



I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

SOBRE REPRESENTAÇÃO E CÁLCULO
DE FUNÇÕES ATRAVÉS DE FRAÇÕES
CONTÍNUAS DE THIELE

Maria José Romanatto

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

SOBRE REPRESENTAÇÃO E CÁLCULO
DE FUNÇÕES ATRAVÉS DE FRAÇÕES
CONTÍNUAS DE THIELE

Maria José Romanatto

ORIENTADOR: Prof.Dr. Maximilian Emil Hehl

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências de Computação.

- São Carlos -

1986

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Maximilian Emil Hehl, pela orientação, colaboração e empenho valiosos à elaboração deste trabalho.

Ao Prof. José Alberto Cuminato pelas discussões e sugestões apresentadas.

À Prof.^a Dr.^a Célia Maria Finazzi de Andrade pelas contribuições, principalmente durante a realização dos exames de qualificação.

Aos amigos, professores e funcionários do ICMSC pelo convívio e amizade.

À CAPES e FINEP pelos auxílios concedidos.

ON THE REPRESENTATION AND CALCULATION OF FUNÇÕES BY
THIELE'S CONTINUED FRACTIONS

ABSTRACT

This work intends to investigate uniformized computational algorithms for representation and calculation of functions by continued fractions. In particular, we investigate the algorithms which are based on the approximation of functions by Thiele's continued fractions.

Some studied functions are programmed in FORTRAN IV language in order to test their efficiency. The obtained results are analysed.

SOBRE REPRESENTAÇÃO E CÁLCULO DE FUNÇÕES ATRAVÉS DE FRAÇÕES CONTÍNUAS DE THIELE

RESUMO

O objetivo deste trabalho é a investigação de algoritmos computacionais uniformizados para a representação e cálculo de funções através de frações contínuas. Em particular, os algoritmos investigados são baseados no desenvolvimento de funções em frações contínuas de Thiele.

Dentro desse plano, para algumas funções estudadas, são codificados programas em linguagem FORTRAN IV para testes de eficiência. São feitas considerações sobre os resultados obtidos.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	01
CAPÍTULO 1 - GENERALIDADES SOBRE FRAÇÕES CONTÍNUAS	03
1.1 - Definições e Notações	03
1.2 - Representação de Números Racionais Através de Frações Contínuas Simples e Finita, e Vice-Versa	07
1.3 - Transformação de Uma Fração Contínua Em Fração Con tínua Simples	12
1.4 - Segmentos de Frações Contínuas	13
1.5 - Representação Canônica	15
1.6 - Aproximantes	17
1.7 - Comportamento dos Aproximantes	23
1.8 - Propriedades das Frações Contínuas Infinitas	38
1.9 - Representação e Cálculo de Funções Através de Fra ções Contínuas	45
1.10 - Algumas Aplicações Práticas	49
CAPÍTULO 2 - DIFERENÇAS FINITAS - FRAÇÕES CONTÍNUAS DE THIELE	57
2.1 - Diferenças Divididas - Fórmulas de Interpolação de Newton	57
2.2 - Diferenças Invertidas	58
2.3 - Diferenças Recíprocas	58
2.4 - Representação dos Aproximantes	70
2.5 - Frações Contínuas de Thiele	71

CAPÍTULO 3 - APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES ATRAVÉS DE FRAÇÕES CONTÍNUAS DE THIELE	75
3.1 - Preliminares	
3.2 - Desenvolvimento de Algumas Funções Em Frações Con- tínuas de Thiele	75
3.2.1 - Função SENO	78
3.2.2 - Função COSENO	84
3.2.3 - Função ARCO-TANGENTE	87
3.2.4 - Função TANGENTE-HIPERBÓLICA	91
3.2.5 - Função RAIZ QUADRADA	96
3.2.6 - Função LOGARÍTMO	102
3.2.7 - Função EXPONENCIAL	108
CAPÍTULO 4 - COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES ...	116
BIBLIOGRAFIA	121

INTRODUÇÃO

Dentre as diversas aplicações da teoria de frações contínuas, desde as mais simples às mais elaboradas (simplificação de frações, máximo divisor comum, aproximação de números irracionais, aproximação de frações racionais, raiz positiva de equações do 2º grau, soluções inteiras de equações lineares indeterminadas, soluções inteiras para equações de Pell, teoria dos números, polinômios ortogonais, séries de potências, soma de série divergentes, integrais definidas, integração de equações diferenciais, etc), vamos nos concentrar sobre o problema da aproximação de funções através de frações contínuas, pois sabe-se que um modo muito prático para representar e calcular funções é por meio de frações contínuas.

Hildebrand [12] relata que: "no campo da computação, as frações contínuas são usadas para fornecer aproximação para várias funções complicadas, e uma vez codificadas para computadores eletrônicos digitais, fornecem rápidos resultados numéricos úteis aos cientistas e aqueles que trabalham no campo da matemática aplicada".

Em particular, trabalhamos com frações contínuas de Thiele, com o objetivo de desenvolver subprogramas, codificados em linguagem FORTRAN IV, para calcular algumas funções matemáticas. Enquanto nas bibliotecas dos Sistemas de Programação FORTRAN, são utilizados algoritmos diferentes para o cálculo das funções disponíveis, a nossa intenção foi codificar algumas funções dessas bibliotecas utilizando-se, exclusivamente, da ferramenta de frações contínuas. As funções foram programadas e os resultados encontrados foram comparados com os resultados conhecidos e obtidos através dos Sistemas de Programação FORTRAN, para se avaliar o grau de precisão alcançado. Foram analisados e comparados também o espaço de memória requerido pelas nossas rotinas em relação às rotinas disponíveis.

O conteúdo deste trabalho está dividido conforme segue.

No Capítulo 1, apresentamos generalidades sobre frações contínuas, consideradas necessárias para o entendimento do texto.

No Capítulo 2 tratamos especificamente das frações contínuas de Thiele.

No Capítulo 3 mostramos algumas funções desenvolvidas através de frações contínuas de Thiele e, a partir desses desenvolvimentos são calculados seus valores numéricos para argumentos dados.

No Capítulo 4 fazemos uma análise comparativa dos resultados alcançados e apresentamos nossa conclusão.

CAPÍTULO 1

GENERALIDADES SOBRE FRAÇÕES CONTÍNUAS

Neste capítulo, vamos apresentar certos aspectos da teoria de frações contínuas tais como definições, relações básicas e teoremas fundamentais, exigidos para o desenvolvimento do presente trabalho.

1.1 - Definições e Notações

Uma expressão da forma

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \dots}}} = \left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n}, \dots \right] \quad (1.1.1)$$

é chamada de FRAÇÃO CONTÍNUA.

As seguintes notações abreviadas também são usadas para a fração contínua (1.1.1):

$$a_0 + \frac{b_1}{|a_1|} + \frac{b_2}{|a_2|} + \dots + \frac{b_n}{|a_n|} + \dots \quad \text{Pringsheim}$$

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} + \dots \quad \text{Müller}$$

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} + \dots \quad \text{Rogers}$$

Em geral, os elementos de uma fração contínua a_0 , a_k e b_k ($k = 1, 2, \dots$) são números reais ou complexos, ou funções de uma ou mais variáveis.

As frações $a_0 = \frac{a_0}{1}$, $\frac{b_k}{a_k}$ ($k = 1, 2, \dots$) são chamadas de componentes da fração contínua (1.1.1) e os coeficientes a_k e b_k ($k \geq 1$) são os termos da k -ésima componente, assim denominados:

a_k : denominadores parciais

b_k : numeradores parciais

Ressaltamos que, as frações $\frac{b_k}{a_k}$ são irredutíveis; a_0 pode ser positivo, negativo ou nulo.

O número de componentes de uma fração contínua pode ser finito ou infinito. No primeiro caso, a fração contínua é simbolizada abreviadamente como

$$\left[a_0 ; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n} \right] = \left[a_0, \frac{b_k}{a_k} \right]_1^n$$

e chamada de FRAÇÃO CONTÍNUA FINITA OU LIMITADA; mais precisamente uma fração contínua de ordem n (tal que uma fração

contínua de ordem n tem n + 1 componentes). No segundo caso, a fração contínua é representada por

$$\left[a_0 ; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n}, \dots \right] = \left[a_0 ; \frac{b_k}{a_k} \right]_1^\infty$$

e chamada de FRAÇÃO CONTÍNUA INFINITA OU ILIMITADA.

Uma FRAÇÃO CONTÍNUA PERIÓDICA é uma fração contínua infinita onde

$$\frac{b_\ell}{a_\ell} = \frac{b_{\ell+k}}{a_{\ell+k}}$$

para um valor fixo e positivo k e para todo $\ell \geq L$.

O conjunto de componentes

$$\frac{b_L}{a_L}, \frac{b_{L+1}}{a_{L+1}}, \dots, \frac{b_{L+k-1}}{a_{L+k-1}}$$

é chamado o período e a fração contínua pode ser escrita

$$\left[a_0 ; \frac{b_1}{a_1}, \dots, \frac{b_{L-1}}{a_{L-1}}, \frac{b_L}{a_L}, \frac{b_{L+1}}{a_{L+1}}, \dots, \frac{b_{L+k-1}}{a_{L+k-1}} \right]$$

As frações contínuas periódicas classificam-se em:

- | | | |
|----------------------|---|----------------------|
| periódicas simples | [| a) sem parte inteira |
| |] | b) com parte inteira |
| periódicas compostas | [| a) sem parte inteira |
| |] | b) com parte inteira |

Exemplos

- Fração contínua periódica simples sem parte inteira

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \dots}}}}$$

período: $\frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$

- Fração contínua periódica composta com parte inteira

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \dots}}}}$$

parte inteira: 2
parte não periódica: $\frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$
período: $\frac{1}{3}$

Uma fração contínua da forma

$$\left[a_0; \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots \right] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

onde todos os numeradores parciais são iguais a 1 é chamada FRAÇÃO CONTÍNUA SIMPLES OU PADRÃO.

Finalmente, dizemos que duas frações contínuas são iguais se e somente se seus termos correspondentes são iguais.

1.2 - Representação de Números Racionais Através de Frações Contínuas Simples e Finita, e Vice-Versa

Teorema 1.2.1

Todo número racional pode ser representado por uma fração contínua simples e finita e, esta representação é única.

Prova (conforme [4, pág. 56] e [18, pág. 5])

Consideremos um número racional $\frac{p}{q}$.

Efetuando-se a divisão indicada temos

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q}$$

onde: a_0 é o maior inteiro menor ou igual a $\frac{p}{q}$

r_0 é o resto da divisão.

(Se $\frac{p}{q}$ é uma fração própria então $a_0 = 0$ e $r_0 = p$)

Dividindo-se o numerador e o denominador da fração $\frac{r_0}{q}$ por r_0 , temos

$$\frac{r_0}{q} = \frac{1}{q : r_0} = \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r_0}}$$

onde a_1 é o maior inteiro menor ou igual a $\frac{q}{r_0}$ e r_1 é o resto da divisão.

Analogamente, dividindo-se o numerador e o denominador da fração $\frac{r_1}{r_0}$ por r_1 , obtemos

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{1}{r_0 : r_1} = \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}}$$

onde a_2 é o maior inteiro menor ou igual a $\frac{r_0}{r_1}$ e r_2 é o resto da divisão.

E o processo continua de maneira análoga.

Como $q > r_0 > r_1 > r_2 > r_3 > \dots$ e r_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) são inteiros positivos, finalmente teremos $r_n = 0$ ou

$$\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = \frac{1}{a_n + 0}$$

Substituindo-se as expressões das frações $\frac{r_i}{r_{i-1}}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= a_0 + \frac{r_0}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r_0}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}}} = \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} \end{aligned}$$

Resta-nos ainda, provar que a representação é única.

Suponhamos que

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} \quad \text{e} \quad a'_0 + \frac{1}{a'_1 + \frac{1}{a'_2 + \dots + \frac{1}{a'_n}}}$$

são frações contínuas que representam o número $\frac{p}{q}$.

Então temos

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} = a'_0 + \frac{1}{a'_1 + \frac{1}{a'_2 + \dots + \frac{1}{a'_n}}}$$

Dessa forma, a_0 é o maior inteiro menor que $\frac{p}{q}$ e a'_0 é também o maior inteiro menor que $\frac{p}{q}$, tal que $a_0 = a'_0$. Assim temos $\frac{p}{q} - a_0 = \frac{p}{q} - a'_0$.

Vamos estabelecer que $\frac{p}{q} - a_0 = \frac{p_0}{q_0}$, onde $\frac{p_0}{q_0}$ é menor que 1 pois a_0 é o maior inteiro menor que $\frac{p}{q}$.

$$\frac{p}{q} - a_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} = \frac{1}{a'_1 + \frac{1}{a'_2 + \dots + \frac{1}{a'_n}}}$$

O inverso de um número positivo menor que 1 é um número maior que 1; conseqüentemente $\frac{q_0}{p_0}$ é maior que 1. É também verdade que se dois números não nulos são iguais seus inversos são iguais; assim podemos escrever:

$$\frac{q_0}{p_0} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}} = a'_1 + \frac{1}{a'_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a'_n}}}$$

Novamente, a_1 é o maior inteiro menor que $\frac{q_0}{p_0}$ é a'_1 é também o maior inteiro menor que $\frac{q_0}{p_0}$; portanto $a_1 = a'_1$. O mesmo raciocínio pode ser empregado para mostrar que $a_2 = a'_2$, ..., $a_n = a'_n$.

Assim, as frações contínuas

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}} \quad e \quad a'_0 + \frac{1}{a'_1 + \frac{1}{a'_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a'_n}}}}$$

que representam o número $\frac{p}{q}$ são iguais pela nossa definição de igualdade. Concluimos que todo número racional pode ser representado de uma única maneira em fração contínua simples.

Exemplo: Converter $\frac{128}{37}$ em fração contínua simples.

Solução: Temos, sucessivamente

$$\frac{128}{37} = 3 + \frac{17}{37} = 3 + \frac{1}{\frac{37}{17}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{3}{17}} =$$

$$= 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{17}{3}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{2}{3}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}} =$$

$$= 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

$$\text{Então, } \frac{128}{37} = \left[3; \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2} \right]$$

Reciprocamente, toda fração contínua simples e finita pode ser escrita como um número racional. Para isto, simplesmente executamos todas as operações indicadas pela fração contínua.

Exemplo: Seja a fração contínua

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

Solução: Para calcular o correspondente número racional, começamos pelo fim e trabalhamos em sentido contrário.

Assim,

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}} &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{13}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{13}} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{13}} \\
&= 1 + \frac{13}{30} = \frac{43}{30}
\end{aligned}$$

OBS: As frações contínuas finitas com $b_k \neq 1$ ($k \geq 1$) são transformadas de modo análogo.

1.3 - Transformação de Uma Fração Contínua Em Fração Contínua Simples

Seja a fração contínua (1.1.1)

Multiplicando-se b_k , a_k e b_{k+1} por um número arbitrário p_k ($k = 1, 2, \dots, n, \dots$) diferente de zero, o valor da fração contínua não se altera.

Então, a seguinte identidade é válida:

$$\left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n}, \dots \right] = \left[a; \frac{p_1 b_1}{p_1 a_1}, \frac{p_1 p_2 b_2}{p_2 a_2}, \dots, \dots, \frac{p_{n-1} p_n b_n}{p_n a_n}, \dots \right]$$

Por meio desta transformação, podemos reduzir a fração contínua (1.1.1) a uma forma em que todos os numeradores parciais sejam iguais a 1. Para isto, basta determinarmos p_1, p_2, \dots tal que:

$$p_1 b_2 = 1 \quad \text{e} \quad p_{n-1} p_n b_n = 1 \quad n = 2, 3, \dots$$

Assim,

$$p_1 = \frac{1}{b_1}, \quad p_2 = \frac{b_1}{b_2}, \quad p_3 = \frac{b_2}{b_1 b_3}, \quad \dots$$

$$p_{2k-1} = \frac{b_2 b_4 \dots b_{2k-2}}{b_1 b_3 \dots b_{2k-1}}, \quad p_{2k} = \frac{b_1 b_3 \dots b_{2k-1}}{b_2 b_4 \dots b_{2k}}$$

A expansão (1.1.1) torna-se:

$$\left[\alpha_0 ; \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_{2k-1}}, \frac{1}{\alpha_{2k}}, \dots \right]$$

onde:

$$\alpha_0 = a_0$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{2k-1} &= \frac{b_2 b_4 \dots b_{2k-2} a_{2k-1}}{b_1 b_3 \dots b_{2k-1}} \\ \alpha_{2k} &= \frac{b_1 b_3 \dots b_{2k-1} a_{2k}}{b_2 b_4 \dots b_{2k}} \end{aligned} \right\} (k = 1, 2, \dots)$$

1.4 - Segmentos de Frações Contínuas

Escreveremos, por conveniência, a fração contínua simples finita na forma

$$\left[a_0 ; a_1, a_2, \dots, a_n \right] \quad (1.4.1)$$

e a fração contínua simples infinita na forma

$$\left[a_0 ; a_1, a_2, \dots \right] \quad (1.4.2)$$

Seja a fração contínua

$$s_k = \left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k \right] \quad 0 \leq k \leq n$$

um segmento da fração contínua (1.4.1) e, para $k \geq 0$ arbitrário, s_k será um segmento da fração contínua (1.4.2). Obviamente, qualquer segmento de uma fração contínua finita ou infinita é uma fração contínua finita.

Seja ainda, a fração contínua

$$r_k = \left[a_k; a_{k+1}, \dots, a_n \right]$$

um resto da fração contínua (1.4.1). Analogamente, a fração contínua

$$R_k = \left[a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots \right]$$

é um resto da fração contínua (1.4.2). É óbvio que, os restos de uma fração contínua finita são frações contínuas finitas e os restos de uma fração contínua infinita são frações contínuas infinitas.

Para frações contínuas finitas, segue que:

$$\left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n \right] = \left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, r_k \right] \quad (0 \leq k \leq n) \quad (1.4.3)$$

e, para frações contínuas infinitas,

$$\left[a_0; a_1, a_2, \dots \right] = \left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, R_k \right] \quad (k \geq 0) \quad (1.4.4)$$

que pode ser significativo somente como notação formal uma vez que R_k não tem valor numérico definido por ser uma fração contínua infinita.

1.5 - Representação Canônica

Seja a fração contínua simples finita

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Toda fração contínua finita, sendo o resultado de um número finito de operações sobre seus elementos, é uma função racional destes elementos e, conseqüentemente, pode ser representada como a razão de dois polinômios:

$$\frac{P(a_0, a_1, \dots, a_n)}{Q(a_0, a_1, \dots, a_n)}$$

em a_0, a_1, \dots, a_n . Se os elementos tem valores numéricos, a fração contínua dada é então representada na forma de uma fração ordinária $\frac{p}{q}$. Entretanto, tal representação não é única. É importante então, termos uma representação definitiva de uma fração contínua finita na forma de uma fração - uma representação que chamamos - CANÔNICA. Vamos defini-la por indução.

Para uma fração contínua de ordem zero,

$$[a_0] = a_0;$$

tomaremos como representação canônica a fração $\frac{a_0}{1}$.

Suponhamos agora, que as representações canônicas são definidas para frações contínuas de ordem menor que n . Pela equação (1.4.3), uma fração de ordem n

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = [a_0; r_1] = a_0 + \frac{1}{r_1}$$

Aqui, $r_1 = [a_1; a_2, \dots, a_n]$ é uma fração contínua de ordem $n-1$, cuja representação canônica já está definida. Vamos representá-la como:

$$r_1 = \frac{p'}{q'}$$

e então

$$\left[a_0; a_1, \dots, a_n \right]' = a_0 + \frac{q'}{p'} = \frac{a_0 p' + q'}{p'}$$

Tomemos esta última fração como sendo a representação canônica da fração contínua $\left[a_0; a_1, \dots, a_n \right]$.

Então, estabelecendo

$$\left[a_0; a_1, \dots, a_n \right] = \frac{p}{q}$$

$$r_1 = \left[a_1; a_2, \dots, a_n \right] = \frac{p'}{q'}$$

temos as seguintes expressões para os numeradores e denominadores destas representações canônicas:

$$p = a_0 p' + q' \quad \text{e} \quad q = p'$$

Assim, definimos de forma única, as representações canônicas de frações contínuas de todas as ordens.

Para uma fração contínua finita ou infinita

$$\alpha = \left[a_0; a_1, a_2, \dots \right],$$

denotamos por $\frac{P_k}{Q_k}$ a representação canônica do segmento

$$s_k = \left[a_0; a_1, \dots, a_k \right]$$

e chamamos de k -ésimo aproximante de α . É óbvio que uma fração contínua finita tem um número finito de aproximantes, enquanto uma fração contínua infinita tem um número infinito deles.

A teoria sobre os aproximantes de uma fração contínua, é vista a seguir.

