

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Métodos de volumes finitos com decomposição de domínio baseada no método *Multiscale Robin Coupled* para a solução do modelo black-oil

Vitor Alves Pires

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-CCMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Vitor Alves Pires

Métodos de volumes finitos com decomposição de domínio
baseada no método *Multiscale Robin Coupled* para a
solução do modelo black-oil

Tese apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,
como parte dos requisitos para obtenção do título
de Doutor em Ciências – Ciências de Computação
e Matemática Computacional. *EXEMPLAR DE
DEFESA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e
Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Fabricio Simeoni de Sousa

USP – São Carlos
Novembro de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

P667m Pires, Vitor Alves
Métodos de volumes finitos com decomposição de domínio baseada no método Multiscale Robin Coupled para a solução do modelo black-oil / Vitor Alves Pires; orientador Fabricio Simeoni de Sousa. -- São Carlos, 2021.
157 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Volumes finitos. 2. Buckley-Leverett. 3. Black-oil. 4. Decomposição de domínio multiescala. I. Sousa, Fabricio Simeoni de, orient. II. Título.

Vitor Alves Pires

Finite volume methods with domain decomposition based on
the the Multiscale Robin Coupled to solve the black-oil model

Thesis submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Computer and Mathematical Sciences Graduate Program, for the degree of Doctor in Science. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Fabricio Simeoni de Sousa

USP – São Carlos
November 2021

*Este trabalho é dedicado a todos que acreditam na educação
como fonte de conhecimento e transformação.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que sempre guia meus passos com muita sabedoria, carinho e atenção. Agradeço também aos meus pais que sempre me encorajam e me motivam nos momentos mais importantes da minha vida, principalmente em todos esses anos de estudos. Além disso, gostaria de agradecer também a minha noiva pela compreensão e companheirismo durante todo o caminho. Agradeço também a CAPES pelo apoio financeiro para a realização do projeto de pesquisa.

*“As palavras têm a leveza do vento
e a força da tempestade.”
(Victor Hugo)*

RESUMO

PIRES, V. A. **Métodos de volumes finitos com decomposição de domínio baseada no método *Multiscale Robin Coupled* para a solução do modelo black-oil**. 2021. 157 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Escoamentos em meios porosos é uma área com grande importância na indústria petrolífera, em que diversos modelos matemáticos podem ser considerados para realizar as simulações dos escoamentos, sendo estes a equação de Buckley-Leverett e o modelo black-oil, que representam escoamentos bifásicos e trifásicos.

Esses modelos são compostos por leis de conservação hiperbólicas, cujos métodos em volumes finitos tem bastante popularidade na solução numérica. Métodos com ordem formal de convergência alta (≥ 2) são frequentemente escolhidos, porém nas aplicações as hipóteses que permitem provar a convergência são raramente satisfeitas. Assim, através de análises empíricas é possível mostrar o efeito da regularidade da solução sobre a ordem de convergência. A presença de ondas de choque e rarefação faz com que diferentes ordens de convergência sejam obtidas, sendo que as aplicações desse estudo em problemas realistas permitam avaliar a precisão efetiva e conseqüentemente a escolha do método. Essas análises são realizadas em diferentes normas.

O modelo black-oil apresenta uma maior complexidade, já que é composto por uma equação parabólica para a pressão e um sistema de três leis de conservação hiperbólicas. O estudo dessas equações também é importante, já que a abordagem utilizada para as mesmas permite a aplicação de diferentes métodos. As análises são realizadas com problemas unidimensionais e bidimensionais, considerando campos de permeabilidade homogêneos e heterogêneos.

A simplificação da equação de pressão do modelo black-oil é favorável para a utilização de métodos de decomposição em problemas bidimensionais, como é o caso do *Multiscale Robin Coupled Method*. Para problemas com campos de permeabilidade mais realísticos em reservatórios de petróleo, os métodos multiescala são importantes para a aproximação dos campos de velocidade e pressão com maior acurácia. São realizadas diversas configurações para o método com a finalidade de comparar as soluções.

Palavras-chave: Volumes finitos, Buckley-Leverett, black-oil, decomposição de domínio multiescala.

ABSTRACT

PIRES, V. A. **Finite volume methods with domain decomposition based on the the Multiscale Robin Coupled to solve the black-oil model**. 2021. 157 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Flows in porous media is an important area in the oil industry, where several mathematical models can be considered to perform the simulations, such as Buckley-Leverret equation and the black-oil model, which represent two and three-phase flows.

These models are composed of hyperbolic conservation laws, which finite volume methods are quite popular in the numerical solution. Methods with high formal convergence order (≥ 2) are often chosen, but in applications the hypotheses that allow convergence proving are rarely satisfied. Thus, through empirical analysis it is possible to show the effect of the solution regularity on the convergence order. The presence of shock and rarefaction waves causes different convergence orders, and the applications in realistic problems allow to evaluate the effective accuracy and consequently choose the method. These analysis are carried out in different norms.

The black-oil model has greater complexity, as it is composed of a parabolic pressure equation and a system of three mass conservation laws. The study of the parabolic equation is also important, since the approach for this equation allows the application of different methods. The analyzes are carried out with one-dimensional and two dimensional problems, considering homogeneous and heterogeneous permeability fields.

The pressure equation of the black-oil model can be simplified and it is favorable for the use of a decomposition methods in two-dimensional problems, such as the Multiscale Robin Coupled Method. For problems with more realistic permeability fields in oil reservoirs, multiscale methods are important for a more accurate approximation of velocity and pressure fields. Several configurations are made for the method in order to compare the solutions.

Keywords: Finite volume, Buckley-Leverett, black-oil, multiscale domain decomposition.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Esquema de volumes finitos	29
Figura 2 – Reconstrução constante e linear	29
Figura 3 – Fluxos nas direções x e y para as leis de conservação hiperbólica 2D	34
Figura 4 – Solução de Burgers - diferentes tempos	35
Figura 5 – Ordens de convergência nas normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$ - tempo final $t = 1$	36
Figura 6 – Fluxo e derivada do fluxo para diferentes valores da razão de viscosidade M	39
Figura 7 – Estudo da solução da saturação para diferentes valores de s_l e s_r	41
Figura 8 – Saturação da água - problema com condição inicial suave	42
Figura 9 – Ordens de convergência nas normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$ - tempo final $t = 0.05$	43
Figura 10 – Aproximação da solução com os métodos upwind, upwind <i>minmod</i> , Rusanov e KT	45
Figura 11 – Ordens de convergência nas normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$ - tempo final $t = 0.05$	46
Figura 12 – Aproximação das soluções dos métodos KT e upwind para diferentes limitadores	47
Figura 13 – Ordens de convergência na norma $L^1(\Omega)$ - KT e upwind para diferentes limitadores	47
Figura 14 – Ordens de convergência na norma $Lip'(\Omega)$ - KT e upwind para diferentes limitadores	48
Figura 15 – Perfil de saturação no tempo $t = 0.35$ e estudo da convergência na norma $L^1(\Omega)$	50
Figura 16 – Campo de permeabilidade em escala logarítmica e linhas de corrente - alto contraste	51
Figura 17 – Perfil de saturação no tempo $t = 0.5$ e estudo da convergência na norma $L^1(\Omega)$	52
Figura 18 – Campo de permeabilidade em escala logarítmica e linhas de corrente - <i>SPE10</i>	52
Figura 19 – Perfil de saturação da água no tempo $t = 1.0$	53
Figura 20 – Comparação de s_w para o problema trifásico - Caso 1	58
Figura 21 – Ordens de convergência de s_w para o problema trifásico - Caso 1	59
Figura 22 – Comparação de s_g para o problema trifásico - Caso 1	59
Figura 23 – Ordens de convergência de s_g para o problema trifásico - Caso 1	60
Figura 24 – Comparação de s_o para o problema trifásico - Caso 1	60
Figura 25 – Comparação de s_w para o problema trifásico - Caso 2	61
Figura 26 – Ordens de convergência de s_w para o problema trifásico - Caso 2	62
Figura 27 – Comparação de s_g para o problema trifásico - Caso 2	62
Figura 28 – Ordens de convergência de s_g para o problema trifásico - Caso 2	63
Figura 29 – Comparação de s_o para o problema trifásico - Caso 2	63

Figura 30 – Ordens de convergência de s_w para o problema trifásico - Caso 3	65
Figura 31 – Ordens de convergência de s_g para o problema trifásico - Caso 3	65
Figura 32 – Campo de permeabilidade em escala logarítmica e linhas de corrente - Ca- mada 06 <i>SPE10</i>	66
Figura 33 – Saturação s_w para o tempo $t = 2.7$ - trifásico Camada 06 <i>SPE10</i>	66
Figura 34 – Saturação s_g para o tempo $t = 2.7$ - trifásico Camada 06 <i>SPE10</i>	67
Figura 35 – Campo de permeabilidade em escala logarítmica e linhas de corrente - Ca- mada 36 <i>SPE10</i>	67
Figura 36 – Saturação s_w para o tempo $t = 2.7$ - trifásico Camada 36 <i>SPE10</i>	68
Figura 37 – Saturação s_w para o tempo $t = 2.7$ - trifásico Camada 36 <i>SPE10</i>	68
Figura 38 – Estêncil de 3 pontos para a equação parabólica da pressão 1D	90
Figura 39 – Estêncil de 5 pontos para a equação parabólica da pressão 2D	94
Figura 40 – Comparação da saturação da fase líquida e erro com três e um fluxo para a equação de pressão	97
Figura 41 – Comparação da saturação da fase vapor e erro com três e um fluxo para a equação de pressão	98
Figura 42 – Comparação da saturação da fase aquosa e erro com três e um fluxo para a equação de pressão	98
Figura 43 – Comparação da pressão e erro com três e um fluxo para a equação de pressão	99
Figura 44 – Comparação da componente óleo e erro com três e um fluxo para a equação de pressão	99
Figura 45 – Comparação da componente gás e erro com três e um fluxo para a equação de pressão	100
Figura 46 – Comparação da componente água e erro com três e um fluxo para a equação de pressão	100
Figura 47 – Comparação dos métodos numéricos para as saturações e pressão do modelo black-oil	102
Figura 48 – Comparação dos métodos numéricos para as componentes do modelo black-oil	103
Figura 49 – Saturações e Pressão para o caso subsaturado sem a fase líquida no tempo $t = 200$ dias	104
Figura 50 – Componentes do modelo black-oil - óleo, gás e água - no tempo $t = 200$ dias	105
Figura 51 – Saturações e Pressão para o caso misto no tempo $t = 50$ dias	106
Figura 52 – Componentes do modelo black-oil - óleo, gás e água - no tempo $t = 50$ dias	107
Figura 53 – Saturações e perfil das soluções em $t = 1.5$ dias	110
Figura 54 – Componente óleo e perfil da solução em $t = 1.5$ dias	111
Figura 55 – Componente gás e perfil da solução em $t = 1.5$ dias	111
Figura 56 – Componente água e perfil da solução em $t = 1.5$ dias	112
Figura 57 – Saturações das fases líquida, vapor e aquosa no tempo $t = 5$ dias	114
Figura 58 – Saturações das fases líquida, vapor e aquosa no tempo $t = 5$ dias - perfil . .	115

Figura 59 – Campo de permeabilidade	116
Figura 60 – Saturações - campo heterogêneo de alto contraste - $t = 200$ dias	117
Figura 61 – Campo de permeabilidade Gaussiano	118
Figura 62 – Saturações - campo de permeabilidade Gaussiano - $t = 50$ dias	119
Figura 63 – Saturações - campo de permeabilidade Gaussiano - $t = 200$ dias	120
Figura 64 – Campo de permeabilidade heterogêneo	121
Figura 65 – Saturação - fase líquida - $t = 50$ dias	122
Figura 66 – Saturação - fase vapor - $t = 50$ dias	122
Figura 67 – Saturação - fase aquosa - $t = 50$ dias	122
Figura 68 – Saturação - fase líquida - $t = 200$ dias	123
Figura 69 – Saturação - fase vapor - $t = 200$ dias	123
Figura 70 – Saturação - fase aquosa - $t = 200$ dias	123
Figura 71 – Saturação da fase líquida - $t = 30$ dias	130
Figura 72 – Saturação da fase vapor - $t = 30$ dias	131
Figura 73 – Saturação da fase aquosa - $t = 30$ dias	132
Figura 74 – Saturação da fase líquida - $t = 30$ dias	133
Figura 75 – Saturação da fase vapor - $t = 30$ dias	133
Figura 76 – Saturação da fase aquosa - $t = 30$ dias	134
Figura 77 – Campo de permeabilidade heterogêneo - camada 33 do SPE10	135
Figura 78 – Saturação da fase líquida - $t = 250$ dias	136
Figura 79 – Saturação da fase vapor - $t = 250$ dias	137
Figura 80 – Saturação da fase aquosa - $t = 250$ dias	138
Figura 81 – Saturação da fase líquida - $t = 250$ dias	139
Figura 82 – Saturação da fase vapor - $t = 250$ dias	139
Figura 83 – Saturação da fase aquosa - $t = 250$ dias	140
Figura 84 – Campo de permeabilidade heterogêneo - camada 40 do SPE10	141
Figura 85 – Saturação da fase líquida - $t = 70$ dias	142
Figura 86 – Saturação da fase vapor - $t = 70$ dias	143
Figura 87 – Saturação da fase aquosa - $t = 70$ dias	144
Figura 88 – Saturação da fase líquida - $t = 70$ dias	145
Figura 89 – Saturação da fase vapor - $t = 70$ dias	145
Figura 90 – Saturação da fase aquosa - $t = 70$ dias	146
Figura 91 – Saturação da fase líquida - $t = 70$ dias	147
Figura 92 – Saturação da fase vapor - $t = 70$ dias	147
Figura 93 – Saturação da fase aquosa - $t = 70$ dias	148

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Ordens de convergência para os métodos upwind com reconstrução constante e linear - $t = 1$	36
Tabela 2 – Ordens de convergência para os métodos centrados Rusanov e KT - $t = 1$	37
Tabela 3 – Ordens de convergência dos métodos upwind e upwind minmod para diferentes tempos.	43
Tabela 4 – Ordens de convergência dos métodos Rusanov e KT para diferentes tempos.	44
Tabela 5 – Ordens de convergência dos métodos Rusanov e KT para diferentes escolhas de s_l	44
Tabela 6 – Ordens de convergência dos métodos upwind e upwind minmod para diferentes escolhas de s_l	45
Tabela 7 – Ordens de convergência nas normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$ - KT com diferentes limitadores	48
Tabela 8 – Ordens de convergência nas normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$ - upwind com diferentes limitadores	49

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
2	MÉTODOS DE ALTA ORDEM PARA PROBLEMAS BIFÁSICOS E TRIFÁSICOS	27
2.1	Métodos de volumes finitos de alta ordem para equações hiperbólicas	28
2.1.1	<i>Limitadores de fluxo</i>	30
2.1.2	<i>Métodos upwind</i>	31
2.1.3	<i>Métodos centrados</i>	32
2.1.4	<i>Considerações Multidimensionais</i>	33
2.2	Estudos preliminares com a equação de Burgers	34
2.3	Modelo de Buckley-Leverett para escoamentos bifásicos	37
2.3.1	<i>Problema 1D com condição inicial suave</i>	41
2.3.2	<i>Problema de Riemann 1D</i>	44
2.3.3	<i>Problema 1D - limitadores de fluxo</i>	46
2.3.4	<i>Problema 2D homogêneo</i>	49
2.3.5	<i>Problema 2D heterogêneo - alto contraste</i>	50
2.3.6	<i>Problema 2D heterogêneo - SPE10</i>	52
2.4	Modelo para escoamentos trifásicos	54
2.4.1	<i>Problema de Riemann 1D - Caso 1</i>	57
2.4.2	<i>Problema de Riemann 1D - Caso 2</i>	61
2.4.3	<i>Problema de Riemann 1D - Caso 3</i>	64
2.4.4	<i>Problema 2D - Heterogêneo - Camada 06</i>	66
2.4.5	<i>Problema 2D - Heterogêneo - Camada 36</i>	67
3	MODELO BLACK-OIL	69
3.1	Equilíbrio termodinâmico	70
3.2	Lei de Darcy	74
3.3	Equação de estado	76
3.4	Conservação de massa	77
3.5	Equações multidimensionais	79
3.6	Parâmetros para o modelo black-oil	80
4	DISCRETIZAÇÃO DO MODELO BLACK-OIL	83
4.1	Equação parabólica - três fluxos	83

4.1.1	<i>Abordagem parcialmente implícita</i>	89
4.1.2	<i>Abordagem explícita</i>	90
4.2	Equação parabólica - um fluxo	90
4.2.1	<i>Abordagem parcialmente implícita</i>	93
4.2.2	<i>Abordagem explícita</i>	93
4.3	Considerações multidimensionais	93
4.4	Simulação do modelo black-oil unidimensional	96
4.4.1	<i>Formulações de um e três fluxos para o caso saturado</i>	96
4.4.2	<i>Comparação de métodos de transporte para o caso saturado</i>	100
4.4.3	<i>Resultados para o caso subsaturado sem fase líquida</i>	103
4.4.4	<i>Resultados para o caso misto (saturado e subsaturado)</i>	105
4.5	Simulação do modelo black-oil bidimensional	108
4.5.1	<i>Injeção lateral em meio homogêneo</i>	109
4.5.2	<i>Quarter of five-spot em meio homogêneo</i>	112
4.5.3	<i>Meio heterogêneo de alto contraste</i>	115
4.5.4	<i>Meio heterogêneo Gaussiano</i>	117
4.5.5	<i>Meio heterogêneo com estruturas canalizadas</i>	120
5	DECOMPOSIÇÃO DE DOMÍNIO MULTIESCALA PARA O MO- DELO BLACK-OIL	125
5.1	Homogêneo	129
5.2	Heterogêneo - SPE10 - camada 33	134
5.3	Heterogêneo - SPE10 - camada 40	140
6	CONCLUSÕES	151
	REFERÊNCIAS	155

INTRODUÇÃO

O petróleo depositado nos pontos de rochas sedimentares pode ser extraído através de diferentes técnicas (CHEN; HUAN; MA, 2006) para a recuperação de petróleo, sendo estas: primária, secundária e terciária. Na primária o fator de recuperação é de 5% a 15%, sendo que a pressão no reservatório subterrâneo do petróleo é suficiente para forçar o óleo à superfície. Já a recuperação secundária acontece quando a pressão do poço começa a diminuir e esta será insuficiente para forçar o óleo até a superfície. Dessa forma, são necessários novos métodos como a injeção de fluidos para aumentar a pressão do reservatório, como por exemplo a injeção de água ou até mesmo a injeção de gás. Dependendo das características da rocha do reservatório e das propriedades do petróleo, o fator de recuperação é de 30%. A recuperação terciária envolve o aumento da mobilidade do óleo, como por exemplo o fato de aquecer o petróleo com a finalidade de reduzir a sua viscosidade e assim facilitar a extração. Outra maneira está relacionada com a injeção de detergentes que servem para alterar a tensão superficial entre a água e óleo no reservatório. Esse tipo de recuperação depende de uma análise mais detalhada, pois o o óleo precisa ser extraído proveitosamente e depende do custo de todo o processo.

Um reservatório de petróleo pode ser caracterizado como uma região porosa que pode conter misturas de água, gás e óleo, sendo que os parâmetros físicos como a composição e propriedades da rocha são importantes para a construção do modelo matemático (CHEN; HUAN; MA, 2006). Esse modelo é composto por um conjunto de equações diferenciais parciais que não permitem a obtenção de uma fácil solução analítica. Dessa forma, métodos numéricos são necessários para realizar a simulação numérica desses reservatórios. Esses reservatórios de petróleo podem ser encontrados em diferentes regiões do planeta, além do fato de apresentarem diversas características quanto as formações rochosas, porosidade e tamanho.

Existem diversos modelos matemáticos para descrever escoamentos de fluidos em reservatórios de petróleo, em que estes podem ser divididos em incompressíveis ou compressíveis e os componentes do fluido em miscíveis e imiscíveis. Esses modelos que descrevem situações

isotérmicas de fluxo são baseados em alguns princípios físicos: conservação de massa, lei de Darcy, equilíbrio termodinâmico e condição de preenchimento dos volumes do poro. O modelo de Buckley-Leverett (BUCKLEY; LEVERETT, 1942; JUANES; PATZEK, 2004) descreve escoamentos bifásicos e trifásicos imiscíveis e incompressíveis, sendo composto por uma equação elíptica para a pressão e um sistema de equações hiperbólicas para as leis de conservação de massa. Com a presença da compressibilidade e consequentemente da transferência de massa entre as fases obtém-se o modelo black-oil (TRANGENSTEIN; BELL, 1989), (BELL; SHUBIN; TRANGENSTEIN, 1986), (BELL; SHUBIN; TRANGENSTEIN, 1986), sendo este um modelo muito utilizado na indústria petrolífera. É composto por uma equação parabólica para a pressão e um sistema de equações hiperbólicas para a conservação de massa. Com a presença da compressibilidade, o campo de pressão e as componentes densidade são acopladas (CHEN, 2000), sendo que existem maneiras de realizar a separação da parte parabólica da hiperbólica através da linearização da equação de balanço de massa. Além do black-oil existe o modelo composicional, que permite a simulação de mais componentes e o cálculo do equilíbrio termodinâmico.

Os métodos de volumes finitos são muito utilizados para a resolução de problemas que envolvem equação diferenciais parciais hiperbólicas (LEVEQUE, 2002), estando essa presente na equação de Burgers e Buckley-Leverett para os escoamentos bifásicos (BUCKLEY; LEVERETT, 1942) e trifásicos (JUANES; PATZEK, 2003a; JUANES; PATZEK, 2003b). Há diversos métodos numéricos para a solução dessas equações, como é o caso dos tipo upwind (GODUNOV, 1959) e centrados (KURGANOV; TADMOR, 2000). Através da reconstrução linear por partes com a utilização de funções limitadoras como a *minmod*, *superbee* e *monotonized central* é possível obter métodos de alta ordem que são populares na solução numérica.

Como citado anteriormente, situações mais complexas podem ser consideradas através do modelo black-oil, onde a equação parabólica de pressão apresenta diferentes características que permitem a utilização de diversos métodos e abordagens para a resolução da mesma. Além disso, a solução da equação de pressão pode ser determinada através de métodos de decomposição de domínio multiescala que permitem aproximar de forma mais eficiente campos de velocidade e de pressão em meios porosos altamente heterogêneos. Há métodos que aproximam a solução em cada subdomínio de forma independente impondo conservação de pressão na interface, conhecido como *Multiscale Mortar Mixed Finite Element Method* (MMMFEM) (ARBOGAST; PENCHEVA; WHEELER MARY ANDA YOTOV, 2007). Outro método bastante conhecido é o *Multiscale Hybrid Mixed Finite Element Method* (MHM) (ARAYA *et al.*, 2013), cujo acoplamento de subdomínios é feito com uma condição de conservação de fluxo. Outra proposta é uma condição de contorno de Robin na pressão e fluxo para realizar esse acoplamento de subdomínios, conhecido como *Multiscale Mixed Method* (MuMM) (FRANCISCO *et al.*, 2014). Esses métodos foram generalizados e contemplados no método *Multiscale Robin Coupled* (MRCM) (GUIRALDELLO *et al.*, 2018b).

Os objetivos desses estudos consistem em compreender os métodos de volumes finitos

de alta ordem com o objetivo de resolver a equação de Buckley-Leverett para escoamentos bifásicos e trifásicos através da comparação dos métodos numéricos e da análise de ordem para situações que apresentam ondas de choque e rarefação. Posteriormente, avaliar esses métodos para a solução do problema de black-oil, através de situações unidimensionais e bidimensionais, considerando campos de permeabilidade homogêneo e heterogêneo. Além disso, no modelo black-oil há a presença da equação parabólica da pressão que pode ser reescrita com apenas um fluxo ao invés de um, permitindo assim a utilização de métodos de decomposição de domínio multiescala. Dessa forma, serão realizados alguns testes com a intenção de utilizar o MRCM para o modelo black-oil, avaliando como a mudança de parâmetros podem afetar a solução, comparando com as soluções de malha fina.

A tese é organizada da seguinte forma. No capítulo 2 são apresentados os métodos numéricos em volumes finitos para a resolução das equações hiperbólicas presentes em Buckley-Leverett e no modelo black-oil, descrevendo as características de cada e as diferentes abordagens para a resolução das equações. Além disso, nesse mesmo capítulo são apresentadas as equações de Burgers e Buckley-Leverett para escoamentos bifásicos e trifásicos, realizando diversos testes computacionais para a verificação da solução obtida por esses métodos numéricos e análise da ordem de convergência de cada um para diferentes normas. Para isso, são considerados casos unidimensionais e bidimensionais. Já o capítulo 3 discute o modelo black-oil de maneira completa, apresentando as equações parabólica da pressão e hiperbólica para a conservação de massa. Além disso, são discutidos os detalhes desse modelo a fim de compreender os principais termos que compõem as equações. O capítulo 4 discute em detalhes a equação parabólica de pressão presente no modelo black-oil, sendo realizados diversos testes com relação a abordagens explícita e implícita dos termos envolvidos, discutindo o que pode afetar a solução. É realizado também um estudo para a simplificação da equação de pressão de três fluxos para apenas um fluxo. O capítulo 5 mostra os resultados para problemas unidimensionais e bidimensionais para o modelo black-oil, realizando comparações dos diferentes métodos numéricos e avaliando as soluções para problemas homogêneos e heterogêneos. No capítulo 6 são apresentadas as soluções de problemas envolvendo o modelo black-oil e o método de decomposição de domínio multiescala MRCM. Finalmente, no Capítulo 7, são apresentadas as conclusões e contribuições para trabalhos futuros.

MÉTODOS DE ALTA ORDEM PARA PROBLEMAS BIFÁSICOS E TRIFÁSICOS

Neste capítulo serão apresentados e discutidos métodos numéricos de volumes finitos para a solução de equações hiperbólicas, sendo discutidos métodos que apresentação ordem formal $O(h)$ e $O(h^2)$, em que esse último apresenta a reconstrução linear por partes com a utilização de diferentes limitadores. Através desses estudos é possível construir gráficos e tabelas dos resultados obtidos com as soluções das equações de Burgers e Equação de Buckley-Leverett para escoamentos bifásicos e trifásicos.

Através dessas soluções é possível determinar as ordens de convergência empírica para cada um dos métodos, comparando-as com as ordens formais de cada método. Com essa análise pretende-se verificar como as ondas de rarefação e choque interferem na ordem de cada método, especialmente naqueles que possuem alta ordem. Para essa análise duas normas são consideradas, $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$, quer permitirão observar detalhes interessantes para cada uma dessas equações hiperbólicas.

Com essas equações e análises, considera-se os problemas tanto unidimensionais como bidimensionais para a equação de Buckley-Leverett, permitindo obter exemplos com reservatórios homogêneos e heterogêneos, inclusive com camadas do reservatório SPE10.

Essa análise dos métodos de volumes finitos será muito importante para o estudo e resolução do modelo black-oil (TRANGENSTEIN; BELL, 1989), que também envolve uma equação hiperbólica e conseqüentemente a necessidade de aplicação de um método numérico capaz de determinar corretamente as regiões de ondas de choque e rarefação.

2.1 Métodos de volumes finitos de alta ordem para equações hiperbólicas

Para a solução numérica de equações hiperbólicas presentes em diversos modelo matemáticos, é muito importante a escolha dos métodos de volumes finitos para determinar os fluxos que estão presentes nessas equações. Assim, métodos numéricos que apresentam ordem formal $O(h)$ e $O(h^2)$ podem ser considerados para a solução desses problemas. A escolha de métodos de alta ordem é natural devido a acurácia da solução em situações de regiões suaves, porém devido a necessidade de mais procedimentos pode gerar mais custos computacionais. Além disso, a escolha desses métodos pode ser dividida entre aqueles que necessitam resolver um problema de Riemann, tais como métodos tipo upwind (GODUNOV, 1959) e métodos centrais como Rusanov e Kurganov-Tadmor (KURGANOV; TADMOR, 2000).

Uma lei de conservação é uma relação contida em uma região do espaço que relaciona a taxa de mudança de uma certa quantidade em função do tempo com o fluxo dessa quantidade através dos limites da região considerada. Na ausência de termos fonte, essa relação diz que a quantidade será conservada na região, ou seja, não pode ser criada ou destruída.

Além disso, é importante ressaltar que leis de conservação hiperbólica (LEVEQUE, 2002) são derivadas a partir princípios físicos tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

sendo esta a forma unidimensional. A variável u representa a conservação de um estado em função do tempo e espaço, ou seja, $u(x, t)$. Essa variável pode ser massa, momento, energia ou até mesmo um vetor dessas quantidades. O termo $f(u)$ é conhecido como função fluxo. Observa-se que para problema ser bem posto é necessário considerar uma condição inicial $u(x, t = 0)$. Assim,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \\ u(x, t = 0) = u_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Essa equação diferencial parcial é definida em uma região Ω com fronteira $\partial\Omega$, sendo esta importante em problemas que dependem dessa estrutura, como em casos de injeção e produção.

Dessa forma, a semi-discretização espacial para a equação (2.1) é dada por

$$\frac{dU_i}{dt} = -\frac{1}{h}(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}), \quad (2.3)$$

em que $U_i(t) = U(x_i, t)$ aproxima o valor médio da variável u sobre o i -ésimo intervalo espacial no tempo t . $F_{i+1/2}$ e $F_{i-1/2}$ são os fluxos determinados na fronteira direita e esquerda de cada

célula computacional. Observa-se que as variáveis presentes na semi-discretização (2.3) são representadas na Figura (1).

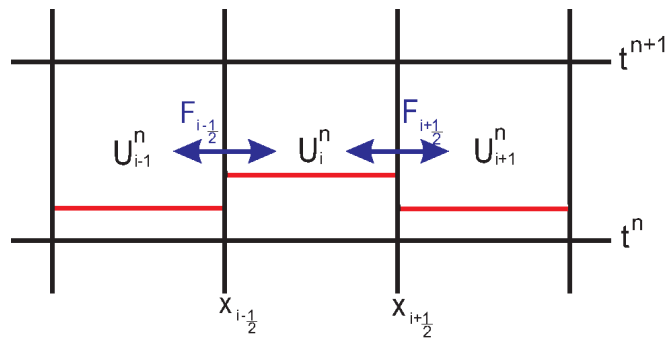


Figura 1 – Esquema de volumes finitos

Assim, diferentes esquemas de volumes finitos podem ser considerados e consequentemente correspondem a diferentes definições dos fluxos discretos $F_{i-1/2}$ nas respectivas interfaces $x_{i-1/2}$. Os fluxos discretos são definidos a partir da reconstrução espacial da solução discreta, sendo esta dada por

$$U(x, t) = U_i(t) + \sigma_i(x - x_i), \quad \text{para } x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}. \quad (2.4)$$

Observa-se que quando $\sigma_i = 0$ obtém-se $U(x, t) = U_i(t)$, ou seja, a aproximação é constante por partes, caracterizando métodos com ordem formal $O(h)$ tais como os métodos Godunov e Rusanov. Porém, quando calcula-se a derivada de U em x_i é possível obter $\sigma_i \neq 0$, caracterizando uma reconstrução linear por partes e consequentemente métodos com ordem formal $O(h^2)$ tais como Kurganov-Tadmor.

Através da Figura 2 é possível ilustrar a importância de calcular σ_i , cujo objetivo consiste em aumentar a ordem de precisão dos métodos, sendo que em cada célula é possível obter uma aproximação constante ($\sigma_i = 0$) ou uma reconstrução linear ($\sigma_i \neq 0$) dada por (2.4).

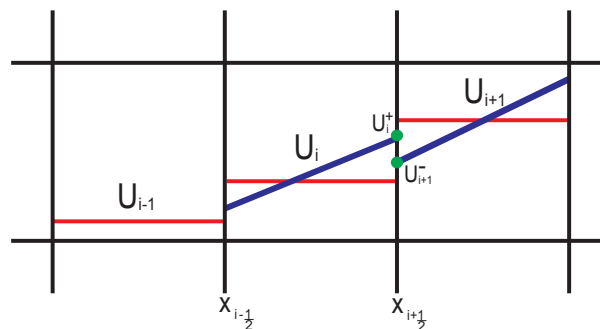


Figura 2 – Reconstrução constante e linear

Com isso, os estados U_i^+ e U_{i+1}^- , representados na Figura 2 são determinados por

$$U_i^+ = U_i + \sigma_i \frac{h}{2} \quad (2.5)$$

e

$$U_{i+1}^- = U_{i+1} - \sigma_{i+1} \frac{h}{2}, \quad (2.6)$$

sendo estes os valores da interface direita da célula i .

Para realizar a reconstrução linear e conseqüentemente determinar os valores de σ_i , é possível considerar diferentes limitadores de fluxo. Dessa forma, serão apresentados alguns deles com suas características principais e posteriormente a comparação dos mesmos na solução da equação de Buckley-Leverett para escoamento bifásico.

2.1.1 Limitadores de fluxo

O cálculo dessas aproximações para σ_i foi realizado através das seguintes funções limitadores: *minmod*, *superbee*, *monotonized central* (MC). Vale ressaltar a existência de outros limitadores de fluxos que também podem ser usados para a reconstrução linear.

- **Limitador *minmod*:**

O limitador de inclinação σ_i é definido de tal forma que

$$\sigma_i = \minmod \left(\frac{U_{i+1} - U_i}{h}, \frac{U_i - U_{i-1}}{h} \right), \quad (2.7)$$

sendo que a função limitadora *minmod* é dada por

$$\minmod(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a_1) \min_{1 \leq k \leq n} (|a_k|), & \text{se } \operatorname{sgn}(a_1) = \dots = \operatorname{sgn}(a_n) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.8)$$

Assim, define-se o limitador *minmod*. Nota-se que a construção desse limitador é realizada de maneira bastante simples, considerando os valores das células central, à direita e à esquerda, como pode ser observado em (2.7).

- **Limitador *superbee*:**

O limitador de inclinação σ_i é definido tal que

$$\sigma_i = \maxmod(\sigma_i^l, \sigma_i^r), \quad (2.9)$$

em que

$$\maxmod(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a_1) \max_{1 \leq k \leq n} (|a_k|), & \text{se } \operatorname{sgn}(a_1) = \dots = \operatorname{sgn}(a_n) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.10)$$

Para calcular σ_i^l e σ_i^r tem-se

$$\sigma_i^l = \minmod\left(2\frac{U_i - U_{i-1}}{h}, \frac{U_{i+1} - U_i}{h}\right) \quad (2.11)$$

e

$$\sigma_i^r = \minmod\left(\frac{U_i - U_{i-1}}{h}, 2\frac{U_{i+1} - U_i}{h}\right). \quad (2.12)$$

A função *minmod* é a mesma definida em (2.8). Assim, define-se o limitador *superbee*, sendo que apesar de possuir mais passos para a sua construção, ainda assim os procedimentos são realizados de maneira bastante direta, também utilizando das células central, à direita e à esquerda.

- **Limitador *Monotonized central* (MC):**

O limitador de inclinação σ_i é definido tal que

$$\sigma_i = \minmod\left(\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{h}, 2\frac{U_i - U_{i-1}}{h}, 2\frac{U_{i+1} - U_i}{h}\right) \quad (2.13)$$

A função *minmod* é a mesma definida em (2.8). Assim, define-se o limitador *monotonized central*, em que é possível observar a utilização das células central, à direita e à esquerda. Além disso, em (2.13) a função *minmod* é aplicada em três diferenças que possuem pesos diferentes.

Vale ressaltar que os limitadores de fluxo são utilizados com a intenção de evitar e controlar oscilações espúrias, resultando em um esquema TVD (*Total Variation Diminishing*) (LEVEQUE, 2002). Dessa forma, é importante estudar os métodos numéricos do tipo upwind e centrados.

2.1.2 Métodos upwind

A principal ideia de esquemas upwind (GODUNOV, 1959; LEVEQUE, 2002) é resolver o problema de Riemann em cada interface de célula, sendo que obtém-se ordem forma $O(h)$

quando é utilizada a reconstrução constante ($\sigma_i = 0$) e ordem forma $O(h^2)$ com reconstrução linear ($\sigma_i \neq 0$).

Dessa forma, determina-se o fluxo da seguinte forma

$$F_{i-1/2} = f(U_{i-1/2}^\downarrow), \quad (2.14)$$

em que $U_{i-1/2}^\downarrow$ o valor da solução do problema de Riemann na interface da célula com os estados U_{i-1}^+ e U_i^- calculados em (2.5) e (2.6).

2.1.3 Métodos centrados

Métodos centrados para leis de conservação hiperbólicas são mais simples que métodos upwind, já que estes não necessitam resolver um problema de Riemann. Dessa forma, métodos como Rusanov e Kurganov-Tadmor podem ser considerados para a solução numérica dos problemas.

- **Rusanov:**

O fluxo em (2.3) para o método de Rusanov (LEVEQUE, 2002) é dado por

$$F_{i+1/2} = \frac{f(U_{i+1}) + f(U_i)}{2} - \frac{a_{i+1/2}}{2}(U_{i+1} - U_i), \quad (2.15)$$

em que

$$a_{i+1/2} = \max_{U_i \leq Q_i \leq U_{i+1}} \{|f'(Q_i)|\}. \quad (2.16)$$

Observa-se que o método de Rusanov utiliza da reconstrução constante, ou seja, $\sigma_i = 0$ para o cálculo dos fluxos. Isso resulta em um método com ordem formal $O(h)$.

- **Kurganov-Tadmor:**

O fluxo para o método de Kurganov-Tadmor (DAMIÁN; NIGRO; BUSCAGLIA, 2016; KURGANOV; TADMOR, 2000) é dado por

$$F_{i+1/2} = \frac{f(U_{i+1}^-) + f(U_i^+)}{2} - \frac{a_{i+1/2}}{2}(U_{i+1}^- - U_i^+), \quad (2.17)$$

em que $a_{i-1/2}$ é uma velocidade local estimada no centro da célula, tal que

$$a_{i+1/2} = \max \left\{ \rho \left(\frac{\partial}{\partial u} (f(U_i^+)) \right), \rho \left(\frac{\partial}{\partial u} (f(U_{i+1}^-)) \right) \right\}. \quad (2.18)$$

Observa-se que ρ é o raio espectral da matriz jacobiana

$$m = \frac{\partial}{\partial u}(f(u)), \quad (2.19)$$

resultando nos autovalores dessa matriz. Para este método é considerada reconstrução linear (2.3), ou seja, $\sigma \neq 0$, calculando os estados U_i^+ e U_{i+1}^- .

Para realizar a aproximação temporal da equação (2.3) diversas abordagens podem ser consideradas, como por exemplo *backward Euler* (LEVEQUE, 2002), em que

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{h}(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n), \quad (2.20)$$

em que Δt representa o passo temporal.

Além disso, pode-se considerar também a aproximação por Runge-Kutta TVD de segunda ordem (GOTTLIEB; SHU, 1998), dada por

$$\begin{aligned} U^* &= U^n - \Delta t L(U^n) \\ U^{n+1} &= \frac{1}{2}U^n + \frac{1}{2}U^* - \frac{1}{2}\Delta t L(U^*), \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\text{com } L(U) = \frac{\partial}{\partial x}(f(U)).$$

2.1.4 Considerações Multidimensionais

Para problemas bidimensionais algumas considerações são importantes, sendo que as leis de conservação hiperbólica são definidas da seguinte maneira

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad (2.22)$$

em que F e G representam os fluxos nas direções x e y , respectivamente.

Dessa forma, é possível realizar a semi-discretização da equação (2.22) de tal forma que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{h_x}(F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}) - \frac{1}{h_y}(G_{i,j+1/2} - G_{i,j-1/2}), \quad (2.23)$$

em que h_x e h_y representam o espaçamento nas direções x e y , respectivamente.

Os quatro fluxos F e G presentes na equação (2.23) estão localizados nas fronteiras da célula computacional ij , como pode ser observado na Figura 3.

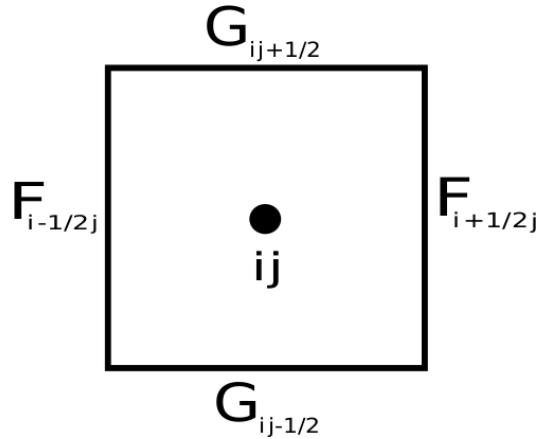


Figura 3 – Fluxos nas direções x e y para as leis de conservação hiperbólica 2D

Com isso, os métodos numéricos para resolver a equação hiperbólica bidimensional podem ser expandidos de forma bastante direta, sendo uma extensão da aplicação para os casos unidimensionais. Assim, aplica-se os métodos upwind com reconstrução constante e linear, Rusanov e Kurganov-Tadmor para resolver os fluxos F e G nas direções x e y , respectivamente.

Com a finalidade de aplicar e entender os métodos numéricos, upwind com reconstrução constante por partes e linear, Rusanov e Kurganov-Tadmor, pretende-se a seguir realizar diferente estudos numéricos sobre as soluções e ordens de convergência. Para aplicar esses métodos foram consideradas as equações hiperbólicas de Burgers e Buckley-Leverett com diferentes condições iniciais. Dessa forma, é possível extrair informações importantes sobre a convergência através das normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$, sendo que a presença de ondas de choque e rarefação terão um papel importante na análise dos resultados dessas equações diferenciais parciais.

É importante observar que a norma $Lip'(\Omega)$ é definida por

$$\|w\|_{Lip'} = \sup \left\{ \int_{\Omega} w \phi \, d\Omega \mid \phi \in C^1(\Omega), \|\nabla \phi(x)\| \leq 1, x \in \Omega \right\}. \quad (2.24)$$

utilizando a distância de Wassertein como apresentando em (DAMIÁN; NIGRO; BUSCAGLIA, 2016).

2.2 Estudos preliminares com a equação de Burgers

A equação de Burgers (LEVEQUE, 2002) é uma equação diferencial parcial hiperbólica não-linear que aparece em várias áreas da matemática, como por exemplo acústica não-linear, dinâmica dos gases e fluxo de tráfego. Considerando o caso invíscido, ou seja, sem a presença do termo viscoso, tem-se para o caso unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0. \quad (2.25)$$

Seja o domínio $\Omega = (0, 1)$ com condição inicial dada por

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0.2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.26)$$

e condição de contorno $u(x = 0, t) = 1$. A Figura 4 mostra o resultado da equação de Burgers, através do método upwind com reconstrução linear, para a condição inicial (2.26) em diferentes tempos. Observa-se que a condição inicial apresenta a formação de uma onda de rarefação que é transportada ao longo do domínio até o tempo final $t = 1$. Além disso, é importante ressaltar que para os métodos que utilizam reconstrução linear (upwind e Kurganov-Tadmor) foi considerado o limitador *minmod*.

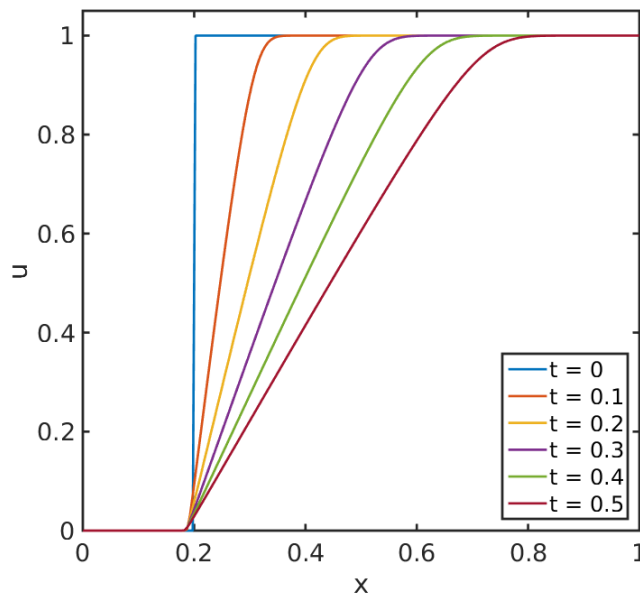


Figura 4 – Solução de Burgers - diferentes tempos

Dessa forma, o objetivo com esse problema é avaliar as ordens empíricas dos métodos numéricos e assim realizar comparações quanto as ordens formais dos mesmos. Para isso foram consideradas as normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$ apresentada em (2.24). É importante ressaltar a importância da norma $Lip'(\Omega)$, que será responsável por avaliar as ordens dos métodos em situações que ocorrem choque. Nesses casos, a ordem formal dos métodos de alta ordem determinados com a norma $L^1(\Omega)$ acabam tendo uma redução de ordem calculada empiricamente, o que acaba sendo recuperado com a norma $Lip'(\Omega)$, conforme discutido em (DAMIÁN; NIGRO; BUSCAGLIA, 2016). A Figura 5 mostra os resultados obtidos em ambas as normas.

Para realizar esses cálculos foram consideradas malhas de 25, 50, ... células e a ordem empírica de convergência no tempo $t = 1$ ajustando uma lei de potência αh^p aos erros medidos

com respeito a uma solução de referência (malha fina com 10000 células). A Figura 5a mostra as ordens dos métodos upwind com reconstrução constante e linear (upwind *minmod*), Rusanov e Kurganov-Tadmor (KT) para a norma $L^1(\Omega)$. Observa-se que todos os métodos numéricos apresentam $O(h)$, mesmo aqueles com ordem formal $O(h^2)$. O mesmo acontece na norma $Lip'(\Omega)$, como pode ser visto na Figura 5b.

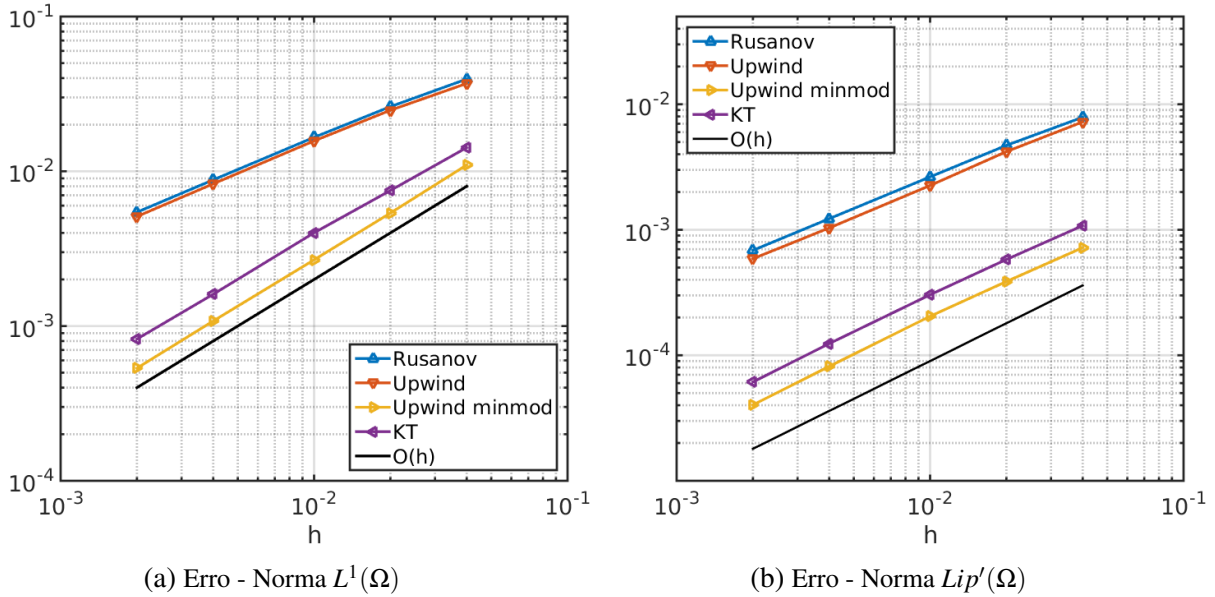


Figura 5 – Ordens de convergência nas normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$ - tempo final $t = 1$.

A Tabela 1 mostra os resultados das ordens numéricas para o método upwind com reconstrução constante ($\sigma = 0$) e linear ($\sigma = 1$). Observa-se que tanto nas normas $L^1(\Omega)$ quanto $Lip'(\Omega)$, as ordens dos métodos são $O(h)$, ou seja, confirmam os resultados apresentados na Figura 5. Além disso, o método upwind *minmod* tem uma redução de ordem, já que sua ordem formal é $O(h^2)$.

