos existem duas possibilidades na prática, manter as duas arestas ou dividir a aresta maior. Na Figura 5.3 é possível observar esta situação, em que a Peça B apresenta uma aresta de comprimento menor posicionada numa aresta de comprimento maior da Peça A.

Nos casos em que o processo de corte, na prática, ajusta as peças de forma que a ferramenta de corte, ao cortar a aresta menor, não deixe imperfeições na aresta maior, considerou-se dividir a aresta maior em arestas menores. Porém, existem casos em que, ao cortar a aresta menor

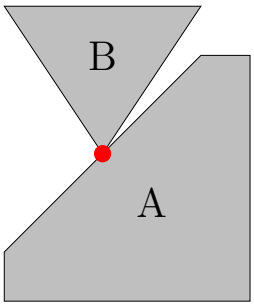
Figura 5.3 – Aresta menor posicionada em aresta maior.



primeiro, pode-se resultar em alguma imperfeição na borda da outra peça, devido ao formato da cabeça de corte, do material cortado ou da própria técnica de corte empregada pela ferramenta. Nesta última situação, as duas arestas são mantidas.

Seguindo a mesma linha de tratamento, existem casos em que um vértice encontra-se no segmento de reta que representa alguma aresta de outra peça (Figura 5.4). A forma de tratamento segue a mesma ideia da divisão das arestas, dividindo a aresta incidente em duas ou mantendo a aresta completa. Optou-se por avaliar estas duas situações práticas. Portanto, foram realizados dois experimentos computacionais, no primeiro, reportado na Seção 5.2, as arestas podem ser divididas em arestas menores enquanto no segundo, na Seção 5.3, o preprocessamento não permite a divisão de arestas em outras menores.

Figura 5.4 – Vértice posicionado em uma aresta.



5.2 Experimentos computacionais I

Testes foram realizados para 80 instâncias da literatura de problemas de empacotamento. Todos os planos de corte foram retirados do trabalho de Rodrigues e Toledo (2016). O primeiro conjunto de testes (Tabelas 5.7 - 5.12) foi realizado para a Configuração 1, sendo comparados os modelos RPP e TSP propostos, além da heurística Lin-Kernighan (LKH) e o modelo GTSP da literatura. A primeira coluna das tabelas descreve as instâncias e as demais colunas apresentam, respectivamente, a melhor solução obtida a partir de cada um dos modelos/método, a porcentagem de desvio para a melhor solução encontrada para cada modelo/método (GAP = 100 * (melhor solução obtida pelo modelo - limitante inferior obtido pelo modelo)/melhor solução obtida pelo modelo) e os tempos para encontrar a solução obtida, sendo que TL indica

que o tempo limite (3600s) foi atingido e * indica que o teste foi encerrado antes do tempo limite por insuficiência de memória. No caso da Lin-Kernighan, por não possuir limitante inferior, o *GAP* é calculado baseado no melhor limitante inferior encontrado pelos outros modelos.

Tabela 5.7 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias ARTIF com divisão de arestas (Configuração 1).

	Melhor solução obtida				*GAP*(%)				Tempo(s)			
Instância	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP
ARTIF1_2	**192,89**	**192,89**	**192,89**	1118,56	**0,00**	**0,00**	**0,00**	98,79	**0,10**	0,12	144,36	TL
ARTIF2_4	**379,89**	**379,89**	**379,89**	3063,47	**0,00**	**0,00**	**0,00**	88,55	**0,19**	0,21	665,37	TL
ARTIF3_6	**572,69**	**572,69**	573,05	-	**0,00**	**0,00**	1,39	-	**0,39**	1,42	TL	*
ARTIF4_8	**765,50**	**765,50**	-	-	**0,00**	**0,00**	-	-	**0,61**	3,02	TL	*
ARTIF5_10	**953,55**	**953,55**	-	-	**0,00**	**0,00**	-	-	**0,74**	6,98	*	*
ARTIF6_12	**1136,62**	**1136,62**	-	-	**0,00**	**0,00**	-	-	**1,33**	24,34	TL	*
ARTIF7_14	1339,98	**1336,23**	-	-	0,28	**0,00**	-	-	**1,63**	14,86	TL	*
ARTIF	**1449,70**	**1449,70**	-	-	**0,00**	**0,00**	-	-	**1,58**	20,35	TL	*

Tabela 5.8 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias BLASZ2, BLAZEWICZ, DAGLI e FU com divisão de arestas (Configuração 1).

	Melhor solução obtida				*GAP*(%)				Tempo(s)			
Instância	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP
BLASZ2	**323,94**	**323,94**	**323,94**	2370,41	**0,00**	**0,00**	**0,00**	87,60	**0,16**	0,29	370,68	TL
BLAZEWICZ1	**104,15**	**104,15**	**104,15**	106,15	**0,00**	**0,00**	**0,00**	3,77	**0,02**	0,02	2,58	TL
BLAZEWICZ2	**199,43**	**199,43**	**199,43**	880,18	**0,00**	**0,00**	**0,00**	79,46	**0,13**	0,37	73,45	TL
BLAZEWICZ3	**292,99**	**292,99**	**292,99**	2011,37	**0,00**	**0,00**	**0,00**	87,11	**0,23**	0,66	1091,29	TL
BLAZEWICZ4	**396,29**	**396,29**	396,46	2873,20	**0,00**	**0,00**	0,85	87,61	**0,26**	0,91	TL	TL
BLAZEWICZ5	**493,20**	**493,20**	494,48	4335,19	**0,00**	**0,00**	0,70	89,80	**0,34**	0,60	TL	TL
DAGLI1	**428,49**	**428,49**	**428,49**	1515,79	**0,00**	**0,00**	**0,00**	73,65	**0,11**	0,44	68,86	TL
FU5	**202,86**	**202,86**	**202,86**	**202,86**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,01**	0,14	1,09	2,65
FU6	**248,04**	**248,04**	**248,04**	**248,04**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	0,04	1,03	100,52
FU7	**279,02**	**279,02**	**279,02**	**279,02**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	4,23	**0,03**	0,04	1,45	TL
FU8	**294,51**	**294,51**	**294,51**	**294,51**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,04**	**0,04**	1,36	916,50
FU9	**338,82**	**338,82**	**338,82**	**338,82**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,06**	0,13	2,71	3328,88
FU10	**388,74**	**388,74**	**388,74**	**388,74**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	5,13	**0,08**	0,23	3,45	TL
FU	**459,06**	**459,06**	**459,06**	474,61	**0,00**	**0,00**	**0,00**	11,40	**0,12**	0,20	47,33	TL

Tabela 5.9 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias J1 com divisão de arestas (Configuração 1).

	Melhor solução obtida				*GAP*(%)				Tempo(s)			
Instância	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP
J1-10-10-0	**152,70**	**152,70**	**152,70**	780,62	**0,00**	**0,00**	**0,00**	82,14	**0,10**	0,15	8,88	TL
J1-10-10-1	**152,57**	**152,57**	**152,57**	178,95	**0,00**	**0,00**	**0,00**	19,64	**0,11**	0,46	11,82	TL
J1-10-10-2	**156,15**	**156,15**	**156,15**	201,11	**0,00**	**0,00**	**0,00**	27,51	**0,06**	0,07	5,15	TL
J1-10-10-3	**169,58**	**169,58**	**169,58**	716,19	**0,00**	**0,00**	**0,00**	79,60	**0,12**	0,22	6,41	TL
J1-10-10-4	**135,27**	**135,27**	**135,27**	172,33	**0,00**	**0,00**	**0,00**	27,66	**0,12**	0,29	31,40	TL

Tabela 5.9 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias J1 com divisão de arestas (Configuração 1) - continuação.

	Melhor solução obtida				*GAP*(%)				Tempo(s)			
Instância	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP
J1-12-20-0	**192,56**	**192,56**	**192,56**	735,47	**0,00**	**0,00**	**0,00**	76,63	**0,11**	0,20	9,08	TL
J1-12-20-1	**186,24**	**186,24**	**186,24**	874,93	**0,00**	**0,00**	**0,00**	81,90	**0,21**	0,88	265,09	TL
J1-12-20-2	**183,89**	**183,89**	**183,89**	725,33	**0,00**	**0,00**	**0,00**	77,95	0,08	**0,06**	14,95	TL
J1-12-20-3	**176,80**	**176,80**	**176,80**	846,42	**0,00**	**0,00**	**0,00**	81,84	**0,16**	0,18	36,41	TL
J1-12-20-4	**200,85**	**200,85**	**200,85**	911,95	**0,00**	**0,00**	**0,00**	80,56	0,14	**0,10**	59,75	TL
J1-14-20-0	**204,19**	**204,19**	**204,19**	1020,03	**0,00**	**0,00**	**0,00**	82,82	0,20	**0,08**	84,20	TL
J1-14-20-1	**212,38**	**212,38**	**212,38**	822,91	**0,00**	**0,00**	**0,00**	77,79	0,14	**0,08**	61,70	TL
J1-14-20-2	**233,45**	**233,45**	**233,45**	1065,63	**0,00**	**0,00**	**0,00**	81,33	**0,22**	0,49	130,96	TL
J1-14-20-3	**193,35**	**193,35**	**193,35**	904,75	**0,00**	**0,00**	**0,00**	81,41	**0,13**	0,14	24,00	TL
J1-14-20-4	**225,28**	**225,28**	**225,28**	1024,31	**0,00**	**0,00**	**0,00**	80,73	0,16	**0,08**	15,86	TL

Tabela 5.10 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias J2 com divisão de arestas (Configuração 1).

	Melhor solução obtida				*GAP*(%)				Tempo(s)			
Instância	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP
J2-10-35-0	**331,95**	**331,95**	**331,95**	1029,70	**0,00**	**0,00**	**0,00**	68,34	**0,04**	0,06	4,71	TL
J2-10-35-1	**363,40**	**363,40**	**363,40**	501,45	**0,00**	**0,00**	**0,00**	28,84	**0,04**	0,07	3,32	TL
J2-10-35-2	**338,03**	**338,03**	**338,03**	448,42	**0,00**	**0,00**	**0,00**	28,14	0,07	**0,06**	5,00	TL
J2-10-35-3	**341,71**	**341,71**	**341,71**	1508,12	**0,00**	**0,00**	**0,00**	78,82	**0,09**	0,10	22,79	TL
J2-10-35-4	**339,06**	**339,06**	**339,06**	1531,67	**0,00**	**0,00**	**0,00**	80,05	**0,11**	0,14	29,04	TL
J2-12-35-0	**413,80**	**413,80**	**413,80**	1697,58	**0,00**	**0,00**	**0,00**	77,74	0,08	**0,07**	10,49	TL
J2-12-35-1	**360,82**	**360,82**	**360,82**	1298,98	**0,00**	**0,00**	**0,00**	73,21	**0,05**	0,08	14,21	TL
J2-12-35-2	**392,03**	**392,03**	**392,03**	1484,72	**0,00**	**0,00**	0,51	76,18	**0,08**	0,09	TL	TL
J2-12-35-3	**390,41**	**390,41**	**390,41**	1920,65	**0,00**	**0,00**	**0,00**	81,96	**0,14**	0,19	57,64	TL
J2-12-35-4	**389,95**	**389,95**	**389,95**	1557,18	**0,00**	**0,00**	**0,00**	76,88	**0,08**	**0,08**	8,14	TL
J2-14-35-0	**490,00**	**490,00**	**490,00**	1993,59	**0,00**	**0,00**	**0,00**	76,75	**0,07**	0,38	39,81	TL
J2-14-35-1	**466,24**	**466,24**	**466,24**	2328,47	**0,00**	**0,00**	**0,00**	81,56	**0,10**	1,10	51,44	TL
J2-14-35-2	**448,71**	**448,71**	**448,71**	1869,54	**0,00**	**0,00**	**0,00**	78,36	**0,10**	**0,10**	69,85	TL
J2-14-35-3	**463,65**	**463,65**	**463,65**	2135,97	**0,00**	**0,00**	**0,00**	80,53	**0,18**	0,20	89,39	TL
J2-14-35-4	**452,58**	**452,58**	**452,58**	1848,52	**0,00**	**0,00**	**0,00**	77,87	**0,18**	0,46	101,79	TL

Tabela 5.11 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias JAKOBS, POLY e RCO com divisão de arestas (Configuração 1).

	Melhor solução obtida				*GAP*(%)				Tempo(s)			
Instância	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP
JAKOBS1	**370,12**	**370,12**	**370,12**	3131,4	**0,00**	**0,00**	**0,00**	90,02	**0,34**	1,35	3506,37	TL
POLY1A	**370,85**	**370,85**	**370,85**	1784,95	**0,00**	**0,00**	**0,00**	80,10	**0,04**	0,08	557,33	TL
POLY1B	**409,42**	**409,42**	**409,42**	1740,43	**0,00**	**0,00**	1,43	77,64	**0,04**	0,29	TL	TL
POLY1C	**310,30**	**310,30**	**310,30**	397,65	**0,00**	**0,00**	1,44	25,36	**0,05**	0,68	*	TL
POLY1D	**327,82**	**327,82**	**327,82**	392,81	**0,00**	**0,00**	1,12	20,64	**0,06**	0,18	TL	TL
POLY1E	**311,28**	**311,28**	**311,28**	364,04	**0,00**	**0,00**	**0,00**	15,75	**0,04**	0,06	47,55	TL
RCO1	**101,37**	**101,37**	**101,37**	**101,37**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	1,97	**0,03**	0,06	1,51	TL
RCO2	**193,82**	**193,82**	**193,82**	735,85	**0,00**	**0,00**	**0,00**	77,44	**0,20**	0,24	57,62	TL

Tabela 5.11 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias JAKOBS, POLY e RCO com divisão de arestas (Configuração 1) - continuação.

	Melhor solução obtida				*GAP*(%)				Tempo(s)			
Instância	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP
RCO3	**280,17**	**280,17**	**280,17**	1477,36	**0,00**	**0,00**	**0,00**	83,91	**0,21**	0,50	806,36	TL
RCO4	**371,63**	**371,63**	**371,63**	2525,91	**0,00**	**0,00**	**0,00**	87,45	**0,29**	**0,29**	340,65	TL
RCO5	**479,57**	**479,57**	**479,57**	3896,97	**0,00**	**0,00**	1,02	89,57	0,50	**0,46**	TL	TL

Tabela 5.12 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias SHAPES, SHIRTS e THREE com divisão de arestas (Configuração 1).

	Melhor solução obtida				*GAP*(%)				Tempo(s)			
Instância	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP
SHAPES2	**279,20**	**279,20**	**279,20**	379,57	**0,00**	**0,00**	**0,00**	28,02	**0,04**	**0,04**	5,44	TL
SHAPES4	**544,39**	**544,39**	**544,39**	3387,50	**0,00**	**0,00**	**0,00**	84,95	**0,22**	0,33	389,22	TL
SHAPES5	**656,79**	**656,79**	**656,79**	5240,60	**0,00**	**0,00**	0,78	87,47	**0,45**	2,35	TL	TL
SHAPES7	**939,84**	**939,84**	940,26	-	**0,00**	**0,00**	0,60	-	**0,46**	1,28	TL	*
SHAPES8	**278,02**	**278,02**	**278,02**	376,76	**0,00**	**0,00**	**0,00**	29,61	**0,05**	0,07	26,46	TL
SHAPES9	**1159,87**	**1159,87**	-	-	**0,00**	**0,00**	-	-	**0,70**	3,27	*	*
SHAPES15	**1430,37**	**1430,37**	-	-	**0,00**	**0,00**	-	-	**0,79**	7,23	TL	*
SHIRTS1_2	**226,62**	**226,62**	**226,62**	1090,10	**0,00**	**0,00**	1,25	81,17	**0,08**	0,34	TL	TL
SHIRTS2_4	**460,28**	**460,28**	460,37	4339,00	**0,00**	**0,00**	1,09	90,65	**0,42**	1,87	TL	TL
SHIRTS3_6	**668,33**	**668,33**	**668,33**	6155,68	**0,00**	**0,00**	1,15	90,36	**0,54**	2,65	TL	TL
SHIRTS4_8	**914,09**	**914,09**	-	-	**0,00**	**0,00**	-	-	**0,66**	2,96	TL	*
SHIRTS5_10	**1120,90**	**1120,90**	-	-	**0,00**	**0,00**	-	-	**0,68**	2,35	TL	*
THREE	**38,52**	**38,52**	**38,52**	**38,52**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,35	2,42
THREEP2	**71,05**	**71,05**	**71,05**	**71,05**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,01**	**0,01**	1,99	34,78
THREEP2W9	**69,05**	**69,05**	**69,05**	**69,05**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,01**	**0,01**	0,65	16,98
THREEP3	**105,58**	**105,58**	**105,58**	**105,58**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,02**	0,09	2432,19	TL
THREEP3W9	**99,15**	**99,15**	**99,15**	**99,15**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,02	**0,01**	1,05	182,59

Analisando as tabelas é possível observar o desempenho superior tanto do modelo RPP quanto da heurística Lin-kernighan. Enquanto que o RPP resolveu todas as instâncias na otimalidade, a Lin-Kernighan somente não encontrou a solução ótima para a instância ARTIF7_14 que possui a segunda maior quantidade de vértices (502) entre as avaliadas. No caso do RPP, um dos fatores que contribuiu para os bons resultados obtidos foi o fato de que a maioria das instâncias possui seus planos de corte de tal forma que o grafo gerado a partir deles resulta um subconjunto E_R formando um grafo conectado e, como apontado no Capítulo 4, nestes casos o modelo RPP apresenta comportamento polinomial, não sendo necessário o uso das restrições de subciclo ilegal (4.13). Mesmo nas instâncias que não apresentaram essas características os resultados obtidos foram ótimos. As instâncias que não apresentam este comportamento são: DAGLI1, J2-10-35-3, J2-12-35-1, J2-12-35-2, J2-14-35-2, J2-14-35-4, todas as POLY, SHIRTS1_2, SHIRTS 2_4, SHIRTS5_10, THREEP2 e THREEP3.

O modelo TSP apresentou bons resultados para instâncias com até 174 vértices, enquanto que o modelo GTSP apresentou bons resultados somente para instâncias com até 29 vértices. Além disso, a diferença entre os tempos de execução é significativa, novamente o modelo RPP e a heurística LKH apresentam os melhores tempos computacionais em todos os casos. O desempenho da heurística era esperado, dados os bons resultados reportados na literatura.

A partir dos resultados obtidos na Configuração 1, foram escolhidos o modelo RPP e a heurística Lin-Kernighan para serem resolvidos na Configuração 2. Além disso, visando a aplicabilidade das soluções propostas na prática, optou-se por utilizar o *software* de otimização gratuito SYMPHONY para este modelo também, de forma a comparar os *softwares* de licença gratuita (RPP_S), comercial (RPP_C) e acadêmica (código da LKH). Os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 5.13 - 5.18.

Tabela 5.13 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias ARTIF com divisão de arestas (Configuração 2).

	Melhor solução obtida			$GAP(\%)$			Tempo(s)		
Instância	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C
ARTIF1_2	**192,89**	**192,89**	**192,89**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,05**	1,00	0,11
ARTIF2_4	**379,89**	**379,89**	**379,89**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,17**	6,00	**0,17**
ARTIF3_6	**572,69**	**572,69**	**572,69**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,36**	31,00	0,97
ARTIF4_8	**765,50**	765,56	**765,50**	**0,00**	0,55	**0,00**	**0,64**	TL	2,98
ARTIF5_10	**953,55**	965,75	**953,55**	**0,00**	15,30	**0,00**	**0,80**	TL	5,64
ARTIF6_12	1137,20	1149,42	**1136,62**	0,05	18,70	**0,00**	**1,27**	TL	20,94
ARTIF7_14	1339,98	1348,49	**1336,23**	0,28	20,24	**0,00**	**1,70**	TL	11,75
ARTIF	1451,66	1454,77	**1449,70**	0,13	11,59	**0,00**	**1,62**	TL	16,44

Tabela 5.14 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias BLASZ, BLAZEWICZ, DAGLI e FU com divisão de arestas (Configuração 2).

	Melhor solução obtida			$GAP(\%)$			Tempo(s)		
Instância	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C
BLASZ2	**323,94**	**323,94**	**323,94**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,19**	4,00	**0,19**
BLAZEWICZ1	**104,15**	**104,15**	**104,15**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,01**	0,00	0,02
BLAZEWICZ2	**199,43**	**199,43**	**199,43**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,12	2,00	**0,08**
BLAZEWICZ3	**292,99**	**292,99**	**292,99**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,20**	3,00	0,33
BLAZEWICZ4	**396,29**	**396,29**	**396,29**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,25**	120,00	0,89
BLAZEWICZ5	**493,20**	**493,20**	**493,20**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,31**	3080,00	0,92
DAGLI1	**428,49**	**428,49**	**428,49**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,09**	1,00	0,12
FU5	**202,86**	**202,86**	**202,86**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,00	0,02
FU6	**248,04**	**248,04**	**248,04**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,01**	0,00	0,02
FU7	**279,02**	**279,02**	**279,02**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,03	0,00	**0,02**
FU8	**294,51**	**294,51**	**294,51**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,03	0,00	**0,01**
FU9	**338,82**	**338,82**	**338,82**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,03	0,00	**0,02**
FU10	**388,74**	**388,74**	**388,74**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,06	0,00	**0,02**
FU	**459,06**	**459,06**	**459,06**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,08	0,00	**0,05**

Tabela 5.15 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias J1 com divisão de arestas (Configuração 2).

	Melhor solução obtida			$GAP(\%)$			Tempo(s)		
Instância	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C
J1-10-10-0	**152,70**	**152,70**	**152,70**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,06**	0,00	0,08
J1-10-10-1	**152,57**	**152,57**	**152,57**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,08	0,00	**0,05**
J1-10-10-2	**156,15**	**156,15**	**156,15**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,05	0,00	**0,03**
J1-10-10-3	**169,58**	**169,58**	**169,58**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,08	0,00	**0,06**
J1-10-10-4	135,99	**135,27**	**135,27**	0,53	**0,00**	**0,00**	**0,08**	1,00	0,13
J1-12-20-0	**192,56**	**192,56**	**192,56**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,09	0,00	**0,08**
J1-12-20-1	**186,24**	**186,24**	**186,24**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,14**	403,00	0,22
J1-12-20-2	**183,89**	**183,89**	**183,89**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,05	0,00	**0,02**
J1-12-20-3	**176,80**	**176,80**	**176,80**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,11	0,00	**0,09**
J1-12-20-4	**200,85**	**200,85**	**200,85**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,09	0,00	**0,05**
J1-14-20-0	**204,19**	**204,19**	**204,19**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,11**	0,00	0,23
J1-14-20-1	**212,38**	**212,38**	**212,38**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,11**	0,00	**0,11**
J1-14-20-2	**233,45**	**233,45**	**233,45**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,16**	1,00	**0,16**
J1-14-20-3	**193,35**	**193,35**	**193,35**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,12	0,00	**0,05**
J1-14-20-4	**225,28**	**225,28**	**225,28**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,12	0,00	**0,05**

Tabela 5.16 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias J2 com divisão de arestas (Configuração 2).

