Medidas relacionadas e certos produtos escalares de Sobolev

Andrea Cristina Berti

Orientador:

Prof. Dr. ***Alagacone Sri Ranga***

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Ciências de Computação e Matemática Computacional.

USP – São Carlos
Novembro/2001

Data da Defesa:	29/11/2001
Visto do Orientador:	

"Pouco importa a ousadia dos seus planos.
Eles podem vir da vivência de um ancião
ou da inocência de um menino.
O importante é você crer na
juventude que existe
dentro de você."

Zé Geraldo

Agradecimentos

Aos meus pais, pela confiança apoio constantes.

Ao Prof. A. Sri Ranga. pela orientação segura deste trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A companheira de curso, Luciane, pela amizade tão importante.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuiram para a realização deste trabalho.

Resumo

O objetivo desta tese é estudar algumas relações envolvendo polinômios ortogonais de Sobolev associados ao produto interno $\langle f, g \rangle_S = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\mu_0(x) + \int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)d\mu_1(x)$, onde μ_0 e μ_1 são medidas especiais, de maneira que os resultados obtidos são simples e de fácil manipulação. A forma em que abordamos nossos estudos sobre estes polinômios, além de dar uma visão diferente do assunto, permite unificar os estudos considerados por diversos autores.

Abstract

The main purpose of this thesis is to study certain relations regarding orthogonal polynomials associated with the Sobolev inner product $\langle f, g\rangle_S = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\mu_0(x) + \int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)d\mu_1(x)$. The measures μ_0 and μ_1 are chosen in order that the relations obtained are very simple and easy to manipulate. The new technique that we have employed to study the problem, appart from giving a different vision of this topic, permits us to unify the many known results and to obtain some new results.

Índice

Introdução

Sejam $d\psi_k$, $k = 0, 1, ..., N$, medidas positivas na reta real $\mathbb{R}$, tendo suporte limitado ou não. Consideremos o espaço de $H_N(\mathbb{R})$ das funções diferenciáveis até ordem N em $\mathbb{R}$ satisfazendo

$$\sum_{k=0}^{N} \int_{\mathbb{R}} [f^{(k)}(x)]^2 d\psi_k(x) < \infty. \tag{1}$$

Tal espaço é chamado um espaço de Sobolev. Suponhamos que estas medidas sejam tais que o espaço dos polinômios $\mathbb{P}$ é um subespaço de $H_N(\mathbb{R})$. Consideremos $\mathbb{P}$ com o produto interno

$$\langle p, q \rangle_S = \sum_{k=0}^{N} \int_{\mathbb{R}} p^{(k)}(x) q^{(k)}(x) d\psi_k(x), \qquad p, q \in \mathbb{P}, \tag{2}$$

e norma associada $\|p\|_S^2 = \langle p, p \rangle_S$.

Os polinômios ortogonais com respeito a este produto interno são chamados polinômios ortogonais de Sobolev. Muitos autores vêm estudando estes polinômios, especialmente no caso em que $N = 1$. Neste caso, é usual escrever

$$\langle p, q \rangle_S = \langle p, q \rangle_{\psi_0} + \kappa \langle p', q' \rangle_{\psi_1} = \int_{\mathbb{R}} p(x) q(x) d\psi_0(x) + \kappa \int_{\mathbb{R}} p'(x) q'(x) d\psi_1(x), \tag{3}$$

onde $\kappa \geq 0$.

A motivação inicial para o estudo de polinômios ortogonais deste tipo surge na teoria de aproximação, mais precisamente no problema de aproximação por mínimos quadrados. Neste caso, uma função f e sua derivada f' são aproximadas simultaneamente por um polinômio $\hat{Q}(x)$ de grau n que satisfaz

$$\begin{aligned} \|\hat{Q} - f\|_S^2 &= \inf_{Q \in \mathbb{P}_n} \|Q - f\|_S^2 \\ &= \inf_{Q \in \mathbb{P}_n} \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}} [Q(x) - f(x)]^2 d\psi_0(x) + \kappa \int_{\mathbb{R}} [Q'(x) - f'(x)]^2 d\psi_1(x) \right) \right\}, \end{aligned}$$

onde $I\!\!P$ é o espaço dos polinômios de uma variável com coeficientes complexos e $I\!\!P_n$ o subespaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n. O polinômio $\hat{Q}$ é a melhor aproximação se, e somente se,

$$\langle f - \hat{Q}, Q \rangle_S = 0, \qquad Q \in I\!\!P_n.$$

Se $\{Q_i,\ i = 1, 2, ...n\}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação ao produto interno (3), então temos

$$\hat{Q}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q_i(x),$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ são obtidas através da solução do sistema linear

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle Q_i, Q_j \rangle_S = \langle f, Q_j \rangle_S, \qquad j = 1, ..., n.$$

Assim

$$\hat{Q}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle f, Q_i \rangle_S}{\langle Q_i, Q_i \rangle_S} Q_i(x).$$

Portanto, para se obter a melhor aproximação deste tipo, é de grande interesse utilizar uma base de polinômios ortogonais de Sobolev. O problema de aproximação por mínimos quadrados a partir de polinômios ortogonais de Sobolev aparece inicialmente em 1947 em um trabalho de Lewis [27].

A teoria de polinômios ortogonais de Sobolev é objeto de pesquisa de muitos autores, nos mais variados enfoques.

Grande parte dos trabalhos envolve o chamado caso discreto, no qual são estudados polinômios ortogonais associados a produtos escalares de Sobolev da forma

$$\langle f, g \rangle_S = \int_I f(x) g(x) d\mu(x) + \int_{-\infty}^{\infty} F^t A G, \tag{4}$$

onde I é um intervalo real limitado ou não, $\mu(x)$ é uma medida positiva contínua em I, os vetores F e G são dados por

$$F^t = (f(x), f'(x), ...f^{(N)}(x)), \qquad G^t = (g(x), g'(x), ..., g^{(N)}(x)),$$

a matriz A é simétrica e semi-definida positiva de dimensão $(N+1) \times (N+1)$ tal que

$$A = (a_{ij}) = (d\mu_{ij}), \quad 0 \leq i, j \leq N,$$

e μ_{ij} são medidas discretas. O caso em que a matriz A é diagonal foi estudado por Koekoek [22, 23, 24, 25], e generalizado por Meijer em [41]. Uma outra extensão dos trabalhos de Koekoek encontra-se em Alfaro, Marcellán, Rezola e Ronveaux [1]. Posteriormente, Pérez e Piñar [47] realizaram um estudo completo a respeito dos zeros destes polinômios.

Como um caso particular de (4), temos os polinômios de Sobolev associados ao produto interno

$$\langle f, g\rangle_S = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\mu(x) + \lambda f^{(r)}(c)g^{(r)}(c),$$

onde $\lambda > 0$ e $c \in \mathbb{R}$, que foram estudados inicialmente por Marcellán e Ronveaux [33]. Alguns outros trabalhos envolvem polinômios associados a estes produtos internos, no que diz respeito a zeros, propriedades assintóticas, entre outras, são eles: Meijer [42], Durán [14], Marcellán, Pérez e Piñar [29], Piñar e Pérez [49], Marcellán e Van Assche [34].

Piñar [48] introduz os polinômios ortogonais em relação a

$$\langle f, g\rangle_S = \langle u, fg\rangle + \lambda f'(c)g'(c),$$

onde u é um funcional linear definido como $\langle u, p\rangle = I[p]$ (onde $I[.]$ é visto na definição 1.1), λ é um número real não nulo e $c \in \mathbb{R}$.

Kwon, Littlejohn, Lee e Yoo [26] introduziram os produtos escalares onde a primeira medida é discreta, ou seja,

$$\langle f, g\rangle_S = f(c)g(c) + \int_R f'(x)g'(x)d\mu(x).$$

O primeiro exemplo de produto escalar do tipo (3) foi dado por Althammer [4], onde são consideradas as medidas $d\psi_0(x) = d\psi_1(x) = dx$, no intervalo $E = [-1, 1]$, com $\kappa \geq 0$. Ele denota por $\{P_n\}$ os polinômios ortogonais associados a $d\psi_0$ (que são os polinômios de Legendre), por $\{Q_n\}$ os polinômios ortogonais associados a (3) e encontra relações entre ambas as sequências de polinômios, uma fórmula do tipo Rodrigues para Q_n, e ainda demonstra que estes polinômios possuem n zeros reais, simples e contidos em E. Mais tarde, Cohen [13] demonstra que os zeros de P_{n-1} se entrelaçam com os de Q_n. Os trabalhos de Gröbner [17] e Schäfke [51] dão sequência a estes estudos.

O trabalho de Schäfke e Wolf [52] trata do produto interno (2), considerando as medidas $d\psi_i$ como sendo clássicas do mesmo tipo e impondo condições adicionais. Resultados similares são obtidos por Brenner em [8] e [9], para o produto interno (3) no caso em que $d\psi_0(x) = d\psi_1(x) = e^{-x}dx$.

Pérez, em sua tese de doutorado [46], estuda os chamados polinômios de Laguerre-Sobolev (onde em (3) $d\psi_0(x) = d\psi_1(x) = x^\alpha e^{-x}dx$, $\alpha > -1$) e os polinômios Gegenbauer-Sobolev ($d\psi_0(x) = d\psi_1(x) = (1-x^2)^{\alpha-1/2}dx$, $\alpha > -1/2$). Nos dois casos são obtidas propriedades algébricas destes polinômios, bem como relações entre estes polinômios e os polinômios clássicos, de Laguerre e Gegenbauer, respectivamente. Nesta mesma tese são estudados os polinômios ortogonais de Sobolev associados ao produto interno da forma

$$\langle p, q\rangle_S = \langle u_0, pq\rangle + \kappa\langle u_1, p'q'\rangle, \tag{5}$$

onde $\kappa \geq 0$, os funcionais u_0 e u_1 são semiclássicos (isto é, satisfazem $D(\phi u) = \psi u$, com $grau(\phi) \geq 0$ e $grau(\psi) \geq 1$, onde D é a derivada) definidos positivos e estão relacionados da forma

$$A(x)u_0 = B(x)u_1,$$

com $A(x)$ e $B(x)$, polinômios arbitrários.

Um conceito mais geral, relacionado a polinômios ortogonais associados ao produto interno (3) foi investigado em [20], por Iserles, Koch, Norsett e Sanz-Serna Neste artigo os autores introduziram o conceito de par coerente de medidas da seguinte maneira:

Sejam $\{P_n^{\psi_0}\}$ e $\{P_n^{\psi_1}\}$ as sequências de polinômios ortogonais mônicos (SPOM) associados às medidas positivas $d\psi_0$ e $d\psi_1$, respectivamente, então $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ é um par coerente se os polinômios estiverem relacionados da forma

$$P_n^{\psi_1}(x) = \frac{1}{n+1}(P_{n+1}^{\psi_0\prime}(x) + \sigma_n P_n^{\psi_0\prime}(x)), \quad n \geq 0, \tag{6}$$

onde $\{\sigma_n\}$ é uma sequência de números reais.

Também foi provado em [20] que, se $d\psi_0$ e $d\psi_1$ formam um par coerente, então os polinômios ortogonais P_n^S associados ao produto interno (3), normalizados de maneira adequada, podem ser escritos como uma combinação linear dos polinômios $P_n^{\psi_0}$, de modo que os coeficientes da combinação, exceto o que multiplica o termo de grau n, não dependem do grau do polinômio P_n^S.

Foi provado ainda que vale a seguinte relação no caso de polinômios ortogonais mônicos

$$P_{n+1}^S(x) + a_n(\kappa)P_n^S(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \sigma_n P_n^{\psi_0}(x), \quad n \geq 0, \tag{7}$$

onde

$$a_n(\kappa) = \frac{\langle P_n^{\psi_0}, P_n^{\psi_0}\rangle_{\psi_0}}{\langle P_n^S, P_n^S\rangle_S}\,\sigma_n, \quad n \geq 1.$$

Estes coeficientes $a_n(\kappa)$ podem ser obtidos recursivamente por

$$a_n(\kappa) = \frac{\sigma_n \rho_n^{\psi_0}}{\rho_n^{\psi_0} + \kappa n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1} + \sigma_{n-1}^2 \rho_{n-1}^{\psi_0} - \sigma_{n-1} a_{n-1}(\kappa)\rho_{n-1}^{\psi_0}}, \quad n \geq 1.$$

Para o caso de medidas simétricas, Iserles et al. [20] introduziram o conceito de par simetricamente coerente, de modo semelhante.

Neste caso, as duas medidas simétricas $d\psi_0$ e $d\psi_1$ formam um par simetricamente coerente, se o polinômios envolvidos satisfazem a relação

$$P_n^{\psi_1}(x) = \frac{1}{n+1}(P_{n+1}^{\psi_0\prime}(x) + \sigma_{n-1}P_{n-1}^{\psi_0\prime}(x)), \quad n \geq 1. \tag{8}$$

També para este caso, são válidas propriedades semelhantes ao caso da coerência. Entre elas, vale a seguinte relação

$$P_{n+1}^S(x) + a_{n-1}(\kappa)P_{n-1}^S(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \sigma_{n-1}P_{n-1}^{\psi_0}(x), \quad n \geq 1, \tag{9}$$

onde

$$a_{n-1}(\kappa) = \frac{\langle P_{n-1}^{\psi_0}, P_{n-1}^{\psi_0}\rangle_{\psi_0}}{\langle P_{n-1}^S, P_{n-1}^S\rangle_S}\,\sigma_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Os coeficientes podem ser obtidos recursivamente pela expressão

$$a_{n+1}(\kappa) = \frac{\sigma_{n+1}\rho_{n+1}^{\psi_0}}{\rho_{n+1}^{\psi_0} + \sigma_{n-1}^2\rho_{n-1}^{\psi_0} + \kappa(n+1)^2\rho_n^{\psi_1} - \sigma_{n-1}\rho_{n-1}^{\psi_0}a_{n-1}(\kappa)}, \quad n \geq 1.$$

O conceito de pares coerentes, graças às propriedades satisfeitas pelos polinômios, provou ser muito importante nos estudos de polinômios ortogonais de Sobolev, passando assim, a ser objeto de pesquisa de muitos autores.

Em [10], Bruin e Meijer provaram que se $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ é um par coerente, então os polinômios P_n^S satisfazem uma relação de recorrência de quatro termos.

Um trabalho subsequente de Meijer [36] traz resultados que relacionam às raízes dos polinômios de Sobolev com a coerência entre as medidas no produto interno (3). Foi provado que, quando $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ é um par coerente de medidas com suporte em (a,b), então para κ suficientemente grande e $n \geq 2$, P_n^S tem n zeros reais, distintos, entrelaçados com os zeros de $P_{n-1}^{\psi_0}$ e com os de $P_{n-1}^{\psi_1}$ e, que no máximo um deles está fora de (a,b). Para o caso em que $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ é um par simetricamente coerente (com suporte em $(-a,a)$), foi provado que P_n^S tem pelo menos $n-2$ zeros distintos em $(-a,a)$.

Notando a importância de se investigar em que condições $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ é um par coerente, surgiram vários trabalhos nesse sentido. Marcellán e Petronilho [30] estudaram o problema considerando u_0 e u_1 funcionais lineares quase definidos no espaço dos polinômios e as SPOM correspondentes satisfazendo a uma relação do tipo (6). Supondo que $\{P_n^{\psi_0}\}$ é uma SPOM, caracterizaram todas as sequências de polinômios ortogonais $\{P_n^{\psi_1}\}$ e todas as sequências compatíveis de parâmetros $\{\sigma_n\}$. Resolveram, também, o problema análogo, supondo $\{P_n^{\psi_1}\}$ como sendo uma SPOM. Desse modo, resolveram o problema completamente para o caso em que um dos funcionais, u_0, u_1 é tomado como clássico, isto é, Hermite, Laguerre, Jacobi ou Bessel.

Marcellán, Petronilho, Pérez e Piñar [31] deduziram algumas condições sobre os funcionais lineares no produto interno (5) para que se tenha um par coerente. Na verdade, mostraram que se $\{u_0, u_1\}$ é um par coerente de funcionais lineares quase definidos, então ambos são semi-clássicos.

Meijer [38] resolveu completamente o problema e determinou todos os pares coerentes $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ de medidas. Ele provou que pelo menos uma das medidas $d\psi_0$ ou $d\psi_1$ deve ser clássica.

Em [11], foi observado que os pares coerentes nos quais a segunda medida $d\psi_1$ no produto interno (3) é clássica, são mais frequentes do que aqueles em que a primeira medida $d\psi_0$ é clássica; os autores estudaram a localização dos zeros e provaram que os n zeros de P_n^S estão entrelaçados com os zeros de $P_{n-1}^{\psi_1}$ $(n \geq 2)$ para um par coerente em que $d\psi_1$ é clássica. Este resultado não vale para pares coerentes nos quais $d\psi_0$ é clássica. Eles também provaram que para todo par coerente, os $n-1$ pontos de máximo e mínimo de P_n^S, se entrelaçam com os $n-1$ zeros de $P_{n-1}^{\psi_1}$ $(n \geq 2)$.

Em [35] foi realizado um dos primeiros estudos assintóticos sobre os polinômios P_n^S em (3), onde $d\psi_0$ e $d\psi_1$ tem suporte em $[-1,1]$ e formam um par coerente. Foi basicamente provado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n^S(z)}{P_n^{\psi_0}(z)} = \frac{2}{\varphi'(x)},$$

uniformente em subconjuntos compactos de $\bar{\mathbb{C}} \setminus [-1,1]$, onde $\varphi(z) = z + \sqrt{z^2-1}$ com $\sqrt{z^2-1} > 0$ quando $z > 1$. Estudo similar é realizado em [32] onde $d\psi_0$ e $d\psi_1$ formam um par simetricamente coerente.

Pan [43, 44, 45], estudou as propriedades assintóticas das funções racionais $P_n^{\psi_1}/P_n^{\psi_0}$, $P_n^S/P_n^{\psi_1}$, $P_n^S/P_n^{\psi_0}$, P_{n+1}^S/P_n^S e a distribuição assintótica dos zeros de P_n^S, nos casos em que $d\psi_1$ é uma medida de Jacobi ou de Laguerre, e $d\psi_0$ e $d\psi_1$ formam um par coerente.

Alfaro, Martinez-Finkelstein e Rezola [3] consideraram Q_{n,λ_n} como sendo o polinômio mônico de grau n que minimiza a norma $\|q\|^2 = \int |q| d\psi_0 + \lambda_n \int |q'|^2 d\psi_1$ na classe de todos os polinômios mônicos de grau n. Supondo que $\{\psi_0, \psi_1\}$ é um par coerente de medidas em $[-1,1]$ e que a sequência $\{\lambda_n\}$ é regularmente decrescente e satisfaz $\lim_{n\to\infty} n^2\lambda_n = L \in [0, +\infty]$, são estudadas propriedades assintóticas de $\{Q_{n,\lambda_n}\}$, bem como o comportamento dos zeros destes polinômios. É mostrado que, em alguns casos, a sequência $\{Q_{n,\lambda_n}\}$ se comporta assintóticamente como uma sequência de polinômios ortogonais em relação a uma nova medida obtida como uma combinação de $d\psi_0$ e $d\psi_1$.

Meijer e Piñar [39] estudaram os polinômios P_n^S ortogonais em relação a (3) com $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ sendo um par coerente onde $d\psi_1$ ou $d\psi_0$ é uma medida de Jacobi. Eles provaram que quando $n \to \infty$, P_n^S se comporta como um polinômio de Jacobi. Meijer [40] realizou estudo semelhante para o caso em que $d\psi_0$ ou $d\psi_1$ é uma medida de Laguerre.

Em nossa pesquisa pudemos observar que, nos trabalhos mais recentes sobre polinômios de Sobolev associados a (3), sempre se supõe que as medidas formam um par coerente pois, neste caso, se obtém relações interessantes e simples.

Nosso objetivo, neste trabalho, é de estudar os polinômios ortogonais de Sobolev dando uma abordagem diferente da que tem sido enfocada na literatura e, com isso, também obter resultados simples.

Tratamos dos polinômios $\{P_n^{S_1}\}$ e $\{P_n^{S_2}\}$ ortogonais em relação aos produtos internos

$$\langle f, g\rangle_{S_1} = \langle f, g\rangle_{\psi_0+\kappa_1\phi_1} + \kappa_2\langle f', g'\rangle_{\psi_1}, \tag{10}$$

e

$$\langle f,g\rangle_{S_2} = \langle f,g\rangle_{\psi_0} + \langle f',g'\rangle_{\kappa_1\phi_0+\kappa_2\psi_1}. \tag{11}$$

No caso (10), tomamos $d\psi_1$ e $d\phi_1$ como sendo medidas clássicas e $d\psi_0$ e $d\phi_1$ relacionadas entre si por

$$(1+qx)d\phi_1(x) = d\psi_0(x), \text{ e}$$
$$(1+qx^2)d\phi_1(x) = d\psi_0(x), \text{ no caso de medidas simétricas,}$$

No caso (11), tomamos $d\psi_0$ e $d\phi_0$ como sendo medidas clássicas, e consideramos $d\psi_1$ e $d\phi_0$ relacionadas por

$$(1+qx)d\psi_1(x) = d\phi_0(x), \text{ e}$$
$$(1+qx^2)d\psi_1(x) = d\phi_0(x), \text{ no caso de medidas simétricas.}$$

Nos dois casos teremos $d\psi_0$ e $d\psi_1$ como sendo um par coerente (ou simetricamente coerente), e os polinômios de Sobolev satisfazendo

$$P_{n+1}^{S_i}(x) + a_n P_n^{S_i}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_n P_n^{\psi_0}(x), \quad n \geq 0, \quad i = 1,2, \text{ ou}$$
$$P_{n+1}^{S_i}(x) + a_{n-1} P_{n-1}^{S_i}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1} P_{n-1}^{\psi_0}(x), \quad n \geq 1, \quad i = 1,2, \text{ no caso simétrico.}$$

Observemos que tais relações são idênticas a (7) e (9), obtidas para pares coerentes e pares simetricamente coerentes, porém no nosso caso, não necessariamente as medidas no produto interno (3) formam um par coerente (ou simetricamente coerente).

Obtemos formas recursivas simples para a_n e d_n, em termos dos coeficientes das relações de recorrência para os polinômios envolvidos.

No caso (10), obtemos uma relação ainda mais simples da forma

$$P_{n+1}^{S_i}(x) + a_n P_n^{S_i}(x) = P_{n+1}^{\phi_1}(x), \quad n \geq 0, \quad i = 1,2, \text{ e}$$
$$P_{n+1}^{S_i}(x) + a_{n-1} P_{n-1}^{S_i}(x) = P_{n+1}^{\phi_1}(x), \quad n \geq 1, \quad i = 1,2, \text{ no caso simétrico.}$$

Podemos observar que nosso trabalho abrange diversos outros anteriores, visto que escolhendo κ_1 e κ_2 de modo adequado obtemos todos os produtos internos envolvendo medidas contínuas, já estudados.

Descrevemos, brevemente a seguir, os seis capítulos que compõem este trabalho.

No **Capítulo 1**, apresentamos definições e resultados conhecidos a respeito dos polinômios ortogonais, no que se refere a funcionais de momentos, relação de recorrência de três termos, polinômios clássicos e pares coerentes.

No **Capítulo 2**, apresentamos um estudo sobre duas sequências de polinômios ortogonais mônicos associadas a medidas simétricas que são relacionadas pela expressão

$$(1 + qx^2)d\phi_1(x) = cd\psi_0(x). \tag{12}$$

Vemos que o polinômio $P_n^{\phi_1}$ pode ser obtido como uma combinação linear dos polinômios $P_n^{\phi_0}$ e $P_{n-2}^{\phi_0}$. Obtemos igualdades que tornam possível escrever os coeficientes da relação da recorrência de $P_n^{\phi_1}$ em termos dos de $P_n^{\phi_0}$, e vice-versa.

No **Capítulo 3**, utilizamos os resultados sobre as medidas simétricas $d\psi_0$ e $d\phi_1$, relacionadas como em (12) por

$$d\psi_0(x) = (1 + qx^2)d\phi_1(x),$$

e obtemos a relação (9), sendo que, neste caso, $\{P_n^{S_1}\}$ é a SPOM de Sobolev associada ao produto interno da forma

$$\langle f, g\rangle_{S_1} = \langle f, g\rangle_{\psi_0} + \kappa_1\langle f, g\rangle_{\phi_1} + \kappa_2\langle f', g'\rangle_{\psi_1}, \tag{13}$$

onde ψ_1 é tal que $nP_{n-1}^{\psi_1}(x) = P_n^{\phi_1\prime}(x)$.

Do mesmo modo, consideramos as medidas $d\psi_0$ e $d\phi_1$ tais que

$$d\psi_0(x) = (1 + qx)d\phi_1(x),$$

e obtemos a relação similar a (9). Neste caso $\{P_n^{S_2}\}$ é a SPOM de Sobolev associada ao produto interno

$$\langle f, g\rangle_{S_2} = \langle f, g\rangle_{\psi_0} + \kappa_1\langle f', g'\rangle_{\phi_0} + \kappa_2\langle f', g'\rangle_{\psi_1}, \tag{14}$$

com ψ_0 tal que $P_n^{\psi_0\prime}(x) = nP_{n-1}^{\psi_0}(x)$.

Os resultados obtidos nos Capítulos 2 e 3, estão contidos no artigo [6].

No **Capítulo 4**, realizamos um estudo semelhante ao do Capítulo 2, para medidas que não são simétricas e que se relacionam pela expressão

$$(1 + qx)d\phi_1(x) = cd\phi_0(x). \tag{15}$$

Vemos que é possível obter $P_n^{\phi_1}$ em termos de $P_n^{\phi_0}$ e $P_{n-1}^{\phi_0}$, e também obtemos expressões que relacionam os coeficientes da relação de recorrência de $P_n^{\phi_0}$ com os de $P_n^{\phi_1}$.

No **Capítulo 5** usamos os resultados obtidos no Capítulo 4 no caso em que as medidas $d\psi_0$ e $d\phi_1$ são relacionadas por

$$d\psi_0(x) = (1 + qx)d\phi_1(x).$$

Consideramos ψ_1 tal que $nP_{n-1}^{\psi_1}(x) = P_n^{\phi_1\prime}(x)$ e $\{P_n^S\}$ a SPOM em relação ao produto interno (13). Obtemos a mesma relação (7).