Essa redução de ordem ocorre devido ao fato da solução apresentada pela equação de Burgers possuir onda de rarefação, uma vez que estudos mostram que quando a solução apresenta aenas onde de choque, essa ordem pode ser recuperada pela norma $Lip'(\Omega)$.

Método \ N	25	50	100	250	500
upwind- $L^1(\Omega)$	-	0.74	0.75	0.77	0.80
upwind- $Lip'(\Omega)$	-	0.99	0.94	0.88	0.88
upwind minmod- $L^1(\Omega)$	-	0.97	0.98	0.98	1.01
upwind minmod- $Lip'(\Omega)$	-	1.05	1.04	1.03	1.04

Tabela 1 – Ordens de convergência para os métodos upwind com reconstrução constante e linear - $t = 1$

Para os métodos centrados de Rusanov e Kurganov-Tadmor, cujas ordens formais são $O(h)$ e $O(h^2)$, apresentam ordem empírica $O(h)$ para ambas as normas, como mostrado na Tabela 2. Observa-se que o método de Kurganov-Tadmor tem uma redução de ordem.

Método \ N	25	50	100	250	500
Rusanov- $L^1(\Omega)$	-	0.71	0.73	0.74	0.78
Rusanov- $Lip'(\Omega)$	-	0.84	0.83	0.83	0.85
KT- $L^1(\Omega)$	-	0.99	1.01	1.03	1.07
KT- $Lip'(\Omega)$	-	1.06	1.05	1.05	1.08

Tabela 2 – Ordens de convergência para os métodos centrados Rusanov e KT - $t = 1$

Esse estudo da equação de Burgers teve a finalidade de considerar uma equação mais simples de transporte, permitindo assim avaliar a solução e analisar detalhes com relação a ordem de convergência dos métodos com e sem reconstrução linear por partes. Essa análise foi feita através de gráficos e tabelas com as normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$, que neste caso, acabam apresentando $O(h)$ tanto para os métodos de baixa e alta ordem. Isso indica que a presença da onda de rarefação possa ser a responsável por ocasionar a queda da ordem de métodos como o upwind *minmod* e Kurganov-Tadmor.

Com a finalidade de compreender e avaliar em mais detalhes os métodos numéricos para equações hiperbólicas que envolvem escoamentos em meios porosos, principalmente com a análise das ordens empíricas, considera-se a equação de Buckley-Leverett apresentada em detalhes a seguir. Através desse estudo será possível considerar situações que ocorrem apenas choque e aqueles que apresentam tanto ondas de choque como também de rarefação, permitindo a construção de gráficos e tabelas referentes as ordens empíricas obtidas com as normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$. Além disso, analisar a recuperação da ordem e o efeito que a rarefação pode ocasionar no cálculo da mesma, assim como foi inicialmente observado para a equação hiperbólica de Burgers.

2.3 Modelo de Buckley-Leverett para escoamentos bifásicos

Modelos matemáticos para escoamentos bifásicos em meios porosos são de extrema importância devido as diversas aplicações em mecânica dos solos, purificação de água, extração de petróleo e vários outros processos (BUCKLEY; LEVERETT, 1942). Dessa forma, a modelagem matemática das equações tem uma grande importância quantitativa para avaliar esses parâmetros. É importante ressaltar que escoamentos bifásicos em geral são compostos por água e óleo, sendo que a água é responsável por empurrar o máximo possível o óleo através dos poros. Além disso, esse tipo de modelo ocupa um papel importante na indústria petrolífera.

A equação hiperbólica que compõe esse modelo, também chamada de equação de Buckley-Leverett, é descrita através das seguintes afirmações:

- Não há presença de termos fonte;
- Escoamentos incompressíveis;
- Fluidos imiscíveis;
- Sem efeitos das pressões capilares;
- Sem efeitos gravitacionais.

Assim, a equação para um escoamento bifásico em meio poroso (BUCKLEY; LEVERETT, 1942; LEVEQUE, 2002) é dada por

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi(s)\mathbf{v}) = 0, \quad (2.27)$$

em que s é a saturação da água, ou seja, $s = s_w$ e \mathbf{v} é a velocidade do fluxo, que considera a heterogeneidade do meio poroso. A função fluxo é

$$f(s) = \varphi(s)\mathbf{v}, \quad \text{com} \quad \varphi(s) = \frac{Ms^2}{Ms^2 + (1-s)^2}. \quad (2.28)$$

É importante observar que a razão de viscosidades é dada por

$$M = \frac{\mu_o}{\mu_w}, \quad (2.29)$$

sendo que μ_o e μ_w são as viscosidades do óleo e da água, respectivamente.

Dessa forma, é interessante visualizar a função de fluxo $f(s)$ e sua derivada com relação a saturação s , dadas pelas Figuras 6a e 6b, respectivamente. Foi através da variação da razão de viscosidade M que esses gráficos foram construídos.

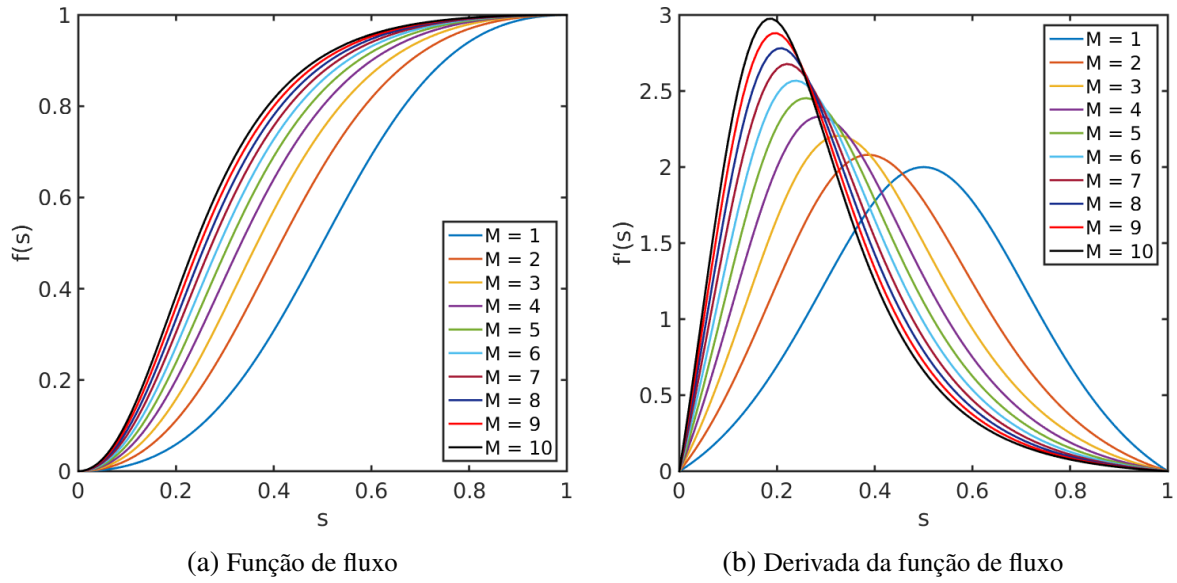


Figura 6 – Fluxo e derivada do fluxo para diferentes valores da razão de viscosidade M

Para representar a velocidade total do escoamento, tem-se a lei de Darcy que é dada por

$$\mathbf{v} = -\lambda K \nabla p, \quad (2.30)$$

em que K é a permeabilidade absoluta do meio. Além disso, λ é a mobilidade total definida por

$$\lambda = \lambda_w + \lambda_o, \quad (2.31)$$

sendo então a soma das mobilidades das fases óleo (o) e água (w).

Essas mobilidades de cada uma das fases é definida por

$$\lambda_\alpha = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}, \quad \text{com } k_{r\alpha} = s_\alpha^2, \quad \alpha = w, o, \quad (2.32)$$

sendo que $k_{r\alpha}$ é a permeabilidade relativa da fase α .

Dessa forma, será considerado um meio poroso saturado, ou seja

$$s_w + s_o = 1, \quad (2.33)$$

indicando que a soma das saturações é igual ao volume poroso.

Além disso, é interessante considerar condições típicas de problemas de injeção, em que $s(x, t = 0) = s_r$ é a saturação da água inicialmente presente no reservatório. Considera-se uma

injeção com saturação s_l maior que s_r . Para o caso unidimensional com velocidade constante $v = 1$ é obtido um problema de Riemann da seguinte forma

$$s(x, t = 0) = \begin{cases} s_l, & \text{se } x < 0 \\ s_r, & \text{se } x > 0 \end{cases}, \quad (2.34)$$

definido por esta condição inicial.

Considerando diferentes valores que s_l e s_r podem assumir, a solução $s(x, t)$ da equação (2.27) pode ser um choque ou uma combinação de choque com rarefação. Para o caso de condições de choque, a saturação da água s satisfaz a condição de entropia de Oleřnik (LEVEQUE, 2002; OLEINIK, 1957), que geometricamente representa a condição de convexidade presente na Figura 7.

Denotando por f_c o envelope convexo acima do gráfico de f para $s \geq s_r$, os valores de s permitidos devem satisfazer $f(s) = f_c(s)$, como pode ser visto na Figura 7a. É importante observar que a função de fluxo para a equação de Buckley-Leverett não é convexa, sendo que para cada valor de s_r está associado \tilde{s} tal que a transição entre os valores \tilde{s} e s_r deve ser descontínua, surgindo assim uma onda de choque que se desloca com a seguinte velocidade

$$c = f'(\tilde{s}). \quad (2.35)$$

Além disso, se $s_l < \tilde{s}$ existe uma onda de choque ente s_l e s_r com velocidade

$$c = \frac{f(s_l) - f(s_r)}{s_l - s_r}. \quad (2.36)$$

Se $s_l > \tilde{s}$, a onda de choque é acompanhada à esquerda por uma onda de rarefação que une os valores s_l e \tilde{s} . A solução, no caso $s_l < \tilde{s}$ é ilustrada na Figura 7b, Já o caso em que $s_l > \tilde{s}$ é ilustrado na Figura 7c.

O ponto \tilde{s} satisfaz

$$f'(s) = \frac{f(\tilde{s}) - f(s_r)}{\tilde{s} - s_r}, \quad (2.37)$$

em que

$$\tilde{s} = \frac{1}{\sqrt{M+1}}, \quad (2.38)$$

com $s_r = 0$.

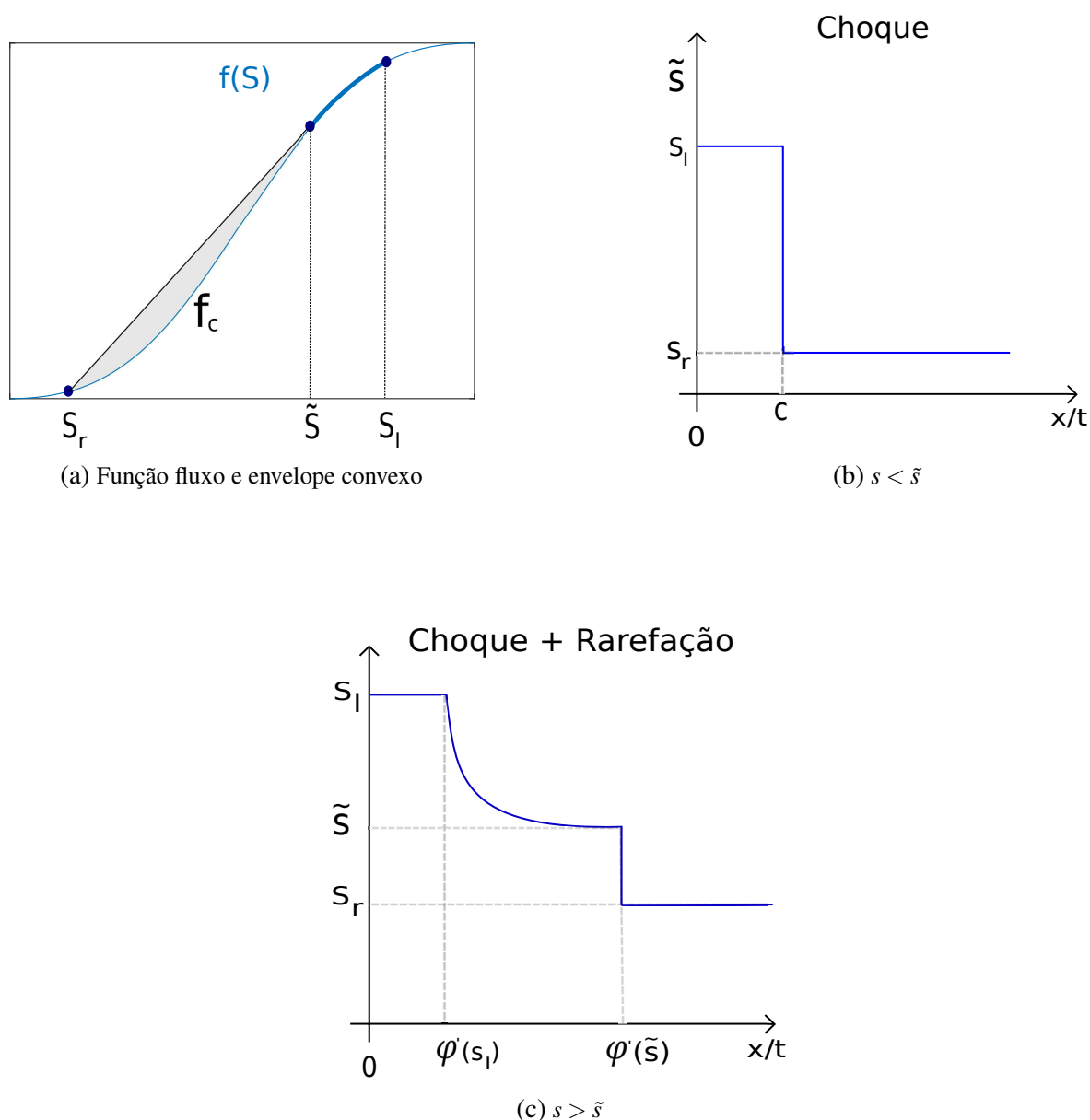


Figura 7 – Estudo da solução da saturação para diferentes valores de s_l e s_r

Para estudar as ordens empíricas dos métodos numéricos, são considerados diferentes problemas unidimensionais (1D) e bidimensionais (2D) avaliados para as normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$, permitindo assim observar diversos comportamentos da solução da equação de Buckley-Leverett e da precisão dos métodos.

2.3.1 Problema 1D com condição inicial suave

Em problemas com solução suave os métodos numéricos alcançam sua ordem formal de convergência. Porém, neste caso é apresentado um problema unidimensional cuja solução é inicialmente suave e desenvolve uma onda de choque. Dessa forma, a equação de Buckley-Leverett unidimensional é dada por

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi(s)v)}{\partial x} = 0. \quad (2.39)$$

Para este caso considera-se o domínio $\Omega = (0, 1)$ com um campo de velocidade constante $v = 1$, razão de viscosidade $M = 10$ e a seguinte condição inicial

$$s(x, t = 0) = 0.45\text{sen}(2\pi x) + 0.5, \quad (2.40)$$

com condição de contorno periódica.

A Figura 8 mostra o desenvolvimento da solução até o tempo $t = 0.05$, sendo que possível observar o aparecimento da onda de choque. Para calcular a ordem empírica de convergência para cada tempo t foi considerada uma malha de referência (10000 células - malha fina) e malhas de com 25, 50, ... células.

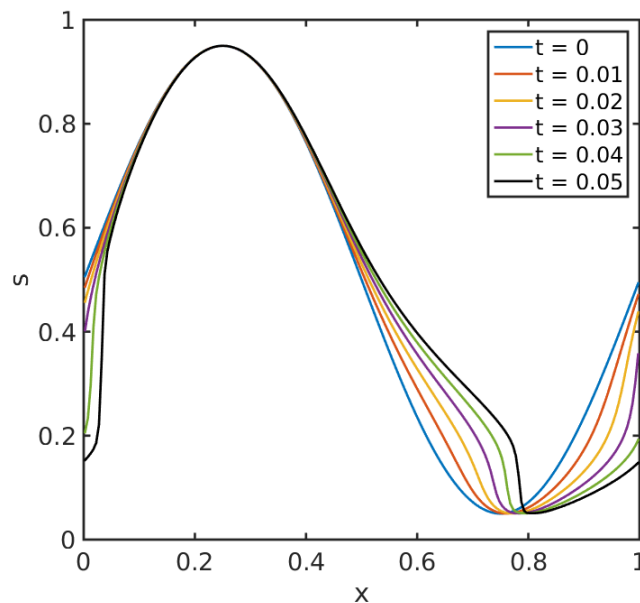


Figura 8 – Saturação da água - problema com condição inicial suave

Considerando o tempo final $t = 0.05$, calculou-se as ordens de convergência para as normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$, conforme apresentado na Figura 9. Assim, pela Figura 9a é possível observar que para a norma $L^1(\Omega)$ todos os métodos numéricos apresentam ordem empírica $O(h)$. Uma vez que as ordens são iguais, a precisão pode ser comparada observando os valores da norma do erro.

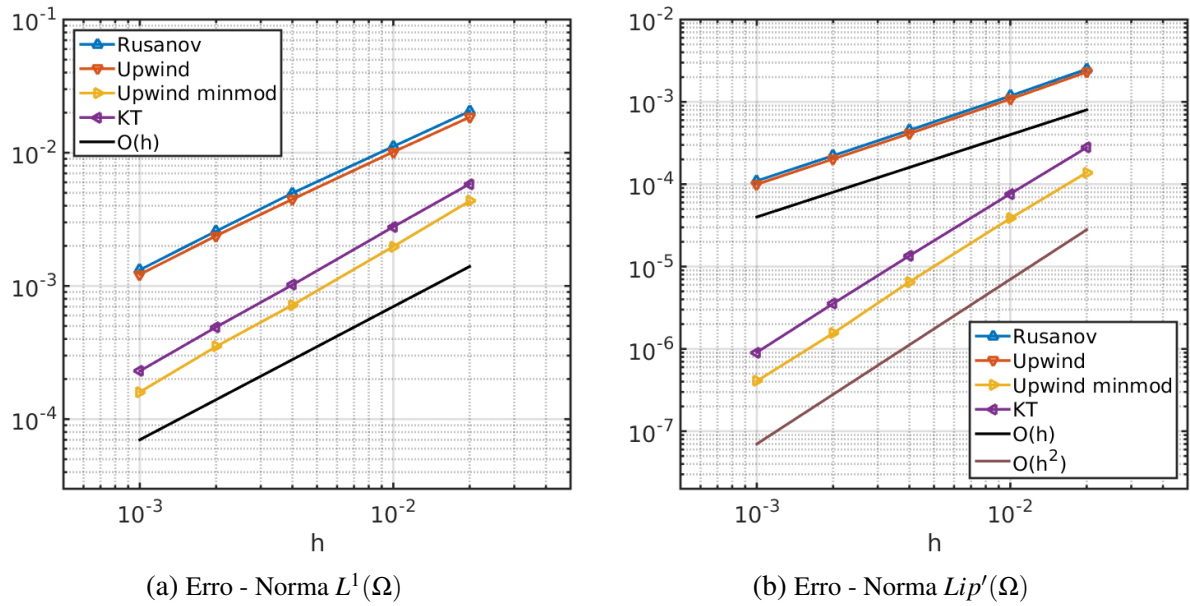


Figura 9 – Ordens de convergência nas normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$ - tempo final $t = 0.05$.

Já para norma $Lip'(\Omega)$, os métodos upwind com reconstrução constante e Rusanov apresentam ordem empírica $O(h)$, assim como esperado quando comparados com suas respectivas ordens formais. Para os métodos upwind com reconstrução linear *minmod* e Kuragonv-Tadmor, as ordens empíricas são $O(h^2)$, como pode ser visto na Figura 9b.

Dessa forma, é interessante avaliar as ordens empíricas dos métodos numéricos antes e depois do choque. A Tabela 3 mostra os resultados para upwind e upwind *minmod* nas normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$, sendo possível observar que até o tempo $t = 0.03$ as ordens empíricas são $O(h)$ e $O(h^2)$ em ambas as normas, conforme a ordem formal.

Em torno da aparição do choque em $t \approx 0.035$, a ordem do método upwind com reconstrução linear na norma $L^1(\Omega)$ cai para primeira ordem, ou seja, a mesma ordem apresentada pelo método upwind com reconstrução constante. No entanto, a maior ordem do método upwind *minmod* sobre o upwind não é totalmente destruída com a aparição do choque, sendo que permanece quando a convergência é medida na norma $Lip'(\Omega)$.

Método \ tempo	0.01	0.015	0.02	0.025	0.03	0.035	0.04	0.045	0.05
upwind- $L^1(\Omega)$	1.02	1.02	1.02	1.00	0.99	0.95	0.91	0.89	0.92
upwind- $Lip'(\Omega)$	1.07	1.07	1.10	1.12	1.07	0.99	1.03	1.05	1.05
upwind minmod- $L^1(\Omega)$	1.97	1.96	1.94	1.85	1.72	1.50	1.15	1.03	1.05
upwind minmod- $Lip'(\Omega)$	2.00	1.99	1.99	2.00	2.15	1.49	1.82	1.89	1.90

Tabela 3 – Ordens de convergência dos métodos upwind e upwind *minmod* para diferentes tempos.

Já a Tabela 4 mostra os resultados para os métodos Rusanov e KT, sendo as ordens empíricas medidas nas normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$. Assim como para os métodos upwind, a ordem

do método KT é destruída na norma $L^1(\Omega)$ com a aparição da onda de choque. Porém, essa ordem é recuperada quando a convergência é calculada na norma $Lip'(\Omega)$.

Método \ tempo	0.01	0.015	0.02	0.025	0.03	0.035	0.04	0.045	0.05
Rusanov- $L^1(\Omega)$	1.00	1.00	1.00	0.98	0.97	0.93	0.89	0.88	0.91
Rusanov- $Lip'(\Omega)$	1.05	1.07	1.09	1.10	1.05	0.92	1.02	1.04	1.04
KT- $L^1(\Omega)$	1.99	1.97	1.93	1.86	1.74	1.54	1.18	1.07	1.08
KT- $Lip'(\Omega)$	2.03	2.02	2.01	2.01	2.27	1.50	1.85	1.90	1.91

Tabela 4 – Ordens de convergência dos métodos Rusanov e KT para diferentes tempos.

2.3.2 Problema de Riemann 1D

Como discutido anteriormente, se $s_r = 0$ pode-se observar a transição de um problema de puro choque, quando $0 < s_l < \tilde{s}$, a outro com uma combinação de choque e rarefação para $s_l > \tilde{s}$. Considera-se o domínio $\Omega = (0, 1)$ com campo de velocidade constante $v = 1$ e razão de viscosidade $M = 10$, que resulta em $\tilde{s} = 0.3015$ pela equação (2.38).

A condição inicial é dada por

$$s(x, t = 0) = \begin{cases} s_l, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (2.41)$$

em que foram realizadas diversas simulações do problema com valores de s_l entre 0.1 e 1.

A Tabela 5 mostra os resultados das ordens empíricas dos métodos Rusanov e KT, calculada para várias malhas. As ordens de convergência para o método de Kurganov-Tadmor são consistentes até $s_l = 0.3$, em que a ordem é $O(h)$ na norma $L^1(\Omega)$ e $O(h^2)$ na norma $Lip'(\Omega)$.

Porém, para $s_l > 0.3015$, ou seja, quando a solução contém uma onda de rarefação, a ordem empírica se mantém $O(h)$ para a norma $L^1(\Omega)$ e cai para $O(h)$ na norma $Lip'(\Omega)$. Dessa forma, a presença de rarefações faz com que haja uma redução na ordem do método KT.

Método \ s_l	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Rusanov- $L^1(\Omega)$	1.00	0.99	0.93	0.88	0.87	0.87	0.86	0.86	0.87	0.89
Rusanov- $Lip'(\Omega)$	1.01	1.00	0.98	0.95	0.94	0.93	0.93	0.96	0.96	0.96
KT- $L^1(\Omega)$	1.05	1.03	0.95	0.89	0.89	0.89	0.89	0.89	0.90	0.91
KT- $Lip'(\Omega)$	2.00	2.01	1.71	1.10	1.07	1.06	1.05	1.05	1.05	1.05

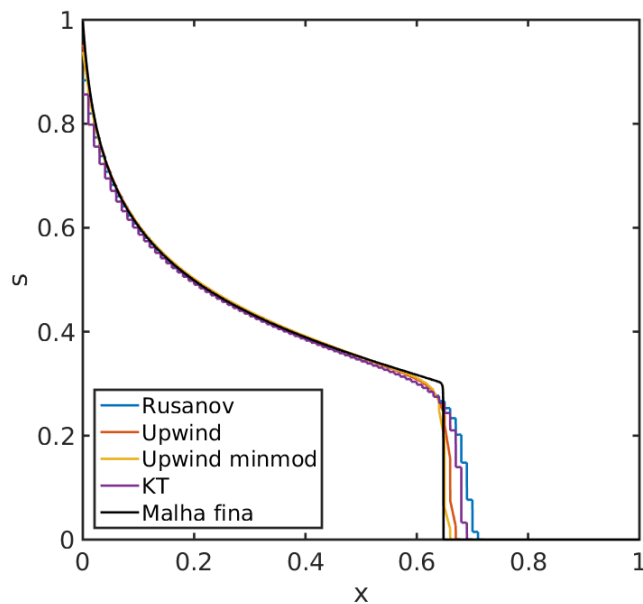
Tabela 5 – Ordens de convergência dos métodos Rusanov e KT para diferentes escolhas de s_l .

O mesmo ocorre quando os métodos upwind com reconstrução constante e linear são comparados, como pode ser observado na Tabela 6. Com as ordens iguais, a precisão dos métodos numéricos podem ser comparada observando os valores das normas do erro.

Método \ s_l	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
upwind- $L^1(\Omega)$	1.01	1.00	0.94	0.88	0.88	0.88	0.87	0.87	0.88	0.90
upwind- $Lip'(\Omega)$	1.02	1.01	1.00	0.97	0.97	0.95	0.96	0.96	0.97	0.97
upwind minmod- $L^1(\Omega)$	1.01	1.00	0.93	0.87	0.87	0.88	0.85	0.85	0.87	0.90
upwind minmod- $Lip'(\Omega)$	1.99	1.98	1.70	0.93	0.92	0.92	0.92	0.91	0.92	0.91

Tabela 6 – Ordens de convergência dos métodos upwind e upwind minmod para diferentes escolhas de s_l .

Assim, considerando $s_l = 0.1$ e tempo final $t = 0.15$ é possível observar na Figura 10 que os métodos upwind *minmod* e KT aproximam melhor a solução da saturação da água. Essa melhora ocorre principalmente na região do choque, já que existe uma onda de rarefação que se inicia em $x = 0$ e se conecta com um choque em $x = 0.65$.

Figura 10 – Aproximação da solução com os métodos upwind, upwind *minmod*, Rusanov e KT

As Figuras 11a e 11b mostram as convergências dos métodos numéricos para as normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$, respectivamente. Em ambas as normas os métodos apresentam ordem empírica $O(h)$ de convergência, já que a solução apresenta onda de rarefação e isso faz com as ordens dos métodos de $O(h^2)$ não sejam respeitadas. Além disso, como as ordens dos métodos são iguais, a precisão pode ser comparada observando os valores da norma do erro.

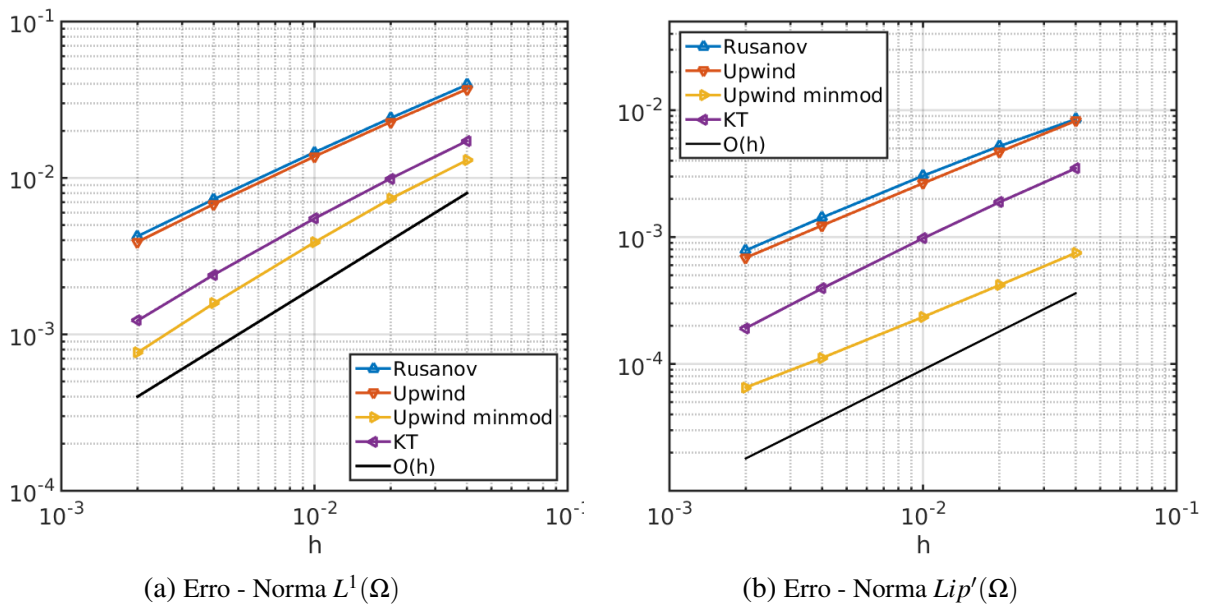


Figura 11 – Ordens de convergência nas normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$ - tempo final $t = 0.05$.

2.3.3 Problema 1D - limitadores de fluxo

Com a finalidade de testar os limitadores de fluxo minmod, superbee e MC, considera-se os métodos numéricos de upwind com reconstrução linear e Kuraganov-Tadmor. Dessa forma, é possível realizar comparações quanto a solução numérica da saturação da água e das ordens numéricas nas normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$. Seja $\Omega = (0, 1)$ o domínio com um campo de velocidade constante $v = 1$ e razão de viscosidade $M = 1$. A condição inicial é o problema de Riemann (2.41) com $s_l = 1$.

A Figura 12 mostra os resultados das aproximações dos métodos KT e upwind com os limitadores minmod, superbee e MC no tempo $t = 0.6$. Observa-se que para esses casos os resultados são similares.

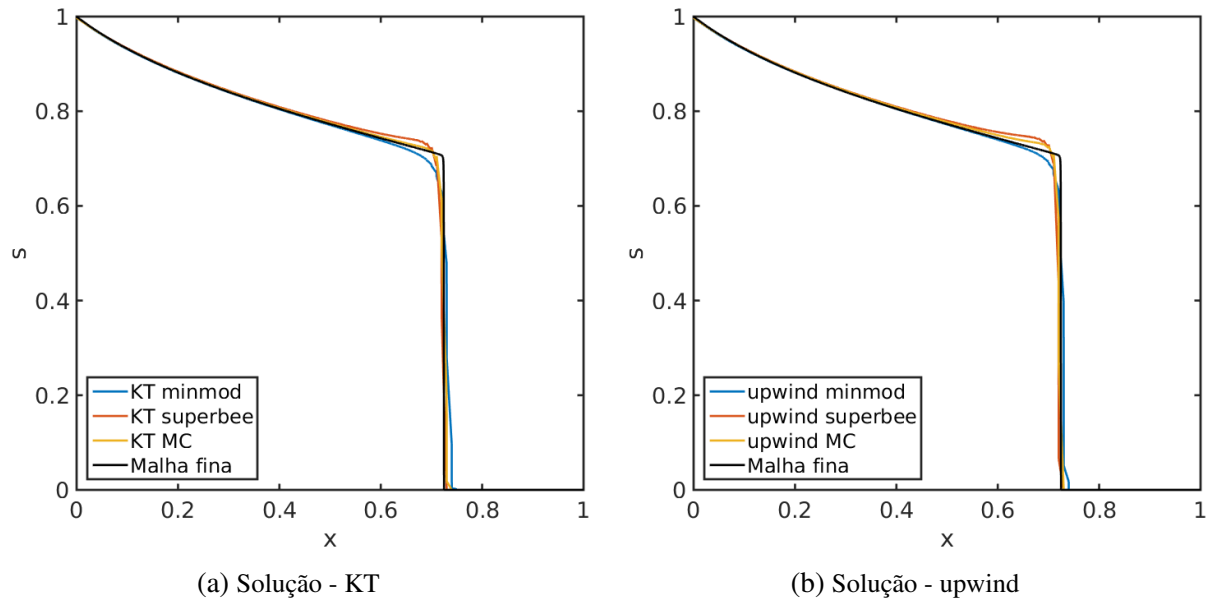


Figura 12 – Aproximação das soluções dos métodos KT e upwind para diferentes limitadores

Afim de avaliar as ordens empíricas dos métodos com reconstrução linear, a Figura 13 mostra os resultados para a norma $L^1(\Omega)$.

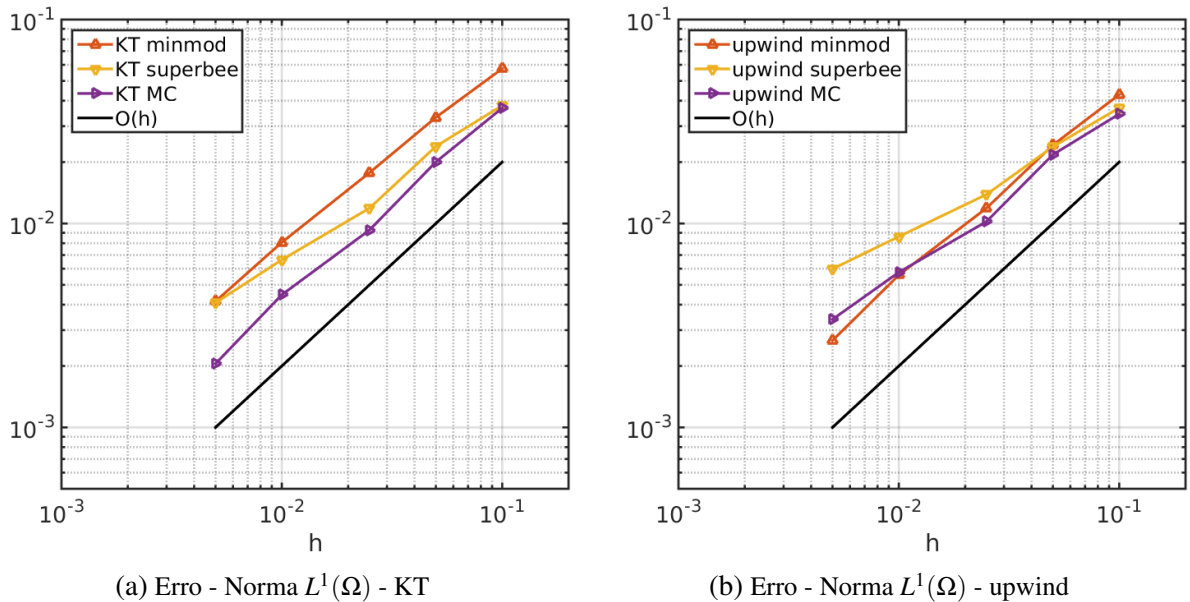


Figura 13 – Ordens de convergência na norma $L^1(\Omega)$ - KT e upwind para diferentes limitadores

Nota-se que para o método KT com os diferentes limitadores obtém-se ordem empírica $O(h)$, já para o upwind com os limitadores superbee e MC as ordens são um pouco menores que um.

Para a norma $Lip'(\Omega)$, todos os limitadores utilizados na reconstrução linear para o

método Kurganov-Tadmor apresentam $O(h)$, sendo que superbee e MC com o método upwind possuem ordem empírica menor do que 1. O mesmo não ocorre com upwind juntamente com o limitador minmod, apresentando $O(h)$.

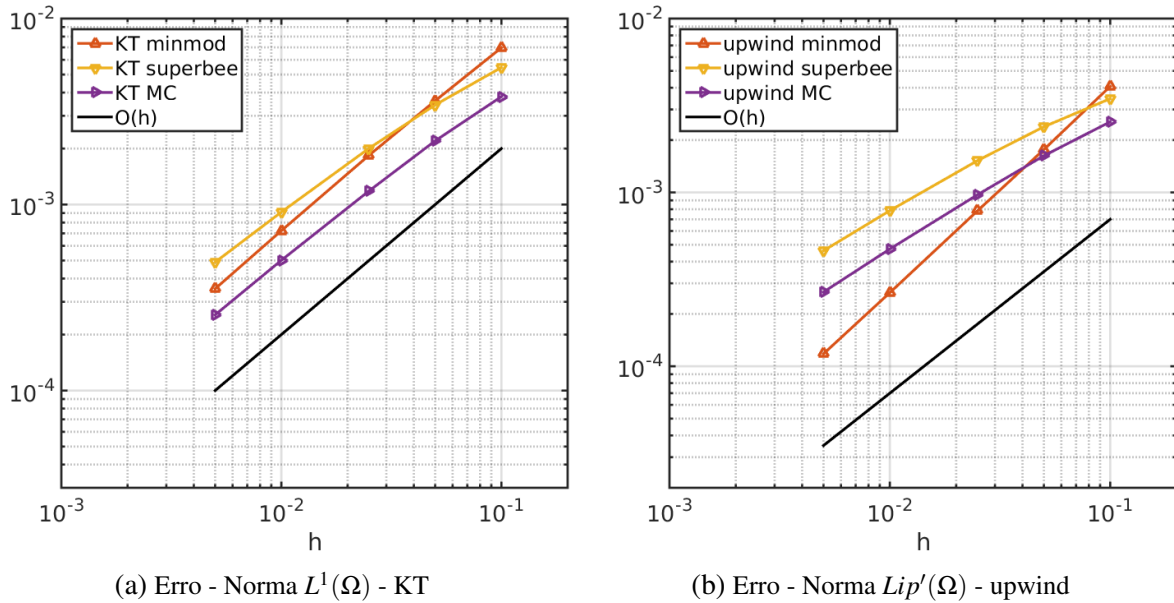


Figura 14 – Ordens de convergência na norma $Lip'(\Omega)$ - KT e upwind para diferentes limitadores

A tabela 7 mostra as ordens empíricas do método Kurganov-Tadmor com os diferentes limitadores utilizados para a reconstrução linear, tanto na norma $L^1(\Omega)$ como para a norma $Lip'(\Omega)$. A malha fina utilizada como referência possui 10000 células computacionais.

h	KT minmod		KT superbee		KT MC	
	$L^1(\Omega)$	$Lip'(\Omega)$	$L^1(\Omega)$	$Lip'(\Omega)$	$L^1(\Omega)$	$Lip'(\Omega)$
1/10	-	-	-	-	-	-
1/20	0.79	0.95	0.67	0.67	0.88	0.79
1/40	0.90	0.97	1.00	1.11	0.90	0.85
1/100	0.86	1.02	0.64	0.86	0.80	0.94
1/200	0.96	1.04	0.70	0.90	1.12	0.97

Tabela 7 – Ordens de convergência nas normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$ - KT com diferentes limitadores

Já a tabela 8 mostra as ordens do método upwind com os limitadores minmod, superbee e *monotonized central* (MC) para ambas as normas.

N	upwind minmod		upwind superbee		upwind MC	
	$L^1(\Omega)$	$Lip'(\Omega)$	$L^1(\Omega)$	$Lip'(\Omega)$	$L^1(\Omega)$	$Lip'(\Omega)$
1/10	-	-	-	-	-	-
1/20	0.82	1.21	0.63	0.54	0.67	0.65
1/40	1.03	1.17	0.78	0.65	1.09	0.75
1/100	0.83	1.18	0.52	0.72	0.63	0.79
1/200	1.07	1.17	0.53	0.77	0.77	0.83

Tabela 8 – Ordens de convergência nas normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$ - upwind com diferentes limitadores

Com esses estudos dos problemas unidimensionais, foi possível observar como as ondas de choque e rarefação influenciam no cálculo da ordem para os diferentes métodos numéricos utilizados, sendo que para o caso em que havia apenas a presença de choque, os métodos numéricos cuja ordem formal é $O(h^2)$, sofriam com a redução da mesma ao considerar a norma $L^1(\Omega)$. Porém, quando as ordens eram calculadas com a norma $Lip'(\Omega)$, as mesmas eram recuperadas, mostrando que a ordem empírica estava de acordo com a ordem formal.

Para o caso em que ocorria a presença das ondas de choque e rarefação, os métodos de alta ordem sofrem com a redução da ordem empírica, mesmo com a utilização da norma $Lip'(\Omega)$. Com isso, pelos estudos realizados observa-se que a onda de rarefação é a responsável por ocorrer essa queda de ordem nos métodos numéricos do tipo upwind com reconstrução linear por partes e o Kurganov-Tadmor.

Além disso, com os estudos dos métodos de alta ordem para os diferentes limitadores de fluxo, foi possível perceber que os resultados das ordens de convergência, tanto para a norma $L^1(\Omega)$ como para a norma $Lip'(\Omega)$, podem sofrer algumas variações, ou seja, acabam aproximando melhor a solução. Dessa forma, para os próximos problemas os métodos de alta ordem que utilizam a reconstrução linear por partes será realizado com o limitador *minmod*

2.3.4 Problema 2D homogêneo

Para o caso bidimensional a equação de Buckley-Leverett é dada por

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial(f(s)v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(f(s)v_y)}{\partial y} = 0, \quad (2.42)$$

em que v_x e v_y representam as velocidades nas direções x e y , respectivamente. Considera-se um problema do tipo *quarter five-spot* com domínio $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ e um campo de permeabilidade homogêneo, sendo que a injeção da saturação da fase água é constante, $s = 1$, realizada no canto inferior esquerdo do domínio com coordenadas em $x = 0$ e $y = 0$. Além disso, para a condição inicial, considera-se que o domínio apresenta apenas a fase óleo, ou seja, $s = 0$. A produção ocorre no canto superior direito, em $x = 1$ e $y = 1$, sendo que as velocidades v_x e v_y são constantes durante toda a simulação.

A Figura 15a ilustra a saturação numérica da água calculada no tempo $t = 0.35$. Com a finalidade de determinar a ordem empírica de convergência considera-se uma malha fina de referência com 640×640 células computacionais. Assim, na Figura 15b é possível observar que tanto os métodos com reconstrução constante (upwind e Rusanov) como os métodos com reconstrução linear (upwind *minmod* e Kuragonv-Tadmor) apresentam ordem empírica $O(h)$, sendo que para esse exemplo tem-se a presença das ondas de choque e rarefação. Além disso, a precisão dos métodos numéricos pode ser comparada observando os valores da norma do erro.

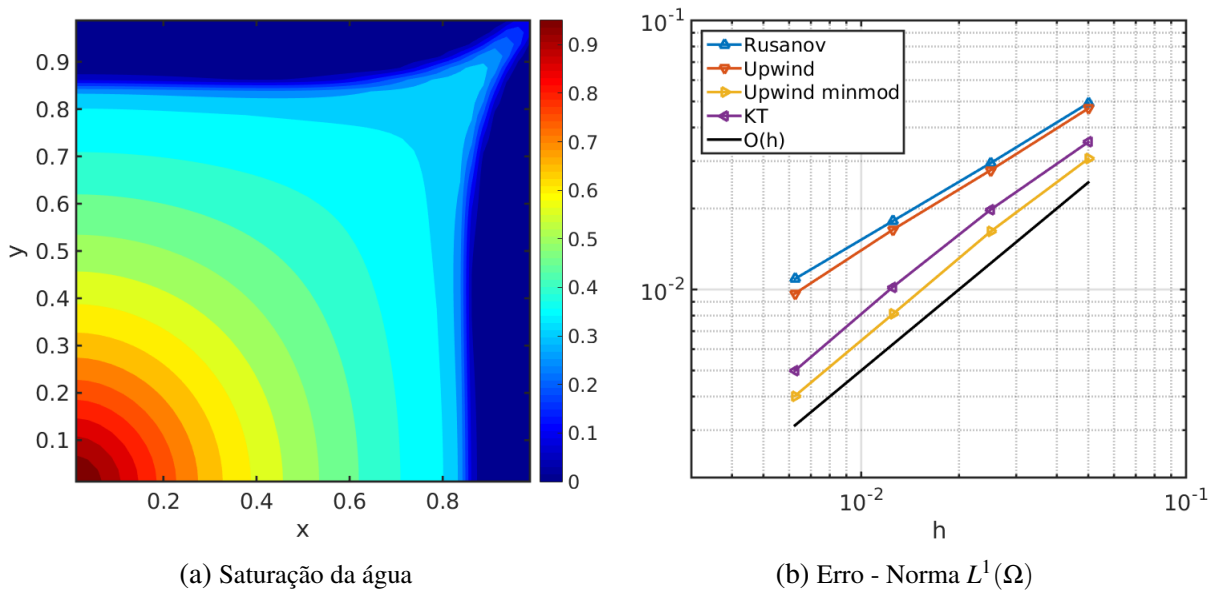


Figura 15 – Perfil de saturação no tempo $t = 0.35$ e estudo da convergência na norma $L^1(\Omega)$

Dessa forma, através desse caso foi possível observar que assim como o caso unidimensional, a solução apresenta ondas de rarefação e choque, sendo que a ordem empírica dos métodos de alta ordem é $O(h)$. Outra fator importante a ser destacado é o fato da utilização apenas da norma $L^1(\Omega)$, já que a norma $Lip'(\Omega)$ não é definida para casos bidimensionais. Além disso, para esse teste é importante ressaltar que o mesmo apresenta uma configuração mais simples pelo fato de ter um campo de permeabilidade homogêneo.

2.3.5 Problema 2D heterogêneo - alto contraste

Para esse problema bidimensional é considerado um domínio $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ com um campo de permeabilidade heterogêneo de alto contraste, representado em escala logarítmica na Figura 16a. Dessa forma, a partir do campo permeabilidade é possível obter o campo de velocidade correspondente, Figura 16b, sendo que as cores referem-se à magnitude da velocidade.

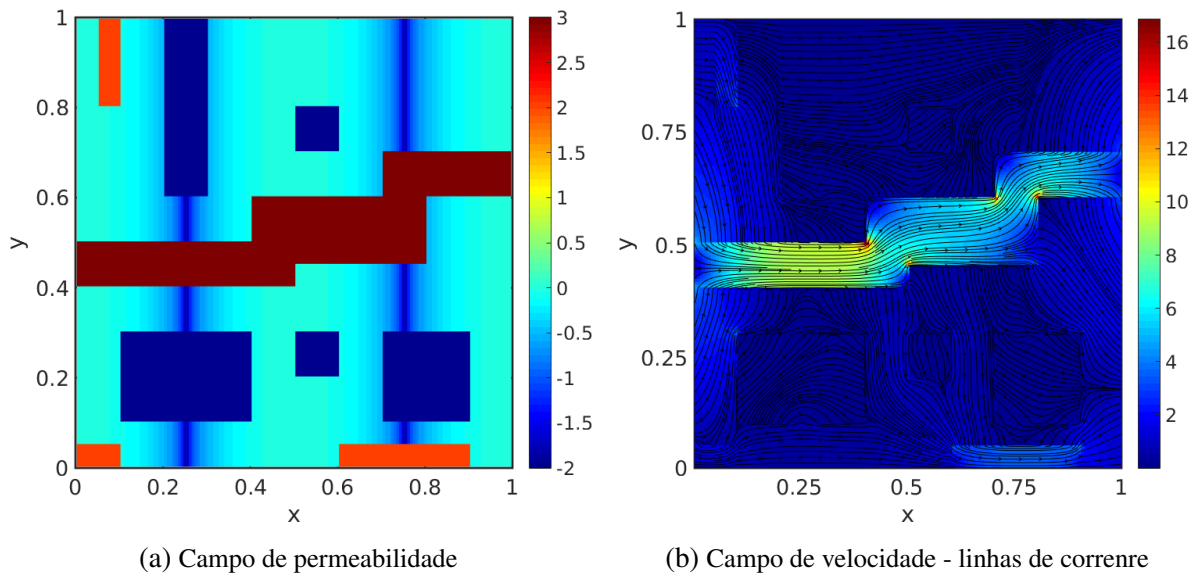


Figura 16 – Campo de permeabilidade em escala logarítmica e linhas de corrente - alto contraste

A condição de contorno considera injeção de água constante em toda a fronteira esquerda, em $x = 0$. A Figura 17a ilustra a saturação numérica da água calculada para o tempo $t = 0.5$, sendo que o estudo de convergência considera uma solução de referência calculada em uma malha fina com 640×640 células computacionais.

Na Figura 17b observa-se que os métodos com reconstrução contante, upwind e Rusanov, apresentam ordem empírica de $O(h^{1/2})$, enquanto que os métodos com reconstrução linear, upwind minmod e Kurganov-Tadmor, apresentam ordem compatível com $O(h)$. Os resultados mostram que a solução numérica para a saturação se mantém entre 0 e 1, sem valores espúrios fora dos limites do problema.