	Melhor solução obtida			$GAP(\%)$			Tempo(s)		
Instância	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C
J2-10-35-0	**331,95**	**331,95**	**331,95**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,05	0,00	**0,02**
J2-10-35-1	**363,40**	**363,40**	**363,40**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	0,00	**0,03**
J2-10-35-2	**338,03**	**338,03**	**338,03**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,05	0,00	**0,02**
J2-10-35-3	**341,71**	**341,71**	**341,71**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,06	0,00	**0,03**
J2-10-35-4	**339,06**	**339,06**	**339,06**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,08**	0,00	**0,08**
J2-12-35-0	**413,80**	**413,80**	**413,80**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,06	0,00	**0,03**
J2-12-35-1	**360,82**	**360,82**	**360,82**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	0,00	0,05
J2-12-35-2	**392,03**	**392,03**	**392,03**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,06	0,00	**0,05**
J2-12-35-3	**390,41**	**390,41**	**390,41**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,09**	0,00	0,13
J2-12-35-4	**389,95**	**389,95**	**389,95**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,05	0,00	**0,03**
J2-14-35-0	**490,00**	**490,00**	**490,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,05**	0,05	**0,05**
J2-14-35-1	**466,24**	**466,24**	**466,24**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,08**	1,00	0,22
J2-14-35-2	**448,71**	**448,71**	**448,71**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,08	0,00	**0,03**
J2-14-35-3	**463,65**	**463,65**	**463,65**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,12	1,00	**0,11**
J2-14-35-4	**452,58**	**452,58**	**452,58**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,11**	402,00	0,31

Tabela 5.17 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias JAKOBS, POLY e RCO com divisão de arestas (Configuração 2).

	Melhor solução obtida			$GAP(\%)$			Tempo(s)		
Instância	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C
JAKOBS1	**370,12**	**370,12**	**370,12**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,23**	222,00	1,97
POLY1A	**370,85**	**370,85**	**370,85**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	0,00	0,06
POLY1B	**409,42**	**409,42**	**409,42**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	7,00	0,22

Tabela 5.17 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias JAKOBS, POLY e RCO com divisão de arestas (Configuração 2) - continuação.

	Melhor solução obtida			*GAP*(%)			Tempo(s)		
Instância	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C
POLY1C	**310,30**	**310,30**	**310,30**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	0,00	0,08
POLY1D	**327,82**	**327,82**	**327,82**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	0,00	0,25
POLY1E	**311,28**	**311,28**	**311,28**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,05**	0,00	**0,05**
RCO1	**101,37**	**101,37**	**101,37**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,03	0,00	**0,02**
RCO2	**193,82**	**193,82**	**193,82**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,14	1,00	**0,08**
RCO3	**280,17**	**280,17**	**280,17**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,16**	2,00	0,25
RCO4	**371,63**	**371,63**	**371,63**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,22**	2,00	0,25
RCO5	**479,57**	**479,57**	**479,57**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,42	26,00	**0,34**

Tabela 5.18 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias SHAPES, SHIRTS e THREE com divisão de arestas (Configuração 2).

	Melhor solução obtida			*GAP*(%)			Tempo(s)		
Instância	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C
SHAPES2	**279,20**	**279,20**	**279,20**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,03	0,00	**0,02**
SHAPES4	**544,39**	**544,39**	**544,39**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,17**	9,00	0,20
SHAPES5	**656,79**	660,37	**656,79**	**0,00**	10,06	**0,00**	**0,36**	TL	1,69
SHAPES7	**939,84**	941,16	**939,84**	**0,00**	18,40	**0,00**	**0,44**	TL	1,53
SHAPES8	**278,02**	**278,02**	**278,02**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,05	0,00	**0,03**
SHAPES9	**1159,87**	1164,26	**1159,87**	**0,00**	11,75	**0,00**	**0,69**	TL	2,50
SHAPES15	**1430,37**	1450,19	**1430,37**	**0,00**	20,91	**0,00**	**0,75**	TL	7,81
SHIRTS1_2	**226,62**	**226,62**	**226,62**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,05**	1,00	0,06
SHIRTS2_4	**460,28**	**460,28**	**460,28**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,33**	2244,00	1,80
SHIRTS3_6	**668,33**	675,30	**668,33**	**0,00**	18,81	**0,00**	**0,48**	TL	3,91
SHIRTS4_8	**914,09**	918,08	**914,09**	**0,00**	13,30	**0,00**	**0,59**	TL	2,52
SHIRTS5_10	**1120,90**	**1120,90**	**1120,90**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,66**	546,00	2,27
THREE	**38,52**	**38,52**	**38,52**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,00	**0,00**
THREEP2	**71,05**	**71,05**	**71,05**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,00	0,02
THREEP2W9	**69,05**	**69,05**	**69,05**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,01	0,00	**0,00**
THREEP3	**105,58**	**105,58**	**105,58**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,01**	0,00	**0,01**
THREEP3W9	**99,15**	**99,15**	**99,15**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,02**	0,00	**0,02**

Analisando as tabelas, podemos observar que o modelo RPP resolvido utilizando o *software* CPLEX obteve o melhor desempenho, encontrando a solução ótima para todas as instâncias. Assim como comentado na análise das tabelas do primeiro experimento (Configuração 1), isso se deve ao fato do modelo proposto por Christofides et al. (1981) ser um modelo muito eficiente para solução do RPP, além da maioria das instâncias apresentar um comportamento que torna a solução do problema de complexidade polinomial.

A heurística Lin-Kernighan apresentou um desempenho muito parecido com seus testes executados na máquina de Configuração 1, não encontrando a solução ótima apenas para 4 das 80 instâncias, porém nestes casos a solução encontrada ficou a menos de 0,60% da solução ótima.

Por fim, o modelo RPP resolvido utilizando o *software* SYMPHONY apresentou o pior desempenho. Porém, seu desempenho pode ser considerado bom, uma vez que somente para 11 instâncias as soluções ótimas não foram encontradas. Destas 11 instâncias, 9 possuem mais de 213 vértices enquanto 2 possuem mais de 153 vértices e, apesar de um GAP alto, a maior diferença de solução entre as soluções encontradas e as soluções ótimas foi de 20,91% na instância SHAPES15 (304 vértices).

Analisando os tempos de solução, o modelo RPP no CPLEX e a LKH foram mais equilibrados, com aproximadamente metade das instâncias sendo resolvidas mais rapidamente em cada um. É importante ressaltar que os tempos de execução do modelo RPP no SYMPHONY tem o tempo fornecido na grandeza de segundos, não havendo a possibilidade de verificar os milisegundos, por exemplo. Desta forma, uma execução que durou 0,20s e uma que durou 0,80s apresentam o valor de 0,00s na sua solução. Para efeitos de comparação, se considerarmos somente a grandeza de segundos, o modelo RPP resolvido pelo *software* SYMPHONY apresentou desempenho pior que os outros, sendo que os tempos computacionais foram parecidos somente para instâncias com até 10 peças.

Na Figura 5.5 é possível observar algumas das soluções ótimas encontradas durante os testes na Configuração 1 e 2. Os segmentos tracejados representam os movimentos aéreos enquanto que os contínuos representam os cortes efetivos. Por fim, os números indicam a ordem dos movimentos da ferramenta de corte. As demais soluções ótimas são apresentadas no Apêndice B.

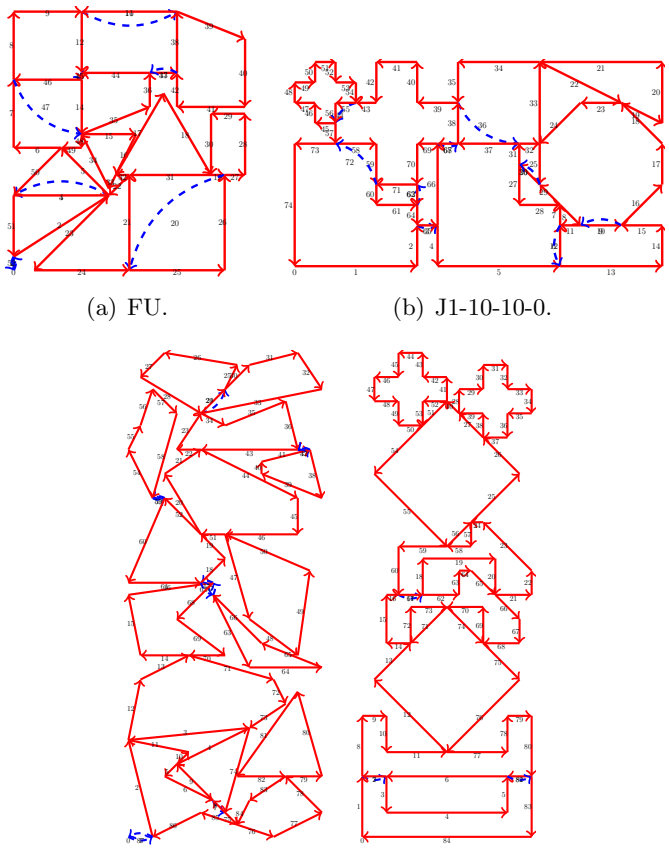
5.3 Experimentos computacionais II

Novos testes foram realizados para as mesmas 80 instâncias da literatura da seção anterior. Nestes testes, a conversão do plano de corte para grafos não considera a divisão de arestas, como explicado na Seção 5.1. Nas Tabelas 5.19 - 5.24 são reportados resultados para os modelos RPP e TSP propostos, além da heurística Lin-Kernighan e o modelo GTSP da literatura resolvidos utilizando a Configuração 1.

Tabela 5.19 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias ARTIF sem divisão de arestas (Configuração 1).

	Melhor solução obtida				GAP(%)				Tempo(s)			
Instância	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP
ARTIF1_2	**200,64**	**200,64**	-	937,20	**0,00**	**0,00**	-	79,68	**0,06**	0,08	*	TL
ARTIF2_4	**397,63**	**397,63**	398,38	2475,30	**0,00**	**0,00**	0,69	84,37	**0,11**	0,25	TL	TL
ARTIF3_6	**585,10**	**585,10**	590,45	-	**0,00**	**0,00**	2,11	-	**0,22**	0,95	TL	*
ARTIF4_8	**782,93**	**782,93**	-	-	**0,00**	**0,00**	-	-	**0,33**	0,87	TL	*
ARTIF5_10	**977,67**	**977,67**	-	-	**0,00**	**0,00**	-	-	**0,38**	0,87	TL	*
ARTIF6_12	**1181,22**	**1181,22**	-	-	**0,00**	**0,00**	-	-	**0,56**	5,65	TL	*
ARTIF7_14	**1377,89**	**1377,89**	-	-	**0,00**	**0,00**	-	-	**0,78**	4,50	TL	*
ARTIF	**1504,60**	**1504,60**	-	-	**0,00**	**0,00**	-	-	**0,88**	29,94	TL	*

Figura 5.5 – Soluções ótimas das instâncias considerando a divisão de arestas.



(a) FU. (b) J1-10-10-0.

(c) POLY1A. (d) SHAPES2.

Tabela 5.20 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias BLASZ2, BLAZEWICZ, DAGLI e FU sem divisão de arestas (Configuração 1).

	Melhor solução obtida				*GAP*(%)				Tempo(s)			
Instância	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP
BLASZ2	**325,93**	**325,93**	**325,93**	2006,73	**0,00**	**0,00**	**0,00**	85,05	**0,14**	0,51	390,33	TL
BLAZEWICZ1	**104,15**	**104,15**	**104,15**	114,95	**0,00**	**0,00**	**0,00**	11,13	**0,01**	0,00	0,94	TL
BLAZEWICZ2	**210,01**	**210,01**	**210,01**	969,52	**0,00**	**0,00**	0,67	80,20	**0,07**	0,26	TL	TL
BLAZEWICZ3	**299,23**	**299,23**	**299,23**	1378,08	**0,00**	**0,00**	**0,00**	79,60	**0,13**	0,62	234,28	TL
BLAZEWICZ4	**402,81**	**402,81**	**402,81**	2696,94	**0,00**	**0,00**	0,88	85,80	**0,23**	1,19	TL	TL
BLAZEWICZ5	**510,65**	**510,65**	570,46	4018,94	**0,00**	**0,00**	10,68	88,06	**0,20**	0,44	TL	TL
DAGLI1	**449,33**	**449,33**	**449,33**	728,47	**0,00**	**0,00**	0,80	89,29	**0,07**	0,23	TL	TL
FU5	**203,92**	**203,92**	**203,92**	**203,92**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,01**	**0,01**	0,57	1,52
FU6	**252,04**	**252,04**	**252,04**	**252,04**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,01**	0,02	1,46	19,29
FU7	**300,21**	**300,21**	**300,21**	**300,21**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,02**	0,04	0,90	3370,65
FU8	**327,02**	**327,02**	**327,02**	**327,02**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	0,14	6,82	451,94
FU9	**374,79**	**374,79**	**374,79**	**374,79**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	0,23	20,54	1210,48
FU10	**423,57**	**423,57**	**423,57**	**423,57**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,94	**0,02**	0,16	251,02	TL
FU	**479,95**	**479,95**	**479,95**	493,31	**0,00**	**0,00**	**0,00**	9,09	**0,04**	0,06	15,25	TL

Tabela 5.21 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias J1 sem divisão de arestas (Configuração 1).

	Melhor solução obtida				*GAP*(%)				Tempo(s)			
Instância	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP
J1-10-10-0	**165,85**	**165,85**	**165,85**	206,97	**0,00**	**0,00**	**0,00**	19,97	0,03	**0,02**	3,10	TL
J1-10-10-1	**166,21**	**166,21**	**166,21**	**166,21**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,03	**0,02**	2,06	1471,97
J1-10-10-2	**177,95**	**177,95**	**177,95**	214,33	**0,00**	**0,00**	**0,00**	17,44	0,04	**0,02**	2,83	TL
J1-10-10-3	**179,39**	**179,39**	**179,39**	247,89	**0,00**	**0,00**	**0,00**	29,20	**0,04**	0,18	7,52	TL
J1-10-10-4	**145,67**	**145,67**	**145,67**	348,75	**0,00**	**0,00**	**0,00**	59,38	**0,03**	**0,03**	4,47	TL
J1-12-20-0	**205,53**	**205,53**	**205,53**	738,48	**0,00**	**0,00**	**0,00**	72,88	**0,08**	0,27	6,79	TL
J1-12-20-1	**202,21**	**202,21**	**202,21**	839,29	**0,00**	**0,00**	**0,00**	68,36	0,04	**0,03**	7,39	TL
J1-12-20-2	**216,18**	**216,18**	**216,18**	867,25	**0,00**	**0,00**	**0,00**	76,34	0,05	**0,04**	33,23	TL
J1-12-20-3	**186,73**	**186,73**	**186,73**	265,61	**0,00**	**0,00**	**0,00**	31,58	**0,04**	0,06	47,67	TL
J1-12-20-4	**214,81**	**214,81**	**214,81**	842,54	**0,00**	**0,00**	**0,00**	75,70	**0,07**	0,15	57,04	TL
J1-14-20-0	**213,43**	**213,43**	**213,43**	932,88	**0,00**	**0,00**	**0,00**	78,22	**0,06**	0,09	17,00	TL
J1-14-20-1	**230,45**	**230,45**	**230,45**	772,03	**0,00**	**0,00**	**0,00**	70,15	0,04	**0,00**	4,18	TL
J1-14-20-2	**251,03**	**251,03**	**251,03**	1001,39	**0,00**	**0,00**	**0,00**	76,64	**0,10**	0,20	59,10	TL
J1-14-20-3	**210,87**	**210,87**	**210,87**	788,99	**0,00**	**0,00**	**0,00**	74,01	**0,06**	0,09	43,54	TL
J1-14-20-4	**244,09**	**244,09**	**244,09**	1021,26	**0,00**	**0,00**	**0,00**	77,62	**0,08**	0,09	23,28	TL

Tabela 5.22 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias J2 sem divisão de arestas (Configuração 1).

	Melhor solução obtida				*GAP*(%)				Tempo(s)			
Instância	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP
J2-10-35-0	**357,93**	**357,93**	**357,93**	382,29	**0,00**	**0,00**	**0,00**	12,68	**0,04**	0,50	1587,32	TL
J2-10-35-1	**383,72**	**383,72**	**383,72**	425,00	**0,00**	**0,00**	**0,00**	13,26	**0,04**	0,56	1468,47	TL
J2-10-35-2	**352,27**	**352,27**	**352,27**	415,11	**0,00**	**0,00**	**0,00**	21,31	**0,04**	0,40	480,93	TL
J2-10-35-3	**356,50**	**356,50**	**356,50**	421,99	**0,00**	**0,00**	**0,00**	16,19	**0,02**	0,03	11,35	TL
J2-10-35-4	**365,14**	**365,14**	**365,14**	407,96	**0,00**	**0,00**	**0,00**	16,30	**0,04**	0,96	2240,90	TL
J2-12-35-0	**450,91**	**450,91**	**450,91**	652,63	**0,00**	**0,00**	**0,00**	32,63	**0,04**	0,11	344,47	TL
J2-12-35-1	**395,18**	**395,18**	**395,18**	513,24	**0,00**	**0,00**	1,13	25,92	**0,04**	0,12	TL	TL
J2-12-35-2	**412,30**	**412,30**	**412,30**	1443,21	**0,00**	**0,00**	**0,00**	61,43	**0,05**	0,10	624,66	TL
J2-12-35-3	**407,32**	**407,32**	**407,32**	1446,24	**0,00**	**0,00**	**0,00**	72,97	**0,06**	0,12	69,57	TL
J2-12-35-4	**408,77**	**408,77**	**408,77**	536,62	**0,00**	**0,00**	**0,00**	25,42	**0,04**	0,11	424,93	TL
J2-14-35-0	**509,12**	**509,12**	**509,12**	663,32	**0,00**	**0,00**	0,42	25,89	**0,04**	0,97	TL	TL
J2-14-35-1	**487,35**	**487,35**	**487,35**	1535,85	**0,00**	**0,00**	2,36	70,04	**0,05**	1,79	TL	TL
J2-14-35-2	**477,18**	**477,18**	**477,18**	587,36	**0,00**	**0,00**	**0,00**	20,74	**0,03**	0,73	1041,05	TL
J2-14-35-3	**484,35**	**484,35**	**484,35**	564,56	**0,00**	**0,00**	1,53	17,33	**0,06**	1,51	TL	TL
J2-14-35-4	**476,78**	**476,78**	**476,78**	1880,99	**0,00**	**0,00**	2,07	75,93	**0,05**	2,42	TL	TL

Tabela 5.23 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias JAKOBS, POLY e RCO sem divisão de arestas (Configuração 1).

	Melhor solução obtida				*GAP*(%)				Tempo(s)			
Instância	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP
JAKOBS1	**425,65**	**425,65**	**425,65**	3008,62	**0,00**	**0,00**	0,15	87,08	**0,22**	1,22	TL	TL
POLY1A	**387,08**	**387,08**	**387,08**	1402,61	**0,00**	**0,00**	2,73	74,16	**0,05**	4,51	TL	TL
POLY1B	**415,32**	**415,32**	**415,32**	1778,99	**0,00**	**0,00**	2,84	77,85	**0,05**	2,09	TL	TL

Tabela 5.23 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias JAKOBS, POLY e RCO sem divisão de arestas (Configuração 1) - continuação.

	Melhor solução obtida				*GAP*(%)				Tempo(s)			
Instância	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP
POLY1C	**318,30**	**318,30**	319,06	1577,79	**0,00**	**0,00**	3,10	80,84	**0,05**	0,73	TL	TL
POLY1D	**332,12**	**332,12**	**332,12**	1389,11	**0,00**	**0,00**	2,24	77,58	**0,05**	0,84	TL	TL
POLY1E	**315,28**	**315,28**	**315,28**	685,40	**0,00**	**0,00**	**0,00**	55,08	**0,04**	0,12	2052,01	TL
RCO1	**101,71**	**101,71**	**101,71**	**101,71**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,02**	**0,02**	0,97	1738,28
RCO2	**202,54**	**202,54**	**202,54**	759,82	**0,00**	**0,00**	**0,00**	74,28	0,04	**0,03**	58,00	TL
RCO3	**304,37**	**304,37**	**304,37**	1293,79	**0,00**	**0,00**	0,66	78,54	**0,17**	0,51	TL	TL
RCO4	**402,01**	**402,01**	**402,01**	2429,48	**0,00**	**0,00**	1,04	84,79	**0,22**	1,39	TL	TL
RCO5	**499,80**	**499,80**	506,17	3433,80	**0,00**	**0,00**	1,65	86,43	**0,18**	0,27	TL	TL

Tabela 5.24 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias SHAPES, SHIRTS e THREE sem divisão de arestas (Configuração 1).

	Melhor solução obtida				*GAP*(%)				Tempo(s)			
Instância	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP	LKH	RPP	TSP	GTSP
SHAPES2	**297,16**	**297,16**	297,66	514,60	**0,00**	**0,00**	3,94	45,05	**0,05**	0,19	TL	TL
SHAPES4	**568,70**	**568,70**	584,41	3120,69	**0,00**	**0,00**	4,97	82,65	**0,17**	4,30	TL	TL
SHAPES5	708,23	**706,88**	730,91	4821,89	0,19	**0,00**	4,96	86,33	**0,32**	22,72	TL	TL
SHAPES7	977,73	**976,61**	-	7585,67	0,11	**0,00**	-	87,78	**0,32**	9,32	TL	TL
SHAPES8	**288,02**	**288,02**	**288,02**	367,69	**0,00**	**0,00**	**0,00**	23,84	**0,04**	0,10	80,70	TL
SHAPES9	**1202,86**	**1202,86**	-	-	**0,00**	**0,00**	-	-	**0,36**	550,00	TL	*
SHAPES15	**1482,03**	**1482,03**	-	-	**0,00**	**0,00**	-	-	**0,81**	81,32	TL	*
SHIRTS1_2	**246,79**	**246,79**	**246,79**	1288,88	**0,00**	**0,00**	1,72	81,98	**0,08**	0,15	TL	TL
SHIRTS2_4	**492,38**	**492,38**	493,10	3328,25	**0,00**	**0,00**	1,55	85,83	**0,18**	1,51	TL	TL
SHIRTS3_6	**725,69**	**725,69**	748,10	5227,68	**0,00**	**0,00**	3,86	86,62	**0,35**	0,71	TL	TL
SHIRTS4_8	**974,01**	**974,01**	-	-	**0,00**	**0,00**	-	-	**0,33**	19,17	TL	*
SHIRTS5_10	1221,05	**1220,75**	-	-	0,02	**0,00**	-	-	**0,46**	99,73	TL	*
THREE	**41,34**	**41,34**	**41,34**	**41,34**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,01	0,53	1,75
THREEP2	**74,46**	**74,46**	**74,46**	**74,46**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,01**	0,20	14,07	115,61
THREEP2W9	**74,99**	**74,99**	**74,99**	**74,99**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,02**	0,46	11,30	41,07
THREEP3	**107,32**	**107,32**	**107,32**	**107,32**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	3,48	**0,02**	0,28	1627,45	TL
THREEP3W9	**101,16**	**101,16**	**101,16**	**101,16**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,02	**0,01**	1,22	163,75

Analisando as tabelas é possível observar o mesmo desempenho apresentado na seção anterior. O modelo RPP conseguiu encontrar a solução ótima para todas as instâncias enquanto que a heurística Lin-Kernighan teve o segundo melhor desempenho, não obtendo a solução ótima somente para três instâncias, porém as soluções obtidas estão a no máximo 0,19% das soluções ótimas. O modelo TSP obteve bom desempenho para as instâncias com menos de 135 vértices, porém não encontrou soluções para instâncias com mais de 213 vértices. Por fim, o modelo adaptado da literatura obteve boas soluções somente para instâncias com até 29 vértices.