Do mesmo modo, obtemos a relação (7) quando consideramos as medidas $d\phi_0$ e $d\psi_1$ tais que

$$d\phi_0(x) = (1 + qx)d\psi_1(x),$$

e $d\psi_0$ tal que $P_n^{\psi_0\prime}(x) = nP_{n-1}^{\phi_0}(x)$ e $\{P_n^S\}$ a SPOM em relação (14).

Finalmente, no **Capítulo 6** apresentamos as conclusões do nosso trabalho e apontamos possíveis pesquisas futuras sobre o tema aqui explorado.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos conceitos básicos necessários ao estudo de polinômios ortogonais padrão e polinômios ortogonais de Sobolev. Assim, estaremos introduzindo algumas notações e apresentando uma síntese de resultados que serão usados no decorrer do trabalho. Alguns dos trabalhos que contém estes resultados são Chihara [12], Szegö [54], Pérez [46] e Meijer [38].

Na Seção 1.2 apresentamos as definições de funcional de momentos de uma sequência de polinômios ortogonais, bem como a relação de recorrência de três termos que estes polinômios satisfazem. Esta relação e os coeficientes α_n^ϕ e β_n^ϕ serão bastante utilizados para obter os resultados dos capítulos 2 e 4. Apresentamos também uma síntese sobre polinômios ortogonais clássicos contendo algumas das propriedades por eles satisfeitas. Tais polinômios, por satisfazerem propriedades interessantes, também serão muito utilizados nos capítulos 3 e 5 para obter resultados sobre certos produtos internos de Sobolev.

Na Seção 1.3 apresentamos uma relação contendo todos os pares coerentes e pares simetricamente coerentes (definidos na Introdução deste trabalho), que foram determinados por Meijer [38].

1.2 Funcionais de Momentos e Polinômios Ortogonais

Definição 1.1 *Seja* $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ *uma sequência de números complexos e* $I : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{C}$ *(isto é,* $p \in \mathbb{P} \Rightarrow I[p] \in \mathbb{C}$*) um funcional linear sobre* $\mathbb{C}$ *tal que*

$$I[x^n] = \mu_n, \; n = 0, 1, \ldots .$$

Então $I[\cdot]$ *é chamado "funcional de momentos" associado à sequência* $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$*. Para cada* n*,* μ_n *é chamado momento de ordem* n *de* $I[\cdot]$*.*

Definição 1.2 *Seja* $E \subseteq \mathbb{R}$*. Um funcional* $I[\cdot]$ *é dito definido positivo se, e somente se,* $I[p(x)] > 0$*, para qualquer polinômio* $p(x)$ *não identicamente nulo em* E*. (Ao conjunto* E *chamamos suporte de* $I[\cdot]$*).*

Vamos considerar o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dado por

$$\langle f, g \rangle = I[f.g], \tag{1.1}$$

onde $I[\cdot]$ é um funcional definido positivo com suporte em (a, b). Dizemos que a sequência $\{P_n\}$ é uma sequência de polinômios ortogonais (SPO) associados ao produto interno acima se

$$\begin{aligned} &(i) \;\; P_n \text{ tem grau } n; \\ &(ii) \;\; \langle P_r, P_s \rangle = 0 \text{ para } r \neq s; \\ &(iii) \;\; \langle P_r, P_r \rangle = \rho_r > 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Podemos considerar o funcional $I[\cdot]$ em (1.1) da seguinte forma

$$I[f] = \int_a^b f(x) d\phi(x).$$

Aqui $d\phi(x)$ é chamada de distribuição positiva com suporte (a, b) e momentos $\mu_k^\phi = \int_a^b x^k d\phi(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Neste caso, o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em (1.1) será da forma

$$\langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle_\phi = \int_a^b f(x) g(x) d\phi(x).$$

Dizemos que a sequência de polinômios $\{P_n = P_n^\phi\}$ é ortogonal em relação a $d\phi(x)$, se $\{P_n^\phi\}$ satifaz (1.2).

Os polinômios ortogonais mônicos P_n^ϕ, $n \geq 0$, satisfazem a relação de recorrência

$$P_{n+1}^\phi(x) = (x - \beta_{n+1}^\phi)P_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}^\phi P_{n-1}^\phi(x), \qquad n \geq 1, \tag{1.3}$$

com $P_0^\phi(x) = 1$ e $P_1^\phi(x) = (x - \beta_1^\phi)$ (ver [12] e [54]). Aqui os coeficientes únicos α_{n+1}^ϕ e β_n^ϕ, $n \geq 1$ são todos reais, onde α_1^ϕ é arbitrário, e

$$\beta_{n+1}^\phi = \frac{\langle xP_n^\phi, P_n^\phi\rangle_\phi}{\langle P_n^\phi, P_n^\phi\rangle_\phi}, \quad n \geq 0, \qquad \alpha_{n+1}^\phi = \frac{\langle P_n^\phi, P_n^\phi\rangle_\phi}{\langle P_{n-1}^\phi, P_{n-1}^\phi\rangle_\phi}, \quad n \geq 1 \tag{1.4}$$

em particular, $\alpha_{n+1}^\phi > 0$, $n \geq 1$.

Se $0 < b \leq \infty$ e se $d\phi$ é uma distribuição simétrica em $[-b, b]$, então $\mu_{2n-1}^\phi = 0$ e $\beta_n^\phi = 0$, para $n \geq 1$.

1.2.1 Polinômios Ortogonais Clássicos

Os polinômios ortogonais clássicos são os polinômios associados a medidas clássicas, ou seja, medidas que satisfazem a uma equação diferencial do tipo Pearson, da forma

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \frac{\varphi(x)}{\rho(x)}, \tag{1.5}$$

onde φ e ρ são polinômios, com $grau(\varphi) = 1$ e $grau(\rho) \leq 2$.

A relação anterior pode ser escrita da forma:

$$(\rho\phi)' = \psi\phi, \quad \text{com } \psi(x) = \varphi(x) + \rho'(x).$$

Existem várias caracterizações para os polinômios ortogonais clássicos. Algumas delas estão registradas no teorema seguinte.

Teorema 1.1 *Seja $\{P_n^\phi\}$ a sequência de polinômios ortogonais associada à medida positiva $\phi(x)$. As seguintes afirmações são equivalentes*

(i) $\{P_n^\phi\}$ é uma sequência de polinômios clássicos, de modo que ϕ satisfaz uma equação

como em (1.5);

(ii) P_n^ϕ *satisfaz a fórmula de Rodrigues*

$$P_n^\phi(x) = \frac{C_n}{\phi(x)}\frac{d^n}{dx^n}[\rho^n(x)\phi(x)], \qquad n \geq 0,$$

onde C_n *é uma constante que depende de* n.

(iii) Para $n \geq 0$, *existe uma constante não nula* $\lambda_n \in C$ *tal que o polinômio* P_n^ϕ *satisfaz a equação diferencial de segunda ordem* ([7]):

$$\rho(x)y'' + \psi(x)y' = \lambda_n y,$$

onde $\lambda_n = n\left[\psi' + \frac{(n-1)}{2}\rho''\right], \quad n \geq 0.$

(iv) A sequência de polinômios mônicos

$$\left\{\frac{P_{n+1}^{\phi\prime}}{n+1}\right\}_n$$

(ver [19]*) também é uma SPOM clássica do mesmo tipo que* $\{P_n^\phi\}$.

Daremos, agora, alguns resultados conhecidos sobre polinômios clássicos (na forma mônica), que serão usados no decorrer deste trabalho. Estas propriedades são encontradas em [54] e [12].

Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite são ortogonais em relação à medida $d\phi(x) = e^{-x^2}dx$, no suporte $(-\infty, \infty)$ e são dados explicitamente pela expressão

$$H_n(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m n!(x)^{n-2m}}{4^m m!(n-2m)!}.$$

Os polinômios em (1.5) são $\rho(x) = 1$ e $\psi(x) = -2x$.

A relação de recorrência de três termos satisfeita por estes polinômios é

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \frac{n}{2}H_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $H_0(x) = 1$ e $H_1(x) = x$.

$\rho_n^\phi = \langle H_n, H_n \rangle_\phi$ é dado por

$$\rho_n^\phi = \frac{\sqrt{\pi} n!}{2^n}.$$

Eles satisfazem a equação diferencial

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

e a relação diferencial

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = n H_{n-1}(x).$$

Temos a seguinte fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{e^{x^2}}{2^n} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

Polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre são ortogonais em relação à medida $d\phi(x) = x^\alpha e^{-x} dx$, $\alpha > -1$, no suporte $[0, \infty)$ e são dados explicitamente pela expressão

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n n! \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{n+\alpha}{n-m} x^m.$$

Os polinômios em (1.5) são dados por $\rho(x) = x$ e $\psi(x) = (\alpha + 1) - x$.

A relação de recorrência de três termos satisfeita por estes polinômios é

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x - (2n + \alpha + 1)) L_n^{(\alpha)}(x) - n(n+\alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1,$$

com $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(x) = x - \alpha - 1$.

$\rho_n^\phi = \langle L_n, L_n \rangle_\phi$ é dado por

$$\rho_n^\phi = \Gamma(n + \alpha + 1) n!.$$

Eles safisfazem à equação diferencial de segunda ordem

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0,$$

e à relação diferencial

$$\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x) = nL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

Temos, ainda, a seguinte fórmula de Rodrigues

$$x^\alpha e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}[x^{n+\alpha}e^{-x}].$$

Polinômios de Jacobi

Os polinômios de Jacobi são ortogonais em relação à medida $d\phi(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$ no suporte $[-1,1]$ e são dados explicitamente por

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \begin{pmatrix} 2n+\alpha+\beta \\ n \end{pmatrix}^{-1} \sum_{m=0}^{n} \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+\beta \\ m \end{pmatrix} (x-1)^m(x+1)^{n-m}.$$

Os polinômios em (1.5) são $\rho(x) = 1 - x^2$ e $\psi(x) = (\beta + \alpha) - (\alpha + \beta + 2)x$.

A relação de recorrência de três termos satisfeita por estes polinômios é

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = & \left(x + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)}\right) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \\ & -\frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \end{aligned}$$

com $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ e $P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = x + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta+2}$.

para $n \geq 1$, $\rho_n^\phi = \langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)} \rangle_\phi$ é dado por

$$\rho_n^\phi = \frac{2^{n+\alpha+\beta+1} n! \Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)\Gamma(2n+\alpha+\beta+1}.$$

Eles safisfazem à equação diferencial de segunda ordem

$$(1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x)y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0,$$

e à relação diferencial

$$\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = nP_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

Temos a seguinte fórmula de Rodrigues

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta)}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}].$$

Quando $\alpha = \beta = 0$, ou seja, $d\phi(x) = dx$, tais polinômios são ditos de Legendre. Se $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ $(d\phi(x) = (1-x^2)^{-1/2}dx)$, temos os polinômios de Chebyshev de primeira espécie. Se $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ $(d\phi(x) = (1-x^2)^{1/2}dx)$, temos os polinômios de Chebyshev de segunda espécie.

Finalmente, quando $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$, $\lambda > -\frac{1}{2}$, são conhecidos por polinômios de Gegenbauer. Para esses polinômios a relação de recorrência se torna

$$P_{n+1}^{(\lambda)}(x) = xP_n^{(\lambda)}(x) - \frac{1}{4}\frac{n(n+2\lambda-1)}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)}P_{n-1}^{(\lambda)}(x), \quad n \geq 1,$$

com $P_0^{(\lambda)}(x) = 1$ e $P_1^{(\lambda)}(x) = x$. Temos, para os polinômios de Gegenbauer

$$\rho_n^\phi = \langle P_n^{(\lambda)}, P_n^{(\lambda)}\rangle_\phi = \pi 2^{1-2\lambda-2n}\frac{n!\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+1)\Gamma(n+\lambda)}$$

e

$$\frac{d}{dx}P_n^{(\lambda)}(x) = nP_{n-1}^{(\lambda+1)}(x).$$

1.3 Pares Coerentes e Pares Simetricamente Coerentes

De acordo com Meijer [38], relacionamos a seguir, todos os pares coerentes, isto é, todos os pares de medidas no produto interno (3), de modo que os polinômios associados a cada uma delas satifazem (6).

Caso Laguerre

(i) $d\psi_0(x) = x^\alpha e^{-x}dx$, $d\psi_1$ satisfaz $\int_0^\infty F(x)d\psi_1(x) = \int_0^\infty F(x)\frac{1}{x-\xi}x^{\alpha+1}e^{-x}dx + MF(\xi)$, $\alpha > -1$, $\xi \leq 0$, $M \geq 0$;

(ii) $d\psi_0(x) = (x-\xi)x^{\alpha-1}e^{-x}dx$, $d\psi_1(x) = x^\alpha e^{-x}dx$,
onde $\xi < 0$, $\alpha > 0$;

(iii) $d\psi_0$ satisfaz $\int_0^\infty F(x)d\psi_0(x) = \int_0^\infty F(x)e^{-x}dx + MF(0)$, $d\psi_1(x) = e^{-x}dx$, $M \geq 0$.

Caso Jacobi

(i) $d\psi_0(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$, $d\psi_1$ satisfaz $\int_{-1}^1 F(x)d\psi_1(x) = \int_{-1}^1 F(x)\frac{1}{|x-\xi|}(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx + MF(\xi)$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $|\xi| \geq 1$, $M \geq 0$;

(ii) $d\psi_0(x) = |x-\xi|(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}dx$, $d\psi_1(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$,
onde $|\xi| > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

(iii) $d\psi_0$ satisfaz $\int_{-1}^1 F(x)d\psi_0(x) = \int_{-1}^1 F(x)(1+x)^{\beta-1}dx + MF(1)$, $d\psi_1(x) = (1+x)^\beta dx$, $\beta > 0$, $M \geq 0$;

(iv) $d\psi_0$ satisfaz $\int_{-1}^1 F(x)d\psi_0(x) = \int_{-1}^1 F(x)(1-x)^{\alpha-1}dx + MF(-1)$, $d\psi_1(x) = (1-x)^\alpha dx$, $\alpha > 0$, $M \geq 0$.

Temos também, todos os pares simetricamente coerentes, isto é, todos os pares de medidas em que os polinômios associados satisfazem (8).

Caso Hermite

(i) $d\psi_0(x) = e^{-x^2}dx$, $d\psi_1(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^2+\xi^2}dx$,
com $\xi \neq 0$;

(ii) $d\psi_0(x) = (x^2+\xi^2)e^{-x^2}dx, \quad d\psi_1(x) = e^{-x^2}dx.$

Caso Gegenbauer

(i) $d\psi_0(x) = (1-x^2)^{\alpha-1}dx, \quad d\psi_1(x) = \frac{(1-x^2)^\alpha}{x^2+\xi^2}dx,$
com $\alpha > 0,\ \xi \neq 0;$

(ii) $d\psi_0(x) = (1-x^2)^{\alpha-1}dx, \quad d\psi_1$ tal que $\int_{-1}^{1} F(x)d\psi_1(x) = \int_{-1}^{1} F(x)\frac{(1-x^2)^\alpha}{\xi^2-x^2}dx + MF(\xi) + MF(-\xi),$
com $\alpha > 0,\ |\xi| \geq 1,\ M \geq 0.$

(iii) $d\psi_0(x) = (x^2+\xi^2)(1-x^2)^{\alpha-1}dx, \quad d\psi_1(x) = (1-x^2)^\alpha dx,$
$\alpha > 0;$

(iv) $d\psi_0(x) = (\xi^2-x^2)(1-x^2)^{\alpha-1}dx, \quad d\psi_1(x) = (1-x^2)^\alpha dx,$
com $\alpha > 0,\ |\xi| > 1;$

(v) $d\psi_0$ satisfaz $\int_{-1}^{1} F(x)d\psi_0(x) = \int_{-1}^{1} F(x)dx + MF(1) + MF(-1), \quad d\psi_1(x) = dx,$
$M \geq 0.$

Capítulo 2

Medidas Simétricas Relacionadas

2.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos uma série de resultados sobre as sequências de polinômios ortogonais associados a duas medidas simétricas que satisfazem uma certa relação entre si. Para isso definimos uma sequência de constantes ℓ_n que são usadas para obter polinômios de uma das sequências, em termos dos polinômios da outra sequência. Os resultados principais estão resumidos no Teorema 2.4.

Sejam $d\phi_0$ e $d\phi_1$ duas distribuições simétricas, definidas sobre o mesmo suporte $E \subseteq [-b, b]$, que satisfazem

$$d\phi_1(x) = \frac{c}{1+qx^2} d\phi_0(x). \tag{2.1}$$

Aqui q pode ser qualquer valor real tal que $1+qx^2$ não muda de sinal em E. A constante c pode ser arbitrária de modo que $(1+qx^2)/c$ seja não negativo em E. Se escolhermos como sendo

$$\begin{aligned} c(q) &= \frac{(\mu_0^{\phi_1} + q\mu_2^{\phi_1})}{\mu_0^{\phi_1}} = \frac{\int_{-b}^{b}(1+qx^2)d\phi_1(x)}{\int_{-b}^{b} d\phi_1(x)} \\ &= \frac{\int_{-b}^{b} c\, d\phi_0(x)}{\int_{-b}^{b} c(1+qx^2)^{-1}} \phi_0(x) = \frac{\mu_0^{\phi_0}}{\int_{-b}^{b}(1+qx^2)^{-1} d\phi_0(x)}, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}\mu_0^{\phi_0} &= \int_{-b}^{b}\frac{(1+qx^2)}{c}d\phi_1(x) = \frac{\mu_0^{\phi_1}}{\mu_0^{\phi_1}+q\mu_2^{\phi_1}}\int_{-b}^{b}(1+qx^2)d\phi_1(x)\\ &= \frac{\mu_0^{\phi_1}}{\int_{-b}^{b}(1+qx^2)d\phi_1(x)}\int_{-b}^{b}(1+qx^2)d\phi_1(x) = \mu_0^{\phi_1}.\end{aligned}$$

Temos que $\frac{1+qx^2}{c} = 0$ se, e somente se, $x = \pm\sqrt{\frac{-1}{q}}$. Assim, como as distribuições são definidas em $[-b, b]$, qualquer valor de q tal que $q > -1/b^2$ pode ser admitido (pois, neste caso $\sqrt{\frac{-1}{q}} > b$). Além disso, se o suporte destas distribuições estão em $[-b, -a] \cup [a, b]$, onde $0 < a < b$, então pode-se considerar também valores de q tais que $q < -1/a^2$ (aqui, $\sqrt{\frac{-1}{q}} < a$).

Uma questão interessante: Conhecidas informações sobre os polinômios ortogonais associados a uma das distribuições, o que se pode dizer a respeito dos polinômios ortogonais associados a outra distribuição?

Em 1930 Geronimus [15] considera o par, definido em $[-1, 1]$, onde $d\phi_0(x) = (1 - x^2)^{1/2}dx$, e mostra por exemplo que

$$P_n^{\phi_1}(x) = 2^{1-n}\left[T_n(x) + \frac{\sqrt{1+q}}{1+\sqrt{1+q}}U_{n-2}(x)\right]$$

e que $\alpha_2^{\phi_1} = \frac{1}{2(1+\sqrt{1+q})}$, $\alpha_n^{\phi_1} = \frac{1}{4}$, $n \geq 3$. Aqui T_n e U_n são os polinômios de Chebyshev de primeira e segunda espécie de grau n, respectivamente.

Novamente com $b = 1$, em 1966 Griñspun [16] estudou os polinômios associados a $d\phi_1(x)$ quando $d\phi_0(x) = (1 - x^2)^{-1/2}dx$, onde ele mostrou que

$$P_n^{\phi_1}(x) = 2^{1-n}\left[T_n(x) + \frac{-1+\sqrt{1+q}}{1+\sqrt{1+q}}T_{n-2}(x)\right]$$

e que $\alpha_2^{\phi_1} = \frac{1}{1+\sqrt{1+q}}$, $\alpha_3^{\phi_1} = \frac{\sqrt{1+q}}{2(1+\sqrt{1+q})}$, $\alpha_n^{\phi_1} = \frac{1}{4}$, $n \geq 4$.

De um modo mais geral, Szegö [53] em 1921 e Bernstein [5] em 1932 (ver também Szegö [54]) estudaram os polinômios ortogonais associados às distribuições $d\phi(x) = [\nu(x)]^{-1}(1 - x^2)^{\pm 1/2}dx$, onde $\nu(x)$ é um polinômio. Um estudo muito anterior sobre polinômios correspondendo a distribuições relacionadas foi feito por Christoffel em 1858 (ver [54, p.30]), que deu origem à famosa fórmula de Christoffel.

No caso da relação (2.1), onde $d\phi_1$ e $d\phi_0$ são quaisquer distribuições relacionadas, o seguinte resultado foi provado em [50].

Se $q > 0$, então associada a $d\phi_1$ e $d\phi_0$ existe uma sequência de números reais $\{\ell_n\}$, com $\ell_0 = 1$, tal que

$$(\ell_n - 1)(\ell_{n-1} + 1) = 4q\alpha_{n+1}^{\phi_1}, \quad (\ell_n - 1)(\ell_{n+1} + 1) = 4q\alpha_{n+1}^{\phi_0}, \quad \text{para } n \geq 1.$$

A prova deste resultado dada em [50] foi obtida associando polinômios ortogonais simétricos aos L-polinômios ortogonais simétricos inversos. Os L-polinômios foram introduzidos por Jones, Thron e Waadeland em [21]. Aqui provaremos que este resultado vale para qualquer valor admissível de q de tal modo que $d\phi_1$ e $d\phi_0$ são distribuições válidas. Faremos isso determinando algumas expressões explícitas para ℓ_n em termos de $\{\alpha_n^{\phi_1}\}$ e $\{\alpha_n^{\phi_0}\}$.

2.2 Algumas Identidades

É claro, a partir de (2.1) que

$$c\mu_n^{\phi_0} = c\int_{-b}^{b} \frac{x^n(1+qx^2)}{c} d\phi_1(x) = \int_{-b}^{b} x^n d\phi_1(x) + q\int_{-b}^{b} x^{n+2} d\phi_1(x) = \mu_n^{\phi_1} + q\mu_{n+2}^{\phi_1},$$

para $n \geq 0$. Denotemos $\alpha_1^{\phi_1} = \mu_0^{\phi_1}$ e $\alpha_1^{\phi_0} = c\mu_0^{\phi_0}$. Portanto, como $\alpha_2^{\phi} = \mu_2^{\phi}/\mu_0^{\phi}$, temos

$$q\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1} = q\frac{\mu_2^{\phi_1}}{\mu_0^{\phi_1}}\mu_0^{\phi_1} = q\mu_2^{\phi_1} = c\mu_0^{\phi_0} - \mu_0^{\phi_1} = \alpha_1^{\phi_0} - \alpha_1^{\phi_1}.$$

Expressando $P_n^{\phi_1}$ como uma combinação linear de $P_r^{\phi_0}$, $r = 0, 1, \cdots, n$ da forma

$$P_n^{\phi_1} = P_n^{\phi_0} + \sum_{r=1}^{[n/2]} d_{n-2r} P_{n-2r}^{\phi_0},$$

e usando as propriedades de ortogonalidade no produto interno

$$\langle P_n^{\phi_1}, P_{n-2k}^{\phi_0}\rangle_{\phi_0} = \left\langle P_n^{\phi_0} + \sum_{r=1}^{[n/2]} d_{n-2r} P_{n-2r}^{\phi_0}, P_{n-2k}^{\phi_0} \right\rangle_{\phi_0} = d_{n-2k}\langle P_{n-2k}^{\phi_0}, P_{n-2k}^{\phi_0}\rangle_{\phi_0},$$

para $1 \leq k \leq [n/2]$ obtemos

$$d_{n-2k} = \frac{\langle P_n^{\phi_1}, P_{n-2k}^{\phi_0}\rangle_{\phi_0}}{\langle P_{n-2k}^{\phi_0}, P_{n-2k}^{\phi_0}\rangle_{\phi_0}} = \frac{\langle P_n^{\phi_1}, (1+qx^2)c^{-1} P_{n-2k}^{\phi_0}\rangle_{\phi_1}}{\langle P_{n-2k}^{\phi_0}, P_{n-2k}^{\phi_0}\rangle_{\phi_0}}, \quad 1 \leq k \leq [n/2].$$

Portanto

$$d_{n-2k} = 0, \quad 2 \leq k \leq [n/2]$$

e

$$d_{n-2} = \frac{q\langle P_n^{\phi_1}, P_n^{\phi_1}\rangle_{\phi_1}}{c\langle P_{n-2}^{\phi_0}, P_{n-2}^{\phi_0}\rangle_{\phi_0}}.$$

Assim,

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_0}(x) + d_{n-2}P_{n-2}^{\phi_0}(x), \quad n \geq 2, \tag{2.2}$$

onde

$$d_{n-2} = \frac{q\rho_n^{\phi_1}}{c\rho_{n-2}^{\phi_0}}, \quad n \geq 2, \tag{2.3}$$

com $\rho_n^{\phi} = \int_{-b}^{b}\{P_n^{\phi}(x)\}^2 d\phi(x)$.

Registramos aqui, algumas identidades que relacionam os coeficientes das relações de recorrência (1.3) para os polinômios $P_n^{\phi_0}$ e $P_n^{\phi_1}$, e os coeficientes d_n em (2.2).

Em primeiro lugar, temos as seguintes relações de recorrência para d_n.

Teorema 2.1 *Sejam $d\phi_0$ e $d\phi_1$ medidas satisfazendo* (2.1). *Então os coeficientes d_n na relação* (2.2) *satisfazem*

$$\frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_0}}, \quad n \geq 2, \tag{2.4}$$

e

$$d_{n-1} - d_{n-2} = \alpha_{n+1}^{\phi_0} - \alpha_{n+1}^{\phi_1}, \quad n \geq 2, \tag{2.5}$$

com $d_0 = \frac{q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\phi_0}} = \alpha_2^{\phi_0} - \alpha_2^{\phi_1}$.