1.6 - Aproximantes

O primeiro matemático que investigou métodos para calcular os aproximantes de uma fração contínua foi Daniel Schwenter, em 1625. Em 1650, John Wallis descobriu que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}$$

e Lord Brounker reescreveu esta expressão através da seguinte fração contínua:

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}}$$

Consideremos uma fração contínua finita (ou in finita):

$$\left[a_0; \frac{b_k}{a_k} \right]_1^n \quad (1.6.1)$$

As fração contínuas $a_0, a_0 + \frac{b_1}{a_1}, a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2}}$,

etc, são denominadas aproximantes, reduzidas ou convergentes da fração contínua (1.6.1)

Dessa forma,

$$\frac{P_k}{Q_k} = \left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_k}{a_k} \right] \quad (k = 1, 2, \dots)$$

onde $k \leq n$, é chamada de k -ésimo aproximante da fração contínua (1.6.1).

Da definição de uma fração contínua temos:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{b_1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + b_1}{a_1}$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2}} = a_0 + \frac{b_1 a_2}{a_1 a_2 + b_2} =$$

$$= \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 b_2 + b_1 a_2}{a_1 a_2 + b_2} = \frac{a_2 P_1 + b_2 P_0}{a_2 Q_1 + b_2 Q_0}$$

Assumimos que

$$\begin{cases} P_k = a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2} \\ Q_k = a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2} \end{cases} \quad (1.6.2)$$

Então

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2}}{a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2}}$$

Para que as relações (1.6.2) sejam válidas para $k = 1$, estabelecemos, seguindo Euler

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}, \quad \frac{P_{-1}}{Q_{-1}} = \frac{1}{0} \quad (1.6.3)$$

e por definição, assumimos que

$$P_0 = a_0 Q_0 = 1 \quad \text{e} \quad P_{-1} = 1, \quad Q_{-1} = 0.$$

Teorema 1.6.1 (LEI DE FORMAÇÃO DOS APROXIMANTES)

Os números P_k e Q_k ($k = 1, 2, \dots$) determinados pelas relações (1.6.2) onde

$$P_{-1} = 1, \quad Q_{-1} = 0, \quad P_0 = a_0, \quad Q_0 = 1$$

são respectivamente, os numeradores e denominadores dos aproximantes P_k/Q_k da fração contínua (1.6.1).

Prova (extraída de [9, pág. 188])

Seja C_k ($k = 1, 2, \dots$) os aproximantes da fração contínua (1.6.1). Desejamos provar que

$$C_k = \frac{P_k}{Q_k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Vamos desenvolver a demonstração pelo processo de indução matemática.

Quando $k = 1$ temos para o aproximante C_1 :

$$C_1 = a_0 + \frac{b_1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + b_1}{a_1}$$

Por outro lado, obtemos das relações (1.6.2), levando-se em conta as relações (1.6.3),

$$P_1 = a_1 a_0 + b_1 \cdot 1 = a_0 a_1 + b_1$$

$$Q_1 = a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 = a_1$$

Portanto, $C_1 = \frac{P_1}{Q_1}$ e para $k = 1$ o teorema é válido.

Admitamos que o teorema seja válido para todos os números naturais que não excedam k . Vamos mostrar que o teorema também é válido para o número natural $k + 1$. As relações (1.6.2) fornecem

$$P_{k+1} = a_{k+1} P_k + b_{k+1} P_{k-1}$$

$$Q_{k+1} = a_{k+1} Q_k + b_{k+1} Q_{k-1}$$

Pela hipótese da indução temos

$$C_k = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2}}{a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2}}$$

Pela lei de formação da fração contínua (1.6.1), o aproximante C_{k+1} é obtido do aproximante C_k , substituindo-se o termo a_k pela soma $a_k + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= \frac{\left(a_k + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} \right) P_{k-1} + b_k P_{k-2}}{\left(a_k + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} \right) Q_{k-1} + b_k Q_{k-2}} \\ &= \frac{a_{k+1} (a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2}) + b_{k+1} P_{k-1}}{a_{k+1} (a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2}) + b_{k+1} Q_{k-1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{a_{k+1} P_k + b_{k+1} P_{k-1}}{a_{k+1} Q_k + b_{k+1} Q_{k-1}} = \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$$

e a prova do teorema se completa.

Corolário 1.6.1.a

Para uma fração contínua simples

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

os numeradores e denominadores de seus aproximantes P_k/Q_k ($k = 1, 2, \dots$) podem ser determinados pelas relações:

$$P_k = a_k P_{k-1} + P_{k-2}$$

$$Q_k = a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}$$

onde fazemos $P_{-1} = 1, Q_{-1} = 0, P_0 = a_0$ e $Q_0 = 1$.

Para a determinação dos termos de aproximantes sucessivos, podemos usar o seguinte esquema prático:

K	-1	0	1	2	3	...
b_k		1	b_1	b_2	b_3	...
a_k		a_0	a_1	a_2	a_3	...
P_k	1	a_0	P_1	P_2	P_3	...
Q_k	0	1	Q_1	Q_2	Q_3	...

A primeira linha é constituída pelos numeradores parciais b_k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Assumimos $b_0 = 1$.

A segunda linha contém os valores dos denominadores parciais a_k ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Na terceira linha estão os valores obtidos para P_k , levando-se em conta que $P_{-1} = 1$ e $P_0 = a_0$. Para $k \geq 1$, P_k é obtido somando-se o produto de a_k por P_{k-1} com o produto de b_k por P_{k-2} .

Na quarta linha estão os valores encontrados para Q_k , considerando-se $Q_{-1} = 0$ e $Q_0 = 1$. Para $k \geq 1$, Q_k é obtido somando-se o produto de a_k por Q_{k-1} com o produto de b_k por Q_{k-2} .

Exemplo: Determinar todos os aproximantes da fração contínua

$$\left[0; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \right] = 0 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6}}}}$$

Solução: Usando o esquema prático, obtemos

K	-1	0	1	2	3	4
b_k		1	1	1	1	1
a_k		0	3	3	3	6
P_k	1	0	1	3	10	63
Q_k	0	1	3	10	33	209

Então, os aproximantes são:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{P_0}{Q_0} = \frac{0}{1} & C_2 &= \frac{P_2}{Q_2} = \frac{3}{10} & C_4 &= \frac{P_4}{Q_4} = \frac{63}{209} \\ C_1 &= \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{3} & C_3 &= \frac{P_3}{Q_3} = \frac{10}{33} \end{aligned}$$

1.7 - Comportamento dos Aproximantes

A seguir são apresentados e demonstrados teoremas que mostram o comportamento dos aproximantes da fração contínua (1.6.1).

Teorema 1.7.1 (DIFERENÇA ENTRE DOIS APROXIMANTES CONSECUTIVOS)

Para dois aproximantes consecutivos $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ e $\frac{P_k}{Q_k}$ ($k > 1$) da fração contínua (1.6.1), a relação

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = (-1)^{k-1} \frac{b_1 b_2 \dots b_k}{Q_{k-1} Q_k} \quad (1.7.1)$$

é satisfeita.

OBS: Este resultado serve para ser empregado como controle para cálculo.

Prova (encontrada em [4, pág. 62])

Temos que

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{\Delta_k}{Q_{k-1} Q_k}$$

onde

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{vmatrix}$$

Usando as relações (1.6.2) e aplicando as propriedades de determinantes, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \begin{vmatrix} a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2} & P_{k-1} \\ a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2} & Q_{k-1} \end{vmatrix} = \\ &= b_k \begin{vmatrix} P_{k-2} & P_{k-1} \\ Q_{k-2} & Q_{k-1} \end{vmatrix} = -b_k \Delta_{k-1} \end{aligned}$$

E assim, aplicando o mesmo processo sucessivamente obtemos

$$\Delta_k = (-b_k) (-b_{k-1}) \dots (-b_1) \Delta_0 = (-1)^k b_1 b_2 \dots b_k \Delta_0$$

onde

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} P_0 & P_{-1} \\ Q_0 & Q_{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Então

$$\Delta_k = (-1)^{k-1} b_1 \dots b_k$$

e, conseqüentemente concluímos que

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = (-1)^{k-1} \frac{b_1 b_2 \dots b_k}{Q_{k-1} Q_k}$$

Corolário 1.7.1.a

Se $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ e $\frac{P_k}{Q_k}$ ($k \geq 1$) são dois aproximantes consecutivos da fração contínua (1.6.1), então

$$\Delta_k = P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1} b_1 \dots b_k$$

Corolário 1.7.1.b

Para dois aproximantes consecutivos $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ e $\frac{P_k}{Q_k}$ ($k \geq 1$) da fração contínua simples, a relação

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{Q_{k-1} Q_k}$$

é satisfeita.

Teorema 1.7.2

Para dois aproximantes consecutivos de igual paridade $\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}$ e $\frac{P_k}{Q_k}$ ($k \geq 2$) da fração contínua (1.6.1), a relação

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = (-1)^k \frac{b_1 b_2 \dots b_{k-1} a_k}{Q_{k-2} Q_k} \quad (1.7.2)$$

é satisfeita.

Prova (extraída de [4, pág. 63])

Temos que

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = \frac{D_k}{Q_{k-2} Q_k}$$

onde

$$D_k = \begin{vmatrix} P_k & P_{k-2} \\ Q_k & Q_{k-2} \end{vmatrix}$$

Usando as relações (1.6.2) e propriedades de de terminantes, obtemos

$$\begin{aligned} D_k &= \begin{vmatrix} a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2} & P_{k-2} \\ a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2} & Q_{k-2} \end{vmatrix} = \\ &= a_k \begin{vmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} \\ Q_{k-1} & Q_{k-2} \end{vmatrix} = a_k \Delta_{k-1} \end{aligned}$$

onde Δ_k é o determinante considerado no teorema 1.7.1.

Pelo corolário 1.7.1.a, temos

$$\Delta_{k-1} = (-1)^k b_1 b_2 \dots b_{k-1}$$

e, portanto

$$D_k = (-1)^k b_1 b_2 \dots b_{k-1} a_k$$

Consequentemente

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = (-1)^k \frac{b_1 b_2 \dots b_{k-1} a_k}{Q_{k-2} Q_k}$$

Corolário 1.7.2.a

Se $\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}$ e $\frac{P_k}{Q_k}$ são dois aproximantes consecutivos de igual paridade da fração contínua simples

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

então temos a relação

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = (-1)^k \frac{a_k}{Q_{k-2} Q_k}$$

Teorema 1.7.3

Os aproximantes $\frac{P_k}{Q_k}$ ($k \geq 1$) da fração contínua (1.6.1) são frações irredutíveis.

Prova por Absurdo (conforme [17, pág. 14])

Foi visto que:

$$P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1} b_1 \dots b_k \quad (1.7.3)$$

Vamos agora mostrar que P_k e Q_k são primos entre si. Suponhamos que existe um inteiro N ($N \neq 1$) que divide P_k e Q_k . Então podemos escrever

$$\frac{P_k}{N} = X_1 \quad \text{e} \quad \frac{Q_k}{N} = X_2$$

onde X_1 e X_2 são inteiros.

Assim sendo,

$$P_k = N X_1 \quad \text{e} \quad Q_k = N X_2$$

e substituindo-se estas expressões em (1.7.3) obtemos:

$$(N X_1) Q_{k-1} - P_{k-1} (N X_2) = (-1)^{k-1} b_1 \dots b_k \quad (1.7.4)$$

ou

$$N(X_1 Q_{k-1} - X_2 P_{k-1}) = (-1)^{k-1} b_1 \dots b_k \quad (1.7.5)$$

Nota-se que:

se k é par então $(-1)^{k-1} = -1$ e

se k é ímpar então $(-1)^{k-1} = +1$

A equação (1.7.5) afirma que existe um inteiro $N \neq 1$ que é divisor de $+1$ ou -1 . Mas tal inteiro não existe. Portanto nossa suposição levou-nos a uma falsa conclusão.

Com o intuito de uma abordagem mais profunda sobre os aproximantes da fração contínua (1.6.1), vamos agora relacionar seus aproximantes de ordem par.

Substituindo-se k por $2n$ na equação (1.7.2) obtemos:

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} - \frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}} = \frac{b_1 b_2 \dots b_{2n-1} a_{2n}}{Q_{2n-2} Q_{2n}}$$

Em particular,

$$\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_0}{Q_0} = \frac{b_1 a_2}{Q_0 Q_2}$$

$$\frac{P_4}{Q_4} - \frac{P_2}{Q_2} = \frac{b_1 b_2 b_3 a_4}{Q_2 Q_4}$$

.....

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} - \frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}} = \frac{b_1 b_2 \dots b_{2n-1} a_{2n}}{Q_{2n-2} Q_{2n}}$$

Adicionando-se estas equações e lembrando que

$$\frac{P_0}{Q_0} = a_0, \quad \text{temos}$$

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = a_0 + \frac{b_1 a_2}{Q_0 Q_2} + \frac{b_1 b_2 b_3 a_4}{Q_2 Q_4} + \dots + \frac{b_1 b_2 \dots b_{2n-1} a_{2n}}{Q_{2n-2} Q_{2n}} \quad (1.7.6)$$

De maneira análoga, relacionamos os aproximantes de ordem ímpar.

Substituindo-se k por $2n+1$ na equação (1.7.2), obtemos:

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} = - \frac{b_1 b_2 \dots b_{2n} a_{2n+1}}{Q_{2n-1} Q_{2n+1}}$$

Em particular,

$$\frac{P_3}{Q_3} - \frac{P_1}{Q_1} = - \frac{b_1 b_2 a_3}{Q_1 Q_3}$$

$$\frac{P_5}{Q_5} - \frac{P_3}{Q_3} = - \frac{b_1 b_2 b_3 b_4 a_5}{Q_3 Q_5}$$

.....

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} = - \frac{b_1 b_2 \dots b_{2n} a_{2n+1}}{Q_{2n-1} Q_{2n+1}}$$

Adicionando-se estas equações e lembrando que

$$\frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{b_1}{a_1}, \text{ temos}$$

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = a_0 + \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_1 b_2 a_3}{Q_1 Q_3} - \frac{b_1 b_2 b_3 b_4 a_5}{Q_3 Q_5} - \dots$$

$$- \frac{b_1 b_2 \dots b_{2n} a_{2n+1}}{Q_{2n-1} Q_{2n+1}} \quad (1.7.7)$$

Suponhamos então que, todos os coeficientes a_k e b_k da fração contínua (1.6.1) são positivos. Neste caso, os denominadores de seus aproximantes são positivos. Assim, de (1.7.6) segue que os aproximantes de ordem par geram uma sequência monotonicamente crescente. Mas de (1.6.1) é óbvio que todos os aproximantes de ordem par são menores que $a_0 + \frac{b_1}{a_1}$. Consequentemente, quando todos os coeficientes são positivos, os aproximantes de ordem par geram uma sequência monotonicamente crescente, com limite superior $a_0 + \frac{b_1}{a_1}$. Tal sequência tem limite.

Dessa forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \text{ existe.}$$

Além disso, segue de (1.7.7) que, quando os coeficientes são positivos, os aproximantes de ordem ímpar geram uma sequência monotonicamente decrescente. Mas de (1.6.1) é óbvio que todos os aproximantes de ordem ímpar são maiores

que a_0 . Consequentemente, quando todos os coeficientes são positivos, os aproximantes de ordem ímpar geram uma sequência monotonicamente decrescente com limite inferior a_0 . Tal sequência tem limite. Dessa forma

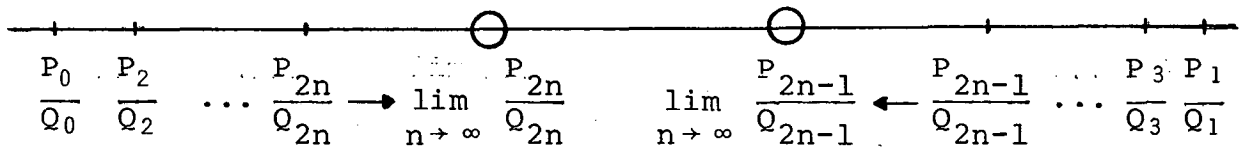
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} \text{ existe.}$$

Então, para todo natural n , as desigualdades

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} < \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}$$

são satisfeitas.

No caso geral, temos a seguinte situação



Baseados nestas considerações, temos:

Teorema 1.7.4

Seja a fração contínua finita

$$\alpha = \left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n} \right] \quad (1.7.8)$$

com elementos positivos a_k e b_k .

Então:

- Os aproximantes de ordem par formam uma sequência crescente de números (todos menores que α) e os aproximantes de ordem ímpar formam uma sequência decrescente de números (todos maiores que α); exceto o último aproximante, cujo valor coincide com α , quer ele seja de ordem par ou ímpar.
- Os aproximantes de ordem par são menores que os aproximantes de ordem ímpar.
- O número α está entre dois aproximantes consecutivivos.

Prova (extraída de [4, pág. 64])

Sejam $\frac{P_k}{Q_k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) os aproximantes da fração contínua e obviamente $P_k > 0$ e $Q_k > 0$.

Consideremos dois casos:

- a) Seja $k = 2m$ um número par. De (1.7.2) e considerando $a_k > 0$ e $b_i > 0$ ($i = 1, \dots, k-1$), temos:

$$\frac{P_{2m}}{Q_{2m}} - \frac{P_{2m-2}}{Q_{2m-2}} > 0$$

Consequentemente

$$\frac{P_{2m-2}}{Q_{2m-2}} < \frac{P_{2m}}{Q_{2m}} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

ou

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \dots$$

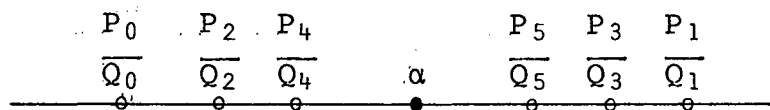
b) Seja $k = 2m+1$ um número ímpar. Então $k-1$ é par e, da mesma relação (1.7.2), temos:

$$\frac{P_{2m-1}}{Q_{2m-1}} > \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$$

ou

$$\frac{P_1}{Q_1} > \frac{P_3}{Q_3} > \frac{P_5}{Q_5} > \dots$$

Provamos então que os aproximantes de ordem par formam uma seqüência monotonicamente crescente e os aproximantes de ordem ímpar formam uma seqüência monotonicamente de crescente.



Além disso, se em (1.7.1) estabelecemos $k = 2m$ (par), obtemos

$$\frac{P_{2m-1}}{Q_{2m-1}} > \frac{P_{2m}}{Q_{2m}}$$

o que significa que todo aproximante de ordem ímpar é maior que o aproximante adjacente de ordem par. Disto concluímos que, qualquer aproximante de ordem ímpar é maior que qualquer aproximante de ordem par. De fato, seja $\frac{P_{2s-1}}{Q_{2s-1}}$ um aproximante de ordem ímpar.

Seja $s \leq m$, então

$$\frac{P_{2s-1}}{Q_{2s-1}} > \frac{P_{2m-1}}{Q_{2m-1}} > \frac{P_{2m}}{Q_{2m}}$$

Mas se $s > m$, então

$$\frac{P_{2s-1}}{Q_{2s-1}} > \frac{P_{2s}}{Q_{2s}} > \frac{P_{2m}}{Q_{2m}}$$

E assim, para quaisquer s e m temos

$$\frac{P_{2s-1}}{Q_{2s-1}} > \frac{P_{2m}}{Q_{2m}}$$

Finalmente, pela lei de formação de uma fração contínua

$$\alpha = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \dots}}$$

temos as relações óbvias:

$$\alpha > \frac{P_0}{Q_0}, \alpha < \frac{P_1}{Q_1}, \alpha > \frac{P_2}{Q_2}, \dots$$

o que equivale a dizer que os aproximantes são alternadamente menores e maiores que a fração contínua correspondente.

Dessa forma

$$\frac{P_k}{Q_k} < \alpha < \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \quad \text{se } k \text{ é par}$$

e

$$\frac{P_k}{Q_k} > \alpha > \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \quad \text{se } k \text{ é ímpar}$$

Para o último aproximante, claramente ocorrerá uma igualdade à direita, ao invés das desigualdades estritas.

Corolário 1.7.4.a

Se os elementos da fração contínua (1.7.8) são positivos e se $\frac{P_k}{Q_k}$ são seus aproximantes, então a seguinte estimativa é válida:

$$\left| \alpha - \frac{P_k}{Q_k} \right| \leq \frac{b_1 b_2 \dots b_{k+1}}{Q_k Q_{k+1}}$$

e pelo que já foi provado

$$\left| \alpha - \frac{P_k}{Q_k} \right| \leq \left| \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} \right|$$

Corolário 1.7.4.b

Se a fração contínua (1.7.8) com elementos positivos é simples e se $\frac{P_k}{Q_k}$ são seus aproximantes, então

$$\left| \alpha - \frac{P_k}{Q_k} \right| \leq \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} < \frac{1}{Q_k^2} \quad (Q_{k+1} > Q_k)$$

isto é, a diferença $\alpha - \frac{P_k}{Q_k}$ decresce em valor absoluto quando k aumenta.