Com relação aos tempos computacionais, a LKH novamente teve os melhores resultados, não sendo mais rápida somente em 8 instâncias. A diferença de tempo entre a LKH e o modelo RPP

pode ser observada mais claramente neste caso devido ao fato de que, ao considerar a criação do grafo sem a divisão de arestas, aumenta a quantidade de instâncias na qual o modelo RPP não possui complexidade polinomial. Desta forma, as restrições de subciclo ilegais são ativas e o tempo computacional de execução deste modelo aumenta.

Novos testes foram realizados utilizando a Configuração 2 para as instâncias geradas sem a divisão de arestas durante o preprocessamento. Dado que o modelo RPP e a LKH obtiveram os melhores desempenhos, ambos são comparados, sendo que o modelo RPP foi resolvido pelo *software* CPLEX (RPP_C) e pelo *software* SYMPHONY (RPP_S). As Tabelas 5.25 - 5.30 apresentam os resultados obtidos.

Tabela 5.25 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias ARTIF sem divisão de arestas (Configuração 2).

	Melhor solução obtida			*GAP*(%)			Tempo(s)		
Instância	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C
ARTIF1_2	**200,64**	**200,64**	**200,64**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,06**	0,00	0,09
ARTIF2_4	**397,63**	**397,63**	**397,63**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,14**	2,00	0,23
ARTIF3_6	**585,10**	**585,10**	**585,10**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,38**	6,00	0,78
ARTIF4_8	**782,93**	**782,93**	**782,93**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,47**	6,00	0,89
ARTIF5_10	**977,67**	**977,67**	**977,67**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,64**	57,00	0,91
ARTIF6_12	**1181,22**	**1181,22**	**1181,22**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,92**	268,00	5,30
ARTIF7_14	**1377,89**	**1377,89**	**1377,89**	**0,00**	0,17	**0,00**	**1,20**	TL	4,77
ARTIF	**1504,60**	-	**1504,60**	**0,00**	-	**0,00**	**1,28**	*	25,27

Tabela 5.26 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias BLASZ2, BLAZEWCIZ, DAGLI e FU sem divisão de arestas (Configuração 2).

	Melhor solução obtida			*GAP*(%)			Tempo(s)		
Instância	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C
BLASZ2	**325,93**	**325,93**	**325,93**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,17**	4,00	0,41
BLAZEWICZ1	**104,15**	**104,15**	**104,15**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,00	**0,00**
BLAZEWICZ2	**210,01**	**210,01**	**210,01**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	3,00	0,30
BLAZEWICZ3	**299,23**	**299,23**	**299,23**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,11**	5,00	0,34
BLAZEWICZ4	**402,81**	**402,81**	**402,81**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,19**	14,00	1,86
BLAZEWICZ5	**510,65**	**510,65**	**510,65**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,23**	9,00	0,58
DAGLI1	**449,33**	**449,33**	**449,33**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	0,00	0,06
FU5	**203,92**	**203,92**	**203,92**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,00	**0,00**
FU6	**252,04**	**252,04**	**252,04**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,02**	0,00	**0,02**
FU7	**300,21**	**300,21**	**300,21**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,01**	0,00	0,02
FU8	**327,02**	**327,02**	**327,02**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	0,00	0,06
FU9	**374,79**	**374,79**	**374,79**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,01**	1,00	0,20
FU10	**423,57**	**423,57**	**423,57**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	0,00	0,06
FU	**479,95**	**479,95**	**479,95**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	0,00	**0,03**

Tabela 5.27 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias J1 sem divisão de arestas (Configuração 2).

	Melhor solução obtida			$GAP(\%)$			Tempo(s)		
Instância	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C
J1-10-10-0	**165,85**	**165,85**	**165,85**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,03	0,00	**0,01**
J1-10-10-1	**166,21**	**166,21**	**166,21**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,03	0,00	**0,00**
J1-10-10-2	**177,95**	**177,95**	**177,95**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,03	0,00	**0,00**
J1-10-10-3	**179,39**	**179,39**	**179,39**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,05**	0,00	0,09
J1-10-10-4	**145,67**	**145,67**	**145,67**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,03	0,00	**0,02**
J1-12-20-0	**205,53**	**205,53**	**205,53**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,08**	0,00	0,14
J1-12-20-1	**202,21**	**202,21**	**202,21**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,05	0,00	**0,02**
J1-12-20-2	**216,18**	**216,18**	**216,18**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,05	0,00	**0,03**
J1-12-20-3	**186,73**	**186,73**	**186,73**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,05**	0,00	**0,05**
J1-12-20-4	**214,81**	**214,81**	**214,81**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,09**	0,00	0,14
J1-14-20-0	**213,43**	**213,43**	**213,43**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,05**	0,00	**0,05**
J1-14-20-1	**230,45**	**230,45**	**230,45**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,05	0,00	**0,00**
J1-14-20-2	**251,03**	**251,03**	**251,03**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,06**	1,00	0,13
J1-14-20-3	**210,87**	**210,87**	**210,87**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,06	0,00	**0,05**
J1-14-20-4	**244,09**	**244,09**	**244,09**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,08	0,00	**0,05**

Tabela 5.28 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias J2 sem divisão de arestas (Configuração 2).

	Melhor solução obtida			$GAP(\%)$			Tempo(s)		
Instância	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C
J2-10-35-0	**357,93**	**357,93**	**357,93**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,01**	4,00	0,33
J2-10-35-1	**383,72**	**383,72**	**383,72**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,05**	5,00	0,56
J2-10-35-2	**352,27**	**352,27**	**352,27**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,05**	1,00	0,17
J2-10-35-3	**356,50**	**356,50**	**356,50**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,03	0,00	**0,02**
J2-10-35-4	**365,14**	**365,14**	**365,14**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,05**	10,00	0,86
J2-12-35-0	**450,91**	**450,91**	**450,91**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,05**	0,00	0,14
J2-12-35-1	**395,18**	**395,18**	**395,18**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	0,00	0,14
J2-12-35-2	**412,30**	**412,30**	**412,30**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	0,00	0,11
J2-12-35-3	**407,32**	**407,32**	**407,32**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,05**	0,00	0,14
J2-12-35-4	**408,77**	**408,77**	**408,77**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	0,00	0,09
J2-14-35-0	**509,12**	**509,12**	**509,12**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,05**	7,00	1,00
J2-14-35-1	**487,35**	**487,35**	**487,35**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,06**	25,00	1,51
J2-14-35-2	**477,18**	**477,18**	**477,18**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,05**	4,00	0,63
J2-14-35-3	**484,35**	**484,35**	**484,35**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,08**	13,00	1,00
J2-14-35-4	**476,78**	**476,78**	**476,78**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	10,00	2,91

Tabela 5.29 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias JAKOBS, POLY e RCO sem divisão de arestas (Configuração 2).

	Melhor solução obtida			$GAP(\%)$			Tempo(s)		
Instância	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C
JAKOBS1	**425,65**	**425,65**	**425,65**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,22**	9,00	1,95
POLY1A	387,38	**387,08**	**387,08**	0,08	**0,00**	**0,00**	**0,03**	129,00	5,58
POLY1B	**415,32**	**415,32**	**415,32**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,05**	34,00	2,02

Tabela 5.29 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias JAKOBS, POLY e RCO sem divisão de arestas (Configuração 2) - continuação.

	Melhor solução obtida			*GAP*(%)			Tempo(s)		
Instância	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C
POLY1C	**318,30**	**318,30**	**318,30**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,06**	1,00	0,78
POLY1D	**332,12**	**332,12**	**332,12**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,06**	2,00	0,48
POLY1E	**315,28**	**315,28**	**315,28**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	0,00	0,13
RCO1	**101,71**	**101,71**	**101,71**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,00	**0,00**
RCO2	**202,54**	**202,54**	**202,54**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,01**	0,00	0,02
RCO3	**304,37**	**304,37**	**304,37**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,16**	5,00	0,42
RCO4	**402,01**	**402,01**	**402,01**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,17**	33,00	1,56
RCO5	**499,80**	**499,80**	**499,80**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,17**	0,00	0,27

Tabela 5.30 – Desempenho dos modelos e métodos para as instâncias SHAPES, SHIRTS e THREE sem divisão de arestas (Configuração 2).

	Melhor solução obtida			*GAP*(%)			Tempo(s)		
Instância	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C	LKH	RPP_S	RPP_C
SHAPES2	**297,16**	**297,16**	**297,16**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,05**	0,00	1,27
SHAPES4	**568,70**	**568,70**	**568,70**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,19**	142,00	3,83
SHAPES5	**706,88**	737,24	**706,88**	**0,00**	4,29	**0,00**	**0,27**	TL	37,00
SHAPES7	977,73	**976,61**	**976,61**	0,11	**0,00**	**0,00**	**0,39**	3380,00	5,06
SHAPES8	**288,02**	**288,02**	**288,02**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	3,00	0,11
SHAPES9	**1202,86**	-	2313,63	**0,00**	-	48,01	**0,44**	*	TL
SHAPES15	**1482,03**	1609,64	**1482,03**	**0,00**	8,63	**0,00**	**1,00**	TL	88,69
SHIRTS1_2	**246,79**	**246,79**	**246,79**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,08**	0,00	0,20
SHIRTS2_4	**492,38**	**492,38**	**492,38**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,19**	14,00	1,03
SHIRTS3_6	**725,69**	**725,69**	**725,69**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,36**	1,00	0,53
SHIRTS4_8	**974,01**	**974,01**	**974,01**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,42**	992,00	20,47
SHIRTS5_10	**1220,75**	-	**1120,75**	**0,00**	-	**0,00**	**0,55**	*	78,8
THREE	**41,34**	**41,34**	**41,34**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,00	0,06
THREEP2	**74,46**	**74,46**	**74,46**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,00	0,01
THREEP2W9	**74,99**	**74,99**	**74,99**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,00	0,05
THREEP3	**107,32**	**107,32**	**107,32**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	**0,03**	0,00	0,05
THREEP3W9	**101,16**	**101,16**	**101,16**	**0,00**	**0,00**	**0,00**	0,01	0,00	**0,00**

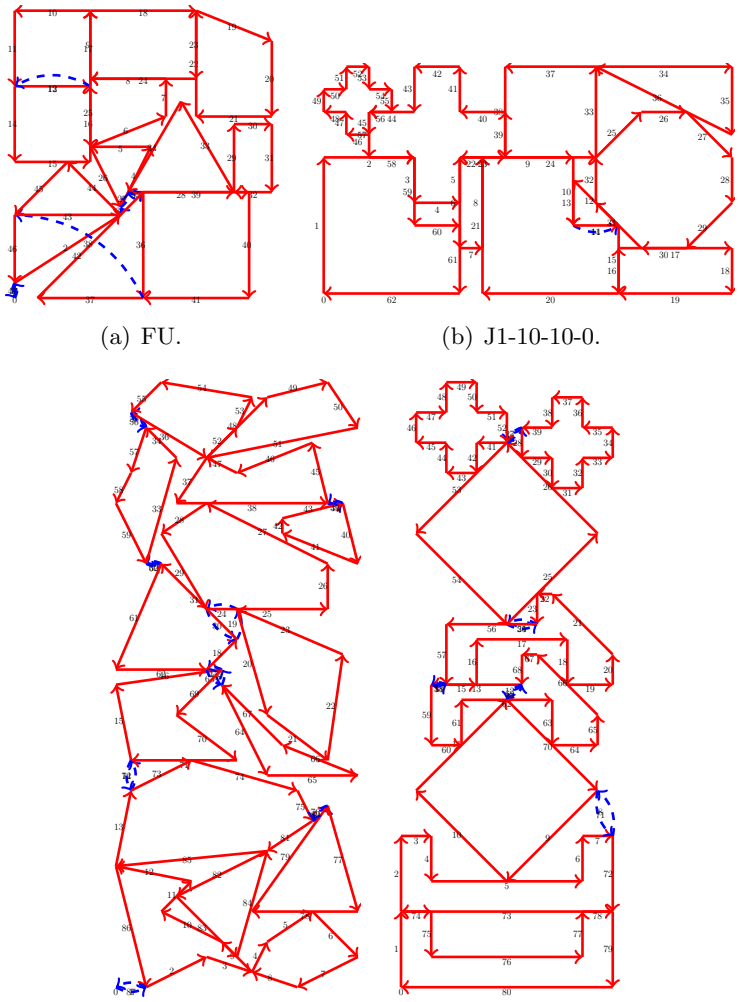
Pode-se observar que tanto o modelo RPP quanto a LKH mantém um bom desempenho, mesmo na Configuração 2. O modelo resolvido utilizando o *software* CPLEX encontra a solução ótima para todas as instâncias com exceção da SHAPES9. Já o mesmo modelo sendo executado pelo SYMPHONY não encontrou a solução ótima de 5 instâncias das quais nenhuma solução foi encontrada em 2 instâncias, ambas com mais de 276 vértices. A LKH não encontrou a solução ótima para apenas 2 instâncias, nos dois casos as soluções obtidas estão a menos de 0,12% da solução ótima.

Analisando os tempos computacionais, a heurística Lin-Kernighan manteve seu bom desempenho, obtendo os melhores tempos na maioria dos testes. O modelo RPP resolvido pelo

software CPLEX obteve tempos computacionais um pouco superiores aos obtidos pela LKH na maioria dos casos, porém, com exceção das instâncias SHAPES15 e SHIRTS5_10, todos os tempos computacionais foram abaixo de 1 minuto. Por fim, o *software* SYMPHONY, quando comparado com os demais, considerando a precisão de segundos, obteve tempos computacionais semelhantes a LKH e ao RPP_C para instâncias com até 62 vértices.

A Figura 5.6 ilustra algumas das soluções ótimas encontradas durante os testes para as Configurações 1 e 2. São utilizadas as mesmas instâncias apresentadas na Figura 5.5 para efeito de comparação das diferenças entre os preprocessamentos. As demais soluções ótimas são apresentadas no Apêndice B.

Figura 5.6 – Soluções ótimas das instâncias sem considerar a divisão de arestas.



(a) FU. (b) J1-10-10-0.

(c) POLY1A. (d) SHAPES2.

5.4 Considerações finais

Os testes computacionais apontam o bom desempenho dos modelos propostos. O modelo RPP se destaca em especial para as instâncias maiores. Analisando de forma geral, o modelo RPP quando resolvido utilizando o *software* CPLEX obteve o melhor desempenho, encontrando soluções ótimas em todos os casos quando resolvido na Configuração 1 e em 159 das 160 instâncias (considerando os casos com e sem divisão de arestas) na Configuração 2.

Do ponto de vista de tempo computacional, a LKH, como esperado, obteve o melhor desempenho, tendo os menores tempos na maioria dos casos. Apesar de apresentar soluções que não são ótimas para algumas instâncias, todos os GAP estão abaixo de 1%. A diferença entre os tempos foi mais notável quando os testes foram realizados na Configuração 2, por ser um computador com características inferiores à Configuração 1, o modelo RPP foi mais afetado devido as suas restrições de eliminação de subciclo, o que justifica esta diferença.

Por fim, analisando uma situação na qual um *software* de otimização como o CPLEX não pode ser utilizado, o *software* de licença gratuita SYMPHONY se mostrou uma alternativa viável para instâncias pequenas do modelo RPP. Apesar de não apresentar seu tempo computacional com precisão, a maioria das soluções encontradas foram dentro de um intervalo de 1 minuto, sendo que, com exceção da instância SHAPES5 (153 vértices), todas as instâncias com menos de 213 vértices tiveram suas soluções ótimas encontradas. Para as demais instâncias, o *software* teve dificuldades para encontrar algumas soluções, porém na maioria dos casos obteve soluções próximas do ótimo.

Capítulo

6

Considerações finais e pesquisas futuras

O objetivo de pesquisa deste mestrado foi propor diferentes modelos para a resolução do problema de determinação de caminho de corte (CPDP). Utilizando abordagens distintas foram propostos três modelos matemáticos para tratar o problema. A primeira proposta consiste na utilização do modelo baseado no problema do carteiro rural (RPP) proposto por Christofides et al. (1981), a segunda num modelo baseado no problema do caixeiro viajante (TSP) proposto a partir da conversão do CVRP para o CARP proposta por Baldacci e Maniezzo (2006) e a terceira na adaptação do modelo baseado no problema do caixeiro viajante generalizado (GTSP) proposto por Dewil, Vansteenwegen e Cattrysse (2011). Para a segunda proposta foi estudada a heurística Lin-Kernighan (LKH) proposta por Lin e Kernighan (1973) e sua extensão, *Chained* Lin-Kernighan proposta por Applegate, Cook e Rohe (2003).

Experimentos computacionais mostraram que o RPP utilizando o *software* de otimização CPLEX apresentou o melhor desempenho para o problema estudado, encontrando as soluções ótimas para todos os testes realizados. A LKH apresentou os melhores tempos computacionais e soluções de qualidade semelhante às encontradas pelo modelo RPP, tornando-se uma alternativa para resolução do CPDP.

A primeira contribuição encontrada neste trabalho é dada no Capítulo 2 que apresenta um conjunto de conceitos básicos de termos do CPDP, suas definições, variações e detalhes, tornando este trabalho um importante ponto de partida para futuros estudos sobre o CPDP. Outras contribuições aqui encontradas são no uso dos modelos propostos para resolver o problema caracterizado nesta dissertação, algo que não havia sido feito na literatura até o momento. Além disso, é importante ressaltar a robustez dos modelos/método quando resolvidos em computadores de diferentes configurações e a versatilidade dos mesmos, podendo ser adaptados para um CPDP

que considere restrições de precedência ou o uso de mais de uma ferramenta de corte. Também destacam-se as formas de transformar as instâncias do CPDP em grafos que possam ser resolvidos de diferentes formas de acordo com o modelo matemático utilizado.

Uma variação do CPDP proposto, considerando o uso de grafos dinâmicos, também foi estudada. Para esta variante do problema, dois modelos matemáticos foram propostos e os experimentos computacionais mostraram a eficiência do modelo para o corte de apenas duas peças (2-DTSP), devido ao problema do crescimento do número de restrições conforme o número de peças aumenta no modelo que considera três peças (3-DTSP).

A principal contribuição para esse problema é a proposta de modelos capazes de abordar as características dinâmicas do CPDP, uma vez que não é de conhecimento dos autores a existência de outro modelo matemático proposto para representá-lo. Além disso, é apresentada uma discussão sobre o aumento de restrições de acordo com a quantidade de peças a serem cortadas.

Como trabalhos futuros, sugere-se um estudo mais detalhado de adaptação dos modelos propostos para permitir tratar a precedência no corte de peças e para incluir a possibilidade do uso de várias ferramentas de corte, todas fixadas em um mesmo eixo. Neste último caso o modelo é facilmente adaptável, pois como as peças a serem cortadas estariam posicionadas da mesma forma para as diversas cabeças de corte as cortarem simultaneamente, caberia ao pós-processamento, durante o processo de corte, definir quais cabeças de corte manter ligadas e desligadas em cada momento. O caminho gerado para o corte deve levar em conta somente as peças que a cabeça de corte "mestre" deve cortar. Além disso, outras características poderiam ser tratadas, por exemplo: o uso de uma placa mais grossa, cujo tempo de perfuração e pré-corte devem ser considerados ou o uso de uma ferramenta cujo diâmetro do corte é relevante, pois as peças podem se mover após serem completamente cortadas. Por fim, para o CPDP dinâmico sugere-se pesquisas envolvendo conceitos geométricos como área de influência, assim como o uso de métodos heurísticos.

Referências Bibliográficas

ÁLVAREZ-VALDÉS, R.; MARTINEZ, A.; TAMARIT, J. M. A branch & bound algorithm for cutting and packing irregularly shaped pieces. *International Journal of Production Economics*, v. 145, p. 463 – 477, 2013.

APPLEGATE, D.; COOK, W.; ROHE, A. Chained lin-kernighan for large traveling salesman problems. *Journal on Computing*, v. 15, p. 82 – 92, 2003.

BALDACCI, R.; MANIEZZO, V. Exact methods based on node-routing formulations for undirected arc-routing problems. *Networks*, v. 47, p. 52 – 60, 2006.

BELENGUER, J. M.; BENAVENT, E. A cutting plane algorithm for the capacitated arc routing problem. *Computers & Operations Research*, v. 30, p. 705 – 728, 2003.

BENNELL, J. A.; OLIVEIRA, J. F. A tutorial in irregular shape packing problems. *Journal of the Operational Research Society*, v. 60, p. 93 – 105, 2009.

BŁAŻEWICZ, J.; HAWRYLUK, P.; WALKOWIAK, R. Using a tabu search approach for solving the two-dimensional irregular cutting problem. *Annals of Operations Research*, v. 41, p. 313 – 325, 1993.

CHRISTOFIDES, N. et al. *An algorithm for the rural postman problem.* London, 1981. Imperial College Report.

CORBERÁN, A.; PRINS, C. Recent results on arc routing problems: an annotated bibliography. *Networks*, v. 56, p. 50 – 69, 2010.

DEWIL, R.; VANSTEENWEGEN, P.; CATTRYSSE, D. Cutting path optimization using tabu search. *Key Engineering Materials*, v. 473, p. 739 – 748, 2011.

DEWIL, R.; VANSTEENWEGEN, P.; CATTRYSSE, D. Construction heuristics for generating tool path for laser cutters. *International Journal of Production Research*, v. 52, p. 5965 – 5984, 2014.

DOWSLAND, K. A.; DOWSLAND, W. B.; BENNELL, J. A. Jostling for position: local improvements for irregular cutting patterns. *Journal of the Operational Research Society*, v. 49, p. 647 – 658, 1998.

DYCKHOFF, H.; FINKE, U. *Cutting and packing in production and distribution: Typology and bibliography.* [S.l.]: Heidelberg: Springler-Verlag, 1992.

EISELT, H. A.; GENDREAU, M.; LAPORTE, G. Arc routing problems, part i: the chinese postman problem. *Operations Research*, v. 43, p. 231 – 242, 1995.