Prova: De (1.4) temos

$$\rho_n^{\phi} = \alpha_{n+1}^{\phi}\alpha_n^{\phi}...\alpha_2^{\phi}\mu_0^{\phi},$$

então

$$d_{n-2} = \frac{q\alpha_{n+1}^{\phi_1}\alpha_n^{\phi_1}\cdots\alpha_2^{\phi_1}\mu_0^{\phi_1}}{c\alpha_{n-1}^{\phi_0}\alpha_{n-2}^{\phi_0}\cdots\alpha_2^{\phi_0}\mu_0^{\phi_0}} = q\frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}\alpha_n^{\phi_1}\cdots\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0}\cdots\alpha_2^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}, \quad n \geq 2. \tag{2.6}$$

A partir disto, a relação (2.4) e a primeira expressão para d_0 são evidentes. Para obter o restante, primeiro temos de (2.2) e da relação de recorrência (1.3) para $\{P_n^{\phi_0}\}$ que

$$\begin{aligned} P_n^{\phi_1}(x) &= P_n^{\phi_0}(x) + \frac{d_{n-2}}{\alpha_n^{\phi_0}}\left[xP_{n-1}^{\phi_0}(x) - P_n^{\phi_0}(x)\right] \\ &= \left[1 - \frac{d_{n-2}}{\alpha_n^{\phi_0}}\right]P_n^{\phi_0}(x) + \frac{d_{n-2}}{\alpha_n^{\phi_0}}xP_{n-1}^{\phi_0}(x), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Usando esta relação e (2.2) na relação de recorrência (1.3) para $\{P_n^{\phi_1}\}$ temos

$$\begin{aligned}
P_{n+1}^{\phi_1}(x) &= xP_n^{\phi_1}(x) - \alpha_{n+1}^{\phi_1}P_{n-1}^{\phi_1}(x) \\
P_{n+1}^{\phi_0}(x) + d_{n-1}P_{n-1}^{\phi_0} &= x[P_n^{\phi_0} + d_{n-2}P_{n-2}^{\phi_0}] - \alpha_{n+1}^{\phi_1}\left\{\left[1 - \frac{d_{n-3}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0}}\right]P_{n-1}^{\phi_0} + \frac{d_{n-3}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0}}xP_{n-2}^{\phi_0}\right\} \\
P_{n+1}^{\phi_0}(x) &= xP_n^{\phi_0}(x) - \left[\alpha_{n+1}^{\phi_1} - d_{n-3}\frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0}} + d_{n-1}\right]P_{n-1}^{\phi_0}(x) \\
&\quad + x\left[d_{n-2} - d_{n-3}\frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0}}\right]P_{n-2}^{\phi_0}(x), \quad n \geq 3.
\end{aligned}$$

Portanto, a partir de (2.4)

$$\begin{aligned}
P_{n+1}^{\phi_0}(x) &= xP_n^{\phi_0}(x) - \left[\alpha_{n+1}^{\phi_1} - d_{n-3}\frac{d_{n-2}}{d_{n-3}} + d_{n-1}\right]P_{n-1}^{\phi_0}(x) + x\left[d_{n-2} - d_{n-3}\frac{d_{n-2}}{d_{n-3}}\right]P_{n-2}^{\phi_0}(x) \\
&= xP_n^{\phi_0}(x) - \left[\alpha_{n+1}^{\phi_1} - d_{n-2} + d_{n-1}\right]P_{n-1}^{\phi_0}(x), \quad n \geq 3,
\end{aligned}$$

o que leva a (2.5) para $n \geq 3$. De modo similar, como $P_0^{\phi_1}(x) = P_0^{\phi_0}(x) = 1$ e $P_1^{\phi_1}(x) = P_1^{\phi_0}(x) = x$, então

$$P_2^{\phi_0} = x^2 - \alpha_2^{\phi_0} \text{ e}$$
$$P_2^{\phi_1} = x^2 - \alpha_2^{\phi_1}.$$

Portanto, de (2.2), temos

$$x^2 - \alpha_2^{\phi_1} = x^2 - \alpha_2^{\phi_0} + d_0$$

o que implica $d_0 = \alpha_2^{\phi_0} - \alpha_2^{\phi_1}$. Temos ainda, que

$$P_3^{\phi_1} = x^3 - (\alpha_3^{\phi_1} + \alpha_2^{\phi_1})x \quad \text{e}$$
$$P_3^{\phi_0} = x^3 - (\alpha_3^{\phi_0} + \alpha_2^{\phi_0})x$$

De (2.2)

$$x^3 - (\alpha_3^{\phi_1} + \alpha_2^{\phi_1})x = x^3 - (\alpha_3^{\phi_0} + \alpha_2^{\phi_0})x + d_1x$$

Como $\alpha_2^{\phi_0} - \alpha_2^{\phi_1} = d_0$ temos que (2.5) é válida para $n = 2$. Isso completa a prova do teorema. ■

Teorema 2.2 *Sejam $d\phi_0$ e $d\phi_1$ medidas satisfazendo (2.1), então*

$$(\alpha_3^{\phi_1} - d_0)\alpha_1^{\phi_0} = \alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}, \quad (\alpha_4^{\phi_1} - d_1)\alpha_2^{\phi_0} = \alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1},$$

e

$$(\alpha_{n+2}^{\phi_1} - d_{n-1})\alpha_n^{\phi_0} = \alpha_{n+2}^{\phi_1}(\alpha_n^{\phi_1} - d_{n-3}), \quad n \geq 3.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} &(\alpha_{2n+1}^{\phi_1} - d_{2n-2})\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\cdots\alpha_3^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0} = \alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\cdots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n \geq 1. \\ &(\alpha_{2n+2}^{\phi_1} - d_{2n-1})\alpha_{2n}^{\phi_0}\cdots\alpha_4^{\phi_0}\alpha_2^{\phi_0} = \alpha_{2n+2}^{\phi_1}\alpha_{2n}^{\phi_1}\cdots\alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}, \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Prova: Como $d_0 = q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}/\alpha_1^{\phi_0}$ e $q\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1} = \alpha_1^{\phi_0} - \alpha_1^{\phi_1}$, segue que

$$(\alpha_3^{\phi_1} - d_0)\alpha_1^{\phi_0} = \alpha_3^{\phi_1}[\alpha_1^{\phi_0} - q\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}] = \alpha_3^{\phi_1}(\alpha_1^{\phi_0} - \alpha_1^{\phi_0} + \alpha_1^{\phi_1}) = \alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}.$$

Como $d_1\alpha_2^{\phi_1} = d_0\alpha_4^{\phi_1}$ e $d_0 = \alpha_2^{\phi_0} - \alpha_2^{\phi_1}$, segue também que

$$(\alpha_4^{\phi_1} - d_1)\alpha_2^{\phi_0} = \alpha_4^{\phi_1}(\alpha_2^{\phi_0} - d_0) = \alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}.$$

Agora, por (2.4), $d_{n-1}\alpha_n^{\phi_0} = d_{n-2}\alpha_{n+2}^{\phi_1}$. Então, para $n \geq 3$, temos

$$(\alpha_{n+2}^{\phi_1} - d_{n-1})\alpha_n^{\phi_0} = \alpha_{n+2}^{\phi_1}(\alpha_n^{\phi_0} - d_{n-2}).$$

Por (2.5), $d_{n-2} = \alpha_n^{\phi_0} - \alpha_n^{\phi_1} + d_{n-3}$, portanto

$$(\alpha_{n+2}^{\phi_1} - d_{n-1})\alpha_n^{\phi_0} = \alpha_{n+2}^{\phi_1}(\alpha_n^{\phi_0} - \alpha_n^{\phi_0} + \alpha_n^{\phi_1} - d_{n-3}) = \alpha_{n+2}^{\phi_1}(\alpha_n^{\phi_1} - d_{n-3}).$$

Comprovando a primeira parte do teorema. Mas

$$(\alpha_{2n+1}^{\phi_1} - d_{2n-2})\alpha_{2n-1}^{\phi_0} = \alpha_{2n+1}^{\phi_1}(\alpha_{2n-1}^{\phi_1} - d_{2n-4}),$$

e portanto

$$(\alpha_{2n+1}^{\phi_1} - d_{2n-2})\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\alpha_{2n-3}^{\phi_0} = \alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}(\alpha_{2n-3}^{\phi_1} - d_{2n-6}).$$

Fazendo sucessivamente, obtemos

$$(\alpha_{2n+1}^{\phi_1} - d_{2n-2})\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\alpha_{2n-3}^{\phi_0}...\alpha_3^{\phi_0} = \alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}...\alpha_5^{\phi_1}(\alpha_3^{\phi_1} - d_0)$$

Como $(\alpha_3^{\phi_1} - d_0)\alpha_1^{\phi_0} = \alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}$, temos que a primeira relação de (2.7) é válida.

Procedendo de modo análogo, obtemos a segunda relação de (2.7). O que demonstra o teorema. ■

Agora definimos a sequência de números reais $\{\ell_n\}$ tal que

$$\ell_0 = 1, \quad (\ell_1 - 1) = 2q\alpha_2^{\phi_1}, \quad (\ell_2 - 1) = 2q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}/\alpha_1^{\phi_0}$$

e

$$(\ell_{n+1} - 1) = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_0}}(\ell_{n-1} - 1), \quad n \geq 2, \tag{2.8}$$

então,

$$\frac{(\ell_{n+1} - 1)}{(\ell_{n-1} - 1)} = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_0}} = \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}, \quad n \geq 2.$$

Daí,

$$\begin{aligned}(\ell_{n+1} - 1)(\ell_n - 1) &= \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}(\ell_{n-1} - 1)(\ell_{n-2} - 1) \\ &= \frac{d_{n-1}}{d_0}(\ell_2 - 1)(\ell_1 - 1)\end{aligned}$$

e portanto,

$$(\ell_{n+1} - 1)(\ell_n - 1) = 4qd_{n-1}, \quad n \geq 1. \tag{2.9}$$

Podemos agora provar o seguinte resultado, que fornece fórmulas explícitas para se obter $\frac{\ell_n - 1}{2}$ e $\frac{\ell_n + 1}{2}$ em termos dos coeficientes das relações de recorrência para $P_n^{\phi_0}$ e $P_n^{\phi_1}$.

Teorema 2.3 *Sejam $d\phi_0$ e $d\phi_1$ medidas satisfazendo* (2.1), *então os elementos da sequência $\{\ell_n\}$ definida por* (2.8) *satisfazem, para $n \geq 1$,*

$$\frac{(\ell_{2n+1} - 1)}{2} = q\frac{\alpha_{2n+2}^{\phi_1}\alpha_{2n}^{\phi_1}\cdots\alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}}{\alpha_{2n}^{\phi_0}\cdots\alpha_4^{\phi_0}\alpha_2^{\phi_0}}, \qquad \frac{(\ell_{2n} - 1)}{2} = q\frac{\alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\cdots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\cdots\alpha_3^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}, \tag{2.10}$$

e

$$\frac{(\ell_{2n-1} + 1)}{2} = \frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\alpha_{2n-3}^{\phi_0}\cdots\alpha_1^{\phi_0}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\alpha_{2n-3}^{\phi_1}\cdots\alpha_1^{\phi_1}}, \qquad \frac{(\ell_{2n} + 1)}{2} = \frac{\alpha_{2n}^{\phi_0}\alpha_{2n-2}^{\phi_0}\cdots\alpha_2^{\phi_0}}{\alpha_{2n}^{\phi_1}\alpha_{2n-2}^{\phi_1}\cdots\alpha_2^{\phi_1}}. \tag{2.11}$$

Prova: Por (2.8), temos

$$(\ell_{2n+1} - 1) = \frac{\alpha_{2n+2}^{\phi_1}}{\alpha_{2n}^{\phi_0}}(\ell_{2n-1} - 1) = \frac{\alpha_{2n+2}^{\phi_1}\alpha_{2n}^{\phi_1}\cdots\alpha_4^{\phi_1}}{\alpha_{2n}^{\phi_0}\alpha_{2n-2}^{\phi_0}\cdots\alpha_2^{\phi_0}}(\ell_1 - 1) = \frac{\alpha_{2n+2}^{\phi_1}\alpha_{2n}^{\phi_1}\cdots\alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}2q}{\alpha_{2n}^{\phi_0}\alpha_{2n-2}^{\phi_0}\cdots\alpha_2^{\phi_0}}$$

e

$$(\ell_{2n} - 1) = \frac{\alpha_{2n+1}^{\phi_1}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_0}}(\ell_{2n-2} - 1) = \frac{\alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\cdots\alpha_5^{\phi_1}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\alpha_{2n-3}^{\phi_0}\cdots\alpha_3^{\phi_0}}(\ell_2 - 1) = \frac{\alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\cdots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}2q}{\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\alpha_{2n-3}^{\phi_0}\cdots\alpha_3^{\phi_0}}$$

Por (2.9)

$$(\ell_{2n+1}-1)(\ell_{2n}-1)=4qd_{2n-1},$$

o que implica que

$$\frac{(\ell_{2n+1}-1)}{2}=\frac{qd_{2n-1}}{\frac{(\ell_{2n}-1)}{2}}, \quad n\geq 2$$

Por (2.5)

$$d_{2n-1}=\alpha_{2n+1}^{\phi_0}-\alpha_{2n+1}^{\phi_1}+d_{2n-2},$$

assim,

$$\frac{\ell_{2n+1}-1}{2}=\frac{q[\alpha_{2n+1}^{\phi_0}-\alpha_{2n+1}^{\phi_1}+d_{2n-2}]}{(\ell_{2n}-1)/2}, \quad \geq 1.$$

Portanto de (2.10), temos

$$\begin{aligned}\frac{(\ell_{2n+1}-1)}{2} &= \frac{q[\alpha_{2n+1}^{\phi_0}-\alpha_{2n+1}^{\phi_1}+d_{2n-2}]\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\cdots\alpha_3^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}{q\alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\cdots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}\\ &= \frac{\alpha_{2n+1}^{\phi_0}\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\cdots\alpha_1^{\phi_0}}{\alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\cdots\alpha_1^{\phi_1}}+\frac{[d_{2n-2}-\alpha_{2n+1}^{\phi_1}]\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\cdots\alpha_3^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}{\alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\cdots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}, \quad n\geq 1.\end{aligned}$$

Por (2.7), como o segundo termo do lado direito pode ser identificado como -1, obtemos o resultado para $(\ell_{2n+1}+1)/2$, $n\geq 1$. Do mesmo modo, o resultado para $(\ell_{2n}+1)/2$, $n\geq 1$ é também obtido. Como os resultados para $(\ell_1+1)/2$ e $(\ell_2+1)/2$ são também verificados facilmente, o teorema está provado. ■

A partir de (2.10) e (2.11), obtemos

$$(\ell_{2n}-1)(\ell_{2n-1}+1)=2q\frac{\alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\cdots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\cdots\alpha_3^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}2\frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\alpha_{2n-3}^{\phi_0}\cdots\alpha_1^{\phi_0}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\alpha_{2n-3}^{\phi_1}\cdots\alpha_1^{\phi_1}}=4q\alpha_{2n+1}^{\phi_1}$$

e

$$(\ell_{2n+1}-1)(\ell_{2n}+1)=2q\frac{\alpha_{2n+2}^{\phi_1}\alpha_{2n}^{\phi_1}\cdots\alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}}{\alpha_{2n}^{\phi_0}\cdots\alpha_4^{\phi_0}\alpha_2^{\phi_0}}2\frac{\alpha_{2n}^{\phi_0}\alpha_{2n-2}^{\phi_0}\cdots\alpha_2^{\phi_0}}{\alpha_{2n}^{\phi_1}\alpha_{2n-2}^{\phi_1}\cdots\alpha_2^{\phi_1}}=4q\alpha_{2n+2}^{\phi_1}.$$

Analogamente, obtemos que

$$(\ell_{2n}-1)(\ell_{2n+1}+1)=4q\alpha_{2n+1}^{\phi_0}$$

e

$$(\ell_{2n+1}-1)(\ell_{2n+2}+1)=4q\alpha_{2n+2}^{\phi_0}.$$

Resumindo as observações anteriores, temos o seguinte resultado que relaciona os coeficientes das relações de recorrência entre os polinômios associados as duas distribuições relacionadas por (2.1).

Teorema 2.4 *Sejam duas distribuições simétricas $d\phi_0$ e $d\phi_1$ que satisfazem*

$$d\phi_1(x)=\frac{c}{1+qx^2}d\phi_0(x),$$

existe uma sequência de números reais $\{\ell_n=\ell_n(q)\}$ tal que

$$\alpha_{n+1}^{\phi_1}=\frac{1}{4q}(\ell_n-1)(\ell_{n-1}+1),\qquad \alpha_{n+1}^{\phi_0}=\frac{1}{4q}(\ell_n-1)(\ell_{n+1}+1),\qquad n\geq 1 \tag{2.12}$$

e

$$d_{n-1}=d_{n-1}(q)=\frac{1}{4q}(\ell_n-1)(\ell_{n+1}-1),\qquad n\geq 1, \tag{2.13}$$

com $\ell_0=1$ e $\ell_1=1+2q\alpha_2^{\phi_1}$.

Este resultado será utilizado capítulo seguinte, para obter relações envolvendo certos polinômios de Sobolev.

Capítulo 3

Medidas Simétricas Relacionadas e os Polinômios de Sobolev

3.1 Introdução

Neste capítulo estudamos os polinômios de Sobolev $P_n^{S_i}$, $i = 1, 2$ ortogonais em relação aos produtos internos

$$\langle f, g \rangle_{S_1} = \langle f, g \rangle_{\psi_0 + \kappa_1 \phi_1} + \kappa_2 \langle f', g' \rangle_{\psi_1},$$

e

$$\langle f, g \rangle_{S_2} = \langle f, g \rangle_{\psi_0} + \langle f', g' \rangle_{\kappa_1 \phi_0 + \kappa_2 \psi_1},$$

onde todas as medidas envolvidas são simétricas e $\kappa_1, \kappa_2 \geq 0$.

Na Seção 3.2 estudamos $\langle f, g \rangle_{S_1}$, no caso em que

$$d\psi_0(x) = (1 + qx^2) d\phi_1(x) \quad \text{e} \quad \frac{dP_n^{\phi_1}(x)}{dx} = nP_{n-1}^{\psi_1}(x),$$

e na Seção 3.3 consideramos $\langle f, g \rangle_{S_2}$, no caso em que

$$d\phi_0(x) = (1 + qx^2) d\psi_1(x) \quad \text{e} \quad \frac{dP_n^{\psi_0}(x)}{dx} = nP_{n-1}^{\phi_0}(x).$$

Nos dois casos obtemos os resultados particulares para as famílias de medidas simétricas clássicas Hermite e Gegenbauer.

3.2 Produto Interno S_1

Sejam $d\phi_1$ e $d\psi_1$ medidas simétricas clássicas tais que os polinômios ortogonais mônicos associados satisfazem $P_n^{\phi_1\prime}(x) = nP_{n-1}^{\psi_1}(x)$, $n \geq 1$ e $d\psi_0$ tal que

$$d\psi_0(x) = (1 + qx^2)d\phi_1(x).$$

Então de (2.2) temos,

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\psi_0}(x) + d_{n-2}(q)P_{n-2}^{\psi_0}(x), \quad n \geq 2$$

e derivando esta expressão, obtemos

$$P_{n-1}^{\psi_1}(x) = \frac{1}{n}P_n^{\psi_0\prime}(x) + \frac{d_{n-2}(q)}{n}P_{n-2}^{\psi_0\prime}(x), \quad n \geq 2$$

Os coeficientes $d_n(q)$ são obtidos como em (2.13).

Consideremos os polinômios $P_n^{S_1}$ ortogonais em relação ao produto interno de Sobolev

$$\langle f, g\rangle_{S_1} = \langle f, g\rangle_{\psi_0} + \kappa_1\langle f, g\rangle_{\phi_1} + \kappa_2\langle f', g'\rangle_{\psi_1}, \quad n \geq 1.$$

Expandindo $P_{n+1}^{\phi_1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x)$ como uma combinação linear dos polinômios $P_n^{S_1}$ da seguinte forma

$$P_{n+1}^{\phi_1}(x) = P_{n+1}^{S_1}(x) + \sum_{r=1}^{[\frac{n}{2}]} c_{n-2r+1}P_{n-2r+1}^{S_1}(x)$$

e considerando o produto interno

$$\langle P_{n+1}^{\phi_1}, P_{n-2r+1}^{S_1}\rangle_{S_1} = c_{n-2r+1}\langle P_{n-2r+1}^{S_1}, P_{n-2r+1}^{S_1}\rangle_{S_1},$$

obtemos

$$c_{n-2r+1} = \frac{\langle P_{n+1}^{\phi_1}, P_{n-2r+1}^{S_1}\rangle_{S_1}}{\langle P_{n-2r+1}^{S_1}, P_{n-2r+1}^{S_1}\rangle_{S_1}}, \quad 1 \leq r \leq [\frac{n}{2}].$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle P_{n+1}^{\phi_1}, P_{n-2r+1}^{S_1}\rangle_{S_1} &= \langle P_{n+1}^{\psi_0} + d_{n-1}P_{n-1}^{\psi_0}, P_{n-2r+1}^{S_1}\rangle_{\psi_0} + \kappa_1\langle P_{n+1}^{\phi_1}, P_{n-2r+1}^{S_1}\rangle_{\phi_1} + \\ &\quad \kappa_2\langle (n+1)P_n^{\psi_1}, P_{n-2r+1}^{S_1\prime}\rangle_{\psi_1}, \quad 1 \leq r \leq [\frac{n}{2}].\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle P^{\phi_1}_{n+1}, P^{S_1}_{n-2r+1}\rangle_{S_1} = 0, \quad 2 \le r \le [\frac{n}{2}]$$

e para $r = 1$ obtemos

$$\langle P^{\phi_1}_{n+1}, P^{S_1}_{n-1}\rangle_{S_1} = d_{n-1}\langle P^{\psi_0}_{n-1}, P^{\psi_0}_{n-1}\rangle_{\psi_0}.$$

Portanto,

$$P^{\phi_1}_{n+1}(x) = P^{\psi_0}_{n+1}(x) + d_{n-1}P^{\psi_0}_{n-1}(x) = P^{S_1}_{n+1}(x) - a_{n-1}(q,\kappa_1,\kappa_2)P^{S_1}_{n-1}(x), \quad n \ge 1, \quad (3.1)$$

onde

$$a_{n-1}(q,\kappa_1,\kappa_2) = -d_{n-1}(q)\frac{\langle P^{\psi_0}_{n-1}, P^{\psi_0}_{n-1}\rangle_{\psi_0}}{\langle P^{S_1}_{n-1}, P^{S_1}_{n-1}\rangle_{S_1}}, \quad n \ge 1.$$

Expandindo $\langle P^{S_1}_n, P^{S_1}_n\rangle_{S_1}$, para $n \ge 2$ e considerando $a_n = a_n(q,\kappa_1,\kappa_2)$ e $d_n = d_{n-1}(q)$, de (3.1) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle P^{S_1}_n, P^{S_1}_n\rangle_{S_1} &= \langle P^{\psi_0}_n + d_{n-2}P^{\psi_0}_{n-2} + a_{n-2}P^{S_1}_{n-2}, P^{S_1}_n\rangle_{S_1} \\
&= \langle P^{\psi_0}_n + d_{n-2}P^{\psi_0}_{n-2}, P^{\psi_0}_n + d_{n-2}P^{\psi_0}_{n-2} + a_{n-2}P^{S_1}_{n-2}\rangle_{\psi_0} + \\
&\quad \kappa_1\langle P^{\phi_1}_n, P^{S_1}_n\rangle_{\phi_1} + \kappa_2\langle nP^{\psi_1}_{n-1}, P^{S_1\prime}_n\rangle_{\psi_1} \\
&= \rho^{\psi_0}_n + d^2_{n-2}\rho^{\psi_0}_{n-2} + a_{n-2}d_{n-2}\rho^{\psi_0}_{n-2} + \kappa_1\rho^{\phi_1}_n + \kappa_2 n^2\rho^{\psi_1}_{n-1}.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$a_{n+1} = \frac{-d_{n+1}\ \rho^{\psi_0}_{n+1}}{\rho^{\psi_0}_{n+1} + \{d_{n-1}\}^2\rho^{\psi_0}_{n-1} + \kappa_1\rho^{\phi_1}_{n+1} + \kappa_2(n+1)^2\rho^{\psi_1}_n + d_{n-1}\rho^{\psi_0}_{n-1}a_{n-1}}, \quad n \ge 1.$$

Por (2.3), $\rho^{\psi_0}_{n-1} = q\frac{\rho^{\phi_1}_{n+1}}{d_{n-1}}$,$n \ge 1$, e portanto

$$a_{n+1}(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-d_{n+1}\rho^{\psi_0}_{n+1}}{\rho^{\psi_0}_{n+1} + d_{n-1}q\rho^{\phi_1}_{n+1} + \kappa_1\rho^{\phi_1}_{n+1} + \kappa_2(n+1)^2\rho^{\psi_1}_n + q\rho^{\phi_1}_{n+1}a_{n-1}}.$$

Dividindo numerador e denominador por $\rho^{\psi_0}_{n+1}$ obtemos

$$a_{n+1}(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-d_{n+1}}{1 + d_{n-1}q\frac{\rho^{\phi_1}_{n+1}}{\rho^{\psi_0}_{n+1}} + \kappa_1\frac{\rho^{\phi_1}_{n+1}}{\rho^{\psi_0}_{n+1}} + \kappa_2(n+1)^2\frac{\rho^{\psi_1}_n}{\rho^{\psi_0}_{n+1}} + q\frac{\rho^{\phi_1}_{n+1}}{\rho^{\psi_0}_{n+1}}a_{n-1}}, \quad n \ge 1.$$

Sabemos por (1.4) que $\rho^{\phi_1}_{n+1} = \frac{\rho^{\phi_1}_{n+3}}{\alpha^{\phi_1}_{n+4}\alpha^{\phi_1}_{n+3}}$, $n \ge -1$. Além disso, por (2.3), $\rho^{\psi_0}_{n+1} = q\frac{\rho^{\phi_1}_{n+3}}{d_{n+1}}$, $n \ge -1$. Logo,

$$\frac{\rho^{\psi_1}_n}{\rho^{\psi_0}_{n+1}} = \frac{d_{n+1}}{q}\frac{\rho^{\psi_1}_n}{\rho^{\phi_1}_{n+3}} = \frac{d_{n+1}}{q}\frac{1}{\alpha^{\phi_1}_{n+4}\alpha^{\phi_1}_{n+3}}\frac{\rho^{\psi_1}_n}{\rho^{\phi_1}_{n+1}}, \quad n \ge -1.$$

Para $n=0$

$$\langle P_0^{S_1}, P_0^{S_1}\rangle_{S_1} = \langle 1,1\rangle_{S_1} = \langle 1,1\rangle_{\psi_0} + \kappa_1\langle 1,1\rangle_{\phi_1} = \rho_0^{\psi_0} + \kappa_1\rho_0^{\phi_1}.$$

Desse modo

$$a_0(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-d_0(q)\rho_0^{\psi_0}}{\rho_0^{\psi_0} + \kappa_1\rho_1^{\phi_1}} = \frac{-qd_0(q)\alpha_2^{\phi_1}\alpha_3^{\phi_1}}{q\alpha_2^{\phi_1}\alpha_3^{\phi_1} + \kappa_1 d_0(q)}.$$

Para $n=1$

$$\langle P_1^{S_1}, P_1^{S_1}\rangle_{S_1} = \langle x,x\rangle_{S_1} = \langle x,x\rangle_{\psi_0} + \kappa_1\langle x,x\rangle_{\phi_1} + \kappa_2\langle 1,1\rangle_{\psi_1} = \rho_1^{\psi_0} + \kappa_1\rho_1^{\phi_1} + \kappa_2\rho_0^{\psi_1}.$$

Logo,

$$a_1 = \frac{-d_1\rho_1^{\psi_0}}{\rho_1^{\psi_0} + \kappa_1\rho_1^{\phi_1} + \kappa_2\rho_0^{\psi_1}} = \frac{-d_1(q)q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_4^{\phi_1}}{q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_4^{\phi_1} + \kappa_1 d_1(q) + \kappa_2\frac{\rho_0^{\psi_1}}{\rho_1^{\phi_1}}}.$$

Por (2.13)

$$d_{n-1}(q) = \frac{1}{4q}(\ell_n - 1)(\ell_{n+1} - 1) = \frac{1}{q}\frac{(\ell_n - 1)}{2}\frac{(\ell_{n+1} - 1)}{2}.$$

Assim $d_{n-1}(q) = q^{-1}\tilde{\ell}_n\tilde{\ell}_{n+1}$, onde $\tilde{\ell}_n = \frac{\ell_n - 1}{2}$.