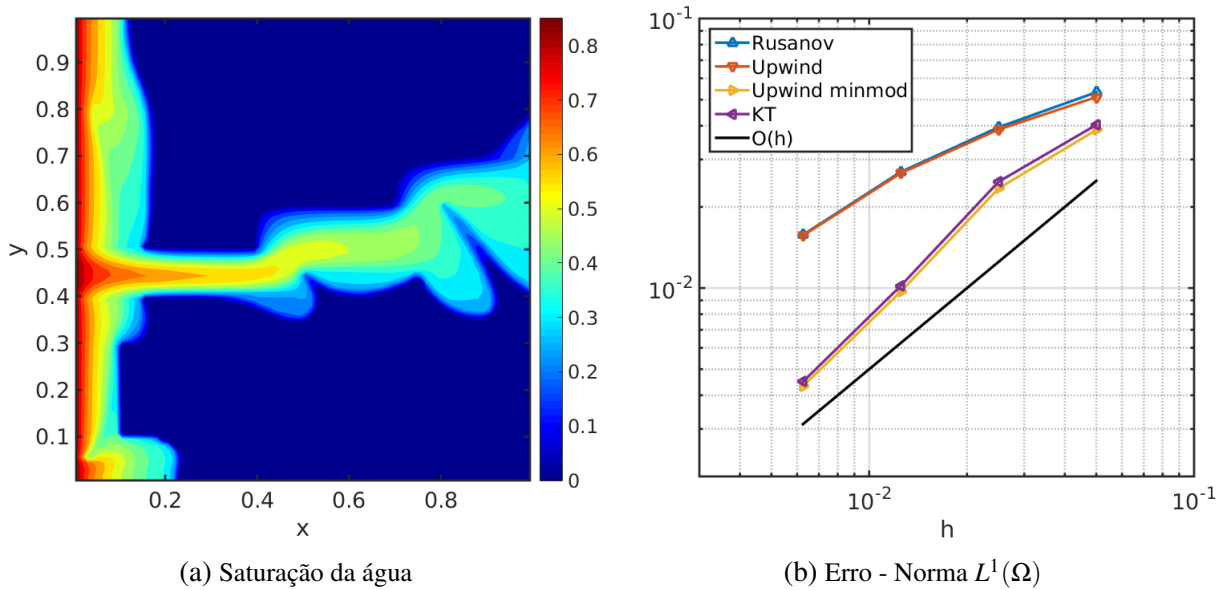


Figura 17 – Perfil de saturação no tempo $t = 0.5$ e estudo da convergência na norma $L^1(\Omega)$

Neste caso, pelo fato do campo de permeabilidade ser heterogêneo e de alto contraste, os métodos cuja ordem formal é $O(h)$ apresentam uma redução importante da ordem empírica, sendo que o mesmo não ocorre com os métodos de alta ordem, que naturalmente ficam com $O(h)$ pelo fato da solução apresentar onda de rarefação e choque. Observa-se também que o escoamento segue pelo canal de alta permeabilidade, evitando as regiões de baixa permeabilidade.

2.3.6 Problema 2D heterogêneo - SPE10

Considera-se o domínio $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ com um campo de permeabilidade de alto contraste do SPE10 - camada 44, representado em escala logarítmica na Figura 18a. O campo de velocidade correspondente obtido está representado na Figura 18b, sendo que as cores referem-se à magnitude da velocidade.

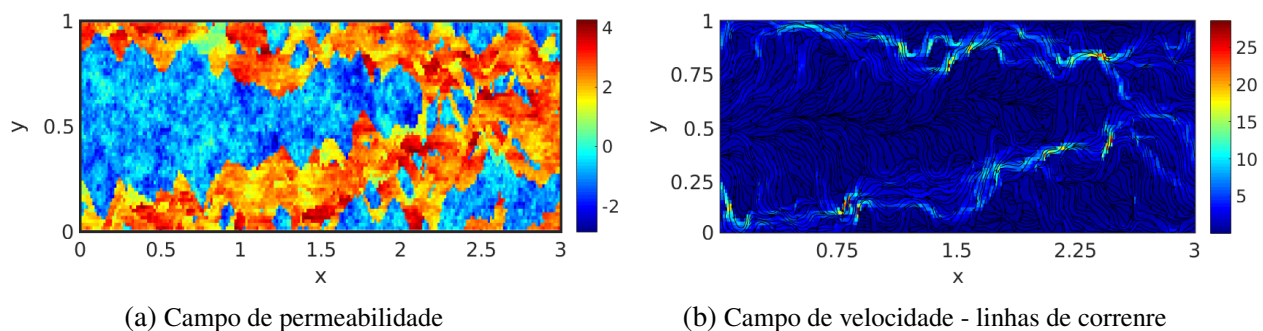


Figura 18 – Campo de permeabilidade em escala logarítmica e linhas de corrente - SPE10

A saturação numérica da água é calculada em $t = 1.0$, Figura 19. É importante observar que a injeção e produção do fluido ocorre em toda a fronteira esquerda e direita, respectivamente,

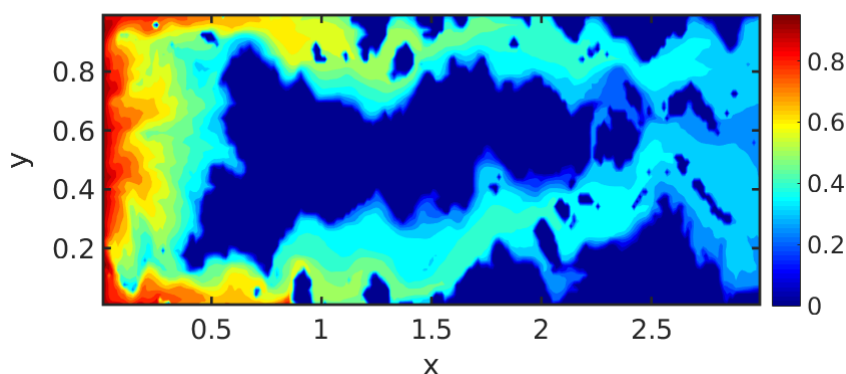


Figura 19 – Perfil de saturação da água no tempo $t = 1.0$

Assim como observado anteriormente, o escoamento tende a seguir os canais de alta permeabilidade que são bem destacados na Figura 18a, evitando assim a região central do campo pelo fato de apresenta baixa permeabilidade. É através dessas canais que água será responsável por empurrar o óleo presente no reservatório.

Assim, com a equação hiperbólica de Buckley-Leverett para um escoamento bifásico em meio poroso e os métodos numéricos upwind com reconstrução constante e linear, Rusanov e Kurganov-Tadmor foi possível realizar comparações da ordem e solução numérica da saturação para diferentes problemas. Nos casos unidimensionais observa-se claramente que as ordens empíricas dos métodos de maior ordem, quando avaliadas na norma $L^1(\Omega)$, apresentam $O(h)$. Porém, são as ordens desses métodos são recuperadas quando a norma $Lip^1(\Omega)$ é considerada. Já para casos em que há presença de rarefação, todos os métodos apresentam ordem empírica $O(h)$ independente da norma escolhida, sendo que a avaliação dos métodos consiste na aproximação da solução e dos valores das normas do erro.

O mesmo ocorre para problemas bidimensionais, sendo que métodos de ordem formal $O(h)$ na verdade apresentam ordem empírica $O(h^{1/2})$, enquanto que métodos de ordem formal $O(h^2)$ apresentam ordem empírica $O(h)$, como é o caso do método upwind com reconstrução linear e do Kurganov-Tadmor. Dessa forma, esses métodos podem ser escolhidos para a aplicação em campos de permeabilidade com alto contraste, como é o caso da camada 44 presente no SPE10.

Com isso, é possível estender esse estudo para escoamentos trifásicos considerando a equação de Buckley-Leverett, sendo que o mesmo apresentará três fases: água, óleo e gás. Dessa maneira, a intenção desse estudo será compreender o modelo que descreve as equações e comparar os métodos numéricos com e sem reconstrução linear, observando as ordens de convergência através das normas $L^1(\Omega)$ e $Lip^1(\Omega)$. Além dos casos unidimensionais serão considerados também os casos bidimensionais.

2.4 Modelo para escoamentos trifásicos

A equação de Buckley-Leverett pode descrever também um escoamento trifásico incompressível em meio poroso (JUANES; PATZEK, 2003b), sendo este de grande importância na extração do petróleo, assim como o caso bifásico. Esse modelo é composto por água (w), gás (g) e óleo (o). Além disso, considera-se que os fluidos são imiscíveis, não há efeitos gravitacionais e das pressões capilares e não há a presença de termo fonte. A ausência de forças capilares faz com que essa formulação seja reduzida a um sistema de duas leis de conservação baseadas em conservação de massa e lei de Darcy. É importante ressaltar que a lei de Darcy necessita dos dados da permeabilidade relativa, que descreve a taxa volumétrica do fluxo de cada fase na presença de outras fases.

Considera-se um meio poroso totalmente saturado, de forma que

$$s_w + s_g + s_o = 1, \quad (2.43)$$

isto é, a soma das saturações é igual ao volume poroso. As equações são descritas para o caso unidimensional sem perda de generalidade, sendo a extensão para mais dimensões pode ser feita naturalmente.

Utilizando a lei de Darcy para definir a velocidade de cada fase, tem-se

$$v_\alpha = \lambda_\alpha K \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \alpha = w, g, o, \quad (2.44)$$

em que λ_α é a mobilidade de fase dada por

$$\lambda_\alpha = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \quad (2.45)$$

e $k_{r\alpha}$ as permeabilidades relativas presentes na lei de Darcy que são funções das saturações das fases, definidas por

$$k_{ro} = s_o(1 - s_g)(1 - s_w), \quad k_{rg} = s_g^2 \quad \text{e} \quad k_{rw} = s_w^2. \quad (2.46)$$

Dessa forma, a equação de conservação de massa para cada uma das fases é definida por

$$\frac{\partial s_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} = 0, \quad (2.47)$$

sendo que ignorando os efeitos da tensão superficial é possível definir uma velocidade total como a soma das velocidades em cada fase, ou seja,

$$v_t = \sum_{\alpha} v_{\alpha} = -(\lambda_w + \lambda_g + \lambda_o)K \frac{\partial p}{\partial x} = -\lambda_t K \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.48)$$

em que $\lambda_t = \lambda_w + \lambda_g + \lambda_o$.

Assim, o sistema definido pelas equações (2.43), (2.44) e (2.47) é equivalente a

$$\frac{\partial s_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f_w v_t) = 0 \quad (2.49)$$

e

$$\frac{\partial s_g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f_g v_t) = 0 \quad (2.50)$$

O fluxo fracionário é definido por

$$f_{\alpha} = \frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda_t}, \quad (2.51)$$

sendo que por consequência de (2.43), a terceira equação para a saturação do óleo pode ser desconsiderada.

As equações (2.49) e (2.50) podem ser reescritas na forma de sistema

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{f} v_t) = 0, \quad (2.52)$$

em que \mathbf{s} e \mathbf{f} são vetores dados por

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_w \\ s_g \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_w \\ f_g \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Dessa forma, define-se o sistema de equações de conservação de massa para o escoamento trifásico em meio poroso.

Com o sistema (2.52) definido, é possível realizar a análise característica. Para isso, esse sistema pode ser reescrito na forma quasilinear

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + H \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (2.54)$$

em que

$$H = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_w}{\partial s_w} & \frac{\partial f_w}{\partial s_g} \\ \frac{\partial f_g}{\partial s_w} & \frac{\partial f_g}{\partial s_g} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

é a matriz jacobiana. Analisando os termos presentes na matriz (2.55) tem-se que

$$\frac{\partial f_w}{\partial s_w} = \frac{\partial}{\partial s_w} \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_t} \right) = \frac{\frac{\partial \lambda_w}{\partial s_w} \lambda_t - \lambda_w \frac{\partial \lambda_t}{\partial s_w}}{\lambda_t^2}, \quad (2.56)$$

pela regra do quociente para o cálculo de derivadas. Assim, pelas expressões em (2.45) e (2.46)

$$\frac{\partial \lambda_w}{\partial s_w} = \lambda'_w, \quad (2.57)$$

já que λ_w depende apenas da saturação da água s_w . Além disso,

$$\frac{\partial \lambda_t}{\partial s_w} = \lambda'_w + \lambda_{o,w}, \quad (2.58)$$

sendo que λ_o é escrito em função de s_w e λ_g depende apenas da saturação da fase gás s_g . Com isso,

$$\lambda_{o,w} = \frac{\partial \lambda_o}{\partial s_w} \quad \text{e} \quad \lambda_{g,w} = 0. \quad (2.59)$$

A expressão em (2.56) pode então ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{\partial f_w}{\partial s_w} = \frac{\lambda'_w(\lambda_o + \lambda_g) - \lambda_w \lambda_{o,w}}{\lambda_t^2}. \quad (2.60)$$

De maneira análoga, os outros termos que compõem a matriz jacobiana são

$$\frac{\partial f_w}{\partial s_g} = - \frac{\lambda_w(\lambda'_g + \lambda_{o,g})}{\lambda_t^2}, \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial f_g}{\partial s_w} = - \frac{\lambda_g(\lambda'_w + \lambda_{o,w})}{\lambda_t^2}, \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial f_g}{\partial s_g} = \frac{\lambda'_g(\lambda_w + \lambda_o) - \lambda_g \lambda_{o,g}}{\lambda_t^2}, \quad (2.63)$$

em que

$$\lambda'_g = \frac{\partial \lambda_g}{\partial s_g} \quad \text{e} \quad \lambda_{o,g} = \frac{\partial \lambda_o}{\partial s_g}. \quad (2.64)$$

Assim, com todos os termos definidos a matriz jacobiana pode ser reescrita de tal forma que

$$H = \frac{1}{\lambda_r^2} \begin{bmatrix} \lambda'_w(\lambda_o + \lambda_g) - \lambda_w\lambda_{o,w} & -\lambda_w(\lambda'_g + \lambda_{o,g}) \\ -\lambda_g(\lambda'_w + \lambda_{o,w}) & \lambda'_g(\lambda_w + \lambda_o) - \lambda_g\lambda_{o,g} \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Os autovalores dessa matriz jacobiana (2.65) são

$$h_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_w}{\partial s_w} + \frac{\partial f_g}{\partial s_g} + \sqrt{\left(\frac{\partial f_w}{\partial s_w} - \frac{\partial f_g}{\partial s_g} \right)^2 + 4 \frac{\partial f_w}{\partial s_g} \frac{\partial f_g}{\partial s_g}} \right) \quad (2.66)$$

e

$$h_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_w}{\partial s_w} + \frac{\partial f_g}{\partial s_g} - \sqrt{\left(\frac{\partial f_w}{\partial s_w} - \frac{\partial f_g}{\partial s_g} \right)^2 + 4 \frac{\partial f_w}{\partial s_g} \frac{\partial f_g}{\partial s_g}} \right) \quad (2.67)$$

Dessa forma, o sistema é hiperbólica se para cada saturação s_w e s_g os dois autovalores h_1 e h_2 são reais e distintos, e a matriz jacobiana A é diagonalizável. Observa-se que os autovalores são reais quando

$$\left(\frac{\partial f_w}{\partial s_w} - \frac{\partial f_g}{\partial s_g} \right)^2 + 4 \frac{\partial f_w}{\partial s_g} \frac{\partial f_g}{\partial s_g} \geq 0. \quad (2.68)$$

Com a finalidade de estudar as soluções obtidas pelos métodos numéricos são considerados diferentes problemas unidimensionais e bidimensionais, permitindo assim avaliar as ordens empíricas para as normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$.

Conforme apresentado em (JUANES; PATZEK, 2003a) e (JUANES; PATZEK, 2003b), é possível escolher valores para as viscosidades de cada uma das fases, sendo nestes casos considerados os seguintes valores

$$\mu_w = 0.8, \quad \mu_g = 0.05 \quad \text{e} \quad \mu_o = 1. \quad (2.69)$$

Com as viscosidades definidas, é possível construir alguns problemas unidimensionais com a intenção de comparar as soluções dos métodos numéricos upwind, upwind *minmod*, Rusanov e Kurganov-Tadmor.

2.4.1 Problema de Riemann 1D - Caso 1

Para esse problema tem-se o domínio $\Omega = (0, 1)$ com um campo de velocidade constante $v = 1$, sendo que a simulação é realizada até o tempo $t = 0.3$. Considera-se um problema de Riemann dado por

$$\mathbf{s}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{s}_l, & \text{se } x < 0 \\ \mathbf{s}_r, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.70)$$

com condição inicial em que ocorre a injeção de água em um meio preenchido com óleo e gás, tal que

$$s_l = \begin{bmatrix} 0.94 \\ 0.06 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad s_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Observa-se que para a injeção são consideradas $s_w = 0.94$ e $s_g = 0.06$ para as saturações da fase água e gás, respectivamente. Além disso, o reservatório está inicialmente com $s_w = 0$, $s_g = 0.5$ e conseqüentemente pela equação de estado pode-se concluir que a saturação da fase óleo é $s_o = 0.5$. O vetor s_l referente a injeção permanece constante em toda a simulação.

A Figura 20 mostra as soluções para a saturação da fase água obtida com os métodos upwind com reconstrução linear e constante, Rusanov e Kuragnov-Tadmor.

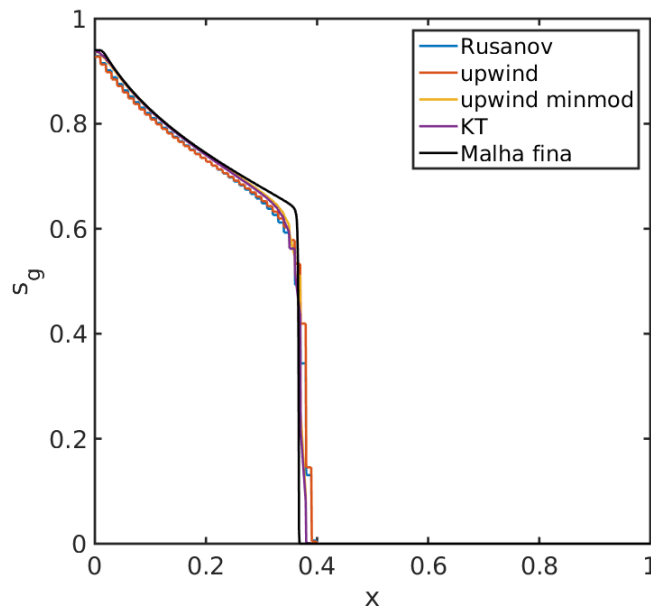


Figura 20 – Comparação de s_w para o problema trifásico - Caso 1

Observa-se que as soluções dos métodos de ordem formal $O(h^2)$ aproximam melhor a saturação da fase água quando comparados com os métodos upwind e Rusanov. Dessa forma, para analisar a ordem de convergência, considera-se uma malha fina de referência com 1000 células e assim são obtidas as Figuras 21a e 21b com as normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$, respectivamente.

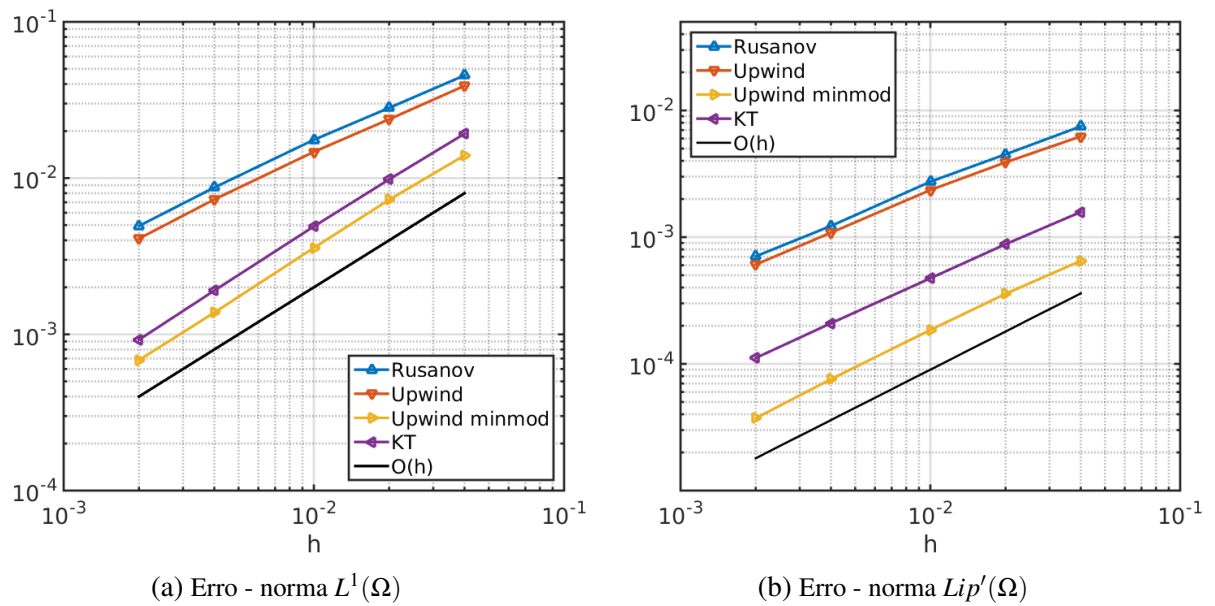


Figura 21 – Ordens de convergência de s_w para o problema trifásico - Caso 1

A Figura 20 mostra as soluções para a saturação da fase gás obtida com os métodos upwind com reconstrução linear e constante, Rusanov e Kuragnov-Tadmor.

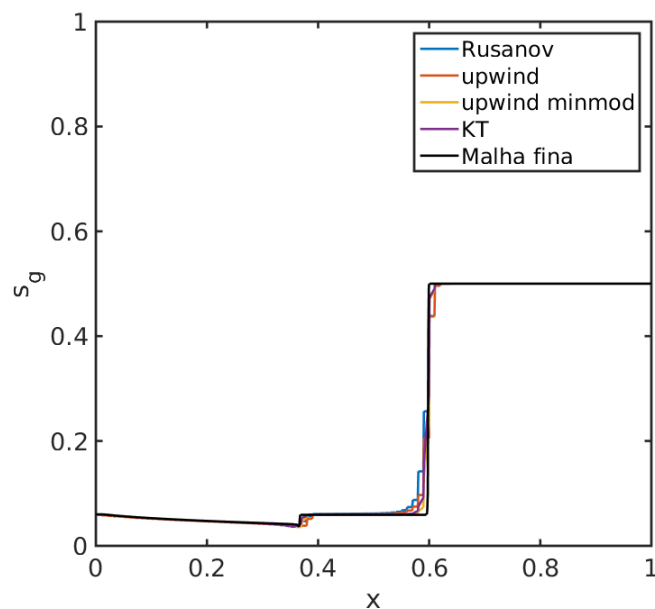


Figura 22 – Comparação de s_g para o problema trifásico - Caso 1

Como a saturação da água, observa-se que as soluções dos métodos de ordem maior aproximam melhor a saturação da fase gás quando comparados com os métodos de ordem formal $O(h)$. As Figuras 23a e 23b mostram a ordem de convergência dos métodos numéricos com as normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$, respectivamente.

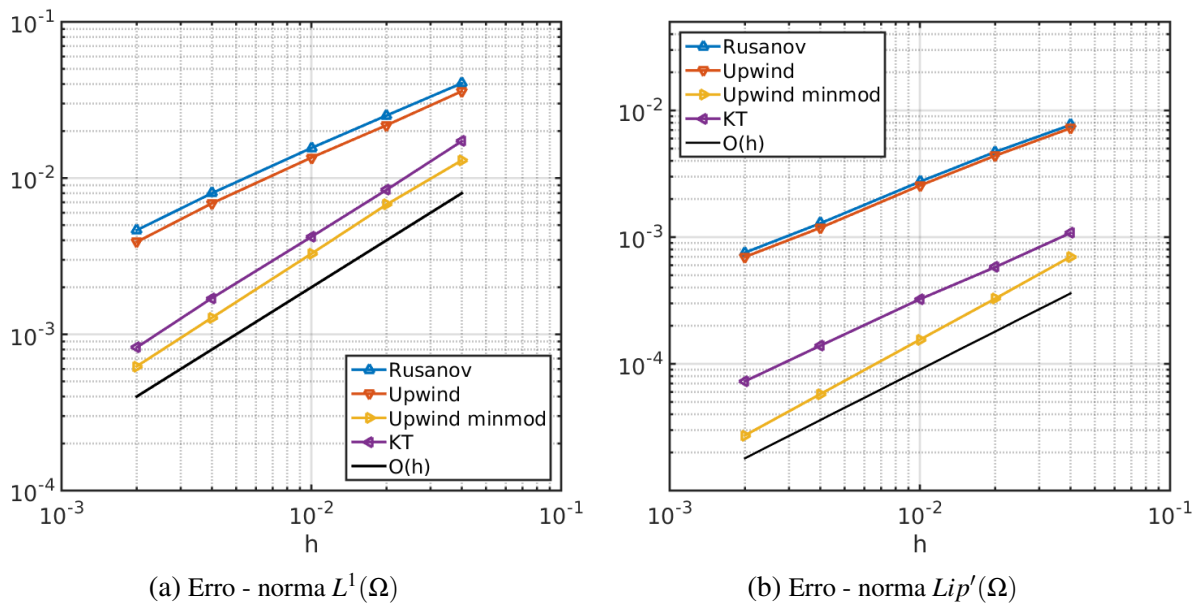


Figura 23 – Ordens de convergência de s_g para o problema trifásico - Caso 1

A Figura 24 ilustra a saturação da fase óleo s_o obtida através da equação (2.43), já que os valores para s_w e s_g são conhecidos.

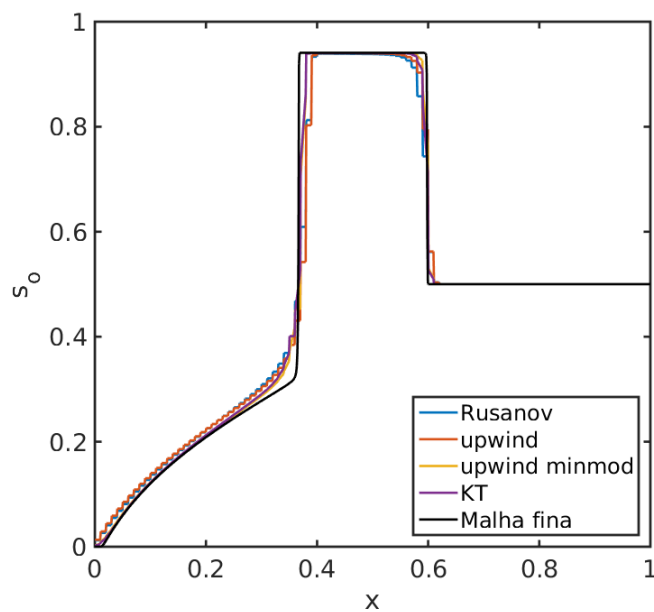


Figura 24 – Comparação de s_o para o problema trifásico - Caso 1

Assim como para as outras fases, a saturação do óleo apresenta melhores resultados com os métodos de alta ordem quando comparados com o métodos upwind com reconstrução constante e Rusanov, que apresentam ordem formal $O(h)$. Dessa forma, ao comparar os métodos através da soluções numéricas e ordens empíricas é possível observar que os métodos de ordem

formal $O(h^2)$ além de aproximarem melhor a solução, apresentam erros menores tanto na norma $L^1(\Omega)$ como na norma $Lip^1(\Omega)$. Vale observar também que os métodos de ordem formal $O(h^2)$ apresentam ordem empírica $O(h)$ devido ao problema apresentar onda de rarefação e choque, como visto nos problemas bifásicos.

2.4.2 Problema de Riemman 1D - Caso 2

Para esse problema tem-se o domínio $\Omega = (0, 1)$ com um campo de velocidade constante $v = 1$, sendo que a simulação é realizada para o tempo final $t = 0.3$. Assim, considera-se um problema de Riemann (2.70) com condição inicial em que ocorre injeção de água e gás em um meio saturado de óleo, tal que

$$s_l = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad s_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

A injeção considerada apresenta $s_w = 0.5$ e $s_g = 0.5$ para as saturações da fase água e gás, respectivamente. Além disso, o reservatório está inicialmente saturado com óleo, ou seja, $s_w = 0$, $s_g = 0$ e $s_o = 1$. O vetor s_l referente a injeção permanece constante em toda a simulação.

A Figura 26 mostra as soluções para a saturação da fase água obtida com os métodos upwind com reconstrução linear e constante, Rusanov e Kuragnov-Tadmor.

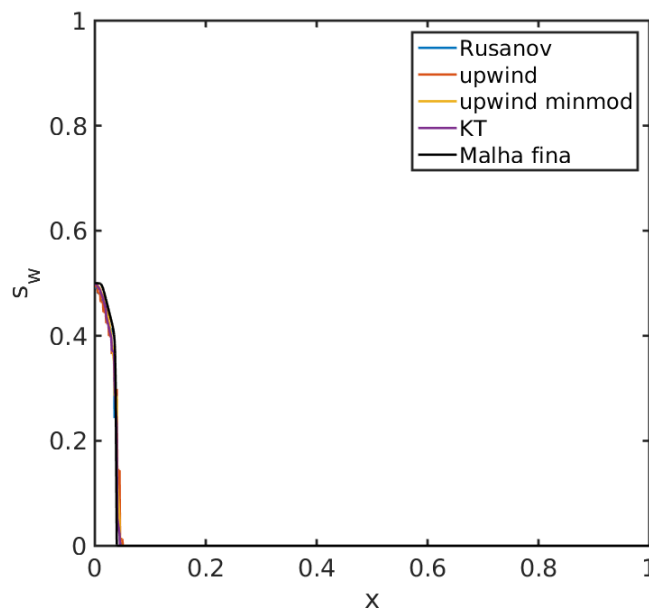


Figura 25 – Comparação de s_w para o problema trifásico - Caso 2

Observa-se que as soluções dos métodos de ordem formal $O(h^2)$ aproximam melhor a saturação da fase água quando comparados com os métodos upwind e Rusanov, com resultados

similares. Com isso, para analisar as ordens de convergência e os erros numéricos, considera-se uma malha fina de referência com 1000 células e assim são obtidas as Figuras 26a e 26b com as normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$, respectivamente.

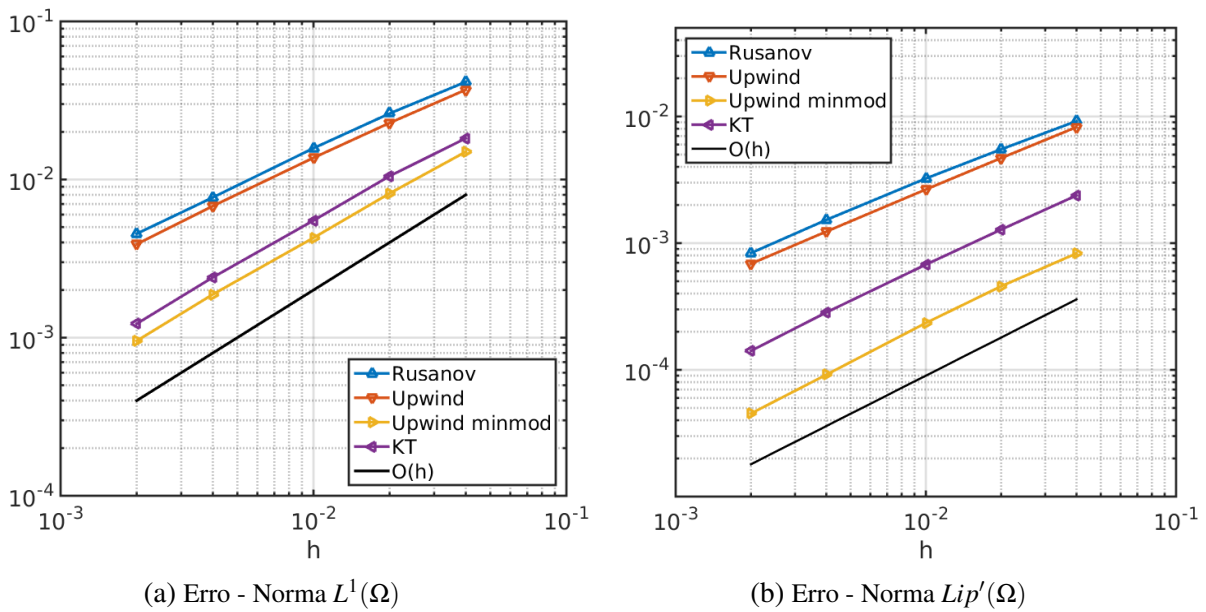


Figura 26 – Ordens de convergência de s_w para o problema trifásico - Caso 2

A Figura 27 mostra as soluções para a saturação da fase gás obtida com os métodos upwind com reconstrução linear e constante, Rusanov e Kuragnov-Tadmor.

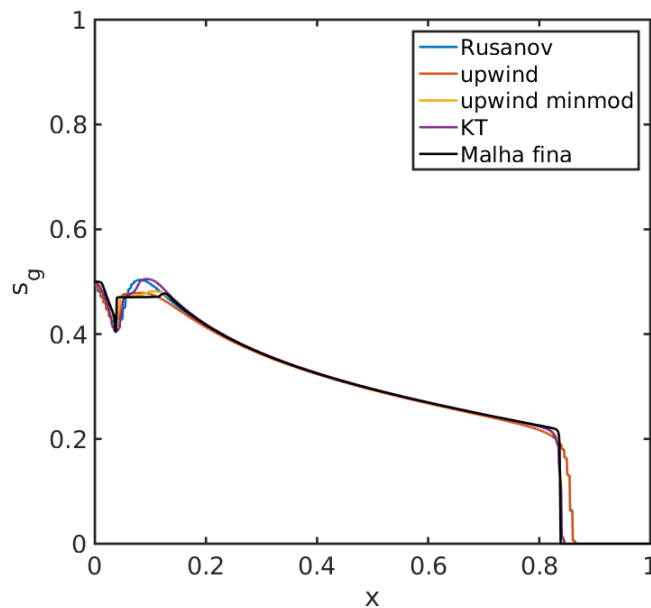


Figura 27 – Comparação de s_g para o problema trifásico - Caso 2

Nota-se que as soluções dos métodos de ordem maior aproximam melhor a saturação

da fase gás quando comparados com os métodos de ordem formal $O(h)$. As Figuras 28a e 28b mostram a ordem de convergência dos métodos numéricos com as normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$, respectivamente.

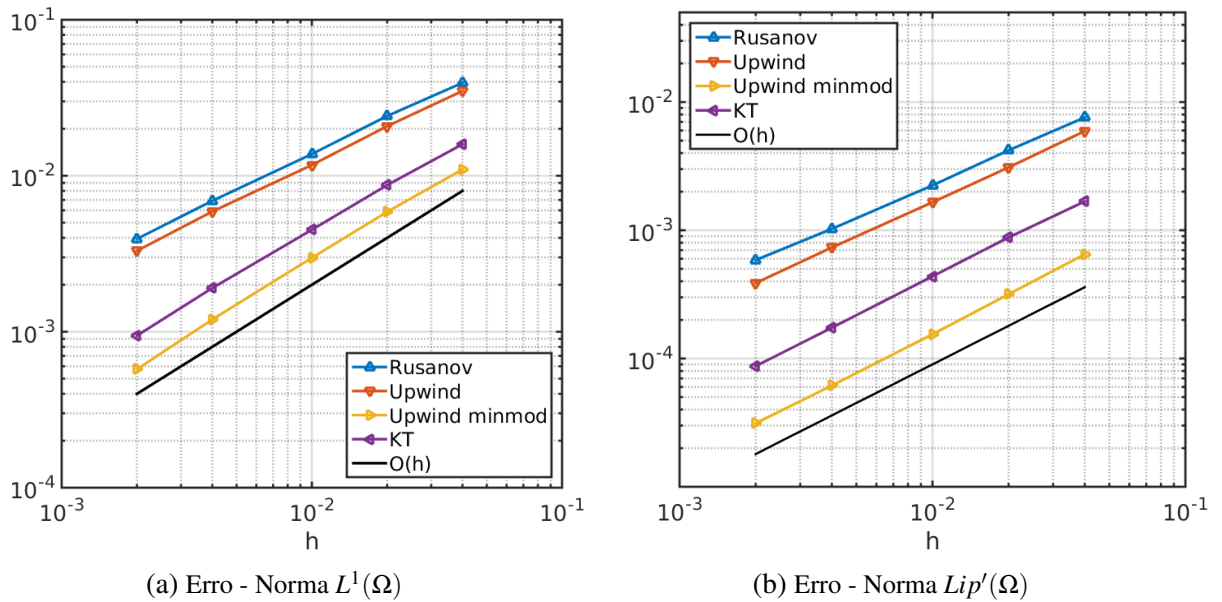


Figura 28 – Ordens de convergência de s_g para o problema trifásico - Caso 2

A Figura 29 ilustra a saturação da fase óleo s_o obtida através da equação (2.43), já que os valores para s_w e s_g são conhecidos.

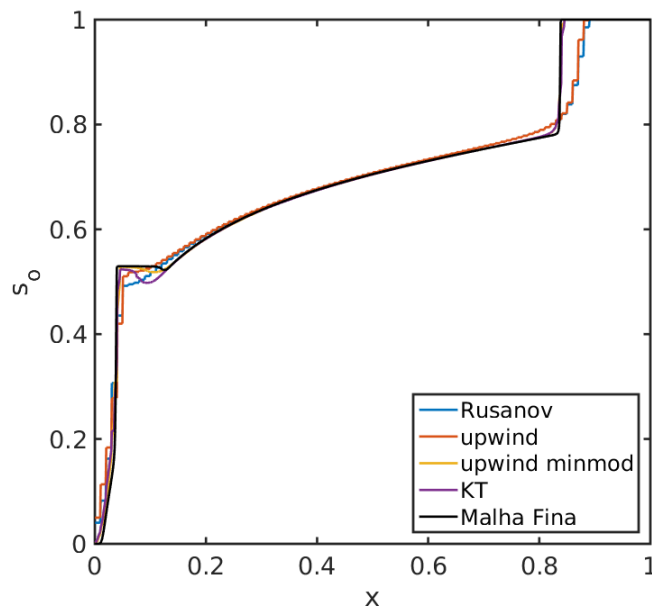


Figura 29 – Comparação de s_o para o problema trifásico - Caso 2

Assim como para as outras fases, a saturação do óleo apresenta melhores resultados

com os métodos de alta ordem quando comparados com o métodos upwind com reconstrução constante e Rusanov, que apresentam ordem formal $O(h)$. Dessa forma, ao comparar os métodos através da soluções numéricas e ordens empíricas é possível observar que os métodos de ordem formal $O(h^2)$ além de aproximarem melhor a solução, apresentam erros menores tanto na norma $L^1(\Omega)$ como na norma $Lip'(\Omega)$. Nota-se que para essas configurações há a presença de rarefação e choque, sendo que o métodos upwind com reconstrução linear e KT apresentam uma diminuição da ordem numérica.

2.4.3 Problema de Riemann 1D - Caso 3

Para esse problema tem-se o domínio $\Omega = (0, 1)$ com um campo de velocidade constante $v = 1$, sendo que a simulação é realizada até o tempo $t = 0.1$. Considera-se um problema de Riemann (2.70) com a seguinte condição inicial

$$s_l = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.03 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad s_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

A injeção considerada apresenta $s_w = 0.2$ e $s_g = 0.03$ para as saturações da fase água e gás, respectivamente. Além disso, o reservatório está inicialmente com $s_w = 0$, $s_g = 0$ e $s_o = 1$, ou seja, totalmente saturado em óleo. O vetor s_l referente a injeção permanece constante em toda a simulação, sendo que este caso apresenta apenas ondas de choque.

A Figura 30 ilustra as ordens empíricas dos métodos upwind com reconstrução constante e linear, Rusanov e Kurganov-Tadmor para a saturação da fase água s_w . Para a norma $L^1\Omega$ todos os métodos apresentam $O(h)$, como pode ser visto na Figura 30a. Porém, com a norma $Lip'(\Omega)$ as ordens dos métodos upwind com reconstrução linear e Kurganov-Tadmor são recuperadas, Figura 30b.

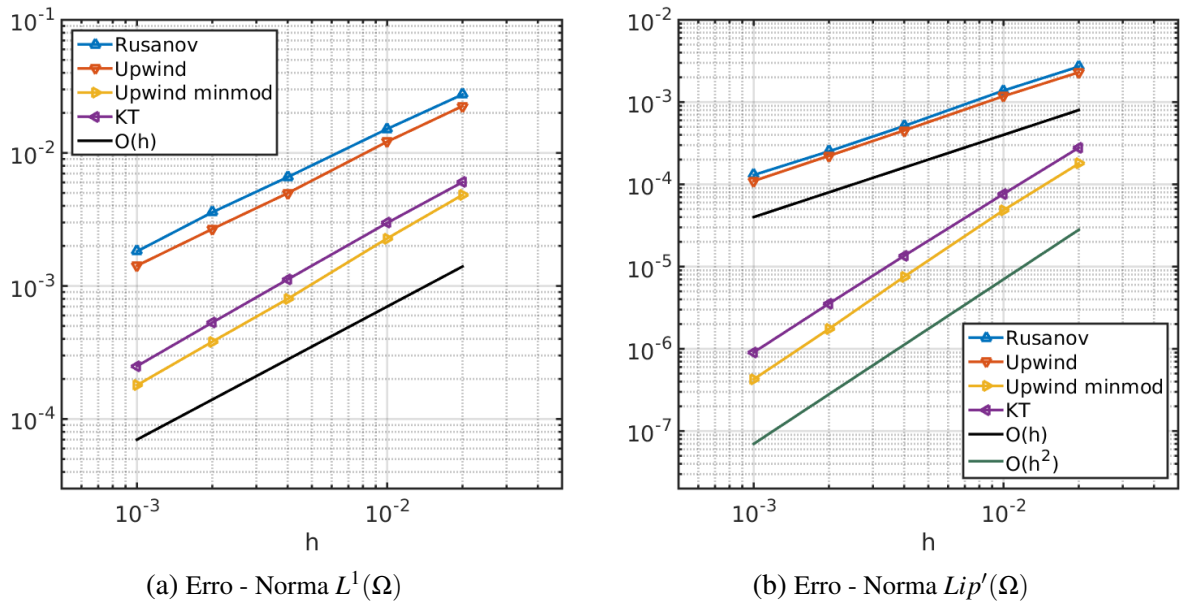


Figura 30 – Ordens de convergência de s_w para o problema trifásico - Caso 3

Já a Figura 31 ilustra as ordens empíricas dos métodos numéricos para a saturação da fase gás s_g , apresentando resultados similares a fase água com as normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$.

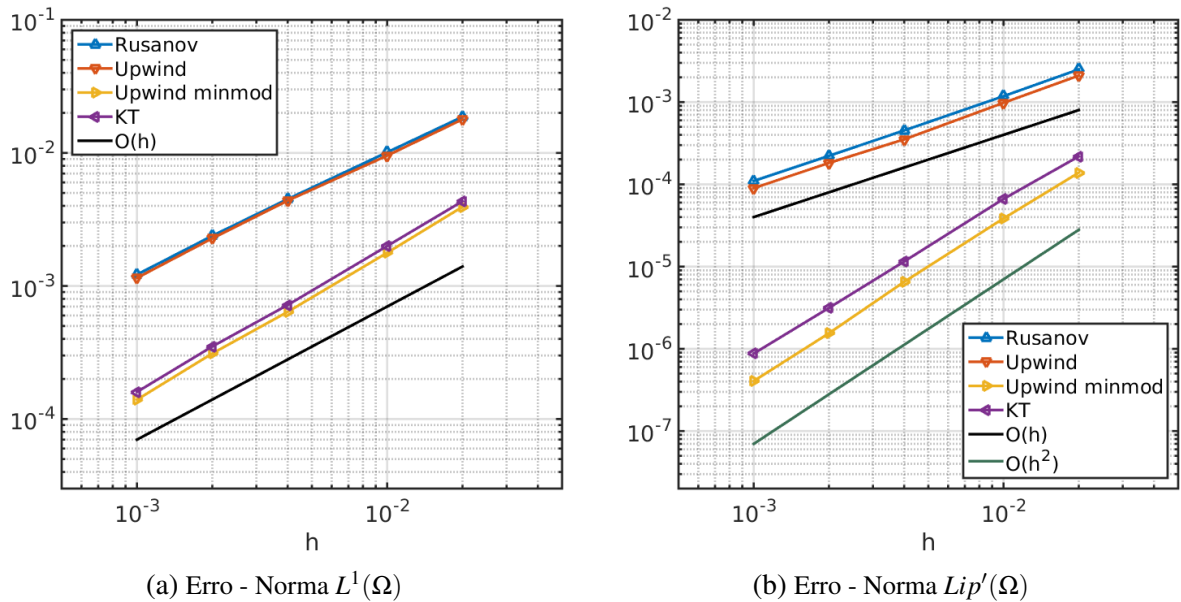


Figura 31 – Ordens de convergência de s_g para o problema trifásico - Caso 3

Com as configurações desse problema, é construído um caso em que ocorre apenas onda de choque nas saturações das fases água e gás, sendo que para a norma $L^1(\Omega)$ os métodos de alta ordem acabam apresentando ordem empírica $O(h)$. Porém, a ordem é recuperada com a utilização da norma $Lip'(\Omega)$, assim como estudado para os problemas bifásicos.

2.4.4 Problema 2D - Heterogêneo - Camada 06

Para esse problema bidimensional considera-se o domínio $\Omega = (0, 3) \times (0, 1)$ com o problema de Riemann (2.70) e a condição inicial (2.72). A injeção é realizada em toda a fronteira esquerda de forma constante, sendo que a produção acontece na fronteira à direita do domínio. A simulação é realizada até o tempo $t = 2.7$ e com uma malha 220×60 .

A Figura 32a mostra o campo de permeabilidade da camada 36 em escala logarítmica, representando um alto contraste. Além disso, a Figura 32b ilustra as linhas de corrente, sendo que as cores referem-se a magnitude da velocidade.

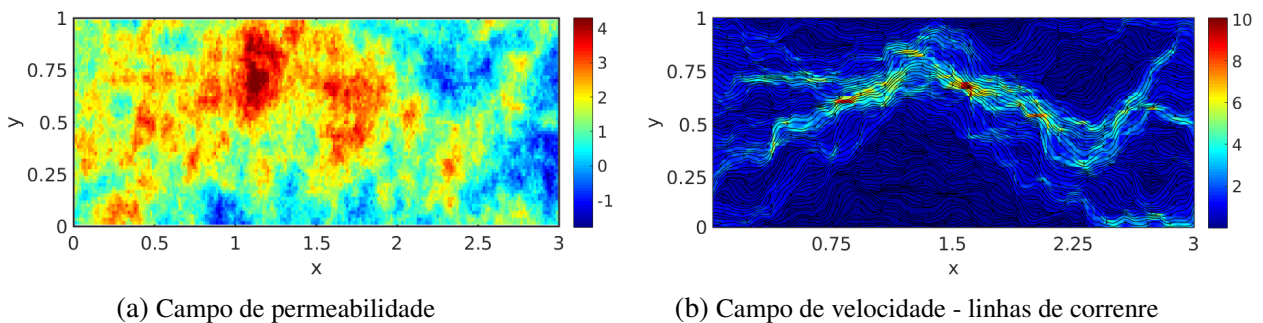


Figura 32 – Campo de permeabilidade em escala logarítmica e linhas de corrente - Camada 06 SPE10

As Figuras 33 e 34 mostram os resultados para as saturações das fases água e óleo no tempo $t = 2.7$, respectivamente. Para esse tempo, tanto s_w como s_g já percorreram todo o domínio e conseqüentemente já atingiram a produção localizada em $x = 3$, em toda a fronteira. Além disso, é possível perceber que a fase gás atinge a região de produção de forma mais rápida quando comparada com a saturação da fase água.