OBS: Os corolários acima especificam a COTA DO ERRO de um aproximante.

Teorema 1.7.5 (DA APROXIMAÇÃO)

Cada aproximante está mais próximo do valor da fração contínua do que o aproximante precedente.

Prova (extraída de [1, pág. I-7]):

$$\text{Seja } \alpha = \left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n}, \dots \right] \text{ e ,}$$

por simplicidade, consideremos $b_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots$)

Tomemos os aproximantes de α ;

$$\frac{P_k}{Q_k}, \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \text{ e } \frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}$$

O valor da fração contínua não é $\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}$ mas difere dela em tomar no lugar de a_{k+2} a expressão E dada por

$$E = a_{k+2} + \frac{1}{a_{k+3} + \frac{1}{a_{k+4} + \dots}}$$

Pela lei de formação dos aproximantes, podemos escrever

$$\alpha = \frac{EP_{k+1} + P_k}{EQ_{k+1} + Q_k}$$

Calculemos então, a diferença em valor absoluto entre o aproximante $\frac{P_k}{Q_k}$ e α :

$$\left| \alpha - \frac{P_k}{Q_k} \right| = \left| \frac{EP_{k+1} + P_k}{EQ_{k+1} + Q_k} - \frac{P_k}{Q_k} \right| = \left| \frac{E(P_{k+1}Q_k - P_kQ_{k+1})}{Q_k(EQ_{k+1} + Q_k)} \right|$$

Mas, aplicando-se o corolário (1.7.1.a) podemos ainda escrever

$$\left| \alpha - \frac{P_k}{Q_k} \right| = \left| \frac{E(-1)^k}{Q_k(EQ_{k+1} + Q_k)} \right| = \frac{E}{Q_k(EQ_{k+1} + Q_k)} \quad (1.7.9)$$

Calculemos agora a diferença em valor absoluto entre o aproximante $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ e α :

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \right| &= \left| \frac{EP_{k+1} + P_k}{EQ_{k+1} + Q_k} - \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \right| = \left| \frac{-(P_{k+1}Q_k - P_kQ_{k+1})}{Q_{k+1}(EQ_{k+1} + Q_k)} \right| \\ &= \left| \frac{-(-1)^k}{Q_{k+1}(EQ_{k+1} + Q_k)} \right| = \frac{1}{Q_{k+1}(EQ_{k+1} + Q_k)} \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

Comparando (1.7.9) e (1.7.10) e lembrando que $k > 1$ e $Q_{k+1} > Q_k$ temos:

$$\left| \alpha - \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \right| < \left| \alpha - \frac{P_k}{Q_k} \right|$$

e portanto qualquer aproximante está mais próximo da fração contínua que o aproximante anterior.

1.8 - Propriedades das Frações Contínuas Infinitas

Seja a fração contínua infinita

$$\left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots \right] = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \dots}} \quad (1.8.1)$$

a qual corresponde uma sequência infinita de aproximantes:

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \dots, \frac{P_k}{Q_k}, \dots \quad (1.8.2)$$

que são frações contínuas finitas.

Vamos considerar o aproximante

$$\frac{P_n}{Q_n} = \left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n} \right] \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Definição 1.8.1

Uma fração contínua infinita é chamada convergente se existir o limite finito.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \alpha$$

onde o número α é considerado como o valor da fração contínua (1.8.1). Caso contrário, a fração contínua é chamada divergente e nenhum valor é assinalado a ela.

Em particular, com os coeficientes a_k e b_k positivos, o valor $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$ é maior que qualquer dos aproximantes de ordem par e menor que qualquer dos aproximantes de ordem ímpar.

Segundo Cauchy, para a convergência de uma sequência $\frac{P_n}{Q_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) é necessário e suficiente que para todo $\epsilon > 0$ exista um número $N = N(\epsilon)$ tal que

$$\left| \frac{P_{n+m}}{Q_{n+m}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \epsilon$$

para $n > N$ e $m > 0$.

Se $Q_k \neq 0$ então

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_0}{Q_0} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right)$$

Disto segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} &= \frac{P_0}{Q_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right) = \frac{P_0}{Q_0} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{b_1 \dots b_k}{Q_{k-1} Q_k} \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

Então, a convergência da fração contínua (1.8.1) é equivalente à convergência da série (1.8.3).

Em muitas de suas propriedades, as frações contínuas infinitas convergentes são análogas às frações contínuas finitas. A propriedade básica que torna possível esta analogia é expressa pelo seguinte teorema:

Teorema 1.8.1

Se a fração contínua infinita converge, também convergem todos os seus restos; reciprocamente, se pelo menos um dos restos da fração contínua infinita converge, então a fração contínua converge.

Prova (baseada em [14, pág. 8])

Sejam $\frac{P_k}{Q_k}$ os aproximantes da fração contínua (1.8.1) e $\frac{P'_k}{Q'_k}$ os aproximantes de um dos seus restos, por exemplo, de r_n .

Temos que, para $1 \leq k \leq n$:

$$\left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n} \right] = \frac{P_{k-1} r_k + b_k P_{k-2}}{Q_{k-1} r_k + b_k Q_{k-2}}$$

Então,

$$\frac{P_{n+k}}{Q_{n+k}} = \left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \dots, \frac{b_{n+k}}{a_{n+k}} \right] = \frac{P_{n-1} \frac{P'_k}{Q'_k} + b_n P_{n-2}}{Q_{n-1} \frac{P'_k}{Q'_k} + b_n Q_{n-2}} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (1.8.4)$$

Segue imediatamente que, se o resto r_n converge, isto é, se quando $k \rightarrow \infty$ a fração $\frac{P'_k}{Q'_k}$ tende a um limite que também denotaremos por r_n , então a fração $\frac{P_{n+k}}{Q_{n+k}}$ convergirá a um limite α igual a

$$\alpha = \frac{P_{n-1} r_n + b_n P_{n-2}}{Q_{n-1} r_n + b_n Q_{n-2}}$$

Resolvendo (1.8.4) para $\frac{P'_k}{Q'_k}$ estabelecemos a validade da recíproca.

Teorema 1.8.2

Se todos os elementos a_k, b_k ($k = 0, 1, \dots$) da fração contínua infinita são positivos e

$$b_k \leq a_k \quad \text{e} \quad a_k \geq d > 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.8.5)$$

então a fração contínua infinita é convergente.

Prova (extraída de [4, pág. 67])

Como vimos na secção 1.7, se os coeficientes a_k e b_k da fração contínua 1.8.1 são positivos, então seus aproximantes de ordem par $\frac{P_{2k}}{Q_{2k}}$ ($k = 0, 1, \dots$) formam uma sequência monotonicamente crescente, com limite superior $\frac{P_1}{Q_1}$. Dessa forma, concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \alpha \quad \text{existe.}$$

Similarmente, os aproximantes de ordem ímpar $\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}$ ($k = 0, 1, \dots$) formam uma seqüência monotonicamente de crescente, com limite inferior $\frac{P_0}{Q_0}$. Então o

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} = \beta \quad \text{existe}$$

e $\beta \geq \alpha$.

Além disso, para $k \geq 0$, temos:

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \alpha \leq \beta < \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}$$

e pelo teorema 1.7.1, obtemos

$$0 < \beta - \alpha < \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} - \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \frac{b_1 b_2 \dots b_{2k+1}}{Q_{2k} Q_{2k+1}} = \eta_k \quad (1.8.6)$$

Vamos mostrar que $\eta_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

Baseados na lei de formação dos aproximantes , temos, para $k \geq 2$:

$$Q_k = a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2}$$

e

$$Q_{k-1} = a_{k-1} Q_{k-2} + b_{k-1} Q_{k-3}$$

e, considerando (1.8.5) concluímos

$$Q_k \geq b_k (Q_{k-1} + Q_{k-2})$$

e

$$Q_{k-1} \geq b_{k-1} Q_{k-2}$$

Assim,

$$Q_k \geq b_k (1 + d) Q_{k-2} \quad (1.8.7)$$

Da desigualdade (1.8.7) obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned} Q_{2k} &\geq b_{2k} (1 + d) Q_{2k-2} \geq \dots \geq b_{2k} b_{2k-2} \dots b_2 (1 + d)^k Q_0 = \\ &= b_2 b_4 \dots b_{2k} (1 + d)^k \end{aligned} \quad (1.8.8)$$

e

$$\begin{aligned} Q_{2k+1} &\geq b_{2k+1} (1 + d) Q_{2k-1} \geq \dots \geq b_{2k+1} \dots b_3 (1 + d)^k Q_1 \\ &\geq b_1 b_3 \dots b_{2k+1} (1 + d)^k \end{aligned} \quad (1.8.9)$$

considerando que $Q_1 = a_1 \geq b_1$.

Multiplicando as desigualdades (1.8.8) e (1.8.9), obtemos:

$$Q_{2k} Q_{2k+1} \geq b_1 b_2 \dots b_{2k+1} (1 + d)^{2k}$$

e conseqüentemente

$$\eta_k = \frac{b_1 b_2 \dots b_{2k+1}}{Q_{2k} Q_{2k+1}} \leq \frac{1}{(1 + d)^{2k}}$$

Então, $\eta_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

E ainda, passando ao limite quando $k \rightarrow \infty$, em (1.8.6), temos

$$0 \leq \beta - \alpha \leq 0, \text{ ou}$$

$$\alpha = \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$$

e a fração contínua (1.8.1) converge.

Corolário 1.8.2.a

Uma fração contínua simples infinita com elementos naturais é sempre convergente.

Teorema 1.8.3

Todo número irracional pode ser representado por uma fração contínua simples infinita e, esta representação é única.

É óbvio, que o valor de uma fração contínua simples infinita é necessariamente um número irracional pois o processo terminaria se a fração contínua representasse um número racional.

Exemplo: Expandir o número $\sqrt{41}$ em fração contínua

Solução: Como o maior inteiro contido em $\sqrt{41}$ é 6, temos:

$$\sqrt{41} = 6 + \frac{1}{a_1} \quad (1.8.10)$$

onde

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{41} - 6} = \frac{6 + \sqrt{41}}{5}$$

O maior inteiro contido em a_1 é 2, e portanto

$$a_1 = 2 + \frac{1}{a_2}$$

onde

$$a_2 = \frac{1}{a_1 - 2} = \frac{5}{\sqrt{41} - 4} = \frac{4 + \sqrt{41}}{5} = 2 + \frac{1}{a_3}$$

Analogamente,

$$a_3 = \frac{1}{a_2 - 2} = \frac{5}{\sqrt{41} - 6} = 6 + \sqrt{41} = 12 + \frac{1}{a_4}$$

$$a_4 = \frac{1}{a_3 - 12} = \frac{1}{\sqrt{41} - 6} = \frac{6 + \sqrt{41}}{5} = 2 + \frac{1}{a_5}$$

Notamos que $a_4 = a_1$ e a fração contínua será pe ríodica. Substituindo-se sucessivamente as expressões acima em (1.8.10), temos

$$\begin{aligned} \sqrt{41} &= 6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}} \end{aligned}$$

Então, o número irracional $\sqrt{41}$ é representado pela seguinte fração contínua infinita e periódica:

$$\sqrt{41} = \left[6; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \dots \right]$$

1.9 - Representação e Cálculo de Funções Através de Frações Contínuas

Um modo prático para representar e calcular fun ções é através de frações contínuas. Vamos apresentar alguns exemplos numéricos ilustrativos.

a) Expansão de uma função racional

Dada a função

$$f(x) = \frac{C_{10} + C_{11}x + C_{12}x^2 + \dots}{C_{00} + C_{01}x + C_{02}x^2 + \dots}$$

podemos escrever, após algumas manipulações elementares

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\frac{C_{00}}{C_{10}} + \frac{C_{00} + C_{01}x + C_{02}x^2 + \dots}{C_{10} + C_{11}x + C_{12}x^2 + \dots} - \frac{C_{00}}{C_{10}}} = \\ &= \frac{C_{10}}{C_{00} + x f_1(x)} \end{aligned}$$

onde

$$f_1(x) = \frac{C_{20} + C_{21}x + C_{22}x^2 + \dots}{C_{10} + C_{11}x + C_{12}x^2 + \dots}$$

e

$$C_{2k} = C_{10} C_{0,k+1} - C_{00} C_{1,k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Analogamente,

$$f_1(x) = \frac{C_{20} + \dots}{C_{10} + x f_2(x)}$$

onde

$$f_2(x) = \frac{C_{30} + C_{31}x + C_{32}x^2 + \dots}{C_{20} + C_{21}x + C_{22}x^2 + \dots}$$

e

$$C_{3k} = C_{20} C_{1,k+1} - C_{10} C_{2,k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

e assim sucessivamente.

Então

$$f(x) = \frac{C_{10}}{C_{00} + \frac{C_{20}x}{C_{10} + \frac{C_{30}x}{C_{20} + \dots}}}$$

$$= \left[0 ; \frac{C_{10}}{C_{00}} , \frac{C_{20}x}{C_{10}} , \frac{C_{30}x}{C_{20}} , \dots , \frac{C_{no}x}{C_{n-1,0}} \right]$$

Os coeficientes C_{jk} das expansões são convenientemente calculados, sucessivamente, pela expressão

$$C_{jk} = - \begin{vmatrix} C_{j-2,0} & C_{j-2,k+1} \\ C_{j-1,0} & C_{j-1,k+1} \end{vmatrix} \quad \text{onde } j \geq 2.$$

Exemplo: Expandir a seguinte função em fração contínua:

$$f(x) = \frac{1-x}{1-5x+6x^2}$$

Solução: Escrevemos no esquema abaixo os coeficientes C_{jk} calculados.

J \ K	0	1	2
0	1	-5	6
1	1	-1	0
2	-4	6	0
3	-2	0	0
4	-12	0	0

Então

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{1-5x+6x^2} &= \left[0; \frac{1}{1}, \frac{-4x}{1}, \frac{-2x}{-4}, \frac{-12x}{-2} \right] \\ &= \frac{1}{1 - \frac{4x}{1 - \frac{2x}{-4 - \frac{12x}{-2}}}} \end{aligned}$$

b) Expansão da função e^x

Euler obteve para e^x , conforme [4, pág. 74], a seguinte expansão:

$$e^x = \left[0; \frac{1}{1}, \frac{-2x}{2+x}, \frac{x^2}{6}, \frac{x^2}{10}, \dots, \frac{x^2}{4n+2}, \dots \right]$$

Tem-se também, de [11, pág. 179], que

$$e^x = \left[0; \frac{1}{1}, \frac{-x}{1}, \frac{x}{2}, \frac{-x}{3}, \frac{x}{2}, \frac{-x}{5}, \frac{x}{2}, \dots \right]$$

c) Expansão da função tangente

Para $\tan x$, segundo [11, pág. 179 e 180], tem-se que:

$$\tan x = \left[0; \frac{x}{1}, \frac{-x^2}{3}, \frac{-x^2}{5}, \dots, \frac{-x^2}{2n+1}, \dots \right]$$

e

$$\tan x = \left[0; \frac{1}{x}, \frac{-3}{x}, \frac{-5}{x}, \frac{-7}{x}, \dots \right]$$

d) Expansão da função arco-tangente

De [11, pág. 184] tem-se que:

$$\arctan x = \left[0; \frac{x}{1}, \frac{1x^2}{3}, \frac{4x^2}{5}, \frac{9x^2}{7}, \frac{16x^2}{9}, \dots \right]$$

para $|x| < 1$

e) Expansão da função tangente-hiperbólica

A seguinte expansão da função tangente hiperbólica encontramos em [11, pág. 180]:

$$\tanh x = \left[0; \frac{x}{1}, \frac{x^2}{3}, \frac{x^2}{5}, \dots \right]$$

f) Expansão das funções seno e cosseno

$$\sin x = \left[0; \frac{x}{1}, \frac{x^2}{2 \cdot 3 - x^2}, \frac{2 \cdot 3 x^2}{4 \cdot 5 - x^2}, \frac{4 \cdot 5 x^2}{6 \cdot 7 - x^2}, \dots \right]$$
$$\cos x = \left[1; \frac{-x^2}{2}, \frac{x^2}{6}, -\frac{3x^2}{10}, \frac{13x^2}{126}, -\dots \right]$$

Estas expansões foram encontradas, respectivamente, em [11, pág. 183] e [15, pág. 173].

1.10 - Algumas Aplicações Práticas

a) Aplicação à análise indeterminada

Seja a equação

$$ax + by = c \tag{1.10.1}$$

com a , b e c primos entre si.

Desenvolvendo-se $\frac{a}{b}$ em fração contínua, seja $\frac{a'}{b'}$ o penúltimo aproximante. Subtraindo-se este do último aproximante, que é $\frac{a}{b}$, temos:

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{ab' - ba'}{bb'}$$

Ora, o numerador da diferença de dois aproximantes consecutivos é ± 1 . (Corolário 1.7.1.b). Então temos:

$$ab' - ba' = \pm 1$$

Multiplicando-se por $\pm c$, vem:

$$\pm ab'c \mp ba'c = c \quad (1.10.2)$$

Comparando-se com a equação proposta (1.10.1), temos:

$$x = \pm b'c \quad y = \mp a'c$$

Para todas as soluções inteiras, temos:

$$x = \pm b'c - bt \quad y = \mp a'c + at$$

sendo t um número inteiro indeterminado, positivo, negativo ou nulo.

Com efeito, substituindo-se na equação (1.10.1) estas raízes, temos

$$a(\pm b'c - bt) + b(\mp a'c + at) = c$$

ou

$$\pm ab'c - abt \mp ba'c + bat = c$$

ou

$$\pm ab'c \mp ba'c = c \quad \text{que é a identidade (1.10.2).}$$

Exemplo: Encontrar as soluções inteiras da equação

$$2x + 5y = 9$$

Solução: Desenvolvemos $\frac{2}{5}$ em fração contínua:

$$\frac{2}{5} = 0 + \frac{2}{5} = 0 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$$

e consideramos os aproximantes 0 , $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{5}$.

Agora fazemos:

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2 - 5 \cdot 1}{2 \cdot 5}$$

Logo:

$$2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = -1$$

Multiplicamos ambos os membros por -9 :

$$2(-9 \cdot 2) + 5(1 \cdot 9) = 9$$

e podemos concluir que

$$x = -18 \quad e \quad y = 9$$

As fórmulas gerais nos fornecem

$$x = -18 - 5t$$

$$y = 9 + 2t$$

Assim, para $t = 1$: $x = -23$ e $y = 11$

Para $t = -1$: $x = -13$ e $y = 7$, etc.

b) Cálculo do logaritmo de um número $b_1 > 1$ em qualquer base b_0 .

O método consiste em se determinar recursivamente, uma sequência de números b_2, b_3, b_4, \dots e uma sequência de inteiros positivos n_1, n_2, n_3, \dots onde esses últimos serão os denominadores parciais de uma fração contínua simples infinita a qual permite, através de seus aproximantes, determinar o logaritmo de b_1 na base b_0 .

Inicialmente, determinamos um inteiro n_1 tal que

$$b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1}$$

Isto mostra que:

$$b_0 = b_1^{n_1 + \frac{1}{x_1}} \quad (1.10.3)$$

onde $x > 1$. Então, calcula-se b_2 pela relação:

$$b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}} \quad (1.10.4)$$

e determina-se um inteiro n_2 tal que:

$$b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1}$$

obtendo-se:

$$b_1 = b_2^{n_2 + \frac{1}{x_2}} \quad (1.10.5)$$

com $x_2 > 1$.

O processo é então continuado, calculando-se:

$$b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}}$$

e procurando-se por um inteiro n_3 tal que

$$b_3^{n_3} < b_2 < b_3^{n_3+1}$$

e, portanto

$$b_2 = b_3^{n_3 + \frac{1}{x_3}}$$

com $x_3 > 1$, e assim por diante.