EISELT, H. A.; GENDREAU, M.; LAPORTE, G. Arc routing problems, part ii: the rural postman problem. *Operations Research*, v. 43, p. 399 – 414, 1995.

FOULDS, L.; LONGO, H.; MARTINS, J. A compact transformation of arc routing problems into node routing problems. *Annals of Operations Research*, p. 1 – 24, 2014. (Online).

FUJITA, K.; AKAGJI, S.; KIROKAWA, N. Hybrid approach for optimal nesting using a genetic algorithm and a local minimisation algorithm. *Proceedings of the 19th Annual ASME Design Automation Conference*, v. 65, p. 477 – 484, 1993.

GOLDEN, B. L.; WONG, R. T. Capacitated arc routing problems. *Networks*, v. 11, p. 305 – 315, 1981.

GROVES, G. W.; VUUREN, J. H. van. Efficient heuristics for the rural postman problem. *ORiON*, v. 21, p. 33 – 51, 2005.

HAN, G.-C.; NA, S.-J. A study on torch path planning in laser cutting processes part 2: cutting path optimization using simulated annealing. *Journal of Manufacturing Processes*, v. 1, p. 62 – 70, 1999.

HERTZ, A. Recent trends in arc routing. In: *Graph Theory, Combinatorics and Algorithms*. [S.l.]: Springer US, 2005. v. 34, p. 215 – 236.

HOPPER, E. *Two-dimensional packing utilising evolutionary algorithms and other meta-heuristic methods*. Tese (Doutorado) — University of Wales, Cardiff, 2000.

JAKOBS, S. On genetic algorithms for the packing of polygons. *European Journal of Operational Research*, v. 88, p. 165 – 181, 1996.

KANG, M.-J.; HAN, C.-G. Solving the rural postman problem using a genetic algorithm with a graph transformation. In: *Proceedings of the 1998 ACM Symposium on Applied Computing*. [S.l.]: ACM, 1998. p. 356 – 360.

LAPORTE, G.; NORBERT, Y.; DESROCHERS, M. Optimal routing under capacity and distance restrictions. *Operations Research*, v. 33, p. 1058 – 1073, 1985.

LEE, M. K.; KWON, K. B. Cutting path optimization in cnc cutting processes using a two-step genetic algorithm. *International Journal of Production Research*, v. 44, p. 5307 – 5326, 2006.

LIN, S.; KERNIGHAN, B. W. An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem. *Operations Research*, v. 21, p. 498 – 516, 1973.

LONGO, H.; ARAGÃO, M. P. de; UCHOA, E. Solving capacitated arc routing problems using a transformation to the cvrp. *Computers & Operations Research*, v. 33, p. 1823 – 1837, 2006.

MANBER, U.; ISRANI, S. Pierce point minimization and optimal torch path determination in flame cutting. *Journal of Manufacturing Systems*, v. 3, p. 81 – 89, 1984.

MILLER, C. E.; TUCKER, A. W.; ZEMLIN, R. A. Integer programming formulations of traveling salesman problems. *Journal of the Association for Computing Machinery*, v. 7, p. 326–329, 1960.

MOREIRA, L. M. et al. Heuristics for a dynamic rural postman problem. *Computers & Operations Research*, v. 34, p. 3281 – 3294, 2007.

OLIVEIRA, J. F.; GOMES, A. M.; FERREIRA, J. S. Topos - a new constructive algorithm for nesting problems. *OR-Spektrum*, v. 22, p. 263 – 284, 2000.

ÖNCAN, T.; ALTINEL, I. K.; LAPORTE, G. A comparative analysis of several asymmetric traveling salesmen problem formulations. *Computers & Operations Research*, v. 36, p. 637 – 654, 2009.

PEARN, W.-L.; ASSAD, A.; GOLDEN, B. L. Transforming arc routing into node routing problems. *Computers & Operations Research*, v. 14, p. 285 – 288, 1987.

PEÑA, M. G. B. de la. Heuristics and metaheuristcs approaches used to solve the rural postman problem: a comparative case study. In: *Proceedings of the Fourth International ICSC Symposium on Engineering of Intelligent Systems*. [S.l.]: EIS, 2004.

RATANAPAN, K.; DAGLI, C. H. An object-based evolutionary algorithm for solving irregular nesting problems. *Proceedings for Artificial Neural Networks in Engineering Conference*, v. 7, p. 383 – 388, 1997.

RIBEIRO, C.; CARRAVILLA, M. A.; OLIVEIRA, J. F. Applying constraint logic programming to the resolution of nesting problems. *Pesquisa Operacional*, v. 19, p. 239 – 247, 1999.

RODRIGUES, A. M.; FERREIRA, J. S. Cutting path as a rural postman problem: solutions by memetic algorithms. *International Journal of Combinatorial Optimization Problems and Informatics*, v. 3, p. 31 – 46, 2011.

RODRIGUES, M. O.; TOLEDO, F. M. B. A clique covering MIP model for the irregular strip packing problem. (submetido). 2016.

USBERTI, F. L.; FRANÇA, P. M.; FRANÇA, A. L. M. The open capacitated arc routing problem. *Computers & Operations Research*, v. 38, p. 1543 – 1555, 2011.

USBERTI, F. L.; FRANÇA, P. M.; FRANÇA, A. L. M. Grasp with evolutionary path-relinking for the capacitated arc routing problem. *Computers & Operations Research*, v. 40, p. 3206 – 3217, 2013.

WÄSCHER, G.; HAUßNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 183, p. 1109 – 1130, 2007.

WØHLK, S. A decade of capacitated arc routing. In: *The vehicle routing problem, latest advances and new challenges*. [S.l.]: Springer US, 2008. v. 43, p. 29 – 48.

Apêndice

A

O problema de determinação de caminho de corte dinâmico: experimentos computacionais

Neste apêndice testes computacionais para verificar a eficiência dos modelos 2-DTSP e 3-DTSP e considerações finais sobre os resultados obtidos e possíveis melhorias são apresentados.

A.1 Testes computacionais

Os experimentos computacionais foram realizados num computador com processador Intel Core i7 (1.80 GHz), sistema operacional Windows 8.1 e 8GB de memória RAM. Para solução dos modelos, o *software* de otimização ILOG CPLEX 12.6 foi utilizado, sendo que cada teste teve tempo limitado de 1 hora (TL - 3600s).

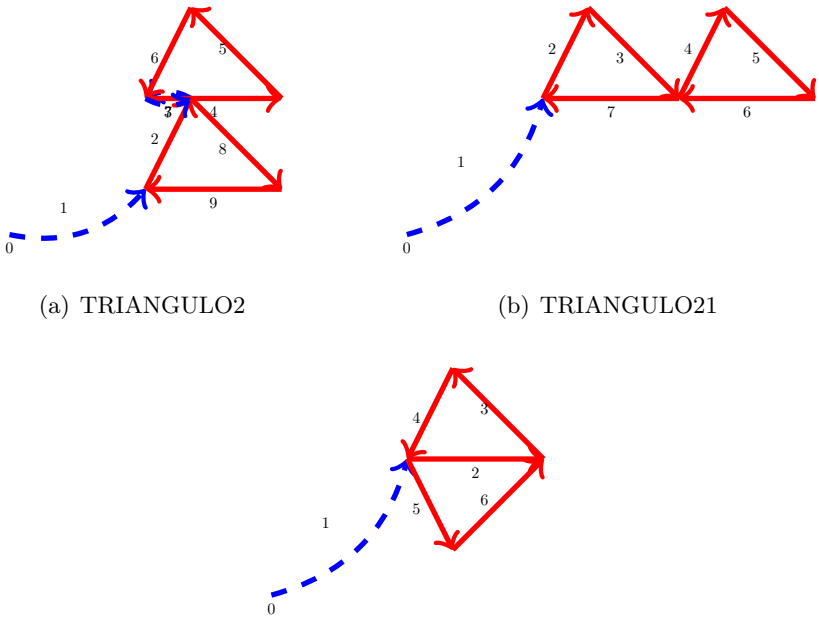
Foram criadas instâncias que são compostas por triângulos. Como a quantidade de peças possíveis de serem utilizadas é pequena, as instâncias consistem em variações da posição dos triângulos nas placas. A fim de analisar a eficiência dos custos da função objetivo, variações foram feitas pensando nas possibilidades de movimentos da ferramenta de corte.

A Tabela A.1 resume os resultados obtidos ao resolver o modelo 2-DTSP em três combinações possíveis de posicionamento de dois triângulos numa placa. A primeira coluna da tabela descreve as instâncias e as demais colunas apresentam, respectivamente, a melhor solução obtida pelo modelo, a porcentagem de desvio para o limitante inferior do modelo (GAP = 100 * (melhor solução - limitante inferior)/melhor solução) e o tempo para encontrar a solução obtida, sendo que TL indica que o tempo limite (3600s) foi atingido. A Figura A.1 ilustra as soluções das três instâncias e suas respectivas posições dos triângulos.

Tabela A.1 – Resultados computacionais para o modelo 2-DTSP.

Instância	Melhor solução obtida	$GAP(\%)$	Tempo(s)
TRIANGULO2	24,44	**0,00**	0,36
TRIANGULO21	24,60	**0,00**	0,59
TRIANGULO22	24,07	**0,00**	0,28

Figura A.1 – Soluções obtidas pelo 2-DTSP.



(a) TRIANGULO2

(b) TRIANGULO21

(c) TRIANGULO22

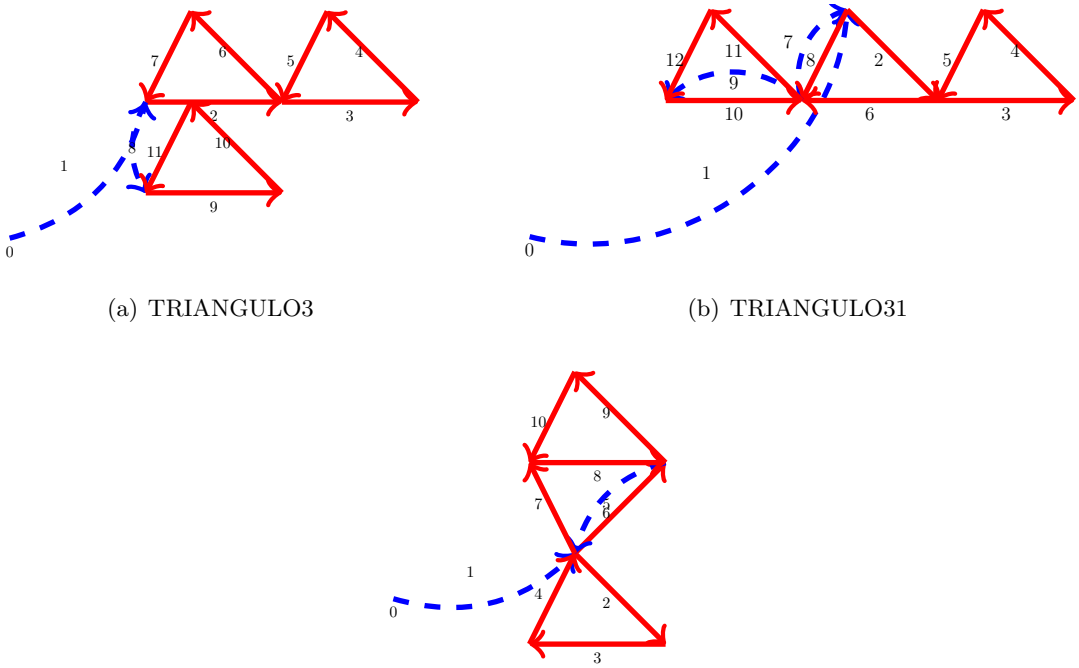
Como pode ser observado, o modelo que considera somente duas peças possui um bom desempenho, obtendo a solução ótima para as três instâncias em menos de 1 segundo em cada teste. A Tabela A.2 apresenta os resultados obtidos para o modelo 3-DTSP em três combinações possíveis de alocação de três triângulos numa placa. A Figura A.2 ilustra as soluções das três instâncias e as respectivas posições dos triângulos na placa.

Tabela A.2 – Resultados computacionais para o modelo 3-DTSP.

Instância	Melhor solução obtida	$GAP(\%)$	Tempo(s)
TRIANGULO3	39,21	89,08	TL
TRIANGULO31	43,38	87,64	TL
TRIANGULO32	33,70	87,29	TL

Nota-se que o desempenho do modelo 3-DTSP é muito inferior ao modelo 2-DTSP, não conseguindo encontrar a solução ótima para nenhuma das instâncias dentro do tempo limite definido (3600s). Isto se deve ao fato do aumento quase exponencial da quantidade de restrições do modelo. Como explicado na Seção 4.5.2, o modelo deve considerar cada combinação possível entre as peças, quais foram completamente cortadas e quais ainda não foram, para que os

Figura A.2 – Soluções obtidas pelo 3-DTSP.



(a) TRIANGULO3

(b) TRIANGULO31

(c) TRIANGULO32

custos sejam utilizados corretamente de acordo com cada situação. Observa-se que o acréscimo de apenas 1 peça afeta consideravelmente o desempenho da solução do problema através da abordagem utilizada.

Apêndice

B

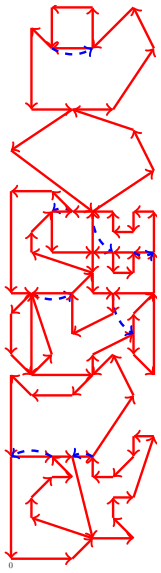
O problema de determinação do caminho de corte: soluções obtidas

Neste apêndice são apresentados os caminhos de corte das soluções ótimas dos testes realizados no Capítulo 5. As soluções foram divididas em duas seções, na primeira são apresentadas as soluções em que há possibilidade de percorrer uma aresta parcialmente, ou seja, é permitida a divisão de arestas, enquanto na segunda esta divisão não é permitida.

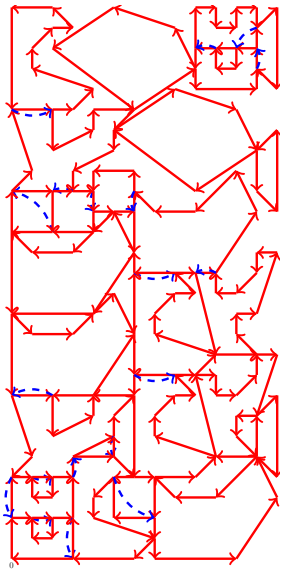
B.1 Com divisão de arestas

Nesta seção encontram-se as soluções ótimas dos testes realizados para as 80 instâncias da literatura de problemas de empacotamento considerando a divisão das arestas no preprocessamento do grafo de cada instância. Os segmentos tracejados representam os movimentos aéreos enquanto os contínuos representam os cortes efetivos. É importante ressaltar que, como definido nas características do problema proposto no Capítulo 4, a ferramenta de corte inicia seu movimento a partir de uma origem predefinida que em todas as instâncias é a posição (0, 0), correspondente ao canto inferior esquerdo da placa.

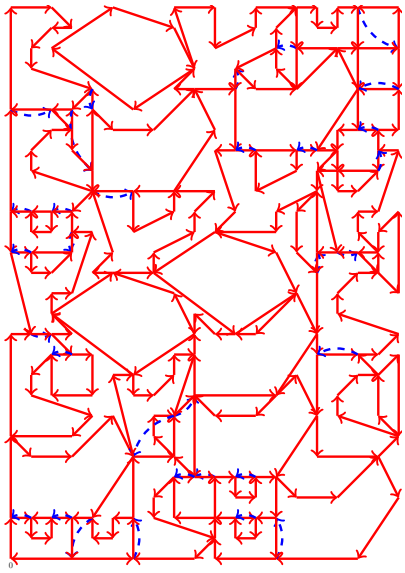
Figura B.1 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias ARTIF considerando a divisão de arestas.



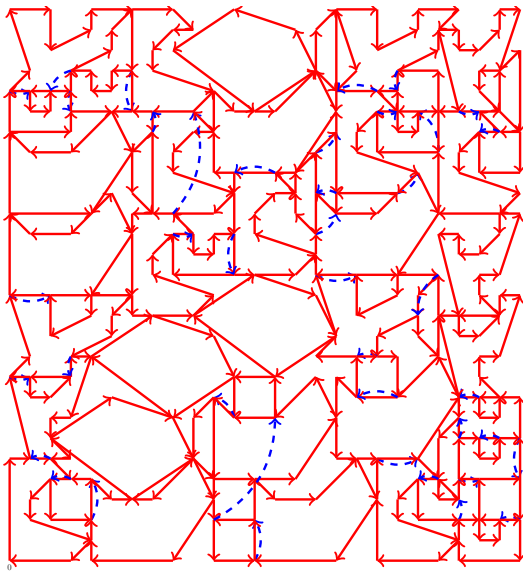
(a) ARTIF1_2.



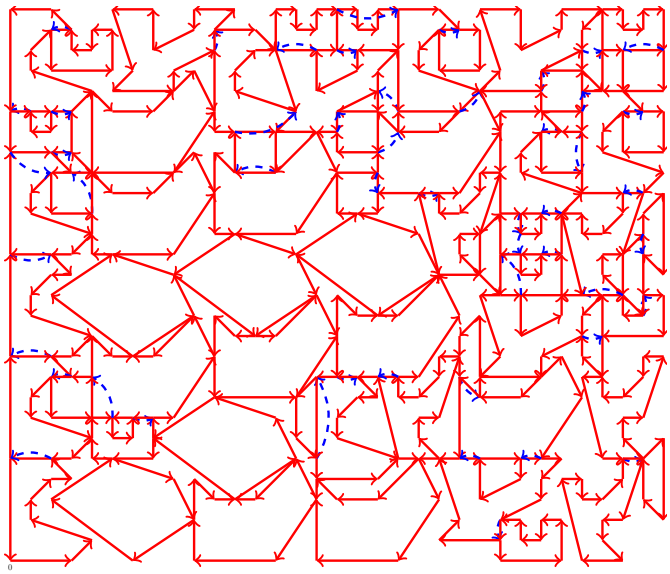
(b) ARTIF2_4.



(c) ARTIF3_6.

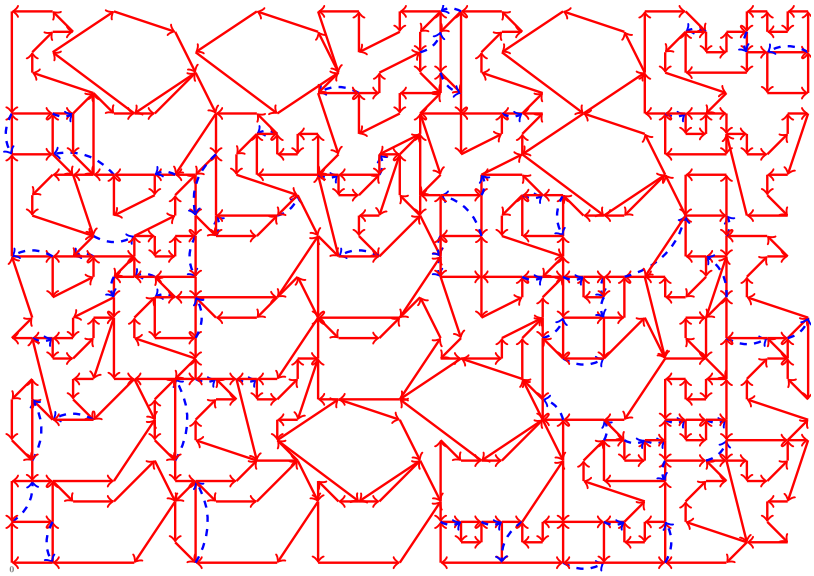


(d) ARTIF4_8.

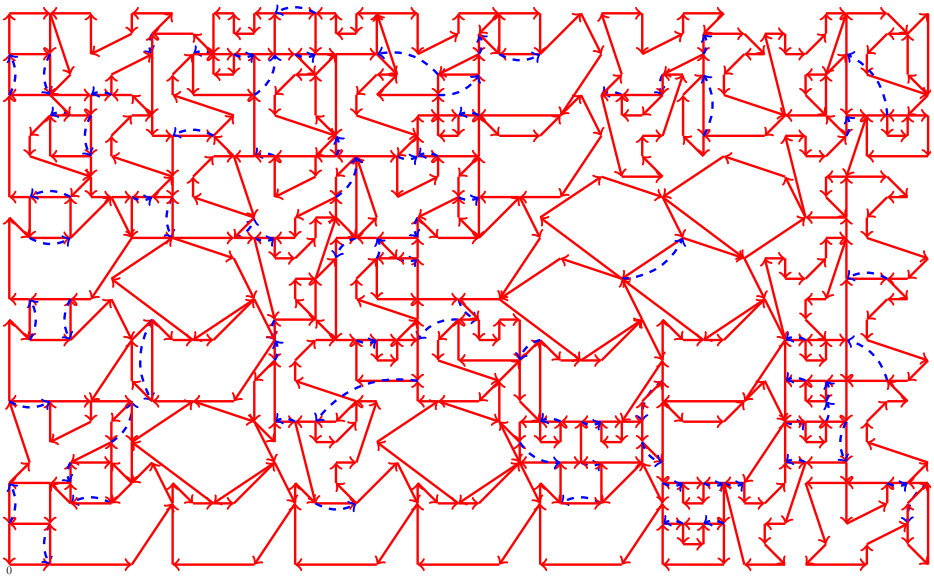


(e) ARTIF5_10.

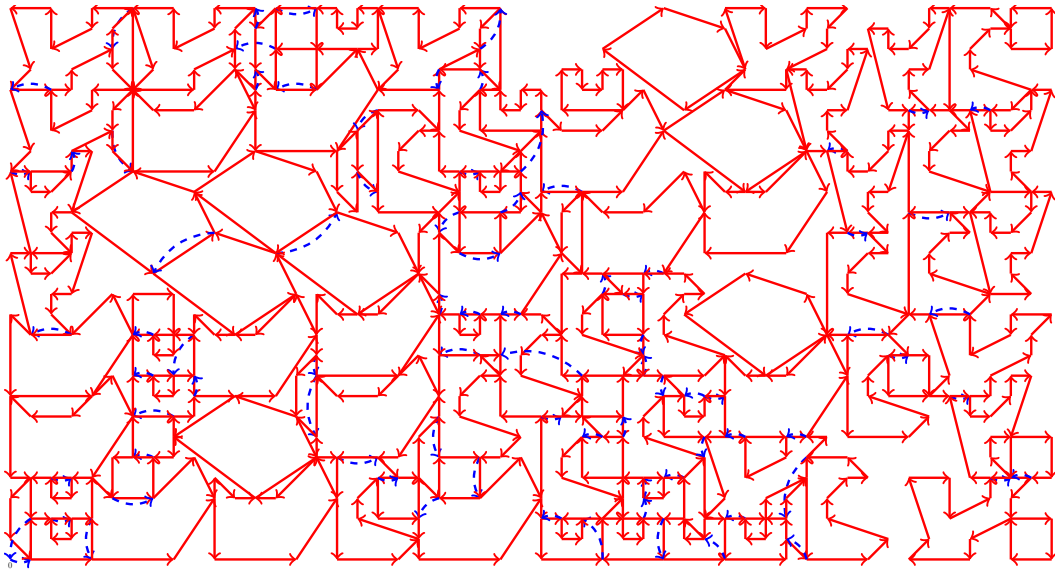
Figura B.1 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias ARTIF considerando a divisão de arestas (continuação).