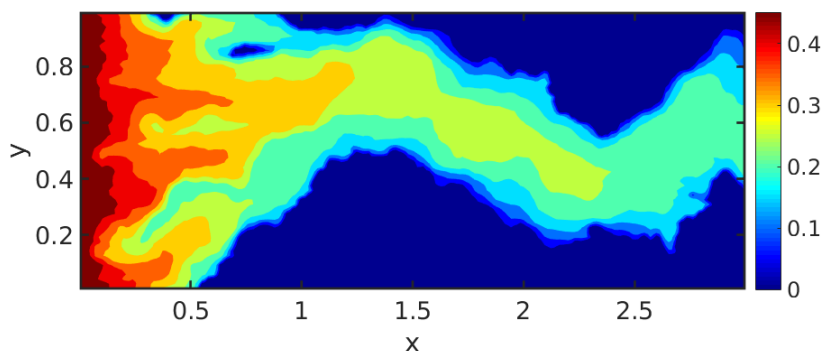


Figura 33 – Saturação s_w para o tempo $t = 2.7$ - trifásico Camada 06 SPE10

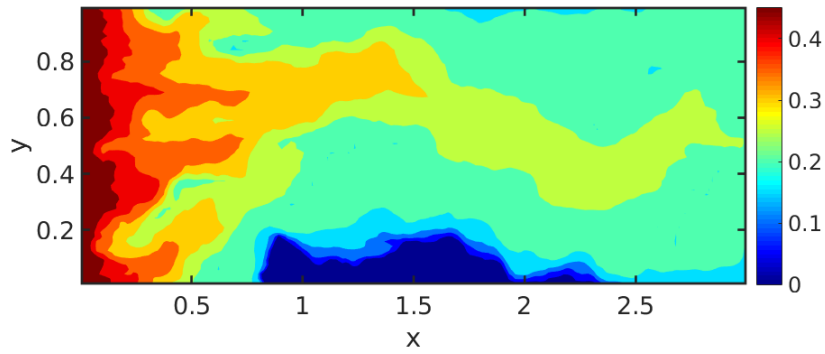


Figura 34 – Saturação s_g para o tempo $t = 2.7$ - trifásico Camada 06 SPE10

Observa-se também que esse campo heterogêneo não apresenta um canal de alta permeabilidade, tendo então regiões de alta e baixa permeabilidade. A saturação da água (s_w) tende a percorrer essas regiões de alta e evitar as de baixa permeabilidade. O mesmo ocorre com o a saturação da fase gás (s_g), porém nota-se que a solução tende a ser espelhar mais pelo reservatório, em regiões de média permeabilidade.

2.4.5 Problema 2D - Heterogêneo - Camada 36

Para esse problema bidimensional considera-se o domínio $\Omega = (0, 3) \times (0, 1)$ com o problema de Riemann (2.70) e a condição inicial (2.72), assim como o caso com a camada 06. A injeção é realizada em toda a fronteira esquerda de forma constante, sendo que a produção acontece na fronteira à direita do domínio. A simulação é realizada até o tempo $t = 2.7$ e com uma malha 220×60 .

A Figura 35a mostra o campo de permeabilidade da camada 36 em escala logarítmica, representando um alto contraste. Além disso, a Figura 35b ilustra as linhas de corrente, sendo que as cores referem-se a magnitude da velocidade.

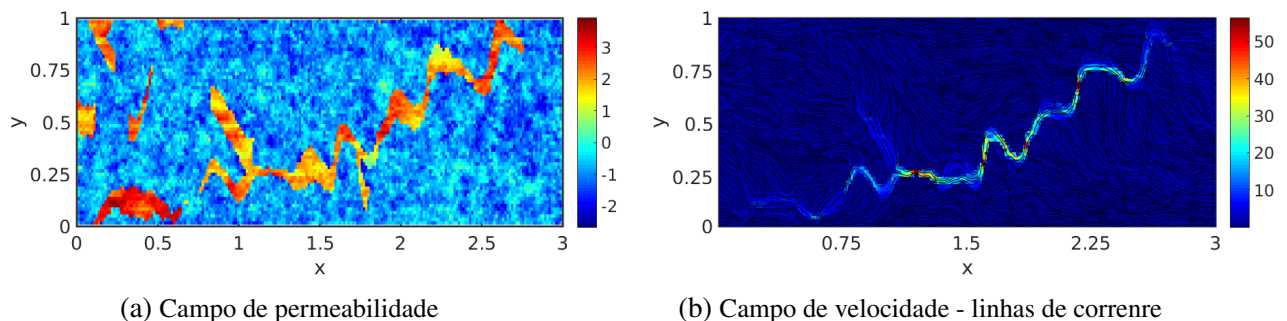


Figura 35 – Campo de permeabilidade em escala logarítmica e linhas de corrente - Camada 36 SPE10

As Figuras 36 e 37 mostram os resultados para as saturações das fases água e óleo no tempo $t = 2.7$, respectivamente. Para esse tempo s_g já atinge a fronteira direita, ou seja, a

região de produção. Já s_w possui um desenvolvimento mais lento para percorrer o canal de alta permeabilidade presente na camada 36, levando mais tempo para chegar até a região de produção.

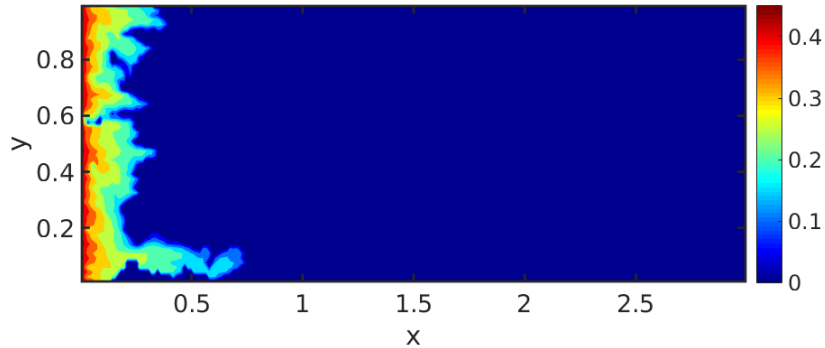


Figura 36 – Saturação s_w para o tempo $t = 2.7$ - trifásico Camada 36 SPE10

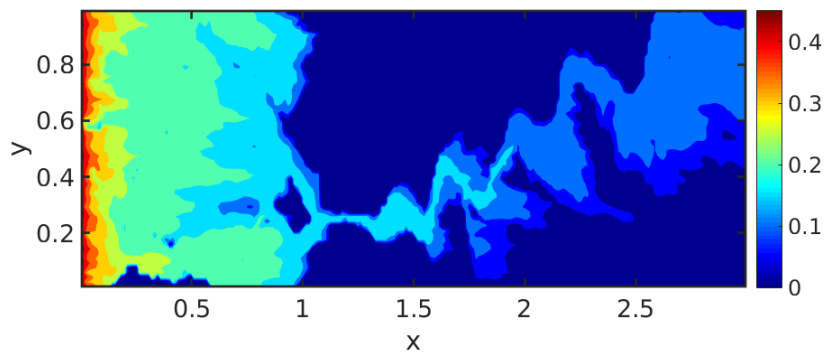


Figura 37 – Saturação s_w para o tempo $t = 2.7$ - trifásico Camada 36 SPE10

Observa-se que neste problema o campo de permeabilidade tem um pequeno canal e várias regiões de baixa permeabilidade, o que dificulta o escoamento. A saturação s_w percorre a região inicial de forma mais lenta até encontrar o canal de alta permeabilidade, onde tende a seguir até a região de produção que está localizada na fronteira direita do domínio. Já para s_g , nota-se que percorre mais rápido o domínio até chegar na região de produção, além de avançar mais pelas regiões de baixa permeabilidade.

MODELO BLACK-OIL

Black-oil é um dos modelos matemáticos mais utilizados em simulações de reservatórios de petróleo, sendo que este é capaz de prever compressibilidade e transferência de massa entre as fases necessárias para a recuperação primária e secundária. É importante observar que o modelo composicional é similar ao black-oil, porém o primeiro apresenta uma maior dificuldade devido ao tratamento individual dos hidrocarbonetos que resulta em um problema de equilíbrio de fase complexo. Já o modelo black-oil possui um tratamento individual para os hidrocarbonetos, sendo estes considerados como gás ou óleo. A necessidade do modelo composicional ocorre quando há situações de injeção de gás miscível, por exemplo, resultando em um custo computacional maior devido a presença de mais cálculos necessários para determinar o equilíbrio das fases.

O modelo black-oil é composto por equações diferenciais parciais parabólica e hiperbólica, sendo que a formulação sequencial favorece o desenvolvimento de métodos numéricos apropriados para cada tipo de comportamento, ou seja, para cada tipo de equação. A equação diferencial hiperbólica pode ser discretizada e resolvida pelos métodos de volumes finitos apresentados no capítulo 2, com a utilização de métodos do tipo upwind com reconstrução contante ou linear por partes e métodos centrados como Rusanov e Kurganov-Tadmor. A equação parabólica para a pressão pode apresentar diferentes abordagens numéricas, desde a sua forma explícita como implícita. Além disso, para essa equação podem ser realizadas algumas simplificações importantes para a utilização de métodos de decomposição de domínio multiescala.

Alguns métodos sequenciais foram desenvolvidos, sendo que em (BELL; SHUBIN; TRANGENSTEIN, 1986) os autores apresentaram um novo método sequencial para a solução de um modelo com duas fases e duas componentes. Para essa formulação não há consequência da discrepância do erro de volume, que indica até que ponto a equação de balanço de volume não é satisfeita. Posteriormente, em (TRANGENSTEIN; BELL, 1989) é apresentado o modelo black-oil com três fases e três componentes em que aparece a discrepância do erro de volume, sendo necessário uma maior cautela e compreensão das equações e relações que compõem o modelo.

Dessa forma, as equações para o escoamento do fluido são derivadas a partir de quatro princípios, segundo o desenvolvimento em (TRANGENSTEIN; BELL, 1989):

- Equilíbrio de fase: determina como as componentes combinam para formar as fases;
- Equação de estado: o fluido preenche o volume do poro;
- Lei de Darcy;
- Conservação de massa para cada componente.

As equações são formuladas de maneira sequencial, ou seja, equilíbrio de fase, lei de Darcy e leis de conservação para as componentes são satisfeitas exatamente, porém a equação de estado é linearizada de forma a ser satisfeita aproximadamente. Assim, através desses quatro princípios será possível obter as equações que compõem o modelo matemático.

3.1 Equilíbrio termodinâmico

Para o modelo black-oil, o fluido presente no reservatório é composto de três componentes, sendo estas: água (a), óleo (o) e gás (g). Porém, com a finalidade de atingir o equilíbrio de fase nas condições do reservatório, essas três componentes associam-se em no máximo três fases, sendo estas: aquosa (q), líquida (l) e vapor (v). Essas associações são realizadas com a intenção de obter o equilíbrio termodinâmico, sendo importante ressaltar que as componentes fluem em fases, mas apresentam conservação de massa. Dessa forma, é importante determinar como a massa de cada componente está presente nas fases.

Seja p uma determinada pressão e o seguinte vetor

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_o \\ n_g \\ n_a \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

de densidades de massa das componentes, é possível encontrar a seguinte matriz

$$N = \begin{bmatrix} n_{ol} & n_{ov} & 0 \\ n_{gl} & n_{gv} & n_{ga} \\ 0 & 0 & n_{aq} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

que representa as densidades das componentes em cada uma das fases. Assim:

- n_{ol} : quantidade da componente óleo na fase líquida;

- n_{ov} : quantidade da componente óleo na fase vapor;
- n_{gl} : quantidade da componente gás na fase líquida;
- n_{gv} : quantidade da componente gás na fase vapor;
- n_{ga} : quantidade da componente gás na fase aquosa;
- n_{aq} : quantidade da componente água na fase aquosa.

Estas estão sujeitas as condições de balanço de massa, que é dada por

$$\mathbf{n} = N\mathbf{e}, \quad (3.3)$$

com \mathbf{e} sendo um vetor de componentes unitárias.

Através da definição da matriz N em (3.3) é possível observar que existe uma restrição na forma como as componentes podem se misturar nas fases, ou seja, a componente óleo é permitida apenas nas fases líquida e vapor, enquanto que o gás pode estar presente nas três fases e a componente água apenas na fase aquosa. Nota-se também que as relações não permitidas possuem valores nulos na matriz em (3.2).

Com a finalidade de determinar a transferência de massa e o equilíbrio de fase, é associada uma componente principal para cada fase. Dessa forma, a componente água com a fase aquosa, a componente óleo com a fase líquida e por último a componente gás com a fase vapor. Com isso, obtém-se a seguinte matriz

$$R = \begin{bmatrix} 1 & R_v & 0 \\ R_l & 1 & R_a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = ND_N^{-1}, \quad (3.4)$$

que relaciona a quantidade de cada componente em cada fase, a quantidade da componente principal nessa fase. Essa matriz é obtida quando todas as fases são formadas. Observa-se que a matriz D_N é a parte diagonal de N . Assim, tem-se

$$R_v = \frac{n_{ov}}{n_{gv}}, \quad R_l = \frac{n_{gl}}{n_{ol}} \quad \text{e} \quad R_a = \frac{n_{ga}}{n_{aq}}. \quad (3.5)$$

Dessa forma:

- R_v : razão da quantidade de óleo dissolvido na fase vapor pela quantidade de gás na fase vapor;

- R_l : razão da quantidade de gás dissolvido na fase líquida pela quantidade de óleo na fase líquida;
- R_a : razão da quantidade de gás dissolvido na fase aquosa pela quantidade de água na fase aquosa.

É importante observar que R_v , R_l e R_a diferentes de zero representam o modelo black-oil mais geral, onde o gás pode estar presente tanto na fase líquida quanto aquosa. Além disso, o óleo pode estar presente na fase vapor. Porém, o modelo padrão para black-oil é dado por $R_v = R_a = 0$, em que o gás é permitido estar na fase líquida.

Com isso, é possível determinar quantas fases estão presentes no caso considerado. Para isso, considera-se

$$T = R^{-1} \quad (3.6)$$

e o vetor dado por $T\mathbf{n}$. Se todas as entradas desse vetor forem positivas então é possível afirmar que as três fases são formadas, caracterizando um fluido saturado. Assim, com (3.3) e (3.4) mostra-se que D_N é dado por

$$D_N \mathbf{e} = T\mathbf{n}. \quad (3.7)$$

Considerando o fluido saturado, a solução para o problema de fase é calculada por

$$N = RD_N. \quad (3.8)$$

Dessa forma, as equações (3.7) e (3.8) completam a descrição da solução do problema de equilíbrio de fase quando todas as três fases são formadas (saturado). Porém, por mais que existam três componentes pode ocorrer a possibilidade em que não necessariamente todas as fases são formadas. Uma dessas possibilidades é quando o gás está totalmente dissolvido na fase líquida, caracterizando a inexistência da fase vapor e por consequência a subsaturação da fase líquida. O mesmo pode ocorrer quando todo o óleo está presente na fase vapor, resultando na ausência da fase líquida e na fase vapor subsaturada. É importante ressaltar que no caso subsaturado apenas uma das fases pode estar ausente, ou seja, não há a possibilidade de duas fases ausentes ao mesmo tempo.

Destaca-se que quando a fase vapor está ausente, tem-se que a pressão do fluido é maior que o ponto de bolha da pressão (p_b), ou seja, $p > p_b$. Essa pressão ponto de bolha é definida por

$$-R_l(p_b)n_o + n_g - R_v(p_b)n_w = 0, \quad (3.9)$$

em que p_b é único.

Já para o caso em que a fase líquida está ausente, redefine-se a razão R_v em que

$$\bar{R}_v = \frac{n_o}{n_g - R_a(p)n_w}. \quad (3.10)$$

Assim, deriva-se uma formulação para o caso subsaturado em que a estrutura matemática faça um paralelo com o caso saturado. Seja Q uma matriz constante responsável por eliminar a coluna correspondente a fase ausente, ou seja,

$$\bar{R} = RQ \quad \text{e} \quad \bar{D}_N = Q^T D_N Q. \quad (3.11)$$

Para o caso em que fase vapor é subsaturada, define-se

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Para o caso em que a fase líquida é subsaturada

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Assim, a solução para o equilíbrio de fase é dada por

$$N = \bar{R}\bar{D}_N Q^T. \quad (3.14)$$

Consequentemente, para o caso em que a fase líquida é subsaturada, a matriz N é dada por

$$N = \begin{bmatrix} n_o & 0 & 0 \\ \bar{R}_l n_o & 0 & \bar{R}_v n_w \\ 0 & 0 & n_w \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

com todo óleo presente na fase líquida e o gás dissolvido nas fases líquida e aquosa. Quando a fase vapor é subsaturada, a matriz N é

$$N = \begin{bmatrix} 0 & n_o & 0 \\ 0 & n_g - R_a n_w & R_a n_w \\ 0 & 0 & n_w \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

com todo o óleo presente na fase vapor.

É importante ressaltar que o modelo black-oil considera a compressibilidade, sendo que as mudanças de volume de cada fase são determinadas pela relação dos volumes das fases com a quantidade da principal componente nessa fase. Com isso,

$$B = \begin{bmatrix} B_l & 0 & 0 \\ 0 & B_v & 0 \\ 0 & 0 & B_a \end{bmatrix} = D_u D_N^{-1}, \quad (3.17)$$

em que D_u é uma matriz diagonal dos volumes fase por volume poroso.

Observa-se que D_u e D_N estão relacionadas pelos fatores de volume de formação B_l , B_v e B_a . Assim, a compressibilidade é descrita através da matriz B .

Define-se então o vetor \mathbf{u} de volumes de fase por volume poroso, tal que

$$\mathbf{u} = B R^{-1} \mathbf{n} \quad (3.18)$$

para o caso saturado e

$$\bar{\mathbf{u}} = Q \bar{B} \bar{R}^{-1} \mathbf{n}, \quad \text{com} \quad \bar{B} = Q^T B Q \quad (3.19)$$

para o caso subsaturado.

Com as expressões e definições para o equilíbrio termodinâmico, tem-se que compreender o escoamento através de todo o reservatório.

3.2 Lei de Darcy

A lei de Darcy tem um papel fundamental para a compreensão de como ocorre o escoamento das fases através do reservatório, resultando em um vetor de velocidades de fase. Para facilitar o entendimento, considera-se o caso unidimensional, cujo vetor pode ser escrito da seguinte forma

$$\mathbf{v} = -L \left(\mathbf{e} \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \frac{\partial d}{\partial x} \right) K. \quad (3.20)$$

Nota-se que o escoamento do fluido ocorre devido ao gradiente de pressão e ao efeito gravitacional. Além disso, L é uma matriz diagonal de mobilidades de fase, que são as permeabilidades relativas divididas pelas viscosidades, ou seja,

$$L = \begin{bmatrix} \frac{k_l}{\mu_l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_v}{\mu_v} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_a}{\mu_a} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Ainda com relação a (3.20), ρ é o vetor das densidades de cada fase, K é a permeabilidade total da rocha e $\partial d/\partial x$ é o gradiente de profundidade do reservatório. Importante observar que a pressão capilar é desconsiderada para esse modelo, sendo que a pressão de cada fase é igual a pressão p do fluido.

Define-se então a velocidade total como a soma das velocidades de cada uma das fases. Assim, a partir de (3.20), tem-se

$$v_t = \mathbf{e}^T \mathbf{v} = -\mathbf{e}^T L \mathbf{e} \frac{\partial p}{\partial x} K + \mathbf{e}^T L \rho g \frac{\partial d}{\partial x} K. \quad (3.22)$$

Substituindo (3.22) em (3.20), obtém-se

$$\mathbf{v} = \frac{L \mathbf{e} v_t}{\mathbf{e}^T L \mathbf{e}} + \left[I - \frac{L \mathbf{e} \mathbf{e}^T}{\mathbf{e}^T L \mathbf{e}} \right] L \rho g \frac{\partial d}{\partial x} K. \quad (3.23)$$

Essa etapa é realizada pelo fato de que no caso de um escoamento incompressível a velocidade total separa corretamente a parte elíptica da hiperbólica das equações.

É importante ressaltar que as saturações são frações do volume total do fluido ocupado por cada uma das fases. Assim,

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{e}^T \mathbf{u}}, \quad (3.24)$$

em que as saturações somam um caso a equação de balanço de volume não é satisfeita. Nota-se que \mathbf{u} e \mathbf{s} são distintos pelo fato da discrepância do erro de volume.

Além disso, ressalta-se que a viscosidade μ é uma propriedade da fase, sendo que esta representa sua resistência em fluir sob a ação das forças que causam o escoamento. Dessa forma, para o caso saturado, as viscosidades são funções da pressão p . Já para o caso subsaturado, as viscosidades são funções da pressão p e da pressão ponto de bolha p_b .

Tem-se também que as permeabilidades relativas são responsáveis por descrever como a presença de cada fase afeta o fluxo das outras fases, sendo estas funções das saturações \mathbf{s} .

3.3 Equação de estado

A equação de estado, quando satisfeita exatamente, afirma que o fluido preenche o volume poroso da rocha, tal que

$$\mathbf{e}^T \mathbf{u} = 1. \quad (3.25)$$

Porém, quando essa equação não é satisfeita exatamente, a soma dos volumes de fase não é igual ao volume poroso da rocha e conseqüentemente tem-se a discrepância do erro de volume

$$\mathbf{e}^T \mathbf{u} - 1. \quad (3.26)$$

Como na formulação sequencial não é possível satisfazer todos as condições do escoamento do fluido, a equação (3.25) é linearizada para obter a equação de pressão. Dessa forma, utilizando a expansão em série de Taylor no tempo t obtém-se

$$\mathbf{e}^T \mathbf{u}|_{t+\Delta t} \approx \mathbf{e}^T \mathbf{u}|_t + \Delta t \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}|_t. \quad (3.27)$$

Tem-se então uma discrepância do erro de volume no tempo t e o objetivo é determinar a pressão no tempo $t + \Delta t$ tal que não tenha erro no volume. Assim, a equação (3.27) é reescrita

$$\mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{u} - 1}{\Delta t}. \quad (3.28)$$

Considerando a multiplicação da porosidade da rocha ϕ , que depende da pressão p , na equação (3.28) e das leis de conservação de massa tem-se

$$\left(\phi \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p} + \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} - \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial x} (ND_u^{-1} \mathbf{v}) \approx \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{u} - 1}{\Delta t} \phi. \quad (3.29)$$

Observa-se que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = BR^{-1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n} = \mathbf{u}, \quad (3.30)$$

para o caso saturado, permitindo simplificar a expressão (3.29).

3.4 Conservação de massa

Para o modelo black-oil é importante que a massa de cada componente seja conservada. Assim, a equação de conservação de massa é dada por

$$\frac{\partial(\phi \mathbf{n})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(ND_u^{-1} \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (3.31)$$

em que ND_u^{-1} representa a densidade de cada componente do fluido em cada fase. Nota-se que

$$\mathbf{h} = ND_u^{-1} \mathbf{v} = RB^{-1} \mathbf{v}, \quad (3.32)$$

com o vetor de velocidades de fase escrito em termos da velocidade total, na forma (3.23).

O fluxo \mathbf{h} é uma função da pressão p , velocidade total v_t e componentes \mathbf{n} . Assim,

$$\phi \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x}, \quad (3.33)$$

em que

$$H = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{n}} \quad (3.34)$$

é a matriz Jacobiana do sistema, sendo este hiperbólico caso os autovalores sejam reais para todos os valores das componentes \mathbf{n} . É importante ressaltar que p e v_t são termos independentes da pressão p .

Com a intenção de analisar os autovalores da matriz Jacobiana em (3.34), considera-se o caso saturado. Assim,

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{n}} = RB^{-1} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}}, \quad (3.35)$$

em que \mathbf{v} é uma função de \mathbf{n} . Através da regra da cadeia para expandir $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}}$ obtém-se

$$He^T \mathbf{u} = RB^{-1} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{s}} (I - \mathbf{se}^T) BR^{-1}. \quad (3.36)$$

Observa-se que $He^T \mathbf{u}$ é similar a matriz

$$V = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{s}} (I - \mathbf{se}^T), \quad (3.37)$$

sendo esta a mesma matriz presente no modelo trifásico incompressível de Buckley-Leverett. Através da transformação de similaridade,

$$H\mathbf{e}^T \mathbf{u} = A_1 V A_1^{-1}, \quad \text{em que } A_1 = R B^{-1}, \quad (3.38)$$

esta pode ser considerada um mapeamento ds componentes para as saturações. Seja

$$\mathbf{e}^T V = 0, \quad (3.39)$$

em que \mathbf{e} é um autovetor à esquerda de V e autovalor zero. Com esse autovetor é possível realizar uma deflação de V tal que

$$A_2 V A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{c} & C \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

em que

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}^T \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Além disso, C é uma matriz dada por

$$C = [0 \quad I] \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{s}} \begin{bmatrix} -\mathbf{e}^T \\ I \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

e o vetor \mathbf{c} é

$$\mathbf{c} = -C[0 \quad I]\mathbf{s}. \quad (3.43)$$

Para obter os dois autovalores restantes de $H\mathbf{e}^T \mathbf{u}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{c} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{z} & X_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{z} & X_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_c \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

que são os autovalores da matriz C .

Esses dois autovalores são os mesmos encontrados no modelo de Buckley-Leverett trifásico incompressível. É importante observar que essa relação do caso saturado para o incompressível indica que a hiperbolicidade do sistema saturado é herdada do modelo de permeabilidade relativa, ou seja, as velocidades características são independentes da compressibilidade e da

transferência de massa presentes no modelo black-oil. Dessa forma, é possível encontrar uma matriz não-singular X_c e uma matriz diagonal Λ_c tal que

$$CX_c = X_c\Lambda_c. \quad (3.45)$$

Além disso, é possível resolver

$$X_c\Lambda_c a = c \quad (3.46)$$

para o vetor a . Portanto, os autovetores à direita de $H\mathbf{e}^T\mathbf{u}$ são as colunas de

$$X = RB^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{e}^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & I \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

em que os autovetores à esquerda são determinados ao inverter essa expressão. Assim,

$$HX = X\Lambda, \quad (3.48)$$

com

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_c \left(\frac{1}{\mathbf{e}^T\mathbf{u}} \right) \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Observa-se que os autovalores são o zero e os mesmos do modelo de Buckley-Leverett trifásico incompressível, correspondendo a diagonal de Λ_c .

3.5 Equações multidimensionais

O modelo black-oil pode ser estendido para mais dimensões de forma direta, sendo que é necessário substituir as derivadas com relação a variável espacial x por gradientes. Além disso, o vetor de velocidades das fases apresenta componentes em cada coordenada de direção.

A equação parabólica da pressão é dada por

$$\left(\phi \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p} + \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} - \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \nabla \cdot (ND_u^{-1}\mathbf{v}) \approx \frac{\mathbf{e}^T\mathbf{u} - 1}{\Delta t} \phi. \quad (3.50)$$

Já as leis de conservação hiperbólica são dadas por

$$\frac{\partial(\phi \mathbf{n})}{\partial t} + \nabla \cdot (ND_u^{-1} \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (3.51)$$

sendo que é de fato hiperbólica se as derivadas parciais do fluxo com relação a \mathbf{n} , em qualquer direção, possui apenas autovalores reais para todo \mathbf{n} .

3.6 Parâmetros para o modelo black-oil

Para o modelo black-oil é necessário especificar as formas funcionais para os parâmetros que compõem esse modelo e conseqüentemente serão utilizadas para os resultados computacionais, conforme apresentado em (TRANGENSTEIN; BELL, 1989). As unidades consideradas foram:

- coordenadas espaciais: *feet*;
- tempo: dias;
- pressão: *pounds per square inch (psi)*;
- viscosidade: *centipoise (cp)*.

Assim, a permeabilidade total da rocha K tem a unidade de $ft^2 cp/psi dias$, sendo que esse termo dado em miliDarcy necessita ser multiplicado por 0.006328 para obter consistência de unidades.

As permeabilidades relativas são dadas pelas funções

$$k_l = s_l(1 - s_v)(1 - s_a), \quad k_v = s_v^2 \quad e \quad k_a = s_a^2. \quad (3.52)$$

Além disso, a porosidade da rocha é

$$\phi = 0.2(1 + 10^{-5} p), \quad (3.53)$$

em que ϕ é uma função da pressão.

As razões R_l, R_v e R_a são

$$\begin{aligned} R_l(p) &= 0.05p, \\ R_v(p) &= 9 \times 10^{-5} - 6 \times 10^{-8} + 1.6 \times 10^{-11} p^2, \\ R_a(p) &= 0.005p. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Já as viscosidades são funções dadas por

$$\mu_l(p) = \begin{cases} 0.8 - 10^{-4}p, & \text{se fase líquida saturada} \\ (0.8 - 10^{-4}p_b)(1 + 6.78 \times 10^{-5}(p - p_b)), & \text{se fase líquida subsaturada} \end{cases},$$

$$\mu_v(p) = 0.012 + 3 \times 10^{-5}p,$$

$$\mu_a(p) = \begin{cases} 0.35, & \text{se fase aquosa saturada} \\ 0.35(1 + 6.78 \times 10^{-5}(p - p_b)), & \text{se fase aquosa subsaturada} \end{cases}. \quad (3.55)$$

Os fatores de volume de formação são

$$B_l(p, p_b) = \begin{cases} 1 - 2.31 \times 10^{-5}p, & \text{se } R_l(p) = 0 \\ 1 + 1.5 \times 10^{-4}p, & \text{se fase líquida saturada} \\ \frac{1 + 1.5 \times 10^{-4}p_b}{1 + 2.31 \times 10^{-5}(p - p_b)}, & \text{se fase líquida saturada} \end{cases},$$

$$B_v(p, p_b) = \begin{cases} \frac{1}{(6 + 0.06p)}, & \text{se fase vapor saturada} \\ \frac{1}{(7 + 0.06p)} + \frac{\bar{R}_v}{R_v} \left[\frac{1}{(6 + 0.06p)} - \frac{1}{(7 + 0.06p)} \right], & \text{se fase vapor subsaturada} \end{cases},$$

$$B_a(p, p_b) = \begin{cases} 1 - 6.78 \times 10^{-5}p, & \text{se } R_a(p) = 0 \\ 1 - 3 \times 10^{-6}p, & \text{se fase aquosa saturada} \\ \frac{1 - 3 \times 10^{-6}p}{1 + 6.78 \times 10^{-5}(p - p_b)}, & \text{se fase aquosa subsaturada} \end{cases}. \quad (3.56)$$

Com isso, tem-se definida as formas funcionais para os parâmetros que compõem o modelo black-oil.

DISCRETIZAÇÃO DO MODELO BLACK-OIL

Com a descrição das equações que compõem o modelo black-oil, o próximo passo consistirá na discretização do mesmo, ou seja, da equação parabólica da pressão e da hiperbólica do transporte. Para a equação do transporte foram estudados os métodos de volumes finitos do tipo upwind com e sem reconstrução linear e os métodos centrados Rusanov e Kuraganov-Tadmor que serão utilizados para a resolução numérica.

Já a equação parabólica da pressão presente no modelo black-oil pode ser resolvida numericamente de diferentes maneiras, abordagem parcialmente implícita (BELL; SHUBIN; TRANGENSTEIN, 1986) e explícita, sendo importante investigar essas possibilidades afim de escolher a maneira mais eficiente para a resolução do problema, permitindo verificar as principais vantagens e desvantagens de cada abordagem. Para isso serão apresentadas as expressões e detalhes de cada uma das abordagens com a finalidade de compreender as expressões de cada parte que compõe a equação de pressão.

Com a equação de pressão e as abordagens definidas, é possível realizar uma simplificação da mesma com a intenção de reduzir os termos relacionados a derivada espacial e assim obter uma equação com menos termos e que pode ser resolvida de forma mais direta. Assim, com a finalidade de verificar se essa simplificação não afetará a solução obtida, serão considerados alguns testes computacionais que comprovem sua utilização. Além disso, esse tipo de mudança visa a aplicação de métodos de decomposição de domínio multiescala, algo que pode ser de extrema importância para o modelo black-oil.

4.1 Equação parabólica - três fluxos

É importante observar na equação parabólica da pressão apresentada em (3.29) os seguintes elementos:

- \mathbf{e} - vetor de componentes unitárias;

- \mathbf{u} - vetor fração de volume das fases;
- \mathbf{v} - vetor velocidade das fases;
- N e D - matrizes 3×3 .

O desenvolvimento das equações é realizado considerando o problema unidimensional e saturado, ou seja, quando as três fases (líquida, vapor e aquosa) estão presentes no escoamento. Além disso, escolhe-se o problema unidimensional para facilitar o entendimento, permitindo que essas expressões sejam facilmente estendidas para mais dimensões.

Assim, através da equação (3.32), a equação (3.29) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\left(-\phi \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p} + \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial x} (R B^{-1} \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{u} - 1}{\Delta t} \phi. \quad (4.1)$$

Com a expressão 4.1 definida, é possível analisar os seguintes termos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}, \quad R B^{-1} \mathbf{v}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad (4.2)$$

individualmente e em conjunto para formar a equação parabólica da pressão.

Dessa forma, com a expressão (3.18) e as matrizes B e R definidas em (3.4) e (3.17), respectivamente, obtém-se a seguinte matriz Jacobiana

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_l}{\partial n_o} & \frac{\partial u_l}{\partial n_g} & \frac{\partial u_l}{\partial n_w} \\ \frac{\partial u_v}{\partial n_o} & \frac{\partial u_v}{\partial n_g} & \frac{\partial u_v}{\partial n_w} \\ \frac{\partial u_a}{\partial n_o} & \frac{\partial u_a}{\partial n_g} & \frac{\partial u_a}{\partial n_w} \end{bmatrix} = B R^{-1}, \quad (4.3)$$

sendo que essa pode ser reescrita com os termos das matrizes B e R tal que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \frac{B_l}{1 - R_v R_l} & \frac{B_l R_v}{R_v R_l - 1} & \frac{B_l R_v R_a}{1 - R_v R_l} \\ \frac{B_v R_l}{R_v R_l - 1} & \frac{B_v}{1 - R_v R_l} & \frac{B_v R_a}{R_v R_l - 1} \\ 0 & 0 & B_a \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Dessa forma, define-se cada termo da matriz. Para facilitar a notação, considera-se

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \frac{B_l}{1 - R_v R_l}, & m_{12} &= \frac{B_l R_v}{R_v R_l - 1}, & m_{13} &= \frac{B_l R_v R_a}{1 - R_v R_l}, \\
m_{21} &= \frac{B_v R_l}{R_v R_l - 1}, & m_{22} &= \frac{B_v}{1 - R_v R_l}, & m_{23} &= \frac{B_v R_a}{R_v R_l - 1}, \\
m_{31} &= 0, & m_{32} &= 0, & m_{33} &= B_a,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

em que m_{ij} representa cada termo da matriz Jacobiana.

Além disso, ainda com as matrizes B e R , o termo referente a derivada espacial é dado por

$$RB^{-1}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{B_l} & \frac{R_v}{B_v} & 0 \\ \frac{R_l}{B_l} & \frac{1}{B_v} & \frac{R_a}{B_a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{B_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda_l K \frac{\partial p}{\partial x} \\ -\lambda_v K \frac{\partial p}{\partial x} \\ -\lambda_a K \frac{\partial p}{\partial x} \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

em que \mathbf{v} é escrito em função da lei de Darcy 3.20, desconsiderando o efeito da gravidade. Dessa forma,

$$RB^{-1}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -K \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{\lambda_l}{B_l} + \frac{R_v \lambda_v}{B_v} \right) \\ -K \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{R_l \lambda_l}{B_l} + \frac{\lambda_v}{B_v} + \frac{R_a \lambda_a}{B_a} \right) \\ -K \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\lambda_a}{B_a} \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Ao aplicar a derivada parcial em relação a variável espacial x em 4.7, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x}(RB^{-1}\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(-K \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{\lambda_l}{B_l} + \frac{R_v \lambda_v}{B_v} \right) \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-K \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{R_l \lambda_l}{B_l} + \frac{\lambda_v}{B_v} + \frac{R_a \lambda_a}{B_a} \right) \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-K \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\lambda_a}{B_a} \right) \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Com a finalidade de facilitar a notação, considera-se

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-K \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{\lambda_l}{B_l} + \frac{R_v \lambda_v}{B_v} \right) \right), \\
II &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-K \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{R_l \lambda_l}{B_l} + \frac{\lambda_v}{B_v} + \frac{R_a \lambda_a}{B_a} \right) \right), \\
III &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-K \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\lambda_a}{B_a} \right).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Com isso,

$$\mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial x} (RB^{-1} \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial x} (RB^{-1} \mathbf{v}) &= I(m_{11} + m_{21} + m_{31}) + II(m_{12} + m_{22} + m_{32}) + \\
&+ III(m_{13} + m_{23} + m_{33}).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Dessa forma, é possível obter uma expressão de forma mais simplificada para compreender sua estrutura, uma vez que cada elemento possui uma expressão com vários outros termos.

Ainda com a intenção de facilitar mais a compreensão da expressão final da equação de pressão, considera-se

$$\begin{aligned}
a &= \left(\frac{\lambda_l}{B_l} + \frac{R_v \lambda_v}{B_v} \right), \\
b &= \left(\frac{R_l \lambda_l}{B_l} + \frac{\lambda_v}{B_v} + \frac{R_a \lambda_a}{B_a} \right), \\
c &= \frac{\lambda_a}{B_a}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
r_1 &= m_{11} + m_{21} + m_{31}, \\
r_2 &= m_{12} + m_{22} + m_{32}, \\
r_3 &= m_{13} + m_{23} + m_{33}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Dessa forma, a expressão (4.11) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial x} (R\mathbf{B}^{-1}\mathbf{v}) &= r_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(-aK \frac{\partial p}{\partial x} \right) + r_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(-bK \frac{\partial p}{\partial x} \right) + r_3 \frac{\partial}{\partial x} \left(-cK \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ &= -r_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(aK \frac{\partial p}{\partial x} \right) - r_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(bK \frac{\partial p}{\partial x} \right) - r_3 \frac{\partial}{\partial x} \left(cK \frac{\partial p}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Considerando ainda os termos presentes na equação, tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p} = \frac{\partial (R\mathbf{B}^{-1})}{\partial p} \mathbf{n}, \quad (4.15)$$

cujo resultado é a seguinte matriz

$$\frac{\partial (R\mathbf{B}^{-1})}{\partial p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial m_{11}}{\partial p} & \frac{\partial m_{12}}{\partial p} & \frac{\partial m_{13}}{\partial p} \\ \frac{\partial m_{21}}{\partial p} & \frac{\partial m_{22}}{\partial p} & \frac{\partial m_{23}}{\partial p} \\ \frac{\partial m_{31}}{\partial p} & \frac{\partial m_{32}}{\partial p} & \frac{\partial m_{33}}{\partial p} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

É importante ressaltar que os termos são apenas dependentes da pressão p . Além disso, a compressibilidade da rocha ϕ também é função apenas da pressão (3.53). Então,

$$\left(-\phi \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p} + \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = \beta \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (4.17)$$

em que β é um escalar.

Assim, a equação parabólica para a pressão presente no modelo black-oil é dada por

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} - r_1 \left(aK \frac{\partial p}{\partial x} \right) - r_2 \left(bK \frac{\partial p}{\partial x} \right) - r_3 \left(cK \frac{\partial p}{\partial x} \right) = f, \quad (4.18)$$

em que

$$f = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{u} - 1}{\Delta t} \phi. \quad (4.19)$$

Com a equação definida, é possível realizar a discretização de (4.18) de diferente maneiras, seja de formato explícito ou parcialmente implícito. Dessa forma, através do teorema da Divergência, que é dado por:

Teorema 4.1.1 (Divergência). Seja W um volume de controle no \mathbb{R}^n limitado por uma superfície S regular, ou regular por partes, fechada, orientada pela normal exterior \mathbf{n} . Seja D um aberto contendo W e $\mathbf{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 em D . Tem-se então que

$$\int_W \nabla \cdot \mathbf{F} \, dW = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (4.20)$$

Pode-se então definir os fluxos nas direções leste e oeste, tal que

$$F_i^O = -a_i K_i \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{e} \quad F_i^L = a_i K_i \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.21)$$

com

$$F_i^L = -F_{i+1}^O \quad \text{e} \quad F_i^O = -F_{i-1}^L. \quad (4.22)$$

Com isso, pode-se utilizar uma aproximação progressiva para calcular a derivada da pressão com relação a variável espacial

$$\frac{\partial p(x_{i-1/2})}{\partial x} \approx \frac{p(x_i) - p(x_{i-1/2})}{\Delta x/2}, \quad (4.23)$$

ou então uma diferença regressiva

$$\frac{\partial p(x_{i-1/2})}{\partial x} \approx \frac{p(x_{i-1/2}) - p(x_{i-1})}{\Delta x/2}. \quad (4.24)$$

Utilizando de (4.22), obtém-se

$$p_{i-1/2} = \frac{a_i K_i p_i + a_{i-1} K_{i-1} p_{i-1}}{a_i K_i + a_{i-1} K_{i-1}}. \quad (4.25)$$

Com isso,

$$F_i^O = -a_i K_i \frac{(p_i - p_{i-1/2})}{\Delta x/2} = -\frac{2}{\Delta x} \frac{a_i K_i a_{i-1} K_{i-1}}{a_i K_i + a_{i-1} K_{i-1}} (p_i - p_{i-1}), \quad (4.26)$$

sendo que, de maneira análoga,

$$F_i^L = a_i K_i \frac{(p_{i+1/2} - p_i)}{\Delta x/2} = \frac{2}{\Delta x} \frac{a_i K_i a_{i+1} K_{i+1}}{a_i K_i + a_{i+1} K_{i+1}} (p_{i+1} - p_i). \quad (4.27)$$

Esses cálculos podem ser feitos para todos os termos da equação (4.18), tal que

$$F_i^O = -\frac{2}{\Delta x} \frac{b_i K_i b_{i-1} K_{i-1}}{b_i K_i + b_{i-1} K_{i-1}} (p_i - p_{i-1}) \quad \text{e} \quad F_i^L = \frac{2}{\Delta x} \frac{b_i K_i b_{i+1} K_{i+1}}{b_i K_i + b_{i+1} K_{i+1}} (p_{i+1} - p_i), \quad (4.28)$$

e por último

$$F_i^O = -\frac{2}{\Delta x} \frac{c_i K_i c_{i-1} K_{i-1}}{c_i K_i + c_{i-1} K_{i-1}} (p_i - p_{i-1}) \quad \text{e} \quad F_i^L = \frac{2}{\Delta x} \frac{c_i K_i c_{i+1} K_{i+1}}{c_i K_i + c_{i+1} K_{i+1}} (p_{i+1} - p_i). \quad (4.29)$$

Assim, a equação 4.18 semi-discretizada é dada por

$$\begin{aligned} \alpha \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \Delta x & - r_1 \left[\frac{2}{\Delta x} \frac{a_i K_i a_{i+1} K_{i+1}}{a_i K_i + a_{i+1} K_{i+1}} (p_{i+1} - p_i) - \frac{2}{\Delta x} \frac{a_i K_i a_{i-1} K_{i-1}}{a_i K_i + a_{i-1} K_{i-1}} (p_i - p_{i-1}) \right] - \\ & - r_2 \left[\frac{2}{\Delta x} \frac{b_i K_i b_{i+1} K_{i+1}}{b_i K_i + b_{i+1} K_{i+1}} (p_{i+1} - p_i) - \frac{2}{\Delta x} \frac{b_i K_i b_{i-1} K_{i-1}}{b_i K_i + b_{i-1} K_{i-1}} (p_i - p_{i-1}) \right] - \\ & - r_3 \left[\frac{2}{\Delta x} \frac{c_i K_i c_{i+1} K_{i+1}}{c_i K_i + c_{i+1} K_{i+1}} (p_{i+1} - p_i) - \frac{2}{\Delta x} \frac{c_i K_i c_{i-1} K_{i-1}}{c_i K_i + c_{i-1} K_{i-1}} (p_i - p_{i-1}) \right] = \\ & = f \Delta x. \end{aligned} \quad (4.30)$$

A discretização temporal pode ser realizada por diferentes métodos como Runge-Kutta, Euler explícito e entre outros.

Pelo fato da solução da equação (4.30) permitir diferentes abordagens quanto aos termos que dependem da pressão (p), estas podem ser divididas parcialmente implícita e explícita.

4.1.1 Abordagem parcialmente implícita

A abordagem parcialmente implícita considera os termos α , r_1 , r_2 , r_3 , a , b e c no tempo atual (t^n), ou seja,

$$\alpha^n, \quad r_1^n, \quad r_2^n, \quad r_3^n, \quad a^n, \quad b^n \quad \text{e} \quad c^n. \quad (4.31)$$

Considerando Euler explícito para a discretização temporal, a equação de pressão para uma determinada célula i é dada por

$$\begin{aligned} \alpha_i^n \left(\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} \right) \Delta x & - r_{1i}^n \left[\frac{2}{\Delta x} \frac{a_i K_i a_{i+1} K_{i+1}}{a_i K_i + a_{i+1} K_{i+1}} (p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}) - \frac{2}{\Delta x} \frac{a_i K_i a_{i-1} K_{i-1}}{a_i K_i + a_{i-1} K_{i-1}} (p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}) \right] - \\ & - r_{2i}^n \left[\frac{2}{\Delta x} \frac{b_i K_i b_{i+1} K_{i+1}}{b_i K_i + b_{i+1} K_{i+1}} (p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}) - \frac{2}{\Delta x} \frac{b_i K_i b_{i-1} K_{i-1}}{b_i K_i + b_{i-1} K_{i-1}} (p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}) \right] - \\ & - r_{3i}^n \left[\frac{2}{\Delta x} \frac{c_i K_i c_{i+1} K_{i+1}}{c_i K_i + c_{i+1} K_{i+1}} (p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}) - \frac{2}{\Delta x} \frac{c_i K_i c_{i-1} K_{i-1}}{c_i K_i + c_{i-1} K_{i-1}} (p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}) \right] = \\ & = f_i^n \Delta x. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Assim, é necessário resolver um sistema linear global para cada passo temporal.

A Figura 38 mostra o estêncil de 3 pontos necessário para obter o sistema linear tridiagonal, tal que

$$A\mathbf{p} = \mathbf{r}. \quad (4.33)$$

Seja N_x o número de células na direção x , tem-se que \mathbf{p} é um vetor de tamanho N_x composto pelas pressões p_i^{n+1} s serem determinadas. A matriz A é tridiagonal de dimensão $N_x \times N_x$ e \mathbf{r} o lado direito do sistema.

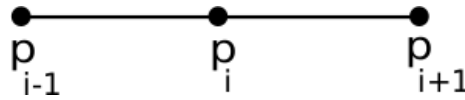


Figura 38 – Estêncil de 3 pontos para a equação parabólica da pressão 1D

4.1.2 Abordagem explícita

A abordagem explícita considera os termos $\alpha, r_1, r_2, r_3, a, b$ e c determinados no passo de tempo anterior, assim como é realizado na abordagem parcialmente implícita em (4.31). Considerando-se Euler explícito para a discretização temporal, a equação de pressão para uma determinada célula i é dada por

$$\begin{aligned} \alpha_i^n \left(\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} \right) \Delta x &= r_{1i}^n \left[\frac{2}{\Delta x} \frac{a_i K_i a_{i+1} K_{i+1}}{a_i K_i + a_{i+1} K_{i+1}} (p_{i+1}^n - p_i^n) - \frac{2}{\Delta x} \frac{a_i K_i a_{i-1} K_{i-1}}{a_i K_i + a_{i-1} K_{i-1}} (p_i^n - p_{i-1}^n) \right] - \\ &= r_{2i}^n \left[\frac{2}{\Delta x} \frac{b_i K_i b_{i+1} K_{i+1}}{b_i K_i + b_{i+1} K_{i+1}} (p_{i+1}^n - p_i^n) - \frac{2}{\Delta x} \frac{b_i K_i b_{i-1} K_{i-1}}{b_i K_i + b_{i-1} K_{i-1}} (p_i^n - p_{i-1}^n) \right] - \\ &= r_{3i}^n \left[\frac{2}{\Delta x} \frac{c_i K_i c_{i+1} K_{i+1}}{c_i K_i + c_{i+1} K_{i+1}} (p_{i+1}^n - p_i^n) - \frac{2}{\Delta x} \frac{c_i K_i c_{i-1} K_{i-1}}{c_i K_i + c_{i-1} K_{i-1}} (p_i^n - p_{i-1}^n) \right] = \\ &= f_i^n \Delta x. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Observa-se que as pressões presentes no fluxos são determinadas no n -ésimo passo de tempo, ou seja, não é necessário montar um sistema linear a cada passo de tempo para obter a pressão, caracterizando assim um método totalmente explícito.

4.2 Equação parabólica - um fluxo

Com a finalidade de simplificar a equação parabólica de pressão com três fluxos para facilitar a aplicação do método multiescala, considera-se o seguinte balanço de volume, tal que

$$\mathbf{e}^T \mathbf{u} = u_t = u_l + u_v + u_a \quad (4.35)$$

é a fração de volume total. Além disso, sabe-se que devido a compressibilidade e o fato das equações parabólica da pressão, hiperbólica da conservação de massa e da lei Darcy serem calculadas separadamente em cada passo de tempo, a simulação pode produzir valores de u_t que não satisfaçam exatamente a (4.35), ou seja, $u_l + u_v + u_a = 1$. Com isso, é importante lembrar que a equação de pressão 3.29 leva esse fato em consideração, já que possui um mecanismo para recuperar $u_t = 1$ no passo de tempo seguinte.