De (2.12)

$$\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \frac{1}{q}\frac{(\ell_n - 1)}{2}\frac{(\ell_{n-1})}{2}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\tilde{\ell}_n = \tilde{\ell}_n(q) &= \frac{q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\frac{\ell_{n-1}+1}{2}} = \frac{q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\frac{\ell_{n-1}-1+2}{2}} \\
&= \frac{q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\tilde{\ell}_{n-1} + 1}.
\end{aligned}$$

Também por (2.12) temos

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1}^{\psi_0} &= \frac{1}{q}\frac{(\ell_n - 1)}{2}\frac{(\ell_{n+1} + 1)}{2} = \frac{1}{q}\frac{(\ell_n - 1)}{2}\frac{(\ell_{n+1} - 1 + 2)}{2} \\
&= \frac{1}{q}\tilde{\ell}_n(\tilde{\ell}_{n+1} + 1).
\end{aligned}$$

Assim, $\tilde{\ell}_{n+1} = \tilde{\ell}_{n+1}(q) = \frac{q\alpha_{n+1}^{\psi_0}}{\tilde{\ell}_n(q)} - 1$.

Como $\ell_1 = 1 + 2q\alpha_2^{\phi_1}$, então

$$\tilde{\ell}_1(q) = \frac{\ell_1 - 1}{2} = q\alpha_2^{\phi_1}.$$

Assim, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1 *Sejam $d\phi_1$ e $d\psi_1$ medidas clássicas simétricas e tais que os polinômios ortogonais mônicos associados $\{P_n^{\phi_1}\}$ e $\{P_n^{\psi_1}\}$ satisfazem $P_n^{\phi_1\prime}(x) = nP_{n-1}^{\psi_1}(x)$, $n \geq 1$. Seja a medida $d\psi_0$ dada por*

$$d\psi_0 = (1 + qx^2)d\phi_1(x). \tag{3.2}$$

Então o polinômio ortogonal mônico $\{P_n^{S_1}\}$ associado ao produto interno

$$\langle f, g\rangle_{S_1} = \langle f, g\rangle_{\psi_0+\kappa_1\phi_1} + \kappa_2\langle f', g'\rangle_{\psi_1},$$

satisfaz $P_0^{S_1}(x) = P_0^{\psi_0}(x) = 1$, $P_1^{S_1}(x) = P_1^{\psi_0}(x) = x$,

$$P_{n+1}^{S_1}(x) - a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2)P_{n-1}^{S_1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x), \quad n \geq 1.$$

Os coeficientes $a_n(q, \kappa_1, \kappa_2)$ podem ser obtidos por

$$a_{n+1}(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{-q\alpha_{n+3}^{\phi_1}\alpha_{n+4}^{\phi_1}d_{n+1}(q)}{q\alpha_{n+3}^{\phi_1}\alpha_{n+4}^{\phi_1} + d_{n+1}(q)\left[\kappa_1 + (n+1)^2\frac{\rho_n^{\psi_1}}{\psi_{n+1}^{\phi_1}}\kappa_2 + qd_{n-1}(q) + qa_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2)\right]},$$

para $n \geq 1$, onde

$$a_0(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{-d_0(q)q\alpha_2^{\phi_1}\alpha_3^{\phi_1}}{q\alpha_2^{\phi}\alpha_3^{\phi_1} + d_0(q)\kappa_1},$$

$$a_1(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{-d_1(q)q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_4^{\phi_1}}{q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_4^{\phi_1} + d_1(q)[\kappa_1 + (\rho_0^{\psi_1}/\rho_1^{\phi_1})\kappa_2]}.$$

Os coeficientes $d_n(q)$ satisfazem

$$d_{n-1}(q) = q^{-1}\tilde{\ell}_n(q)\tilde{\ell}_{n+1}(q), \qquad n \geq 1,$$

onde $\tilde{\ell}_n(q) = -1 + \frac{q\alpha_n^{\psi_0}}{\tilde{\ell}_{n-1}(q)} = \frac{q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\tilde{\ell}_{n-1}(q)+1}$, $n \geq 2$ e $\tilde{\ell}_1(q) = q\alpha_2^{\phi_1}$. Aqui, q, κ_1 e κ_2 são tais que $d\psi_0$ é uma medida positiva e tais que o produto interno S_1 é definido positivo (ou negativo).

Como um caso particular deste teorema temos os resultados associados com a medida de Hermite. Aqui consideramos $d\phi_1(x) = d\psi_1(x) = e^{-x^2}dx$ e $d\psi_0(x) = (1 + qx^2)d\phi_1(x) = (1 + qx^2)e^{-x^2}dx$, para qualquer $q \geq 0$. Então $P_n^{\phi_1}(x) = H_n(x)$ (os polinômios de Hermite na forma mônica) e $\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \alpha_{n+1}^{\psi_1} = n/2$ e $\rho_n^{\psi_1}/\rho_{n+1}^{\phi_1} = 2/(n+1)$. Assim,

Corolário 3.1.1 *Dado o produto interno*

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{HS_1} = \langle f,g\rangle_{HS_1(q,\kappa_1,\kappa_2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)(1+\kappa_1+qx^2)e^{-x^2}dx + \\ &+\kappa_2\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)e^{-x^2}dx,\end{aligned}$$

onde $q \geq 0$*, então os polinômios ortogonais associados* $P_n^{HS_1}$ *satisfazem*

$$P_0^{HS_1}(x) = 1, \quad P_1^{HS_1}(x) = x$$

$$\begin{aligned}P_{n+1}^{HS_1}(x) - a_{n-1}^{HS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2)P_{n-1}^{HS_1}(x) &= H_{n+1}(x)\\ P_{n+1}^{HS_1}(x) - a_{n-1}^{HS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2)P_{n-1}^{HS_1}(x) &= P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1}^{H_1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x), \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

Aqui $d_{n-1}^{H_1}(0) = a_{n-1}^{HS_1}(0,\kappa_1,\kappa_2)$, $n \geq 1$, $a_n^{HS_1}(0,0,0) = 0$, $n \geq 0$ *e para* $q \neq 0$ *tem-se*

$$a_n^{HS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-q(n+2)(n+3)d_{n+1}^{H_1}(q)}{q(n+2)(n+3) + 4d_{n+1}^{H_1}(q)\left[\kappa_1 + 2(n+1)\kappa_2 + qd_{n-1}^{H_1}(q) + qa_{n-1}^{HS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2)\right]},$$

para $n \geq 1$*, onde*

$$\begin{aligned}a_0^{HS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2) &= \frac{-qd_0^{H_1}(q)}{q+2d_0^{H_1}(q)\kappa_1},\\ a_1^{HS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2) &= \frac{-3qd_1^{H_1}(q)}{3q+2d_1^{H_1}(q)[\kappa_1+2\kappa_2]}.\end{aligned}$$

Os coeficientes $d_n^{H_1}(q)$ *satisfazem*

$$d_{n-1}^{H_1}(q) = q^{-1}\tilde{\ell}_n(q)\tilde{\ell}_{n+1}(q), \qquad n \geq 1,$$

onde $\tilde{\ell}_n(q) = \frac{qn/2}{1-\tilde{\ell}_{n-1}(q)}$, $n \geq 2$ *e* $\tilde{\ell}_1(q) = q/2$.

Aqui, κ_1 *e* κ_2 *são tais que* $\kappa_2 \geq 0$ *e, se* $q > 0$*, então* $1+\kappa_1 \geq 0$ *e se* $q = 0$*, então* $1+\kappa_1 > 0$.

Observe que a relação $P_{n+1}^{HS_1}(x) - a_{n-1}^{HS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2)P_{n-1}^{HS_1}(x) = H_{n+1}(x)$ é mais simples do que a relação (9) obtida para pares simetricamente coerentes de medidas, visto que escrevemos os polinômios de Sobolev em termos de um só polinômio ao invés de dois (como em (9)).

Se $\kappa_1 \neq -1$, então podemos escrever o produto interno $\langle f, g\rangle_{HS_1}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{HS_1} = \quad & (1+\kappa_1)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\left(1+\frac{q}{1+\kappa_1}x^2\right)e^{-x^2}dx + \right.\\ & \left. + \frac{\kappa_2}{1+\kappa_1}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)e^{-x^2}dx\right].\end{aligned}$$

Assim, para $\kappa_1 \neq -1$, os produtos internos $\langle f, g\rangle_{HS_1(q,\kappa_1,\kappa_2)}$ e $\langle f, g\rangle_{HS_1(\tilde{q},0,\tilde{\kappa}_2)}$, onde $\tilde{q} = \frac{q}{1+\kappa_1}$ e $\tilde{\kappa}_2 = \frac{\kappa_2}{1+\kappa_1}$, estão relacionados à mesma sequência de polinômios ortogonais. Portanto, para κ_1, bastam duas escolhas $\kappa_1 = 0$ e $\kappa_1 = -1$ para obter todas a possibilidades para o produto interno no Corolário 3.1.1.

Além disso, temos

$$\begin{aligned}& < f,g >_{HS_1(q,\kappa_1,\kappa_2)}\\ &= q\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1+\kappa_1}{q}+x^2\right)e^{-x^2}f(x)g(x)dx + \frac{\kappa_2}{q}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)e^{-x^2}dx\right] =\\ &= q\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{1-q+\kappa_1}{q}+x^2\right)e^{-x^2}f(x)g(x)dx + \frac{\kappa_2}{q}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)e^{-x^2}dx\right] =\\ &= q < f,g >_{HS_1\left(1,\frac{1-q+\kappa_1}{q},\frac{\kappa_2}{q}\right)}\end{aligned}$$

Assim

$$a_n^{HS_1}(q,0,\kappa_2) = a_n^{HS_1}(1,\frac{1-q}{q},\frac{\kappa_2}{q}) \quad \text{e} \quad a_n^{HS_1}(q,-1,\kappa_2) = a_n^{HS_1}(1,-1,\frac{\kappa_2}{q}).$$

Portanto, fazendo $q = 1$, $\kappa_1 = \frac{1-q}{q}$ e $\kappa_2 = \frac{\kappa_2}{q}$,

$$\begin{aligned}& a_{n+1}^{HS_1}(q,0,\kappa_2)\\ &= \frac{-q(n+2)(n+3)d_{n+1}^{H_1}(1)}{q(n+2)(n+3)+4d_{n+1}^{H_1}(1)[1-q+2(n+1)\kappa_2+qd_{n-1}^{H_1}(1)+qa_{n-1}^{HS_1}(q,0,\kappa_2)]},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0^{HS_1}(q,0,\kappa_2) &= \frac{-qd_0^{H_1}(1)}{q+2(1-q)d_0^{H_1}(1)},\\ a_1^{HS_1}(q,0,\kappa_2) &= \frac{-3qd_1^{H_1}(1)}{3q+2d_1^{H_1}(1)[1-q+2\kappa_2]}\end{aligned}$$

e fazendo $q = 1$, $\kappa_1 = -1$ e $\kappa_2 = \frac{\kappa_2}{q}$,

$$\begin{aligned}& a_{n+1}^{HS_1}(q,-1,\kappa_2)\\ &= \frac{-q(n+2)(n+3)d_{n+1}^{H_1}(1)}{q(n+2)(n+3)+4d_{n+1}^{H_1}(1)[2(n+1)\kappa_2-q+qd_{n-1}^{H_1}(1)+qa_{n-1}^{HS_1}(q,-1,\kappa_2)]},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0^{HS_1}(q,-1,\kappa_2) &= \frac{-d_0^{H_1}(1)}{1-2d_0^{H_1}(1)}\\ a_1^{HS_1}(q,-1,\kappa_2) &= \frac{-3qd_1^{H_1}(1)}{3q+2d_1^{H_1}(1)[2\kappa_2-q]}.\end{aligned}$$

Vemos, então, que todos os cálculos podem ser feitos a partir da sequência $\{d_n^{H_1}(1)\}$.

Agora, um outro caso particular do Teorema 3.1 é o que está associado com os polinômios de Gegenbauer. Aqui, tomamos $d\psi_1(x) = (1-x^2)^{\lambda+1/2}dx$, $d\phi_1(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}dx$ e $d\psi_0(x) = (1+qx^2)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx$, para todo $q \geq -1$. Então $P_n^{\phi_1} = P_n^{(\lambda)}$ (os polinômios de Gegenbauer mônicos de parâmetro $\lambda \geq \frac{1}{2}$), $\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \alpha_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{1}{4}\frac{n(n+2\lambda-1)}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)}$ e $\rho_n^{\psi_1}/\rho_{n+1}^{\phi_1} = \rho_n^{(\lambda+1)}/\rho_{n+1}^{(\lambda)} = (n+2\lambda+1)/(n+1)$. Portanto segue o corolário,

Corolário 3.1.2 *Dado o produto interno*

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{GS_1} &= \langle f,g\rangle_{GS_1(q,\kappa_1,\kappa_2)} = \langle f,g\rangle_{\psi_0+\kappa_1\phi_1} + \kappa_2\langle f',g'\rangle_{\psi_1}\\ &= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1+\kappa_1+qx^2)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx + \kappa_2\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)(1-x^2)^{\lambda+1/2}dx,\end{aligned}$$

onde $q > -1$, então os polinômios ortogonais associados $P_n^{GS_1}(x)$ satisfazem

$$\begin{aligned}&P_0^{GS_1}(x) = 1, \quad P_1^{GS_1}(x) = x,\\ &P_{n+1}^{GS_1}(x) - a_{n-1}^{GS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2)P_{n-1}^{GS_1}(x) = P_{n+1}^{(\lambda)}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x), \qquad n \geq 1.\end{aligned}$$

Aqui $d_{n-1}^{(\lambda)}(0) = a_{n-1}^{GS_1}(0,\kappa_1,\kappa_2) = 0$, $\quad n \geq 1$, e para $q \neq 0$ tem-se

$$a_{n+1}^{GS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-q\alpha_{n+3}^{(\lambda)}\alpha_{n+4}^{(\lambda)}d_{n+1}^{(\lambda)}(q)}{q\alpha_{n+3}^{(\lambda)}\alpha_{n+4}^{(\lambda)} + d_{n+1}^{(\lambda)}(q)\left[\kappa_1 + (n+1)(n+2\lambda+1)\kappa_2 + qd_{n-1}^{(\lambda)}(q) + qa_{n-1}^{GS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2)\right]},$$

para $n \geq 1$, onde

$$\begin{aligned}a_0^{GS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2) &= \frac{-q\alpha_2^{(\lambda)}\alpha_3^{(\lambda)}d_0^{(\lambda)}(q)}{q\alpha_2^{(\lambda)}\alpha_3^{(\lambda)} + d_0^{(\lambda)}(q)\kappa_1},\\ a_1^{GS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2) &= \frac{-q\alpha_3^{(\lambda)}\alpha_4^{(\lambda)}d_1^{(\lambda)}(q)}{q\alpha_3^{(\lambda)}\alpha_4^{(\lambda)} + d_1^{(\lambda)}(q)[\kappa_1 + (2\lambda+1)\kappa_2]}.\end{aligned}$$

Os coeficientes $d_n^{(\lambda)}(q)$ satisfazem

$$d_{n-1}^{(\lambda)}(q) = q^{-1}\tilde{\ell}_n(q)\tilde{\ell}_{n+1}(q), \qquad n \geq 1,$$

onde $\tilde{\ell}_n(q) = \frac{q\alpha_{n+1}^{(\lambda)}}{1+\tilde{\ell}_{n-1}(q)}$, $n \geq 2$ e $\tilde{\ell}_1(q) = q\alpha_2^{(\lambda)}$. Aqui se $\kappa_1 = -1$, então $q > 0$ e $\kappa_2 \geq 0$ e se $\kappa_1 \neq -1$ então $\frac{q}{1+\kappa_1} \geq -1$ e $\frac{\kappa_2}{1+\kappa_1} \geq 0$.

Temos para $\kappa_1 \neq -1$

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{GS_1} = (1+\kappa_1)\Bigg[&\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\left(1+\frac{1}{1+\kappa_1}qx^2\right)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx+\\ &+\frac{\kappa_2}{1+\kappa_1}\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)(1-x^2)^{\lambda+1/2}dx\Bigg].\end{aligned}$$

Assim, novamente, para κ_1, apenas duas escolhas $\kappa_1 = 0$ e $\kappa_1 = -1$ são necessárias para obter todas as possibilidades para o produto inteno $\langle f, g\rangle_{GS_1(q,\kappa_1,\kappa_2)}$ do corolário acima.

Como

$$
\begin{aligned}
&\langle f, g\rangle_{GS_1(q,0,\kappa_2)} \\
&= -q\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{q} - x^2\right)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx - \frac{\kappa_2}{q}\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)(1-x^2)^{\lambda+1/2}dx \\
&= -q\int_{-1}^{1}\left(1 - \frac{q+1}{q} - x^2\right)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx - \frac{\kappa_2}{q}\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)(1-x^2)^{\lambda+1/2}dx \\
&= -q\langle f, g\rangle_{GS_1\left(-1,-\frac{(1+q)}{q},-\frac{\kappa_2}{q}\right)},
\end{aligned}
$$

temos $a_n^{GS_1}(q,0,\kappa_2) = a_n^{GS_1}(-1,-(1+q)/q,-\kappa_2/q)$. Consequentemente, a partir do corolário acima , fazendo $q=-1$, $\kappa_1 = -(1+q)/q$ e $\kappa_2 = -\kappa_2/q$,

$$
a_{n+1}^{GS_1}(q,0,\kappa_2) = \frac{-q\alpha_{n+3}^{(\lambda)}\alpha_{n+4}^{(\lambda)}d_{n+1}^{(\lambda)}(-1)}{q\alpha_{n+3}^{(\lambda)}\alpha_{n+4}^{(\lambda)} + d_{n+1}^{(\lambda)}(-1)\left[(1+q)+(n+1)(n+2\lambda+1)\kappa_2 + qd_{n-1}^{(\lambda)}(-1) + qa_{n-1}^{GS_1}(q,0,\kappa_2)\right]}
$$

para $n \geq 1$, onde

$$
\begin{aligned}
a_0^{GS_1}(q,0,\kappa_2) = -d_0^{(\lambda)}(q) &= \frac{-q\alpha_2^{(\lambda)}\alpha_3^{(\lambda)}d_0^{(\lambda)}(-1)}{-q\alpha_2^{(\lambda)}\alpha_3^{(\lambda)} + (1+q)d_0^{(\lambda)}(-1)} \\
a_1^{GS_1}(q,0,\kappa_2) &= \frac{-q\alpha_3^{(\lambda)}\alpha_4^{(\lambda)}d_1^{(\lambda)}(-1)}{-q\alpha_3^{(\lambda)}\alpha_4^{(\lambda)} + d_1^{(\lambda)}(-1)[(1+q)+(2\lambda+1)\kappa_2]}
\end{aligned}
$$

e

$$
d_{n-1}^{(\lambda)}(-1) = \frac{-n(n+1)}{4(n+\lambda)(n+\lambda+1)}, \qquad n \geq 1.
$$

Neste caso, portanto, $d_n^{(\lambda)}(-1)$ é dado explicitamente. Do mesmo modo,

$$
\begin{aligned}
&\langle f, g\rangle_{GS_1(q,-1,\kappa_2)} \\
&= \int_{-1}^{1} qx^2(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx + \kappa_2\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)(1-x^2)^{\lambda+1/2}dx \\
&= -q\int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-1-x^2)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx - \frac{\kappa_2}{q}\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)(1-x^2)^{\lambda+1/2}dx = \\
&= \langle f, g\rangle_{GS_1(-1,-1,-\frac{\kappa_2}{q})}
\end{aligned}
$$

Assim, $a_n^{GS_1}(q,-1,\kappa_2) = a_n^{GS_1}(-1,-1,-\frac{\kappa_2}{q})$. Pelo Corolário 3.1.2, fazendo $q=-1$, $\kappa_1 = -1$ e $\kappa_2 = \frac{-\kappa_2}{q}$,

$$
\begin{aligned}
&a_{n+1}^{GS_1}(q,-1,\kappa_2) \\
&= \frac{-\alpha_{n+3}^{(\lambda)}\alpha_{n+4}^{(\lambda)}d_{n+1}^{(\lambda)}(-1)}{\alpha_{n+3}^{(\lambda)}\alpha_{n+4}^{(\lambda)} + d_{n+1}^{(\lambda)}(-1)\left[1+(n+1)(n+2\lambda+1)\frac{\kappa_2}{q} + d_{n-1}^{(\lambda)}(-1) + a_{n-1}^{GS_1}(q,-1,\kappa_2)\right]},
\end{aligned}
$$

para $n \geq 1$, onde

$$a_0^{GS_1}(q,-1,\kappa_2) = \frac{-\alpha_2^{(\lambda)}\alpha_3^{(\lambda)}d_0^{(\lambda)}(-1)}{\alpha_2^{(\lambda)}\alpha_3^{(\lambda)} + d_0^{(\lambda)}(-1)},$$

$$a_1^{GS_1}(q,-1,\kappa_2) = \frac{-\alpha_3^{(\lambda)}\alpha_4^{(\lambda)}d_1^{(\lambda)}(-1)}{\alpha_3^{(\lambda)}\alpha_4^{(\lambda)} + d_1^{(\lambda)}(-1)\left[1+(2\lambda+1)\frac{\kappa_2}{q}\right]}.$$

Os polinômios $\{P_n^{GS_1}\}$ quando $\kappa_1 = 0$ e $q = -1$ foram estudados em [28]. Obtivemos, portanto, um resultado mais geral. Novamente, note que a relação $P_{n+1}^{GS_1}(x) - a_{n-1}^{GS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2)P_{n-1}^{GS_1}(x) = P_{n+1}^{(\lambda)}(x)$ é mais simples do que (9), usualmente obtida para pares simetricamente coerentes de distribuições (na qual se obtém os polinômios de Sobolev em termos de outros dois polinômios). Em ([39]) foi provado que os polinômios $\{P_n^S\}$ ortogonais em relação ao produto interno

$$\langle f,g\rangle_S = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)d\psi_0(x) + \lambda\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)d\psi_1(x),$$

onde $\lambda > 0$, $d\psi_1(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$, $\alpha > -1$, $\beta > 0$ e $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ é um par coerente, satisfazem a relação

$$P_n^S(x) - a_{n-1}P_{n-1}^S(x) = P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 3.$$

Também obtemos relação similar no Capítulo 5.

3.3 Produto Interno S_2

O próximo teorema dá um outro modo de estudar polinômios ortogonais de Sobolev associados a pares simetricamente coerentes de medidas partindo dos resultados do Teorema 2.4.

Sejam $d\phi_0$ de $d\psi_0$, duas medidas simétricas clássicas tais que os polinômios ortogonais mônicos associados, satisfazem $P_n^{\psi_0\prime} = nP_{n-1}^{\phi_0}$, $n \geq 1$ e $d\psi_1$ tal que

$$d\psi_1(x) = \frac{1}{1+qx^2}d\phi_0(x).$$

Então temos que

$$
\begin{aligned}
P_n^{\psi_1}(x) &= P_n^{\phi_0}(x) + d_{n-2}(q)P_{n-2}^{\phi_0}(x),\\
&= (n+1)^{-1}[P_{n+1}^{'\psi_0}(x) + \tilde{d}_{n-1}(q)P_{n-1}^{'\psi_0}(x)], \quad n \geq 2.
\end{aligned}
$$

com $\tilde{d}_{n-1}(q) = \frac{n+1}{n-1}d_{n-2}(q)$.