Para mostrar que, de fato, estamos calculando o $\log b_1$, temos das relações (1.10.4) e (1.10.3) que:

$$b_2 = b_0 b_1^{-n_1} = b_1^{n_1 + \frac{1}{x_1}} b_1^{-n_1} = b_1^{\frac{1}{x_1}}$$

ou
$$b_1 = b_2^{x_1}$$

Por outro lado, sabe-se pela relação (1.10.5) que:

$$b_1 = b_2^{n_2 + \frac{1}{x_2}}$$

e, portanto:

$$x_1 = n_2 + \frac{1}{x_2}$$

Com raciocínio análogo, podemos escrever que:

$$x_3 = n_3 + \frac{1}{x_3}$$

e assim sucessivamente. Resolvendo-se a equação (1.10.3) em relação a b_1 e usando-se os resultados acima, tem-se:

$$b_1 = b_0^{\frac{1}{n_1 + \frac{1}{x_1}}} = b_0^{\frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{x_2}}}} = b_0^{\frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}}}}$$

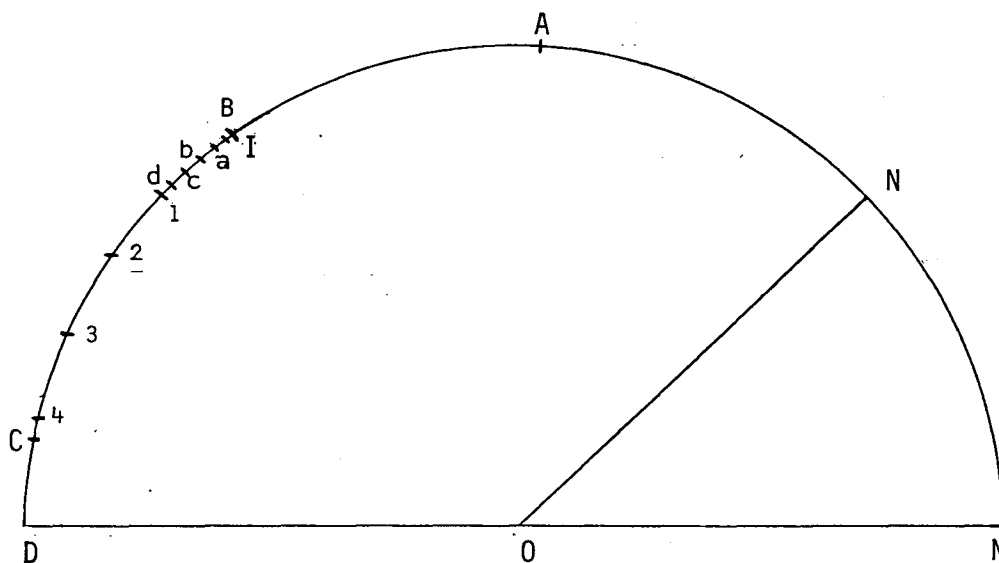
e, pela definição de logaritmo, tem-se:

$$\log \frac{b_1}{b_0} = \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}}} \quad (1.10.6)$$

Então, o logaritmo pode ser expresso através de uma fração contínua simples infinita dada pela relação (1.10.6).

c) Medida de um ângulo

Seja medir o ângulo \widehat{MON}



Tomemos o comprimento do arco \widehat{MN} e apliquemo-lo sobre a semi-circunferência, tantas vezes quantas seja possível, resultando os arcos \widehat{NA} , \widehat{AB} , \widehat{BC} e restando o arco \widehat{CD} .

Levamos o resto encontrado \widehat{CD} sobre o comprimento BC, tantas vezes quantas seja possível, e assim sucessivamente.

Trata-se então de desenvolver em fração contínua, a fração $\frac{\widehat{MON}}{180^\circ}$.

Temos:

$$\frac{\widehat{M\hat{O}N}}{180^\circ} = 0 + \frac{1}{\frac{180^\circ}{\widehat{M\hat{O}N}}}$$

Pela figura, 180° encerra $\widehat{M\hat{N}}$ 4 vezes e o resto da divisão é $\widehat{C\hat{D}}$.

O quociente da divisão de $\widehat{B\hat{C}} = \widehat{M\hat{N}}$ por $\widehat{C\hat{D}}$ é 4 e o resto é o arco $\widehat{C\hat{4}}$.

O quociente da divisão de $\widehat{B\hat{1}} = \widehat{C\hat{D}}$ por $\widehat{C\hat{4}}$ é ainda 4 e o resto é o arco $\widehat{l\hat{d}}$.

O quociente da divisão de $\widehat{B\hat{a}} = \widehat{C\hat{4}}$ por $\widehat{l\hat{d}}$ é 1 e o resto é $\widehat{B\hat{1}}$.

O que fizemos não foi mais do que um desenvolvimento gráfico em fração contínua, que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{M\hat{N}}}{180^\circ} &= 0 + \frac{1}{\frac{180^\circ}{\widehat{M\hat{N}}}} = 0 + \frac{1}{4 + \frac{\widehat{C\hat{D}}}{\widehat{M\hat{N}}}} = 0 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{\widehat{M\hat{N}}}{\widehat{C\hat{D}}}}} = \\ &= 0 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{\widehat{C\hat{4}}}{\widehat{C\hat{D}}}}} = 0 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{\widehat{C\hat{D}}}{\widehat{C\hat{4}}}}} = \end{aligned}$$



$$= 0 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1\hat{d}}{C4}}}} = 0 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{C4}{1\hat{d}}}}}}$$

$$= 0 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{B\hat{I}}{1\hat{d}}}}}}$$

Os aproximantes são:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{17}, \frac{17}{12}, \frac{21}{89}, \dots$$

Podemos substituir a fração $\frac{\widehat{MN}}{180^\circ}$ por $\frac{21}{89}$, que nos fornece a medida do ângulo quando a unidade é 180° .

$$\frac{21}{89} \cdot 180^\circ = 42^\circ,5$$

OBS: Podemos atingir maior precisão com este processo se descrevermos uma semi-circunferência de raio suficientemente grande.

CAPÍTULO 2

DIFERENÇAS FINITAS - FRAÇÕES CONTÍNUAS DE THIELE

Neste capítulo, abordamos o problema de aproximação de funções através de uma classe particular de frações contínuas - as frações contínuas de Thiele, que são utilizadas como instrumental básico neste nosso trabalho.

2.1 - Diferenças Divididas - Fórmulas de Interpolação de Newton

Sejam x_0, x_1, \dots, x_n , $n+1$ pontos distintos e sejam f_0, f_1, \dots, f_n , $n+1$ valores de uma função $y = f(x)$ sobre $x = x_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

As diferenças divididas de ordem 0, 1, 2, ..., n são definidas, iterativamente, pelas relações

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} \quad (2.1.1)$$

⋮

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

$$= \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] - f[x_1, x_0, \dots, x_n]}{x_0 - x_n}$$

As diferenças divididas de $f(x)$ são funções simétricas de seus argumentos, não afetadas por qualquer permutação da ordem dos pontos x_0, x_1, \dots, x_n .

Da definição (2.1.1) obtem-se facilmente, a bem conhecida fórmula de interpolação de Newton com diferenças divididas:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \\ & + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3] + \dots \\ & + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n] + R_n(x) \end{aligned}$$

onde $R_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$ é o termo do resto ou erro de truncamento.

2.2 - Diferenças Invertidas

A fórmula de interpolação de Newton com o termo do resto, pode ser considerada como a identidade resultante se escrever

$$f(x) = u_0(x) \tag{2.2.1}$$

e de se efetuar as substituições sucessivas através da relação

$$u_k(x) = u_k(x_k) + (x - x_k) u_{k+1}(x) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \tag{2.2.2}$$

As quantidades $u_k(x_k)$ são evidentemente as diferenças divididas

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

e

$$u_k(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x] \quad (2.2.3)$$

Por exemplo, quando $n = 3$ segue que:

$$\begin{aligned} f(x) &= u_0(x) = u_0(x) + (x - x_0) u_1(x) = \\ &= u_0(x_0) + (x - x_0) \{ u_1(x_1) + (x - x_1) u_2(x) \} \\ &= u_0(x_0) + (x - x_0) \{ u_1(x_1) + (x - x_1) [u_2(x_2) + (x - x_2) u_3(x)] \} \\ &= u_0(x_0) + (x - x_0) u_1(x_1) + (x - x_0)(x - x_1) u_2(x_2) + \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) u_3(x) \\ &= f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \\ &\quad + E(x) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} E(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) u_3(x) \\ &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x] \end{aligned}$$

O algoritmo para o cálculo das diferenças divi
didas sucessivas segue diretamente de (2.2.2) e (2.2.3), com
 $x = x_k$, na forma

$$\begin{aligned} f[x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] &= \\ &= \frac{f[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}} \end{aligned}$$

O resultado de se assumir que a $(n+1)$ -ésima di
ferença dividida $u_{n+1}(x)$ é identicamente nula (ou que a n -ési
ma diferença é constante) é a equação do polinômio $y(x)$, de

grau $\leq n$, que coincide com $f(x)$ nos pontos x_0, \dots, x_n .

Várias identidades podem ser obtidas de maneira análoga e interpretadas como fórmulas de aproximação quando tomamos outras transformações em lugar de (2.2.2)

Em particular, consideremos as funções $v_k(x)$ de finidas pela relação de recorrência:

$$v_k(x) = v_k(x_k) + \frac{x - x_k}{v_{k+1}(x)} \quad k = 0, 1, 2 \quad (2.2.4)$$

e

$$f(x) = v_0(x)$$

Efetuando-se as substituições sucessivas obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= v_0(x) = v_0(x_0) + \frac{x - x_0}{v_1(x)} \\ &= v_0(x_0) + \frac{x - x_0}{v_1(x_1) + \frac{x - x_1}{v_2(x)}} \\ &= v_0(x_0) + \frac{x - x_0}{v_1(x_1) + \frac{x - x_1}{v_2(x_2) + \frac{x - x_2}{v_3(x)}}}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$f(x) = a_0 + \frac{x - x_0}{a_1 + \frac{x - x_1}{a_2 + \frac{x - x_2}{a_3 + \dots}}} \quad (2.2.5)$$

com $a_k = v_k(x_k)$, é a representação através de fração contínua da função $f(x)$.

Quando a fração termina após n divisões, a constante a_n é substituída por $a_n + \frac{(x - x_n)}{v_{n+1}(x)}$ no último denominador.

Suponhamos então, que as quantidades a_k são conhecidas e que a fração contínua termina com o denominador

$$a_n + \frac{(x - x_n)}{v_{n+1}(x)}$$

A função $v_{n+1}(x)$ não será facilmente obtida. Entretanto, se $x = x_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, o valor de $v_{n+1}(x)$ não aparece no resultado (pois a fração termina antes do resíduo $(x - x_n)/v_{n+1}(x)$ ser introduzido) e obtemos uma fração contínua finita

$$\left[a_0; \frac{x - x_0}{a_1}, \frac{x - x_1}{a_2}, \dots, \frac{x - x_{n-1}}{a_n} \right]$$

que coincide com $f(x)$ nos pontos x_0, \dots, x_n .

Resta ainda o problema de obtenção dos coeficientes a_k . Da relação de recorrência (2.2.4) temos que

$$v_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{v_k(x) - v_k(x_k)}$$

tal que

$$v_1(x) = \frac{x - x_0}{v_0(x) - v_0(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

e assim por diante.

Por analogia com a notação de diferenças divididas, podemos definir as diferenças invertidas por

$$\phi_0[x] = f(x)$$

$$\phi_1[x_0, x] = v_1(x) = \frac{x - x_0}{\phi_0[x] - \phi_0[x_0]} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

$$\phi_2[x_0, x_1, x] = v_2(x) = \frac{x - x_1}{\phi_0[x_0, x] - \phi_0[x_0, x_1]}$$

e, em geral

$$\begin{aligned} \phi_k[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x] &= v_k(x) = \\ &= \frac{x - x_{k-1}}{\phi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x] - \phi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}]} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Consequentemente temos também

$$\begin{aligned} \phi_k[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] &= v_k(x_k) = a_k = \\ &= \frac{x_k - x_{k-1}}{\phi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - \phi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}]} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Assim, $\phi_1[x_0, x_1]$ é a diferença dividida invertida de $f(x)$, relativa a x_0 e x_1 ; $\phi_2[x_0, x_1, x_2]$ é a diferença dividida invertida de $\phi_1[x_0, x]$ relativa a x_1 e x_2 ; ..., e $\phi_k[x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k]$ é a diferença dividida invertida de $\phi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x]$ relativa a x_{k-1} e x_k . Por simplicidade nos referimos a quantidade definida por (2.2.6) como a k -ésima diferença invertida de $f(x)$.

OBS: A diferença invertida $\phi_k[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k]$ é uma função simétrica de seus dois últimos argumentos x_{k-1} e x_k .

Os coeficientes a_k dados por (2.2.7) podem ser facilmente obtidos pela construção de uma tabela de diferenças invertidas, do seguinte modo:

x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$\phi_1[x_0, x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$\phi_1[x_0, x_2]$	$\phi_2[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$\phi_1[x_0, x_3]$	$\phi_2[x_0, x_1, x_3]$	$\phi_3[x_0, x_1, x_2, x_3]$
.				

Por exemplo

$$\phi_2[x_0, x_1, x_3] = \frac{x_3 - x_1}{\phi_1[x_0, x_3] - \phi_1[x_0, x_1]}$$

Os elementos diagonais são os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \text{ etc.}$

Exemplos:

a) Através da tabela abaixo, mostramos as diferenças invertidas da função $f(x) = x(x + 1)$

x	$f(x_k)$	$\phi_1[x_0, x_k]$	$\phi_2[x_0, x_1, x_k]$	$\phi_3[x_0, x_1, x_2, x_k]$
1	2			
2	6	1/4		
3	12	1/5	-20	
4	20	1/6	-24	- 1/4
5	30	1/7	-28	- 1/4
6	42	1/8	-32	- 1/4

As primeiras diferenças foram obtidas de

$$\frac{2-1}{6-2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{3-1}{12-2} = \frac{1}{5}, \quad \frac{4-1}{20-2} = \frac{1}{6}, \quad \dots;$$

as segundas diferenças de

$$\frac{3-2}{5} = -\frac{1}{5}, \quad \frac{4-2}{6} = -\frac{1}{6}, \quad \dots;$$

e assim por diante.

Se $f(x)$ pode ser representada por uma fração contínua finita

$$f(x) = a_0 + \frac{x - x_0}{a_1 + \dots + \frac{x - x_{n-1}}{a_n}}$$

então a diferença invertida $\phi_n[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x] = a_n$ (para todos os valores de x). Dessa forma, a coluna das n -ésimas diferenças invertidas será constante.

Reciprocamente, uma coluna de diferenças invertidas constante, implicará em uma fração contínua finita.

No exemplo acima é facilmente verificado que

$$2 + \frac{x-1}{1/4 + \frac{x-2}{-20 + \frac{x-3}{-1/4}}} = x(x+1)$$

e a fração contínua corresponde à função original.

b) Seja a função $f(x)$ dada pela tabela

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	2	3/2	4/5	1/2	6/17	7/26	8/37

Calculemos suas diferenças invertidas, conforme tabela na página seguinte.

Notamos que as diferenças invertidas $\phi_4 [x_0, x_1, x_2, x_3, x_k]$ são iguais. Então, se tomarmos somente os cinco primeiros pontos $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ e $x_4 = 4$ teremos $a_0 = 2, a_1 = -2, a_2 = 3, a_3 = 0$ e $a_4 = -5$ tal que

$$f(x) \approx = + \frac{x - 0}{-2 + \frac{x - 1}{3 + \frac{x - 2}{0 + \frac{x - 3}{-5}}}} \equiv \frac{P_4(x)}{Q_4(x)}$$

e a aproximação se tornaria exata se o último denominador (-5) fosse substituído pela quantidade $-5 + \frac{(x - 4)}{\phi_5 [0, 1, 2, 3, 4, x]}$ (desconhecida).

Dessa forma, $\frac{P_4(x)}{Q_4(x)}$ coincidiria com $f(x)$ nos cinco pontos empregados na sua determinação. Mas, como a tabela mostra que a mesma aproximação seria obtida se o ponto $x = 4$ fosse substituído por $x = 5$ ou $x = 6$, então $\frac{P_4(x)}{Q_4(x)}$ coincide com $f(x)$ também nos pontos $x = 5$ e $x = 6$.

Através de reduções sucessivas, temos que

$$f(x) = \frac{P_4(x)}{Q_4(x)} = \frac{2 + x}{1 + x^2}$$

x	$f(x_k)$	$\phi_1[x_0, x_k]$	$\phi_2[x_0, x_1, x_k]$	$\phi_3[x_0, x_1, x_2, x_k]$	$\phi_4[x_0, x_1, x_2, x_3, x_k]$
0	2				
1	$3/2$	- 2			
2	$4/5$	- $5/3$	3		
3	$1/2$	- 2	∞	0	
4	$6/17$	- $17/7$	- 7	- $1/5$	- 5
5	$7/26$	- $26/9$	- $9/2$	- $2/5$	- 5
6	$8/37$	- $37/11$	- $11/3$	- $3/5$	- 5

2.3 - Diferenças Recíprocas

Sabemos que a k-ésima diferença invertida $\phi_k[x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k]$ de uma função $f(x)$ é simétrica so mente em seus dois últimos argumentos. Por ser a simetria uma propriedade muito importante em alguns desenvolvimentos, defini mos uma nova quantidade

$$\begin{aligned} \rho_k[x_0, \dots, x_k] &= \phi_k[x_0, \dots, x_k] + \phi_{k-2}[x_0, \dots, x_{k-2}] + \\ &+ \phi_{k-4}[x_0, \dots, x_{k-4}] + \dots \quad (2.3.1) \end{aligned}$$

que termina com $\phi_0[x_0]$ se k for par e com $\phi_1[x_0, x_1]$ se k for ímpar.

Em particular, temos

$$\begin{aligned} \rho_0[x_0] &= \phi_0[x_0] = f(x_0) \\ \rho_1[x_0, x_1] &= \phi_1[x_0, x_1] = \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}, \text{ etc} \end{aligned}$$

A quantidade $\rho_k[x_0, \dots, x_k]$ é chamada a k-ésima diferença recíproca de $f(x)$ e mostramos, a seguir, que é uma função simétrica de x_0, \dots, x_k .

Consideremos a redução da fração contínua a uma função racional, ou seja

$$F_n(x) = a_0 + \frac{x - x_0}{a_1 + \frac{x - x_{n-1}}{a_n}} = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$$

onde $P_n(x)$ e $Q_n(x)$ são polinômios que satisfazem as relações de recorrência

$$P_n(x) = a_n P_{n-1}(x) + (x - x_{n-1}) P_{n-2}(x)$$

$$Q_n(x) = a_n Q_{n-1}(x) + (x - x_{n-1}) Q_{n-2}(x)$$

com $P_{-1}(x) = 1$, $Q_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = a_0$ e $Q_0(x) = 1$.

Vamos agora determinar os termos principais dos polinômios P_n e Q_n . Se n é par ($n = 2k$) temos respectivamente

$$P_{2k} = (a_0 + a_2 + \dots + a_{2k}) x^k + \dots$$

$$Q_{2k} = x^k + \dots$$

e se n é ímpar ($n = 2k + 1$) temos

$$P_{2k+1} = x^{k+1} + \dots$$

$$Q_{2k+1} = (a_1 + a_3 + \dots + a_{2k+1}) x^k + \dots$$

Estes resultados são facilmente provados por indução.

Agora, a função racional

$$F_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$$

é uma função definida de maneira única que coincide com os valores dados nos pontos x_0, \dots, x_n e não é, evidentemente afetada pela ordem destes pontos. Conseqüentemente, a razão dos coeficientes principais em P_n e Q_n deve ser uma função simétrica dos x_i e estes são os termos requeridos:

$$a_0 + a_2 + \dots + a_{2k} = \rho_{2k}(x_0, x_1, \dots, x_{2k})$$

e

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{2k+1} = \rho_{2k+1}(x_0, x_1, \dots, x_{2k+1})$$

De (2.3.1) temos

$$\rho_k [x_0, \dots, x_k] - \rho_{k-2} [x_0, \dots, x_{k-2}] = \phi_k [x_0, \dots, x_k] \quad (2.3.2)$$

e utilizando (2.2.6) as diferenças recíprocas sucessivas podem então ser obtidas pela fórmula de recorrência:

$$\begin{aligned} \rho_k |x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k| &= \\ &= \frac{x_k - x_{k-1}}{\rho_{k-1} [x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - \rho_{k-1} [x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}]} + \\ &+ \rho_{k-2} [x_0, \dots, x_{k-2}] \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

A simetria da k -ésima diferença recíproca permite seu cálculo através de quaisquer duas $(k-1)$ -ésimas diferenças recíprocas tendo $k-1$ argumentos comuns e juntamente com a $(k-2)$ -ésima diferença recíproca formada com aqueles argumentos comuns.

Em particular, uma tabela de diferenças recíprocas pode ser construída conforme segue

x_0	$f(x_0)$		
		$\rho_1 [x_0, x_1]$	
x_1	$f(x_1)$		$\rho_2 [x_0, x_1, x_2]$
		$\rho_1 [x_1, x_2]$	$\rho_3 [x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f(x_2)$	$\rho_2 [x_1, x_2, x_3]$	
		$\rho_1 [x_2, x_3]$	
x_3	$f(x_3)$		

Através desta tabela podemos determinar os coeficientes a_k de (2.2.5) lembrando que

$$a_k = \phi_k [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k]$$

e

$$\rho_k [x_0, \dots, x_k] - \rho_{k-2} [x_0, \dots, x_{k-2}] = \phi_k [x_0, \dots, x_k]$$

Dessa forma,

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = \rho_1 [x_0, x_1]$$

$$a_2 = \rho_2 [x_0, x_1, x_2] - f(x_0)$$

$$a_3 = \rho_3 [x_0, x_1, x_2, x_3] - \rho_1 [x_0, x_2]$$

⋮

e assim por diante.