Dessa forma, considera-se $u_t(p, \mathbf{n})$ dependente da pressão p e do vetor \mathbf{n} de densidades de componentes. Assim, através da expansão em série de Taylor, tem-se

$$\phi \frac{1 - u_t}{\Delta t} = \frac{du_t}{dt}, \quad (4.36)$$

em que o termo à esquerda é a correção do erro de discrepância do volume. Pela regra da cadeia

$$-\left(\frac{\partial u_l}{\partial p} + \frac{\partial u_v}{\partial p} + \frac{\partial u_a}{\partial p}\right) \frac{\partial p}{\partial t} - \left(\frac{\partial u_l}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial u_v}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial u_a}{\partial \mathbf{n}}\right) \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} = \frac{u_t - 1}{\Delta t}. \quad (4.37)$$

Com as equações de conservação de massa escritas de forma alternativa, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_o}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{n_{ol}}{u_l} v_l + \frac{n_{ov}}{u_v} v_v \right) &= 0, \\ \frac{\partial n_g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{n_{gl}}{u_l} v_l + \frac{n_{gv}}{u_v} v_v + \frac{n_{ga}}{u_a} v_a \right) &= 0, \\ \frac{\partial n_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{n_{wa}}{u_a} v_a \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Utilizando de (4.38) e definindo

$$\alpha = - \left(\frac{\partial u_l}{\partial p} + \frac{\partial u_v}{\partial p} + \frac{\partial u_a}{\partial p} \right), \quad (4.39)$$

a equação (4.37) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{u_t - 1}{\Delta t} &= \alpha \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u_t}{\partial n_o} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{n_{ol}}{u_l} v_l + \frac{n_{ov}}{u_v} v_v \right) + \frac{\partial u_t}{\partial n_g} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{n_{gl}}{u_l} v_l + \frac{n_{gv}}{u_v} v_v + \frac{n_{ga}}{u_a} v_a \right) + \\ &+ \frac{\partial u_t}{\partial n_w} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{n_{wa}}{u_a} v_a \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Através da regra do produto para a derivada, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{u_t - 1}{\Delta t} = & \alpha \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_t}{\partial n_o} \left(\frac{n_{ol}}{u_l} v_l + \frac{n_{ov}}{u_v} v_v \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_t}{\partial n_g} \left(\frac{n_{gl}}{u_l} v_l + \frac{n_{gv}}{u_v} v_v + \frac{n_{ga}}{u_a} v_a \right) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_t}{\partial n_w} \frac{n_{wa}}{u_a} v_a \right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Além disso, considera-se

$$\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n}^j = \begin{cases} u_i, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (4.42)$$

Dessa forma, analisando os termos da equação 4.41 tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_l}{\partial n_o} n_{ol} + \frac{\partial u_l}{\partial n_g} n_{gl} = u_l; & \quad \frac{\partial u_l}{\partial n_o} n_{ov} + \frac{\partial u_l}{\partial n_g} n_{gv} = 0; & \quad \frac{\partial u_l}{\partial n_g} n_{go} + \frac{\partial u_l}{\partial n_a} n_{wa} = 0; \\ \frac{\partial u_v}{\partial n_o} n_{ov} + \frac{\partial u_v}{\partial n_g} n_{gv} = u_v; & \quad \frac{\partial u_v}{\partial n_o} n_{ol} + \frac{\partial u_v}{\partial n_g} n_{gl} = 0; & \quad \frac{\partial u_v}{\partial n_g} n_{ga} + \frac{\partial u_v}{\partial n_a} n_{wa} = 0; \\ \frac{\partial u_a}{\partial n_o} n_{ga} + \frac{\partial u_a}{\partial n_a} n_{wa} = u_a; & \quad \frac{\partial u_a}{\partial n_o} n_{ol} + \frac{\partial u_a}{\partial n_g} n_{gl} = 0; & \quad \frac{\partial u_a}{\partial n_o} n_{ov} + \frac{\partial u_a}{\partial n_g} n_{gv} = 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Os termos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_t}{\partial n_i} \right), \quad \text{em que } i = o, g, w, \quad (4.44)$$

presentes na equação (4.41) podem ser desprezados por serem suficientemente pequenos.

Portanto, a equação parabólica da pressão para o modelo black-oil (3.29) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{u_t - 1}{\Delta t} = \alpha \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial x}, \quad (4.45)$$

com a velocidade total v_t definida pela lei de Darcy, tal que

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial x} = \frac{u_t - 1}{\Delta t} \\ v_t = -\lambda_t K \frac{\partial p}{\partial x} \end{cases}. \quad (4.46)$$

Tem-se então a equação da pressão com apenas um fluxo, sendo esta uma opção alternativa a apresentada em (4.18).

Dessa forma, a discretização pode ser realizada de forma similar a equação de três fluxos, sendo que

$$\alpha \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \Delta x - \left(\frac{2}{\Delta x} \frac{\lambda_{t_i} K_i \lambda_{t_{i+1}} K_{i+1}}{\lambda_{t_i} K_i + \lambda_{t_{i+1}} K_{i+1}} (p_{i+1} - p_i) - \frac{2}{\Delta x} \frac{\lambda_{t_i} K_i \lambda_{t_{i-1}} K_{i-1}}{\lambda_{t_i} K_i + \lambda_{t_{i-1}} K_{i-1}} (p_i - p_{i-1}) \right). \quad (4.47)$$

Observa-se que a expressão (4.47) pode apresentar uma abordagem parcialmente implícita ou explícita.

4.2.1 Abordagem parcialmente implícita

Para a abordagem parcialmente implícita considera-se α definido no passo de tempo anterior (t^n) e as pressões presentes nos fluxos em t^{n+1} . Além disso, considerando Euler explícito para a discretização temporal, obtém-se

$$\alpha_i^n \left(\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} \right) \Delta x - \left(\frac{2}{\Delta x} \frac{\lambda_{t_i} K_i \lambda_{t_{i+1}} K_{i+1}}{\lambda_{t_i} K_i + \lambda_{t_{i+1}} K_{i+1}} (p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}) - \frac{2}{\Delta x} \frac{\lambda_{t_i} K_i \lambda_{t_{i-1}} K_{i-1}}{\lambda_{t_i} K_i + \lambda_{t_{i-1}} K_{i-1}} (p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}) \right) = f_i^n \Delta x \quad (4.48)$$

É importante observar que assim como para a equação de pressão com três fluxos parcialmente implícita, é necessário resolver um sistema linear tridiagonal (4.33) a cada passo de tempo, formada pelo mesmo estêncil presente na Figura 38.

4.2.2 Abordagem explícita

Assim como para o parcialmente implícito, o termo α também é determinado no passo anterior. Através do Euler explícito para a discretização temporal, tem-se

$$\alpha_i^n \left(\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} \right) \Delta x - \left(\frac{2}{\Delta x} \frac{\lambda_{t_i} K_i \lambda_{t_{i+1}} K_{i+1}}{\lambda_{t_i} K_i + \lambda_{t_{i+1}} K_{i+1}} (p_{i+1}^n - p_i^n) - \frac{2}{\Delta x} \frac{\lambda_{t_i} K_i \lambda_{t_{i-1}} K_{i-1}}{\lambda_{t_i} K_i + \lambda_{t_{i-1}} K_{i-1}} (p_i^n - p_{i-1}^n) \right) = f_i^n \Delta x \quad (4.49)$$

em que os fluxos são determinados no n -ésimo passo de tempo. Então, a equação (4.49) resulta em uma abordagem totalmente explícita para a solução parabólica da pressão.

4.3 Considerações multidimensionais

A equação de pressão para o caso bidimensional é um pouco mais complexa que o caso unidimensional, sendo que a discretização é realizada da mesma forma como apresentada anteriormente, ou seja, decomposição em fluxos. Porém, para a abordagem parcialmente implícita é necessário considerar um estêncil com 5 pontos ao invés de 3 pontos, sendo este apresentado na Figura 39.

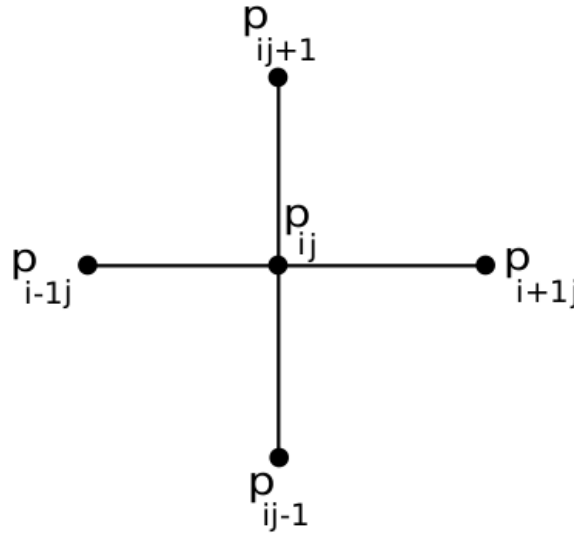


Figura 39 – Estêncil de 5 pontos para a equação parabólica da pressão 2D

Isso resulta em sistema pentadiagonal da forma (4.33), em que \mathbf{p} representa a pressão a ser determinada. Considerando N_x e N_y o número de células nas direções x e y respectivamente, tem-se que A é uma matriz pentadiagonal $N \times N$ com $N = N_x \cdot N_y$. Nota-se que N é o número total de células utilizadas na simulação. Além disso, \mathbf{p} é um vetor de tamanho N composto pelas pressões p_{ij}^{n+1} a serem calculadas e r é o lado direito do sistema.

Através do teorema da divergência (4.20) pode-se definir os fluxos das direções leste, oeste, sul e norte de maneira análoga a apresentada para o caso unidimensional, em que

$$F_{ij}^O = -2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\lambda_{ij} K_{ij} \lambda_{i-1j} K_{i-1j}}{\lambda_{ij} K_{ij} + \lambda_{i-1j} K_{i-1j}} (p_{ij} - p_{i-1j}), \quad (4.50)$$

$$F_{ij}^L = 2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\lambda_{ij} K_{ij} \lambda_{i+1j} K_{i+1j}}{\lambda_{ij} K_{ij} + \lambda_{i+1j} K_{i+1j}} (p_{i+1j} - p_{ij}), \quad (4.51)$$

$$F_{ij}^S = -2 \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{\lambda_{ij} K_{ij} \lambda_{ij-1} K_{ij-1}}{\lambda_{ij} K_{ij} + \lambda_{ij-1} K_{ij-1}} (p_{ij} - p_{ij-1}), \quad (4.52)$$

$$F_{ij}^N = 2 \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{\lambda_{ij} K_{ij} \lambda_{ij+1} K_{ij+1}}{\lambda_{ij} K_{ij} + \lambda_{ij+1} K_{ij+1}} (p_{ij+1} - p_{ij}), \quad (4.53)$$

representam os fluxos para o caso da equação parabólica da pressão simplificada (um fluxo) e Δx e Δy são os espaçamentos nas direções x e y , respectivamente.

Dessa forma, a equação da pressão semi-discretizada é dada por

$$\begin{aligned}
\alpha \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \Delta x \Delta y &= \left(2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\lambda_{i,j} K_{i,j} \lambda_{i+1,j} K_{i+1,j}}{\lambda_{i,j} K_{i,j} + \lambda_{i+1,j} K_{i+1,j}} (p_{i+1,j} - p_{i,j}) - 2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\lambda_{i,j} K_{i,j} \lambda_{i-1,j} K_{i-1,j}}{\lambda_{i,j} K_{i,j} + \lambda_{i-1,j} K_{i-1,j}} (p_{i,j} - p_{i-1,j}) \right) - \\
&= \left(2 \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{\lambda_{i,j} K_{i,j} \lambda_{i,j+1} K_{i,j+1}}{\lambda_{i,j} K_{i,j} + \lambda_{i,j+1} K_{i,j+1}} (p_{i,j+1} - p_{i,j}) - 2 \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{\lambda_{i,j} K_{i,j} \lambda_{i,j-1} K_{i,j-1}}{\lambda_{i,j} K_{i,j} + \lambda_{i,j-1} K_{i,j-1}} (p_{i,j} - p_{i,j-1}) \right) = \\
&= f_{ij} \Delta x \Delta y,
\end{aligned} \tag{4.54}$$

A discretização temporal pode ser realizada através do método Euler explícito. Além disso, é importante ressaltar que a discretização para a equação da pressão com três fluxos é realizada de maneira análoga a (4.54), considerando os termos não simplificados.

Com a discretização das equações que compõem o modelo black-oil, serão consideradas situações que envolvam esse modelo para problemas uni(1D) e bidimensionais(2D). Dessa forma, esses problemas iniciais serão utilizados para a verificação do código implementado, uma vez que alguns desses problemas podem ser encontrados em (TRANGENSTEIN; BELL, 1989), corroborando assim as soluções obtidas para as situações 1D. Ainda relacionado com os problemas unidimensionais, será abordada a utilização da equação parabólica da pressão com três e um fluxo.

Em (TRANGENSTEIN; BELL, 1989), a equação parabólica da pressão é resolvida com três fluxos, conforme apresentado na equação (4.30). Com isso, serão apresentadas comparações do mesmo problema quando a equação parabólica da pressão é escrita com três ou apenas um fluxo, permitindo realizar uma comparação entre as soluções das saturações das fases aquosa, líquida e vapor. A escolha pela equação parabólica com apenas um fluxo é de suma importância para a utilização de métodos multiescala.

Além dessa verificação da equação parabólica da pressão determinada com três ou um fluxo, a solução das saturações (aquosa, líquida e vapor) do modelo black-oil 1D serão comparadas para os diferentes métodos numéricos utilizados para a resolução da equação de transporte (3.31), tais como: upwind, upwind minmod, Rusanov e Kurganov-Tadmor. Essa comparação tem por objetivo verificar como cada método se comporta em comparação com um resultado de malha fina que envolve 1600 células computacionais.

Após a verificação e testes para diferentes situações unidimensionais, serão considerados problemas bidimensionais. A equação parabólica com um fluxo é dada pela expressão (4.54), sendo esta apresentada em sua forma semi-discretizada e com uma abordagem implícita. Assim, serão realizadas comparações entre os métodos numéricos para a solução da equação de conservação de massa e conseqüentemente determinação das saturações de cada uma das fases do modelo black-oil.

4.4 Simulação do modelo black-oil unidimensional

Nesta seção são apresentados os casos unidimensionais do modelo black-oil, permitindo assim realizar comparações das soluções obtidas com os métodos upwind, upwind minmod, Rusanov e Kurganov-Tadmor, além de corroborar com as soluções apresentadas em (TRAN-GENSTEIN; BELL, 1989) e conseqüentemente a validação do código desenvolvido. Além dessas comparações, será avaliado também a solução quando a equação parabólica da pressão é determinada com três ou apenas um fluxo, observando as soluções obtidas e se há alguma modificação importante nos resultados do modelo black-oil. Essa comparação é de suma importância para o desenvolvimento de problemas bidimensionais e resolução destes através de métodos multiescala.

Dessa forma, o primeiro teste terá a função de comparar a solução das saturações e pressão com a abordagem da equação parabólica da pressão com três fluxos como apresentado em (4.30) e com apenas um fluxo (4.47). O segundo teste tem a função de comparar as soluções com diferentes métodos numéricos para a solução da equação de conservação de massa, sendo considerados os seguintes métodos: upwind, upwind minmod, Rusanov e Kurganov-Tadmor. Os testes seguintes possuem a função de considerar diferentes condições iniciais do reservatório e conseqüentemente a saturação de cada umas das fases, além de diversas condições de injeção. Essas diferentes condições permitem que ocorram casos saturados e subsaturados, avaliando as soluções obtidas e as características de cada uma.

4.4.1 Formulações de um e três fluxos para o caso saturado

O primeiro exemplo para o caso unidimensional é um caso saturado, ou seja, todas as três componentes irão formar necessariamente três fases (aquosa, líquida e vapor), ou seja, nenhuma componente estará totalmente dissolvida em outra fase. Além disso, é importante ressaltar que para esse teste foram considerados R_a , R_l e R_v diferentes de zero, ou seja, é permitido que o gás esteja dissolvido na fase aquosa e na fase líquida, considerando também a quantidade de óleo dissolvido na fase vapor.

Para a representação do vetor com as condições das saturações de cada uma das fases, tem-se:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_l \\ s_v \\ s_a \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

sendo que a primeira é referente a fase líquida, a segunda a fase vapor e por último a fase aquosa.

As condições de injeção e iniciais do reservatório são dadas por

$$\mathbf{s}_{inj} = \begin{bmatrix} 0.00513 \\ 0.45480 \\ 0.49390 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{s}_{res} = \begin{bmatrix} 0.89220 \\ 0.05790 \\ 0.04990 \end{bmatrix}, \quad (4.56)$$

respectivamente.

A pressão inicial do reservatório é 1800 *psi*, sendo que a injeção ocorre a 2000 *psi* e a produção a 1600 *psi*. É importante ressaltar que a solução apresentada foi determinada para o tempo final $t = 150$ *dias* e com 200 células computacionais. Além disso, o reservatório é homogêneo com permeabilidade $k = 100$ *md* e 1000 *feet* de comprimento.

As Figuras 40, 41 e 42 mostram os resultados das saturações das fases líquida, vapor e aquosa, respectivamente. Além disso, tem-se também o cálculo do erro quando essas soluções são determinadas com a equação de pressão envolvendo três (4.30) e um fluxo (4.47)

Observa-se que as saturações das fases líquida, vapor e aquosa determinadas tanto com três fluxos como com apenas um fluxo na equação de pressão, não apresentam uma diferença significativa da solução.

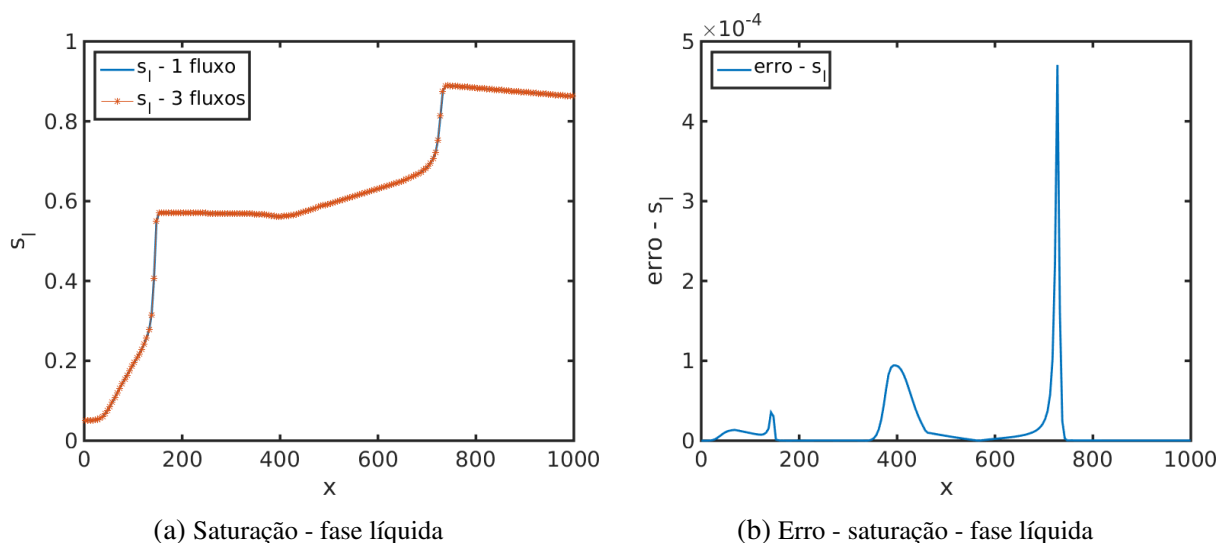


Figura 40 – Comparação da saturação da fase líquida e erro com três e um fluxo para a equação de pressão

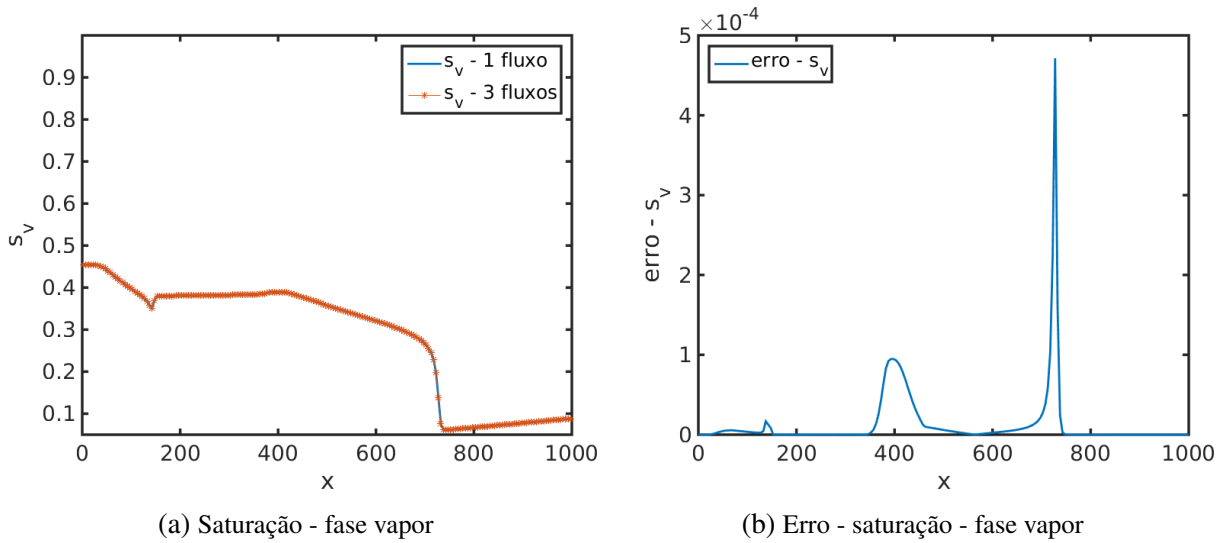


Figura 41 – Comparação da saturação da fase vapor e erro com três e um fluxo para a equação de pressão

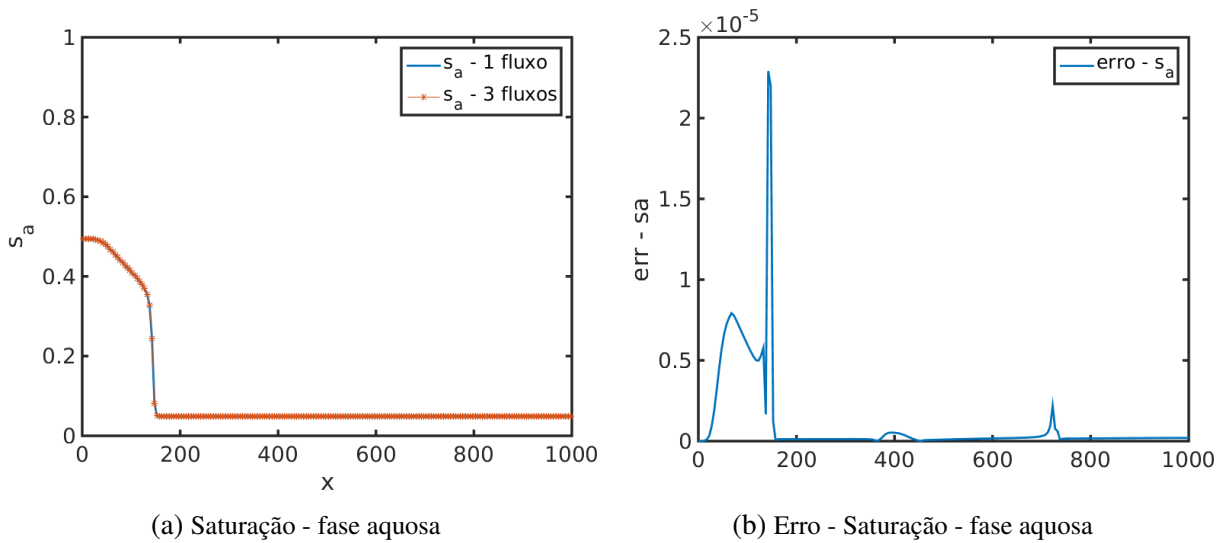


Figura 42 – Comparação da saturação da fase aquosa e erro com três e um fluxo para a equação de pressão

A Figura 43 mostra os resultados pressão (p) e o erro considerando o cálculo dessa mesma pressão ao considerar a equação da mesma envolvendo três fluxos (4.30) e apenas um fluxo (4.47).

A pressão presente na figura é referente a $t = 150$ dias, sendo importante ressaltar que as pressões de injeção e de produção são sempre as mesmas, 2000 psi e 1600 psi . Já a pressão inicial do reservatório, que é 1800 psi será modificada em cada passo de tempo, resultando em sua configuração final na Figura 43a.

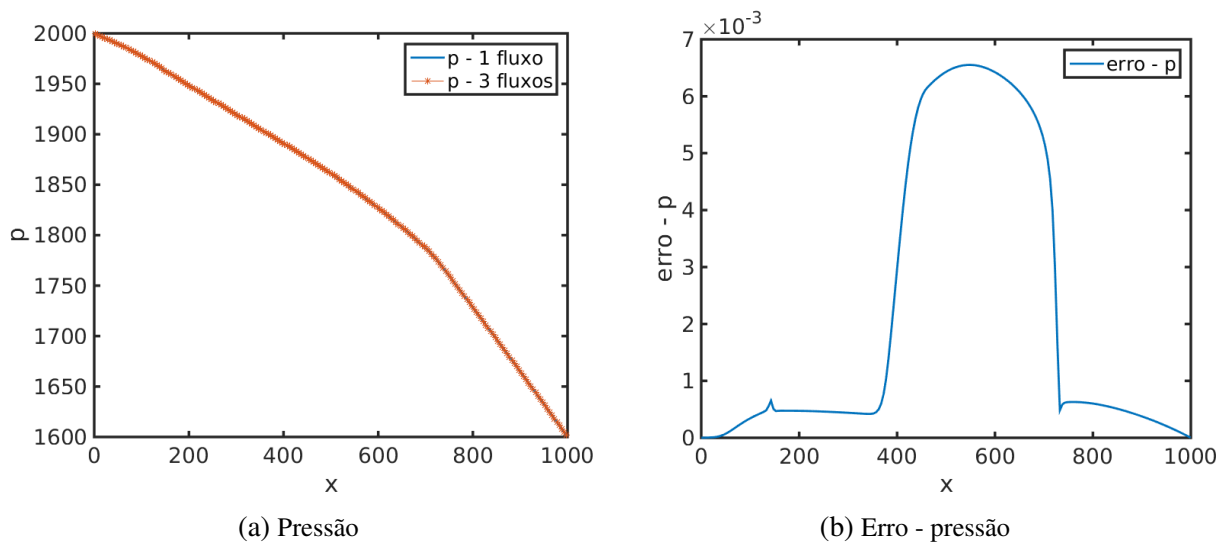


Figura 43 – Comparação da pressão e erro com três e um fluxo para a equação de pressão

Observa-se na Figura 43a que a pressão determinada tanto com três fluxos como com apenas um fluxo, não apresenta uma diferença significativa da solução. Dessa forma, a Figura 43b mostra o módulo da diferença das pressões calculadas com um e três fluxos, permitindo assim observar um erro da ordem de 10^{-3} em algumas regiões.

As Figuras 44, 45 e 46 mostram os resultados das componentes óleo (n_o), gás (n_g) e água (n_a) com a equação de pressão envolvendo três fluxos e apenas um fluxo.

Observa-se que a componente óleo determinada tanto com três fluxos como com apenas um fluxo na equação de pressão, não apresenta uma diferença significativa da solução.

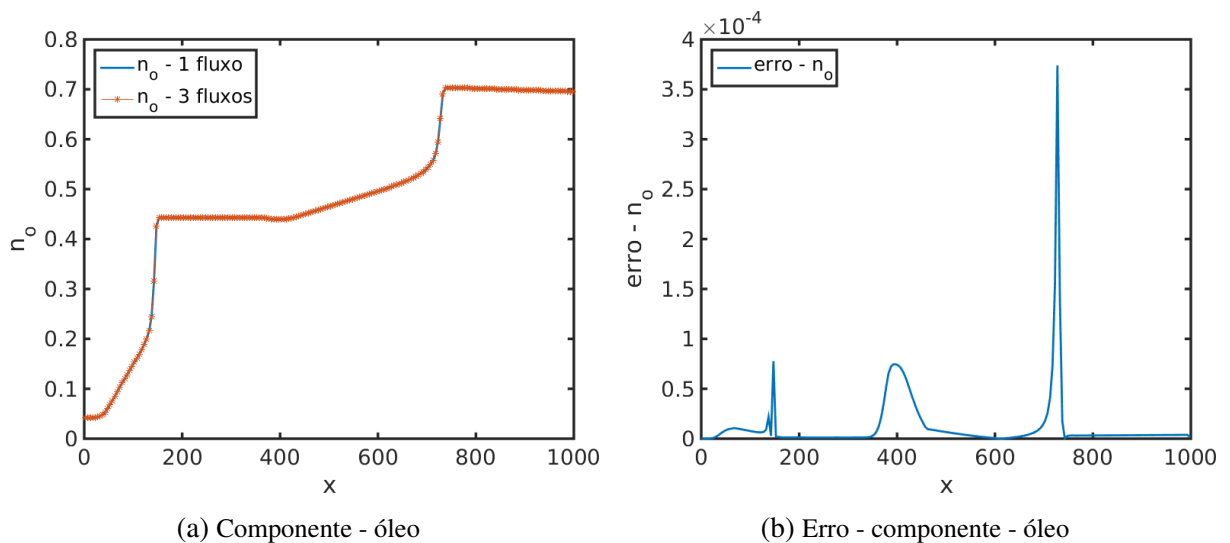


Figura 44 – Comparação da componente óleo e erro com três e um fluxo para a equação de pressão

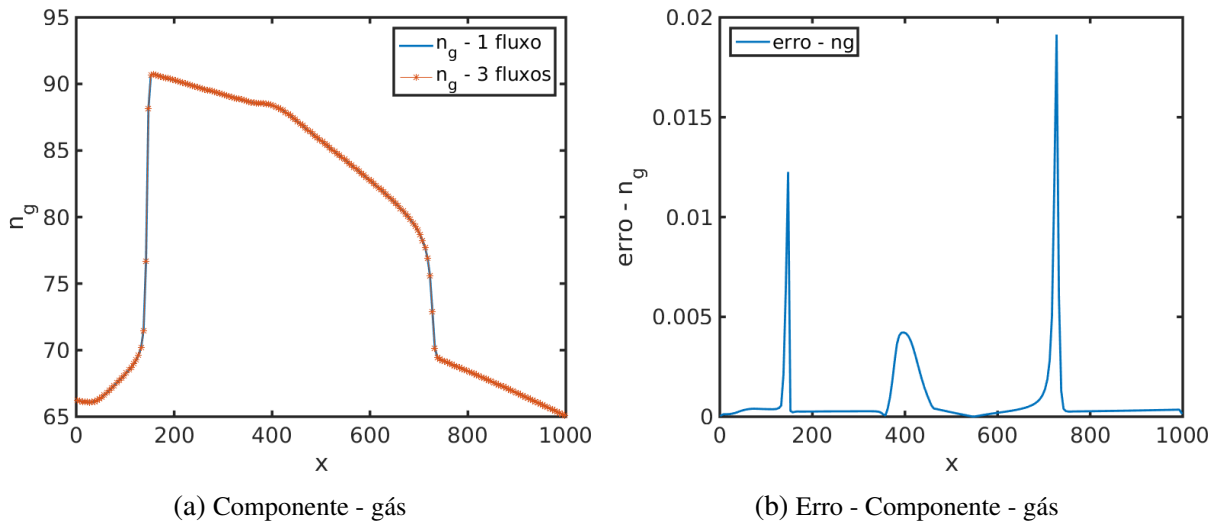


Figura 45 – Comparação da componente gás e erro com três e um fluxo para a equação de pressão

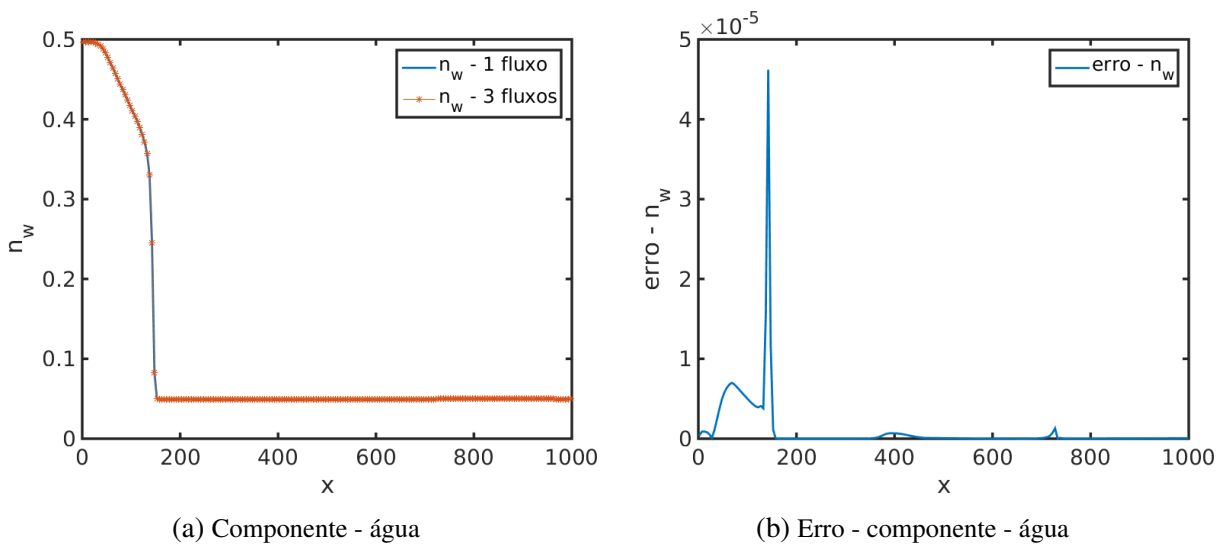


Figura 46 – Comparação da componente água e erro com três e um fluxo para a equação de pressão

Com esse teste computacional foi possível notar que o resultado das saturações das fases líquida, vapor e aquosa são próximas tanto com a equação de pressão com três fluxos como para apenas um fluxo. Essa observação é importante para ressaltar a possibilidade de utilizar a equação de pressão com apenas um fluxo, facilitando assim suas descrição e possível utilização para métodos multiescala.

4.4.2 Comparação de métodos de transporte para o caso saturado

O segundo exemplo para o caso unidimensional é um caso saturado, sendo o mesmo da subseção anterior, em que as condições de injeção e iniciais do reservatório são dadas pelas

seguintes saturações

$$s_{inj} = \begin{bmatrix} 0.00513 \\ 0.45480 \\ 0.49390 \end{bmatrix} \quad e \quad s_{res} = \begin{bmatrix} 0.89220 \\ 0.05790 \\ 0.04990 \end{bmatrix}, \quad (4.57)$$

respectivamente.

Além disso, R_a , R_l e R_v são diferentes de zero, ou seja, é permitido que o gás esteja dissolvido na fase aquosa e na fase líquida, considerando também a quantidade de óleo dissolvido na fase vapor.

A pressão inicial do reservatório é 1800 *psi*, sendo que a injeção ocorre a 2000 *psi* e a produção a 1600 *psi*. É importante ressaltar que a solução apresentada foi determinada para o tempo final $t = 150$ dias e com 200 células computacionais. Além disso, o reservatório é homogêneo com permeabilidade $k = 100$ md e 1000 feet de comprimento.

Com esse caso, será possível observar e avaliar como é obtida a solução por cada método numérico, comparando os métodos de primeira ordem como upwind e Rusanov com métodos de mais alta ordem como upwind minmod e Kurganov-Tadmor. Assim, pretende-se compreender como cada método numérico determinar a solução nas regiões de choque e rarefação, identificando assim uma melhor aproximação para a solução. Além disso, esses resultados permitem que avaliar a importância da utilização de métodos números de alta ordem, sendo que as regiões de choque e rarefação podem ser melhores identificadas.

A Figura 47 mostra os resultados para as saturações das fases líquida, vapor e aquosa, além da pressão calculadas no tempo final $t = 150$, permitindo assim observar as regiões de choque e rarefação, comparando as soluções para os diferentes métodos numéricos.

Observa-se nas Figuras 47a, 47b e 47c que existe uma rarefação que se prolonga até um choque no intervalo entre $x = 0$ e $x = 200$. Já para as saturações das fases líquida e vapor, há também uma outra região que apresenta uma rarefação que se conecta em um choque, localizados entre $x = 400$ e $x = 800$.

De maneira geral, é possível notar que os métodos upwind minmod e KT aproximam melhor a solução da saturação das fases líquida, vapor e aquosa quando comparados com os métodos upwind e Rusanov. Além disso, observa-se que os métodos de primeira ordem apresentam uma maior dificuldade na região de choque após a rarefação, sendo que os métodos de alta ordem conseguem aproximar melhor a solução nessas regiões.

Vale ressaltar que esses comportamentos dos métodos numéricos de primeira e segunda ordem foram também observados para os modelos bifásico e trifásico, onde os métodos como upwind e KT aproximam melhor a solução em regiões de choque.

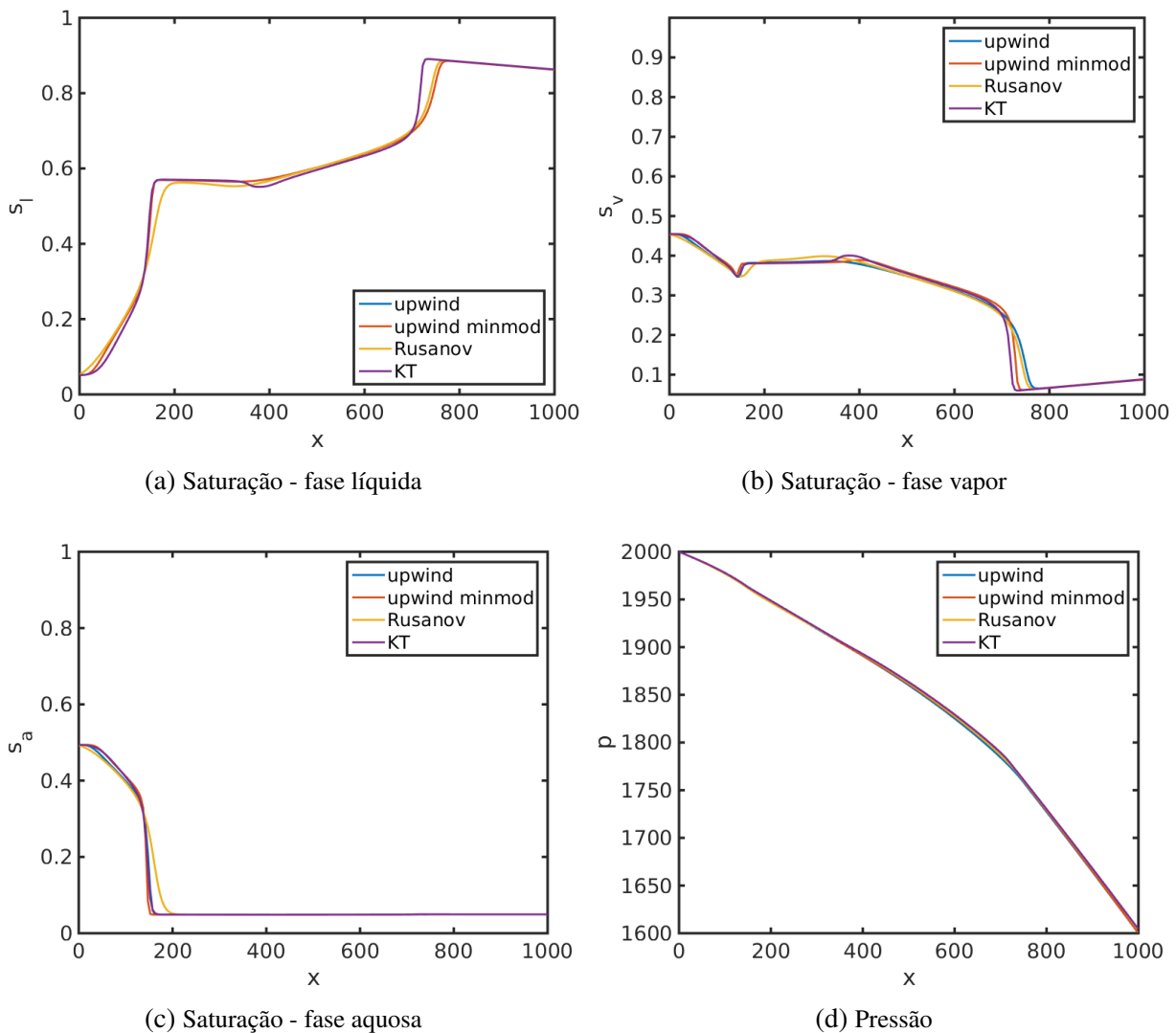


Figura 47 – Comparação dos métodos numéricos para as saturações e pressão do modelo black-oil

A Figura 48 mostra os resultados para as componentes óleo, gás e água no tempo final $t = 150$, permitindo assim observar as regiões de choque e rarefação, comparando as soluções para os diferentes métodos numéricos.

Assim como ocorre para as saturações, são construídos gráficos que mostram os valores de cada uma das componentes ao longo do reservatório. Nota-se nas Figuras 48a, 48b e 48c que existe uma rarefação que se prolonga até um choque no intervalo entre $x = 0$ e $x = 200$. Já para as componentes óleo e gás, há também uma outra região que apresenta uma rarefação que se conecta em um choque, localizados entre $x = 400$ e $x = 800$.

Avaliando os métodos numéricos, tem-se que os métodos upwind e Rusanov, de primeira ordem, possuem uma maior dificuldade em detectar a região de choque após a rarefação. Já os métodos upwind minmod e KT conseguem aproximar melhor essas regiões.

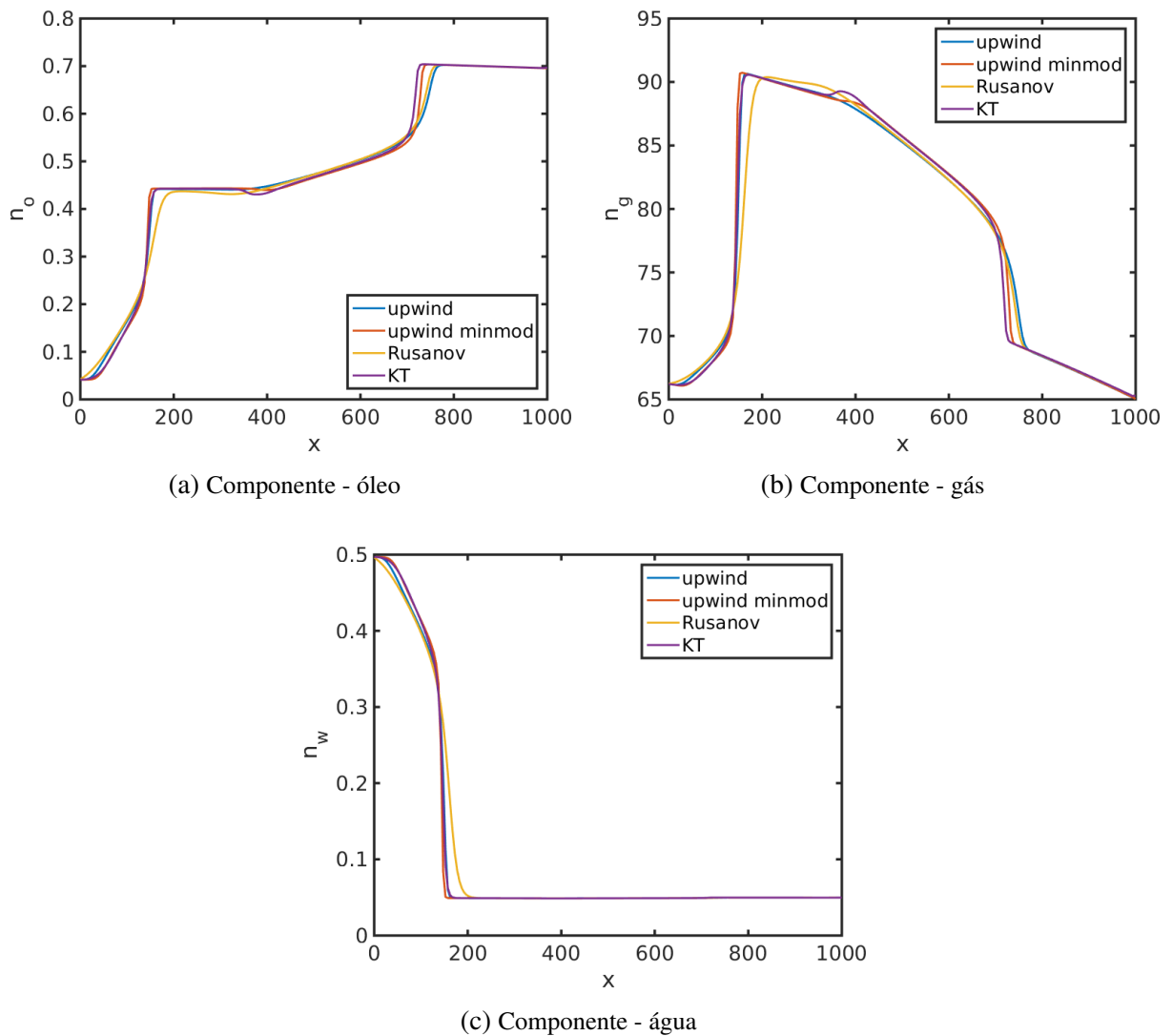


Figura 48 – Comparação dos métodos numéricos para as componentes do modelo black-oil

Com isso, pode-se afirmar que métodos numéricos de alta ordem apresentam melhores resultados na aproximação das soluções quando comparados com métodos numéricos de primeira ordem, ou seja, aqueles que não utilizam da reconstrução por partes, como é o caso do upwind minmod e Kurganov-Tadmor. Dessa forma, a escolha por métodos de alta ordem para a resolução da equação de conservação de massa é de suma importância na resolução do modelo black-oil.

4.4.3 Resultados para o caso subsaturado sem fase líquida

O terceiro exemplo unidimensional é um caso subsaturado, ou seja, as três componentes não precisam formar necessariamente três fases (líquida, vapor e aquosa), sendo que pode ocorrer de algum componente estar totalmente dissolvido em algumas das outras fases. Foram considerados R_a , R_l e R_v diferentes de zero, o que permite a componente gás estar presente tanto na fase líquida como na fase aquosa. Além disso, a componente óleo pode estar presente na fase vapor.

Para este caso foi considerado a não existência da fase líquida, sendo que a injeção ocorre com a mistura das fases vapor e aquosa. As saturações de injeção e iniciais do reservatório são

$$s_{inj} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.09830 \\ 0.90170 \end{bmatrix} \quad e \quad s_{res} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.58)$$

respectivamente.

A pressão inicial do reservatório é 4200 *psi*, sendo que a injeção ocorre a 4300 *psi* e a produção a 4100 *psi*. É importante ressaltar que a solução apresentada foi determinada para o tempo final $t = 200$ *dias* e com 200 células computacionais. Além disso, o reservatório é homogêneo com permeabilidade $k = 100$ *md* e 1000 *feet* de comprimento.

A Figura 49 mostra os resultados das saturações e da pressão no tempo $t = 200$ *dias*, com as soluções determinadas pelo método Kurganov-Tadmor na resolução da equação de conservação de massa.

Na Figura 49a estão as saturações, sendo que abaixo da curva encontra-se a saturação da fase vapor e acima encontra-se a saturação da fase aquosa. Observa-se que a saturação da fase líquida não está presente, uma vez esse caso é subsaturado. Além disso, é possível notar que existe uma onda de rarefação e choque, sendo este último bem determinado pelo método numérico.