(f) ARTIF6_12.

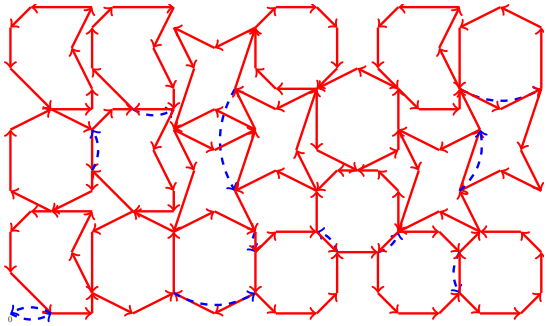


(g) ARTIF7_14.



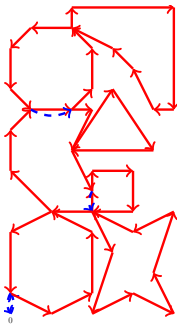
(h) ARTIF.

Figura B.2 – Solução ótima encontrada para a instância BLASZ2 considerando a divisão de arestas.

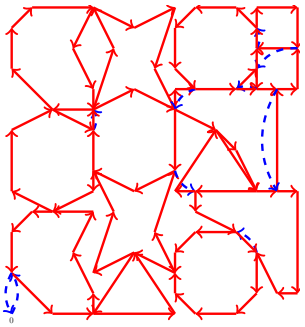


BLASZ2.

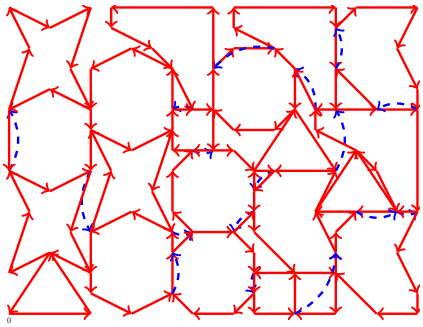
Figura B.3 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias BLAZEWICZ considerando a divisão de arestas.



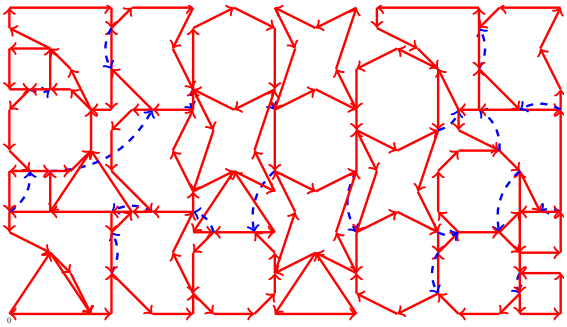
(a) BLAZEWICZ1.



(b) BLAZEWICZ2.

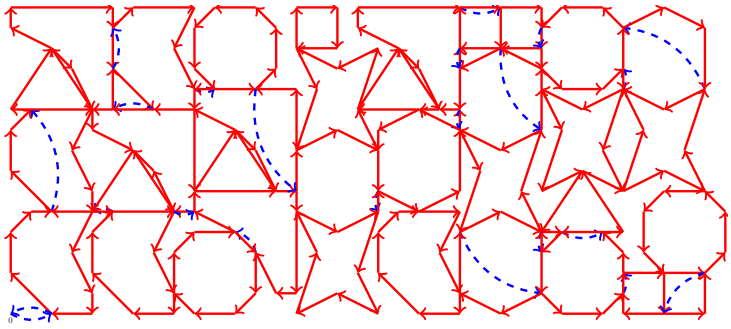


(c) BLAZEWICZ3.



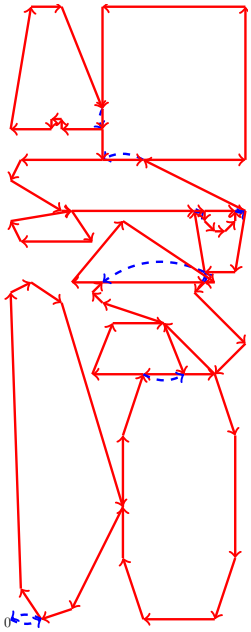
(d) BLAZEWICZ4.

Figura B.3 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias BLAZEWICZ considerando a divisão de arestas (continuação).



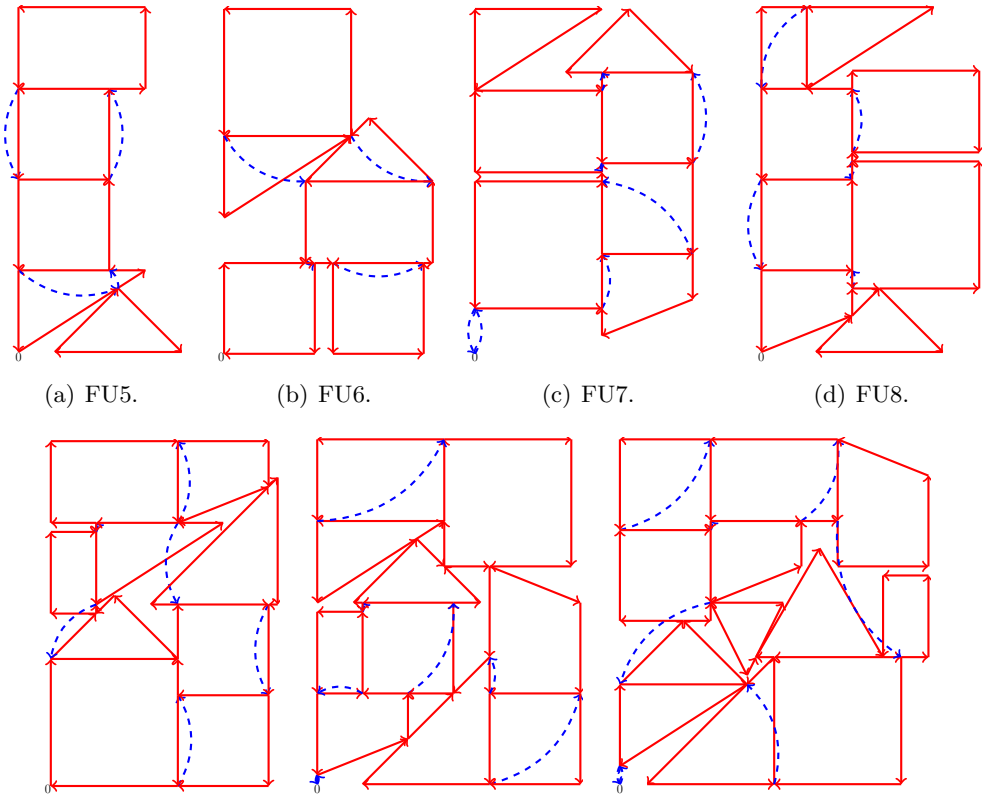
(e) BLAZEWICZ5.

Figura B.4 – Solução ótima encontrada para a instância DAGLI1 considerando a divisão de arestas.



DAGLI1.

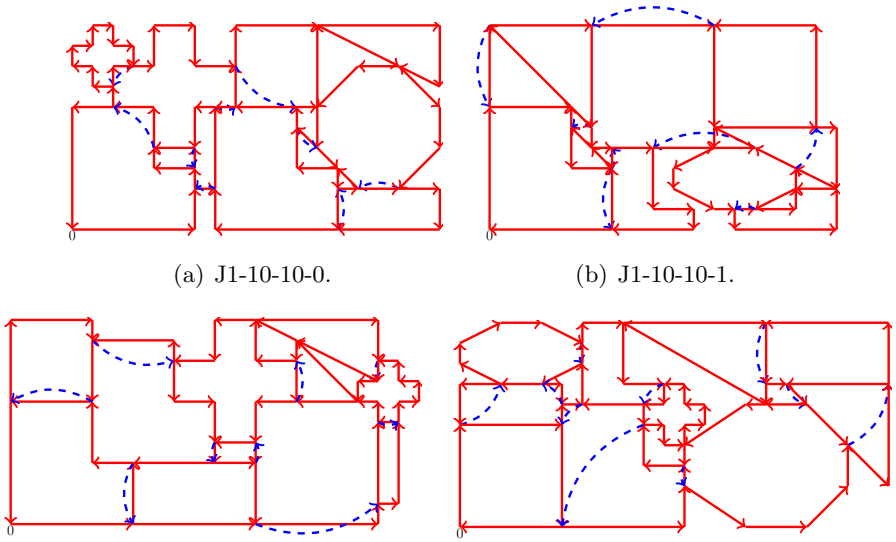
Figura B.5 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias FU considerando a divisão de arestas.



(a) FU5. (b) FU6. (c) FU7. (d) FU8.

(e) FU9. (f) FU10. (g) FU.

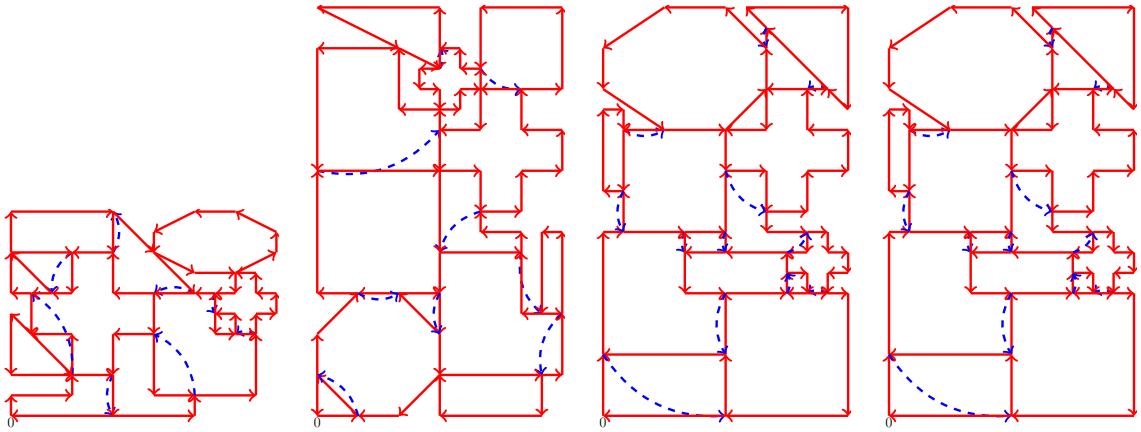
Figura B.6 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias J1 considerando a divisão de arestas.



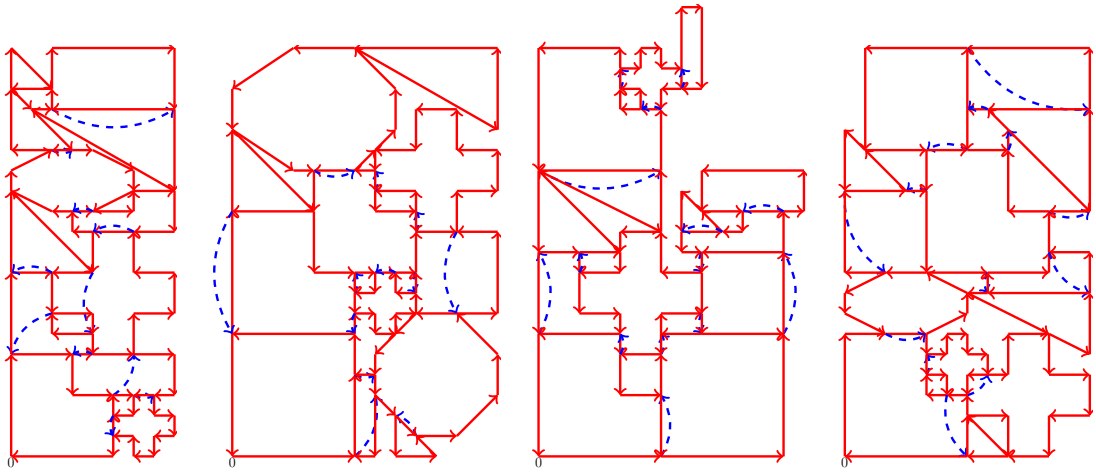
(a) J1-10-10-0. (b) J1-10-10-1.

(c) J1-10-10-2. (d) J1-10-10-3.

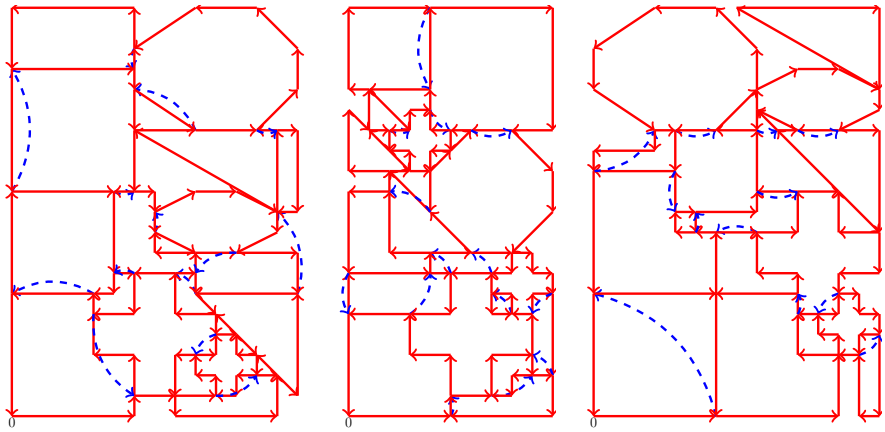
Figura B.6 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias J1 considerando a divisão de arestas (continuação).



(e) J1-10-10-4. (f) J1-12-20-0. (g) J1-12-20-1. (h) J1-12-20-2.

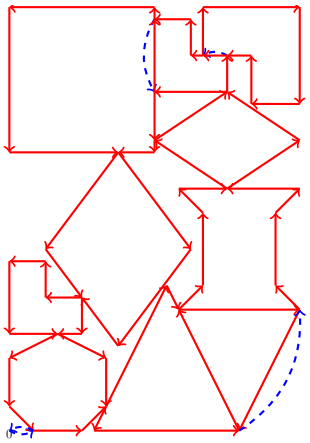


(i) J1-12-20-3. (j) J1-12-20-4. (k) J1-14-20-0. (l) J1-14-20-1.

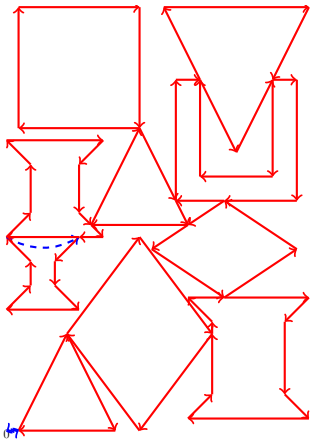


(m) J1-14-20-2. (n) J1-14-20-3. (o) J1-14-20-4.

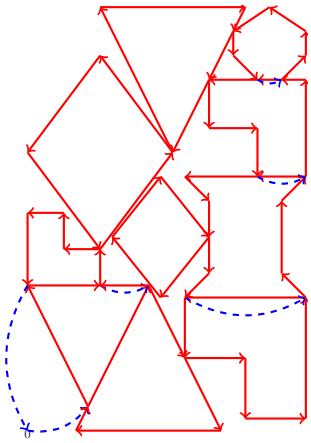
Figura B.7 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias J2 considerando a divisão de arestas.



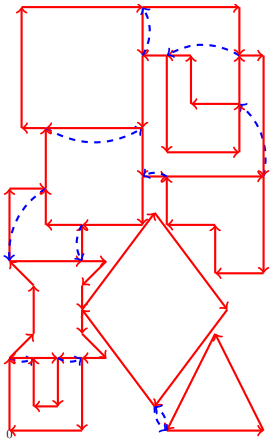
(a) J2-10-35-0.



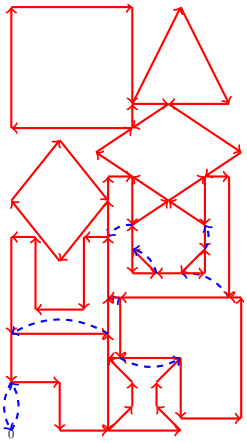
(b) J2-10-35-1.



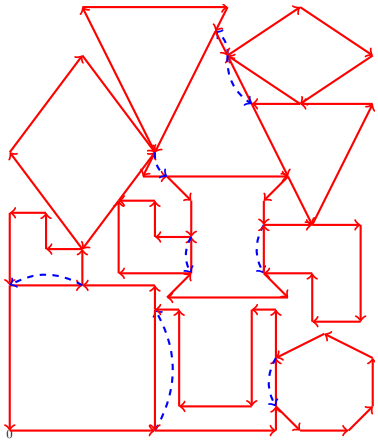
(c) J2-10-35-2.



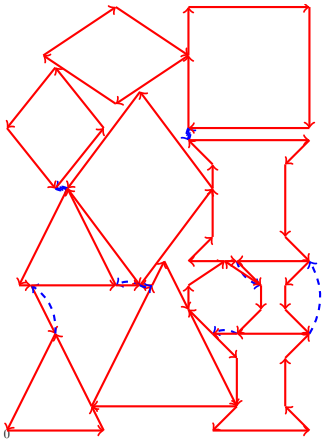
(d) J2-10-35-3.



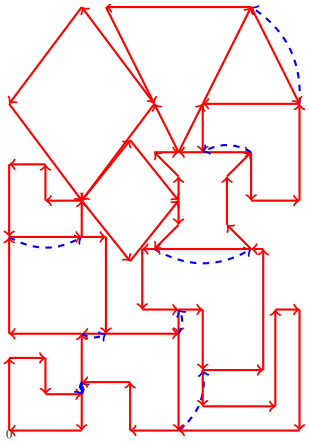
(e) J2-10-35-4.



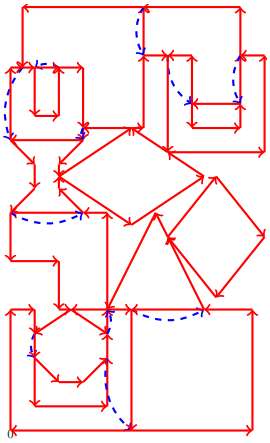
(f) J2-12-35-0.



(g) J2-12-35-1.

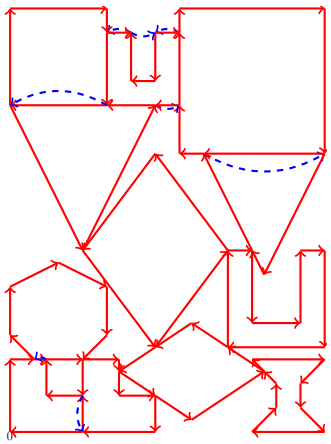


(h) J2-12-35-2.

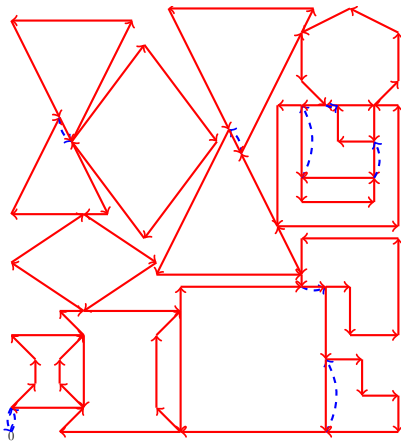


(i) J2-12-35-3.

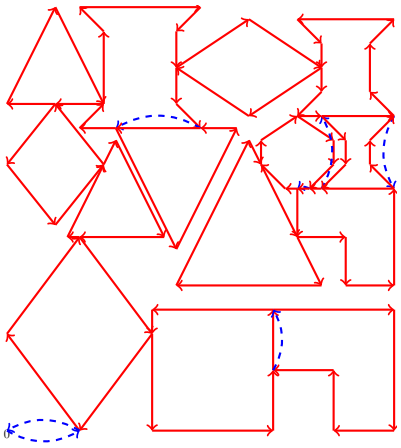
Figura B.7 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias J2 considerando a divisão de arestas (continuação).



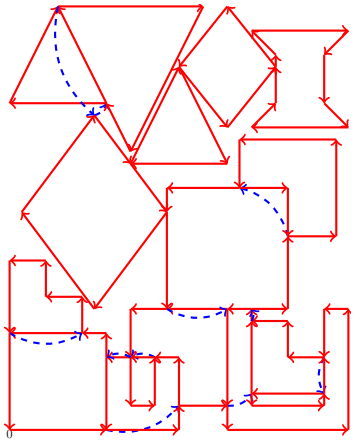
(j) J2-12-35-4.



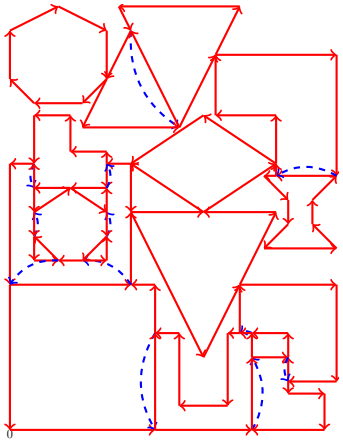
(k) J2-14-35-0.



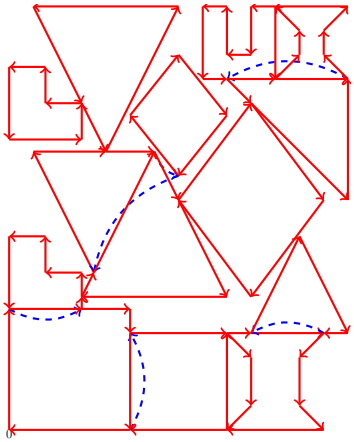
(l) J2-14-35-1.



(m) J2-14-35-2.

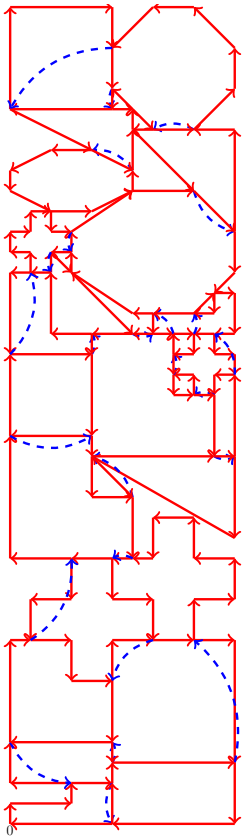


(n) J2-14-35-3.