Consideremos os polinômios $P_n^{S_2}$ ortogonais em relação ao produto interno de Sobolev

$$
\langle f, g\rangle_{S_2} = \langle f, g\rangle_{\psi_0} + \kappa_1\langle f', g'\rangle_{\phi_0} + \kappa_2\langle f', g'\rangle_{\psi_1}.
$$

Expandindo $R_{n+1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \tilde{d}_{n-1}P_{n-1}^{\psi_0}(x)$ como uma combinação linear de $P_n^{S_1}$ da forma

$$
R_{n+1}(x) = P_{n+1}^{S_2}(x) + \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} a_{n-2k+1}P_{n-2k+1}^{S_2}(x), \quad n \geq 2.
$$

analogamente ao Teorema 3.1, obtemos

$$
a_{n-2r+1}(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{\langle R_{n+1}, P_{n-2r+1}^{S_2}\rangle_{S_2}}{\langle P_{n-2r+1}^{S_2}, P_{n-2r+1}^{S_2}\rangle_{S_2}}, \quad 1 \leq r \leq [\frac{n}{2}].
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\langle R_{n+1}, P_{n-2r+1}^{S_2}\rangle_{S_2} &= \langle P_{n+1}^{\psi_0} + \tilde{d}_{n-1}P_{n-1}^{\psi_0}, P_{n-2r+1}^{S_2}\rangle_{\psi_0} + \\
&\quad +\kappa_1\langle (n+1)[P_n^{\phi_0} + d_{n-2}P_{n-2}^{\phi_0}], P_{n-2r+1}^{S_2\prime}\rangle_{\phi_0} + \\
&\quad +\kappa_2\langle (n+1)P_n^{\psi_1}, P_{n-2r+1}^{S_2}\rangle_{\psi_1},\ 1 \leq r \leq [\frac{n}{2}],
\end{aligned}
$$

temos

$$
\langle R_{n+1}, P_{n-2r+1}^{S_2}\rangle_{S_2} = 0, \quad 2 \leq r \leq [\frac{n}{2}].
$$

e fazendo $r = 1$ obtemos

$$
\langle R_{n+1}, P_{n-1}^{S_2}\rangle_{S_2} = \tilde{d}_{n-1}\rho_{n-1}^{\psi_0} + \kappa_1(n+1)(n-1)d_{n-2}\rho_{n-2}^{\phi_0} = \tilde{d}_{n-1}\rho_{n-1}^{\psi_0} + \kappa_1(n-1)^2\tilde{d}_{n-1}\rho_{n-2}^{\phi_0}.
$$

Assim, temos que

$$
R_{n+1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x) = P_{n+1}^{S_2}(x) - a_{n-1}(q,\kappa_1,\kappa_2)P_{n-1}^{S_2}(x), \quad n \geq 2.
$$

onde

$$
a_n(q,\kappa_1,\kappa_2) = -\tilde{d}_n(q)\frac{\rho_n^{\psi_0} + \kappa_1 n^2\rho_{n-1}^{\phi_0}}{\langle P_n^{S_2}, P_n^{S_2}\rangle_{S_2}}, \quad n \geq 1.
$$

Expandindo $\langle P_n^{S_2}, P_n^{S_2}\rangle_{S_2}$ e considerando $a_n = a_n(q,\kappa_1,\kappa_2)$ e $d_n = d_n(q)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle P_n^{S_2}, P_n^{S_2}\rangle_{S_2} &= \langle P_n^{\psi_0} + \tilde{d}_{n-2}P_{n-2}^{\psi_0} + a_{n-2}P_{n-2}^{S_2}, P_n^{S_2}\rangle_{S_2} = \\
&= \langle P_n^{\psi_0} + \tilde{d}_{n-2}P_{n2}^{\psi_0}, P_n^{\psi_0} + \tilde{d}_{n-2}P_{n-2}^{\psi_0} + a_{n-2}P_{n-2}^{S_2}\rangle_{\psi_0} \\
&\quad +\kappa_1\langle n[P_{n-1}^{\phi_0} + \frac{(n-2)}{n}\tilde{d}_{n-2}P_{n-3}^{\phi_0}], n[P_{n-1}^{\phi_0} + \frac{(n-2)}{n}\tilde{d}_{n-2}P_{n-3}^{\phi_0}] + a_{n-2}P_{n-2}^{S_2'}\rangle_{\phi_0} \\
&\quad +\kappa_2\langle nP_{n-1}^{\phi_1}, P_n^{S_2'}\rangle_{\psi_1} \\
&= \rho_n^{\psi_0} + \tilde{d}_{n-2}^2\rho_{n-2}^{\psi_0} - a_{n-2}\tilde{d}_{n-2}\rho_{n-2}^{\psi_0} + \kappa_1 n^2\rho_{n-1}^{\phi_0} + \\
&\quad +\kappa_1(n-2)^2\tilde{d}_{n-2}^2\rho_{n-3}^{\phi_0} + \kappa_1 a_{n-2}n^2\rho_{n-3}^{\phi_0} + \kappa_2 n^2\rho_{n-1}^{\psi_1}, \quad n \geq 3.
\end{aligned}$$

Portanto

$$a_{n+1} = a_{n+1}(q,\kappa_1,\kappa_2) =$$
$$\frac{-\tilde{d}_{n+1}(\rho_{n+1}^{\psi_0}+\kappa_1(n+1)^2\rho_n^{\phi_0})}{\rho_{n+1}^{\psi_0}+\tilde{d}_{n-1}^2\rho_{n-1}^{\psi_0}-a_{n-1}\tilde{d}_{n-1}\rho_n^{\psi_0}+\kappa_1(n+1)^2\rho_n^{\phi_0}+\kappa_1(n-1)^2\tilde{d}_{n-1}^2\rho_{n-2}^{\phi_0}+\kappa_1 a_{n-1}(n+1)^2\rho_{n-2}^{\phi_0}+\kappa_2(n+1)^2\rho_n^{\psi_1}}.$$

De (2.3),

$$\rho_n^{\psi_1} = \frac{d_{n-1}}{q}\rho_{n-2}^{\phi_0}, \quad n \geq 2.$$

Logo,

$$(n+1)^2\rho_n^{\psi_1} = (n+1)^2\frac{\tilde{d}_{n-1}}{q}\frac{(n-1)}{n+1}\rho_{n-2}^{\phi_0} = \frac{\tilde{d}_{n-1}}{q}(n^2-1)\rho_{n-2}^{\phi_0}.$$

Assim

$$a_{n+1}(q,\kappa_1,\kappa_2) =$$
$$\frac{-\tilde{d}_{n+1}\left(\frac{\rho_{n+1}^{\psi_0}}{\rho_n^{\phi_0}}+\kappa_1(n+1)^2\right)}{\frac{\rho_{n+1}^{\psi_0}}{\rho_n^{\phi_0}}+\kappa_1(n+1)^2+\tilde{d}_{n-1}\left[\tilde{d}_{n-1}\frac{\rho_{n-1}^{\psi_0}}{\rho_n^{\phi_0}}+a_{n-1}\frac{\rho_{n-1}^{\psi_0}}{\rho_n^{\phi_0}}+\kappa_1(n-1)^2\tilde{d}_{n-1}\frac{\rho_{n-2}^{\phi_0}}{\rho_n^{\phi_0}}+\kappa_2(n^2-1)d^{-1}\frac{\rho_{n-2}^{\phi_0}}{\rho_n^{\phi_0}}+\kappa_1 a_{n-1}(n+1)^2\right]},$$

para $n \geq 2$. Temos que

$$\frac{\rho_{n-2}^{\phi_0}}{\rho_n^{\phi_0}} = \frac{1}{\alpha_{n+1}^{\phi_0}\alpha_n^{\phi_0}}.$$

Desse modo

$$\frac{\rho_{n-1}^{\psi_0}}{\rho_n^{\phi_0}} = \frac{1}{\alpha_{n+1}^{\phi_0}\alpha_n^{\phi_0}}\frac{\rho_{n-1}^{\psi_0}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}},$$

e portanto

$$a_{n+1} = a_{n+1}(q,\kappa_1,\kappa_2) =$$
$$\frac{-\tilde{d}_{n+1}\alpha_{n+1}^{\phi_0}\alpha_n^{\phi_0}\left(\frac{\rho_{n+1}^{\psi_0}}{\rho_n^{\phi_0}}+\kappa_1(n+1)^2\right)}{\left(\frac{\rho_{n+1}^{\psi_0}}{\rho_n^{\phi_0}}+\kappa_1(n+1)^2\right)\alpha_{n+1}^{\phi_0}\alpha_n^{\phi_0}+\tilde{d}_{n-1}\left[\kappa_2(n^2-1)q^{-1}+(\tilde{d}_{n-1}+a_{n-1})\left(\frac{\rho_{n-1}^{\psi_0}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}}+\kappa_1(n-1)^2\right)\right]},$$

para $n \geq 2$. Quando $n = 1$

$$\langle P_1^{S_2}, P_1^{S_2}\rangle_{S_2} = \langle x, x\rangle_{S_2} = \langle x, x\rangle_{\psi_0} + \kappa_1\langle 1, 1\rangle_{\phi_0} + \kappa_2\langle 1, 1\rangle_{\psi_1}.$$

Assim

$$a_1(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-\tilde{d}_1(q)(\rho_1^{\psi_0}+\kappa_1\rho_0^{\phi_0})}{\rho_1^{\psi_0}+\kappa_1\rho_0^{\phi_0}+\kappa_2\rho_0^{\psi_1}} = \frac{-\tilde{d}_1(q)\left(\frac{\rho_1^{\psi_0}}{\rho_0^{\phi_0}}+\kappa_1\right)}{\left(\frac{\rho_1^{\psi_0}}{\rho_0^{\phi_0}}+\kappa_1\right)+\kappa_2\frac{\rho_0^{\psi_1}}{\rho_0^{\phi_0}}}.$$

Para $n=2$

$$\langle P_2^{S_2}, P_2^{S_2}\rangle_{S_2} = \langle P_2^{\psi_0}, P_2^{\psi_0} + \kappa_1\langle 2x,2x\rangle_{\phi_0} + \kappa_2\langle 2x,2x\rangle\psi_1.$$

Assim

$$a_2(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-\tilde{d}_2(q)(\rho_2^{\psi_0}+4\kappa_1\rho_1^{\phi_0})}{\rho_2^{\psi_0}+4\kappa_1\rho_1^{\phi_0}+4\kappa_2\rho_1^{\psi_1}} = \frac{-\tilde{d}_2(q)\left(\frac{\rho_2^{\psi_0}}{\rho_1^{\phi_0}}+4\kappa_1\right)}{\left(\frac{\rho_2^{\psi_0}}{\rho_1^{\phi_0}}+4\kappa_1\right)+4\kappa_2\frac{\rho_1^{\psi_1}}{\rho_1^{\phi_0}}}.$$

Desse modo, podemos enunciar o seguinte teorema

Teorema 3.2 *Sejam ϕ_0 e ψ_0 medidas simétricas clássicas tais que os polinômios ortogonais mônicos $\{P_n^{\phi_0}\}$ e $\{P_n^{\psi_0}\}$ satisfazem $P_n^{\psi_0\prime}(x) = nP_{n-1}^{\phi_0}(x)$, $n \geq 1$. Seja a medida ψ_1 dada por*

$$d\psi_1(x) = \frac{1}{(1+qx^2)}d\phi_0(x). \tag{3.3}$$

Então os polinômios ortogonais mônicos $\{P_n^{S_2}\}$ associados ao produto interno

$$\langle f,g\rangle_{S_2} = \langle f,g\rangle_{\psi_0} + \langle f',g'\rangle_{\kappa_1\phi_0+\kappa_2\psi_1},$$

satisfazem $P_0^{S_2}(x)=1$, $P_1^{S_2}(x)=x$, $P_2^{S_2}(x)=P_2^{\psi_0}(x)$ e

$$P_{n+1}^{S_2}(x) - a_{n-1}(q,\kappa_1,\kappa_2)P_{n-1}^{S_2}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \tilde{d}_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x), \qquad n \geq 2.$$

Os coeficientes $a_n(q,\kappa_1,\kappa_2)$ satisfazem

$$a_{n+1}(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-\nu_{n+1}(\kappa_1)\alpha_n^{\phi_0}\alpha_{n+1}^{\phi_0}\tilde{d}_{n+1}(q)}{\nu_{n+1}(\kappa_1)\alpha_n^{\phi_0}\alpha_{n+1}^{\phi_0} + \tilde{d}_{n-1}(q)\left[(n^2-1)q^{-1}\kappa_2 + \nu_{n-1}(\kappa_1)[\tilde{d}_{n-1}(q)+a_{n-1}(q,\kappa_1,\kappa_2)]\right]},$$

para $n \geq 2$, onde

$$a_1(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-\nu_1(\kappa_1)\tilde{d}_1(q)}{\nu_1(\kappa_1)+\kappa_2\rho_0^{\psi_1}/\rho_0^{\phi_0}},$$
$$a_2(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-\nu_2(\kappa_1)\tilde{d}_2(q)}{\nu_2(\kappa_1)+4\kappa_2\rho_1^{\psi_1}/\rho_1^{\phi_0}}.$$

e $\nu_n(\kappa_1) = n^2\kappa_1 + \rho_n^{\psi_0}/\rho_{n-1}^{\phi_0}$, $n \geq 1$. Os coeficientes $\tilde{d}_n(q)$ são tais que

$$\tilde{d}_{n-1}(q) = \frac{n+1}{n-1}d_{n-2}(q) = \frac{n+1}{n-1}q^{-1}\tilde{\ell}_{n-1}(q)\tilde{\ell}_n(q), \qquad n \geq 2,$$

onde $\tilde{\ell}_n(q) = -1 + \frac{q\alpha_n^{\phi_0}}{\tilde{\ell}_{n-1}(q)} = \frac{q\alpha_{n+1}^{\psi_1}}{\tilde{\ell}_{n-1}(q)+1}$, $n \geq 2$ *e* $\tilde{\ell}_1(q) = q\alpha_2^{\psi_1}$.

Aqui q, κ_1 *e* κ_2 *são tais que a medida* $d\psi_1$ *e o produto interno* S_2 *são definidos positivos.*

Como um caso particular desse teorema temos o associado aos polinômios de Hermite, onde tomamos

$$d\phi_0(x) = d\psi_0(x) = e^{-x^2}dx \qquad \text{e} \qquad d\psi_1(x) = (1+qx^2)^{-1}d\phi_0(x) = (1+qx^2)^{-1}e^{-x^2}dx,$$

para todo $q \geq 0$. Então, como $P_n^{\phi_0}(x) = P_n^{\psi_0}(x) = H_n(x)$(mônicos) e $\rho_n^{\psi_0}/\rho_{n-1}^{\phi_0} = n/2$, obtemos

Corolário 3.2.1 *Dado o produto interno*

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{HS_2} &= \langle f,g\rangle_{\psi_0} + \langle f',g'\rangle_{\kappa_1\phi_0+\kappa_2\psi_1} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)\frac{(\kappa_1+\kappa_2)+\kappa_1 qx^2}{1+qx^2}\,e^{-x^2}dx,\end{aligned}$$

$q \geq 0$, *então os polinômios ortogonais associados* $P_n^{HS_2}$ *satisfazem*

$$\begin{aligned}&P_0^{HS_2}(x) = 1, \quad P_1^{HS_2}(x) = x, \\ &P_{n+1}^{HS_2}(x) - a_{n-1}^{HS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2)P_{n-1}^{HS_2}(x) = H_{n+1}(x) + \tilde{d}_{n-1}^{H_2}(q)H_{n-1}(x), \qquad n \geq 2.\end{aligned}$$

Para os coeficientes $a_n^{HS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2)$ *temos*

$$a_{n+1}^{HS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-n(n+1)\tilde{\nu}_{n+1}^H(\kappa_1)\tilde{d}_{n+1}^{H_2}(q)}{n(n+1)\tilde{\nu}_{n+1}^H(\kappa_1) + 4\tilde{d}_{n-1}^{H_2}(q)\left[2(n+1)q^{-1}\kappa_2 + \tilde{\nu}_{n-1}^H(\kappa_1)[\tilde{d}_{n-1}^{H_2}(q) + a_{n-1}^{HS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2)]\right]},$$

para $n \geq 2$, *onde* $a_1^{HS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-\tilde{\nu}_1^H(\kappa_1)\tilde{d}_1^{H_2}(q)}{\tilde{\nu}_1^H(\kappa_1)+2\kappa_2\rho_0^{\psi_1}/\sqrt{\pi}}$, $a_2^{HS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-\tilde{\nu}_2^H(\kappa_1)\tilde{d}_2^{H_2}(q)}{\tilde{\nu}_2^H(\kappa_1)+8\kappa_2\rho_1^{\psi_1}/\sqrt{\pi}}$

e $\tilde{\nu}_n^H(\kappa_1) = 1 + 2n\kappa_1$. *Os coeficientes* $\tilde{d}_n^{H_2}(q)$ *são tais que*

$$\tilde{d}_{n-1}^{H_2}(q) = \frac{n+1}{n-1}d_{n-2}^H(q) = \frac{n+1}{n-1}q^{-1}\tilde{\ell}_{n-1}(q)\tilde{\ell}_n(q), \qquad n \geq 2,$$

onde $\tilde{\ell}_n(q) = -1 + \frac{(n-1)q}{2\tilde{\ell}_{n-1}(q)}$, $n \geq 2$ *e* $\tilde{\ell}_1(q) = q\alpha_2^{\psi_1}$. *Aqui* κ_1 *e* κ_2 *são tais que* $\kappa_1 \geq 0$ *e* $\kappa_1 + \kappa_2 \geq 0$, *de modo que o produto interno* HS_2 *é definido positivo.*

Note que no corolário acima qualquer avaliação direta envolvendo a distribuição $d\psi_1$ só aparece nas condições iniciais $a_1^{GS_2}$, $a_2^{GS_2}$ e $\tilde{\ell}_1$.

Notamos ainda que, de acordo com [38, p. 341], quando $\kappa_1 \neq 0$ as distribuições $e^{-x^2}dx$ e $\frac{(\kappa_1+\kappa_2)+\kappa_1 qx^2}{1+qx^2}e^{-x^2}dx$, apesar de satisfazerem uma relação como (9) não consistem em um par simetricamente coerente.

Um outro caso particular do Teorema 3.2 é o associado aos polinômios de Gegenbauer. Aqui tomamos $d\phi_0(x) = (1-x^2)^{\lambda+1/2}dx$, $d\psi_0(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}dx$ e $d\psi_1$ tal que

$$\int F(x)d\psi_1(x) = \int_{-1}^{1} F(x)\frac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{(1+qx^2)}dx,$$

quando $q \geq 0$ e

$$\int F(x)d\psi_1(x) = \int_{-1}^{1} F(x)\frac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{(1+qx^2)}dx + \kappa_3[F(\sqrt{-1/q}\,) + F(-\sqrt{-1/q}\,)],$$

quando $-1 \leq q < 0$ e $\kappa_3 \geq 0$. Então, como $\rho_n^{\psi_0}/\rho_{n-1}^{\phi_0} = \rho_n^{(\lambda)}/\rho_{n-1}^{(\lambda+1)} = n/(n+2\lambda)$, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.2.2 *Considere o produto interno* $\langle f,g\rangle_{GS_2} = \langle f,g\rangle_{\psi_0} + \langle f',g'\rangle_{\kappa_1\phi_0+\kappa_2\psi_1}$ *dado por*

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx + \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)\frac{(\kappa_1+\kappa_2)+\kappa_1 qx^2}{1+qx^2}\,(1-x^2)^{\lambda+1/2}dx,$$

quando $q \geq 0$ *ou por*

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx + \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)\frac{(\kappa_1+\kappa_2)+\kappa_1 qx^2}{1+qx^2}\,(1-x^2)^{\lambda+1/2}dx$$
$$+\kappa_2\kappa_3\left[f'(\sqrt{-1/q}\,)g'(\sqrt{-1/q}\,) + f'(-\sqrt{-1/q}\,)g'(-\sqrt{-1/q}\,)\right],$$

quando $-1 \leq q < 0$ *e* $\kappa_3 \geq 0$. *Então os polinômios ortogonais associados* $P_n^{GS_2}(x)$ *satisfazem*

$$P_0^{GS_2}(x) = 1, \quad P_1^{GS_2}(x) = x,$$
$$P_{n+1}^{GS_2}(x) - a_{n-1}^{GS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)P_{n-1}^{GS_2}(x) = P_{n+1}^{(\lambda)}(x) + \tilde{d}_{n-1}^{(\lambda)}(q)P_{n-1}^{(\lambda)}(x), \qquad n \geq 2.$$

Para os coeficientes $a_n^{GS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)$ *tem-se*

$$a_{n+1}^{GS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3) =$$
$$\frac{-\nu_{n+1}^{(\lambda)}(\kappa_1)\alpha_n^{(\lambda+1)}\alpha_{n+1}^{(\lambda+1)}\tilde{d}_{n+1}^{(\lambda)}(q)}{\nu_{n+1}^{(\lambda)}(\kappa_1)\alpha_n^{(\lambda+1)}\alpha_{n+1}^{(\lambda+1)} + \tilde{d}_{n-1}^{(\lambda)}(q)\left[(n^2-1)q^{-1}\kappa_2 + \nu_{n-1}^{(\lambda)}(\kappa_1)[\tilde{d}_{n-1}^{(\lambda)}(q) + a_{n-1}^{GS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)]\right]},$$

para $n \geq 2$, onde

$$a_1^{GS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3) = \frac{-\nu_1^{(\lambda)}(\kappa_1)\tilde{d}_1^{(\lambda)}(q)}{\nu_1^{(\lambda)}(\kappa_1) + \kappa_2\rho_0^{\psi_1}/\rho_0^{(\lambda+1)}},$$

$$a_2^{GS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3) = \frac{-\nu_2^{(\lambda)}(\kappa_1)\tilde{d}_2^{(\lambda)}(q)}{\nu_2^{(\lambda)}(\kappa_1) + 4\kappa_2\rho_1^{\psi_1}/\rho_1^{(\lambda+1)}}.$$

Aqui $\nu_n^{(\lambda)}(\kappa_1) = n^2\kappa_1 + n/(n+2\lambda)$, $n \geq 1$. Os coeficientes $\tilde{d}_n^{\lambda}(q)$ são tais que

$$\tilde{d}_{n-1}^{(\lambda)}(q) = \frac{n+1}{n-1}q^{-1}\tilde{\ell}_{n-1}(q)\tilde{\ell}_n(q), \qquad n \geq 2,$$

onde $\tilde{\ell}_n(q) = -1 + \frac{q\alpha_n^{(\lambda)}}{\tilde{\ell}_{n-1}(q)}$, $n \geq 2$ e $\tilde{\ell}_1(q) = q\alpha_2^{\psi_1}$. Os parâmetros κ_1 e κ_2 são tais que, se $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$, então $\kappa_1 q \geq 0$ e se $\kappa_1 + \kappa_2 > 0$, então $\frac{\kappa_1 q}{\kappa_1+\kappa_2} \geq -1$, de modo que o produto GS_2 é definido positivo.

Novamente, notamos que, no Corolário 3.2.2, qualquer avaliação direta envolvendo a distribuição $d\psi_1$ só aparece nas condições iniciais $a_1^{GS_2}$, $a_2^{GS_2}$ e $\tilde{\ell}_1$. Nestas condições iniciais $\rho_0^{\psi_1} = \mu_0^{\psi_1}$, $\rho_1^{\psi_1} = \mu_2^{\psi_1}$ e $\alpha_2^{\psi_1} = \mu_2^{\psi_1}/\mu_0^{\psi_1}$, onde

$$\mu_0^{\psi_1} = \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{1+qx^2}dx, \qquad \mu_2^{\psi_1} = \int_{-1}^{1} \frac{x^2(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{1+qx^2}dx,$$

quando $q \geq 0$ e

$$\mu_0^{\psi_1} = \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{1+qx^2}dx + 2\kappa_3, \qquad \mu_2^{\psi_1} = \int_{-1}^{1} \frac{x^2(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{1+qx^2}dx - 2\kappa_3/q,$$

quando $-1 \leq q < 0$.

Observamos aqui que, de acordo com [38, p. 342] e [32], quando $\kappa_1 \neq 0$ então as duas medidas envolvidas, apesar de satisfazerem (9), não constituem um par simetricamente coerente.

Capítulo 4

Medidas Relacionadas

4.1 Introdução

Assim como no Capítulo 2, neste capítulo apresentamos alguns resultados sobre polinômios ortogonais associados a duas medidas que satisfazem certa relação entre si. Neste caso, as medidas não são simétricas, de modo que temos envolvidos mais um coeficiente das relações de recorrência para os duas sequências de polinômios.

Sejam $d\phi_0^*$ e $d\phi_1^*$ duas medidas com suporte em (a, b), tais que

$$d\phi_0^*(x) = \frac{1+qx}{c} d\phi_1^*(x) \tag{4.1}$$

Aqui q é tal que $1 + qx$ não muda de sinal em (a, b). Assim, como $1 + qx = 0$ quando $x = -1/q$, devemos ter $-1/q < a$ ou $-1/q > b$.

4.2 Algumas Identidades

Como no caso simétrico temos, por (4.1) que

$$c\mu_n^{\phi_0^*} = \mu_n^{\phi_1^*} + q\mu_{n+1}^{\phi_1^*}. \tag{4.2}$$

Consideremos $\{P_n^{\phi_0^*}\}$ e $\{P_n^{\phi_1^*}\}$ as SPOM associadas as essas medidas.

Expressando $P_n^{\phi_1^*}$ como uma combinação linear de $P_n^{\phi_0^*}$ da forma

$$P_n^{\phi_1^*}(x) = P_n^{\phi_0^*}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k^{\phi_0^*}(x),$$

temos que

$$\langle P_n^{\phi_1^*}, P_r^{\phi_0^*}\rangle_{\phi_0^*} = c_r \langle P_r^{\phi_0^*}, P_r^{\phi_0^*}\rangle_{\phi_0^*}.$$

Assim

$$c_r = \frac{\langle P_n^{\phi_1^*}, P_r^{\phi_0^*}\rangle_{\phi_0^*}}{\langle P_r^{\phi_0^*}, P_r^{\phi_0^*}\rangle_{\phi_0^*}}, \quad 0 \le r \le n-1.$$

Mas

$$\langle P_n^{\phi_1^*}, P_r^{\phi_0^*}\rangle_{\phi_0^*} = \int P_n^{\phi_1^*}(x) P_r^{\phi_0^*}(x) d\phi_0^*(x) = \int P_n^{\phi_1^*}(x) \frac{(1+qx)}{c} P_r^{\phi_0^*}(x) d\phi_1^*(x) = 0,$$

para $0 \le r \le n-2$. Logo $c_r = 0, \quad 0 \le r \le n-2$ e

$$P_n^{\phi_1^*}(x) = P_n^{\phi_0^*}(x) + d_{n-1}^* P_{n-1}^{\phi_0^*}(x), \tag{4.3}$$

onde

$$d_{n-1}^* = \frac{q\langle P_n^{\phi_1^*}, P_n^{\phi_1^*}\rangle_{\phi_1^*}}{c\langle P_{n-1}^{\phi_0^*}, P_{n-1}^{\phi_0^*}\rangle_{\phi_0^*}} = \frac{q\rho_n^{\phi_1^*}}{c\rho_{n-1}^{\phi_0^*}} = \frac{q\alpha_{n+1}^{\phi_1^*}\alpha_n^{\phi_1^*}\ldots\alpha_1^{\phi_1^*}}{\alpha_n^{\phi_0^*}\alpha_{n-1}^{\phi_0^*}\ldots\alpha_1^{\phi_0^*}}., \quad n \ge 1. \tag{4.4}$$

Aqui $\alpha_1^{\phi_1^*} = \mu_0^{\phi_1^*}$ e $\alpha_1^{\phi_0^*} = c\mu_0^{\phi_0^*}$.