Vimos então que os coeficientes a_k são formados (mas não idênticos) pelas diferenças recíprocas situadas na diagonal da tabela construída (página anterior).

2.4 - Representação dos Aproximantes

É facilmente verificado que o n -ésimo aproximante da fração contínua (2.2.5) é representado por

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_p x^p}{\beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_{p-1} x^{p-1}} \quad (n = 2p-1)$$

se n é ímpar e,

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_p x^p}{\beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_p x^p} \quad (n = 2p)$$

se n é par.

($p = 1, 2, \dots$)

Então, o n -ésimo aproximante fornece uma aproximação para $f(x)$ através de uma razão polinomial, ou seja, por uma função racional de x que coincide com $f(x)$ nos pontos x_0, \dots, x_n se $a_{n-1} \neq 0$ e todos os a'_s precedentes são finitos.

2.5 - Frações Contínuas de Thiele

$$\text{Se } f(x) = a_0 + \frac{x - x_0}{a_1 + \frac{x - x_1}{a_2 + \frac{x - x_2}{a_3 + \dots}}} \quad (2.5.1)$$

e, quando $x_i \rightarrow x_0$ para todo i , $a_k \rightarrow c_k$, obtemos a expansão

$$f(x) = c_0 + \frac{x - x_0}{c_1 + \frac{x - x_0}{c_2 + \frac{x - x_0}{c_3 + \dots}}} \quad (2.5.2)$$

Vamos agora deduzir expressões para os limites c_k . Para conseguirmos funções simétricas em relação a x_i , escrevemos

$$\begin{aligned} a_k = v_k(x_k) &= \phi_k[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] \\ &= \rho_k[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] - \\ &\quad - \rho_{k-2}[x_0, x_1, \dots, x_{k-3}, x_{k-2}] \end{aligned}$$

De (2.2.7) e (2.3.2) temos a relação

$$\begin{aligned} \phi_k [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] &= \frac{x_k - x_{k-1}}{\phi_{k-1} [x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - \phi_{k-1} [x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}]} = \\ &= \frac{x_k - x_{k-1}}{\{\rho_{k-1} [x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - \rho_{k-1} [x_0, \dots, x_{k-3}]\} - \rho_{k-1} [x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}] - \rho_{k-1} [x_0, \dots, x_{k-3}]} \\ &= \frac{x_k - x_{k-1}}{\rho_{k-1} [x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - \rho_{k-1} [x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}]} \end{aligned}$$

Se $x_k \rightarrow x_{k-1}$, evidentemente temos

$$\lim_{x_k \rightarrow x_{k-1}} \phi_k [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_{k-1}} \rho_{k-1} [x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}]}$$

Agora, se definirmos

$$\phi_k(x) = \lim_{x_0, \dots, x_k \rightarrow x} \phi_k [x_0, x_1, \dots, x_k]$$

e

$$\rho_k(x) = \lim_{x_0, \dots, x_k \rightarrow x} \rho_k [x_0, x_1, \dots, x_k]$$

teremos

$$\frac{d \rho_k}{dx} = \lim_{x_0, \dots, x_k \rightarrow x} \left\{ \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \rho_k [x_0, \dots, x_k] \right\}$$

Sendo $\rho_k [x_0, \dots, x_k]$ uma função simétrica de seus argumentos, encontramos que

$$\begin{aligned} \phi_k(x) &= \lim_{x_0, \dots, x_k \rightarrow x} \phi_k [x_0, \dots, x_k] = \\ &= \frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_{k-1}} \rho_{k-1} [x, x, \dots, x, x_{k-1}]} = \\ &= \frac{k}{\frac{d}{dx} \rho_{k-1} [x, \dots, x]} = \frac{k}{\frac{d}{dx} \rho_{k-1}(x)} \end{aligned}$$

Assim,

$$\phi_k(x) = \frac{k}{\rho_{k-1}(x)}$$

Então podemos calcular, sucessivamente, os coeficientes $C_k = \phi_k(x_0)$ de (2.5.2), usando as fórmulas

$$\rho_k(x) = \rho_{k-2}(x) + \phi_k(x) \quad , \quad \phi_{k+1}(x) = \frac{k+1}{\rho_k(x)}$$

com os valores iniciais:

$$\rho_{-2}(x) = \rho_{-1}(x) = 0, \quad \phi_0(x) = f(x)$$

A função $\rho_k(x)$ é frequentemente chamada a k-ésima derivada recíproca de $f(x)$ e podemos nos referir a $\phi_k(x)$ como a k-ésima derivada inversa de $f(x)$.

A expansão (2.5.2) pode ser escrita como

$$f(x) = \phi_0(x_0) + \frac{x - x_0}{\phi_1(x_0) + \frac{x - x_0}{\phi_2(x_0) + \frac{x - x_0}{\phi_3(x_0) + \dots}}} \quad (2.5.3)$$

e é atribuída a Thiele.

Se a fração termina após k divisões, é necessário substituir $\phi_k(x)$ por $\phi_k(x_0) + \frac{(x - x_0)}{\phi_k[x_0, \dots, x_0, x]}$ para restabelecer a igualdade.

Observa-se que o n-ésimo aproximante da expansão (2.5.3) fornece uma melhor aproximação para $f(x)$ nas vizinhanças de x_0 . Assim, se tomarmos o n-ésimo aproximante da fração contínua de Thiele, temos:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} + R_n(x)$$

onde $R_n(x)$ é o erro da aproximação.

Segundo Hildebrand [12], devemos tentar estimar o erro de um aproximante, através do comportamento da sequência de aproximantes anteriores, pois as expressões para o erro de truncamento são bastante complexas.

CAPÍTULO 3

APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES ATRAVÉS DE FRAÇÕES CONTÍNUAS DE THIELE

Com o objetivo de propor uma solução alternativa para o cálculo de funções matemáticas, tomamos como ferramenta básica as frações contínuas de Thiele. Dentro desse plano, desenvolvemos neste capítulo, algoritmos uniformizados para a representação e cálculo de algumas funções matemáticas; tais como: seno, coseno, arco-tangente, tangente-hiperbólica, raiz quadrada, exponencial e logaritmo. São feitas considerações sobre os valores aproximados obtidos pelos nossos subprogramas e os valores das funções intrínsecas do compilador FORTRAN IV IBM/370.

3.1 - Preliminares

Vimos que, para uma dada função $f(x)$, o desenvolvimento em frações contínuas de Thiele é obtido fazendo:

$$f(x) = \phi_0(x_0) + \frac{x - x_0}{\phi_1(x_0) + \frac{x - x_0}{\phi_2(x_0) + \dots}}$$

onde os primeiros coeficientes de Thiele, $\phi_i(x_0)$, são dados

por:

$$\phi_0(x_0) = f(x_0)$$

$$\phi_1(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\phi_2(x_0) = \frac{-2[f'(x_0)]^2}{f''(x_0)}$$

$$\phi_3(x_0) = \frac{3[f''(x_0)]^2}{f'(x_0) [2f'(x_0) f''(x_0) - 3(f''(x_0))^2]}$$

⋮

e envolvendo portanto, cálculo de derivadas sucessivas da função num ponto x_0 (a tese de Hehl[11] descreve um Sistema de Programação para o Cálculo de Derivadas Sucessivas de Funções à Variáveis Reais - SPCD).

Este procedimento, para o cálculo dos coeficientes de Thiele, pode ser colocado na seguinte forma algorítmica que calcula sucessivamente $\phi_k(x_0)$:

$$\rho_k(x) = \rho_{k-2}(x) + \phi_k(x) \quad , \quad \phi_{k+1}(x) = \frac{k+1}{\rho_k(x)}$$

com valores iniciais dados por:

$$\rho_{-2}(x) = \rho_{-1}(x) = 0, \quad \phi_0(x) = f(x)$$

e calculando as funções $\phi_k(x)$ no ponto $x = x_0$. Assim, uma função $f(x)$ tem infinitos desenvolvimentos em frações contínuas de Thiele, pois os $\phi_k(x)$ dependem do ponto x_0 .

Para a determinação de n coeficientes de Thiele utilizamos o algoritmo computacional proposto por Hehl [11], que calcula os n primeiros coeficientes, $\phi_i(x_0)$, em função do

valor da função e de suas $n-1$ derivadas. Então, determinados os coeficientes de Thiele através do subprograma COTHI, codificado em FORTRAN e apresentado por Hehl [11], só nos resta calcular o valor numérico da função para um dado valor de x .

3.2 - Desenvolvimento de algumas Funções em Frações Contínuas de Thiele

Nosso objetivo consiste em apresentar uma maneira alternativa para aproximar $f(x)$, sendo a aproximação tão precisa quanto possível e com o menor esforço computacional.

Como foi observado no capítulo 2, o n -ésimo aproximante de um desenvolvimento de Thiele, fornece uma melhor aproximação para $f(x)$ nas vizinhanças do ponto x_j . Constituiu-se então uma de nossas principais tarefas, a exploração, para cada função estudada, de um ponto ótimo x_0 , tal que o desenvolvimento de Thiele apresentasse resultados satisfatórios num dado intervalo e não somente na vizinhança imediata do ponto x_0 . Para tanto, foram realizados inúmeros testes, uma vez que a obtenção deste ponto x_0 , num intervalo, foi possível somente através de tentativas.

Simultaneamente à tarefa de encontrar o ponto ótimo x_0 , investigamos cuidadosamente o aproximante de menor ordem que satisfizesse as nossas expectativas, a nível de precisão computacional e espaço de memória, para o intervalo considerado. Foram então codificados em linguagem FORTRAN, para todas as funções em estudo, programas complementares para a determinação de tais aproximantes. Estes programas, bem como

o subprograma COTHI, já referenciado, foram processados em dupla precisão para minimizarmos os erros de truncamento.

A seguir, são apresentados os diagramas de blocos e os subprogramas FUNCTION propostos para as funções aproximadas por frações contínuas de Thiele.

Salientamos que, de acordo com as características das funções, tomamos determinados intervalos de aproximação. Assim, para argumentos não pertencentes a estes intervalos estão ainda associados erros de arredondamento provenientes de operações aritméticas necessárias à conversão. Ressaltamos que toda programação foi desenvolvida em linguagem FORTRAN IV e utilizado o computador IBM 370 alocado no Núcleo de Processamento de Dados da Universidade Estadual de Maringá.

3.2.1 - Função SENO

Pelas suas propriedades de periodicidade e simetria tomamos $[0, \frac{\pi}{2}]$ como o intervalo para a aproximação.

Através do subprograma COTHI, foram determinados os coeficientes de Thiele, tomando-se após exaustivos testes o valor $x_0 = 0.65$.

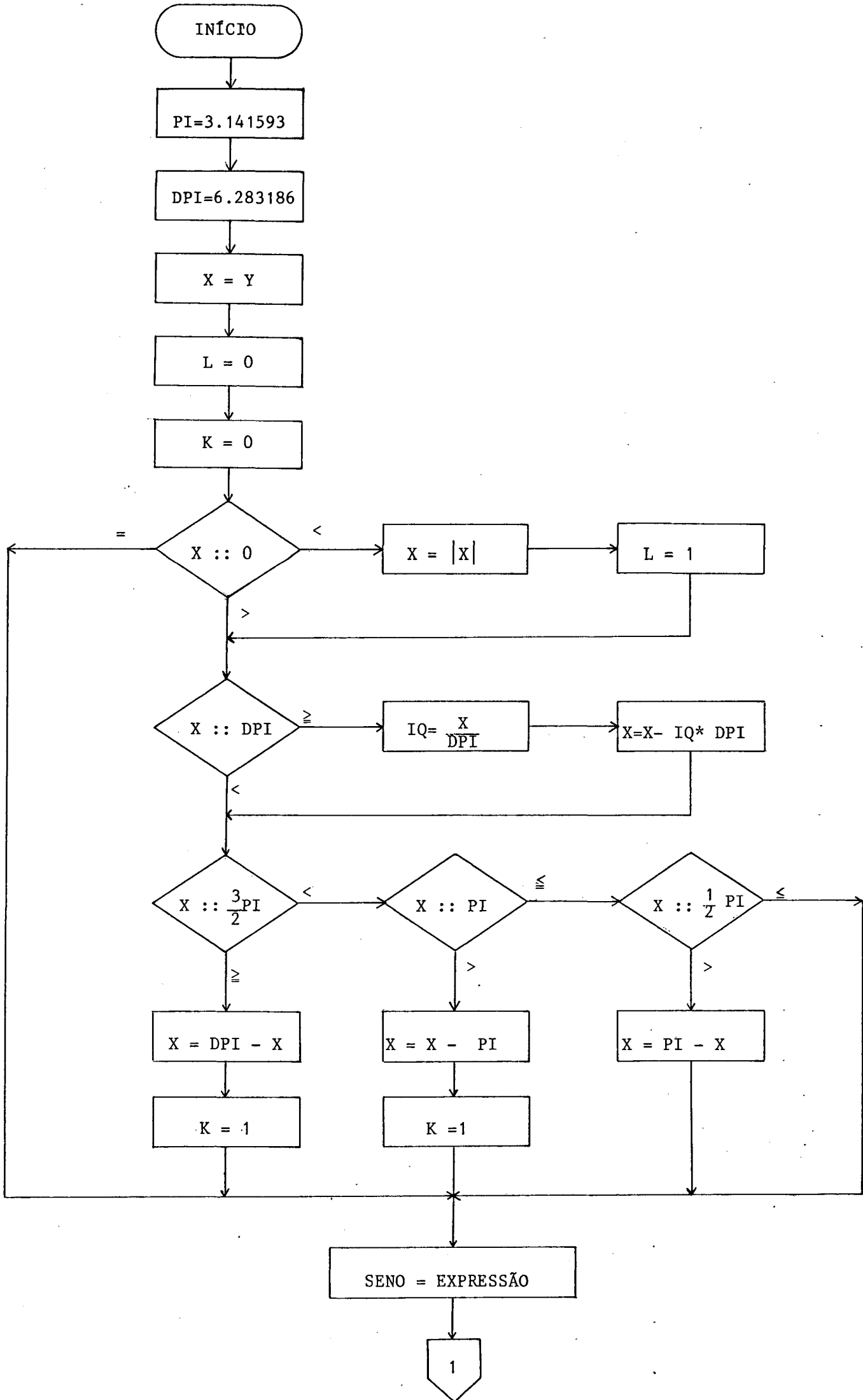
Coeficientes: $0.6051864 * 10^0$
 $0.1256149 * 10^1$
 $0.2094394 * 10^1$
 $-0.5832840 * 10^0$
 $-0.5092222 * 10^1$
 $-0.1268296 * 10^1$
 $-0.9920426 * 10^1$
 $0.3115656 * 10^0$
 $0.2338590 * 10^2$

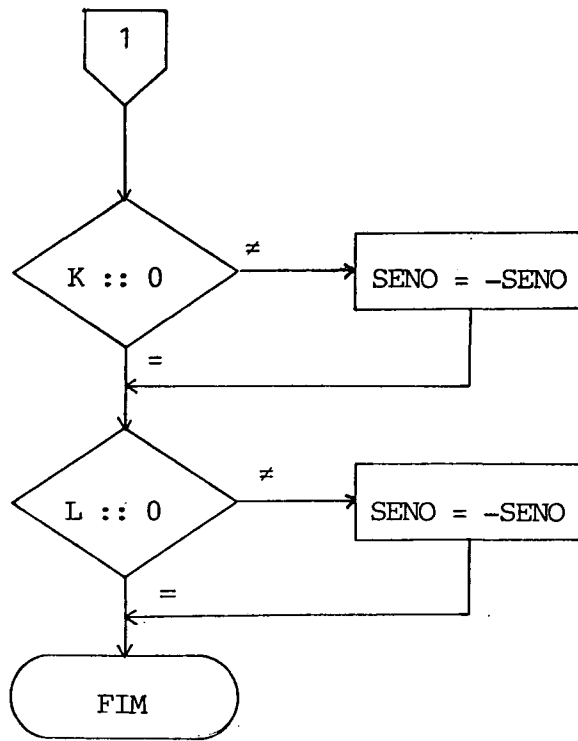
⋮

Para o cálculo do valor numérico da função SENO, consideramos o nono aproximante, ou seja:

$$f(x) = (x^5 + 0.4419966x^4 - 44.58186x^3 - 3.687584x^2 + 340.6773x + 0.0000007635263) / (0.1955210x^4 - 0.1734531x^3 + 12.19801x^2 - 3.687663x + 340.6773)$$

Programação: Os cálculos para a função SENO são esquematizados no diagrama de blocos a seguir:





onde:

$$\begin{aligned}
 \text{EXPRESSÃO} = & (x^5 + 0.4419966x^4 - 44.58186x^3 - 3.687584x^2 + \\
 & + 340.6773x + 0.0000007635263) / (0.1955210x^4 - \\
 & - 0.1734531x^3 + 12.19801x^2 - 3.687663x + 340.6773)
 \end{aligned}$$

A programação, sob forma de subprograma FUNCTION, é ilustrada

abaixo:

FUNCTION SEND(Y)

C Y- ARGUMENTO DA FUNCAO SEND

C SEND- VALOR DA FUNCAO SEND

DATA PI,DFI/0.3141593E+01,0.6283186E+01/

X=Y

L=0

K=0

IF(X)10,100,20

10 X=ABS(X)

L=1

20 IF(X-DFI)40,30,30

30 IQ=X/DFI

X=X-IQ*DFI

40 IF(X-0.15E+01*PI)50,80,80

50 IF(X-PI)60,60,90

60 IF(X-0.5E+00*PI)100,100,70

70 X=PI-X

GO TO 100

80 X=DFI-X

K=1

GO TO 100

90 X=X-PI

K=1

100 SEND=((((((0.1000000E+01*X + 0.4419966E+00)*X - 0.4458186E+02)*X -
CO.3687584E+01)*X + 0.3406773E+03)*X + 0.7635263E-06) / (((((0.19552
C10E+00*X - 0.1734531E+00)*X + 0.1219801E+02)*X - 0.3687663E+01)*X
C+ 0.3406773E+03)

IF(K)110,120,110

110 SEND=-SEND

120 IF(L)130,140,130

130 SEND=-SEND

140 RETURN

END

Resultados obtidos quando da comparação com a função
SIN(X) do compilador FORTRAN IV

Para uma amostra de 1500 argumentos aleatórios, tomados no intervalo de interesse $[0, \frac{\pi}{2}]$, os resultados obtidos podem ser considerados satisfatórios pois 12,8% da solução aproximada coincidiu com a solução apresentada pela função SIN(X); 7,2% dos resultados apresentou um erro relativo de aproximadamente 10^{-7} ; 76,94% um erro relativo de aproximadamente 10^{-6} , e os restantes 3,06% apresentou um erro relativo de aproximadamente 10^{-5} .

3.2.2 - Função COSENO

Esta função, por suas propriedades, foi aproximada considerando-se o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ e para o ponto $x_0 = 0.68$.