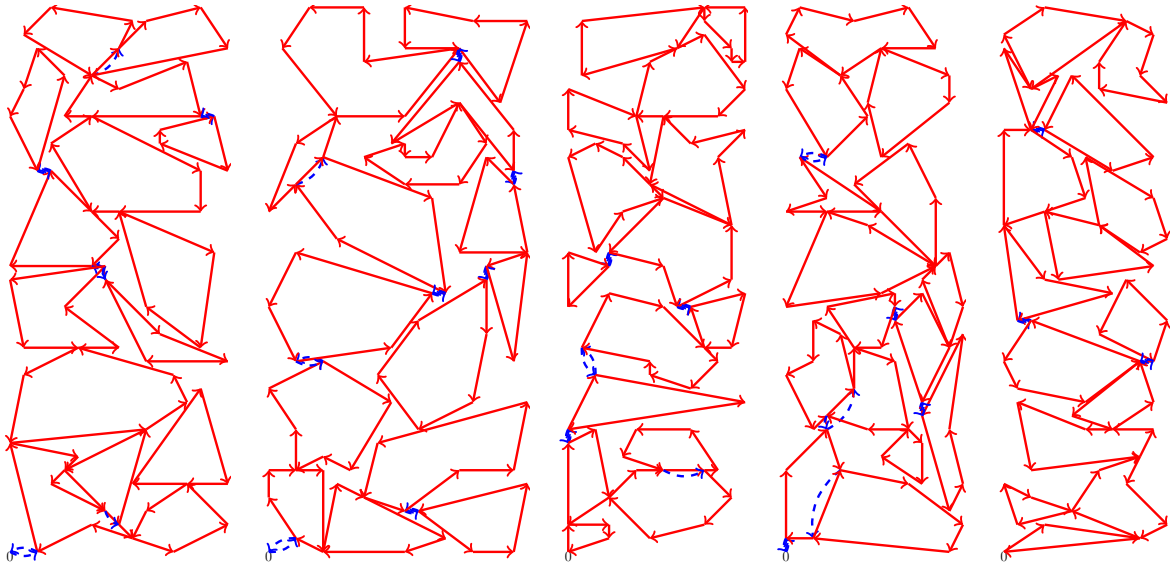
(o) J2-14-35-4.

Figura B.8 – Solução ótima encontrada para a instância JAKOBS1 considerando a divisão de arestas.



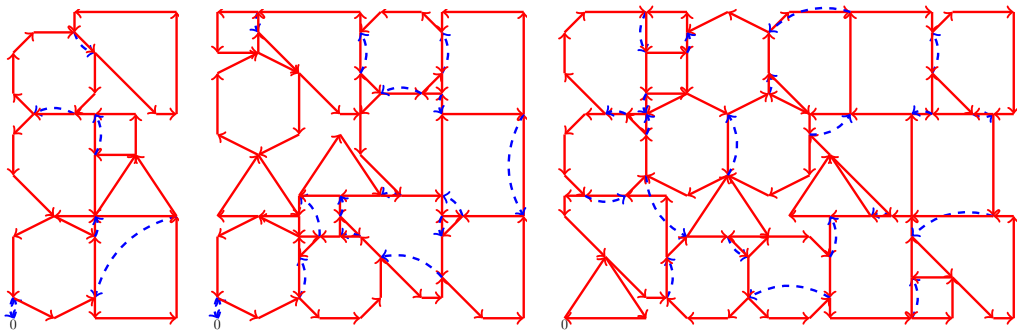
JAKOBS1.

Figura B.9 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias POLY considerando a divisão de arestas.

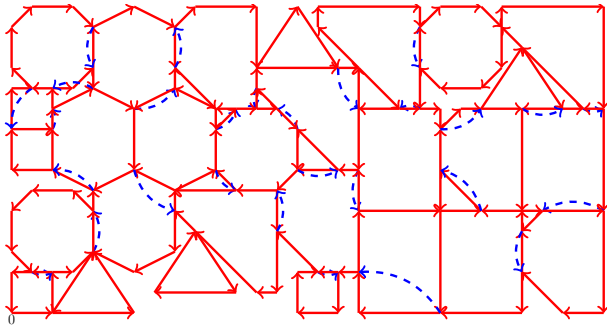


(a) POLY1A. (b) POLY1B. (c) POLY1C. (d) POLY1D. (e) POLY1E.

Figura B.10 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias RCO considerando a divisão de arestas.

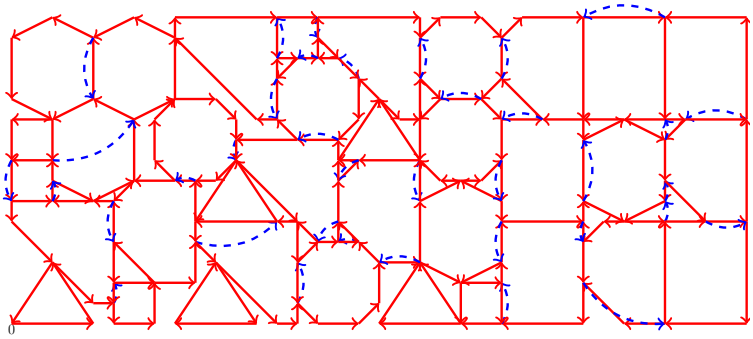


(a) RCO1. (b) RCO2. (c) RCO3.



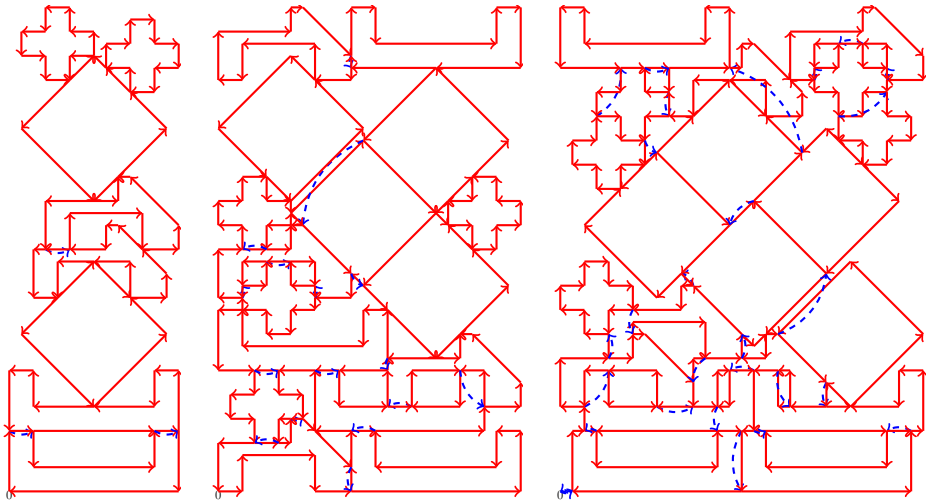
(d) RCO4.

Figura B.10 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias RCO considerando a divisão de arestas (continuação).



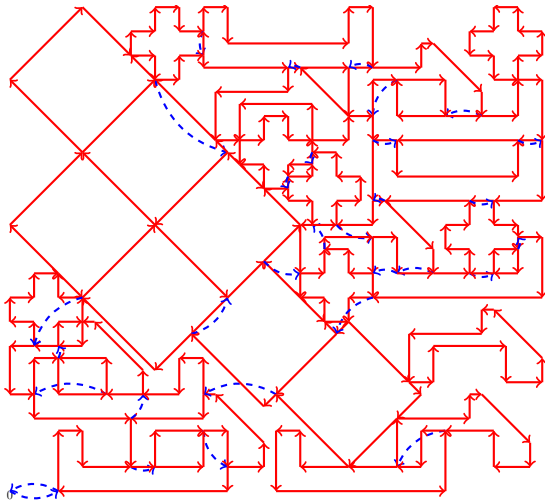
(e) RCO5.

Figura B.11 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias SHAPES considerando a divisão de arestas.

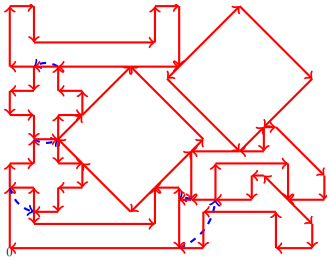


(a) SHAPES2. (b) SHAPES4. (c) SHAPES5.

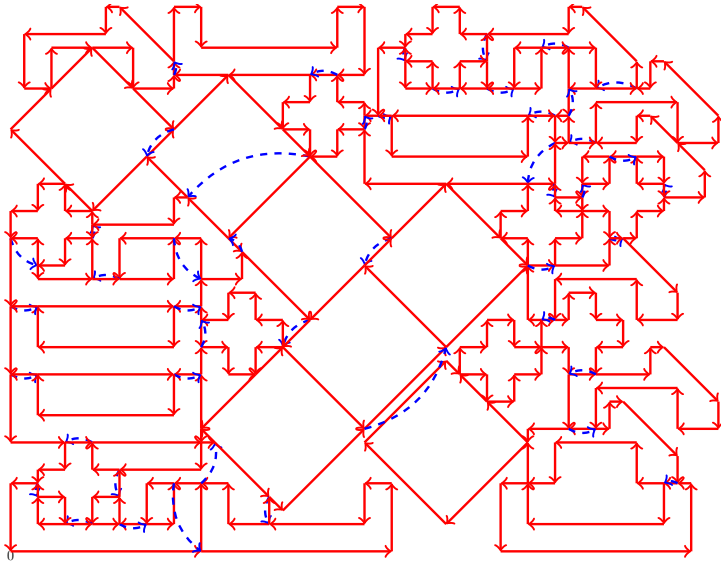
Figura B.11 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias SHAPES considerando a divisão de arestas (continuação).



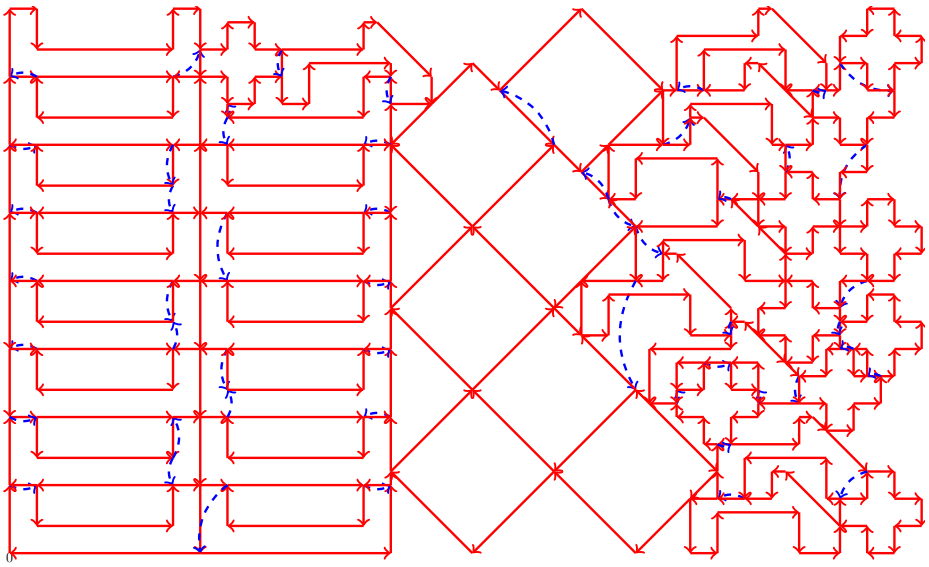
(d) SHAPES7.



(e) SHAPES8.

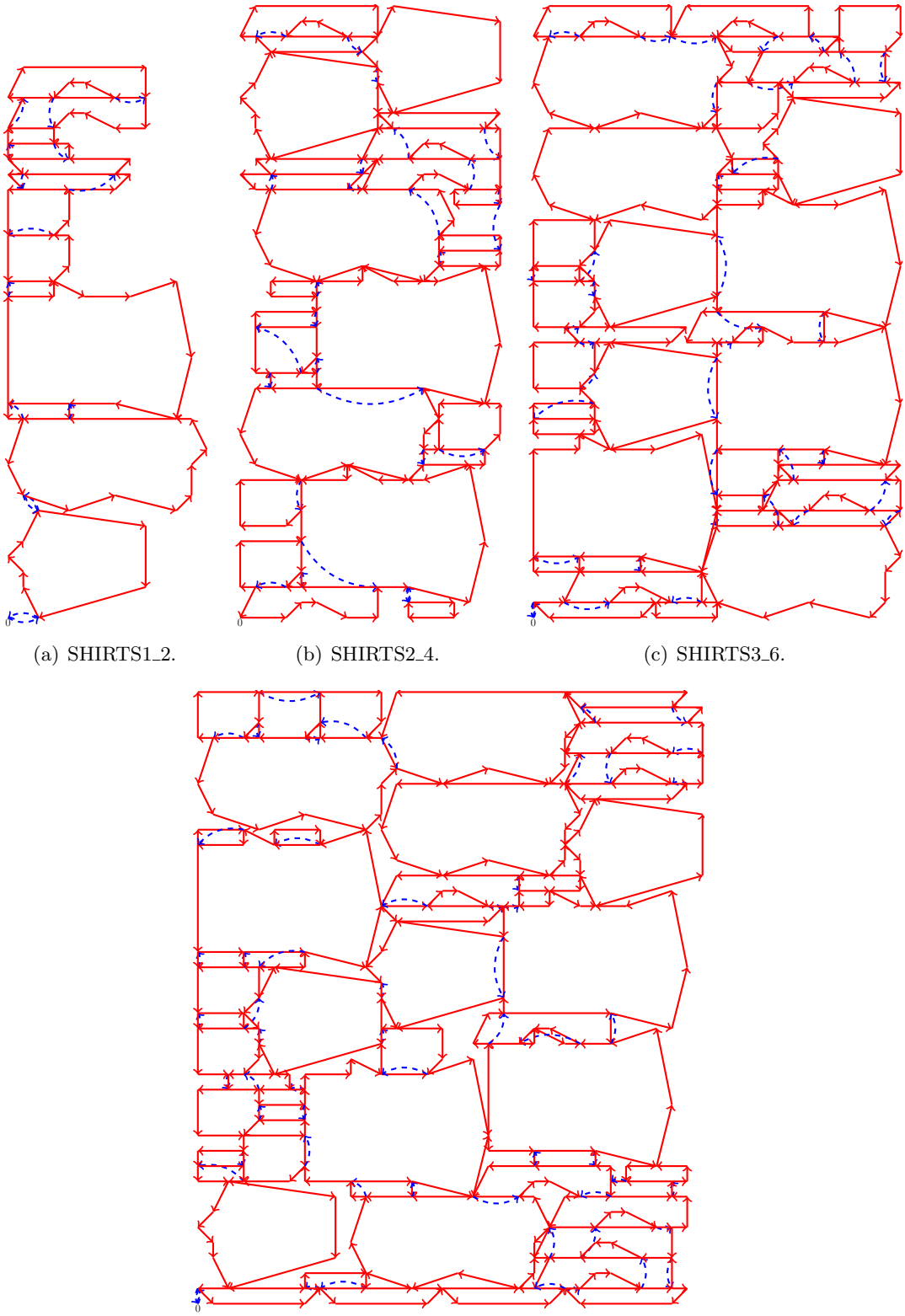


(f) SHAPES9.



(g) SHAPES15.

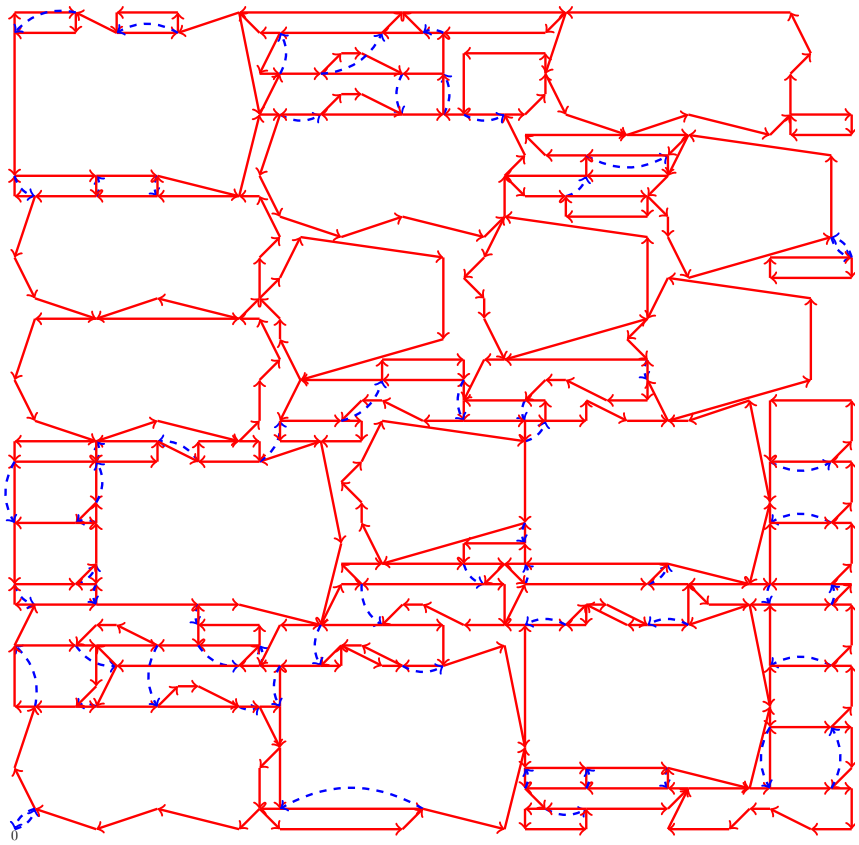
Figura B.12 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias SHIRTS considerando a divisão de arestas.



(a) SHIRTS1_2. (b) SHIRTS2_4. (c) SHIRTS3_6.

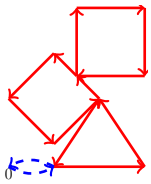
(d) SHIRTS4_8.

Figura B.12 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias SHIRTS considerando a divisão de arestas (continuação).

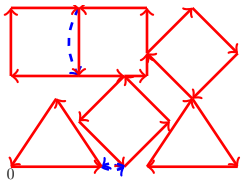


(e) SHIRTS5_10.

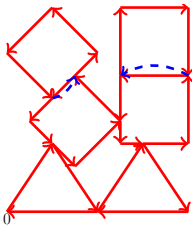
Figura B.13 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias THREE considerando a divisão de arestas.



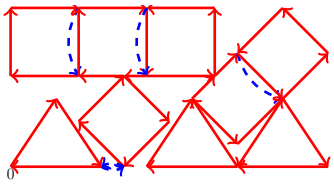
(a) THREE.



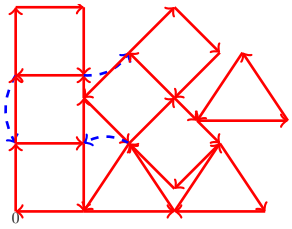
(b) THREEP2.



(c) THREEP2W9.



(d) THREEP3.

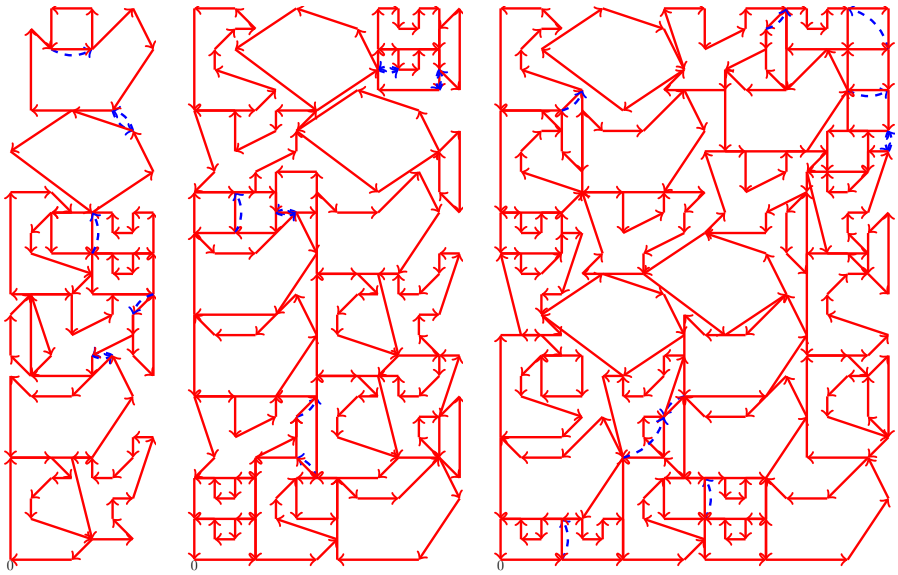


(e) THREEP3W9.

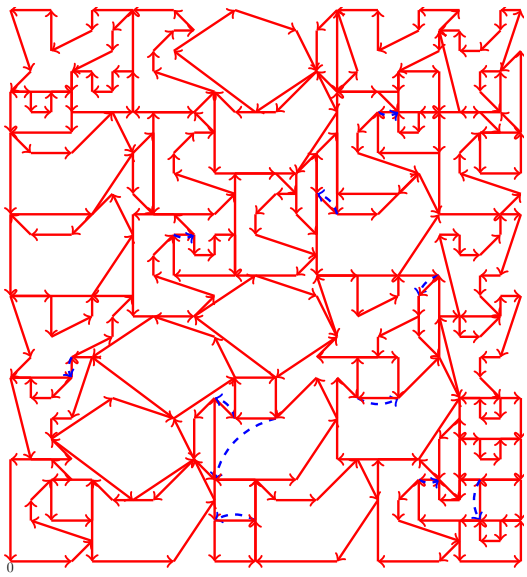
B.2 Sem divisão de arestas

Nesta seção encontram-se as soluções ótimas dos testes realizados para as 80 instâncias da literatura de problemas de empacotamento sem considerar a divisão das arestas no preprocessamento do grafo de cada instância. Seguindo o mesmo formato da seção anterior, os segmentos tracejados representam os movimentos aéreos enquanto que os contínuos representam os cortes efetivos.

Figura B.14 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias ARTIF não considerando a divisão de arestas.

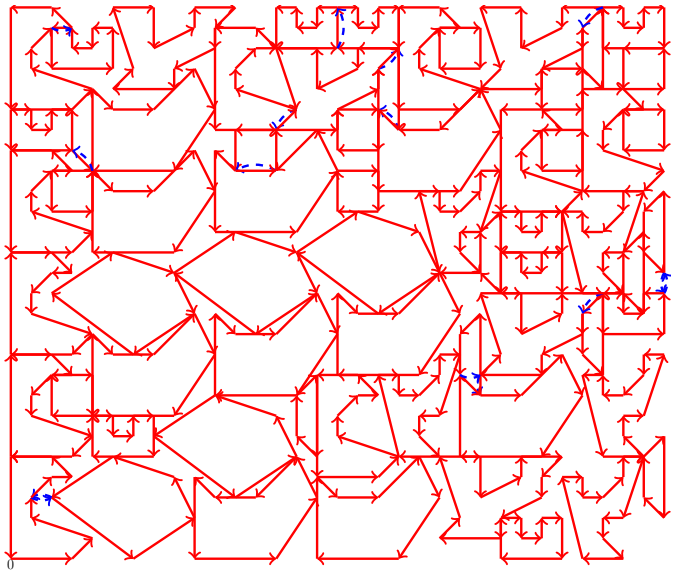


(a) ARTIF1_2. (b) ARTIF2_4. (c) ARTIF3_6.