Sabemos que os polinômios $P_n^{\phi_1^*}$ e $P_n^{\phi_0^*}$ satisfazem a uma relação de recorrência da forma

$$P_{n+1}^{\phi_i^*}(x) = (x - \beta_{n+1}^{\phi_i^*}) P_n^{\phi_i^*}(x) - \alpha_{n+1}^{\phi_i^*} P_{n-1}^{\phi_i^*}(x), \quad n \ge 1, \quad i = 0, 1. \tag{4.5}$$

Assim, temos o seguinte resultado

Teorema 4.1 *Sejam $d\phi_0^*$ e $d\phi_1^*$ tais que* (4.1) *vale. Então os coeficientes d_n^* na relação* (4.3) *satisfazem*

$$\frac{d_{n-1}^*}{d_{n-2}^*} = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1^*}}{\alpha_n^{\phi_0^*}}, \quad n \ge 2. \tag{4.6}$$

Além disso

$$d_n^* - d_{n-1}^* = \beta_{n+1}^{\phi_0^*} - \beta_{n+1}^{\phi_1^*}, \quad n \ge 1 \tag{4.7}$$

e

$$(\beta_{n+1}^{\phi_1^*} - \beta_n^{\phi_0^*}) d_{n-1}^* = \alpha_{n+1}^{\phi_0^*} - \alpha_{n+1}^{\phi_1^*}, \quad n \ge 1, \tag{4.8}$$

onde

$$d_0^* = \frac{q\alpha_2^{\phi_1^*}\alpha_1^{\phi_1^*}}{\alpha_1^{\phi_0^*}}, \qquad \beta_1^{\phi_0^*} - \beta_1^{\phi_1^*} = d_0^* \quad e \quad q\beta_1^{\phi_1^*}\alpha_1^{\phi_1^*} = \alpha_1^{\phi_0^*} - \alpha_1^{\phi_1^*}. \tag{4.9}$$

Prova:

O resultado (4.6) e a primeira relação de (4.9) seguem de (4.4). Substituindo (4.5) em (4.3) obtemos

$$\begin{aligned} P_n^{\phi_1^*}(x) &= P_n^{\phi_0^*}(x) + \frac{d_{n-1}^*}{\alpha_{n+1}^{\phi_0^*}}\left[P_{n+1}^{\phi_0^*} - (x - \beta_{n+1}^{\phi_0^*})P_n^{\phi_0^*}\right] = \\ &= \left[1 + \frac{d_{n-1}^*}{\alpha_{n+1}^{\phi_0^*}}(x - \beta_{n+1}^{\phi_0^*})\right] P_n^{\phi_0^*}(x) - \frac{d_{n-1}^*}{\alpha_{n+1}^{\phi_0^*}} P_{n+1}^{\phi_0^*}(x). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Substituindo (4.3) e (4.10) em (4.5) para ϕ_1^*, obtemos

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{\phi_0^*}(x) &= \left[(x - \beta_{n+1}^{\phi_1^*}) - d_n^* + \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1^*}}{\alpha_n^{\phi_0^*}} d_{n-2}^*\right] P_n^{\phi_0^*}(x) \\ &+ \left[(x - \beta_{n+1}^{\phi_1^*})d_{n-1}^* - \alpha_{n+1}^{\phi_1^*} - d_{n-2}^* \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1^*}}{\alpha_n^{\phi_0^*}}(x - \beta_n^{\phi_0^*})\right] P_{n-1}^{\phi_0^*}(x). \end{aligned}$$

Por (4.6), temos

$$P_{n+1}^{\phi_0^*}(x) = [x - (\beta_{n+1}^{\phi_1^*} + d_n^* - d_{n-1}^*)]P_n^{\phi_0^*}(x) + [d_{n-1}^*(\beta_n^{\phi_0^*} - \beta_{n+1}^{\phi_1^*}) - \alpha_{n+1}^{\phi_1^*}]P_{n-1}^{\phi_0^*}(x)$$

Comparando com (4.5) para ϕ_0^*, obtemos (4.7) e (4.8).

Sabemos que

$$P_1^{\phi_1^*}(x) = P_1^{\phi_0^*}(x) + d_0^* P_0^{\phi_0^*}(x) = P_1^{\phi_0^*}(x) + d_0^*,$$

e como

$$P_1^{\phi_1^*}(x) = x - \beta_1^{\phi_1^*} \quad \text{e} \quad P_1^{\phi_0^*} = x - \beta_1^{\phi_1^*},$$

temos

$$x - \beta_1^{\phi_1^*} = x - \beta_1^{\phi_1^*} + d_0^*.$$

Assim obtemos a segunda relação de (4.9).

Sabemos de (1.4) e (4.2) que

$$\beta_1^{\phi_1^*} = \frac{\mu_1^{\phi_1^*}}{\mu_0^{\phi_1^*}} \quad \text{e} \quad c\mu_0^{\phi_0^*} = \mu_0^{\phi_1^*} + q\mu_1^{\phi_1^*}.$$

Assim

$$q\beta_1^{\phi_1^*}\alpha_1^{\phi_1^*} = q\frac{\mu_1^{\phi_1^*}}{\mu_0^{\phi_1^*}}\mu_0^{\phi_1^*} = q\mu_1^{\phi_1^*} = c\mu_0^{\phi_0^*} - \mu_0^{\phi_1^*} = \alpha_1^{\phi_0^*} - \alpha_1^{\phi_1^*}.$$

■

Teorema 4.2

$$\frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1^*}}{d_n^*} - \beta_{n+1}^{\phi_1^*} + d_{n-1}^* = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0^*}}{d_{n-1}^*} - \beta_{n+1}^{\phi_0^*} + d_n^* = \frac{1}{q} \tag{4.11}$$

Consequentemente, o coeficiente d_n^* pode ser obtido por

$$d_n^* = \frac{q\alpha_{n+2}^{\phi_1^*}}{1 + q\beta_{n+1}^{\phi_1^*} - qd_{n-1}^*}, \quad n \geq 1, \tag{4.12}$$

ou

$$d_n^* = \frac{qd_{n-1}^*\beta_{n+1}^{\phi_0^*} - q\alpha_{n+1}^{\phi_0^*} + d_{n-1}^*}{qd_{n-1}^*}, \quad n \geq 1. \tag{4.13}$$

Prova:

Por (4.9), temos

$$\begin{aligned} \alpha_1^{\phi_0^*}(\alpha_2^{\phi_1^*} - \beta_1^{\phi_1^*}d_0^*) &= \alpha_1^{\phi_0^*}\alpha_2^{\phi_1^*} - \frac{\alpha_1^{\phi_0^*}\beta_1^{\phi_1^*}q\alpha_2^{\phi_1^*}\alpha_1^{\phi_1^*}}{\alpha_1^{\phi_0^*}} = \alpha_2^{\phi_1^*}(\alpha_1^{\phi_0^*} - \beta_1^{\phi_1^*}\alpha_1^{\phi_1^*}q) \\ &= \alpha_2^{\phi_1^*}\alpha_1^{\phi_1^*}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Por (4.6) obtemos

$$d_n^*\alpha_{n+1}^{\phi_0^*} = d_{n-1}^*\alpha_{n+2}^{\phi_1^*} \quad \Leftrightarrow \quad d_n^*(\alpha_{n+1}^{\phi_0^*} - \alpha_{n+1}^{\phi_1^*}) = d_{n-1}^*\alpha_{n+2}^{\phi_1^*} - d_n^*\alpha_{n+1}^{\phi_1^*}.$$

Aplicando esta em (4.8) temos

$$d_{n-1}^*d_n^*(\beta_n^{\phi_0^*} - \beta_{n+1}^{\phi_1^*}) = d_n^*\alpha_{n+1}^{\phi_1^*} - d_{n-1}^*\alpha_{n+2}^{\phi_1^*},$$

que é equivalente a

$$d_{n-1}^*[\alpha_{n+2}^{\phi_1^*} - \beta_{n+1}^{\phi_1^*}d_n^*] = d_n^*[\alpha_{n+1}^{\phi_1^*} - \beta_n^{\phi_0^*}d_{n-1}^*].$$

Novamente de (4.6)

$$\alpha_{n+1}^{\phi_0^*}[\alpha_{n+2}^{\phi_1^*} - \beta_{n+1}^{\phi_1^*}d_n^*] = \alpha_{n+2}^{\phi_1^*}[\alpha_{n+1}^{\phi_1^*} - \beta_n^{\phi_0^*}d_{n-1}^*], \quad n \geq 1. \tag{4.15}$$

Como de (4.7) $\beta_n^{\phi_0^*} = \beta_n^{\phi_1^*} + d_{n-1}^* - d_{n-2}^*$, $n \geq 2$ então

$$\alpha_{n+1}^{\phi_0^*}[\alpha_{n+2}^{\phi_1^*} - \beta_{n+1}^{\phi_1^*}d_n^*] = \alpha_{n+2}^{\phi_1^*}[\alpha_{n+1}^{\phi_1^*} - d_{n-1}^*\beta_n^{\phi_1^*} + d_{n-1}^*d_{n-2}^*] - \alpha_{n+2}^{\phi_1^*}d_{n-1}^{*2}.$$

Usando (4.6), obtemos

$$\alpha_{n+1}^{\phi_0^*}[\alpha_{n+2}^{\phi_1^*} - \beta_{n+1}^{\phi_1^*}d_n^* + d_n^*d_{n-1}^*] = \alpha_{n+2}^{\phi_1^*}[\alpha_{n+1}^{\phi_1^*} - d_{n-1}^*\beta_n^{\phi_1^*} + d_{n-1}^*d_{n-2}^*], \quad n \geq 1$$

Assim,

$$\alpha_{n+2}^{\phi_1^*} - \beta_{n+1}^{\phi_1^*}d_n^* + d_n^*d_{n-1}^* = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1^*}\alpha_{n+1}^{\phi_1^*}...\alpha_4^{\phi_1^*}}{\alpha_{n+1}^{\phi_0^*}\alpha_n^{\phi_0^*}...\alpha_3^{\phi_0^*}}[\alpha_3^{\phi_1^*} - d_1^*(\beta_2^{\phi_1^*} - d_0^*)], \quad n \geq 2.$$

De (4.15), para $n = 1$

$$\alpha_2^{\phi_0^*}[\alpha_3^{\phi_1^*} - d_1^*\beta_2^{\phi_1^*}] = \alpha_3^{\phi_1^*}[\alpha_2^{\phi_1^*} - d_0^*\beta_1^{\phi_0^*}].$$

Como $\beta_1^{\phi_0^*} = \beta_1^{\phi_1^*} + d_0^*$, temos

$$\alpha_3^{\phi_1^*} - \beta_2^{\phi_1^*}d_1^* = \frac{\alpha_3^{\phi_1^*}}{\alpha_2^{\phi_0^*}}[\alpha_2^{\phi_1^*} - d_0^*\beta_1^{\phi_1^*} - d_0^{*2}].$$

Visto que $d_1^* = d_0^*\frac{\alpha_3^{\phi_1^*}}{\alpha_2^{\phi_0^*}}$ e por (4.14) temos

$$\alpha_3^{\phi_1^*} - d_1^*\beta_2^{\phi_1^*} + d_1^*d_0^* = \frac{\alpha_3^{\phi_1^*}\alpha_2^{\phi_1^*}\alpha_1^{\phi_1^*}}{\alpha_2^{\phi_0^*}\alpha_1^{\phi_0^*}}$$

Desse modo concluímos que

$$\alpha_{n+2}^{\phi_1^*} - d_n^*(\beta_{n+1}^{\phi_1^*} - d_{n-1}^*) = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1^*}...\alpha_2^{\phi_1^*}\alpha_1^{\phi_1^*}}{\alpha_{n+1}^{\phi_0^*}...\alpha_2^{\phi_0^*}\alpha_1^{\phi_0^*}} = \frac{d_n^*}{q}, \quad n \geq 1, \tag{4.16}$$

e usando (4.8) temos

$$\alpha_{n+2}^{\phi_1^*} - d_n^*(\beta_{n+1}^{\phi_1^*} - d_{n-1}^*) = \alpha_{n+2}^{\phi_0^*} + d_n^*(\beta_{n+1}^{\phi_0^*} - \beta_{n+2}^{\phi_1^*} - \beta_{n+1}^{\phi_1^*} + d_{n-1}^*).$$

Por (4.7)

$$\alpha_{n+2}^{\phi_1^*} - d_n^*(\beta_{n+1}^{\phi_1^*} - d_{n-1}^*) = \alpha_{n+2}^{\phi_0^*} - d_n^*(\beta_{n+2}^{\phi_0^*} - d_{n+1}^*). \tag{4.17}$$

Utilizando (4.16) e (4.17) provamos facilmente (4.12) e (4.13), o que completa a prova do teorema. ∎

O resultado (4.11) implica tanto que $\frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1^*}}{d_n^*} - \beta_{n+1}^{\phi_1^*} + d_{n-1}^*$ quanto $\frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0^*}}{d_{n-1}^*} - \beta_{n+1}^{\phi_0^*} + d_n^*$ tomam o mesmo valor constante não dependendo de n. Este resultado também foi obtido em [30], mas eles não obtem explicitamente o valor da constante que é $1/q$. Além disso, de [30] temos que

$$d_n^*(q) = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1^*} P_n^{\phi_1^*}\left(\frac{1}{q}\right)}{P_{n+1}^{\phi_1^*}\left(\frac{1}{q}\right)}.$$

ou

$$d_n^*(q) = \frac{P_{n+1}^{\phi_0^*}\left(\frac{1}{q}\right) - \lambda P_n^{\phi_0^*(1)}\left(\frac{1}{q}\right)}{P_n^{\phi_0^*}\left(\frac{1}{q}\right) - \lambda P_{n-1}^{\phi_0^*(1)}\left(\frac{1}{q}\right)},$$

onde $\lambda = \frac{1}{q} - \beta_0^{\phi_0^*} - d_0^*$ e $P_n^{\phi_0^*(1)}$ é o chamado polinômio numerador associado a $P_n^{\phi_0^*}$ e satisfaz a relação de recorrência

$$P_n^{\phi_0^*(1)}(x) = (x - \beta_{n+1}^{\phi_0^*})P_{n-1}^{\phi_0^*(1)}(x) - \alpha_{n+1}^{\phi_0^*} P_{n-2}^{\phi_0^*(1)}(x), \quad n \geq 2,$$

com $P_0^{\phi_0^*(1)}(x) = 1, \qquad P_1^{\phi_0^*(1)}(x) = x - \beta_2^{\phi_0^*}.$

Capítulo 5

Medidas Relacionadas e Polinômios de Sobolev

5.1 Introdução

Neste capítulo, analogamente ao capítulo 3, estudamos os polinômios de Sobolev $P_n^{S_i}$, $i = 1, 2$ ortogonais em relação aos produtos internos

$$\langle f, g \rangle_{S_1^*} = \langle f, g \rangle_{\psi_0^* + \kappa_1 \phi_1^*} + \kappa_2 \langle f', g' \rangle_{\psi_1^*},$$

e

$$\langle f, g \rangle_{S_2^*} = \langle f, g \rangle_{\psi_0^*} + \langle f', g' \rangle_{\kappa_1 \phi_0^* + \kappa_2 \psi_1^*},$$

onde $\kappa_1, \kappa_2 \geq 0$.

Precisamente, na Seção 5.2 estudamos $\langle f, g \rangle_{S_1^*}$, no caso em que

$$d\psi_0^*(x) = (1 + qx) d\phi_1^*(x) \quad \text{e} \quad \frac{dP_n^{\phi_1^*}(x)}{dx} = nP_{n-1}^{\psi_1^*}(x),$$

e na Seção 5.3 consideramos $\langle f, g \rangle_{S_2^*}$, no caso em que

$$d\phi_0^*(x) = (1 + qx) d\psi_1^*(x) \quad \text{e} \quad \frac{dP_n^{\psi_0^*}(x)}{dx} = nP_{n-1}^{\phi_0^*}(x).$$

Também nos dois casos obtemos os resultados particulares considerando as famílias de medidas clássicas Laguerre e Jacobi.

5.2 Produto Interno S_1^*

Sejam $d\phi_1$ e $d\psi_1$ medidas clássicas tais que os polinômios ortogonais mônicos associados satisfazem $P_n^{\phi_1^*\prime}(x) = nP_{n-1}^{\psi_1^*}(x), \ \ n \geq 1$ e $d\psi_0^*$ tal que

$$d\psi_0^*(x) = (1 + qx)d\phi_1^*(x).$$

Então por (4.3) temos,

$$P_n^{\phi_1^*}(x) = P_n^{\psi_0^*}(x) + d_{n-1}^*(q)P_{n-1}^{\psi_0^*}(x), \quad n \geq 1,$$

onde $d_{n-1}^* = q\rho_n^{\phi_1^*}/\rho_{n-1}^{\psi_0^*}$.

Derivando esta expressão obtemos

$$P_{n-1}^{\psi_1^*}(x) = \frac{1}{n}P_n^{\psi_0^*\prime}(x) + \frac{d_{n-1}^*(q)}{n}P_{n-1}^{\psi_0^*\prime}(x), \quad n \geq 1.$$

Consideremos os polinômios $P_n^{S_1^*}$ ortogonais em relação ao produto interno de Sobolev

$$\langle f, g\rangle_{S_1^*} = \langle f, g\rangle_{\psi_0^*} + \kappa_1\langle f, g\rangle_{\phi_1^*} + \kappa_2\langle f', g'\rangle_{\psi_1^*}.$$

Os coeficientes $d_n^*(q)$ são obtidos como em (4.4). Expandindo $P_{n+1}^{\phi_1^*}(x) = P_{n+1}^{\psi_0^*}(x) + d_n^*P_n^{\psi_0^*}(x)$ como uma combinação linear dos polinômios $P_n^{S_1^*}$ da seguinte forma

$$P_{n+1}^{\phi_1^*}(x) = P_{n+1}^{S_1^*}(x) + \sum_{k=0}^{n} c_k P_k^{S_1^*}(x), \quad n \geq 0,$$

e considerando o produto interno

$$\langle P_{n+1}^{\phi_1^*}, P_k^{S_1^*}\rangle_{S_1^*} = c_k\langle P_k^{S_1^*}, P_k^{S_1^*}\rangle_{S_1^*}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

obtemos

$$c_k = \frac{\langle P_{n+1}^{\phi_1^*}, P_k^{S_1^*}\rangle_{S_1^*}}{\langle P_k^{S_1^*}, P_k^{S_1^*}\rangle_{S_1^*}}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Entretanto,

$$\begin{aligned}\langle P_{n+1}^{\phi_1^*}, P_k^{S_1^*}\rangle_{S_1^*} &= \langle P_{n+1}^{\psi_0^*} + c_n P_n^{\psi_0^*}, P_k^{S_1^*}\rangle_{\psi_0^*} + \kappa_1\langle P_{n+1}^{\phi_1^*}, P_k^{\phi_1^*}\rangle_{\phi_1^*} + \\ &\quad \kappa_2\langle (n+1)P_n^{\psi_1^*}, P_k^{S_1\prime}\rangle_{\psi_1^*}, \quad 0 \leq k \leq n.\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle P_{n+1}^{\phi_1^*}, P_k^{S_1^*}\rangle_{S_1^*} = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

e

$$\langle P_{n+1}^{\phi_1^*}, P_n^{S_1^*}\rangle_{S_1^*} = c_n(q)\langle P_n^{\psi_0^*}, P_n^{\psi_0^*}\rangle_{\psi_0^*}.$$

Portanto,

$$P_{n+1}^{\phi_1^*}(x) = P_{n+1}^{\psi_0^*}(x) + d_{n-1}^* P_{n-1}^{\psi_0^*}(x) = P_{n+1}^{S_1^*}(x) - a_n(q,\kappa_1,\kappa_2)P_n^{S_1^*}(x), \quad n \geq 1,$$

onde

$$a_n(q,\kappa_1,\kappa_2) = -d_n^*(q)\frac{\langle P_n^{\psi_0^*}, P_n^{\psi_0^*}\rangle_{\psi_0^*}}{\langle P_n^{S_1^*}, P_n^{S_1^*}\rangle_{S_1^*}}, \quad n \geq 0.$$

Expandindo $\langle P_n^{S_1^*}, P_n^{S_1^*}\rangle_{S_1^*}$, para $n \geq 1$ e escrevendo $a_n = a_n(q,\kappa_1,\kappa_2)$ e $d_n^* = d_n^*(q)$, temos

$$\begin{aligned}
\langle P_n^{S_1^*}, P_n^{S_1^*}\rangle_{S_1^*} &= \langle P_n^{\psi_0^*} + d_{n-1}^* P_{n-1}^{\psi_0^*} + a_{n-1}P_{n-1}^{S_1^*}, P_n^{S_1^*}\rangle_{S_1^*} \\
&= \langle P_n^{\psi_0^*} + d_{n-1}^* P_{n-1}^{\psi_0^*}, P_n^{\psi_0^*} + d_{n-1}^* P_{n-1}^{\psi_0^*} + a_{n-1}P_{n-1}^{S_1^*}\rangle_{\psi_0^*} + \\
&\quad \kappa_1\langle P_n^{\phi_1^*}, P_n^{S_1^*}\rangle_{\phi_1^*} + \kappa_2\langle nP_{n-1}^{\psi_1^*}, P_n^{S_1'}\rangle_{\psi_1^*} = \\
&= \rho_n^{\psi_0^*} + d_{n-1}^{*2}\rho_{n-1}^{\psi_0^*} + a_{n-1}d_{n-1}^*\rho_{n-1}^{\psi_0^*} + \kappa_1\rho_n^{\phi_1^*} + \kappa_2 n^2\rho_{n-1}^{\psi_1^*}, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$a_{n-1} = \frac{-d_{n-1}^*\ \rho_{n-1}^{\psi_0^*}}{\rho_{n-1}^{\psi_0^*} + \{d_{n-2}^*\}^2\rho_{n-2}^{\psi_0^*} + \kappa_1\rho_{n-1}^{\phi_1^*} + \kappa_2(n-1)^2\rho_{n-2}^{\psi_1^*} + d_{n-2}^*\rho_{n-2}^{\psi_0^*}a_{n-2}}, \quad n \geq 2.$$

Como $d_{n-1}^* = q\rho_n^{\phi_1^*}/\rho_{n-1}^{\psi_0^*}$, $n \geq 0$, temos

$$a_{n-1} = \frac{-d_{n-1}^*\rho_{n-1}^{\psi_0^*}}{\rho_{n-1}^{\psi_0^*} + d_{n-2}^* q\rho_{n-1}^{\phi_1^*} + \kappa_1\rho_{n-1}^{\phi_1^*} + \kappa_2(n-1)^2\rho_{n-2}^{\psi_1^*} + q\rho_{n-1}^{\phi_1^*}a_{n-2}}, \quad n \geq 2.$$

Visto que $\alpha_{n+2}^{\phi_1^*} = \rho_{n+1}^{\phi_1^*}/\rho_n^{\phi_1^*}$, $n \geq 0$, temos que $\rho_n^{\psi_0^*}/\rho_n^{\phi_1^*} = q\alpha_{n+2}^{\phi_1^*}/d_n^*$. Assim, dividindo numerador e denominador por $\rho_{n-1}^{\phi_1^*}$ e multiplicando por d_{n-1}^*, obtemos

$$a_{n-1} = \frac{-d_{n-1}^*\alpha_{n+1}^{\phi_1^*}q}{\alpha_{n+1}^{\phi_1^*}q + qd_{n-2}^*d_{n-1}^* + \kappa_1 d_{n-1}^* + \kappa_2(n-1)^2 d_{n-1}^*\frac{\rho_{n-2}^{\psi_1^*}}{\rho_{n-1}^{\phi_1^*}} + a_{n-2}qd_{n-1}^*}, \quad n \geq 2.$$

Além disso, para $n = 0$

$$\langle P_0^{S_1^*}, P_0^{S_1^*}\rangle_{S_1^*} = \langle 1,1\rangle_{S_1^*} = \langle 1,1\rangle_{\psi_0^*} + \kappa_1\langle 1,1\rangle_{\phi_1^*},$$

e portanto

$$a_0(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-d_0\rho_0^{\psi_0^*}}{\rho_0^{\psi_0^*} + \kappa_1\rho_1^{\phi_1^*}}.$$

Assim, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.1 *Sejam $d\phi_1^*$ e $d\psi_1^*$ medidas clássicas tais que os polinômios ortogonais mônicos associados $\{P_n^{\phi_1^*}\}$ e $\{P_n^{\psi_1^*}\}$ satisfazem $P_n^{\phi_1^*\prime}(x) = nP_{n-1}^{\psi_1^*}(x)$, $n \geq 1$. Seja a medida $d\psi_0^*$ dada por*

$$d\psi_0^*(x) = (1+qx)d\phi_1^*(x). \tag{5.1}$$

Então o polinômio ortogonal mônico $\{P_n^{S_1^*}\}$ associado ao produto interno

$$\langle f,g\rangle_{S_1^*} = \langle f,g\rangle_{\psi_0^*} + \kappa_1\langle f,g\rangle_{\phi_1^*} + \kappa_2\langle f',g'\rangle_{\psi_1^*},$$

satisfaz $P_0^{S_1^*}(x) = 1$,

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{S_1^*}(x) - a_n(q,\kappa_1,\kappa_2)P_n^{S_1^*}(x) &= P_{n+1}^{\phi_1^*}(x) \\ &= P_{n+1}^{\psi_0^*}(x) + d_n^*(q)P_n^{\psi_0^*}(x), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Os coeficientes $a_n(q,\kappa_1,\kappa_2)$ podem ser obtidos por

$$a_n(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-q\alpha_{n+2}^{\phi_1^*}d_n^*(q)}{q\alpha_{n+2}^{\phi_1^*} + d_n^*(q)\left[\kappa_1 + n^2\frac{\rho_{n-1}^{\psi_1^*}}{\rho_n^{\phi_1^*}}\kappa_2 + qd_{n-1}^*(q) + qa_{n-1}(q,\kappa_1,\kappa_2)\right]},$$

para $n \geq 1$, onde

$$a_0(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-qd_0^*(q)\alpha_2^{\phi_1^*}}{q\alpha_2^{\phi_1^*} + \kappa_1 d_0^*}.$$

Os coeficientes $d_n^*(q)$ satisfazem

$$d_n^*(q) = \frac{q\alpha_{n+2}^{\phi_1^*}}{1 + q\beta_{n+1}^{\phi_1^*} - qd_{n-1}^*(q)} = \frac{qd_{n-1}^*(q)\beta_{n+1}^{\psi_0^*} - q\alpha_{n+1}^{\psi_0^*} + d_{n-1}^*(q)}{qd_{n-1}^*(q)}, \quad n \geq 1,$$

onde $d_0(q) = \frac{q\alpha_2^{\phi_1^*}}{1+q\beta_1^{\phi_1^*}}$. Aqui, q, κ_1 e κ_2 são tais que a distribuição $d\psi_0^*$ e o produto interno S_1^* são definidos positivos.