Os coeficientes de Thiele obtidos foram:

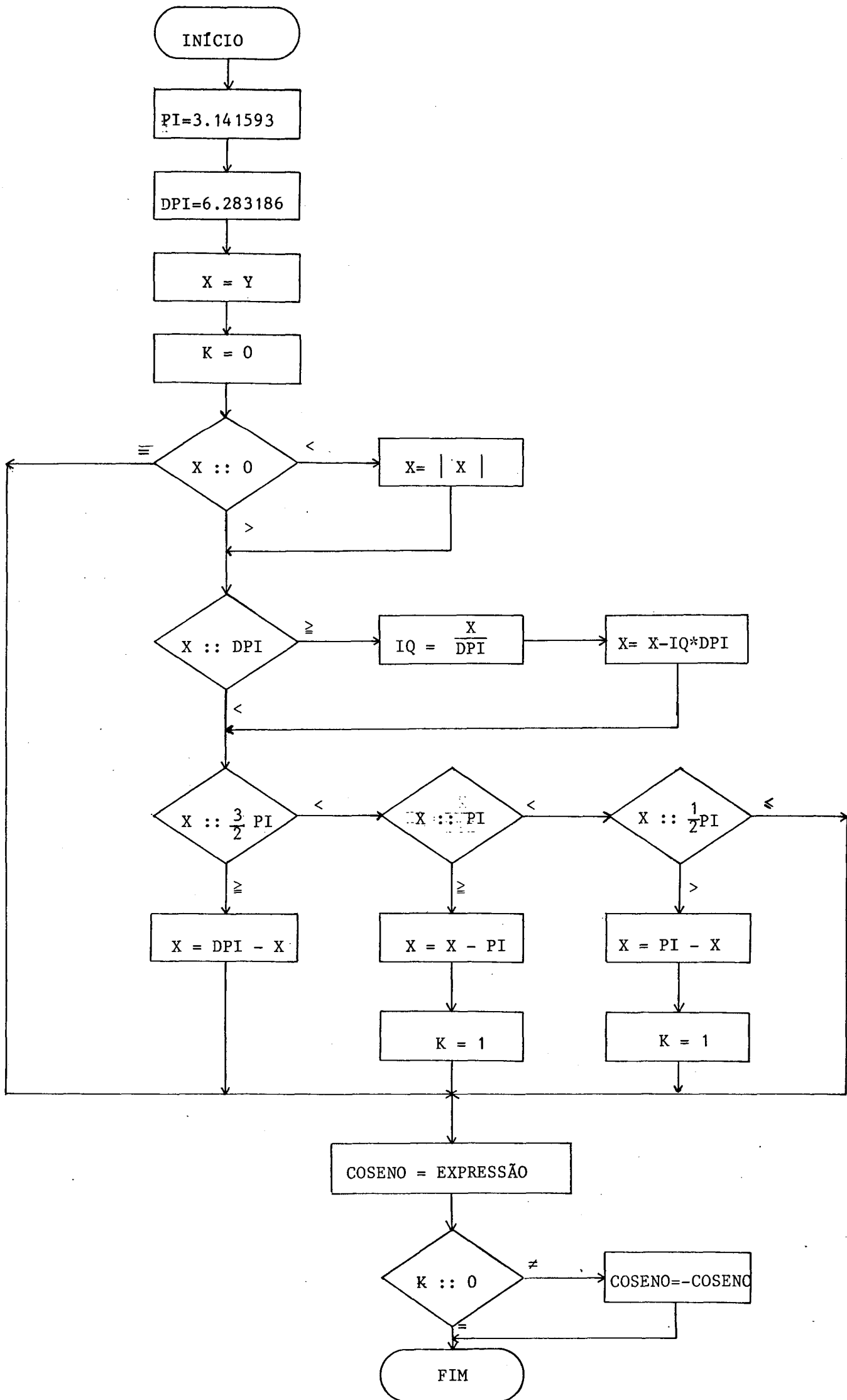
$$\begin{aligned} & 0.7775727 \cdot 10^0 \\ & -0.1590348 \cdot 10^1 \\ & 0.1016961 \cdot 10^1 \\ & 0.1107591 \cdot 10^1 \\ & -0.5139123 \cdot 10^1 \\ & 0.1284747 \cdot 10^1 \\ & -0.5039539 \cdot 10^1 \\ & -0.6000221 \cdot 10^0 \\ & 0.2406268 \cdot 10^2 \\ & -0.4701908 \cdot 10^0 \\ & 0.2393427 \cdot 10^2 \end{aligned}$$

⋮

Tomamos, para o cálculo do valor numérico da função COSENO, o décimo-primeiro aproximante, isto é:

$$\begin{aligned} f(x) = & (x^6 - 1.858363x^5 - 57.95128x^4 + 39.763370x^3 + \\ & + 907.8037x^2 - 86.81911x - 1902.055) / (-0.06358937x^5 - \\ & - 0.3192929x^4 - 3.645823x^3 - 43.24374x^2 - 86.81911x - \\ & - 1902.055) \end{aligned}$$

Programação: Os cálculos podem ser efetuados ba seando-se no seguinte diagrama:



onde:

$$\begin{aligned} \text{EXPRESSÃO} = & (x^6 - 1.858363x^5 - 57.92128x^4 + 39.763370x^3 + \\ & + 907.8037x^2 - 86.81911x - 1902.055) / (-0.06358937x^5 - \\ & - 0.3192929x^4 - 3.645823x^3 - 43.24374x^2 - 86.81911x - \\ & - 1902.055) \end{aligned}$$

O subprograma FUNCTION correspondente é codificado a seguir:

```
FUNCTION COSENO(Y)
C      Y- ARGUMENTO DA FUNCAO COSENO
C      COSENO- VALOR DA FUNCAO COSENO

DATA PI,DFI/0.3141593E+01,0.6283186E+01/

X=Y
K=0

IF(X)10,100,20
10  X=ABS(X)

20  IF(X-DFI)40,30,30
30  IQ=X/DFI
    X=X-IQ*DFI

40  IF(X-0.15E+01*PI)50,80,80
50  IF(X-PI)60,90,90
60  IF(X-0.5E+00*PI)100,100,70

70  X=X-PI
    K=1
    GO TO 100

80  X=DFI-X
    GO TO 100

90  X=X-PI
    K=1

100  COSENO=(((((((0.1000000E+01*X - 0.1858363E+01)*X - 0.5795128E+02)*X
C+ 0.3976370E+02)*X + 0.9078037E+03)*X - 0.8681911E+02)*X - 0.19020
C95E+04) / (((((-0.6358937E-01*X - 0.3192929E+00)*X - 0.3645823E+01
C)*X - 0.4324374E+02)*X - 0.8681910E+02)*X - 0.1902095E+04)

IF(K)110,120,110
110  COSENO=-COSENO
120  RETURN
END
```

Resultados obtidos quando da comparação com a função
COS(X) do compilador FORTRAN IV

Tomando-se uma amostra de 1500 argumentos aleatórios no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, os resultados podem ser considerados satisfatórios pois 8,26% da solução encontrada coincidiu com a solução fornecida pela função COS(X); 13,8% dos resultados apresentou um erro relativo de aproximadamente 10^{-7} ; 55,61% um erro relativo de aproximadamente 10^{-6} e 22,33% apresentou um erro relativo de aproximadamente 10^{-5} .

3.3.3 - Função ARCO-TANGENTE

Para a função arco-tangente, realizamos o estudo a partir do intervalo $[0, 1]$ e para o ponto $x_0 = 0.4$. Os coeficientes de Thiele encontrados foram:

0.3805064	*	10^0
0.1160000	*	10^1
0.2500000	*	10^1
-0.5568000	*	10^0
-0.1689189	*	10^1
0.3176080	*	10^1
0.5926980	*	10^0
-0.4690112	*	10^1
-0.3026195	*	10^0
0.1233558	*	10^2
0.1323079	*	10^0

.

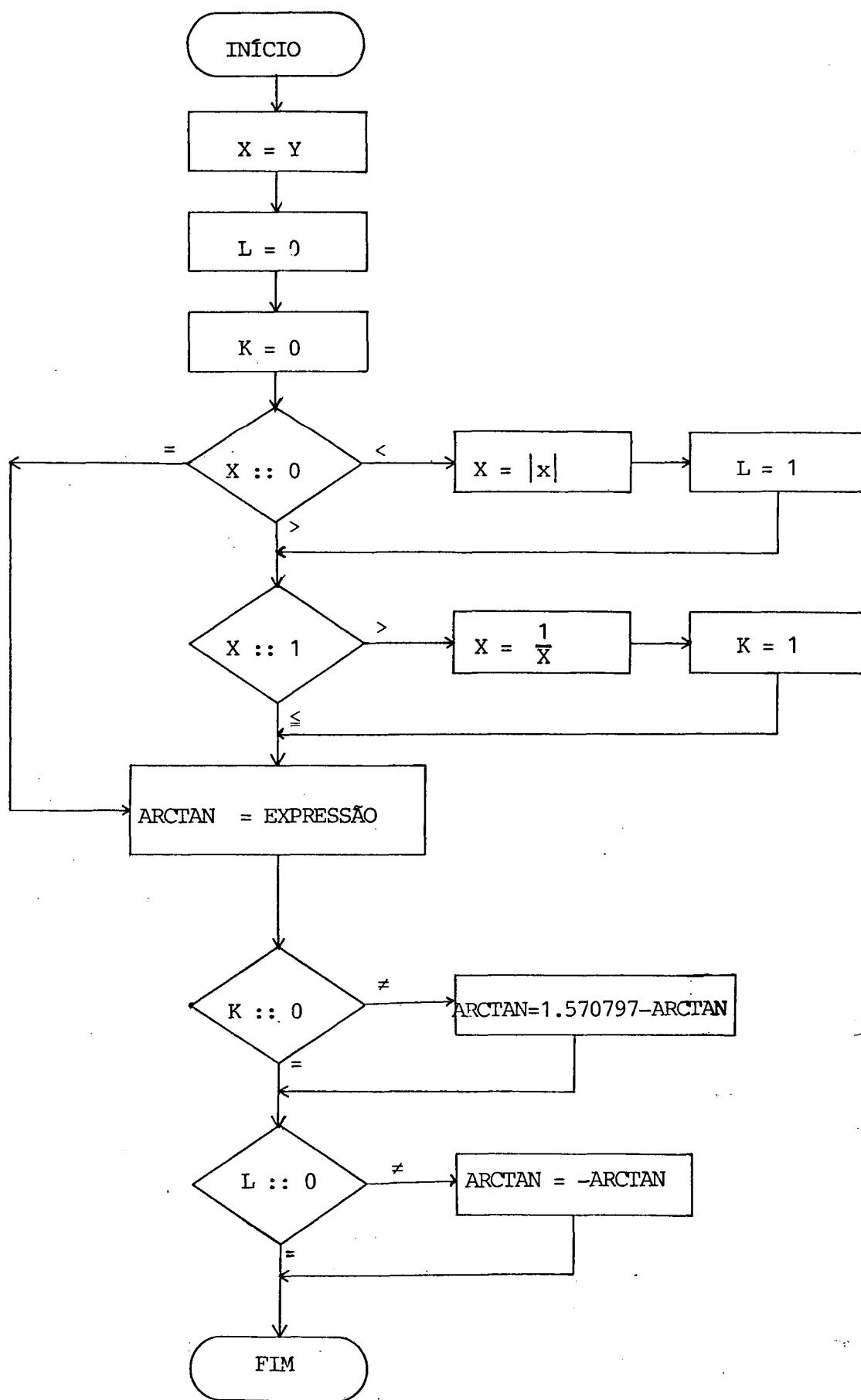
.

.

Consideramos o décimo-primeiro aproximante para o cálculo do valor numérico da função citada, ou seja:

$$f(x) = (x^6 - 29.69235x^5 - 74.94356x^4 - 202.3884x^3 - 125.01511x^2 - 191.2463x + 0.000001528810) / (-13.25156x^5 - 80.02397x^4 - 116.6596x^3 - 266.1316x^2 - 125.0518x - 191.2462)$$

Programação: Os cálculos necessários podem ser programados de acordo com o seguinte diagrama de blocos:



onde:

$$\begin{aligned} \text{EXPRESSÃO} = & (x^6 - 29.69235x^5 - 74.94356x^4 - 202.3884x^3 - \\ & - 125.01511x^2 - 191.2463x + 0.000001528810) / \\ & / (-13.25156x^5 - 80.02397x^4 - 116.6596x^3 - \\ & - 266.1316x^2 - 125.0518x - 191.2462) \end{aligned}$$

O subprograma FUNCTION poderia ser o seguinte:

```
FUNCTION ARCTAN(Y)
      Y- ARGUMENTO DA FUNCAO ARCO-TANGENTE
      ARCTAN- VALOR DA FUNCAO ARCO-TANGENTE

      X=Y
      L=0
      K=0

      IF(X)10,40,20
10    X=ABS(X)
      L=1

      20 IF(X-0.1E+01)40,40,30
      30 X=0.1E+01/X
      K=1

      40 ARCTAN=((((((0.1000000E+01*X - 0.2969235E+02)*X - 0.7494356E+02)*X
      C- 0.2023884E+03)*X - 0.1250511E+03)*X - 0.1912463E+03)*X + 0.15288
      C10E-05) / (((((-0.1325156E+02*X - 0.8002397E+02)*X - 0.1166596E+03
      C)*X - 0.2661316E+03)*X - 0.1250518E+03)*X - 0.1912462E+03)

      IF(K)50,60,50
50    ARCTAN=0.1570797E+01-ARCTAN

      60 IF(L)70,80,70
      70 ARCTAN=-ARCTAN
      80 RETURN
      END
```

Resultados obtidos quando da comparação com a função
ATAN(X) do compilador FORTRAN IV

Também para esta função, consideramos uma amostra de 1500 argumentos no intervalo [0, 1] e os resultados são considerados muito bons pois 9,13% da solução obtida coincidiu com a solução apresentada pela função ATAN(x); 1,53% apresentou um erro relativo de aproximadamente 10^{-7} ; 68,54% um erro relativo de aproximadamente 10^{-6} e 20,8% apresentou um erro relativo de aproximadamente 10^{-5} .

3.3.4 - Função TANGENTE-HIPERBÓLICA

Esta função necessitou de três desenvolvimentos, de acordo com os seguintes intervalos para o argumento:

a) intervalo [0, 1.7] com $x_0 = 0.75$

Os coeficientes de Thiele são:

$0.6351490 * 10^0$
 $0.1676205 * 10^1$
 $0.9392849 * 10^0$
 $-0.2028614 * 10^1$
 $-0.9392849 * 10^0$
 $0.8381024 * 10^1$
 $0.9392849 * 10^0$
 $-0.4733434 * 10^1$
 $-0.9392849 * 10^0$
 $0.1508584 * 10^2$
 $0.9392849 * 10^0$
.
.
.

e para a aproximação da função, neste intervalo, tomamos o no
no aproximante:

$$f(x) = (x^5 + 1.573199x^4 + 155.2277x^3 + 21.57091x^2 + 1248.222x + 0.0000448940) / (18.38102x^4 + 8.735312x^3 + 551.3141x^2 + 11.56739x + 1248.223)$$

b) intervalo (1.7, 4.0] com $x_0 = 2.6$

Coeficientes de Thiele:

$$\begin{aligned} &0.9890274 * 10^0 \\ &0.4581944 * 10^2 \\ &0.2206693 * 10^{-1} \\ &-0.1344583 * 10^3 \\ &-0.2206693 * 10^{-1} \\ &0.2290972 * 10^3 \\ &0.2206693 * 10^{-1} \\ &-0.3137361 * 10^3 \\ &-0.2206693 * 10^{-1} \\ &0.4123750 * 10^3 \\ &0.2206693 * 10^{-1} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}$$

e o aproximante considerado também foi o nono, ou seja:

$$f(x) = (x^5 + 213.5834x^4 + 501.2989x^3 + 1494.720x^2 + 5329.068x + 104.1849) / (239.0972x^4 + 232.3900x^3 + 3027.699x^2 + 799.6187x + 5742.462)$$

c) intervalo (4,9] com $x_0 = 5.5$

Coeficiente de Thiele:

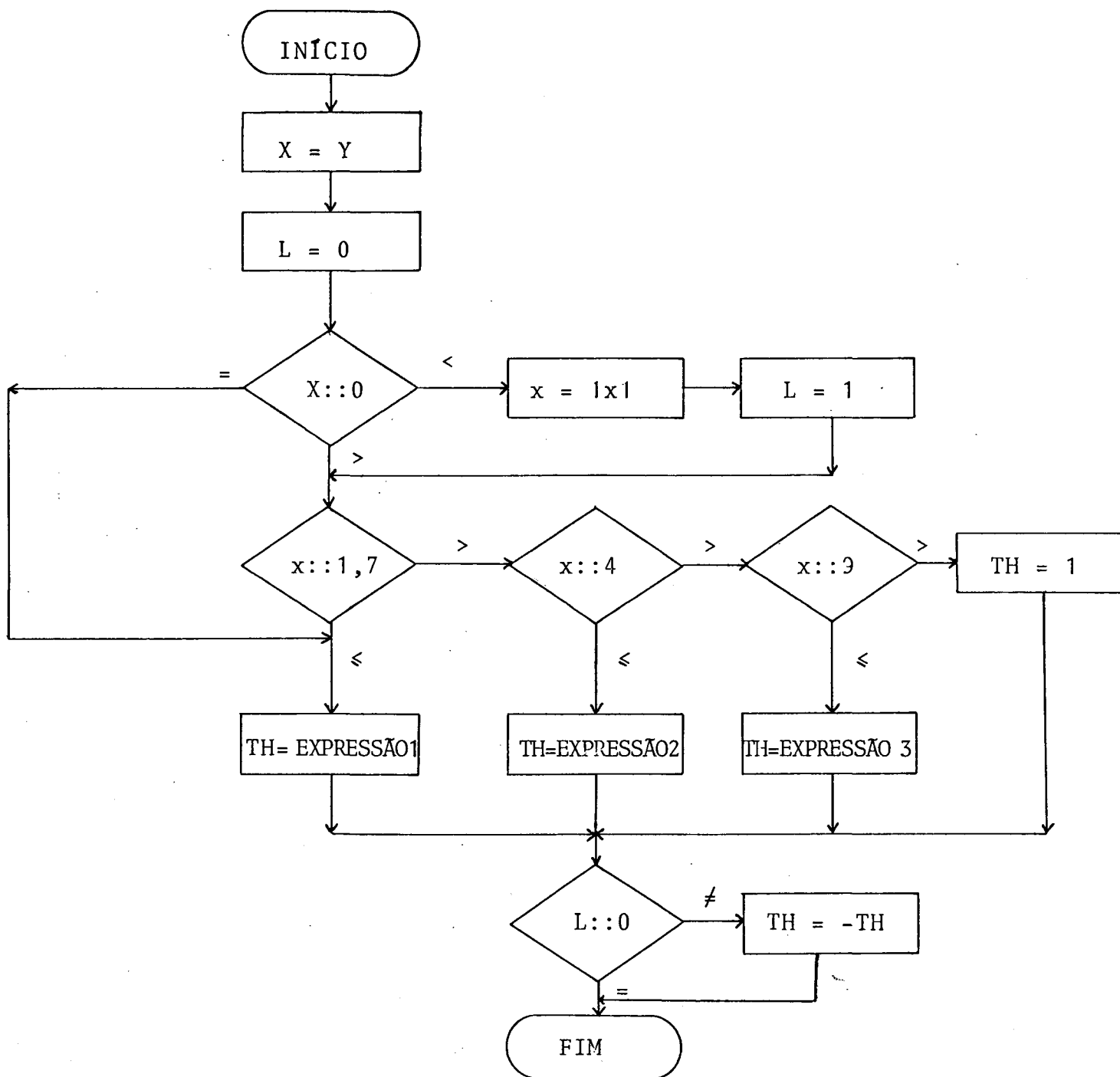
$$\begin{aligned} & 0.9999666 * 10^6 \\ & 0.1496904 * 10^5 \\ & 0.6680680 * 10^{-4} \\ & -0.4490411 * 10^5 \\ & -0.6680680 * 10^{-4} \\ & 0.7484518 * 10^5 \\ & 0.6680680 * 10^4 \\ & -0.1047762 * 10^6 \\ & -0.6680680 * 10^4 \\ & 0.1347213 * 10^6 \\ & 0.6680680 * 10^4 \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \end{aligned}$$

Para este intervalo novamente foi considerado o nono aproximante:

$$\begin{aligned} f(x) = & (x^5 + 74815.18x^4 - 748049.3x^3 + 3477283x^2 - 7584625x \\ & + 6663988) / (74855.18x^4 - 748701.8x^3 + 3482716x^2 - \\ & 7607738x + 6704238) \end{aligned}$$

Programação: Os cálculos podem ser efetuados ba seando-se no seguinte diagrama de blocos:





onde:

$$\text{EXPRESSÃO 1} = (x^5 + 1.573199x^4 + 155.2277x^3 + 21.57091x^2 + 1248.222x + 0.0000448940) / (18.38102x^4 + 8.735312x^3 + 551.3141x^2 + 11.56739x + 1248.233)$$

$$\text{EXPRESSÃO 2} = (x^5 + 213.5834x^4 + 501.2989x^3 + 1494.720x^2 + 5329.068x + 104.1849) / (239.0972x^4 + 239.3900x^3 + 3027.699x^2 + 799.6187x + 5742.462)$$

$$\begin{aligned} \text{EXPRESSÃO 3} = & (x^5 + 74815.18x^4 - 748049.3x^3 + 3477283x^2 - \\ & - 7584625x + 6663988) / (74855.18x^4 - 748701.8x^3 + \\ & + 348271x^2 - 7607738x + 6704238) \end{aligned}$$

e o subprograma correspondente FUNCTION, é codificado a seguir:

FUNCTION TH(Y)

```

C      Y- ARGUMENTO DA FUNCAO TANGENTE HIPERBOLICA
C      TH- VALOR DA FUNCAO TANGENTE HIPERBOLICA

      X=Y
      L=0

      IF(X)10,50,20
10     X=ABS(X)
      L=1

      20  IF(X-0.17E+01)50,50,30
      30  IF(X-0.40E+01)60,60,40
      40  IF(X-0.90E+01)70,70,80

      50  TH((((0.1000000E+01*X + 0.1573199E+01)*X + 0.1152277E+03)*X + 0.
C2157091E+02)*X + 0.1248222E+04)*X + 0.4489403E-04) / (((0.1838102
CE+02*X + 0.8735312E+01)*X + 0.5513141E+03)*X + 0.2156739E+02)*X +
C0.1248223E+04)

      GO TO 90

      60  TH((((0.1000000E+01*X + 0.2135834E+03)*X + 0.5052989E+03)*X + 0.
C1494720E+04)*X + 0.5329068E+04)*X + 0.1041849E+03) / (((0.2390972
CE+03*X + 0.2323900E+03)*X + 0.3027699E+04)*X + 0.7996187E+03)*X +
C0.5742462E+04)

      GO TO 90

      70  TH((((0.1000000E+01*X + 0.7481518E+05)*X - 0.7480493E+06)*X + 0.
C3477283E+07)*X - 0.7584625E+07)*X + 0.6663988E+07) / (((0.7485518
CE+05*X - 0.7487018E+06)*X + 0.3482716E+07)*X - 0.7607738E+07)*X +
C0.6704238E+07)

      GO TO 90

      80  TH=0.1E+01

      90  IF(L)100,110,100
100     TH=-TH
110     RETURN
      END

```

Resultados obtidos quando da comparação com a função
TANH(X) do Compilador FORTRAN IV

Para uma amostra de 1500 argumentos, 61,26% da solução obtida apresentou um erro relativo de aproximadamente 10^{-6} e as restantes 38,74% apresentou um erro de aproximadamente 10^{-5} .