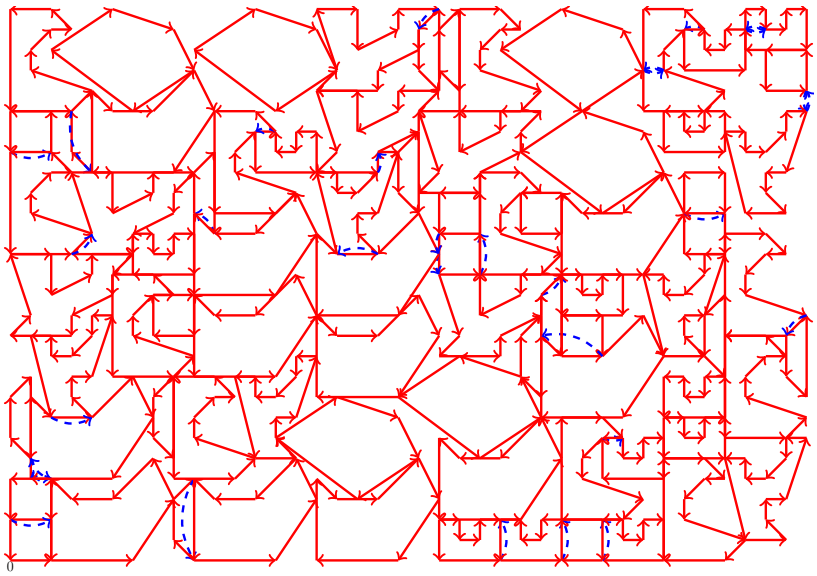


(d) ARTIF4_8.

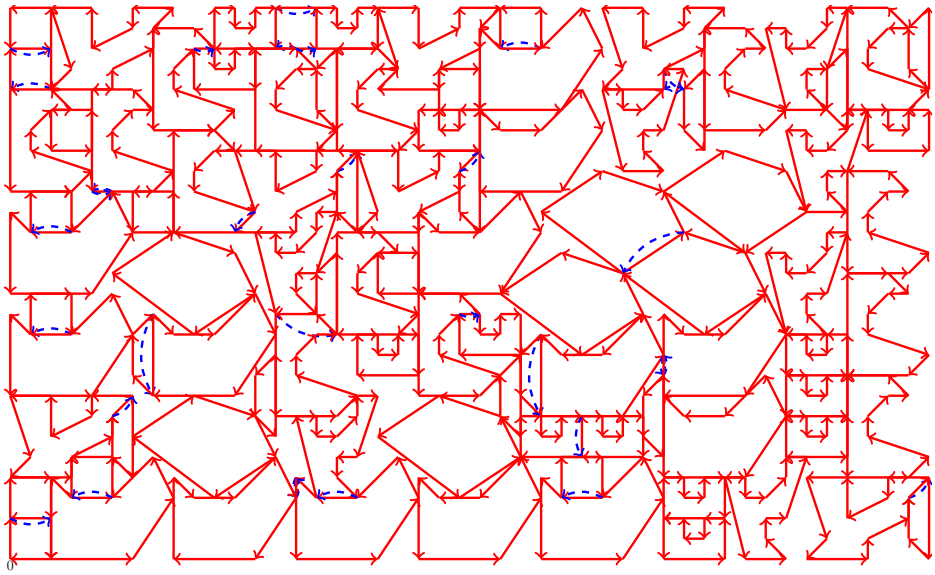
Figura B.14 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias ARTIF não considerando a divisão de arestas (continuação).



(e) ARTIF5_10.

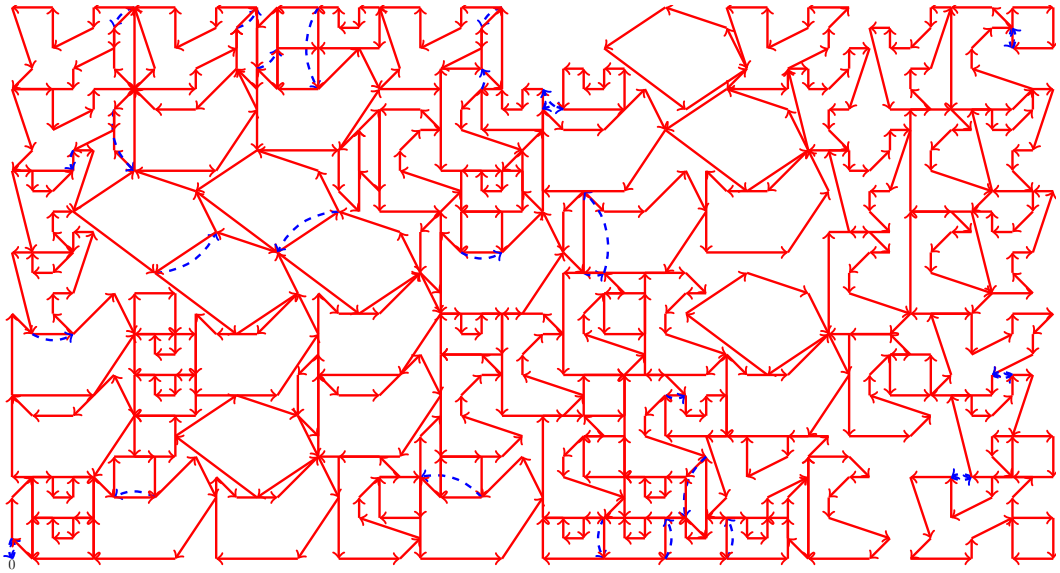


(f) ARTIF6_12.



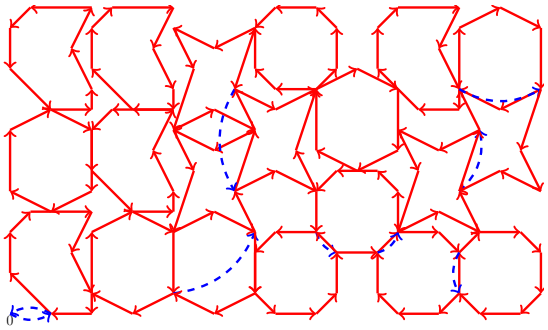
(g) ARTIF7_14.

Figura B.14 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias ARTIF não considerando a divisão de arestas (continuação).



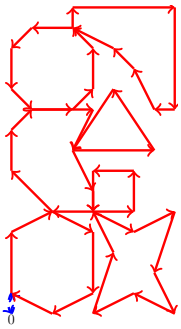
(h) ARTIF.

Figura B.15 – Solução ótima encontrada para a instância BLASZ2 não considerando a divisão de arestas.

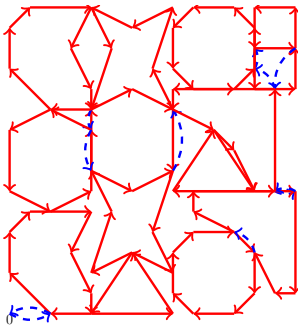


BLASZ2.

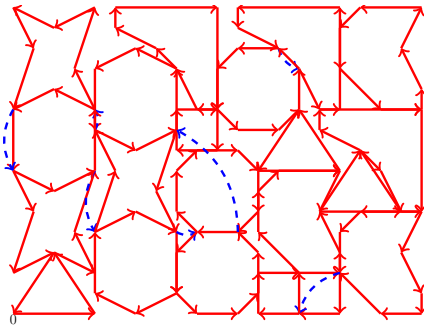
Figura B.16 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias BLAZEWICZ não considerando a divisão de arestas.



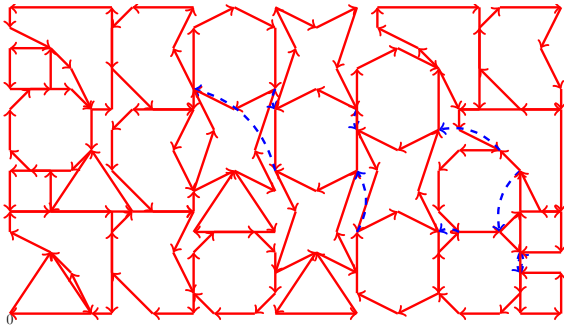
(a) BLAZEWICZ1.



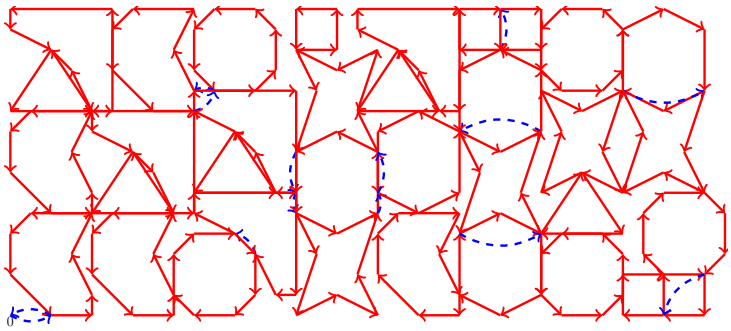
(b) BLAZEWICZ2.



(c) BLAZEWICZ3.

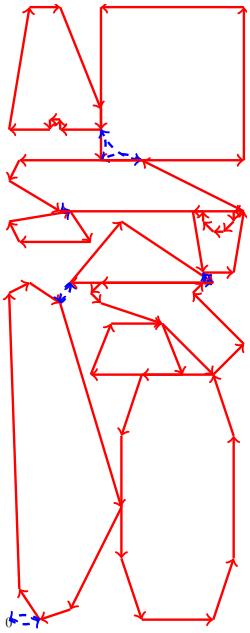


(d) BLAZEWICZ4.



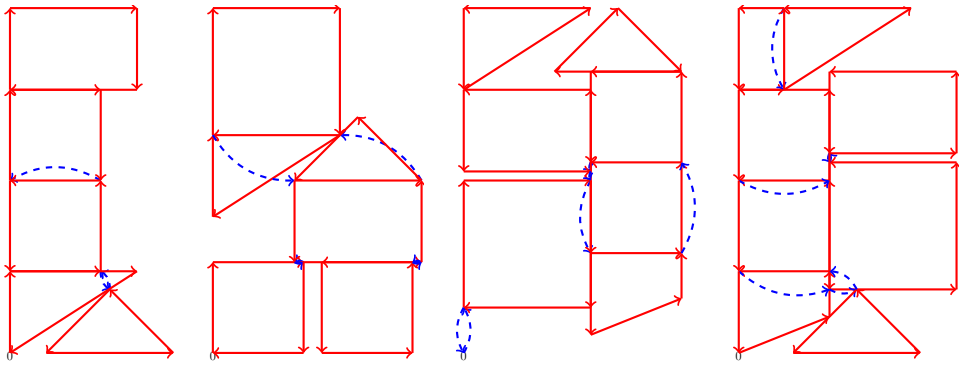
(e) BLAZEWICZ5.

Figura B.17 – Solução ótima encontrada para a instância DAGLI1 não considerando a divisão de arestas.



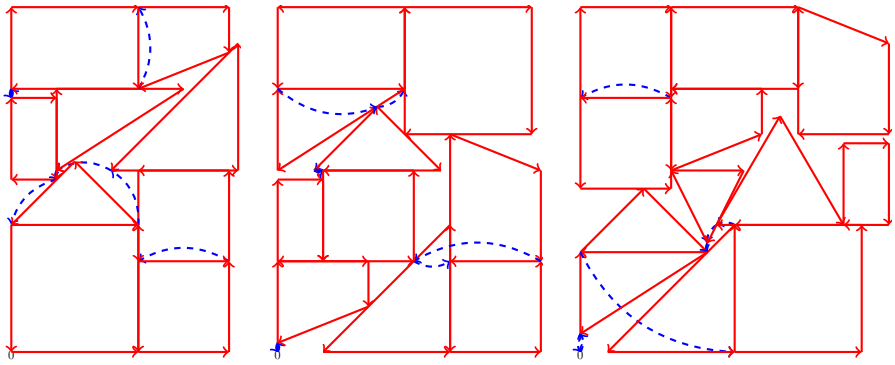
DAGLI1.

Figura B.18 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias FU não considerando a divisão de arestas.



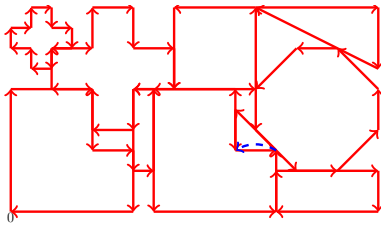
(a) FU5. (b) FU6. (c) FU7. (d) FU8.

Figura B.18 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias FU não considerando a divisão de arestas (continuação).

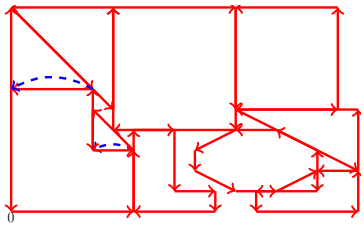


(e) FU9. (f) FU10. (g) FU.

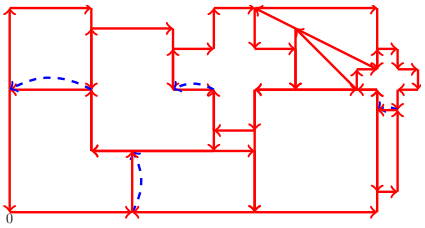
Figura B.19 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias J1 não considerando a divisão de arestas.



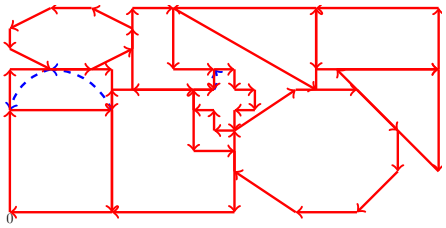
(a) J1-10-10-0.



(b) J1-10-10-1.

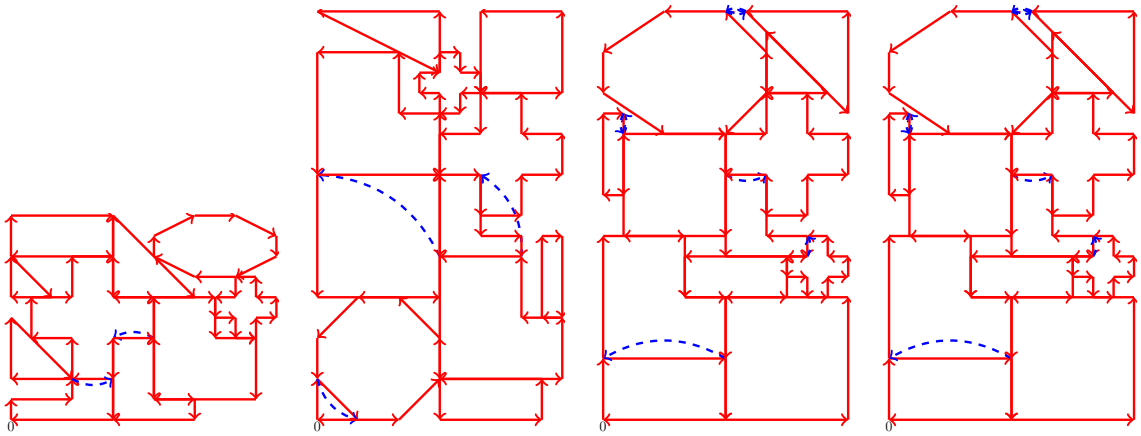


(c) J1-10-10-2.

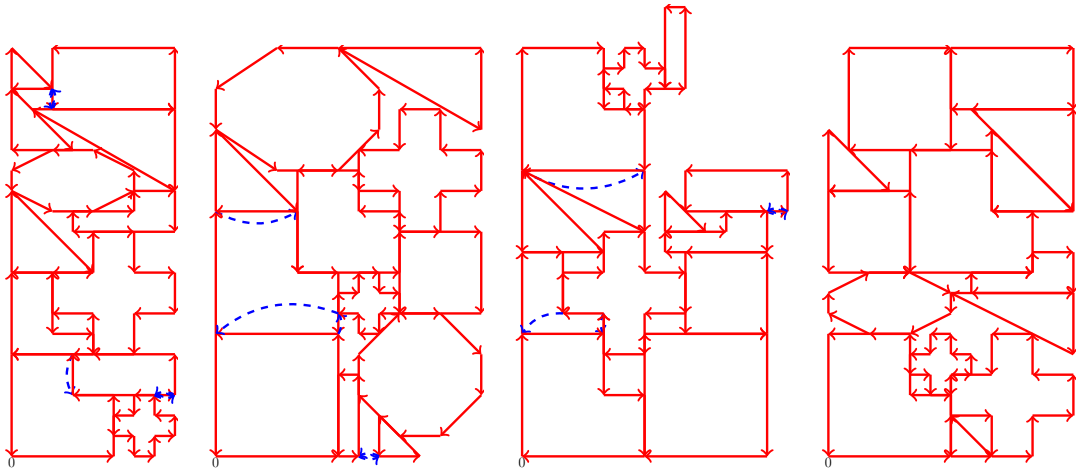


(d) J1-10-10-3.

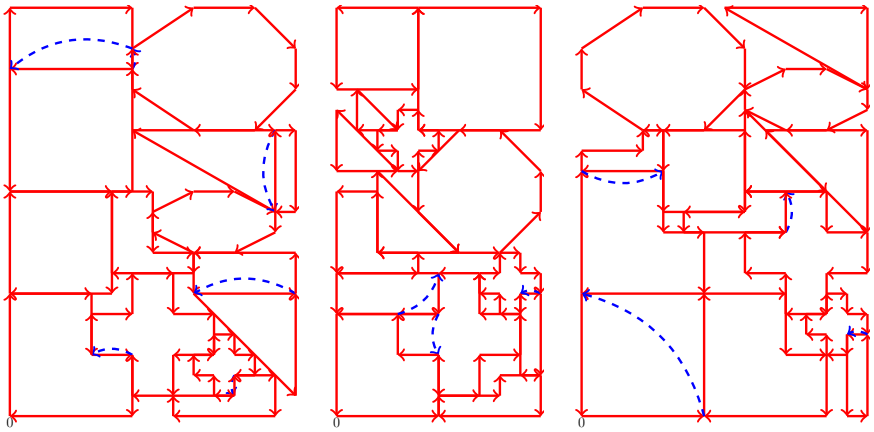
Figura B.19 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias J1 não considerando a divisão de arestas (continuação).



(e) J1-10-10-4. (f) J1-12-20-0. (g) J1-12-20-1. (h) J1-12-20-2.

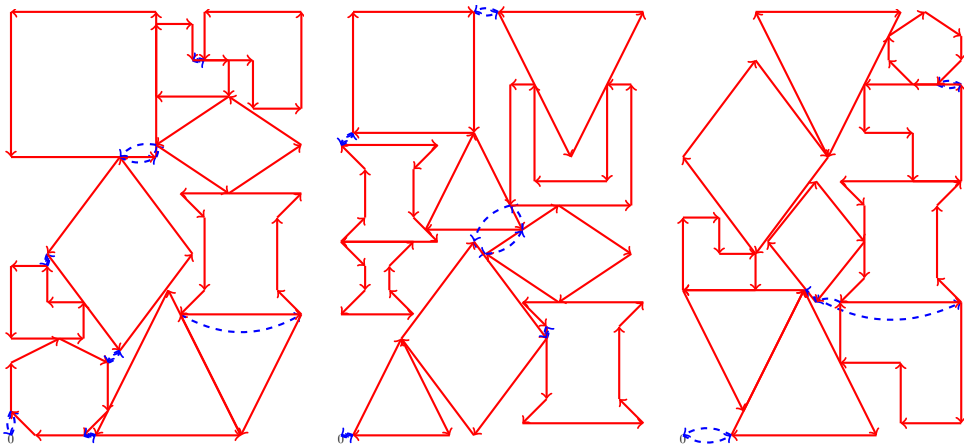


(i) J1-12-20-3. (j) J1-12-20-4. (k) J1-14-20-0. (l) J1-14-20-1.

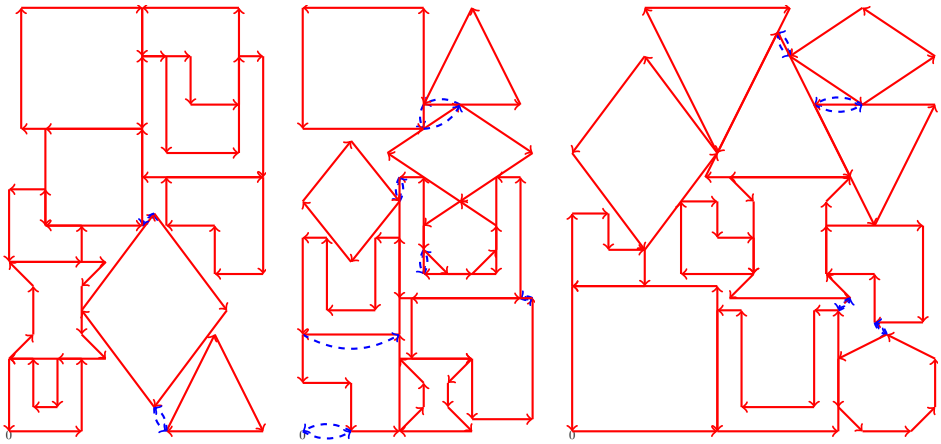


(m) J1-14-20-2. (n) J1-14-20-3. (o) J1-14-20-4.

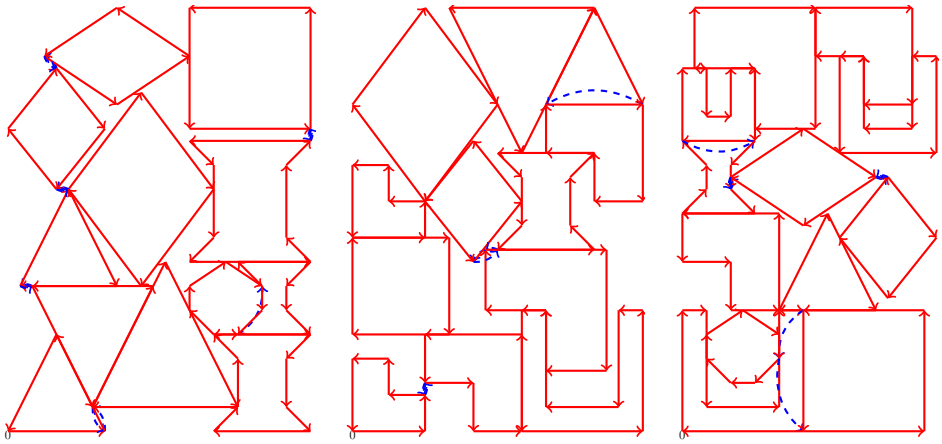
Figura B.20 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias J2 não considerando a divisão de arestas.



(a) J2-10-35-0. (b) J2-10-35-1. (c) J2-10-35-2.

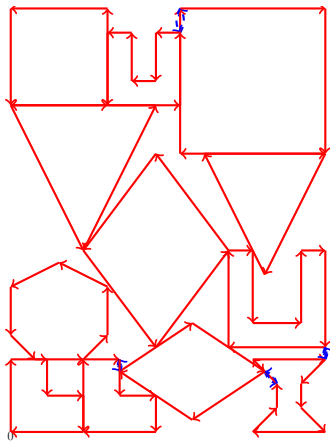


(d) J2-10-35-3. (e) J2-10-35-4. (f) J2-12-35-0.