Como um caso particular deste teorema temos os resultados associados com a medida de Laguerre. Aqui consideramos $d\phi_1^*(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ e $d\psi_1^*(x) = x^{\alpha}e^{-x}dx$ e $d\psi_0 =$

$(1+qx)x^{\alpha-1}e^{-x}dx$, para qualquer $q \geq 0$. Então $P_n^{\phi_1^*}(x) = L_n^{(\alpha-1)}(x)$ (os polinômios mônicos de Laguerre) e $\alpha_{n+1}^{\phi_1^*} = \alpha_{n+1}^{(\alpha-1)} = (n+\alpha-1)n$, $\beta_{n+1}^{\phi_1^*} = \beta_{n+1}^{(\alpha-1)} = 2n+\alpha$ e $\rho_n^{\psi_1^*}/\rho_{n+1}^{\phi_1^*} = 1/(n+1)$. Assim,

Corolário 5.1.1 *Dado o produto interno*

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{LS_1} = \langle f,g\rangle_{LS_1(q,\kappa_1,\kappa_2)} &= \int_0^\infty f(x)g(x)(1+\kappa_1+qx)x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \\ &+\kappa_2\int_0^\infty f'(x)g'(x)x^\alpha e^{-x}dx,\end{aligned}$$

$q \geq 0$, então os polinômios ortogonais associados $P_n^{LS_1}(x)$ satisfazem $P_0^{LS_1}(x) = 1$ e

$$\begin{aligned}P_{n+1}^{LS_1}(x) - a_n^{LS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2)P_n^{LS_1}(x) &= L_{n+1}^{(\alpha)}(x) \\ &= P_{n+1}^{\psi_0^*}(x) + d_n^{(\alpha)}(q)P_n^{\psi_0^*}(x), \quad n \geq 0.\end{aligned}$$

Para os coeficientes $a_n^{LS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2)$ tem-se

$$a_n^{LS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-q(n+1)(n+\alpha)d_n^{(\alpha)}(q)}{q(n+1)(n+\alpha) + d_n^{(\alpha)}(q)\left[\kappa_1 + n\kappa_2 + qd_{n-1}^{(\alpha)}(q) + qa_{n-1}^{LS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2)\right]},$$

para $n \geq 1$, onde

$$a_0^{LS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-qd_0^{(\alpha)}(q)\alpha}{q\alpha + \kappa_1 d_0^{(\alpha)}(q)}.$$

Os coeficientes $d_n^{(\alpha)}(q)$ satisfazem

$$d_n^{(\alpha)}(q) = \frac{(n+\alpha)(n+1)q}{1+(2n+\alpha)q - qd_{n-1}^{(\alpha)}(q)}, \qquad n \geq 1,$$

onde $d_0^{(\alpha)}(q) = \frac{q\alpha}{1+q\alpha}$. Aqui $\kappa_2 \geq 0$ e, se $q > 0$, então $1+\kappa_1 \geq 0$, se $q = 0$, então $1+\kappa_1 > 0$.

Note que para $\kappa_1 \neq -1$, podemos escrever o produto interno $\langle .,. \rangle_{LS_1}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{LS_1(q,\kappa_1,\kappa_2)} &= (1+\kappa_1)\left[\int_0^\infty f(x)g(x)\left(1+\frac{q}{1+\kappa_1}x\right)x^{\alpha-1}e^{-x}dx\right. \\ &\left.+\frac{\kappa_2}{1+\kappa_1}\int_0^\infty f'(x)g'(x)x^\alpha e^{-x}dx\right] \\ &= (1+\kappa_1)\langle f,g\rangle_{LS_1(\tilde{q},0,\tilde{\kappa}_2)},\end{aligned}$$

com $\tilde{q} = \frac{q}{1+\kappa_1}$ e $\tilde{\kappa}_2 = \frac{\kappa_2}{1+\kappa_1}$. Assim, como os produtos internos $\langle .,. \rangle_{LS_1(q,\kappa_1,\kappa_2)}$ e $\langle .,. \rangle_{LS_1(\tilde{q},0,\tilde{\kappa}_2)}$ estão relacionados às mesmas sequências de polinômios ortogonais, para κ_1, apenas duas escolhas $\kappa_1 = 0$ e $\kappa_1 = -1$ são necessárias para obter todas as possibilidades para o produto interno no corolário acima.

Além disso, assim como o produto interno $\langle .,. \rangle_{HS_1}$, temos $\langle f, g \rangle_{LS_1(q,\kappa_1,\kappa_2)} = q\langle f, g \rangle_{LS_1(1,\frac{1-q+\kappa_1}{q},\frac{\kappa_2}{q})}$. Desse modo,

$$a_n^{LS_1}(q,0,\kappa_2) = a_n^{LS_1}\left(1, \frac{1-q}{q}, \frac{\kappa_2}{q}\right) \quad \text{e} \quad a_n^{LS_1}(q,-1,\kappa_2) = a_n^{LS_1}\left(1,-1,\frac{\kappa_2}{q}\right),$$

Assim, fazendo $q = 1$, $\kappa_1 = \frac{1-q}{q}$ e $\kappa_2 = \frac{\kappa_2}{q}$,

$$a_n^{LS_1}(q,0,\kappa_2) = \frac{-(n+1)(n+\alpha+1)d_n^{L_1}(1)}{(n+1)(n+\alpha+1) + d_n^{L_1}\left[\frac{1-q+n\kappa_2}{q} + d_{n-1}^{L_1}(1) + a_{n-1}^{LS_1}(q,0,\kappa_2)\right]},$$

$$a_0^{LS_1}(q,0,\kappa_2) = \frac{-d_0^{L_1}(1)\alpha}{\alpha + \frac{1-q}{q}d_0^{L_1}(1)},$$

e fazendo $q = 1$, $\kappa_1 = -1$ e $\kappa_2 = \frac{\kappa_2}{q}$,

$$a_n^{LS_1}(q,-1,\kappa_2) = \frac{-(n+1)(n+\alpha+1)d_{n+1}^{L_1}(1)}{(n+1)(n+\alpha+1) + d_n^{L_1}\left[-1 + n\frac{\kappa_2}{q} + d_{n-1}^{L_1}(1) + a_{n-1}^{LS_1}(q,-1,\kappa_2)\right]},$$

$$a_0^{LS_1}(q,-1,\kappa_2) = \frac{-d_0^{L_1}(1)\alpha}{\alpha - d_0^{L_1}(1)}.$$

Desse modo, vemos que todos os cálculo podem ser feitos a partir da sequência $\{d_n^{(\alpha)}(1) = d_n^{L_1}(1)\}$.

Agora, um outro caso particular do Teorema 5.1 é o que está associado com os polinômios de Jacobi. Aqui, tomamos $d\psi_1^*(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx$, $d\phi_1^*(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$ e $d\psi_0^* = (1+qx)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$, para todo $-1 \leq q \leq 1$. Então $P_n^{\phi_1^*} = P_n^{(\alpha,\beta)}$ (os polinômios de Jacobi mônicos) $\alpha_{n+1}^{\phi_1^*} = \alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}$, $\beta_{n+1}^{\phi_1^*} = \beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)}$ e $\rho_n^{\psi_1^*}/\rho_{n+1}^{\phi_1^*} = \rho_n^{(\alpha+1,\beta+1)}/\rho_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = 2\frac{n+\alpha+\beta+2}{n+1}$. Portanto segue o corolário,

Corolário 5.1.2 *Dado o produto interno*

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle_{JS_1} = \quad & \langle f, g\rangle_{JS_1(q,\kappa_1,\kappa_2)} = \langle f, g\rangle_{\psi_0^*+\kappa_1\phi_1^*} + \kappa_2\langle f', g'\rangle_{\psi_1^*} \\
= \quad & \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1+\kappa_1+qx)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx \\
& +\kappa_2\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx,
\end{aligned}$$

onde $-1 \leq q \leq 1$, *então os polinômios ortogonais associados* $P_n^{JS_1}(x)$ *satisfazem* $P_0^{JS_1}(x) = 1$, *e*

$$P_{n+1}^{JS_1}(x) - a_n^{JS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2)P_n^{JS_1}(x) = P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = P_{n+1}^{\psi_0^*}(x) + d_n^{(\alpha,\beta)}(q)P_n^{\psi_0^*}(x), \quad n \geq 0.$$

Para os coeficientes $a_n^{JS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2)$ *tem-se*

$$a_n^{JS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-q\alpha_{n+2}^{(\alpha,\beta)}d_n^{(\alpha,\beta)}(q)}{q\alpha_{n+2}^{(\alpha,\beta)} + d_n^{(\alpha,\beta)}(q)\left[\kappa_1 + 2n(n+\alpha+\beta+1)\kappa_2 + qd_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(q) + qa_{n-1}^{JS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2)\right]},$$

para $n \geq 1$, *onde*

$$a_0^{JS_1}(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-q\alpha_2^{(\alpha,\beta)}d_0^{(\alpha,\beta)}(q)}{q\alpha_2^{(\alpha,\beta)} + d_0^{(\alpha,\beta)}(q)\kappa_1}.$$

Os coeficientes $d_n^{(\alpha,\beta)}(q)$ *satisfazem*

$$d_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(q) = \frac{q\alpha_{n+2}^{(\alpha,\beta)}}{1 + q\beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)} - qd_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(q)}, \quad n \geq 1,$$

onde $d_0^{(\alpha,\beta)}(q) = \frac{q\alpha_2^{(\alpha,\beta)}}{1+q\beta_1^{(\alpha,\beta)}}$. *Aqui* $1 + \kappa_1 \geq |q| > 0$ *e* $\kappa_2 \geq 0$ *e se* $q = 0$, *então* $1 + \kappa_1 > 0$ *e* $\kappa_2 \geq 0$.

Note que para κ_1, apenas a escolha $\kappa_1 = 0$ é necessária para obter todas as possibilidades para o produto inteno $\langle f,g\rangle_{JS_1(q,\kappa_1,\kappa_2)}$ do Corolário 5.1.2. Porém, como

$$\begin{aligned}
\langle f,g\rangle_{JS_1(q,0,k_2)} &= \int_{-1}^{1}(1+qx)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + \kappa_2\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx \\
&= -q\left[\int_{-1}^{1}\left(1 - \frac{1+q}{q} - x\right)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx - \right. \\
&\quad \left. -\frac{\kappa_2}{q}\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx\right] \\
&= -q\langle f,g\rangle_{JS_1(-1,-(1+q)/q,-\kappa_2/q)}.
\end{aligned}$$

temos $a_n^{JS_1}(q,0,\kappa_2) = a_n^{JS_1}(-1,-(1+q)/q,-\kappa_2/q)$. Consequentemente, a partir do corolário acima , fazendo $q = -1$, $\kappa_1 = -(1+q)/q$ e $\kappa_2 = -\kappa_2/q$,

$$a_n^{JS_1}(q,0,\kappa_2) = \frac{-q\alpha_{n+2}^{(\alpha,\beta)}d_n^{(\alpha,\beta)}(-1)}{q\alpha_{n+2}^{(\alpha,\beta)} + d_n^{(\alpha,\beta)}(-1)\left[(1+q) + 2n(n+\alpha+\beta+1)\kappa_2 + qd_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(-1) + qa_{n-1}^{JS_1}(q,0,\kappa_2)\right]}$$

para $n \geq 1$, onde

$$a_0^{JS_1}(q,0,\kappa_2) = \frac{-q\alpha_2^{(\alpha,\beta)}d_0^{(\alpha,\beta)}(-1)}{q\alpha_2^{(\alpha,\beta)} + (1+q)d_0^{(\alpha,\beta)}(-1)}$$

e

$$d_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(-1) = \frac{-2n(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}, \qquad n \geq 1.$$

5.3 Produto Interno S_2^*

O próximo teorema dá um outro modo de estudar polinômios ortogonais de Sobolev associados a pares coerentes de medidas partindo dos resultados do teorema 4.2.

Sejam $d\phi_0^*$ de $d\psi_0^*$, duas medidas clássicas tais que os polinômios ortogonais mônicos associados, satisfazem $P_n^{\psi_0^*\prime} = nP_{n-1}^{\phi_0^*}$, $n \geq 1$ e $d\psi_1^*$ tal que

$$d\psi_1^*(x) = \frac{1}{1+qx} d\phi_0^*(x).$$

Então, por (4.3) temos que

$$\begin{aligned} P_n^{\psi_1^*}(x) &= P_n^{\phi_0^*}(x) + d_{n-1}^*(q) P_{n-1}^{\phi_0^*}(x) \\ &= (n+1)^{-1}[P_{n+1}^{\psi_0^*\prime}(x) + \tilde{d}_n^*(q) P_n^{\prime\psi_0^*\prime}(x)], \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

onde $P_0^{\psi_1^*}(x) = P_0^{\phi_1^*}(x) = P_1^{\psi_0^*\prime}(x) = 1$, com $\tilde{d}_n^* = \frac{n+1}{n} d_{n-1}^* = q\frac{n+1}{n}\frac{\rho_n^{\psi_1^*}}{\rho_{n-1}^{\phi_1^*}}$, $n \geq 1$ e $\tilde{d}_0^*$ é qualquer valor arbitrário.

Consideremos os polinômios $P_n^{S_2^*}$ ortogonais em relação ao produto interno de Sobolev

$$\langle f, g\rangle_{S_2^*} = \langle f, g\rangle_{\psi_0^*} + \kappa_1\langle f', g'\rangle_{\phi_0^*} + \kappa_2\langle f', g'\rangle_{\psi_1^*}.$$

Expandindo $R_{n+1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0^*}(x) + \tilde{d}_n^*(q) P_n^{\psi_0^*}(x)$, $n \geq 1$ como uma combinação linear de $P_n^{S_2^*}$ da forma

$$R_{n+1}(x) = P_{n+1}^{S_2^*}(x) + \sum_{k=0}^{n} c_k P_k^{S_2^*}(x), \quad n \geq 1$$

analogamente ao teorema 3.1, obtemos

$$c_r = \frac{\langle R_{n+1}, P_r^{S_2^*}\rangle_{S_2^*}}{\langle P_r^{S_2^*}, P_r^{S_2^*}\rangle_{S_2^*}}, \quad 0 \leq r \leq n, \quad n \geq 1.$$

Como

$$\begin{aligned} \langle R_{n+1}, P_r^{S_2^*}\rangle_{S_2^*} = & \quad \langle P_{n+1}^{\psi_0^*} + \tilde{d}_n^* P_n^{\psi_0^*}, P_r^{S_2^*}\rangle_{\psi_0^*} \\ & + \quad \kappa_1\langle (n+1)[P_n^{\phi_0^*} + d_{n-1}^* P_{n-1}^{\phi_0^*}], P_r^{S_2^*\prime}\rangle_{\phi_0^*} \\ & + \quad \kappa_2\langle (n+1) P_n^{\psi_1^*}, P_r^{S_2^*\prime}\rangle_{\psi_1^*}, \end{aligned}$$

para $0 \leq r \leq n$, temos

$$\langle R_{n+1}, P_r^{S_2 *}\rangle_{S_2^*} = 0, \quad 0 \leq r \leq n-1, \quad n \geq 1,$$

e para $r = n$

$$\langle R_{n+1}, P_n^{S_2^*}\rangle_{S_2^*} = \tilde{d}_n^* \rho_n^{\psi_0^*} + \kappa_1 (n+1) n d_{n-1}^* \rho_{n-1}^{\phi_0^*} = \tilde{d}_n^* \rho_n^{\psi_0^*} + \kappa_1 n^2 \tilde{d}_n^* \rho_{n-1}^{\phi_0^*}.$$

Além disso, para $n = 0$

$$\langle R_1, P_0^{S_2^*}\rangle_{S_2^*} = \langle P_1^{\psi_0^*} + d_0^*, 1\rangle_{S_2^*} = \tilde{d}_0^* \rho_0^{\psi_0^*}.$$

Assim, temos

$$R_{n+1} = P_{n+1}^{S_2^*} - a_n(q, \kappa_1, \kappa_2) P_n^{S_2^*}, \quad n \geq 0,$$

onde

$$a_n(q, \kappa_1, \kappa_2) = -\tilde{d}_n^*(q) \frac{\rho_n^{\psi_0^*} + \kappa_1 n^2 \rho_{n-1}^{\phi_0^*}}{\langle P_n^{S_2^*}, P_n^{S_2^*}\rangle_{S_2^*}}, \quad n \geq 1,$$

e

$$a_0(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{-\tilde{d}_0^*(q) \rho_0^{\psi_0^*}}{\langle 1, 1\rangle_{S_2^*}}.$$

Expandindo $\langle P_n^{S_2^*}, P_n^{S_2^*}\rangle_{S_2^*}$ e considerando $a_n = a_n(q, \kappa_1, \kappa_2)$ e $\tilde{d}_n^* = \tilde{d}_n^*(q)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle P_n^{S_2^*}, P_n^{S_2^*}\rangle_{S_2^*} &= \langle P_n^{\psi_0^*} + \tilde{d}_{n-1}^* P_{n-1}^{\psi_0^*} + a_{n-1} P_{n-1}^{S_2^*}, P_n^{S_2^*}\rangle_{S_2^*} \\
&= \langle P_n^{\psi_0^*} + \tilde{d}_{n-1}^* P_{n-1}^{\psi_0^*}, P_n^{\psi_0^*} + \tilde{d}_{n-1}^* P_{n-1}^{\psi_0^*} + a_{n-1} P_{n-1}^{S_2^*}\rangle_{\psi_0^*} \\
&\quad + \kappa_1 \langle n[P_{n-1}^{\phi_0^*} + \frac{(n-1)}{n} \tilde{d}_{n-1}^* P_{n-2}^{\phi_0^*}], n[P_{n-1}^{\phi_0^*} + \frac{(n-1)}{n} \tilde{d}_{n-1}^* P_{n-2}^{\phi_0^*}] + a_{n-1} P_{n-1}^{S_2^*\prime}\rangle_{\phi_0^*} \\
&\quad + \kappa_2 \langle n P_{n-1}^{\phi_1^*}, P_n^{S_2^*\prime}\rangle_{\psi_1^*} \\
&= \rho_n^{\psi_0^*} + \tilde{d}_{n-1}^{*2} \rho_{n-1}^{\psi_0^*} + a_{n-1} \tilde{d}_{n-1}^* \rho_{n-1}^{\psi_0^*} + \kappa_1 n^2 \rho_{n-1}^{\phi_0^*} \\
&\quad + \kappa_1 (n-1)^2 \tilde{d}_{n-1}^{*2} \rho_{n-2}^{\phi_0^*} + \kappa_1 \tilde{d}_{n-1}^* a_{n-1} (n-1)^2 \rho_{n-2}^{\phi_0^*} + \kappa_2 n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1^*}, \quad n \geq 2
\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{-\tilde{d}_n^* (\rho_n^{\psi_0^*} + \kappa_1 n^2 \rho_{n-1}^{\phi_0^*})}{\rho_n^{\psi_0^*} + \tilde{d}_{n-1}^{*2} \rho_{n-1}^{\psi_0^*} - a_{n-1} \tilde{d}_{n-1}^* \rho_{n-1}^{\psi_0^*} + \kappa_1 n^2 \rho_{n-1}^{\phi_0^*} + \kappa_1 (n-1)^2 \tilde{d}_{n-1}^{*2} \rho_{n-2}^{\phi_0^*} + \kappa_1 \tilde{d}_{n-1}^* a_{n-1} (n-1)^2 \rho_{n-2}^{\phi_0^*} + \kappa_2 n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1^*}},$$

para $n \geq 2$. Como $\rho_{n-1}^{\psi_1^*} = \frac{d_{n-2}^*}{q} \rho_{n-2}^{\phi_0^*}$, $n \geq 2$, temos

$$n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1^*} = n^2 \frac{\tilde{d}_{n-1}^*}{q} \frac{(n-1)}{n} \rho_{n-2}^{\phi_0^*} = \frac{\tilde{d}_{n-1}^*}{q} n(n-1) \rho_{n-2}^{\phi_0^*}, \quad n \geq 2.$$

Assim

$$a_n = \frac{-\tilde{d}_n^* \left(\frac{\rho_n^{\psi_0^*}}{\rho_{n-1}^{\phi_0^*}} + \kappa_1 n^2 \right)}{\frac{\rho_n^{\psi_0^*}}{\rho_{n-1}^{\phi_0^*}} + \kappa_1 n^2 + \tilde{d}_{n-1}^* \left[\tilde{d}_{n-1}^* \frac{\rho_{n-1}^{\psi_0^*}}{\rho_{n-1}^{\phi_0^*}} + a_{n-1} \frac{\rho_{n-1}^{\psi_0^*}}{\rho_{n-1}^{\phi_0^*}} + \kappa_1 (n-1)^2 \tilde{d}_{n-1}^* \frac{\rho_{n-2}^{\phi_0^*}}{\rho_{n-1}^{\phi_0^*}} + \kappa_2 n(n-1) q^{-1} \frac{\rho_{n-2}^{\phi_0^*}}{\rho_{n-1}^{\phi_0^*}} + \kappa_1 a_{n-1} (n-1)^2 \frac{\rho_{n-2}^{\phi_0^*}}{\rho_{n-1}^{\phi_0^*}} \right]},$$

para $n \geq 2$. Como $\frac{\rho_{n-2}^{\phi_0^*}}{\rho_{n-1}^{\phi_0^*}} = \frac{1}{\alpha_n^{\phi_0^*}}$, temos que

$$\frac{\rho_{n-1}^{\psi_0^*}}{\rho_{n-1}^{\phi_0^*}} = \frac{1}{\alpha_n^{\phi_0^*}} \frac{\rho_{n-1}^{\psi_0^*}}{\rho_{n-2}^{\phi_0^*}},$$

e portanto

$$a_n(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{-\tilde{d}_n^* \alpha_n^{\phi_0^*} \left(\frac{\rho_n^{\psi_0^*}}{\rho_{n-1}^{\phi_0^*}} + \kappa_1 n^2 \right)}{\left(\frac{\rho_n^{\psi_0^*}}{\rho_{n-1}^{\phi_0^*}} + \kappa_1 n^2 \right) \alpha_n^{\phi_0^*} + \tilde{d}_{n-1}^* \left[\kappa_2 n(n-1) q^{-1} + (\tilde{d}_{n-1}^* + a_{n-1}) \left(\frac{\rho_{n-1}^{\psi_0^*}}{\rho_{n-2}^{\phi_0^*}} + \kappa_1 (n-1)^2 \right) \right]},$$

para $n \geq 2$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\langle P_1^{S_2^*}, P_1^{S_2^*} \rangle &= \langle P_1^{\psi_0^*} + \tilde{d}_0^* P_0^{\psi_0^*}, P_1^{\psi_0^*} + \tilde{d}_0^* P_0^{\psi_0^*} + a_0 P_0^{S_2^*} \rangle_{\psi_0^*} + \kappa_1 \langle P_0^{\phi_0^*}, P_0^{\phi_0^*} \rangle_{\phi_0^*} + \kappa_2 \langle P_0^{\psi_1^*}, P_0^{\psi_1^*} \rangle_{\psi_1^*} \\
&= \rho_1^{\psi_0^*} + \tilde{d}_0^{*2} \rho_0^{\psi_0^*} + a_0 \tilde{d}_0^* \rho_0^{\psi_0^*} + \kappa_1 \rho_0^{\phi_0^*} + \kappa_2 \rho_0^{\psi_1^*}
\end{aligned}$$

e $\langle 1, 1 \rangle_{S_2^*} = \langle 1, 1 \rangle_{\psi_0^*}$, então $a_0 = -\tilde{d}_0^*(q)$, e portanto tomando $\tilde{d}_0^*(q) = 0$, obtemos

$$a_0 \quad \text{e} \quad a_1 = \frac{-\tilde{d}_1^* \left(\frac{\rho_1^{\psi_0^*}}{\rho_0^{\phi_0^*}} + \kappa_1 \right)}{\frac{\rho_1^{\psi_0^*}}{\rho_0^{\phi_0^*}} + \kappa_1 + \kappa_2 \frac{\rho_0^{\psi_1^*}}{\rho_0^{\phi_0^*}}}.$$