3.2.5 - Função RAIZ QUADRADA

Tomamos para intervalo de aproximação $[1,100]$ e os argumentos não pertencentes a este intervalo são, através de divisões ou multiplicações sucessivas por 100, a ele convertidos. Assim, o valor real para \sqrt{x} é obtido através de correções (multiplicações ou divisões por 10) e naturalmente, a precisão será afetada pelos erros de arredondamento causados pelas operações aritméticas envolvidas. Esta função necessitou de três desenvolvimentos, de acordo com os seguintes intervalos para o argumento:

a) intervalo $[1,6]$ com $x_0=3$

Os coeficientes de Thiele obtidos são:

$$0.1732051 * 10^1$$

$$0.3464102 * 10^1$$

$$0.3464102 * 10^1$$

$$0.3464102 * 10^1$$

$$0.3464102 * 10^1$$

⋮

e foi tomado o nono aproximante para o cálculo do seu valor numérico

$$f(x) = \frac{(x^5 + 135x^4 + 1890x^3 + 5670x^2 + 3645x + 243)}{(17.32051x^4 + 623.5383x^3 + 3928.291x^2 + 5611.845x + 1402.961)}$$

b) intervalo (6,23] com $x_0 = 11$

Coeficientes de Thiele:

$$0.3316625 * 10^1$$

$$0.6633250 * 10^1$$

$$0.6633250 * 10^1$$

$$0.6633250 * 10^1$$

$$0.6633250 * 10^1$$

⋮

Tomamos para o cálculo do valor numérico, o nono aproximante, ou seja:

$$f(x) = \frac{(x^5 + 495x^4 + 25410x^3 + 279510x^2 + 658845x + 161051)}{(33.16625x^4 + 4377.945x^3 + 101130.5x^2 + 529731.3x + 485587)}$$

c) intervalo (23,100] com $x_0 = 48$

Os coeficientes de Thiele encontrados são:

$$0.6928203 * 10^1$$

$$0.1385641 * 10^2$$

$$0.1385641 * 10^2$$

$$0.1385641 * 10^2$$

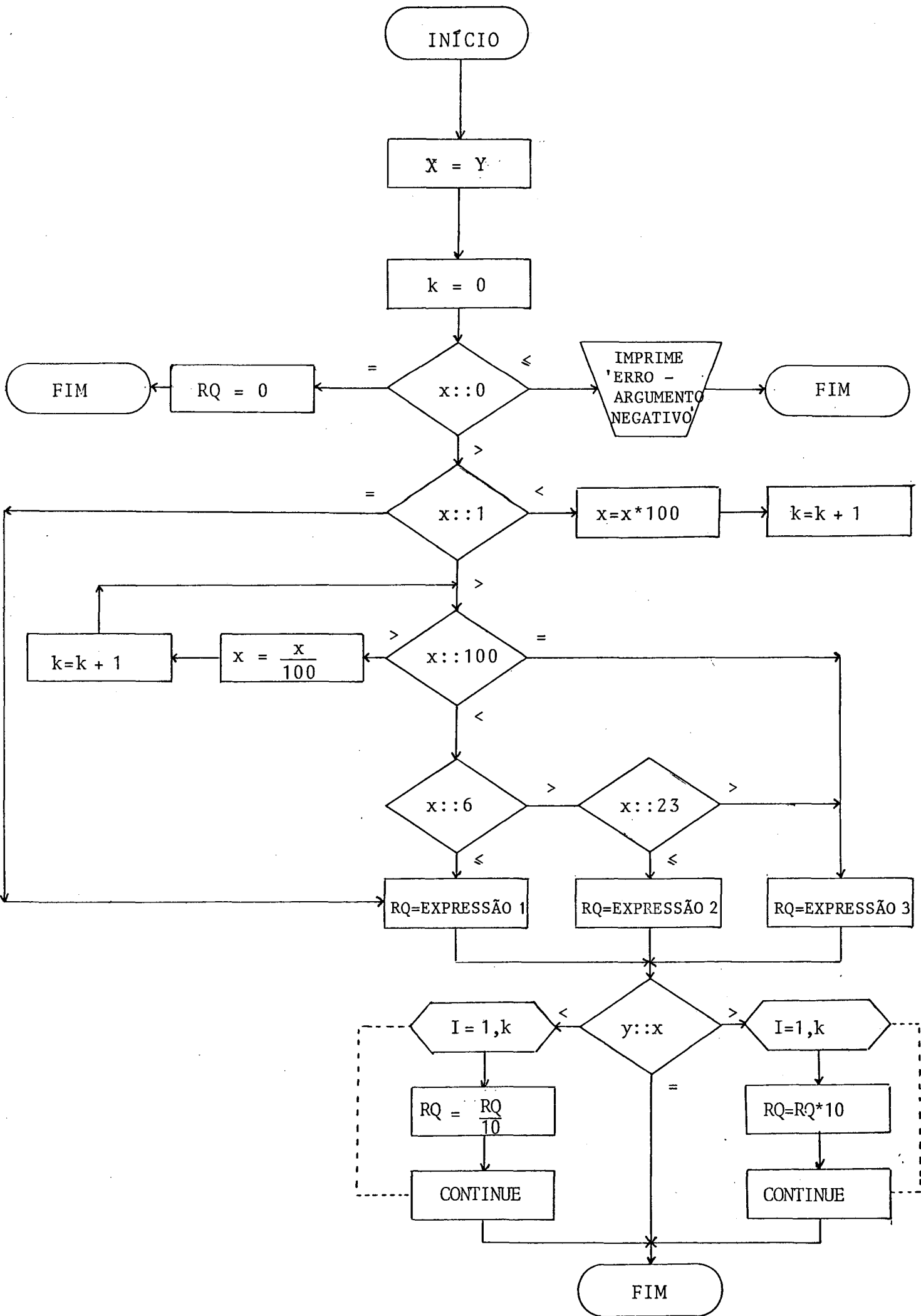
$$0.1385641 * 10^2$$

⋮

e consideramos o nono aproximante para o cálculo do seu valor numérico:

$$f(x) = (x^5 + 2160x^4 + 483840x^3 + 23224320x^2 + 238878700x + 254804000) / (69.28203x^4 + 39906.45x^3 + 4022570x^2 + 91944460x + 367777800)$$

Programação: Os cálculos necessários podem ser programados conforme o seguinte diagrama de blocos:



onde :

$$\text{EXPRESSÃO 1} = (x^5 + 135x^4 + 1890x^3 + 5670x^2 + 3645x + 243) / \\ / (17.32051x^4 + 623.5383x^3 + 3928.291x^2 + \\ + 5611.845x + 1402.961)$$

$$\text{EXPRESSÃO 2} = (x^5 + 495x^4 + 25410x^3 + 279510x^2 + 658845x + \\ + 161051) / (33.16625x^4 + 4377.945x^3 + 101130.5x^2 + \\ + 529731.3x + 485587)$$

$$\text{EXPRESSÃO 3} = (x^5 + 2160x^4 + 483840x^3 + \\ + 23224320x + 238878700x + 254804000) / \\ + (69.28203x^4 + 39906.45x^3 + 4022570x^2 + \\ + 91944460x + 367777800)$$

e o subprograma FUNCTION poderia ser o seguinte:

FUNCTION RQ(Y)

```

C      Y- ARGUMENTO DA FUNCAO RAIZ QUADRADA
C      RQ- VALOR DA FUNCAO RAIZ QUADRADA

      X=Y
      K=0

      IF(X)10,30,40
10     WRITE(6,20)
20     FORMAT(1X,'ERRO- ARGUMENTO NEGATIVO')
      RETURN

30     RQ=0.0E+00
      RETURN

40     IF(X-0.1E+01)50,100,60
50     X=X*0.1E+03
      K=K+1
      GO TO 40

60     IF(X-0.1E+03)80,120,70
70     X=X*0.1E-01
      K=K+1
      GO TO 60

80     IF(X-0.6E+01)100,100,90
90     IF(X-0.23E+02)110,110,120

100    RQ((((0.1000000E+01*X + 0.1350000E+03)*X + 0.1890000E+04)*X + 0.
C5670000E+04)*X + 0.3645000E+04)*X + 0.2430000E+03) / (((0.1732051
CE+02*X + 0.6235383E+03)*X + 0.3928291E+04)*X + 0.5611845E+04)*X +
C0.1402961E+04)

      GO TO 130

110    RQ((((0.1000000E+01*X + 0.4950000E+03)*X + 0.2541000E+05)*X + 0.
C2795100E+06)*X + 0.6588450E+06)*X + 0.1610510E+06) / (((0.3316625
CE+02*X + 0.4377945E+04)*X + 0.1011305E+06)*X + 0.5297313E+06)*X +
C0.4855870E+06)

      GO TO 130

120    RQ((((0.1000000E+01*X + 0.2160000E+04)*X + 0.4838400E+06)*X + 0.
C2322432E+08)*X + 0.2388787E+09)*X + 0.2548040E+09) / (((0.6928203
CE+02*X + 0.3990645E+05)*X + 0.4022570E+07)*X + 0.9194446E+08)*X +
C0.3677778E+09)

130    IF(Y-X)140,180,160

140    DO 150 I=1,K
      RQ=RQ*0.1E+00
150    CONTINUE
      RETURN

160    DO 170 I=1,K
      RQ=RQ*0.1E+02
170    CONTINUE
180    RETURN
      END

```

Resultados obtidos quando da comparação com a função
SQRT(X) do Compilador FORTRAN IV

Analisando uma amostra de 1500 argumentos aleatórios no intervalo [1,100] encontramos resultados muito bons, pois 14,4% da solução aproximada coincidiu com a solução apresentada pela função SQRT(X); 73,8% dos resultados apresentou um erro relativo de aproximadamente 10^{-6} e 11,8% apresentou um erro relativo de aproximadamente 10^{-5} .

3.3.6 - Função LOGARÍTIMO

Para esta função, dadas as suas propriedades, consideramos o intervalo [1,10] para a aproximação. Foram necessários três desenvolvimentos, de acordo com os seguintes intervalos para o argumento:

a) intervalo [1,1.46] com $x_0 = 1$

Os coeficientes de Thiele obtidos são:

$$0.0000000 * 10^0$$

$$0.1000000 * 10^1$$

$$0.2000000 * 10^1$$

$$0.3000000 * 10^1$$

$$0.5000000 * 10^1$$

$$0.6666667 * 10^0$$

$$0.7000000 * 10^1$$

$$0.5000000 * 10^0$$

⋮

e para a aproximação, tomamos o oitavo aproximante:

$$f(x) = (4.166667x^4 + 26.666667x^3 - 26.666667x - 4.166667) / (x^4 + 16x^3 + 36x^2 + 16x + 1)$$

b) intervalo (1.46, 4.48] com $x_0 = 2.5$

Coeficientes de Thiele:

$$0.9162907 * 10^0$$

$$0.2500000 * 10^1$$

$$0.2000000 * 10^1$$

$$0.7500000 * 10^1$$

$$0.1000000 * 10^1$$

$$0.1250000 * 10^2$$

$$0.6666667 * 10^0$$

$$0.1750000 * 10^2$$

$$0.5000000 * 10^0$$

$$0.2250000 * 10^2$$

⋮

Tomamos para o cálculo do seu valor numérico, o décimo aproximante:

$$f(x) = (5.482957x^5 + 192.6848x^4 + 989.3484x^3 + 390.0376x^2 - 1221.070x - 356.4820) / (x^5 + 62.5x^4 + 625x^3 + 1562.5x^2 + 976.5625x + 97.65625)$$

c) intervalo (4.48, 10] com $x_0 = 7$

Os coeficientes de Thiele:

$$0.1945910 * 10^1$$

$$0.7000000 * 10^1$$

$$0.2000000 * 10^1$$

0.2100000 * 10²

0.1000000 * 10¹

0.3500000 * 10²

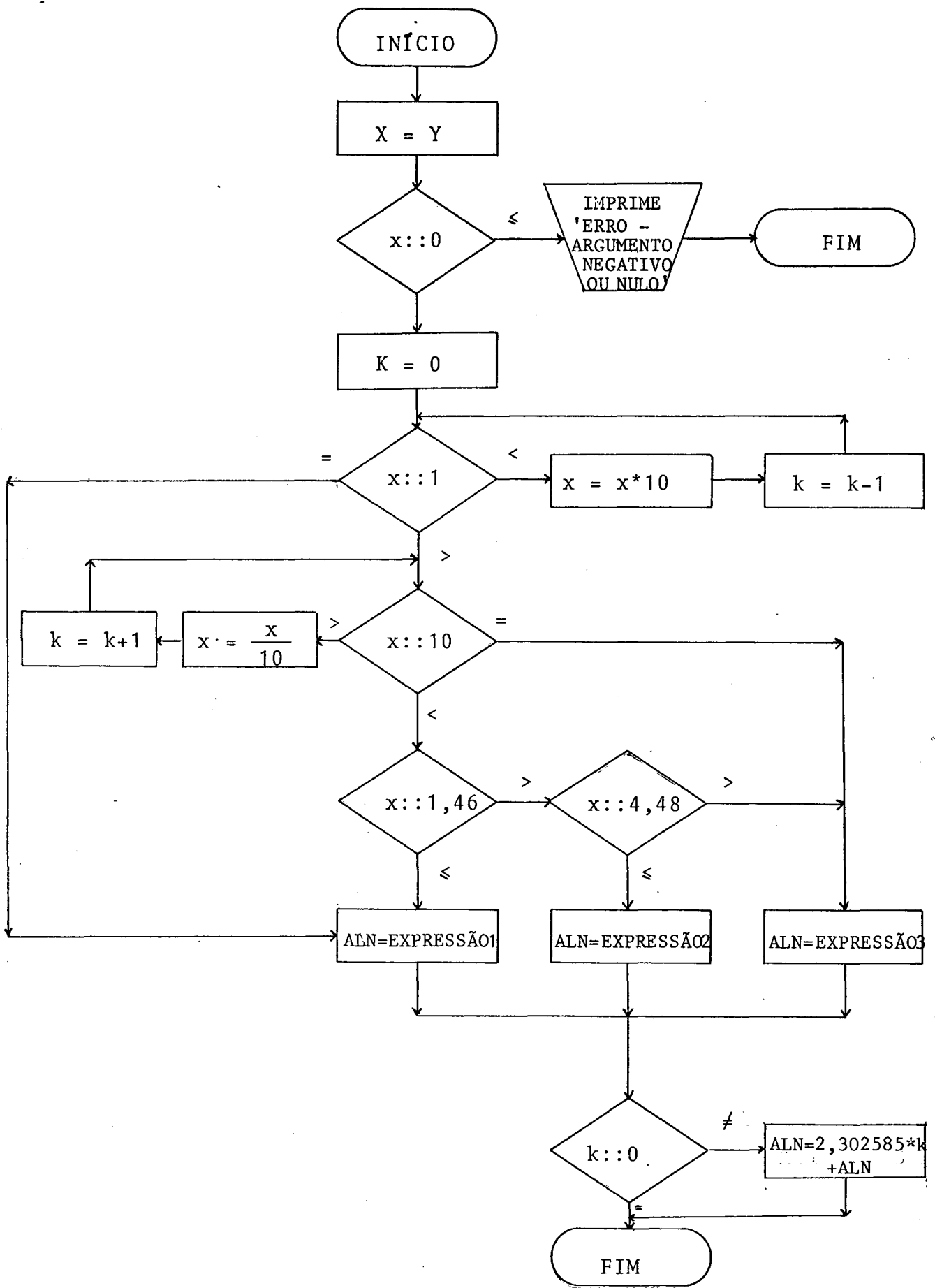
0.6666667 * 10⁰

0.4900000 * 10²

e o seu valor numérico é calculado através do oitavo aproximação, ou seja:

$$f(x) = (6.112577x^4 + 404.6086x^3 + 3432.586x^2 + 1532.488x - 5332.036) / (x^4 + 112x^3 + 1764x^2 + 5488x + 2401)$$

Programação: Utilizamos o seguinte diagrama de blocos:



onde

$$\text{EXPRESSÃO 1} = (4.166667x^4 + 26.66667x^3 - 26.666667x - 4.166667) / (x^4 + 16x^3 + 36x^2 + 16x + 1)$$

$$\text{EXPRESSÃO 2} = (5.482957x^5 + 192.6848x^4 + 989.3484x^3 + 390.0376x^2 - 1221.070x - 356.4820) / (x^5 + 62.5x^4 + 625x^3 + 1562.5x^2 + 976.5625x + 97.65625)$$

$$\text{EXPRESSÃO 3} = (6.112577x^4 + 404.6086x^3 + 3432.586x^2 + 1532.488x - 5332.036) / (x^4 + 112x^3 + 1764x^2 + 5488x + 2401)$$

e codificamos o seguinte subprograma FUNCTION:

FUNCTION ALN(Y)

C Y- ARGUMENTO DA FUNCAO LOGARITMO NATURAL
 C ALN- VALOR DA FUNCAO LOGARITMO NATURAL

X=Y

IF(X)10,10,30

10 WRITE(6,20)

20 FORMAT(1X,'ERRO- ARGUMENTO NEGATIVO OU NULO')

RETURN

30 K=0

40 IF(X-0.1E+01)50,100,60

50 X=X*0.1E+02

K=K-1

GO TO 40

60 IF(X-0.1E+02)80,120,70

70 X=X*0.1E+00

K=K+1

GO TO 60

80 IF(X-0.146E+01)100,100,90

90 IF(X-0.448E+01)110,110,120

100 ALN=(((0.4166667E+01*X + 0.2666667E+02)*X + 0.0000000E+00)*X - 0.
 C2666667E+02)*X - 0.4166667E+01) / (((0.1000000E+01*X + 0.1600000E
 C+02)*X + 0.3600000E+02)*X + 0.1600000E+02)*X + 0.1000000E+01)

GO TO 130

110 ALN=(((0.5482957E+01*X + 0.1926848E+03)*X + 0.9893484E+03)*X + 0.
 C.3900376E+03)*X - 0.1221070E+04)*X - 0.3564820E+03) / (((0.10000
 C00E+01*X + 0.6250000E+02)*X + 0.6250000E+03)*X + 0.1562500E+04)*X
 C+ 0.9765625E+03)*X + 0.9765625E+02)

GO TO 130

120 ALN=(((0.6112577E+01*X + 0.4046086E+03)*X + 0.3432586E+04)*X + 0.
 C1532488E+04)*X - 0.5332036E+04) / (((0.1000000E+01*X + 0.1120000E
 C+03)*X + 0.1764000E+04)*X + 0.5488000E+04)*X + 0.2401000E+04)

130 IF(K)140,150,140

140 ALN=0.2302585E+01*K + ALN

150 RETURN

END

Resultados obtidos quando da comparação com a função
ALOG(X) do Compilador FORTRAN IV

Os resultados obtidos, para uma amostra de 1500 argumentos, são considerados satisfatórios pois 20,33% da solução encontrada coincidiu com a solução apresentada pela função ALOG(X) do Compilador FORTRAN; 58,07% dos resultados apresentou um erro de aproximadamente 10^{-6} e 21,6% um erro relativo de aproximadamente 10^{-5}

3.5.7 - Função EXPONENCIAL

Para esta função, realizamos o estudo a partir do intervalo [0,10]. Considerando este intervalo, a função exponencial necessitou de cinco desenvolvimentos, de acordo com os seguintes sub-intervalos para o argumento:

a) sub-intervalo [0,2] com $x_0 = 1$

Os coeficientes de Thiele são:

0.2718282	10^1
0.3678794	10^0
-0.5436564	10^1
-0.1103638	10^1
0.5436564	10^1
0.1839397	10^1
-0.5436564	10^1
-0.2575156	10^1
⋮	

e tomamos o oitavo aproximante para o cálculo do seu valor numérico:

$$f(x) = (2.718282x^4 + 43.49251x^3 + 342.5035x^2 + 1456.999x + 2721) / (x^4 + 24x^3 + 246x^2 - 1264x + 2721)$$

b) sub-intervalo (2,4] com $x_0 = 3$

Coeficientes de Thiele:

$$\begin{aligned} &0.2008554 * 10^2 \\ &0.4978707 * 10^{-1} \\ &-0.4017107 * 10^2 \\ &-0.1493612 * 10^0 \\ &0.4017107 * 10^2 \\ &0.2489353 * 10^0 \\ &-0.4017107 * 10^2 \\ &-0.3485095 * 10^0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Para este sub-intervalo, tomamos o oitavo con vergente:

$$f(x) = (20.08554x^4 + 160.6843x^3 + 1084.619x^2 + 3856.423x + 6447.457) / (x^4 + 32x^3 + 414x^2 - 2568x + 6441)$$

c) sub-intervalo (4,6] com $x_0 = 5$

Coeficientes de Thiele:

$$\begin{aligned} &0.1484132 * 10^3 \\ &0.6737947 * 10^{-2} \\ &-0.2962863 * 10^3 \\ &-0.2021384 * 10^{-1} \\ &0.2968263 * 10^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0.3368973 * 10^{-1} \\
& -0.2968263 * 10^3 \\
& -0.4716563 * 10^{-1} \\
& \vdots
\end{aligned}$$

Foi considerado, também para este sub-intervalo, o oitavo convergente:

$$f(x) = (148.4132x^4 - 0.00000000006880896x^3 + 4452.395x^2 + 5936.526x + 15583.38) / (x^4 - 40x^3 + 630x^2 - 4640x + 13505)$$

d) sub-intervalo (6,8] com $x_0 = 7$

Coeficientes de Thiele:

$$\begin{aligned}
& 0.1096633 * 10^4 \\
& 0.9118882 * 10^{-3} \\
& -0.2193266 * 10^4 \\
& -0.2735646 * 10^{-2} \\
& 0.2193266 * 10^4 \\
& 0.4559410 * 10^{-2} \\
& -0.2193266 * 10^4 \\
& -0.6383174 * 10^{-2} \\
& \vdots
\end{aligned}$$

Tomamos, para este sub-intervalo, o oitavo a proximante:

$$f(x) = (1096.633x^4 - 8773.065x^3 + 59218.19x^2 - 122822.9x + 176559.7) / (x^4 - 48x^3 + 894x^2 - 7672x + 25641)$$

e) sub-intervalo (8,10] com $x_0 = 9$

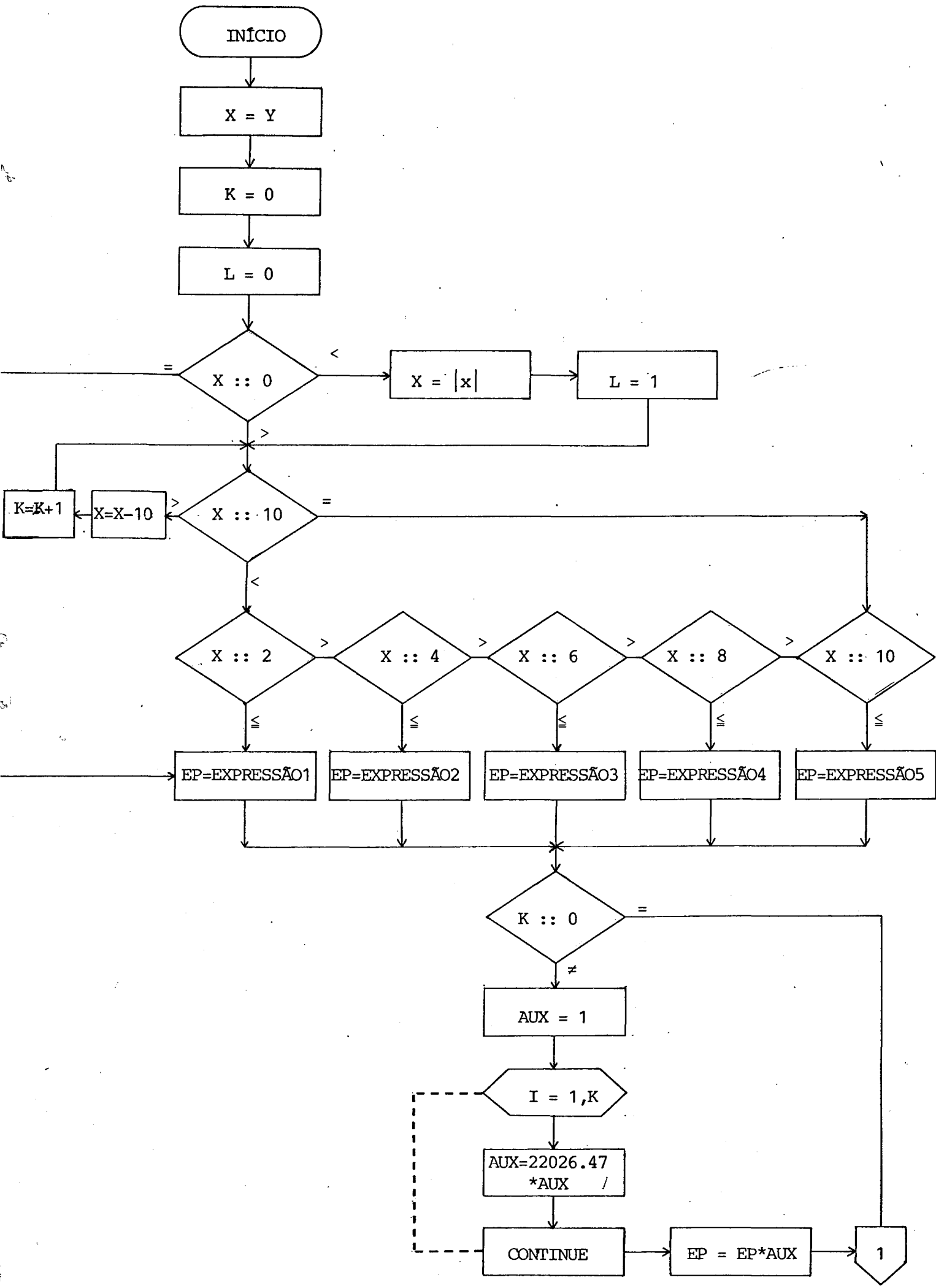
Coeficientes de Thiele:

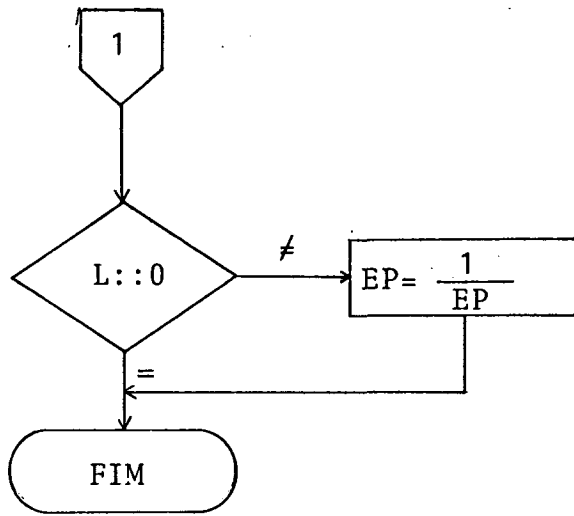
$0.8103084 * 10^4$
 $0.1234098 * 10^{-3}$
 $-0.1620617 * 10^5$
 $-0.3702294 * 10^{-3}$
 $0.1620617 * 10^5$
 $0.6170490 * 10^{-3}$
 $-0.1620617 * 10^5$
 $-0.8638686 * 10^{-3}$
 \vdots

Consideramos, para este sub-intervalo, o oitavo aproximante:

$$f(x) = (8103.084x^4 - 129649.3x^3 + 1020989x^2 - 3695006x + 5518200) / (x^4 - 56x^3 + 1206x^2 - 11856x + 44961)$$

Programação: Os cálculos podem ser efetuados conforme o seguinte diagrama de blocos:





onde:

$$\text{EXPRESSÃO 1} = (2.718282x^4 + 43.49251x^3 + 342.5035x^2 + 1456.999x + 2721) / (4^4 + 24x^3 + 246x^2 - 1264x + 2721)$$

$$\text{EXPRESSÃO 2} = (20.08554x^4 + 160.6843x^3 + 1084.619x^2 + 3856.423x + 6447.457) / (x^4 + 32x^3 + 414x^2 + 2568x + 6441)$$

$$\text{EXPRESSÃO 3} = (148.4132x^4 - 0.00000000006880896x^3 + 4452.395x^2 + 5936.526x + 15583.38) / (x^4 - 40x^3 + 630x^2 - 4640x + 13505)$$

$$\text{EXPRESSÃO 4} = (1096.633x^4 - 8773.065x^3 + 59218.19x^2 - 122822.9x + 176559.7) / (x^4 - 48x^3 + 894x^2 - 7672x + 25641)$$

$$\text{EXPRESSÃO 5} = (8103.084x^4 - 129649.3x^3 + 1020989x^2 - 3695006x + 5518200) / (x^4 - 56x^3 + 1206x^2 - 11856x + 44961)$$

e o subprograma correspondente poderia ser:

FUNCTION EP(Y)

C Y- ARGUMENTO DA FUNCAO EXPONENCIAL
 C EP- VALOR DA FUNCAO EXPONENCIAL

X=Y
 K=0
 L=0

10 IF(X)10,80,20
 X=ABS(X)
 L=1

20 IF(X-0.1E+02)40,120,30
 30 X=X-0.1E+02
 K=K+1
 GO TO 20

40 IF(X-0.2E+01)80,80,50
 50 IF(X-0.4E+01)90,90,60
 60 IF(X-0.6E+01)100,100,70
 70 IF(X-0.8E+01)110,110,120

80 EP=(((0.2718282E+01*X + 0.4349251E+02)*X + 0.3425035E+03)*X + 0.1
 C456999E+04)*X + 0.2721000E+04) / (((0.1000000E+01*X - 0.2400000E+
 C02)*X + 0.2460000E+03)*X - 0.1264000E+04)*X + 0.2721000E+04)

GO TO 130

90 EP=(((0.2008554E+02*X + 0.1606843E+03)*X + 0.1084619E+04)*X + 0.3
 C856423E+04)*X + 0.6447457E+04) / (((0.1000000E+01*X - 0.3200000E+
 C02)*X + 0.4140000E+03)*X - 0.2568000E+04)*X + 0.6441000E+04)

GO TO 130

100 EP=(((0.1484132E+03*X - 0.6880896E-10)*X + 0.4452395E+04)*X + 0.5
 C936526E+04)*X + 0.1558338E+05) / (((0.1000000E+01*X - 0.4000000E+
 C02)*X + 0.6300000E+03)*X - 0.4640000E+04)*X + 0.1350500E+05)

GO TO 130

110 EP=(((0.1096633E+04*X - 0.8773065E+04)*X + 0.5921819E+05)*X - 0.1
 C228229E+06)*X + 0.1765597E+06) / (((0.1000000E+01*X - 0.4800000E+
 C02)*X + 0.8940000E+03)*X - 0.7672000E+04)*X + 0.2564100E+05)

GO TO 130

120 EP=(((0.8103084E+04*X - 0.1296493E+06)*X + 0.1020989E+07)*X - 0.3
 C695006E+07)*X + 0.5518200E+07) / (((0.1000000E+01*X - 0.5600000E+
 C02)*X + 0.120600E+04)*X - 0.1185600E+05)*X + 0.4496100E+05)

130 IF(K)140,160,140

140 AUX=0.1E+01
 DO 150 I=1,K
 AUX=0.2202647E+05*AUX

150 CONTINUE
 EP=EP*AUX

160 IF(L)170,180,170

170 EP=0.1E+01/EP

180 RETURN
 END

Resultados obtidos quando da comparação com a função
EXP(X) do Compilador FORTRAN IV

Analisando uma amostra de 1500 argumentos aleatórios no intervalo [0,10], encontramos resultados razoáveis pois 6,46% da solução coincidiu com a solução apresentada pela função EXP(X); 45,34% dos resultados apresentou um erro relativo de aproximadamente 10^{-6} e os restantes 48,2% apresentou um erro relativo de aproximadamente 10^{-5} .

COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES

No capítulo anterior, investigamos algoritmos computacionais para representar e calcular funções através de frações contínuas de Thiele. Para cada uma das funções estudadas, foram realizados inúmeros testes computacionais para a localização do ponto ótimo x_0 ; a seguir foram gerados os coeficientes de Thiele e finalmente elaborados e programados os novos modelos matemáticos. Os resultados alcançados foram bastante animadores, tendo em vista os particulares intervalos de aproximação tomados para cada uma das funções.

Como nossa pesquisa está vinculada principalmente ao problema de precisão computacional nos resultados, apresentamos a seguir, uma tabela comparativa para análise do erro relativo máximo nos nossos testes, que chamamos E_{FC} , com o erro relativo máximo da função de biblioteca do Compilador FORTRAN IV do Sistema Operacional DOS/370, que chamaremos E_{DOS} :

Ressaltamos que os erros relativos máximos encontrados para as funções aproximadas por frações contínuas de Thiele, foram calculados em relação aos valores apresentados pelas funções de biblioteca correspondentes; enquanto que os erros das funções de biblioteca foram extraídos de [13]. Salientamos ainda que, os máximos erros relativos encontrados para as funções, foram tomados de uma amostra de 1500 argumentos uniformemente distribuídos no intervalo em questão.

FUNÇÃO	INTERVALO DO ARGUMENTO	ERRO RELATIVO MÁXIMO DA FUNÇÃO DE BIBLIOTECA (E_{DOS})	ERRO RELATIVO MÁXIMO DA FUNÇÃO CALCULADA ATRAVÉS DE FRAÇÃO CONTÍNUA DE THIELE (E_{FC})
SENO	$x \leq \frac{\pi}{2}$	$1.59 \cdot 10^{-6}$	$1.34 \cdot 10^{-6}$
	$\frac{\pi}{2} < x \leq 10$	-	$5.69 \cdot 10^{-5}$
	$10 < x \leq 100$	-	$2.48 \cdot 10^{-4}$
COSENO	$0 \leq x \leq \pi$	-	$8.90 \cdot 10^{-6}$
	$-10 \leq x < 0$ e $\pi < x \leq 10$	-	$7.63 \cdot 10^{-5}$
	$10 < x \leq 100$	-	$4.97 \cdot 10^{-4}$
ARCO-TANGENTE	tangente de y , $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$9.75 \cdot 10^{-7}$	$4.10 \cdot 10^{-6}$
TANGENTE HIPERBÓLICA	$ x \leq 0.54931$	$8.12 \cdot 10^{-7}$	$9.69 \cdot 10^{-6}$
	$0.54931 < x \leq 5$	$5.74 \cdot 10^{-7}$	$9.84 \cdot 10^{-6}$
RAIZ QUADRADA	—	$8.70 \cdot 10^{-7}$	$3.69 \cdot 10^{-6}$
LOGARÍTIMO	$0.5 \leq x \leq 1.5$	-	$8.32 \cdot 10^{-6}$
EXPONENCIAL	$ x \leq 1$	$4.65 \cdot 10^{-7}$	$1.73 \cdot 10^{-6}$
	$ x \leq 170$	$4.69 \cdot 10^{-7}$	$3.28 \cdot 10^{-5}$

Constatamos então que a precisão nos resultados é mais afetada principalmente quando trabalhamos com argumentos não pertencentes ao intervalo considerado para a expansão da função através de frações contínuas de Thiele. Isto deve-se aos erros de arredondamento ocorridos durante a conversão de argumentos. Mesmo assim, os resultados obtidos podem ser considerados bons. Caso tivéssemos alcançado melhores resultados teríamos estendido a pesquisa a outras funções matemáticas visando o aprimoramento da biblioteca de funções do Compilador FORTRAN, ou seja, todas as funções possíveis seriam calculadas através de procedimentos uniformes: utilização das frações contínuas de Thiele.

Dando continuidade à pesquisa proposta, analisamos o espaço da memória ocupado pelos nossos algoritmos. Era esperado que os resultados apresentassem grandes diferenças pois as funções de biblioteca do Compilador FORTRAN IV do Sistema Operacional DOS/370 encontram-se em linguagem de baixo nível enquanto que as nossas funções foram codificadas em linguagem de alto nível. A tabela a seguir, mostra a quantidade de memória (bytes) utilizada para o cálculo das funções desenvolvidas através de frações contínuas de Thiele.

FUNÇÃO	QUANTIDADE DE MEMÓRIA DA FUNÇÃO DE BIBLIOTECA DO COMPILADOR FORTRAN IV (BYTES)	QUANTIDADE DE MEMÓRIA DA FUNÇÃO DESENVOLVIDA ATRAVÉS DE FRAÇÃO CONTÍNUA DE THIELE. (BYTES)
SENO	304	886
COSENO	304	854
ARCO-TANGENTE	384	674
TANGENTE HIPERBÓLICA	528	936
RAIZ QUADRADA	184	1218
LOGARÍTMO	288	1084
EXPONENCIAL	304	1348

Pretendíamos ainda nesta pesquisa, comparar o tempo de processamento dos algoritmos propostos para as funções matemáticas com os algoritmos integrantes do compilador FORTRAN IV, mas como trabalhamos num sistema multi-usuário, o tempo medido não refletiria a realidade.

BIBLIOGRAFIA

- [01] BARBOSA, R.M. - Tópicos de teoria dos números, Parte I. Araraquara (SP), apostila, 1977.
- [02] BLANCH, G. - Numerical Evaluation of Continued Fractions. Siam Review, vol. 6 (4): 383-421, out. 1964.
- [03] CIRODE, P.L. - Leçons d'algèbre. Paris, Librairie de L. Hachette et Cte, 1854.
- [04] DEMIDOVICH, B.P.; MARON, I.A. - Computacional Mathematics. Moscow, Mir Publishers, 1973.
- [5] HANDSCOMB, D.C. - Methods of Numerical Approximations. Pergamon Press Ltd, 1966.
- [06] HARDY, G.H.; WRIGHT, E.M. - An introduction to the theory of numbers. Oxford, Clarendon Press, 1975.
- [07] HART, J.F. e outros - Computer Approximations. New York, John Wiley & Sons, Inc.
- [08] HAYDEN, T.L. - Continued Fraction Approximation to Functions. Numerische Mathematik, vol. 7:292-309, 1965.
- [09] HEHL, M.E. - Alguns aspectos práticos da teoria de frações contínuas. Revista Ciência e Cultura, vol.28(2) : 187-190, fev. 1976.
- [10] HEHL, M.E. - Cálculo de logarítmos através de frações contínuas. Revista Ciência e Cultura, vol.29 (6):672,675, jun. 1977.

- [11] HEHL, M.E. - SPCD - Um Sistema de Programação para o Cálculo de Derivadas Sucessivas de Funções à Variáveis Reais. São Carlos (SP), tese de Livre Docencia apresentada à USP, 1977.
- [12] HILDEBRAND, F.G. - Introduction to numerical analysis. New York, Mc Graw-Hill Book Co., 1956.
- [13] IBM SYSTEMS REFERENCE LIBRARY - IBM System/360; FORTRAN IV Library Subprograms. New York, International Business Machines, Co., 1966. (Form number C28-6596).
- [14] KHINCHIN, A. YA. - Continued Fractions. The University of Chicago Press, 1964.
- [15] KHOVANSKII, A.N. - The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory. The Netherlands, P. Noordhoff, Ltd. Groningen, 1963.
- [16] LEIGHTON, W.; SCOTT, W.T. - A general continued fraction expansion. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 45: 596-605, 1939.
- [17] MILNE-THOMSON, L.M. - Calculus of Finite Differences. London, Macmillan & Co., Ltd., 1933.
- [18] MOORE, C.G. - An Introduction to Continued Fractions. The Nacional Council of Teachers of Mathematics, 1964.
- [19] STRANGES, N.C. - Elementos de Matemática. Rio de Janeiro, A casa do Livro Ltda., 1944.

[20] VELOSO, P.D. - Frações contínuas e análise combinatória.

Rio de Janeiro, Ao livro técnico Ltda., 1956.

[21] WALL, H.S. - Analytic teory of continued fractions. Bronx,

New York, Chelsea Publishing Co., 1967.