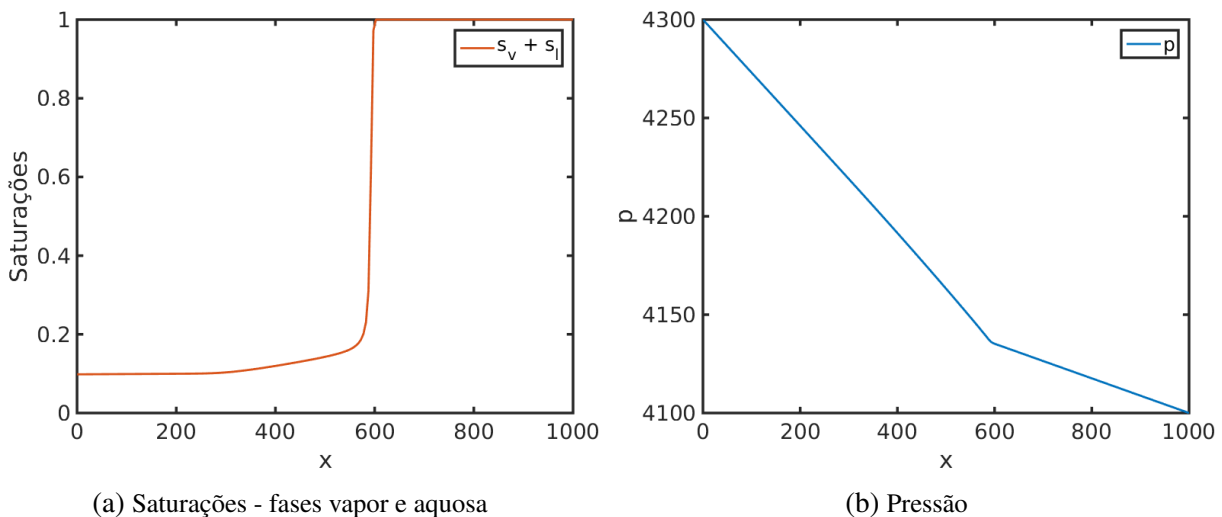


Figura 49 – Saturações e Pressão para o caso subsaturado sem a fase líquida no tempo $t = 200$ *dias*

A Figura 50 mostra os resultados das componentes no tempo $t = 200$ *dias*. Nota-se que é possível visualizar a presença de rarefação e choque nas componentes óleo, gás e água, sendo que através do método KT foi possível identificá-las corretamente. As Figuras 50a, 50b e

50c mostram os valores numéricos das componentes óleo, gás e água ao longo do reservatório, respectivamente.

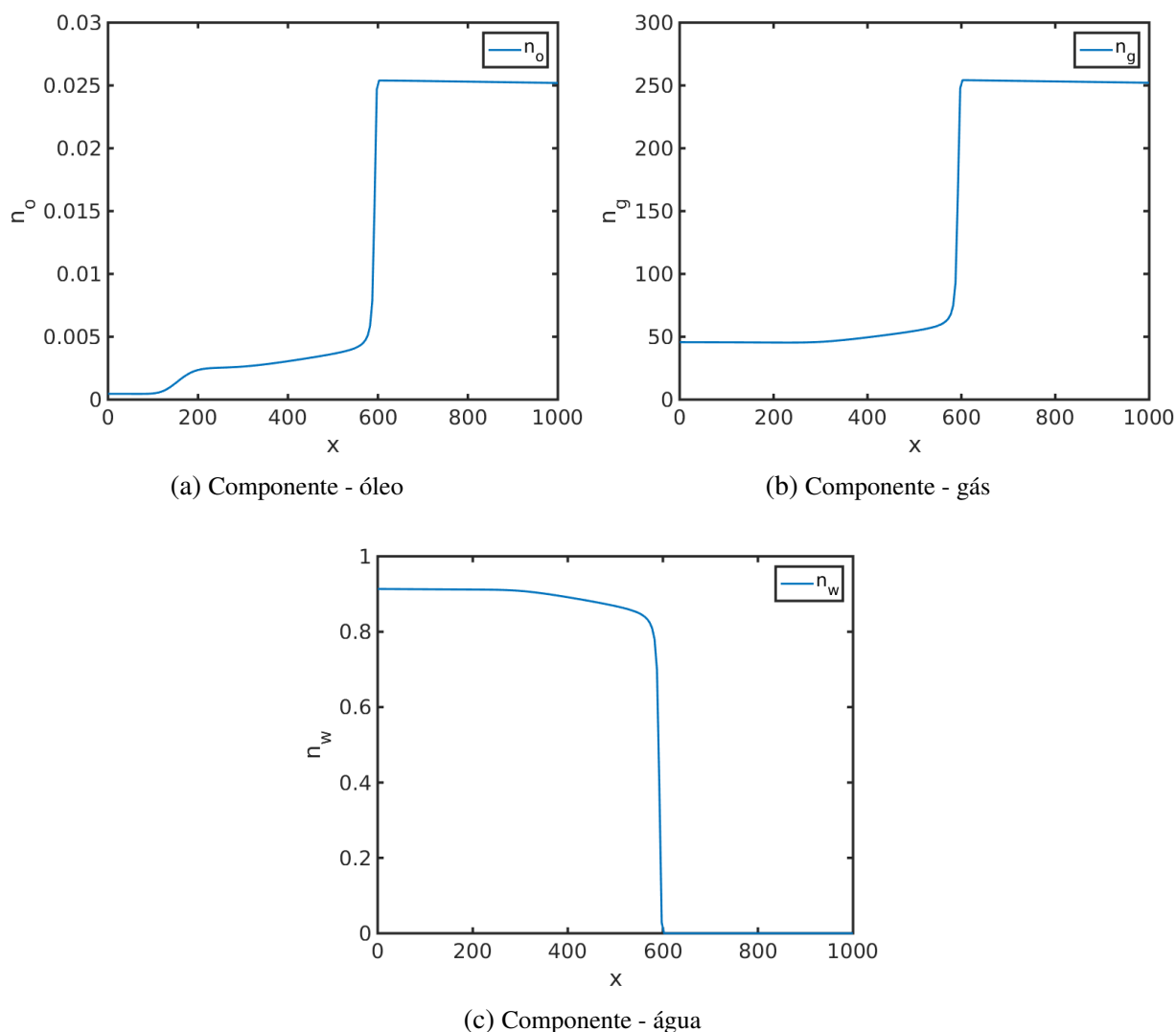


Figura 50 – Componentes do modelo black-oil - óleo, gás e água - no tempo $t = 200$ dias

De forma geral, esse exemplo mostra a possibilidade de existir as três fases do modelo black oil, sendo que uma das componentes pode estar totalmente presente em outra fase, o que caracteriza o caso subsaturado. Neste caso a fase ausente é líquida.

Além disso, observou-se que o método de Kurganov-Tadmor consegue identificar de forma satisfatória as regiões de choque e rarefação, tanto no cálculo das saturações como para cada uma das componentes.

4.4.4 Resultados para o caso misto (saturado e subsaturado)

O quarto exemplo unidimensional é um caso misto, em que dependendo da composição e variação de pressão é possível criar situações que misturam escoamentos saturados e subsaturados.

Foram considerados R_a , R_l e R_v diferentes de zero, o que permite a componente gás estar presente tanto na fase líquida como na fase aquosa. Além disso, a componente óleo pode estar presente na fase vapor.

Este caso mostra especificamente o efeito da variação de pressão no escoamento, sendo que o mesmo considera a injeção de água no reservatório sem a presença de hidrocarbonetos. Já o reservatório contém um fase líquida subsaturada.

As saturações de injeção e iniciais do reservatório são

$$s_{inj} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad s_{res} = \begin{bmatrix} 0.98480 \\ 0.01520 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

A pressão inicial do reservatório é 3500 *psi*, sendo que a injeção ocorre a 4000 *psi* e a produção a 3000 *psi*. É importante ressaltar que a solução apresentada foi determinada para o tempo final $t = 50$ dias e com 200 células computacionais. Além disso, o reservatório é homogêneo com permeabilidade $k = 100$ *md* e 1000 *feet* de comprimento.

A Figura 51 mostra os resultados das saturações e da pressão no tempo $t = 50$ dias, com as soluções determinadas pelo método Kurganov-Tadmor na resolução da equação de conservação de massa.

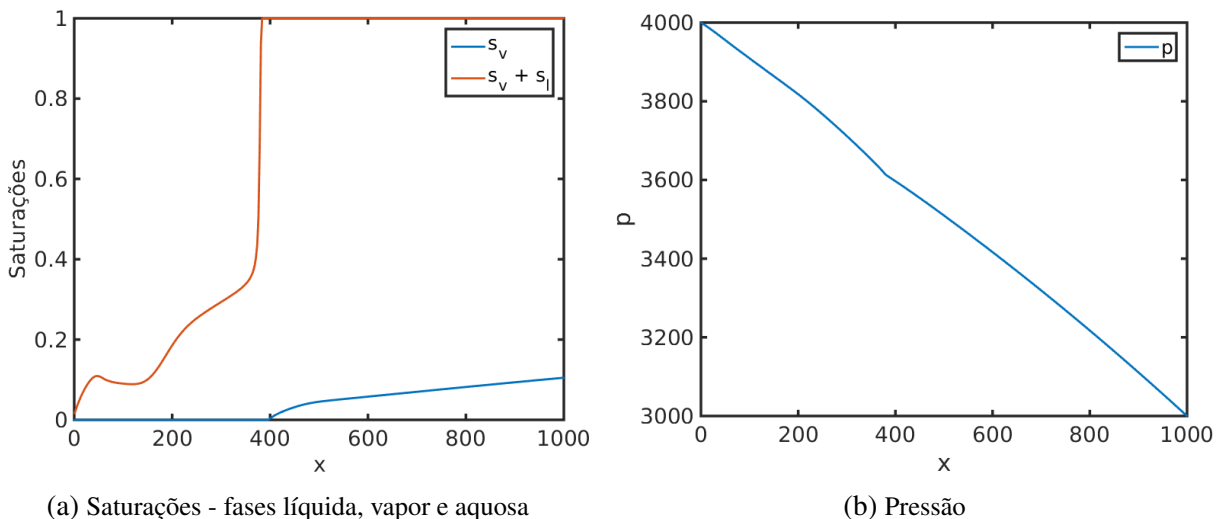


Figura 51 – Saturações e Pressão para o caso misto no tempo $t = 50$ dias

Na Figura 49a estão as saturações, sendo que abaixo da curva encontra-se a saturação da fase vapor e acima encontra-se a saturação da fase aquosa. Observa-se que a saturação da fase líquida não está presente, uma vez esse caso é subsaturado. Além disso, é possível notar que existe uma onda de rarefação e choque, sendo este último bem determinado pelo método numérico.

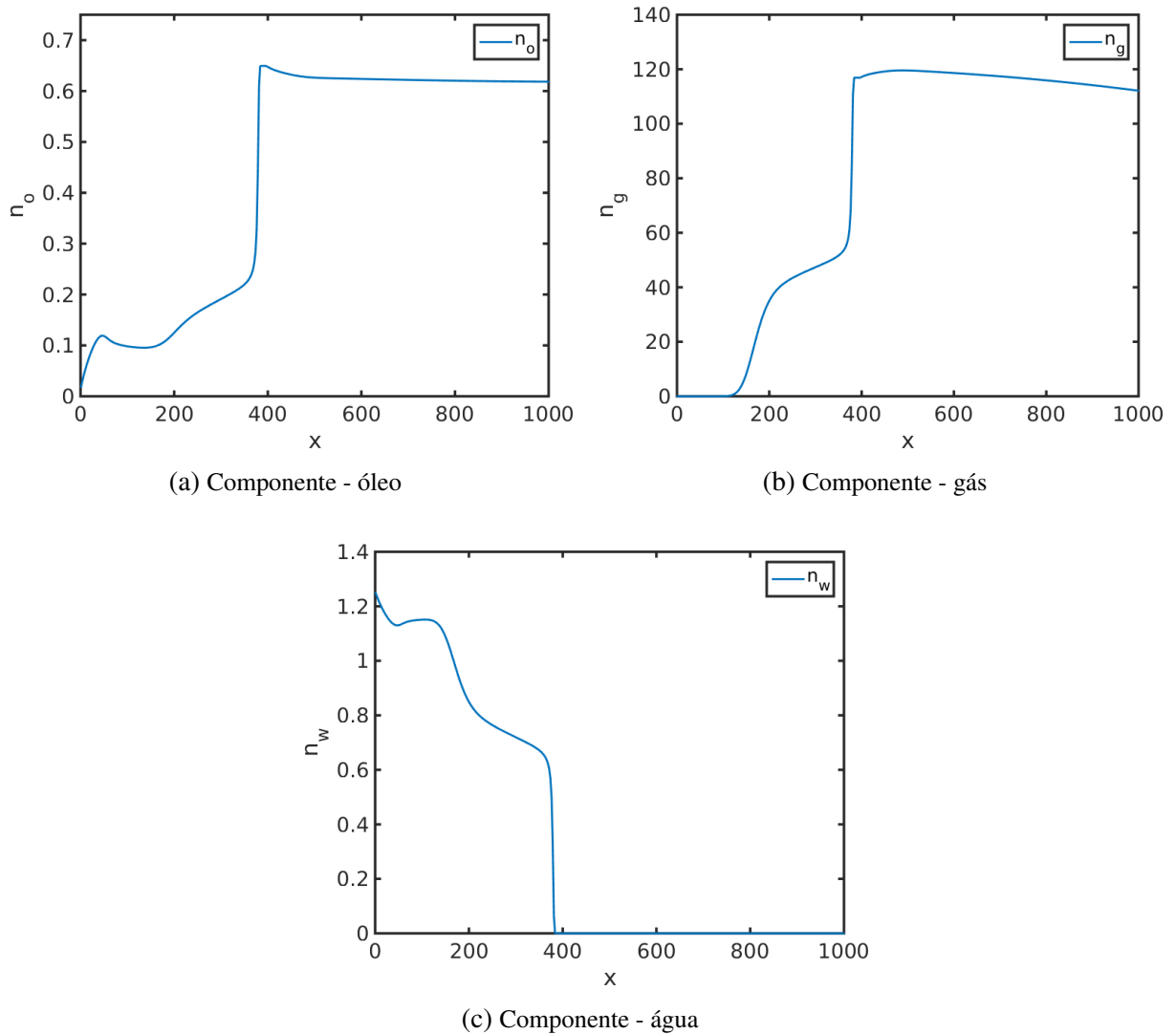


Figura 52 – Componentes do modelo black-oil - óleo, gás e água - no tempo $t = 50$ dias

A Figura 50 mostra os resultados das componentes no tempo $t = 200$ dias. Nota-se que é possível visualizar a presença de rarefação e choque nas componentes óleo, gás e água, sendo que através do método KT foi possível identificá-las corretamente. As Figuras 50a, 50b e 50c mostram os valores numéricos das componentes óleo, gás e água ao longo do reservatório, respectivamente.

De forma geral, esse exemplo mostra a possibilidade de existir as três fases do modelo black-oil, sendo que uma das componentes pode estar totalmente presente em outra fase, o que caracteriza o caso subsaturado. Neste caso a fase ausente é a líquida.

Através desses casos, envolvendo situações saturadas e subsaturadas, observou-se como o modelo black-oil pode apresentar três componentes e três fases, porém não sendo algo necessariamente obrigatório, uma vez que a componente óleo e/ou gás podem estar totalmente dissolvida em outras fases. Vale ressaltar que essas relações dependem das razões R_l , R_v e R_a , sendo que quando uma dessas razões é zero, então não há a presença de um determinado componente em

uma determinada fase. Além disso, observou-se também um caso misto, onde inicialmente a fase líquida não está presente, caracterizando um caso subsaturado. Porém, devido a variação de pressão, este caso passa a ser saturado com a presença das três fases.

A comparação dos métodos numéricos upwind, upwind minmod, Rusanov e Kurganov-Tadmor, permitiu avaliar como cada método obtém a solução para as saturações de cada uma das fases, sendo que os métodos que possuem reconstrução como o upwind minmod e KT conseguem identificar e aproximar melhor as regiões de choque, enquanto que métodos de $O(h)$ como o upwind e Rusanov não apresentam bom desempenho para essas regiões, perdendo algumas informações.

O caso da resolução do modelo black-oil considerando a equação de pressão com um ou três fluxos permitiu observar que a solução das saturações das fases líquida, vapor e aquosa não sofrem uma mudança significativa, sendo que através dos gráficos do erro foi possível notar essa pequena diferença no resultado. O mesmo ocorre com relação a pressão e as componentes óleo, gás e água.

Esse fato será importante para a aplicação da equação de pressão com apenas um fluxo para problemas bidimensionais e posteriormente a utilização de métodos multiescala com o modelo black-oil.

4.5 Simulação do modelo black-oil bidimensional

Nesta seção são apresentados os casos bidimensionais do modelo black-oil, permitindo assim realizar comparações das soluções obtidas com os métodos upwind, upwind minmod, Rusanov e Kurganov-Tadmor. A intenção é observar como os métodos de segunda ordem podem aproximar melhor a solução obtida quando comparados com métodos de primeira ordem, como é o caso dos métodos upwind e Rusanov.

Como foi observado no modelo black-oil unidimensional, a equação parabólica de pressão com apenas um fluxo foi utilizada para a resolução dos problemas bidimensionais considerados nessa seção. O primeiro caso consiste em uma aplicação direta de um caso unidimensional com a intenção de validar o funcionamento do código 2D. O segundo caso foi considerado um problema do tipo *quarter five-spot*, onde foram observadas soluções das saturações das fases aquosa, líquida e vapor, avaliando como os métodos de primeira e segunda ordem se comportam ao determinar situações que envolvem choque/refração. Os dois primeiros casos consideram um campo de permeabilidade homogêneo.

Para o terceiro e quarto casos foram considerados campos de permeabilidade heterogêneos, sendo o primeiro um campo Gaussiano e o segundo com canais de alta permeabilidade. Dessa forma, a intenção é observar a solução das saturações de cada uma das fases que compõem o modelo black-oil.

4.5.1 Injeção lateral em meio homogêneo

O primeiro exemplo para o caso bidimensional considera R_a , R_l e R_v diferentes de zero, ou seja, é permitido que o gás esteja dissolvido na fase aquosa e na fase líquida, considerando também a quantidade de óleo dissolvido na fase vapor.

As condições de injeção e iniciais do reservatório são dadas por

$$s_{inj} = \begin{bmatrix} 0.00513 \\ 0.45480 \\ 0.49390 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad s_{res} = \begin{bmatrix} 0.89220 \\ 0.05790 \\ 0.04990 \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

respectivamente.

A pressão inicial do reservatório é 1800 *psi*, sendo que a injeção ocorre a 2000 *psi* e a produção a 1600 *psi*. É importante ressaltar que a solução apresentada foi determinada para o tempo final $t = 1.5$ dias e com 200×30 células computacionais. Além disso, o reservatório é homogêneo com permeabilidade $k = 100$ *md* e 100 *feet* de comprimento nas direções x e y , ou seja, com domínio $\Omega = (0, 100) \times (0, 100)$.

A injeção dada por s_{inj} é realizada em toda a fronteira esquerda, em $x = 0$. Já a produção ocorre em toda a fronteira direita, em $x = 100$. O mesmo vale para as condições de pressão de injeção e produção.

Para este caso foi considerado o cálculo da pressão com apenas um fluxo (4.47) e o método de Kurganov-Tadmor para a resolução da equação da conservação de massa, que como visto anteriormente, é capaz de identificar as regiões de rarefação e choque de maneira bastante satisfatória.

O objetivo desse caso homogêneo com injeção lateral é verificar o funcionamento do código desenvolvido para os casos bidimensionais. Como as condições do reservatório, pressão e saturação são as mesmas do primeiro caso unidimensional, pretende-se obter solução similar. Ressalta-se o fato de que o comprimento do reservatório é de 100 *feet*, ou seja, dez vezes menor quando comparado com o primeiro caso que apresenta 1000 *feet*. Assim, para obter uma solução para o bidimensional com as mesmas características, o tempo final considerado foi $t = 1.5$ dias.

Através desse caso, será possível construir outras situações com diferentes configurações para o modelo black-oil.

A Figura 53 mostra os resultados obtidos para as saturações da fase vapor e a soma das fases vapor e líquida, além do gráfico de perfil de cada uma dessas situações. A intenção com essa figura é construir algo similar ao apresentado an Figura 47.

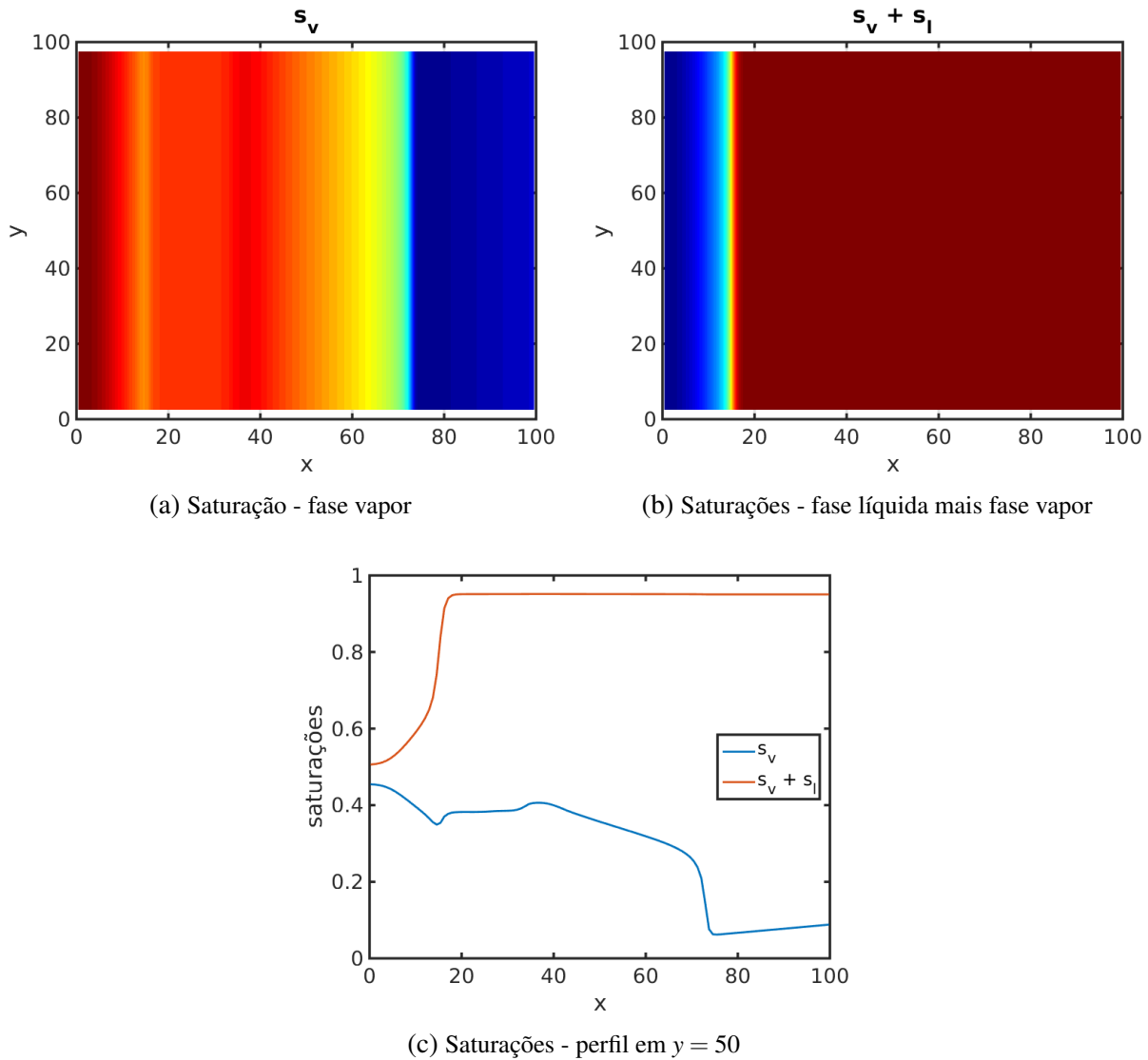


Figura 53 – Saturações e perfil das soluções em $t = 1.5$ dias

Observa-se que nas Figuras 53a e 53b estão as saturações das fases vapor e a soma das fases líquida e vapor. Com a finalidade de visualizar o perfil dessas soluções, é escolhido $y = 50$ variando x para todo o domínio. Dessa forma, obtém-se a Figura 53c, em que curva mais abaixo representa a saturação da fase vapor e a curva de cima a saturação da soma das fases líquida e vapor. Nota-se que a distância entre a curva abaixo e acima representa a saturação da fase líquida e a distância da curva mais acima para o topo do gráfico representa a saturação da fase aquosa.

Entre $x = 0$ e $x = 20$ é possível observar o início de uma rarefação que continua até um choque. Além disso, o mesmo ocorre entre $x = 40$ e $x = 80$, com a formação de uma rarefação conectando-se a um choque.

A Figura 54 mostra o resultado obtido para a componente óleo no tempo $t = 1.5$, permitindo observar as regiões de choque e rarefação e compará-las com o caso unidimensional.

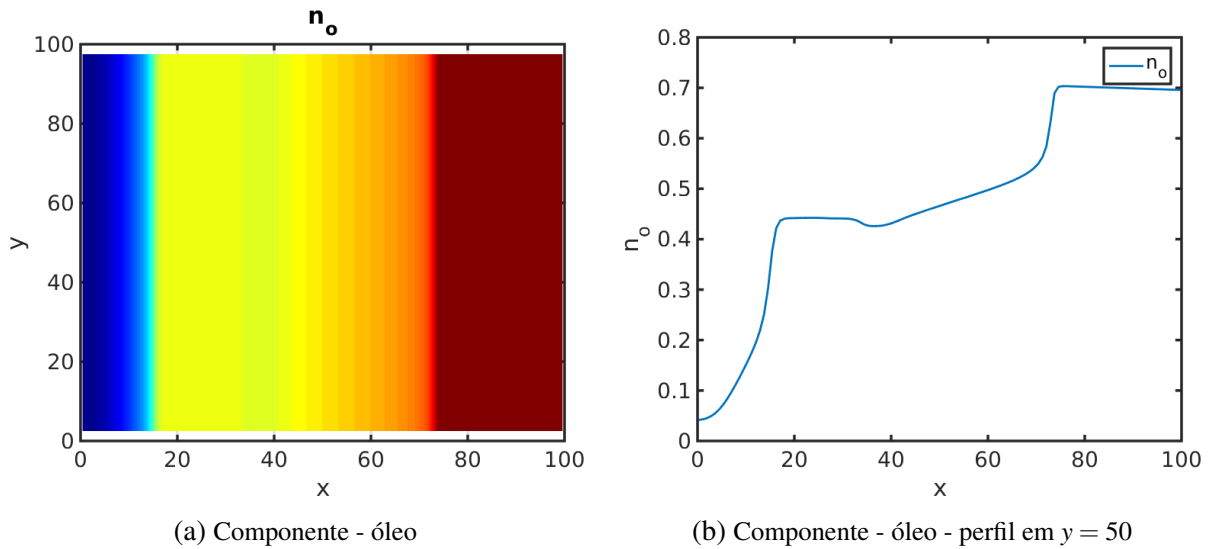


Figura 54 – Componente óleo e perfil da solução em $t = 1.5$ dias

Observa-se que a Figura 54a mostra o resultado com o gráfico bidimensional. Dessa forma, para obter o perfil da solução, fixa-se $y = 50$ e considera-se os valores da componente óleo ao longo, obtendo assim a Figura 54b.

Assim como nas saturações, nota-se que o método KT consegue identificar corretamente as regiões de choque e rarefação, apresentando um perfil como o apresentado na Figura 48a.

A Figura 55 mostra o resultado obtido para a componente gás no tempo $t = 1.5$, permitindo observar as regiões de choque e rarefação e compará-las com o caso unidimensional.

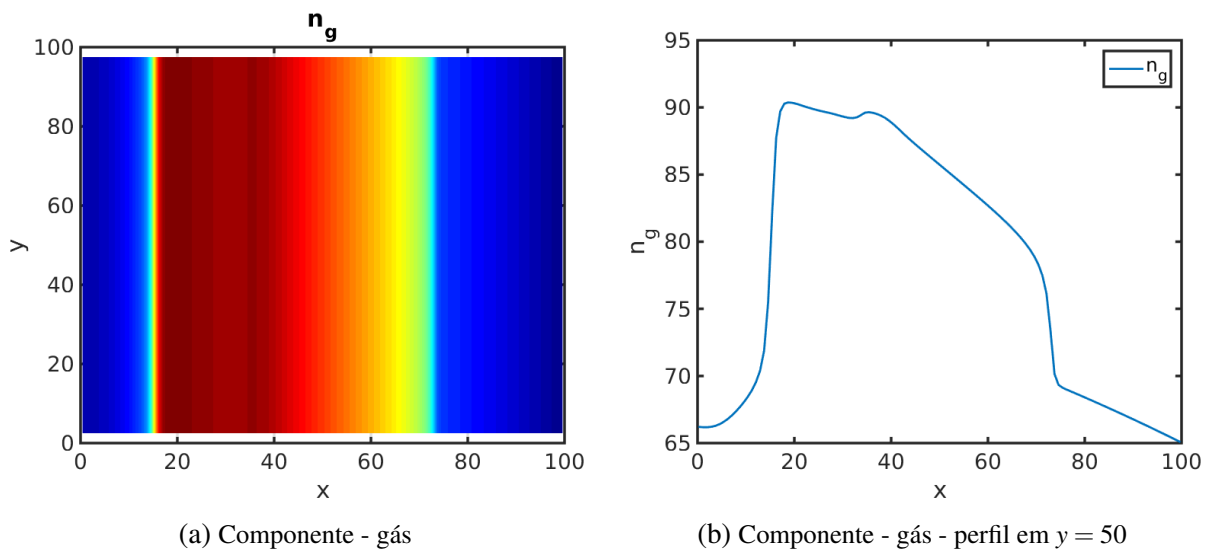


Figura 55 – Componente gás e perfil da solução em $t = 1.5$ dias

Observa-se que a Figura 55a mostra o resultado com o gráfico bidimensional. Dessa forma, para obter o perfil da solução, fixa-se $y = 50$ e considera-se os valores da componente gás

ao longo, obtendo assim a Figura 55b.

Assim como nas saturações, nota-se que o método KT consegue identificar corretamente as regiões de choque e rarefação, apresentando um perfil como o apresentado na Figura 48b.

A Figura 56 mostra o resultado obtido para a componente água no tempo $t = 1.5$, permitindo observar as regiões de choque e rarefação e compará-las com o caso unidimensional.

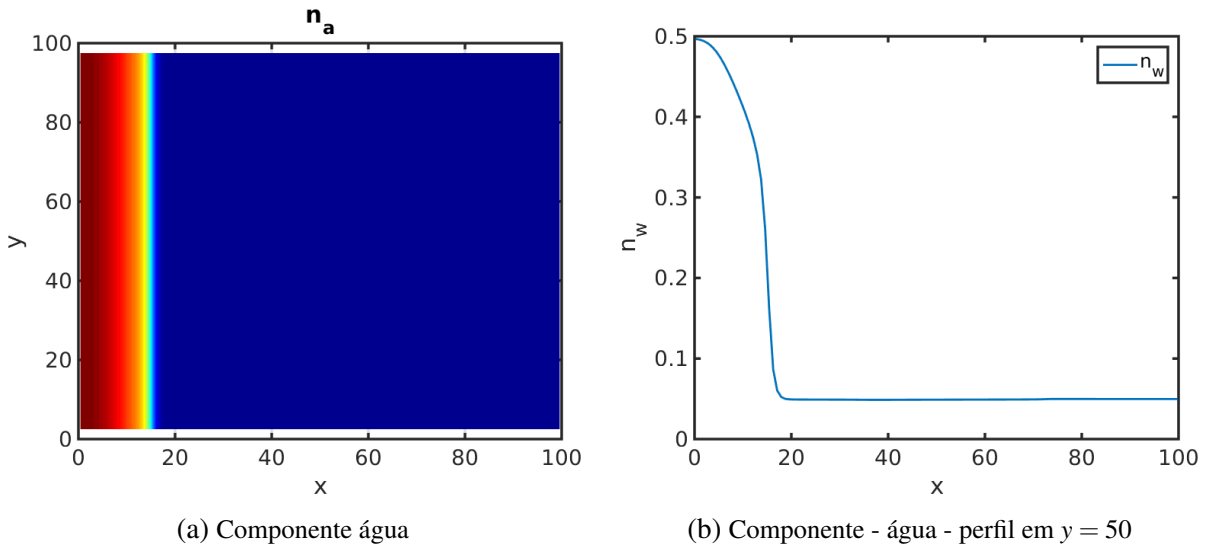


Figura 56 – Componente água e perfil da solução em $t = 1.5$ dias

Observa-se que a Figura 56a mostra o resultado com o gráfico bidimensional. Dessa forma, para obter o perfil da solução, fixa-se $y = 50$ e considera-se os valores da componente água ao longo, obtendo assim a Figura 56b.

Assim como nas saturações, nota-se que o método KT consegue identificar corretamente as regiões de choque e rarefação, apresentando um perfil como o apresentado na Figura 48c.

Com isso, através desse caso homogêneo com injeção lateral, foi possível validar o código desenvolvido para o caso bidimensional, além de observar as soluções obtidas e compará-las com o que foi desenvolvido para o caso unidimensional.

4.5.2 Quarter of five-spot em meio homogêneo

O segundo exemplo para o caso bidimensional considera $R_a = 0$, $R_v = 0$ e R_l diferente de zero, ou seja, é permitido que o gás esteja dissolvido apenas na fase líquida. Diferente dos outros casos, quando R_a é igual a zero, não há a possibilidade da componente gás estar presente na fase aquosa, o mesmo vale para quando R_v é igual a zero, indicando que não há a presença da componente óleo na fase vapor. Assim, com apenas R_l diferente de zero, tem-se para esses parâmetros, apenas a componente gás pode estar presente na fase líquida.

As condições de injeção e iniciais do reservatório são dadas por

$$\mathbf{s}_{inj} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.69570 \\ 0.30430 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{s}_{res} = \begin{bmatrix} 0.76580 \\ 0.14060 \\ 0.09360 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

A pressão inicial do reservatório é 1800 *psi*, sendo que a injeção ocorre a 2000 *psi* e a produção a 1600 *psi*. É importante ressaltar que a solução apresentada foi determinada para o tempo final $t = 5$ dias e com 50×50 células computacionais. Além disso, o reservatório é homogêneo com permeabilidade $k = 100$ *md* e 100 *feet* de comprimento nas direções x e y , ou seja, com domínio $\Omega = (0, 100) \times (0, 100)$.

Para este caso foi considerado um problema do tipo *quarter five-spot*, sendo que a injeção ocorre no canto inferior esquerdo domínio com coordenadas $x = 0$ e $y = 0$. A produção ocorre no canto superior direito, em $x = 100$ e $y = 100$. O mesmo vale para as condições de pressão de injeção e produção.

O cálculo da pressão é realizado com apenas um fluxo (4.47) e o método de Kurganov-Tadmor é utilizado para a construção dos gráficos bidimensionais referentes as saturações das fases líquida, vapor e aquosa. Além disso, o objetivo é comparar as soluções determinadas pelos métodos numéricos upwind, upwind minmod, Rusanov e Kurganov-Tadmor e assim verificar como cada um se comporta com relação as regiões de rarefação e choque.

A Figura 57 mostra as saturações das fases líquida, vapor e aquosa determinadas no tempo $t = 5$ dias e calculados com o método numérico KT. Essas figuras possuem a intenção de mostrar a configuração de cada uma dessas saturações, observando que as fases líquida e vapor estão mais próximas da região de produção.

Observa-se pelas Figuras 57a, 57b e 57c que as três fases estão presentes no escoamento com as condições de injeção e iniciais do reservatório apresentadas em (4.61), além das condições de pressão de injeção, produção e inicial do reservatório.

Com a finalidade de comparar e observar como os diferentes métodos numéricos aproximam as soluções das saturações para esse modelo black-oil e devido a dificuldade de comparar as soluções no formato da Figura 57, será construído um perfil de solução similar ao realizado na Figura 53.

Para facilitar essa comparação, os valores das saturações são dispostos ao longo da diagonal que conecta a injeção, localizada em $x = 0$ e $y = 0$, até a produção que está localizada em $x = 100$ e $y = 100$. Vale ressaltar que essa distância foi normalizada para a construção dos gráficos.

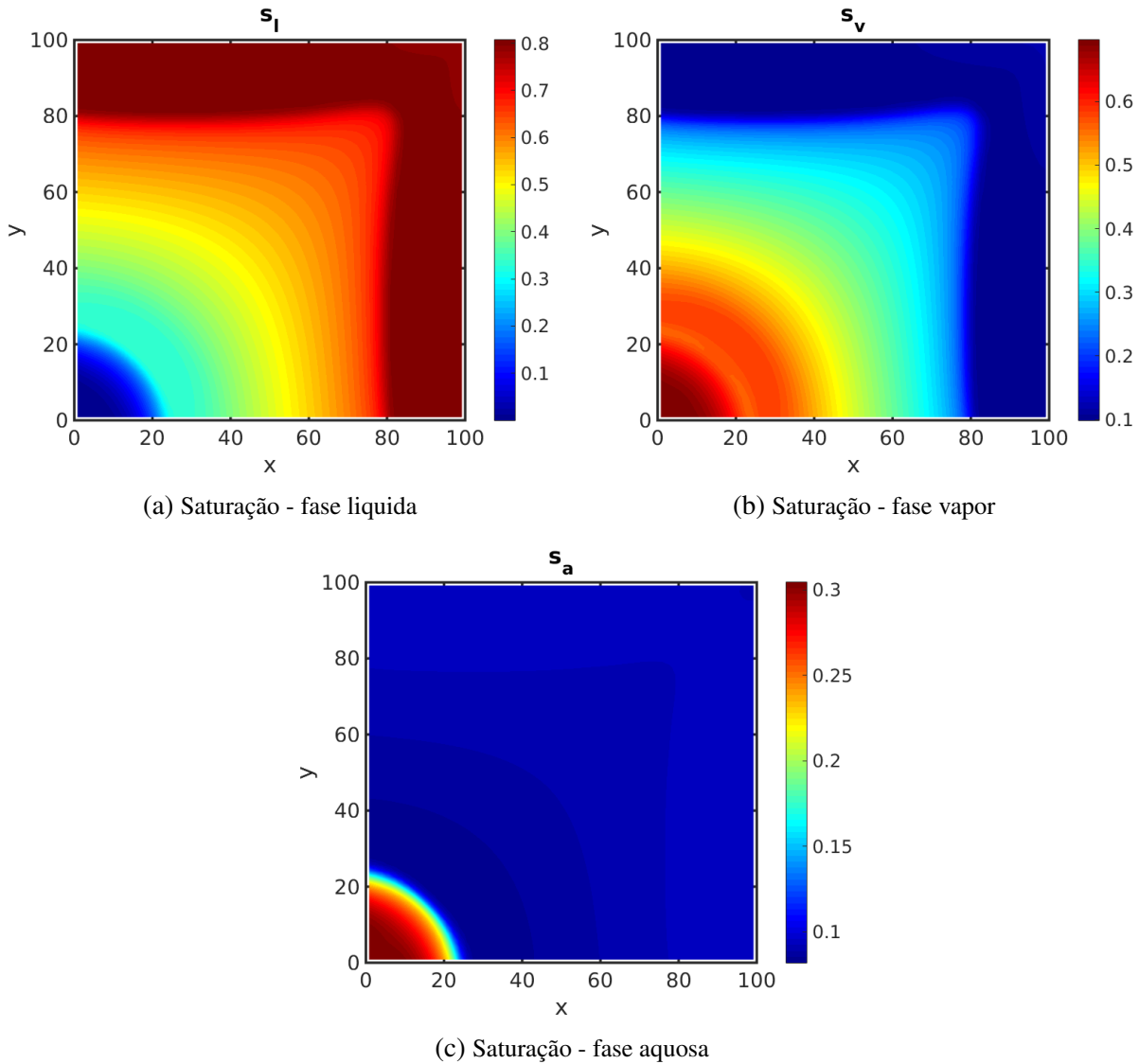


Figura 57 – Saturações das fases líquida, vapor e aquosa no tempo $t = 5$ dias

A Figura 58 mostra os resultados das saturações das fases líquida, vapor e aquosa considerando o perfil diagonal para cada uma delas, o que facilita assim a comparação das soluções obtidas pelos métodos upwind, upwind minmod, Rusanov e Kurganov-Tadmor.

Observa-se na Figura 58a a existência de uma rarefação seguida de um choque na região entre $x = 0$ e $x = 0.2$, sendo que os métodos de alta ordem como o upwind minmod e KT conseguem aproximar melhor o choque quando comparados com os métodos upwind e Rusanov. Além disso, em $x = 0.8$ há a presença de um outro choque, sendo que também é melhor capturado pelos métodos de alta ordem.

A Figura 58b mostra as mesmas observações para a saturação da fase vapor, tendo as mesmas localizações para o choque e desempenho dos métodos numéricos. Vale ressaltar a presença também de rarefação.

Já com relação a saturação da fase aquosa, nota-se que pela Figura 58c há existência

também de um choque, que é melhor capturado pelas soluções dos métodos de alta ordem.

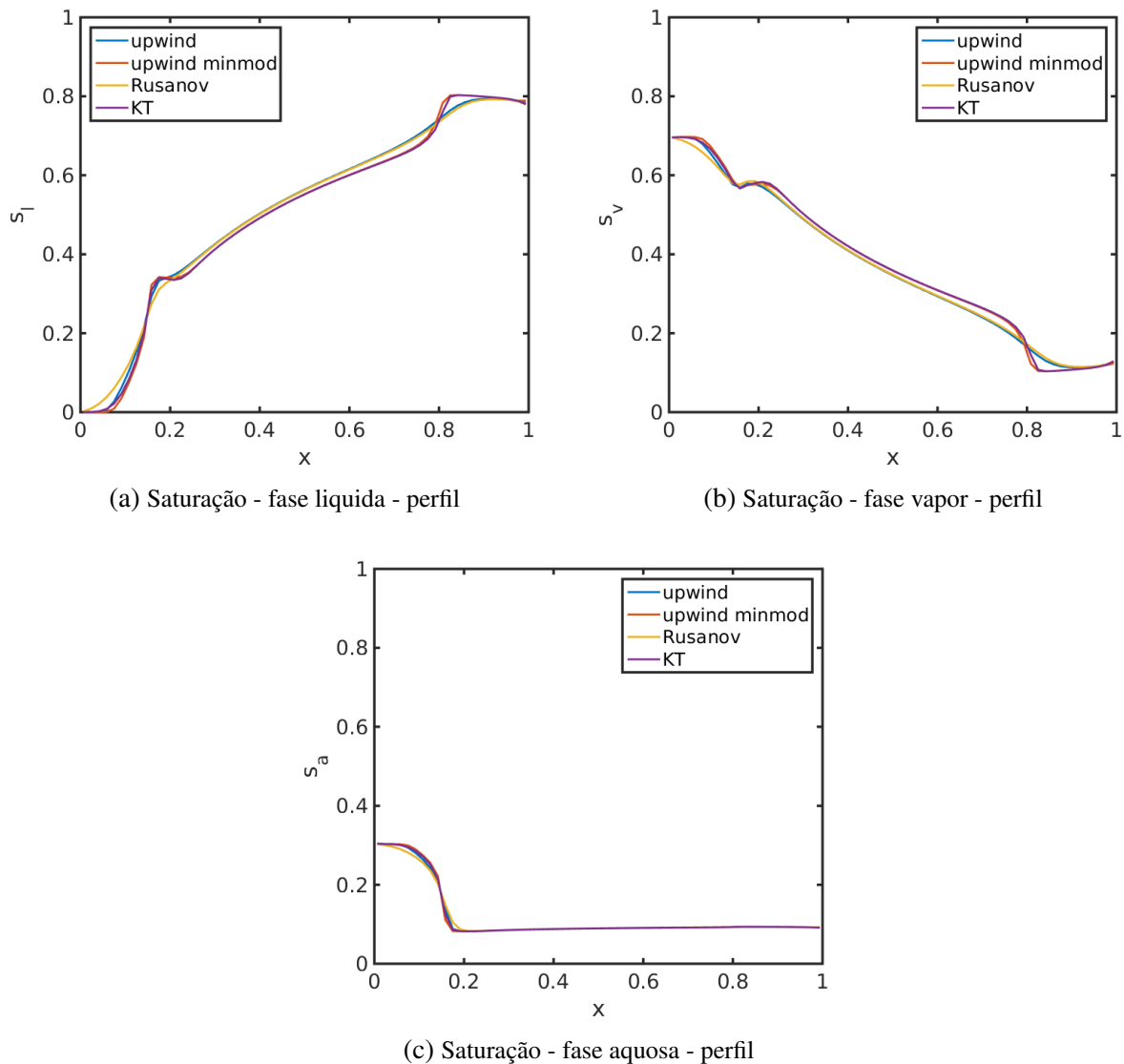


Figura 58 – Saturações das fases líquida, vapor e aquosa no tempo $t = 5$ dias - perfil

4.5.3 Meio heterogêneo de alto contraste

Com esses exemplos que mostram o funcionamento do código para o modelo black-oil bidimensional e a comparação dos métodos numéricos, destacando a importância de métodos de alta ordem, foi possível desenvolver novas situações a fim de observar as soluções obtidas para cada uma das saturações.

Considera-se $R_a = 0$, $R_v = 0$ e R_l diferente de zero, ou seja, apenas a componente gás pode estar presente na fase líquida. As condições das saturações de injeção e iniciais do reservatório são as mesmas apresentadas e, (4.61), além do fato de que a pressão inicial do reservatório é 1800 *psi*, sendo que a injeção ocorre a 2000 *psi* e a produção a 1600 *psi*.

A solução foi determinada com 50×50 células computacionais, sendo que o reservatório

apresenta o domínio $\Omega = (0, 300) \times (0, 300)$, ou seja, 300 *feet* na direção x e 300 *feet* na direção y .

Para este caso foi considerado um problema do tipo *quarter five-spot*, sendo que a injeção ocorre no canto inferior esquerdo do domínio com coordenadas $x = 0$ e $y = 0$. A produção ocorre no canto superior direito, em $x = 300$ e $y = 300$. O mesmo vale para as condições de pressão de injeção e produção.

A equação de pressão é resolvida com apenas um fluxo (4.47) e o método numérico escolhido para a resolução da equação de conservação de massa é o Kurganov-Tadmor. É importante ressaltar também que o campo de permeabilidade é heterogêneo, ou seja, há diferentes valores de k no reservatório, indicando regiões de alta e baixa permeabilidade.

A Figura 59 mostra um campo de permeabilidade de alto contraste representado em escala logarítmica. Nota-se que há regiões de alta, média e baixa permeabilidade. Assim, pela figura pode-se observar que não há uma existência de um canal de alta permeabilidade, indicando que o escoamento irá ocorrer inicialmente até encontrar um caminho mais que apresenta maior permeabilidade, evitando regiões de baixa permeabilidade.

A intenção de construir um campo de permeabilidade heterogêneo é observar as soluções das saturações para diferentes tempos, permitindo assim compreender as configurações de cada uma das fases e como, especificamente, acontece a produção da fase líquida.

Pelas condições de injeção em (4.61), observa-se que ocorre apenas a entrada da fase vapor e aquosa, sendo que o reservatório apresenta condição inicial com a maior parte composto pela fase líquida.

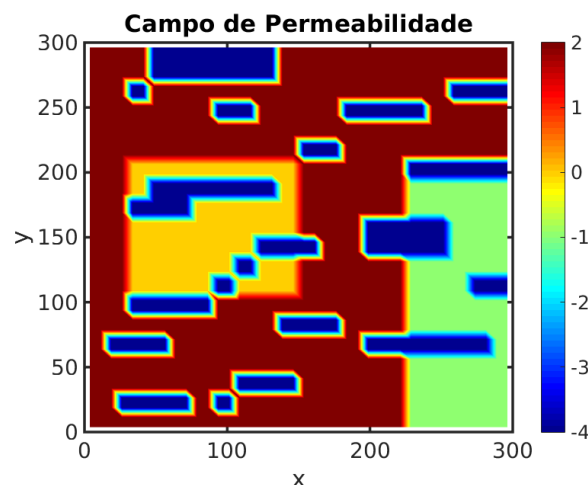


Figura 59 – Campo de permeabilidade

A Figura 60 mostra os resultados das saturações das fases líquida, vapor e aquosa para o tempo $t = 200$ dias. Observa-se que as fases líquida e vapor encontram-se mais avançadas com relação a saturação da fase aquosa, como pode ser visto nas Figuras 60a, 60b e 60c.