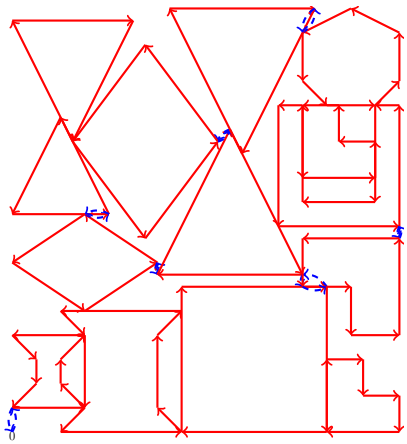


(g) J2-12-35-1. (h) J2-12-35-2. (i) J2-12-35-3.

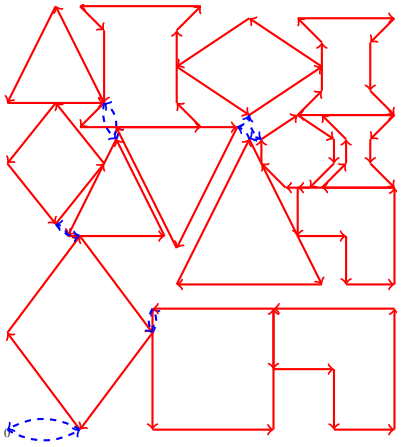
Figura B.20 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias J2 não considerando a divisão de arestas (continuação).



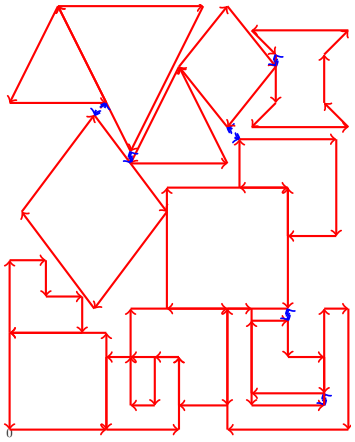
(j) J2-12-35-4.



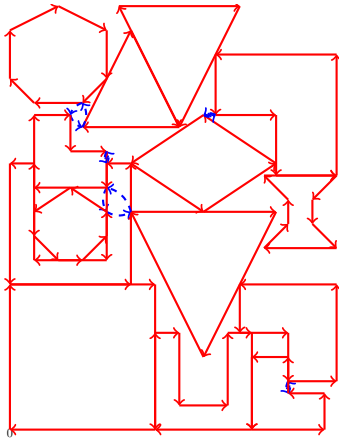
(k) J2-14-35-0.



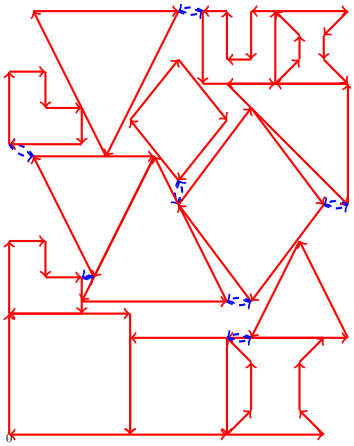
(l) J2-14-35-1.



(m) J2-14-35-2.

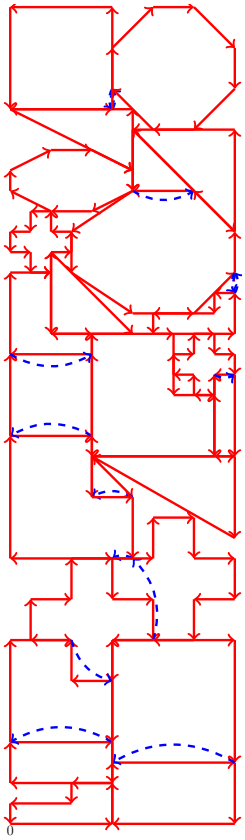


(n) J2-14-35-3.



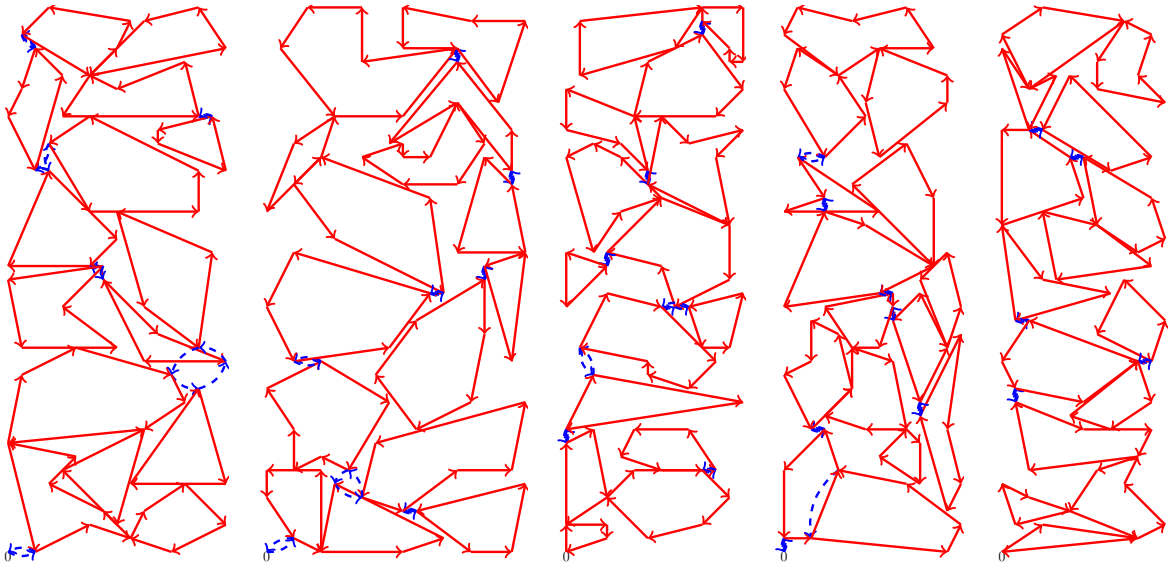
(o) J2-14-35-4.

Figura B.21 – Solução ótima encontrada para a instância JAKOBS1 não considerando a divisão de arestas.



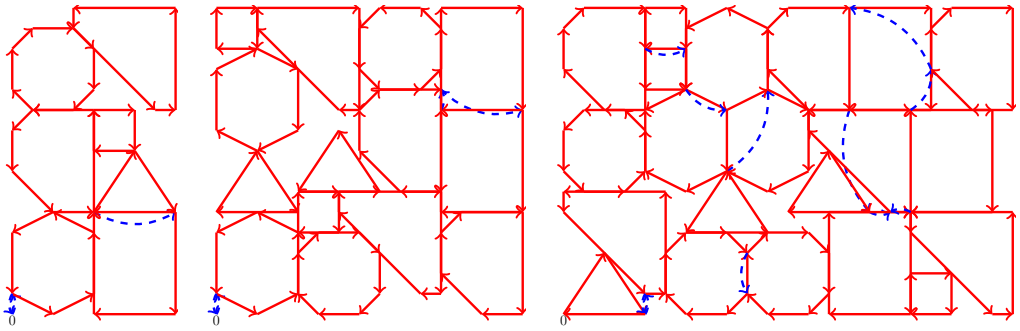
JAKOBS1.

Figura B.22 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias POLY não considerando a divisão de arestas.

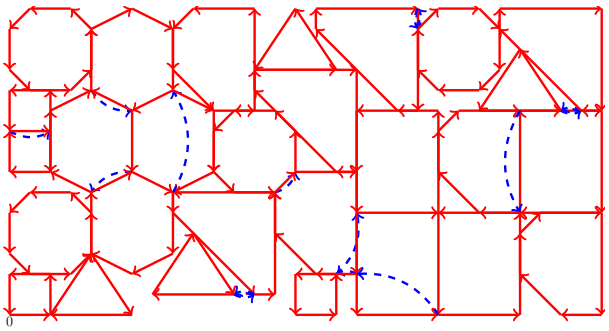


(a) POLY1A. (b) POLY1B. (c) POLY1C. (d) POLY1D. (e) POLY1E.

Figura B.23 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias RCO não considerando a divisão de arestas.

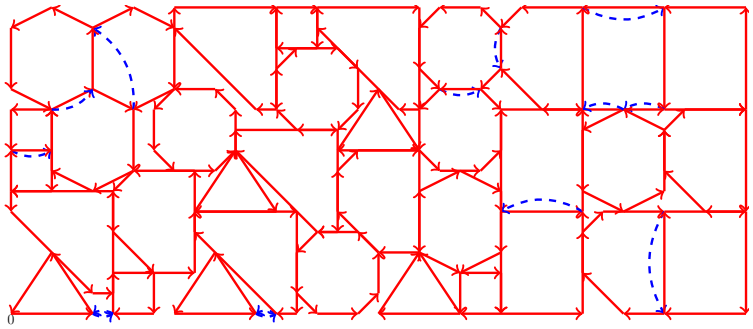


(a) RCO1. (b) RCO2. (c) RCO3.



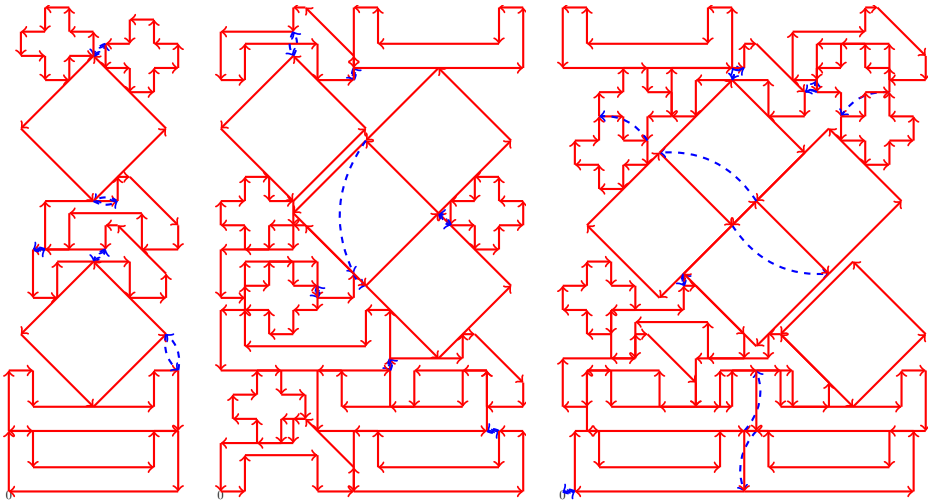
(d) RCO4.

Figura B.23 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias RCO não considerando a divisão de arestas (continuação).



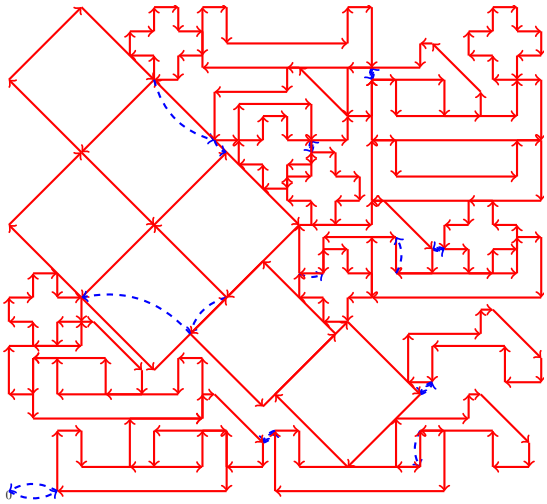
(e) RCO5.

Figura B.24 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias SHAPES não considerando a divisão de arestas.

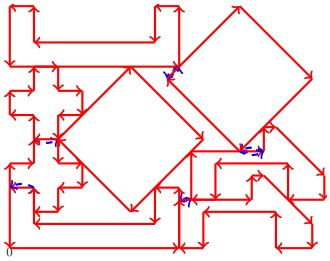


(a) SHAPES2. (b) SHAPES4. (c) SHAPES5.

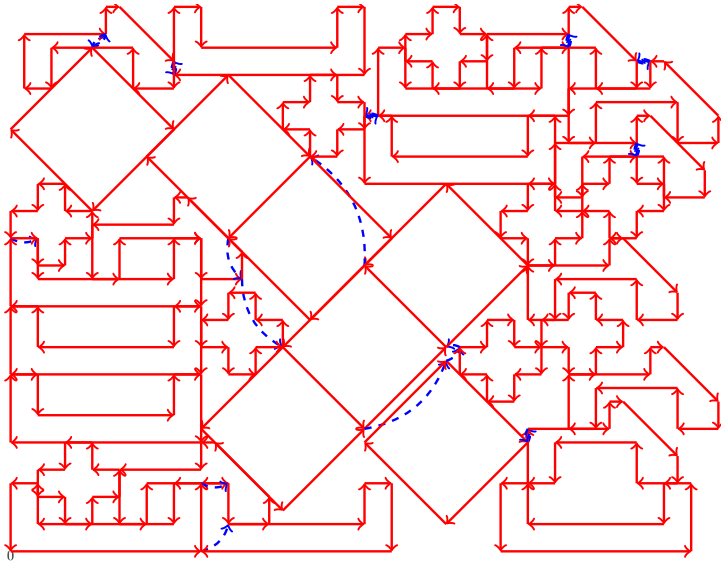
Figura B.24 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias SHAPES não considerando a divisão de arestas (continuação).



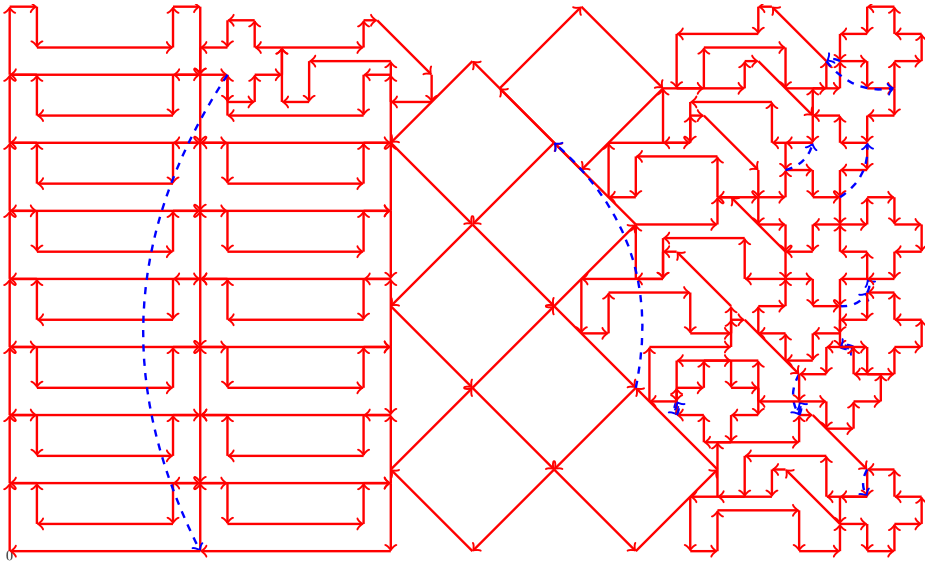
(d) SHAPES7.



(e) SHAPES8.

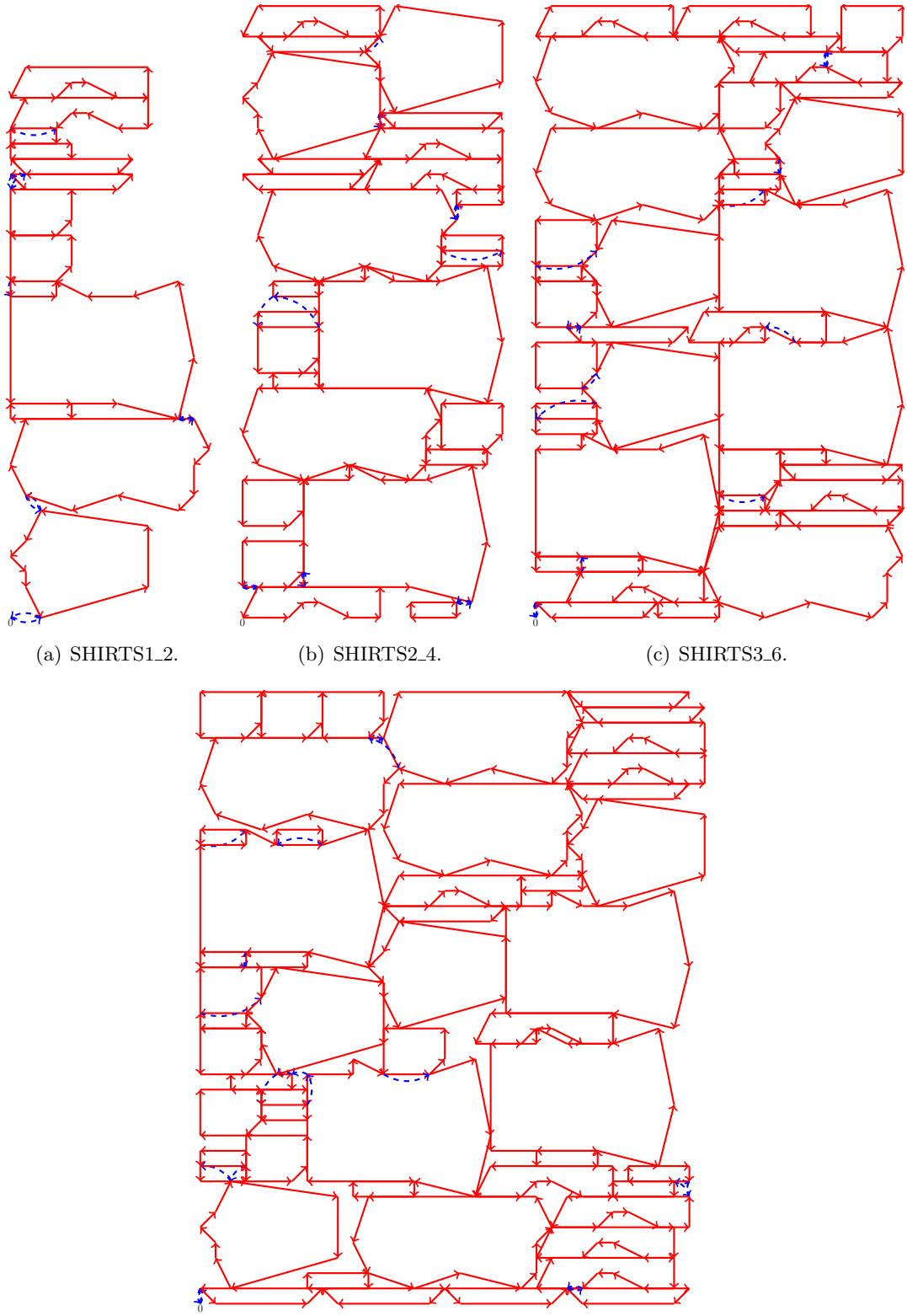


(f) SHAPES9.



(g) SHAPES15.

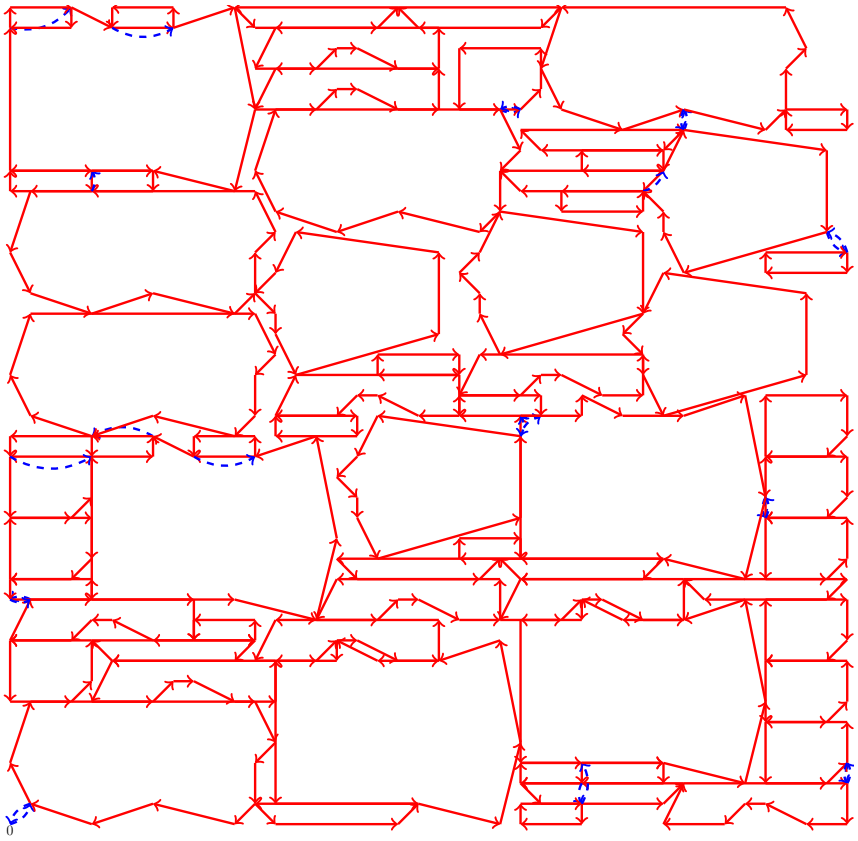
Figura B.25 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias SHIRTS não considerando a divisão de arestas.



(a) SHIRTS1_2. (b) SHIRTS2_4. (c) SHIRTS3_6.

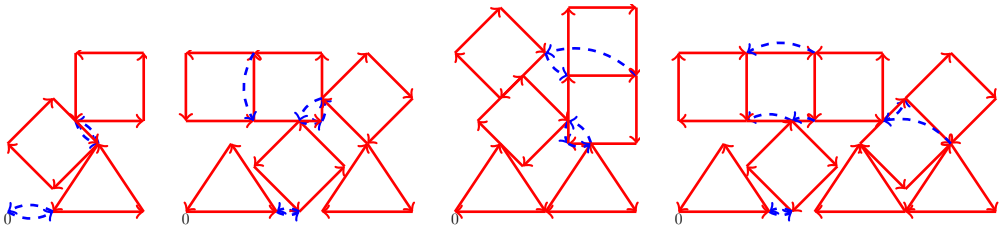
(d) SHIRTS4_8.

Figura B.25 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias SHIRTS não considerando a divisão de arestas (continuação).

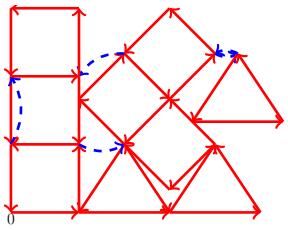


(e) SHIRTS5_10.

Figura B.26 – Soluções ótimas encontradas para as instâncias THREE não considerando a divisão de arestas.



(a) THREE. (b) THREEP2. (c) THREEP2W9. (d) THREEP3.



(e) THREEP3W9.