Desse modo, podemos enunciar o seguinte teorema

Teorema 5.2 *Sejam $d\phi_0^*$ e $d\psi_0^*$ medidas clássicas tais que os polinômios ortogonais mônicos $\{P_n^{\phi_0^*}\}$ e $\{P_n^{\psi_0^*}\}$ satisfazem $P_n^{\psi_0^*\prime}(x) = nP_{n-1}^{\phi_0^*}$, $n \geq 1$. Seja a medida $d\psi_1^*$ dada por*

$$d\psi_1^*(x) = \frac{1}{1+qx} d\phi_0^*(x). \tag{5.2}$$

Então os polinômios ortogonais mônicos $\{P_n^S\}$ associados ao produto interno

$$\langle f, g \rangle_{S_2^*} = \langle f, g \rangle_{\psi_0^*} + \langle f', g' \rangle_{\kappa_1 \phi_0^* + \kappa_2 \psi_1^*},$$

satisfazem $P_0^{S_2^*}(x) = P_0^{\psi_0^*}(x) = 1$, $P_1^{S_2^*}(x) = P_1^{\psi_0^*}(x)$, e

$$P_{n+1}^S(x) - a_n(q, \kappa_1, \kappa_2) P_n^S(x) = P_{n+1}^{\psi_0^*}(x) + \tilde{d}_n^*(q) P_n^{\psi_0^*}(x), \quad n \geq 1.$$

Os coeficientes $a_n(q, \kappa_1, \kappa_2)$ *satisfazem*

$$a_n(q, \kappa_1, \kappa_2) =$$
$$\frac{-\nu_n(\kappa_1)\alpha_n^{\phi_0^*}\tilde{d}_n^*(q)}{\nu_n(\kappa_1)\alpha_n^{\phi_0^*} + \tilde{d}_{n-1}^*(q)\left[n(n-1)q^{-1}\kappa_2 + \nu_{n-1}(\kappa_1)[\tilde{d}_{n-1}^*(q) + a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2)]\right]},$$

para $n \geq 2$, *onde*

$$a_1(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{-\tilde{d}_1^*(q)\nu_1(\kappa_1)}{\nu_1(\kappa_1) + \kappa_2\rho_0^{\psi_1^*}/\rho_0^{\phi_0^*}}.$$

e $\nu_n(\kappa_1) = n^2\kappa_1 + \rho_n^{\psi_0^*}/\rho_{n-1}^{\phi_0^*}$, $n \geq 1$. *Os coeficientes* $\tilde{d}_n^*(q)$ *são tais que* $\tilde{d}_n^*(q) = \frac{n+1}{n}d_{n-1}^*(q)$, *onde*

$$d_n^*(q) = \frac{q\alpha_{n+2}^{\psi_1^*}}{1 + q\beta_{n+1}^{\psi_1^*} - qd_{n-1}^*(q)} = \frac{qd_{n-1}^*(q)\beta_{n+1}^{\phi_0^*} - q\alpha_{n+1}^{\phi_0^*} + d_{n-1}^*(q)}{qd_{n-1}^*(q)},$$

para $n \geq 1$,, *com* $d_0^* = \frac{q\alpha_2^{\psi_1^*}}{1+q\beta_1^{\psi_1^*}}$. *Aqui* q, κ_1 *e* κ_2 *são tais que a medida* $d\psi_1$ *e o produto interno* S_2^* *são definidos positivos.*

Como um caso particular desse teorema temos o associado aos polinômios de Laguerre, onde tomamos $d\phi_0^*(x) = x^\alpha e^{-x}dx$, $d\psi_0^*(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ e $d\psi_1^*(x) = (1+qx)^{-1}d\phi_0^*(x) = (1+qx)^{-1}x^\alpha e^{-x}dx$, para todo $q \geq 0$. Então, como $P_n^{\psi_0^*}(x) = L_n^{(\alpha-1)}(x)$, $\rho_n^{\psi_0^*}/\rho_{n-1}^{\phi_0^*} = n$, $\alpha_{n+1}^{\phi_0^*} = \alpha_{n+1}^{(\alpha)} = n(n+\alpha)$ e $\beta_{n+1}^{\phi_0^*} = \beta_{n+1}^{(\alpha)} = 2n + \alpha + 1$, obtemos

Corolário 5.2.1 *Dado o produto interno*

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle_{LS_2} &= \langle f, g\rangle_{\psi_0^*} + \langle f', g'\rangle_{\kappa_1\phi_0^* + \kappa_2\psi_1^*} \\ &= \int_0^\infty f(x)g(x)x^{\alpha-1}e^x dx + \int_0^\infty f'(x)g'(x)\frac{(\kappa_1+\kappa_2) + \kappa_1 qx}{1+qx}\, x^\alpha e^{-x}dx,\end{aligned}$$

$q \geq 0$, *então os polinômios ortogonais associados* $P_n^{LS_2}(x)$ *satisfazem*

$$\begin{aligned}&P_0^{LS_2}(x) = 1, \quad P_1^{LS_2}(x) = L_1^{(\alpha-1)}(x), \\ &P_{n+1}^{LS_2}(x) - a_n^{LS_2}(q, \kappa_1, \kappa_2)P_n^{LS_2}(x) = L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x) + \tilde{d}_n^{(\alpha)}(q)L_n^{(\alpha-1)}(x), \qquad n \geq 2.\end{aligned}$$

Para os coeficientes $a_n^{LS_2}(q, \kappa_1, \kappa_2)$ *temos*

$$a_n^{LS_2}(q, \kappa_1, \kappa_2) =$$
$$\frac{-(n-1)(n+\alpha-1)\nu_n^L(\kappa_1)\tilde{d}_n^{(\alpha)}(q)}{(n-1)(n+\alpha-1)\nu_n^L(\kappa_1) + \tilde{d}_{n-1}^{(\alpha)}(q)\left[n(n-1)q^{-1}\kappa_2 + \nu_{n-1}^L(\kappa_1)[\tilde{d}_{n-1}^{(\alpha)}(q) + a_{n-1}^{LS_2}(q, \kappa_1, \kappa_2)]\right]},$$

para $n \geq 2$, *onde* $a_1^{LS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{-\nu_1^L(\kappa_1)\tilde{d}_1^{(\alpha)}(q)}{\nu_1^L(\kappa_1)+\kappa_2\rho_0^{\psi_1^*}/\Gamma(\alpha+1)}$,

e $\nu_n^L(\kappa_1) = n(1+n\kappa_1)$.

Os coeficientes $\tilde{d}_n^{(\alpha)}(q)$ *são tais que* $\tilde{d}_n^{(\alpha)}(q) = \frac{n+1}{n} d_{n-1}^{(\alpha)}(q)$, $n \geq 1$, *onde*

$$d_{n-1}^{(\alpha)}(q) = \frac{q d_{n-2}^{(\alpha)}(q)\beta_n^{(\alpha)} - q\alpha_n^{(\alpha)} + d_{n-2}^{(\alpha)}(q)}{q d_{n-2}^{(\alpha)}(q)}, \qquad n \geq 2,$$

com $d_0^{(\alpha)} = \frac{q\alpha_2^{\psi_1^*}}{1+q\beta_1^{\psi_1^*}}$. *Aqui* $\kappa_1 \geq 0$ *e* $\kappa_1 + \kappa_2 \geq 0$ *de modo que o produto interno* LS_2 *é definido positivo.*

Note que no Corolário 5.2.1 qualquer avaliação direta envolvendo a distribuição $d\psi_1$ só aparece nas condições iniciais $a_1^{LS_2}$ e $d_0^{(\alpha)}$.

Agora um outro caso particular do Teorema 5.2 é o associado aos polinômios de Jacobi. Aqui tomamos $d\phi_0^*(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx$, $d\psi_0^*(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$ e $d\psi_1^*$ tais que

$$\int F(x)d\psi_1^*(x) = \int_{-1}^{1} F(x)\frac{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}}{(1+qx)}dx + \kappa_3[F(-1/q)],$$

onde $\kappa_3 \geq 0$. Então, como $\rho_n^{\psi_0^*}/\rho_{n-1}^{\phi_0^*} = \rho_n^{(\alpha,\beta)}/\rho_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)} = n/(2(n+\alpha+\beta+1))$, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 5.2.2 *Considere o produto interno* $\langle f,g\rangle_{JS_2} = \langle f,g\rangle_{\psi_0^*} + \langle f',g'\rangle_{\kappa_1\phi_0^*+\kappa_2\psi_1^*}$ *dado por*

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx + \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)\frac{(\kappa_1+\kappa_2)+\kappa_1 qx}{1+qx}(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx$$
$$+\kappa_2\kappa_3\left[f'(-1/q\,)g'(-1/q\,)\right],$$

$-1 \leq q \leq 1$, *onde* $\kappa_3 \geq 0$. *Então os polinômios ortogonais associados* $P_n^{JS_2}(x)$ *satisfazem*

$$P_0^{JS_2}(x) = 1, \quad P_1^{JS_2}(x) = P_1^{(\alpha,\beta)}(x),$$
$$P_{n+1}^{JS_2}(x) - a_n^{JS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)P_n^{JS_2}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \tilde{d}_n^{(\alpha,\beta)}(q)P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \qquad n \geq 2.$$

Para os coeficientes $a_n^{JS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)$ *tem-se*

$$a_n^{JS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3) =$$
$$\frac{-\nu_n^{(\alpha,\beta)}(\kappa_1)\alpha_n^{(\alpha+1,\beta+1)}\tilde{d}_n^{(\alpha+1,\beta+1)}(q)}{\nu_n^{(\alpha,\beta)}(\kappa_1)\alpha_n^{(\alpha+1,\beta+1)} + \tilde{d}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(q)\left[n(n-1)q^{-1}\kappa_2 + \nu_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(\kappa_1)[\tilde{d}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(q) + a_{n-1}^{JS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)]\right]},$$

para $n \geq 2$, *onde*

$$a_1^{JS_2}(q,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3) = \frac{-\nu_1^{(\alpha,\beta)}(\kappa_1)\tilde{d}_1^{(\alpha,\beta)}(q)}{\nu_1^{(\alpha,\beta)}(\kappa_1) + \kappa_2\rho_0^{\psi_1^*}/\rho_0^{(\alpha+1,\beta+1)}}.$$

Aqui $\nu_n^{(\alpha,\beta)}(\kappa_1) = n^2\kappa_1 + n/(2(n+\alpha+\beta+1))$, $n \geq 1$.

Os coeficientes $\tilde{d}_n^{(\alpha,\beta)}(q)$ *são tais que* $\tilde{d}_n^{(\alpha,\beta)}(q) = \frac{n+1}{n} d_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$

$$d_{n-1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{q d_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(q)\beta_n^{(\alpha+1,\beta+1)} - q\alpha_n^{(\alpha+1,\beta+1)} + d_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(q)}{q d_{n-2}^{(\alpha,\beta)}}, \qquad n \geq 2,$$

onde $d_0^{(\alpha,\beta)} = \frac{q\alpha_2^{\psi_1^*}}{1+q\beta_1^{\psi_1^*}}$. *Aqui* $\kappa_1 + \kappa_2 \geq 0$, $\left|\frac{\kappa_1 q}{\kappa_1+\kappa_2}\right| \leq 1$ *e* $\kappa_2\kappa_3 \geq 0$ *de modo que produto* JS_2 *é definido positivo.*

Novamente, note que, no Corolário 5.2.2, qualquer avaliação direta envolvendo a distribuição $d\psi_1^*$ só aparece nas condições iniciais $a_1^{JS_2}$ e $d_0^{(\alpha,\beta)}$. Nestas condições iniciais $\rho_0^{\psi_1^*} = \frac{\mu_2^{\psi_1^*} - \beta_1^{\psi_1^*}\mu_1^{\psi_1^*} + \beta_1^{\psi_1^*\,2}\mu_0^{\psi_1^*}}{\mu_0^{\psi_1^*}}$, $\alpha_2^{\psi_1^*} = \mu_2^{\psi_1^*}/\mu_0^{\psi_1}$ e $\beta_1^{\psi_1^*} = \frac{\mu_1^{\psi_1^*}}{\mu_0^{\psi_1^*}}$, onde

$$\mu_0^{\psi_1^*} = \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{1+qx^2}dx, \qquad \mu_2^{\psi_1^*} = \int_{-1}^{1} \frac{x^2(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{1+qx^2}dx,$$

quando $q \geq 0$ e

$$\mu_0^{\psi_1^*} = \int_{-1}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}}{1+qx}dx + \kappa_3,$$
$$\mu_1^{\psi_1^*} = \int_{-1}^{1} \frac{x(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}}{1+qx}dx - \frac{\kappa_3}{q},$$
$$\mu_2^{\psi_1^*} = \int_{-1}^{1} \frac{x^2(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}}{1+qx}dx - \frac{\kappa_3}{q^2}.$$

Capítulo 6

Considerações Finais

O objetivo desta tese foi estudar algumas relações associadas aos polinômios ortogonais (de Sobolev) em relação ao produto escalar

$$\langle f, g\rangle_S = \int_{I\!R} f(x)g(x)d\mu_0(x) + \int_{I\!R} f'(x)g'(x)d\mu_1(x),$$

onde μ_0 e μ_1 são medidas especiais de maneira que os resultados obtidos são simples e fáceis de serem manipulados. Todos os trabalhos consultados que estudaram os polinômios ortogonais associados a este produto escalar, se restrigiram ao caso de medidas μ_0 e μ_1 formando um par coerente ou simetricamente coerente. Em todos estes trabalhos, o ponto de partida é a relação

$$(n+1)P_n^{\mu_1}(x) = \frac{dP_{n+1}^{\mu_0}(x)}{dx} + \sigma_n \frac{dP_n^{\mu_0}(x)}{dx},$$

quando se trata de coerência, ou a relação

$$(n+1)P_n^{\mu_1}(x) = \frac{dP_{n+1}^{\mu_0}(x)}{dx} + \sigma_{n-1} \frac{dP_{n-1}^{\mu_0}(x)}{dx},$$

quando se trata de coerência simétrica. Aqui, $\{P_n^{\mu_0}\}$ e $\{P_n^{\mu_1}\}$ são os polinômios ortogonais mônicos associados às medidas μ_0 e μ_1, respectivamente.

A abordagem que adotamos neste trabalho é consideravelmente diferente, pois o ponto de partida são as relações

$$(1+qx^2)d\phi_1(x) = d\phi_0(x) \quad \text{e} \quad P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_0}(x) + d_{n-2}P_{n-2}^{\phi_0}(x),$$

quando tratamos de medidas simétricas, e as relações

$$(1+qx)d\phi_1^*(x) = d\phi_0^*(x) \quad \text{e} \quad P_n^{\phi_1^*}(x) = P_{n-1}^{\phi_0^*}(x) + d_{n-2}P_{n-1}^{\phi_0^*}(x),$$

quando tratamos de medidas não simétricas. Nossa abordagem, além de dar uma visão diferente do assunto considerado, permite unificar os estudos considerados anteriormente por diversos autores. A obtenção de resultados sobre qualquer caso especial de pares de medidas é feita através da escolha dos parâmetros q, κ_1 e κ_2, que foram introduzidos nos produtos escalares dos Teoremas 3.1, 3.2, 5.1 e 5.2.

O fato mais importante é que nos Teoremas 3.2 e 5.2 (ou melhor, nos seus respectivos corolários), as escolhas de $\kappa_1 \neq 0$ e $\kappa_2 \neq 0$, também estendem resultados obtidos anteriormente. Neste caso, as medidas ψ_0 e $\kappa_1\phi_0 + \kappa_2\psi_1$ (Teorema 3.2) não são classificadas como pares simetricamente coerentes e as medidas ψ_0^* e $\kappa_1\phi_0^* + \kappa_2\psi_1^*$ (Teorema 5.2), não são classificadas como pares coerentes. Assim, nestes dois casos os produtos internos associados não tinham sido estudados até então. Como acredita-se que a classificação de pares coerentes e simetricamente coerentes feita por Meijer em [38] é completa, a conclusão é que existem pares de medidas que não são coerentes mas fornecem resultados da mesma simplicidade. Este fato abre uma nova possibilidade de estudos a ser explorada, no sentido de estabelecer um conceito para pares de medidas que satisfaçam estes resultados simples.

Vimos, nos resultados provenientes dos Teoremas 3.1 e 5.1, que há certa liberdade na escolha dos parâmetros q, κ_1 e κ_2, pois uma mesma sequência de polinômios de Sobolev pode ser obtida com duas escolhas diferentes destes parâmetros. Por exemplo, no Corolário 3.1.1, $(q, \kappa_1, \kappa_2) = (a, b, c)$ e $(q, \kappa_1, \kappa_2) = (\frac{a}{1+b}, 0, \frac{c}{1+b})$ geram a mesma sequência de polinômios. Mostramos que este fato pode ser usado de modo a obter escolhas de parâmetros que fornecem resultados mais explícitos.

Um trabalho importante que pretendemos considerar futuramente, é o estudo de propriedades assintóticas dos polinômios e dos coeficientes envolvidos, e tentar obter resultados mais explícitos.

Outro trabalho muito importante a ser considerado é a geração numérica dos coeficientes $a_n(q, \kappa_1, \kappa_2)$, dos polinômios ortogonais de Sobolev e dos zeros destes polinômios. Já fornecemos métodos iterativos para obtenção dos coeficientes $a_n(q, \kappa_1, \kappa_2)$, entretanto uma análise de estabilidade dos métodos em relação aos parâmetros, seria bastante interessante.

Acreditamos que este trabalho é fonte de resultados interessantes e aborda uma área de pesquisa bastante promissora.

Referências Bibliográficas

[1] M. Alfaro, F. Marcellán, M.L. Rezola and A. Ronveaux, On orthogonal polynomials of Sobolev type: Algebraic properties and zeros, *SIAM J. Math. Anal.* **23** (3) (1992) 737-757.

[2] M. Alfaro, F. Marcellán and M.L. Rezola, Orthogonal polynomials of Sobolev spaces: old and new directions, *J. Comput. Appl. Math.* **48** (1993) 113-131.

[3] M. Alfaro, A. Martinez-Finkelshtein and M.L. Rezola, Asymptotic properties of balanced extremal Sobolev polynomials: coherent case, *J. Approx Theory* **100** (1999) 44-59.

[4] P. Althammer, Eine erweiterung des orthogonalitätsbegriffes bei polynomem und deren anwendung auf die beste approximation, *J. Reine Angew. Math.* **211** (1962) 192-204.

[5] S. Bernstein, Sur une classe de polynomes orthogonaux, *Comm. de la Soc. Math. Kharkoff* **4** (1930) 79-93.

[6] A.C. Berti and A.S. Ranga, Companion Orthogonal Polynomials: Some Aplications, *Appl. Num. Math.* **39** (2) (2001) 127-149.

[7] S. Bochner, Über Sturm-Liouvillescche polynomsysteme, *Math. Zeit.* **29** (1929) 730-736.

[8] J. Brenner, *Über eine erweiterung des orthogona li tätsbegriffes bei polynomen in einer und zwei variablen.* Doctoral Dissertation, Stuttgart. 1969.

[9] J. Brenner, Über eine erweiterung des orthogona li tätsbegriffes bei polynomen, *Proc. Conf. Constructive Theory os Funcions* Budapest, (1969) (G. Alexits and S.B. Stechkin Akadémiai Kiadó, Budapest (1972) 77-83.

[10] M.G. de Bruin and H.G. Meijer, Zeros of orthogonal polynomials in a non-discrete Sobolev space, *Ann. Numer. Math.* **2** (1995) 233-246.

[11] M.G. de Bruin, K.J. Bruinsma and H.G. Meijer, Zeros of Sobolev orthogonal polynomials following form coherent pairs, Report of FTMI 95-65, Delft University of Technology, 1995.

[12] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[13] E.A. Cohen, Zero distribuition and behavior of orthogonal polynomials in the Sobolev Space $W^{1,2}[-1,1]$, *SIAM J. Math. Anal.* **6** (1975) 105-116.

[14] A.J. Durán, A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation. *J. Approx. Theory* **74** (1993) 83-109.

[15] J. Geronimus, On a set of polynomials, *Ann. Math.* **31** (1930) 681-686.

[16] Z.S. Grinšpun, On a class of orthogonal polynomials, [Russian] *Vestnik Leningradskogo Universiteta Seria Matematiki, Mekhaniki i Astronomii* **21** (1966) 147-149.

[17] W. Gröbner, Orthogonale Polynomsysteme, die gleichzeitig mit $f(x)$ auch deren Aleitung $f'(x)$ aproximierem, en *Funktionalanalysis, Approximations-theorie, Numesche Mathematik* ISNM 7, (1967) Birkhäuser, Baser , 24-32.

[18] H.L. Guidorizzi, *Um curso de Cálculo* vol.1, LTC, Rio de Janeiro, 1985.

[19] W.Hahn, Uber die Jacobischen polynome und zwei verwandre ploynomklassen, *Math. Zeit.* **39** (1935) 634-638.

[20] A. Iserles, P.E. Koch, S.P. Norsett and J.M. Sanz-Serna, On polynomial with respect to certais Sobolev inner products, *J Approx. Theory* **65** (1991) 151-175.

[21] W.B. Jones, W.J. Thron and H. Waadeland, A Strong Stieltjes moment problem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **261** (1980) 503-528.

[22] R. Koekoek, Generalizations of Laguerre polynomias, *J. Math. Anal. Appl.* **153** (1990) 576-590.

[23] R. Koekoek, *Generalizations of the classical Laguerre polynomials and some q-analogues.* Doctoral Dissertation, Delft, 1990.

[24] R. Koekoek, A generalization of Moak's q-Laguerre polynomials, *Canad. J. Math.* XLII, n.2 (1990) 280-303.

[25] R. Koekoek, On q-anologues of generalizations of the Laguerre polynomials, Orthogonal polynomials and their applications. C. Brezinski, L. Gori and Ronveaux Eds. *IMACS Annals Comp. and Appl. Math.* Vol. 9. J.C. Baltzer AG Publ. Basel. (1991) 315-320.

[26] K.H. Kwon, L.L. Littlejohn, J.K. Lee and B.H. Yoo, Characterization of classical type orthogonal polynomials, *Proc. Amer. Soc.* **120** (2). (1994) 485-493.

[27] D.C. Lewis, Polynomial least square approximations, *Amer. J. Math.* **69** (1947) 273-278.

[28] F. Marcellán, T.E. Pérez and M.A. Piñar, Gegenbauer-Sobolev orthogonal polynomials, in *Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation II* (A. Cuyt, ed.), Kluwer, Dordrecht (1994) 71-82.

[29] F. Marcellán, T.E. Pérez and M.A. Piñar, On zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials, *Rendi. di Mat. Roma* (serie 7) **12** (1992) 455-473.

[30] F. Marcellán and J.C. Petronilho, Orthogonal polynomials and coherent pairs: The classical case, *Indag. Math.* (N.S.) **6** (1995) 287-307.

[31] F. Marcellán, J.C. Petronilho, T.E. Pérez and M.A. Piñar, What is beyond coherent pairs os orthogonal polynomials? *J. Comput. Appl. Math.* **65** (1995) 267-277.

[32] F. Marcellán, A. Martínez-Finkelshtein and J.J. Moreno-Balcázar, Asymptotics of Sobolev ortogonal polynomials for symetrically coherent pairs of measures with compact support, *J. Comput. Appl. Math.* **81** (1997) 217-227.

[33] F. Marcellán and A. Ronveaux, On a class of polynomials orthogonal with respect to a Sobolev inner product, *Indag. Math.* (N.S.) **1** (1990) 451-464.

[34] F. Marcellán and W. Van Assche, Relative assymptotics for orthogonal polynomials with a Sobolev inner product, *J. Approx. Theory* **72** (1993) 193-209.

[35] A. Martinez-Finkelshtein, J.J. Moreno-Balcazar, T.E. Perez and M.A. Piñar, Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs, *J. Approx. Theory* **92** (1998) 280-293.

[36] H.G. Meijer, Coherent pairs and zeros for Sobolev-type orthogonal polynomials, *Indag. Math.* (N.S.) **4** (1993) 163-176.

[37] H.G. Meijer, A short history of orthogonal polynomials in a Sobolev space I, the non discrete case, *Niew Archief voor Wiskunde* **14** (1996) 93-113.

[38] H.G. Meijer, Determination of all coherent pairs, *J. Approx. Theory* **89** (1997) 321-343.

[39] H.G. Meijer and M.A. Piñar, Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs of Jacobi type, *J. Comput. Appl. Math.* **108** (1999) 87-97.

[40] H.G. Meijer, Asymptotics of Sobolev Orthogonal Polynomials for Coherent Pairs of Laguerre type, *J. Math. Anal. Appl.* **245** (2000) 528-546.

[41] H.G. Meijer, Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space, *J. Approx. Theory* **73** (1993) 193-209.

[42] H.G. Meijer, Zero distribution of orthogonal polynomials in a certain discrete Sobolev space, *Journal of Math. Annal. Appl.* **172** (2) (1993) 520-532.

[43] K. Pan, On Sobolev orthogonal polynomials with coherent pais: the Jacobi case, *J. Comp. Appl. Math.* **79** (1997) 249-262.

[44] K. Pan, Asymptotics for Sobolev orthogonal polynomials with coherent pair: the Jacobi case, type 1, *Proceedings Amer. Math. Soc.* 126 (1998) 2377-2388.

[45] K. Pan, On Sobolev orthogonal polynomials with coherent pairs: the Laguerre case, type 1, *J. Math. Anal. Appl.* **223** (1998) 319-333.

[46] T.E. Pérez, Polinomios ortogonales respecto a productos de Sobolev: el caso continuo. Tesis Doctoral, University of Granada, 1994.

[47] T.E. Pérez and M.A. Piñar, Global properties of zeros for Sobolev-type orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* **4** (1993) 225-232.

[48] M.A. Piñar, *Polinomios ortogonales do tipo Sobolev.* Aplicaciones, Tesis Doctoral. Granada. 1992.

[49] M.A. Piñar and T.E. Pérez, On higher order Padé-type approximants with some prescribed coefficients in the numerator, *Numerical Algorithms* **3** (1992) 245-352.

[50] A.S. Ranga, Companion orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* **75** (1996) 23-33.

[51] F.W. Schäfke, Zu den orthogonalplolunomen von Althammer, *J. Reine Angew. Math.* **252** (1972) 195-199.

[52] F.W. Schäfke and G. Wolf, Einfache verallgemeinerte klassiche Orthogonalpolynome, *J. Reine Angew. Math.* **262/263** (1973) 339-355.

[53] G. Szegö, Uber die entwicklung einer analytische function nach den polynomen eines orthogonalsystems, *Math. Ann.* **82** (1921) 188-212.

[54] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, American Math. Soc. Colloq. Publ. vol 23, 4th ed., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.