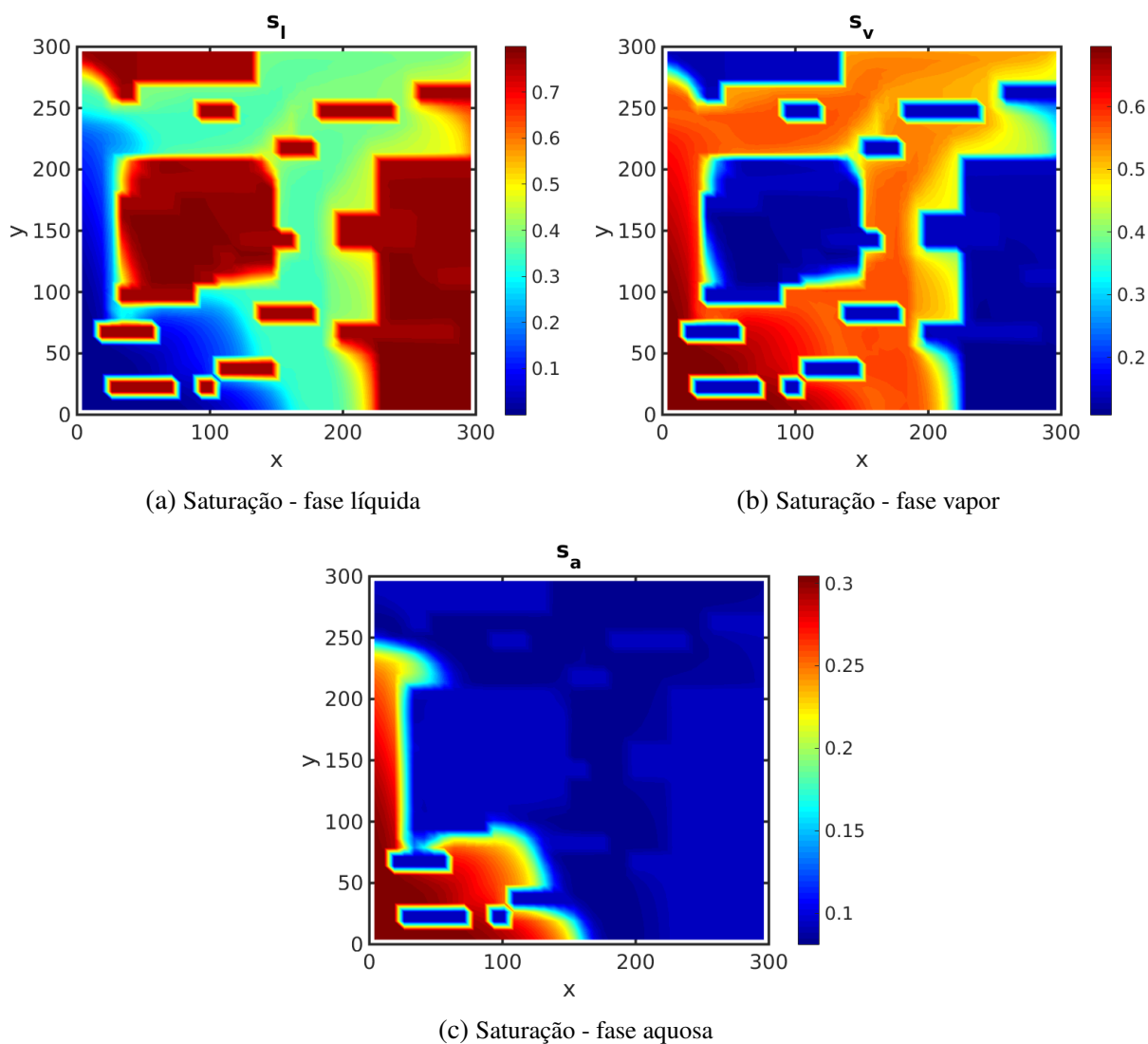


Figura 60 – Saturações - campo heterogêneo de alto contraste - $t = 200$ dias

A fase vapor atinge a fronteira de produção de forma mais rápida que fase aquosa, sendo que a primeira é a responsável por empurrar inicialmente uma quantidade de óleo. Já a saturação da fase aquosa percorre o reservatório de forma mais lenta, empurrando uma significativa quantidade de óleo.

4.5.4 Meio heterogêneo Gaussiano

Considera-se $R_a = 0$, $R_v = 0$ e R_l diferente de zero, ou seja, apenas a componente gás pode estar presente na fase líquida. As condições das saturações de injeção e iniciais do reservatório são as mesmas apresentadas e, (4.61), além do fato de que a pressão inicial do reservatório é 1800 *psi*, sendo que a injeção ocorre a 2000 *psi* e a produção a 1600 *psi*.

A solução foi determinada com 40×40 células computacionais, sendo que o reservatório apresenta o domínio $\Omega = (0, 100) \times (0, 100)$, ou seja, 100 *feet* na direção x e 100 *feet* na

direção y . Para este caso foi considerado um problema cuja injeção é realizada em toda a fronteira esquerda, em $x = 0$. Além disso, a produção ocorre em $x = 100$, fronteira direita.

A equação de pressão é resolvida com apenas um fluxo (4.47) e o método numérico escolhido para a resolução da equação de conservação de massa é o Kurganov-Tadmor. É importante ressaltar também que o campo de permeabilidade é heterogêneo, ou seja, há diferentes valores de k no reservatório, indicando regiões de alta e baixa permeabilidade.

A Figura 61 mostra o campo de permeabilidade Gaussiano de alto contraste representado em escala logarítmica. Nota-se que há regiões de alta, média e baixa permeabilidade. Assim, pela figura pode-se observar que não há uma existência de um canal de alta permeabilidade, indicando que o escoamento irá ocorrer inicialmente até encontrar um caminho mais que apresenta maior permeabilidade, evitando regiões de baixa permeabilidade.

A intenção de construir um campo de permeabilidade heterogêneo é observar as soluções das saturações para diferentes tempos, permitindo assim compreender as configurações de cada uma das fases e como, especificamente, acontece a produção da fase líquida.

Pelas condições de injeção em (4.61), observa-se que ocorre apenas a entrada da fase vapor e aquosa, sendo que o reservatório apresenta condição inicial com a maior parte composto pela fase líquida.

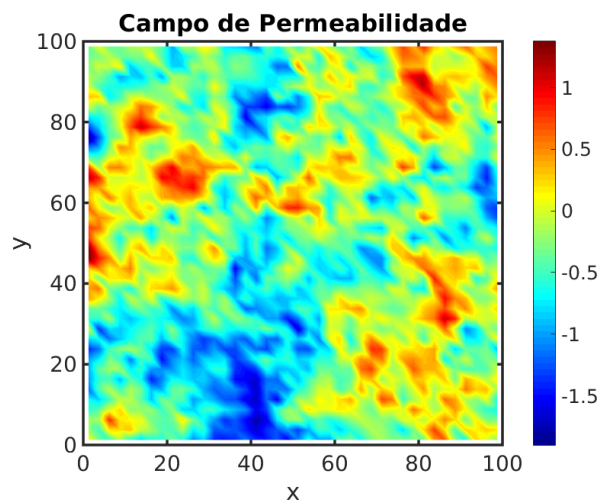


Figura 61 – Campo de permeabilidade Gaussiano

A Figura 62 mostra os resultados das saturações das fases líquida, vapor e aquosa para o tempo $t = 50$ dias. Observa-se que as saturações da fase líquida e vapor encontram-se mais avançadas com relação a saturação da fase aquosa, como pode ser visto nas Figuras 62a, 62b e 62c.

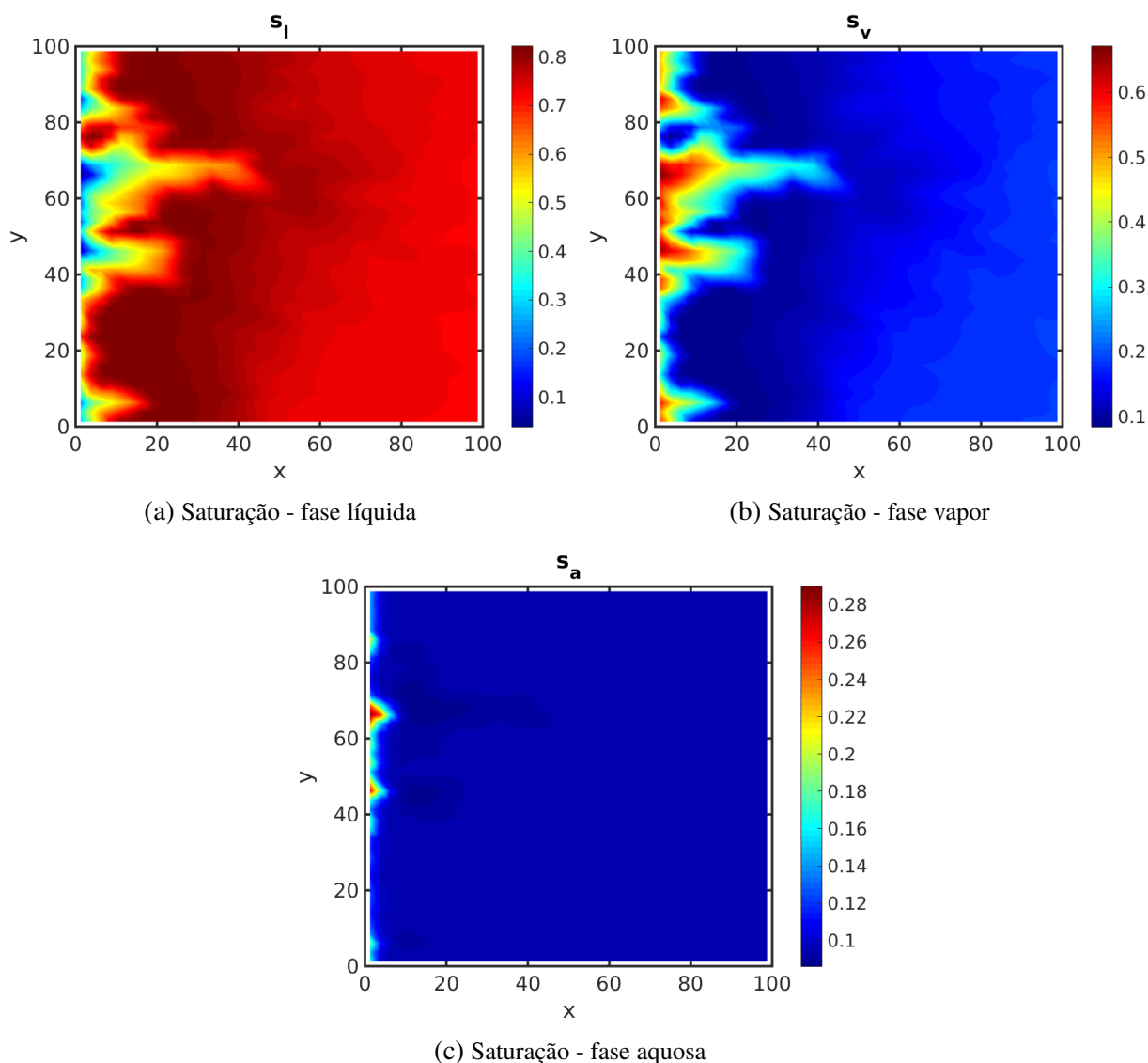


Figura 62 – Saturações - campo de permeabilidade Gaussiano - $t = 50$ dias

A Figura 63 mostra os resultados das saturações das fases líquida, vapor e aquosa para o tempo $t = 200$ dias. Observa-se que assim como para $t = 50$ dias as saturações da fase líquida e vapor encontram-se mais avançadas com relação a saturação da fase aquosa, como pode ser visto nas Figuras 63a, 63b e 63c.

A saturação da fase vapor atinge a fronteira de produção de forma mais rápida que a saturação da fase aquosa, sendo que a primeira é a responsável por empurrar inicialmente uma quantidade de óleo. Já a saturação da fase aquosa percorre o reservatório de forma mais lenta, empurrando uma significativa quantidade de óleo.

Além disso, pelo fato do campo de permeabilidade ser Gaussiano conforme a Figura 61 nota-se que as saturações de injeção, que são realizadas em toda a fronteira esquerda, procuram um caminho onde a permeabilidade é maior, facilitando o escoamento. Destaca-se a região entre $y = 40$ e $y = 80$ ao longo de todo o eixo x , que apresenta regiões de alta permeabilidade

e conseqüentemente facilita o escoamento das fases líquida, vapor e aquosa. Regiões de baixa permeabilidade acabam sendo evitadas, como por exemplo $(20, 60) \times (0, 20)$. Outra região importante para se destacar é próxima a fronteira direita, região de produção do reservatório, sendo que em $(90, 100) \times (50, 70)$ é um local de baixa permeabilidade e que o escoamento tende a seguir para a região $(80, 100) \times (80, 100)$.

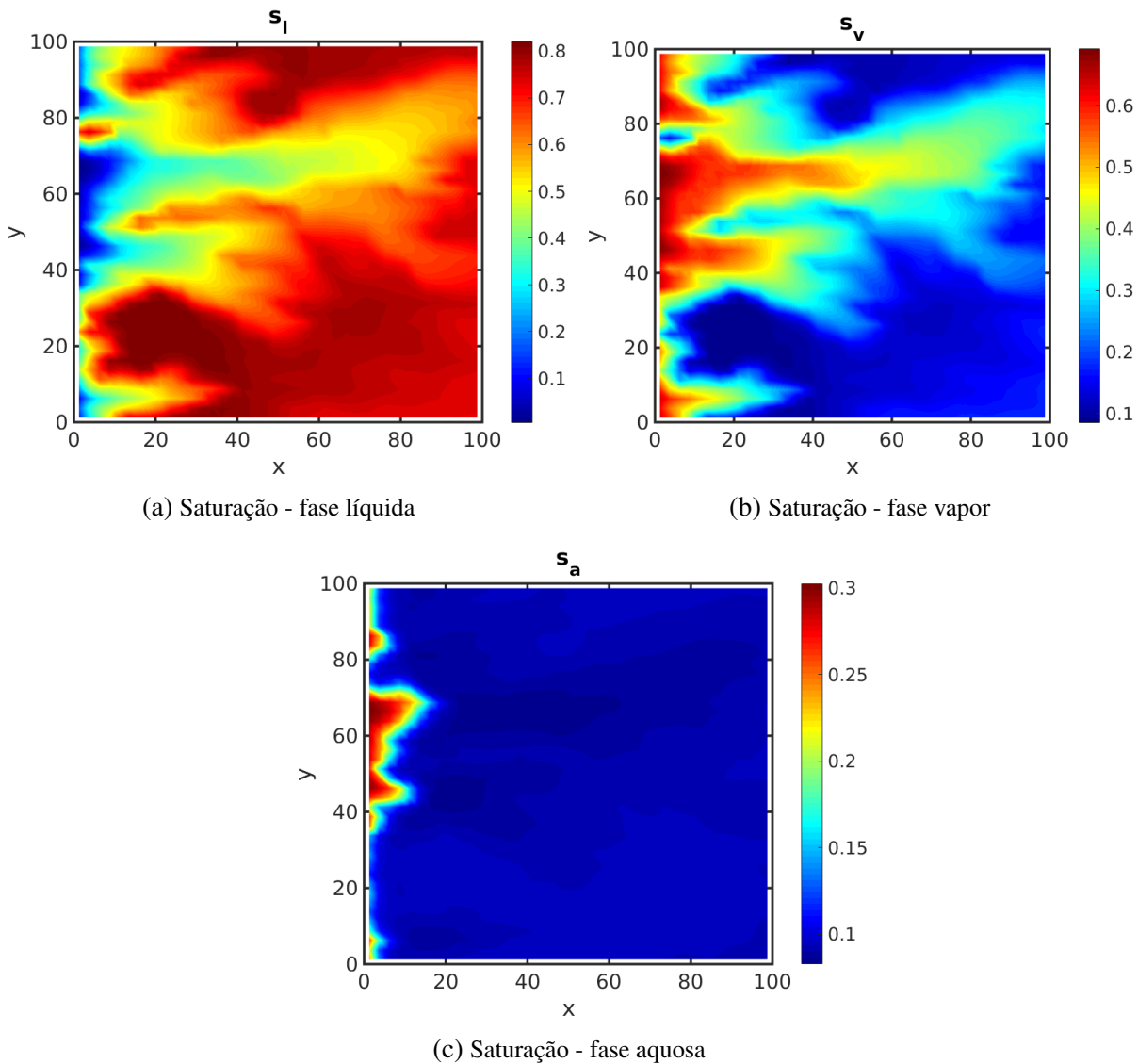


Figura 63 – Saturações - campo de permeabilidade Gaussiano - $t = 200$ dias

4.5.5 Meio heterogêneo com estruturas canalizadas

Com a finalidade de considerar um campo de permeabilidade heterogêneo de alto contraste, que possua canais de alta permeabilidade, será considerado o campo apresentado na Figura 64. Esse campo de permeabilidade está representado em escala logarítmica. Observa-se que há a presença de dois canais com alta permeabilidade, enquanto as outras regiões são de baixa permeabilidade, o que resulta em uma preferência do escoamento por esses canais.

Através da construção desse campo de permeabilidade heterogêneo, pretende-se observar as soluções das saturações para diferentes tempos, compreendendo as configurações de cada uma das fases e a produção da fase líquida.

Assim como anteriormente, considera-se $R_a = 0$, $R_v = 0$ e R_l diferente de zero, ou seja, apenas a componente gás pode estar presente na fase líquida. As condições das saturações de injeção e iniciais do reservatório são as mesmas apresentadas e, (4.61), além do fato de que a pressão inicial do reservatório é 1800 *psi*, sendo que a injeção ocorre a 2000 *psi* e a produção a 1600 *psi*.

Pelas condições de injeção em (4.61), observa-se que ocorre apenas a entrada da fase vapor e aquosa, sendo que o reservatório apresenta condição inicial com a maior parte composto pela fase líquida.

A solução foi determinada com 122×46 células computacionais, sendo que o reservatório apresenta o domínio $\Omega = (0, 500) \times (0, 50)$, ou seja, 500 *feet* na direção x e 50 *feet* na direção y . Para este caso foi considerado um problema cuja injeção é realizada em toda a fronteira esquerda, em $x = 0$. Além disso, a produção ocorre em $x = 500$, fronteira direita.

A equação de pressão é resolvida com apenas um fluxo (4.47) e o método numérico escolhido para a resolução da equação de conservação de massa é o Kurganov-Tadmor.

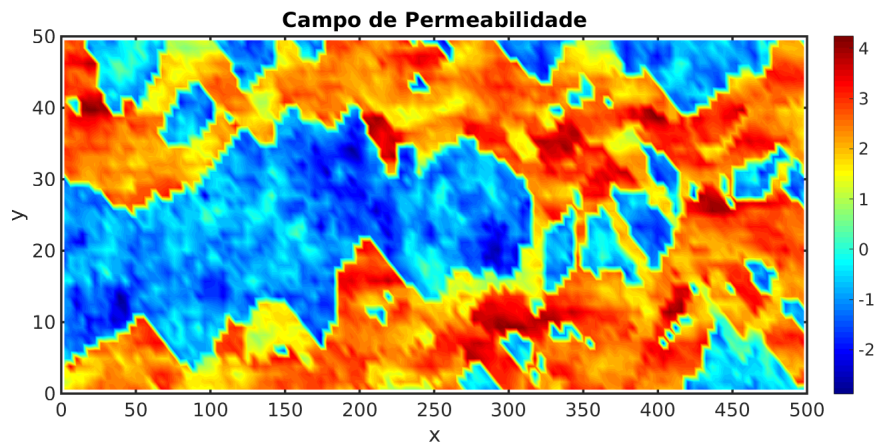
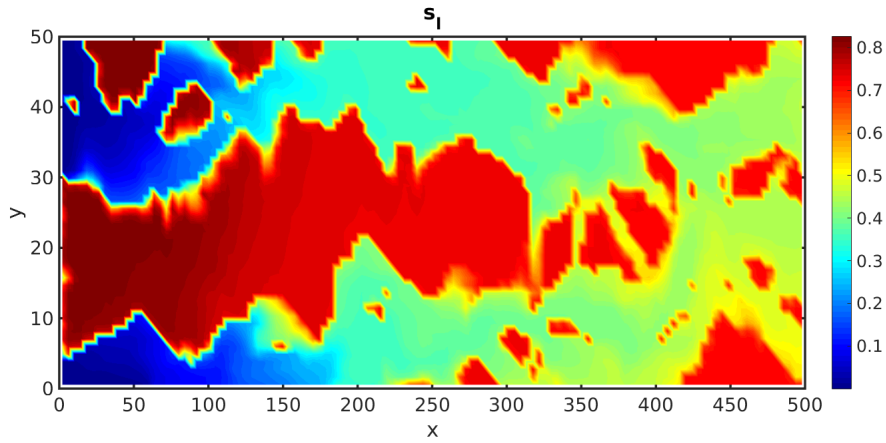
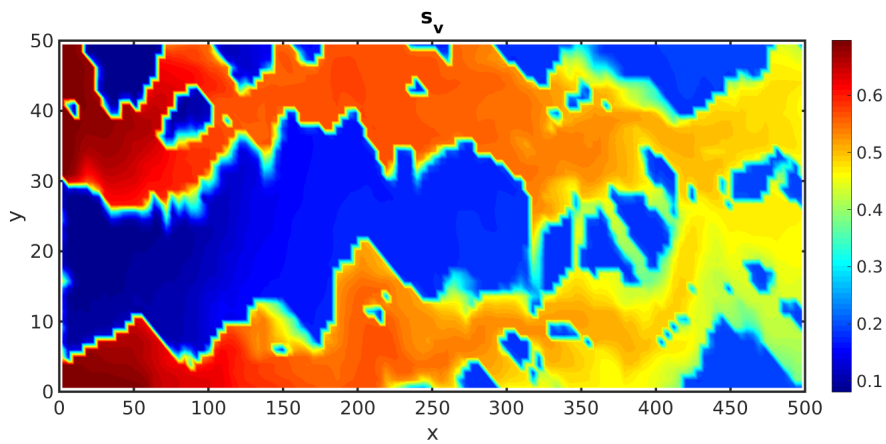
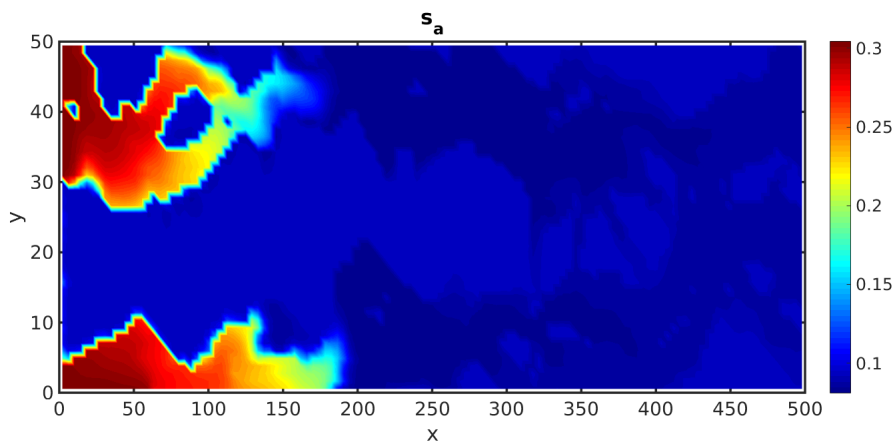


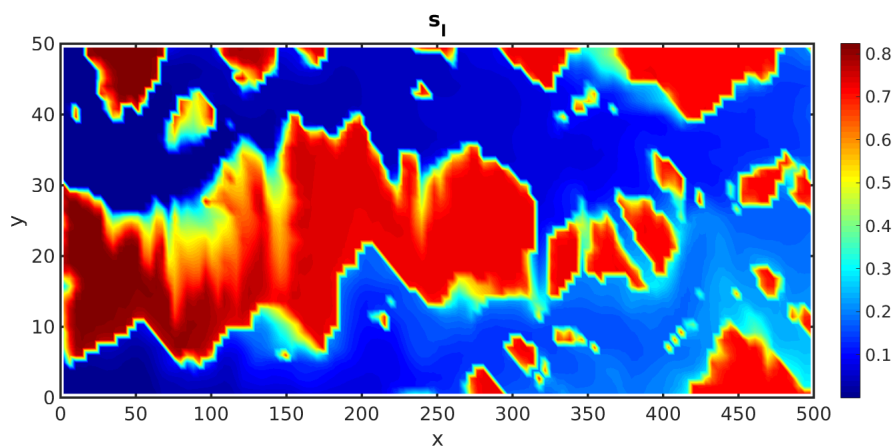
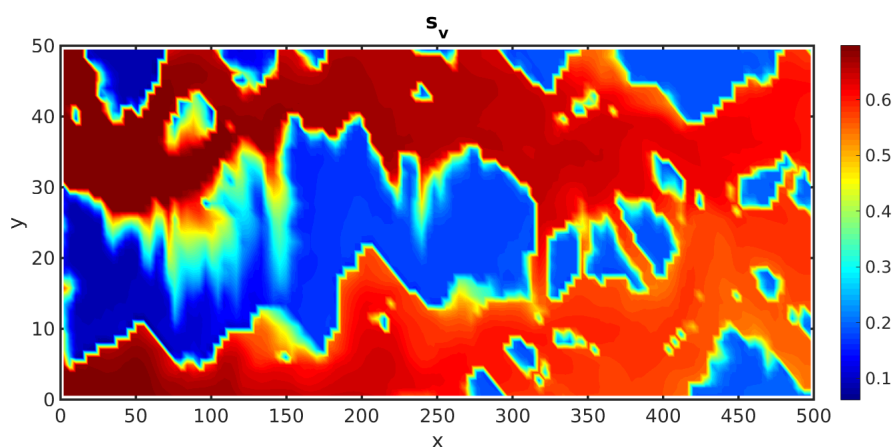
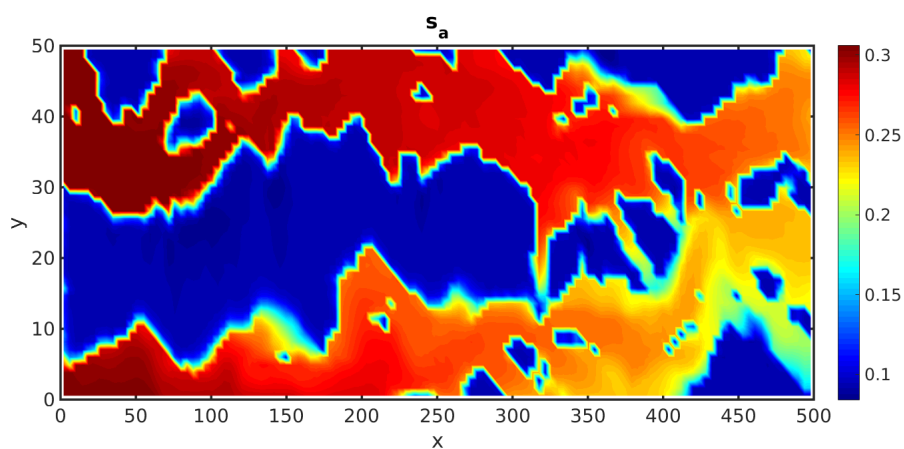
Figura 64 – Campo de permeabilidade heterogêneo

As Figuras 65, 66 e 67 mostram os resultados das saturações das fases líquida, vapor e aquosa para o tempo $t = 50$ dias. Observa-se que as saturações da fase líquida e vapor encontram-se mais avançadas com relação a saturação da fase aquosa.

A fase vapor atinge a fronteira de produção de forma mais rápida que a fase aquosa, sendo que a primeira é a responsável por empurrar inicialmente uma quantidade de óleo. Já a saturação da fase aquosa percorre o reservatório de forma mais lenta, empurrando uma significativa quantidade de óleo.

Figura 65 – Saturação - fase líquida - $t = 50$ diasFigura 66 – Saturação - fase vapor - $t = 50$ diasFigura 67 – Saturação - fase aquosa - $t = 50$ dias

As Figuras 68, 69 e 70 mostram os resultados das saturações das fases líquida, vapor e aquosa para o tempo $t = 200$ dias.

Figura 68 – Saturação - fase líquida - $t = 200$ diasFigura 69 – Saturação - fase vapor - $t = 200$ diasFigura 70 – Saturação - fase aquosa - $t = 200$ dias

Com o campo de permeabilidade apresentado na Figura 64, nota-se que as saturações de injeção irão procurar imediatamente os canais de alta permeabilidade, localizados entre $y = 0$ e

$y = 5$ e também entre $y = 30$ e $y = 50$. Esses canais de alta permeabilidade se estendem ao longo do reservatório na direção x .

Observa-se que para o tempo $t = 200$ dias a saturação da fase líquida está bem avançada no reservatório, já atingindo a fronteira direita relacionada a produção, como pode ser visto na Figura 70. Isso faz com a saturação da fase líquida, Figura 68 esteja mais próxima de zero ao longo do canal, indicando assim a retirada do óleo no reservatório. Vale ressaltar que tanto a fase a fase vapor quanto a fase aquosa são importantes para levar a fase líquida até a região de produção.

Dessa forma, através desses casos que envolvem o problema bidimensional do black-oil com campos de permeabilidade homogêneo e heterogêneo, foi possível verificar o funcionamento do código desenvolvido e a avaliação de métodos numéricos no desempenho do cálculo da saturação através da solução da equação de conservação de massa. Com os métodos upwind, upwind minmod, Rusanov e Kurganov-Tadmor, observou-se que os métodos que apresentam a reconstrução linear e serem de alta ordem, conseguem captar melhor as regiões de choque, que geralmente estão acompanhadas de rarefação. Assim, as escolhas por métodos que apresentam uma melhor solução para essas regiões é mais assertiva, sendo que optou-se então pela escolha do método KT para a solução de problemas uni e bidimensionais.

Além disso, através de alguns campos de permeabilidade heterogêneos de alto contraste foi possível observar como as saturações das fases líquida, vapor e aquosa se comportam para diferentes tempos. Nas configurações utilizadas, tanto com a injeção ocorrendo na fronteira esquerda como o caso do *quarter five-spot*, a saturação da fase vapor atinge a região de produção mais rapidamente, empurrando uma quantidade de óleo do reservatório. Destaca-se o fato de que a fase vapor demora mais para atingir a região de produção, sendo a responsável por continuar a levar o óleo até a região de produção.

Ainda com relação a esses campos heterogêneos, observa-se que o escoamento tende a percorrer o caminho que apresenta permeabilidades mais elevadas e conseqüentemente, evitando as regiões de baixa permeabilidade. No exemplo em que foi construído um campo de alto contraste e o caso com a presença de dois canais, foi possível observar a presença logo de início pelos canais de alta permeabilidade. Já para o caso Gaussiano, a entrada do escoamento é similar em toda a fronteira esquerda, porém ao de fato entrar no reservatório acaba escolhendo o caminho de alta permeabilidade.

Assim, o próximo passo consistirá de resolver problemas bidimensionais do modelo black-oil através de um método multiescala e comparar as soluções obtidas até o momento.

DECOMPOSIÇÃO DE DOMÍNIO MULTIESCALA PARA O MODELO BLACK-OIL

Métodos mistos multiescala são propostos com o objetivo de aproximar com precisão os campos de velocidade e pressão em meios porosos heterogêneos. Dessa forma o método intitulado *Multiscale Robin Coupled Method* (MRCM) (GUIRALDELLO *et al.*, 2018b) é desenvolvido baseado em um novo método de decomposição de domínio no qual os problemas locais estão sujeitos às condições de contorno de Robin, sendo um processo de decomposição sem sobreposição.

Uma das principais características do MRCM é o fato de permitir a definição independente de espaços de interface para a pressão e o fluxo sobre o esqueleto da decomposição de domínio. Essa flexibilidade permite que acomodar características locais do campo de permeabilidade subjacentes. Dessa forma, o método irá calcular, independentemente, problemas locais posteriormente acoplados pela solução de um sistema de interfaces menor do que o sistema global.

Ainda com relação a decomposição de domínio, há métodos multiescala que enfraquecem o acoplamento entre subdomínios da decomposição exigindo conservação de pressão ou fluxo em ambos em uma escala maior que a do problema. Assim, em (JENNY; LEE; TCHELEPI, 2003) os autores propõem um método multiescala baseado em volumes finitos que impõe uma condição para conservação de pressão no acoplamento de subdomínios. Além disso, existem também métodos multiescala baseados em elementos finitos, sendo esta uma abordagem bastante utilizada para simulações em reservatório de petróleo.

É importante ressaltar que o MRCM é uma generalização de outros métodos multiescala, como é o caso do *Multiscale Mortar Mixed Finite Element Method* (MMMFEM) (ARBOGAST; PENCHEVA; WHEELER MARY ANDA YOTOV, 2007) que aproxima a solução em cada

subdomínio impondo a conservação de pressão na interface. Além desse, tem-se também o *Multiscale Hybrid Miced Finite Element Method* (MHM) (ARAYA *et al.*, 2013), cujo acoplamento de subdomínios é feito com uma condição de conservação de fluxo. Já o *Multiscale Mixed Method* (MuMM) (FRANCISCO *et al.*, 2014) propõe uma condição de contorno de Robin na pressão e fluxo para acoplar os subdomínios. Observa-se então que esses os métodos MMMFEM, MHM e MuMM foram generalizados e contemplados no método MRCM.

Vale ressaltar que a precisão do método MRCM depende da escolha destes espaços de interface, bem como da escolha de um parâmetro algorítmico α na condição de Robin imposta na interface entre os subdomínios. Ao depender da escolha de valor desse parâmetro, é possível aproximar dos métodos MMMFEM e MHM.

Com relação as configurações do MRCM, tem-se que o parâmetro α está relacionado com o parâmetro β da condição de contorno de Robin para a solução dos problemas locais. Dessa forma, serão escolhidos alguns valores estratégicos para α , tal que:

- $\alpha = 1$: MRCM;
- $\alpha = 1000$: MHM;
- $\alpha = 10^{-3}$: MMMFEM.

É importante observar que quando o valor de α é pequeno, tem-se que o método MRCM entrega uma solução equivalente a solução do MMMFEM (ARBOGAST; PENCHEVA; WHEELER MARY ANDA YOTOV, 2007), onde a pressão é conservada na interface dos subdomínios. Quando $\alpha = 1$, o MRCM entrega uma solução como o erro perto do mínimo, conforme apresentado em (GUIRALDELLO *et al.*, 2018b). Já para α grande tem-se que o MRCM entrega uma solução equivalente ao MHM (ARAYA *et al.*, 2013), impondo conservação de fluxo nas interfaces.

Em alguns casos há a importância de variar os espaços de interface para a pressão e fluxo, sendo então consideradas algumas configurações diferentes com a intenção de avaliar a solução obtida, uma vez que algumas combinações podem resultar em uma melhor aproximação. Dessa, será utilizada a seguinte notação:

- $\mathcal{P}_{H,\gamma}$: espaço de interface para a pressão;
- $\mathcal{U}_{H,\gamma}$: espaço de interface para a fluxo.

Observa-se que γ indica a ordem do espaço, ou seja, se $\mathcal{P}_{H,1}$, com $\gamma = 1$, pode-se afirmar que o espaço de interface para a pressão é linear por partes. Ou então, se $\mathcal{P}_{H,2}$, com $\gamma = 2$, o espaço de interface é quadrático por partes. O mesmo vale para os espaços de interface do fluxo.

Dessa forma, a ideia consiste em resolver o modelo black-oil com a utilização do método de decomposição de domínio multiescala MRCM, sendo este responsável por resolver a equação

de pressão e conseqüentemente Lei de Darcy. Para a equação de transporte serão considerados os métodos de volumes finitos do tipo uwpind e centrais com reconstrução contante e linear, permitindo assim a solução das saturações das fases líquida, vapor e aquosa.

Através das variações de parâmetros para o MRCM é possível observar as soluções para diferentes configurações. Com isso, serão considerados diferentes campos de permeabilidade do SPE10 com a finalidade de comparar as soluções obtidas e verificar o funcionamento desses métodos para a resolução de um problema bidimensional do modelo black-oil. É importante observar que além da variação do parâmetro α , é possível também variar os espaços de interface da pressão e da velocidade, modificando assim a solução final de cada saturação.

Para o primeiro caso foi considerado um campo de permeabilidade homogêneo de tal forma que a intenção é avaliar o funcionamento do acoplamento entre o método de decomposição de domínio multiescala MRCM e os métodos de volumes finitos para a solução da equação de transporte. Com isso, é possível observar, inicialmente, como as mudanças de configurações podem influenciar nas soluções obtidas para as saturações das fases líquida, vapor e aquosa em um determinado tempo.

O segundo e terceiro casos envolvem camadas de permeabilidade heterogêneos de alto contraste do SPE10, sendo que estes podem apresentar regiões de alta e baixa permeabilidade, inclusive com a formação de canais. Assim, através da mudança de valores para os parâmetros, é possível observar as soluções obtidas e compará-las entre si com a intenção de obter uma solução adequada.

Para todos os casos são considerados $R_a = 0$, $R_v = 0$ e R_l diferente de zero, ou seja, é permitido que o gás esteja dissolvido apenas na fase líquida. Diferente dos outros casos, quando R_a é igual a zero, não há a possibilidade da componente gás estar presente na fase aquosa, o mesmo vale para quando R_v é igual a zero, indicando que não há a presença da componente óleo na fase vapor. Assim, com apenas R_l diferente de zero, tem-se para esses parâmetros, apenas a componente gás pode estar presente na fase líquida.

Além disso, as condições de injeção e iniciais do reservatório são dadas por

$$s_{inj} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.69570 \\ 0.30430 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad s_{res} = \begin{bmatrix} 0.76580 \\ 0.14060 \\ 0.09360 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Para as condições de pressão, tem-se que a pressão inicial do reservatório é 1800 *psi*, sendo que a injeção ocorre a 2000 *psi* e a produção a 1600 *psi*. É importante ressaltar que as condições de injeção são realizadas em toda a fronteira esquerda do domínio, ou seja do lado esquerdo do reservatório. As condições de produção ocorrem na fronteira direita do domínio, em todo o lado direito do reservatório.

Assim, são consideradas as seguintes configurações:

- Configuração 1:

$$\alpha = 1, \quad \mathcal{P}_{H,1}, \quad \mathcal{U}_{H,0} \quad (5.2)$$

- Configuração 2:

$$\alpha = 1000, \quad \mathcal{P}_{H,1}, \quad \mathcal{U}_{H,0} \quad (5.3)$$

- Configuração 3:

$$\alpha = 10^{-3}, \quad \mathcal{P}_{H,1}, \quad \mathcal{U}_{H,0} \quad (5.4)$$

- Configuração 4:

$$\alpha = 1, \quad \mathcal{P}_{H,0}, \quad \mathcal{U}_{H,1} \quad (5.5)$$

- Configuração 5:

$$\alpha = 1000, \quad \mathcal{P}_{H,0}, \quad \mathcal{U}_{H,1} \quad (5.6)$$

- Configuração 6:

$$\alpha = 10^{-3}, \quad \mathcal{P}_{H,0}, \quad \mathcal{U}_{H,1} \quad (5.7)$$

Através dessas configurações, é possível avaliar as soluções comparando o método MRCM, MMFEM e MHM. Além disso, verificar como o enriquecimento dos espaços de interface da pressão e do fluxo irão influenciar na solução, gerando assim combinações interessantes que permitem comparar a solução obtida com a malha fina, ou seja, aquela que não utiliza da decomposição de domínio para a resolução do modelo black-oil.

Além dessas configurações, serão consideradas algumas combinações a fim de explorar a solução e obter um possível resultado que apresente uma melhor aproximação das saturações de cada uma das fases. São estas:

- Configuração 7:

$$\alpha = 1, \quad \mathcal{P}_{H,0}, \quad \mathcal{U}_{H,0} \quad (5.8)$$

- Configuração 8:

$$\alpha = 1, \quad \mathcal{P}_{H,1}, \quad \mathcal{U}_{H,1} \quad (5.9)$$

- Configuração 9:

$$\alpha = 1, \quad \mathcal{P}_{H,2}, \quad \mathcal{U}_{H,2} \quad (5.10)$$

Essas configurações permitem observar como os espaços de interface com ordem maior irão impactar na solução obtida.

5.1 Homogêneo

A solução apresentada é determinada para o tempo final $t = 30$ dias e com 220×60 células computacionais. Além disso, o reservatório é homogêneo com permeabilidade $k = 100$ md e 500 feet de comprimento na direções x e 100 feet na direção y , ou seja, com domínio $\Omega = (0, 500) \times (0, 100)$.

Para a utilização do *Multiscale Robin Coupled Method* (MRCM) são consideradas 11 subdivisões na direção x e 3 subdivisões na direção y , resultando em cada subdomínio com 20×20 células computacionais.

As Figuras 71, 72 e 73 mostram os resultados das saturações das fases líquida (s_l), vapor (s_v) e aquosa (s_a) para as diferentes configurações de α e espaços de interface. Através dessas figuras é possível comparar as soluções obtidas com a malha fina, ou seja, a solução do problema envolvendo o modelo black-oil sem a utilização de um método multiescala de decomposição de domínio.

As Figuras 71b e 71e mostram os resultados para $\alpha = 1$, ou seja, quando o método MRCM usual. Dessa forma, é possível observar que quando enriquecemos o espaço de interface da pressão e considera-se o mesmo linear por partes ($\mathcal{P}_{H,1}$), a solução em 71b é mais próxima da malha fina 71a quando comparada com a solução apresentada em 71e, que utiliza do espaço de interface linear por partes para os fluxos ($\mathcal{U}_{H,2}$). Apesar disso, nota-se que nas regiões em que ocorrem a subdivisão do domínio, a solução encontra-se adiantada e conseqüentemente diferente da apresentada pela malha fina. É importante destacar que o mesmo ocorre para as soluções das saturações da fase vapor, conforme apresentado em 72b e 72e. E para as saturações da fase aquosa, conforme apresentado nas Figuras 73b e 73e.

Quando $\alpha = 1000$ tem-se que o método MRCM entrega uma solução equivalente ao *Multiscale Hybrid Mixed Finite Element Method* (MHM), que impõe uma conservação de fluxo nas interfaces. Com isso, as Figuras 71c e 71f mostram as soluções para a saturação da fase líquida, sendo que a primeira possui um enriquecimento no espaço de interface da pressão e a segunda com relação ao espaço de interface do fluxo. Observa-se que ambas as soluções são próximas da solução de malha fina 71a, porém para a configuração apresentada (5.6) há um pequeno avanço da solução nas regiões que dividem os subdomínios. O mesmo ocorre as saturações das fases vapor e aquosa, conforme apresentado nas Figuras 72c, 72f, 73c e 73f.

As Figuras 71d e 71g mostram a solução da fase líquida para o tempo $t = 30$ dias com $\alpha = 10^{-3}$, ou seja, quando o MRCM entrega uma solução equivalente ao *Multiscale Mortar Mixed Finite Element Method* (MMMFEM), onde a pressão é conservada na interface dos subdomínios. Observa-se que tanto com o espaço de interface linear por partes para a pressão 71d como para ao fluxo 71g a solução possui diferenças quando comparada à malha fina. Para a configuração (5.4) a solução encontra-se adiantada nas regiões da divisão do subdomínio, já para a configuração (5.7) a solução apresentada acaba sendo muito imprecisa. Assim como para a

fase líquida, as fases vapor e aquosa apresentam as mesmas características, como pode ser visto em 72d, 72g, 73d e 73g.

Através dessas configurações aplicadas para um problema com campo de permeabilidade homogêneo, nota-se que para os espaços de interface considerados a solução mais próxima da malha fina ocorre com a utilização do parâmetro $\alpha = 1000$, ou seja, quando o MRCM possui uma solução equivalente ao MHM. Além disso, a solução com o espaço de interface linear por partes para a pressão e constante por partes para o fluxo foi a que melhor aproximou-se da malha fina.

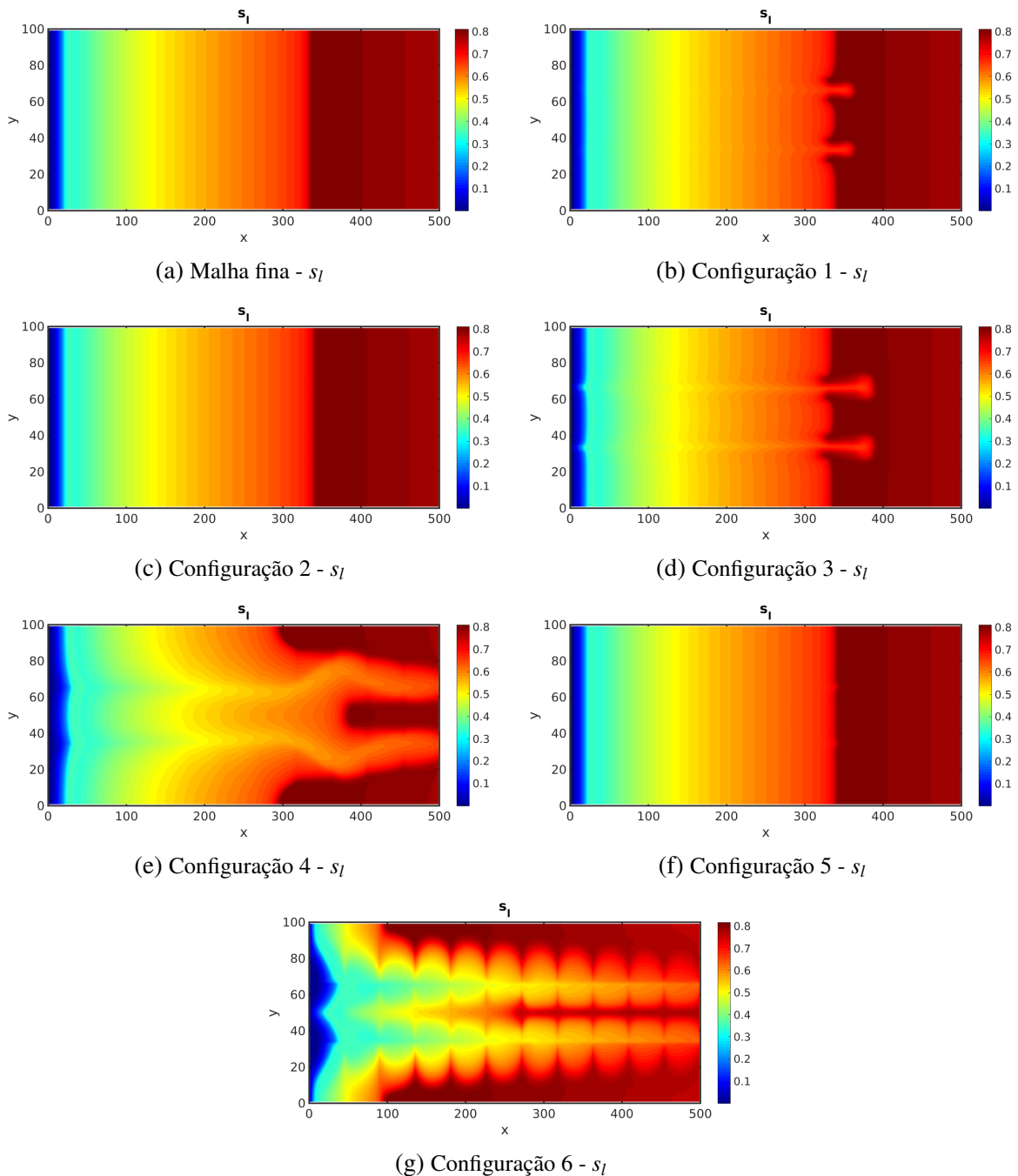
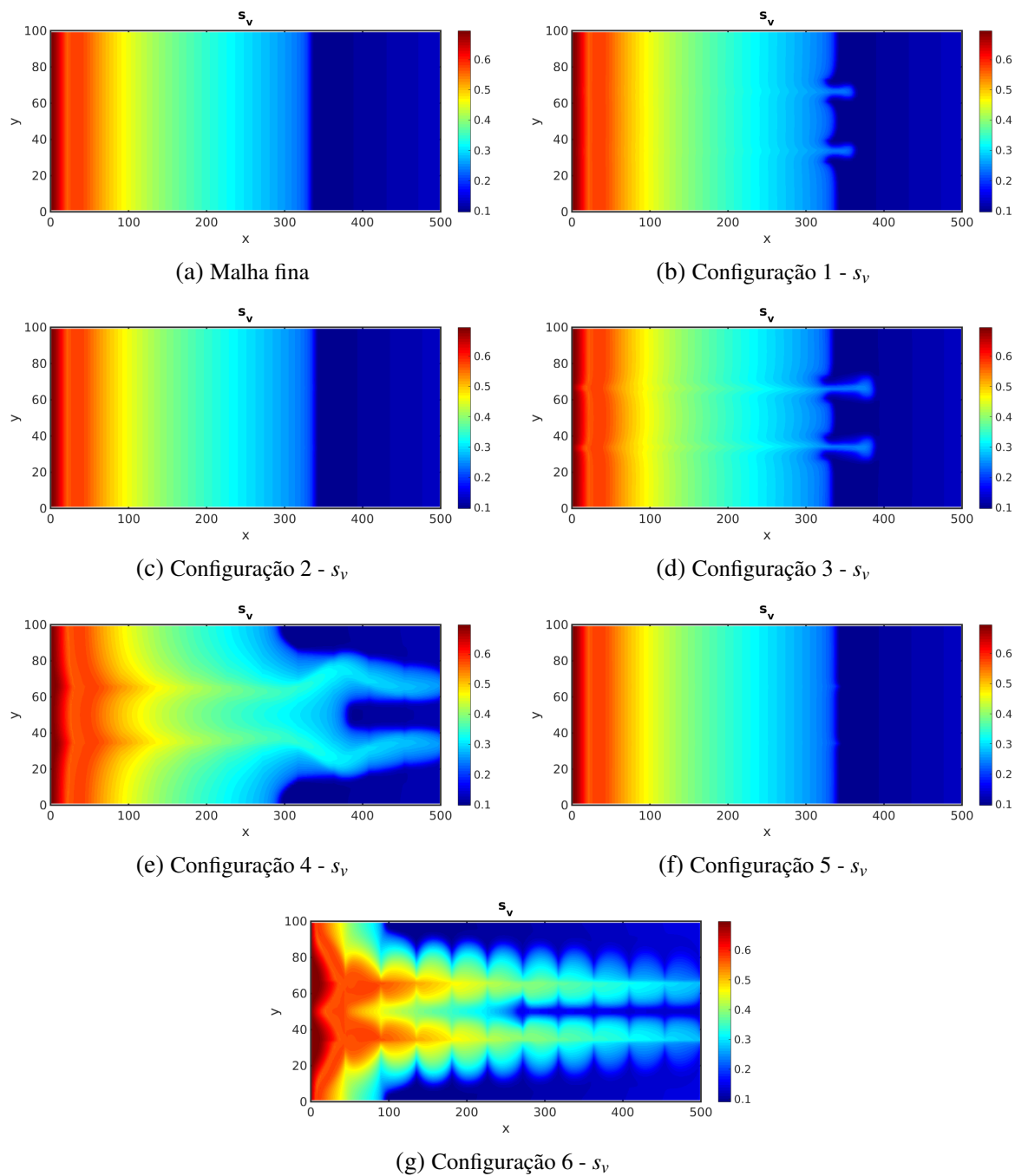


Figura 71 – Saturação da fase líquida - $t = 30$ dias

Figura 72 – Saturação da fase vapor - $t = 30$ dias

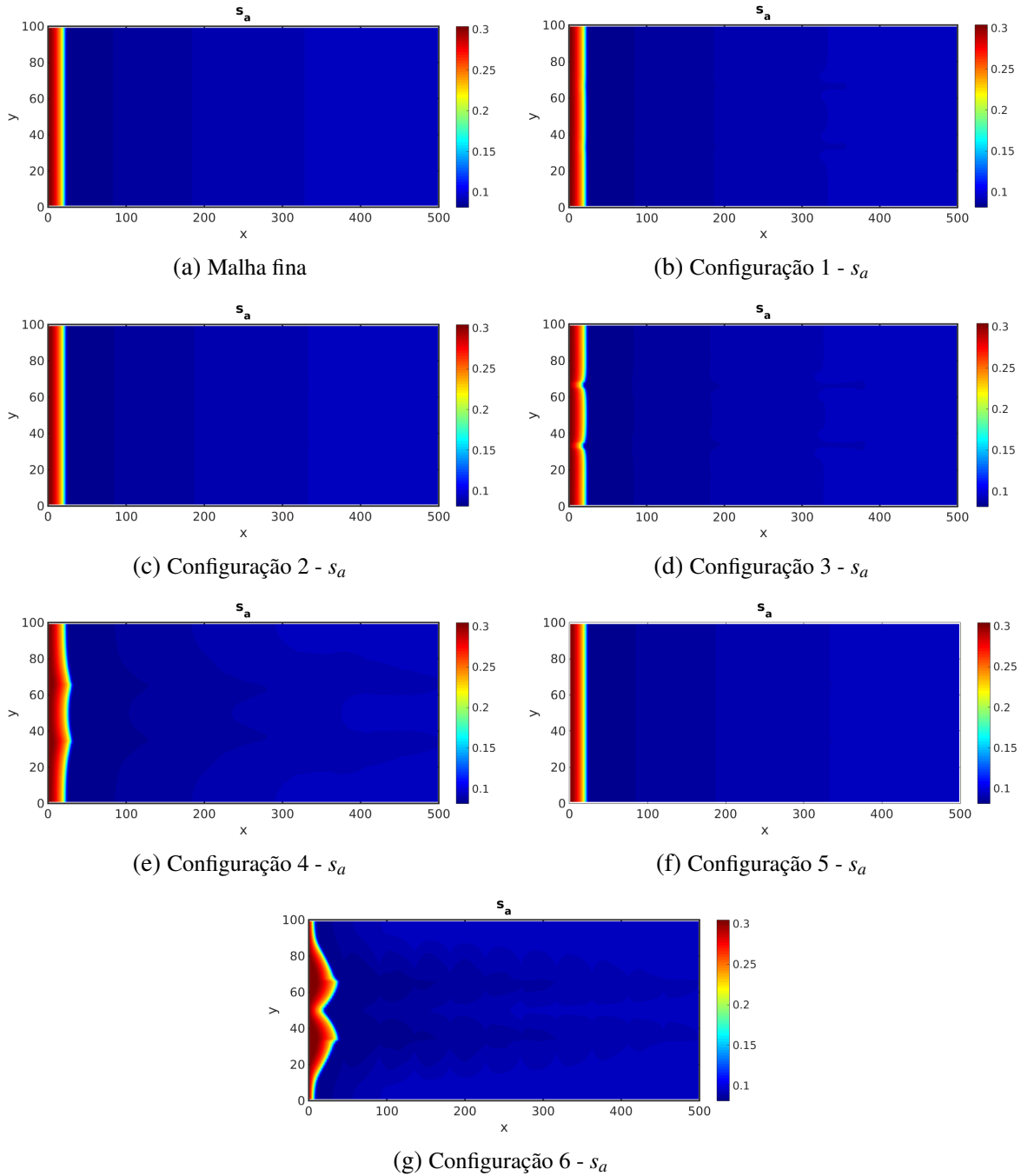


Figura 73 – Saturação da fase aquosa - $t = 30$ dias

Dessa forma, é interessante investigar a solução das saturações para novas configurações, conforme apresentando em 5.8, 5.9 e 5.10. Essas configurações consideram $\alpha = 1$ e diferentes valores para os espaços de interface, sendo a pressão e o fluxo constante por partes, linear por partes e quadráticos por partes.

A Figura 74 mostra os resultados da saturação da fase líquida para essas configurações, sendo que é possível observar pela Figura 74c que esta é a solução mais próxima da malha fina, considerando apenas os casos com $\alpha = 1$. Pode-se afirmar então que enriquecer os espaços de

interface da pressão e do fluxo contribuem para que o método MRCM obtenha um campo de saturação com informações mais precisas. É importante ressaltar que as soluções obtidas em 74a e 74b são imprecisas quando comparadas à malha fina.

O mesmo ocorre para as saturações das fases vapor e aquosa, como pode ser observado nas Figuras 75 e 76.

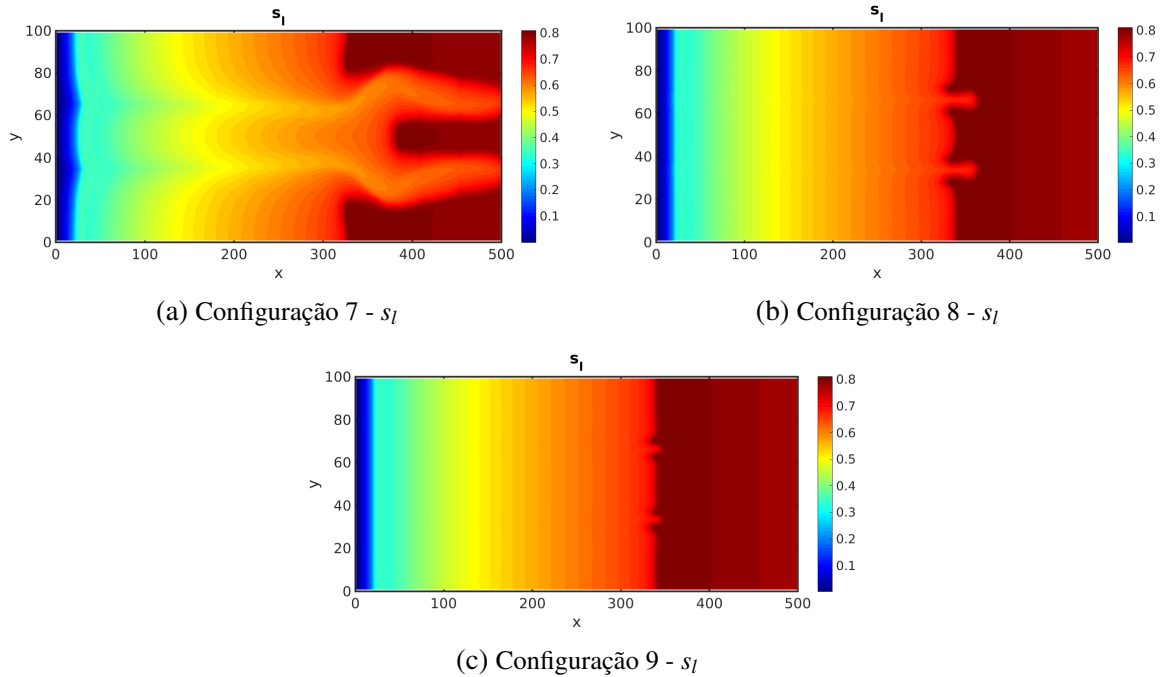


Figura 74 – Saturação da fase líquida - $t = 30$ dias

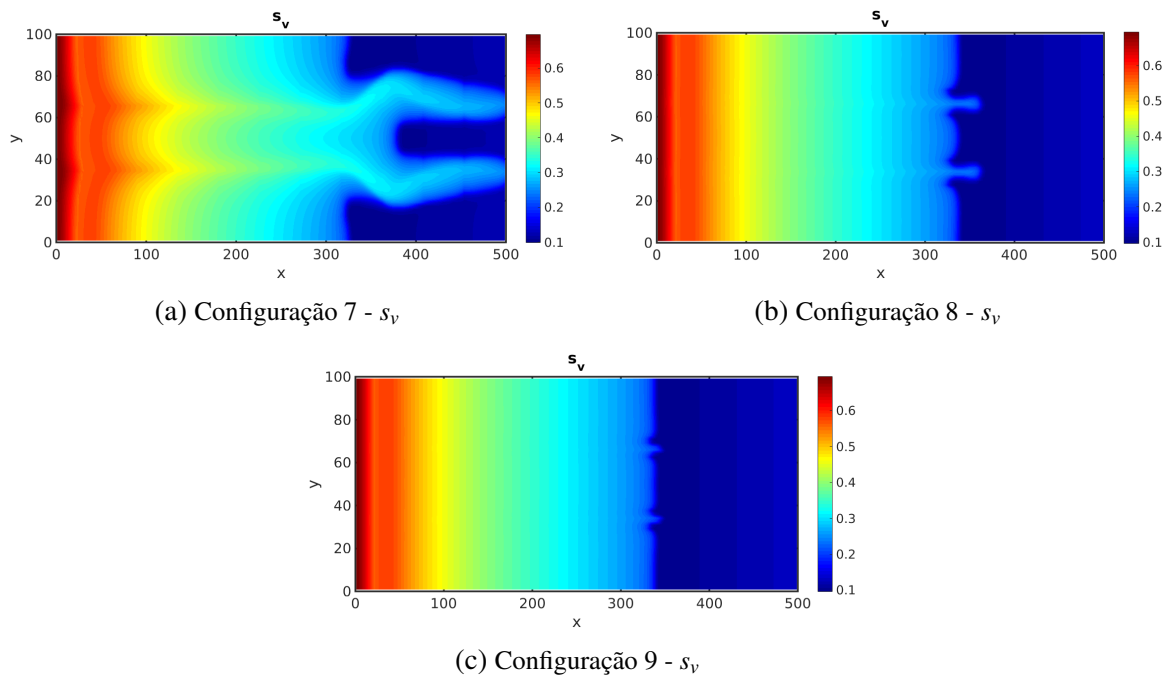
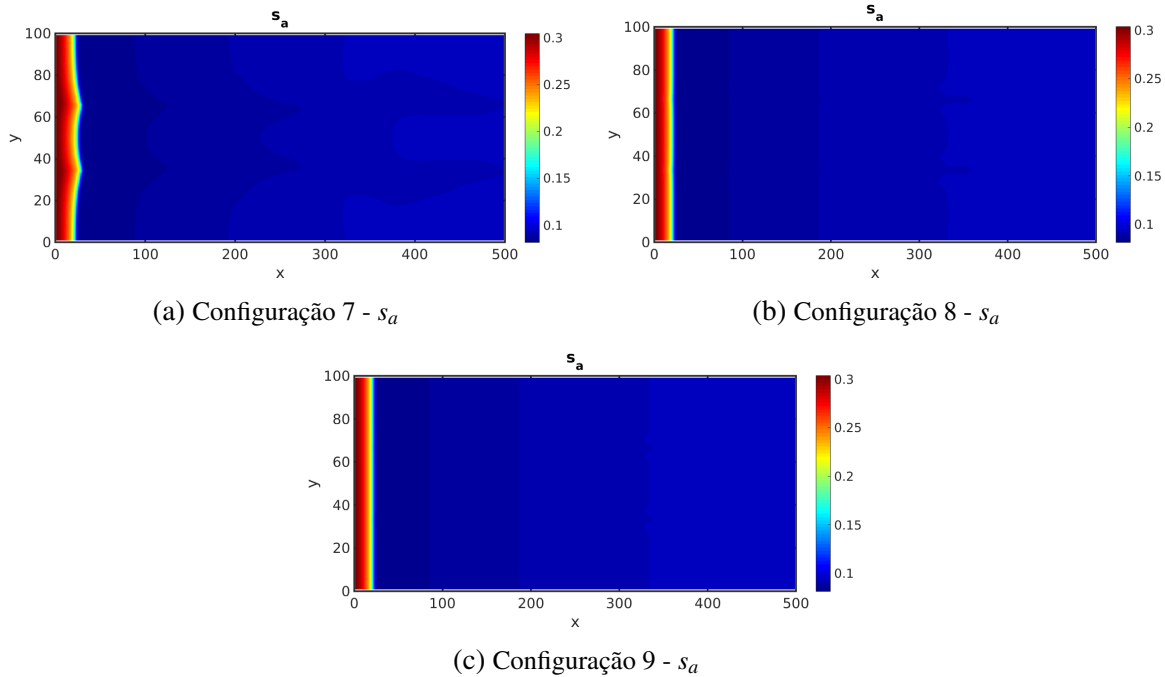


Figura 75 – Saturação da fase vapor - $t = 30$ dias

Figura 76 – Saturação da fase aquosa - $t = 30$ dias

Com as observações para um problema que apresenta campo de permeabilidade homogêneo, é importante considerar um problema envolvendo o modelo black-oil e um campo de permeabilidade heterogêneo, uma vez que com essas características é possível notar diferentes comportamentos quando utiliza-se do método de decomposição de domínio multiescala.

5.2 Heterogêneo - SPE10 - camada 33

As soluções apresentadas para esse problema são determinadas para o tempo final $t = 250$ dias e solucionadas com 220×60 células computacionais. Além disso, o reservatório possui um domínio $\Omega = (0, 500) \times (0, 100)$, ou seja, 500 feet de comprimento na direção x e 100 feet na direção y . Assim como anteriormente, para a utilização do MRCM considera-se subdomínios com 20×20 células computacionais, resultando em 11×3 subdivisões. São consideradas também as diferentes configurações para o método MRCM, variando o parâmetro α e os espaços de interface da pressão e do fluxo.

Este caso considera um problema com campo de permeabilidade heterogêneo de alto contraste, conforme apresentado na Figura 77. Nota-se que existem regiões de baixa e alta permeabilidade.

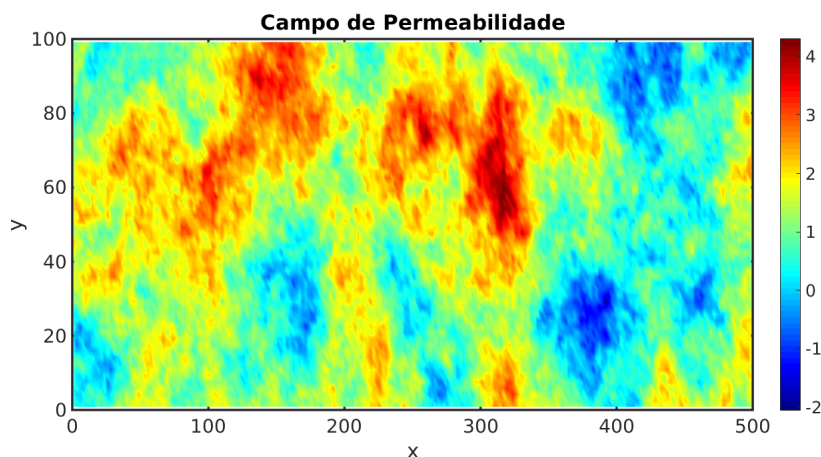


Figura 77 – Campo de permeabilidade heterogêneo - camada 33 do SPE10

As Figuras 78, 79 e 80 mostram os resultados obtidos para as saturações da fase líquida, vapor e aquosa para as diferentes configurações, em que é possível observar a solução para diferentes valores de α e enriquecimento dos espaços de interface da pressão e fluxo. Pela Figura 78a referente a solução de malha fina, nota-se que o escoamento tende a ocorrer pelas regiões que possuem maior permeabilidade, iniciando em toda a fronteira esquerda e após encontrando as regiões em vermelho que representam as maiores permeabilidades, como pode ser visto na Figura 77.

Observa-se nas Figuras 78b e 78e as saturações da fase líquida quando $\alpha = 1$, ou seja, quando é utilizado o MRCM usual. Além disso, em 78b tem-se um espaço de interface linear por partes de pressão e constante para o fluxo, caracterizando a configuração (5.2). Já em 78e tem-se um espaço constante por partes para a pressão e linear por partes para a velocidade, caracterizando a configuração (5.5). Dessa forma, em ambas as situações as soluções ficam próximas quando comparadas com a solução de malha fina. Porém, para a configuração 1 em 78b a mesma apresenta um leve atraso, seno que o mesmo não ocorre com a configuração 4.

Para $\alpha = 1000$ tem-se que o método é MRCM apresenta um solução equivalente ao MHM, sendo que para o caso com espaço de interface constante por partes para a pressão ($\mathcal{P}_{H,0}$) e linear por partes para o fluxo ($\mathcal{U}_{H,2}$) apresenta uma solução mais próxima da malha fina, como pode ser observado na Figura 78f. Já para o caso em que o espaço de interface é linear por partes para a pressão ($\mathcal{P}_{H,1}$) e constante por partes para o fluxo ($\mathcal{U}_{H,0}$), a solução em 78c apresenta um certo atraso quando comparada com a malha fina 78a.

Ao considerar $\alpha = 10^{-3}$ o método MRCM é equivalente ao MMMFEM, sendo pela Figura 78d tem-se a configuração (5.4) que apresenta uma solução mais próxima da malha fina quando comparada com a solução da configuração 6 (5.7) em 78g. Observa-se que para está última a solução é muito imprecisa, estando adiantada para o tempo $t = 250$ dias. O mesmo não ocorre para a primeira, que mais está próxima da solução de malha fina.

As soluções com $\alpha = 1$, $\alpha = 1000$ e $\alpha = 10^{-3}$ ajustadas com o enriquecimento de algum

espaço de interface podem apresentar soluções próximas da malha fina.

Essas mesmas observações ocorrem para as saturações das fases vapor e aquosa. Então, é interessante considerar o MRCM usual com diferentes espaços de interface, especialmente quando considera-se os espaços de interface quadrático por partes tanto para a pressão quanto para o fluxo. Com essas novas configurações é possível tirar conclusões das soluções obtidas quando comparadas com a solução de malha fina obtida sem a realização da decomposição de domínio.

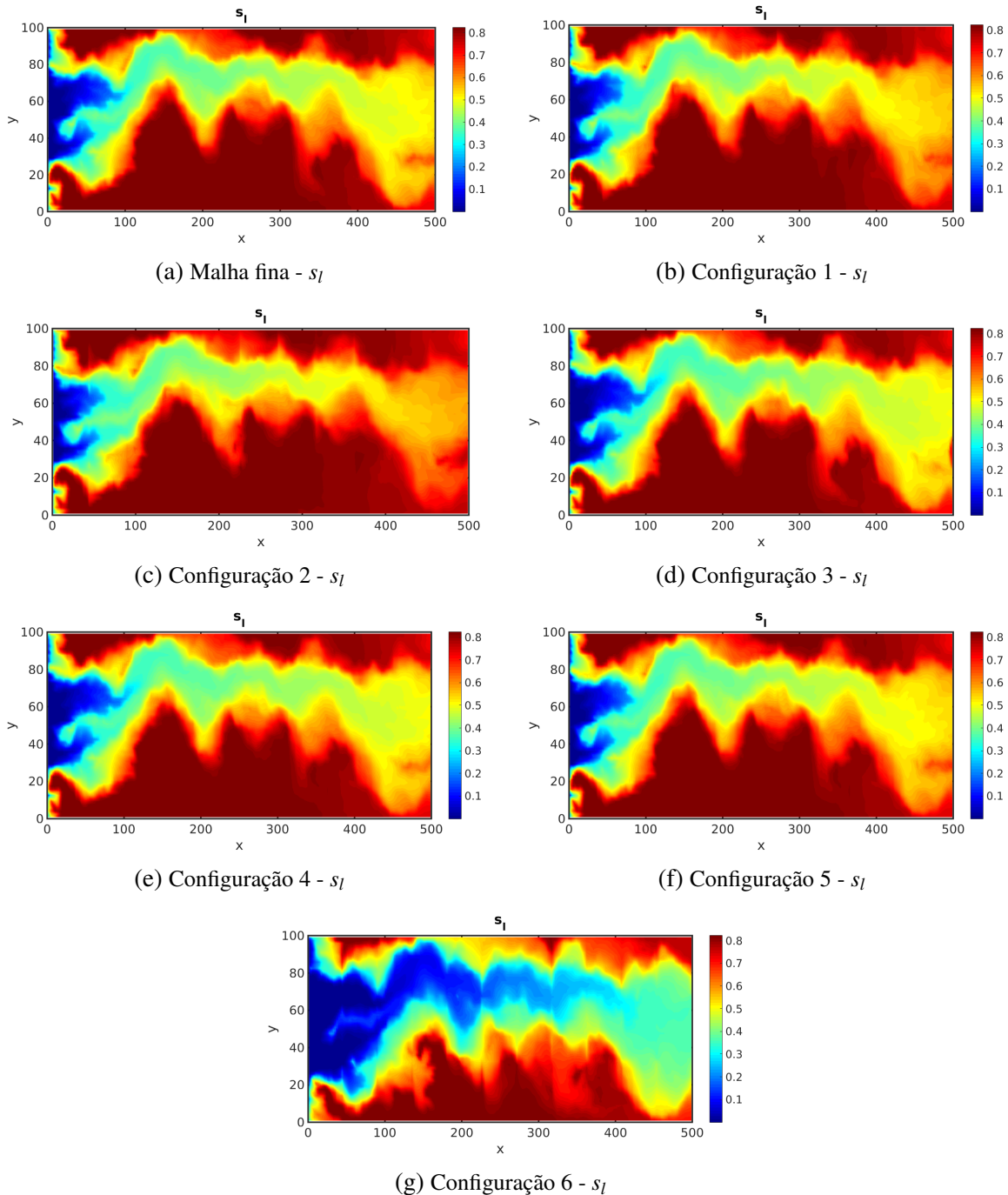
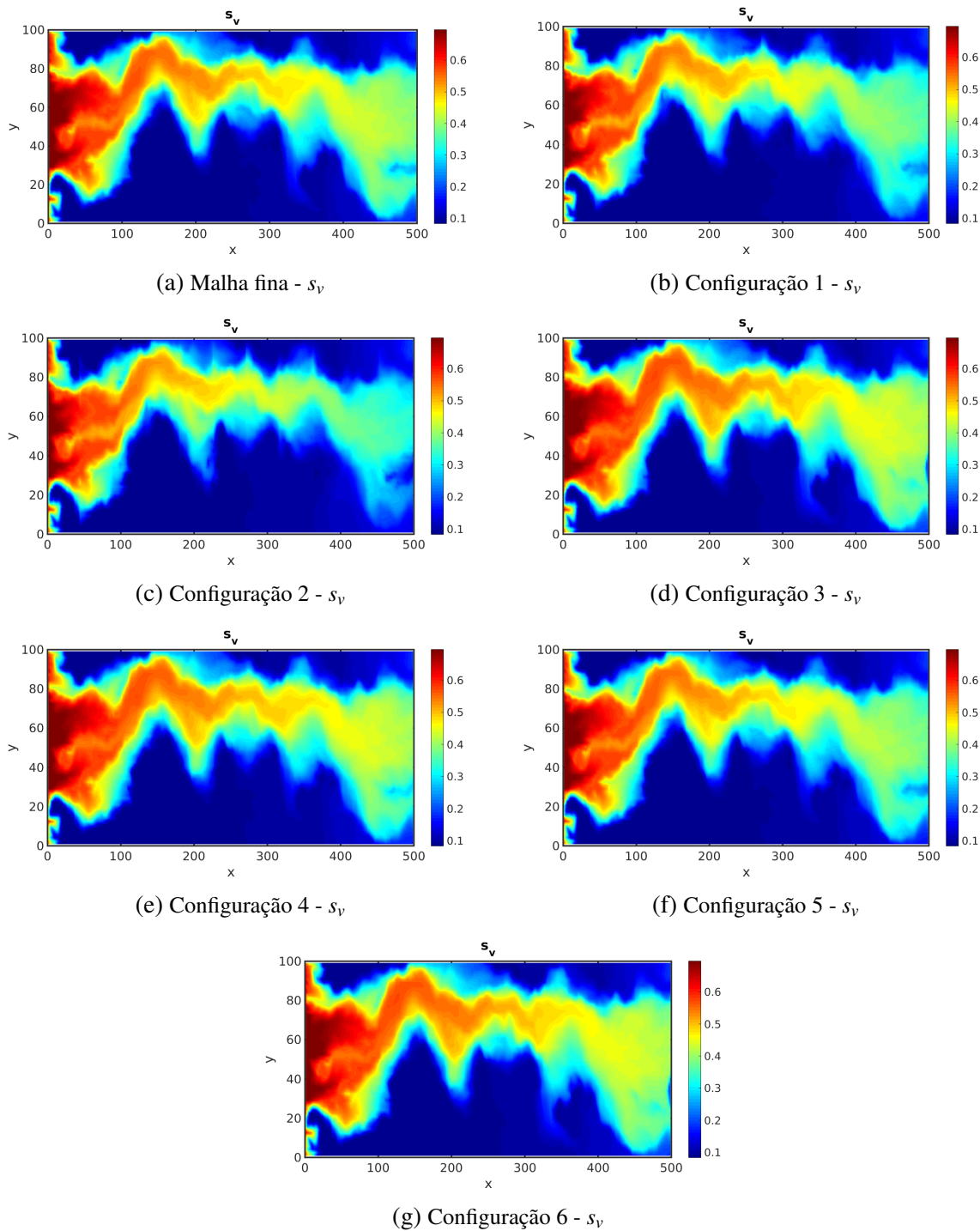


Figura 78 – Saturação da fase líquida - $t = 250$ dias

Figura 79 – Saturação da fase vapor - $t = 250$ dias

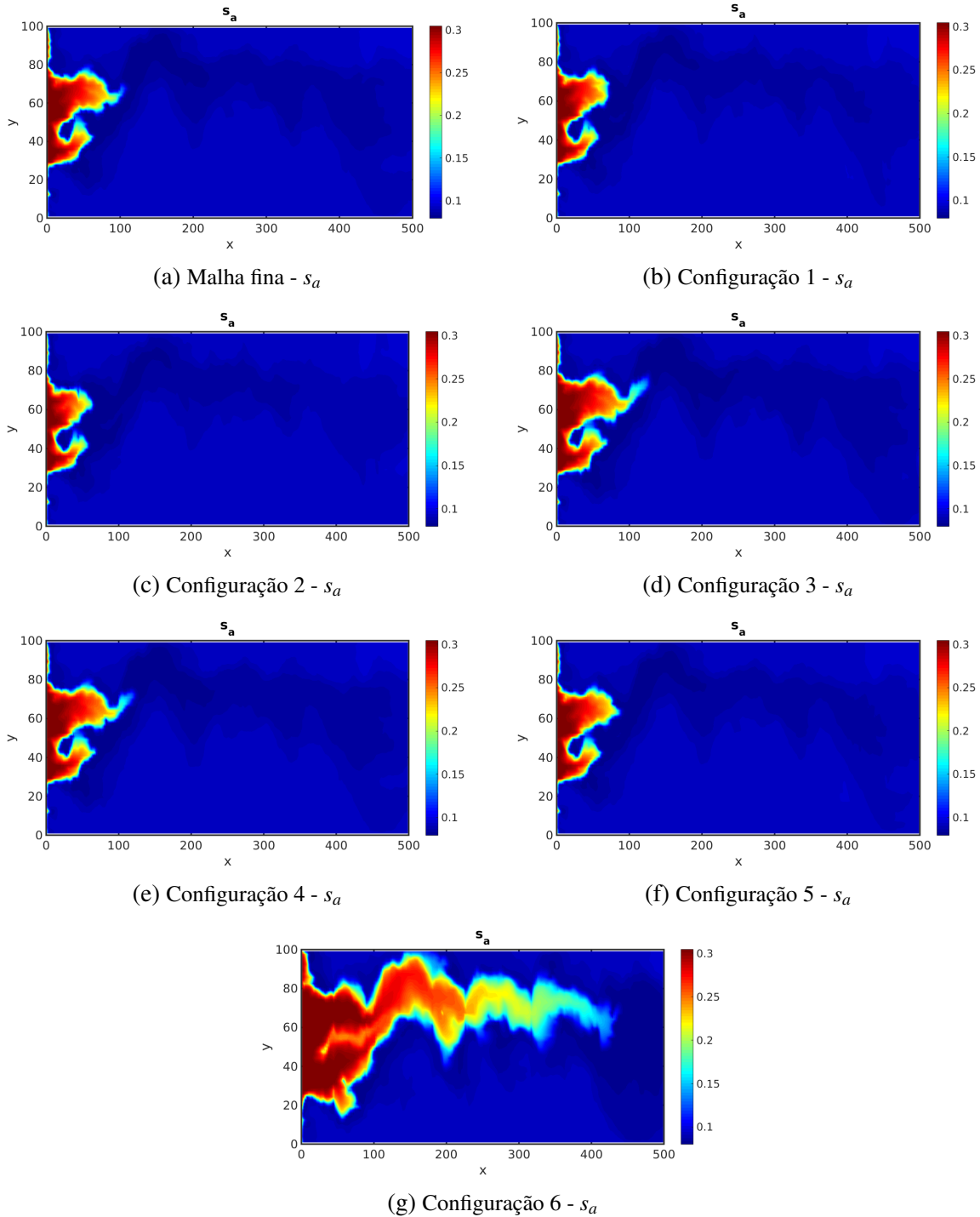


Figura 80 – Saturação da fase aquosa - $t = 250$ dias

As Figuras 81, 82 e 83 mostram o resultados das saturações para essas novas configurações. Observa-se pela Figura 81c que está é a solução mais próxima da malha fina, considerando apenas os casos com $\alpha = 1$. Dessa forma, o enriquecimento dos espaços de interface da pressão e do fluxo de forma quadrática, ou seja, $\mathcal{P}_{H,2}$ e $\mathcal{U}_{H,2}$, contribuem para que o campo de saturação da fase líquida obtenha informações mais precisas. O mesmo ocorre para as saturações das fases vapor e aquosa, como pode ser observado nas Figuras 82c e 83c, sendo que estes se aproximam

melhor das soluções de malha fina 79a e 80a, respectivamente.

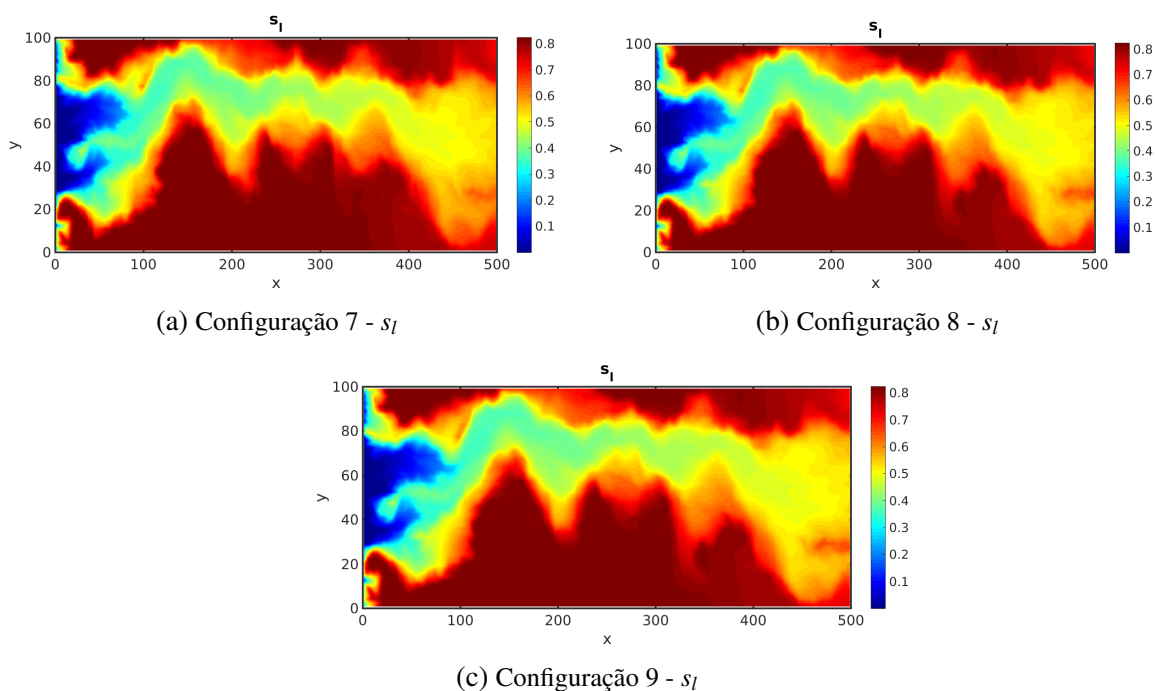


Figura 81 – Saturação da fase líquida - $t = 250$ dias

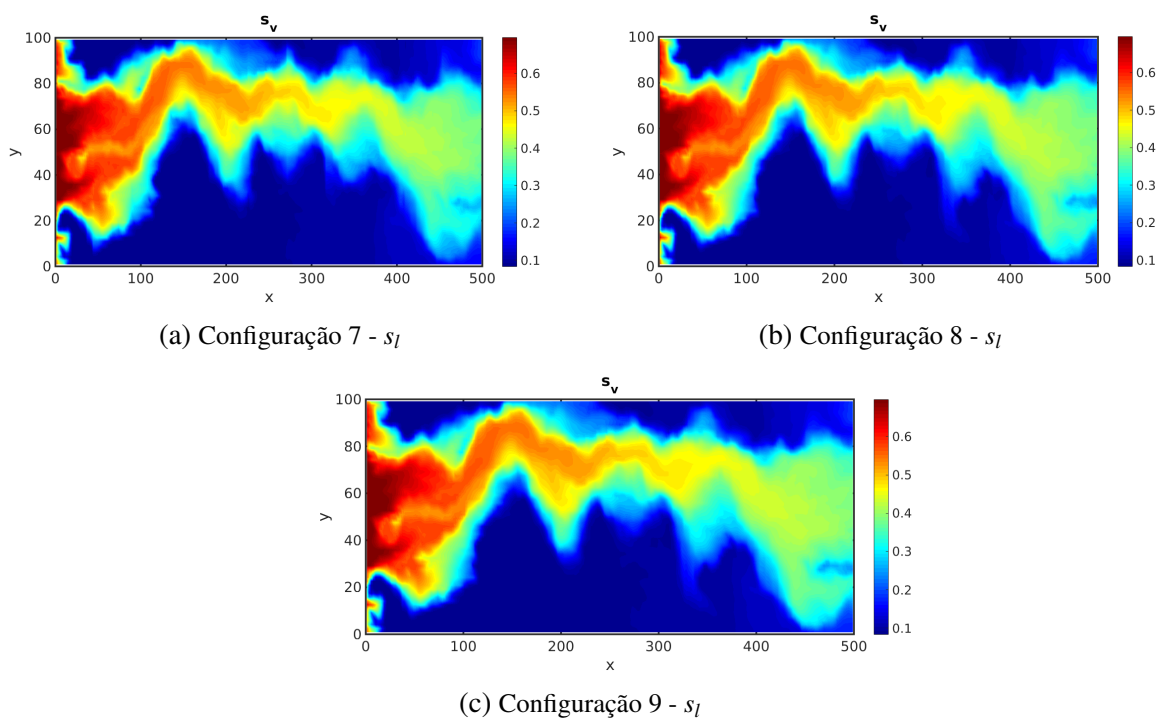


Figura 82 – Saturação da fase vapor - $t = 250$ dias

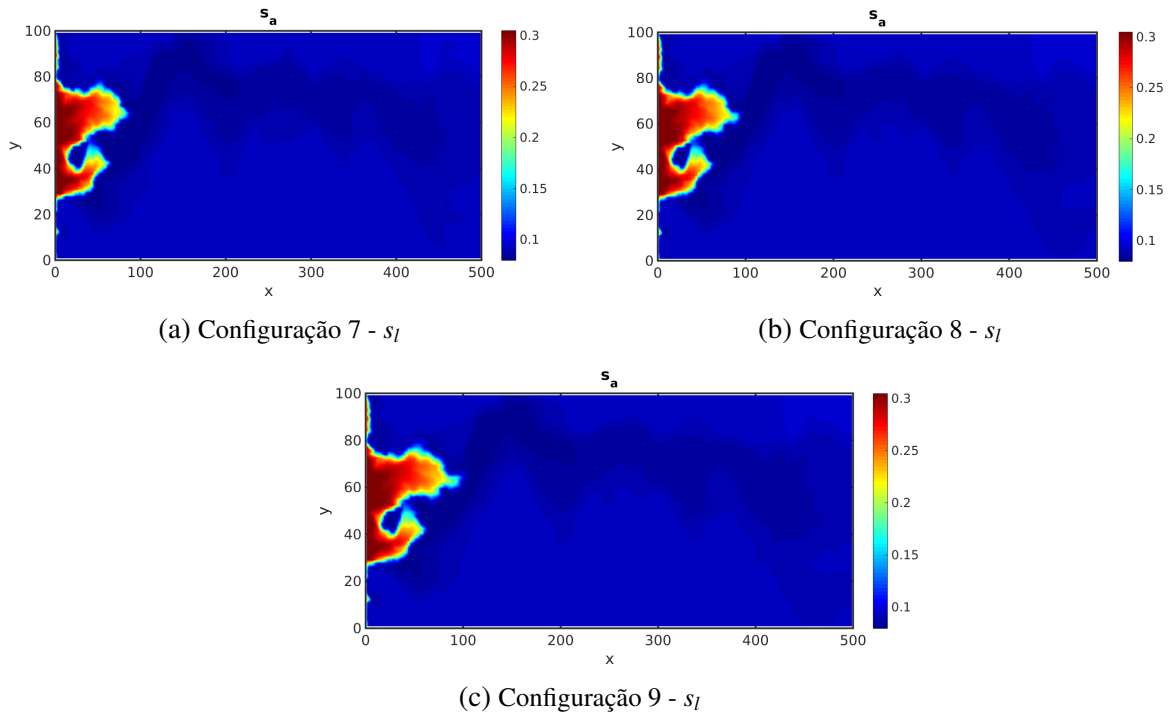


Figura 83 – Saturação da fase aquosa - $t = 250$ dias

Através das observações das soluções para um problema que envolve o modelo black-oil e um campo de permeabilidade heterogêneo, foi possível notar a importância de enriquecer o espaço de interface e assim considerar um novo campo heterogêneo que apresente características diferentes da camada 33 do SPE10.

5.3 Heterogêneo - SPE10 - camada 40

Para esse problema as soluções são determinadas no tempo $t = 70$ dias e com uma malha de 220×60 células computacionais, sendo que o reservatório possui 500 feet na direção x e 100 feet na direção y , caracterizando um domínio $\Omega = (0, 500) \times (0, 100)$. Além disso, para a utilização do método de decomposição de domínio MRCM considera-se 11 subdivisões na direção x e 3 subdivisões na direção y , resultando em subdomínios com 20×20 células computacionais.

Diversas configurações foram consideradas, sendo que o parâmetro α pode caracterizar o MRCM usual ou então ser equivalente aos métodos MHM e MMMFEM. Além disso, é possível avaliar como os espaços de interface de pressão e fluxo podem influenciar nas soluções obtidas, principalmente quando é realizado o enriquecimento dos mesmos.

Considera-se um campo de permeabilidade heterogêneo de alto contraste dado pela camada 40 do SPE10 que apresenta canais de alta permeabilidade e algumas regiões que são de baixa permeabilidade, conforme apresentado na Figura 84.

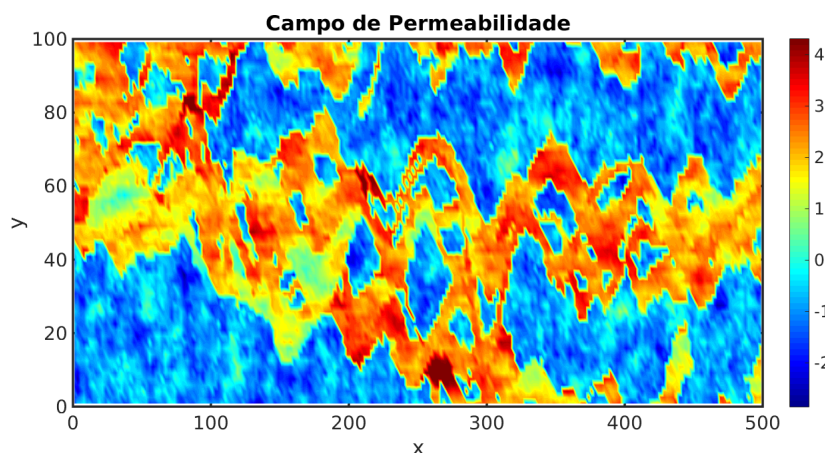


Figura 84 – Campo de permeabilidade heterogêneo - camada 40 do SPE10

As Figuras 85, 86 e 87 mostram os resultados para cada uma das saturações presentes no modelo black-oil. Essas figuras abordam as soluções para as diferentes configurações, permitindo assim realizar comparações com a malha fina, que não apresenta subdivisão de domínio.

Para a saturação da fase líquida, observa-se que quando o valor de α é alto, ou seja, $\alpha = 1000$, o método MRCM equivalente ao MHM apresenta resultados bastante imprecisos. Observa-se pelas Figuras 85c e 85f que as soluções apresentadas são diferentes da solução de malha fina 85a, e que o escoamento acaba ficando muito atrasado para o tempo $t = 70$ dias. O mesmo ocorre para a saturação das fases vapor e aquosa, conforme apresentado nas Figuras 86c, 86f, 87c e 87f.

Quando $\alpha = 1$ tem-se o MRCM usual, sendo que pelas Figuras 85b e 85e as soluções são mais próximas da malha fina. Porém, nota-se em 85b que a solução com espaço de interface linear por partes para a pressão e contante por partes para o fluxo apresentam um pequeno atraso, porém o escoamento segue o canal de alta permeabilidade. Já em 85e tem-se o resultado para o espaço de interface constante por partes para a pressão e linear por partes para o fluxo, sendo que a solução apresenta um atraso menor, porém na região perto da fronteira direita de produção há um certo espalhamento da solução fora do canal de alta permeabilidade. O mesmo acontece para as saturações das fases vapor e aquosa.

Com $\alpha = 10^{-3}$ tem-se que o método MRCM é equivalente ao MMMFEM, sendo que as soluções apresentadas em 85d e 85g são referentes as configurações (5.4) e (5.7), respectivamente. Quando o espaço de interface da pressão é linear por partes, tem-se que a solução é mais próxima da solução de malha fina quando comparado com o caso que apresenta espaço de interface linear por partes para o fluxo. Observa-se na Figura 85g que a solução é muito imprecisa, resultando em um adiantamento do escoamento e até mesmo uma falta de definição perto da região de produção, em que o escoamento perde sua característica de seguir pelo canal de alta permeabilidade. Já na Figura 85d tem-se uma solução mais próxima da malha fina, mostrando que o fato de enriquecer o espaço da pressão acaba sendo mais interessante para o problema. Isso também acontece para

as saturações das fases vapor e aquosa.

Dessa forma, com as soluções obtidas, é possível considerar novas configurações para o método de decomposição de domínio MRCM com $\alpha = 1$, conforme apresentado em (5.8), (5.9) e (5.10).

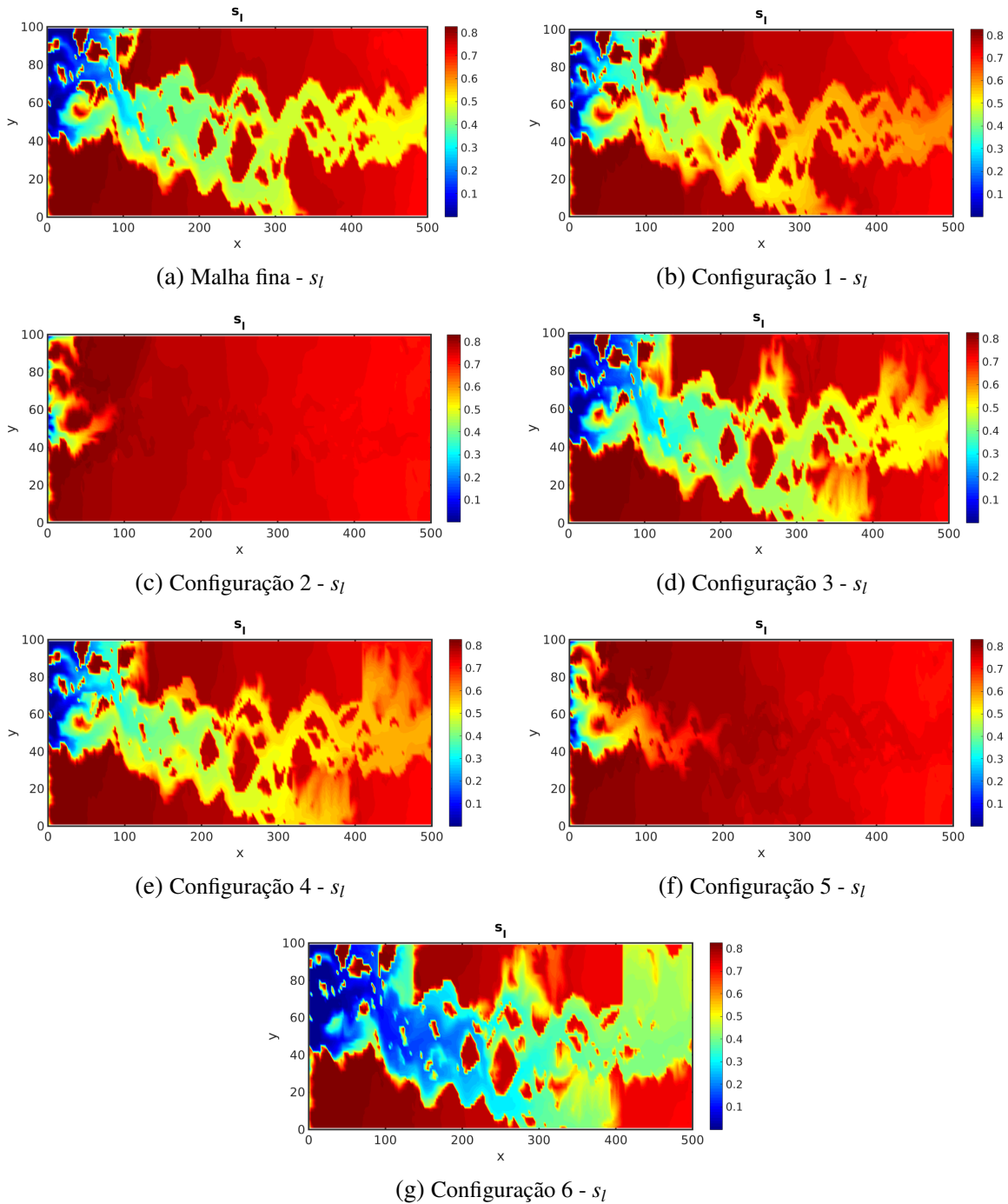
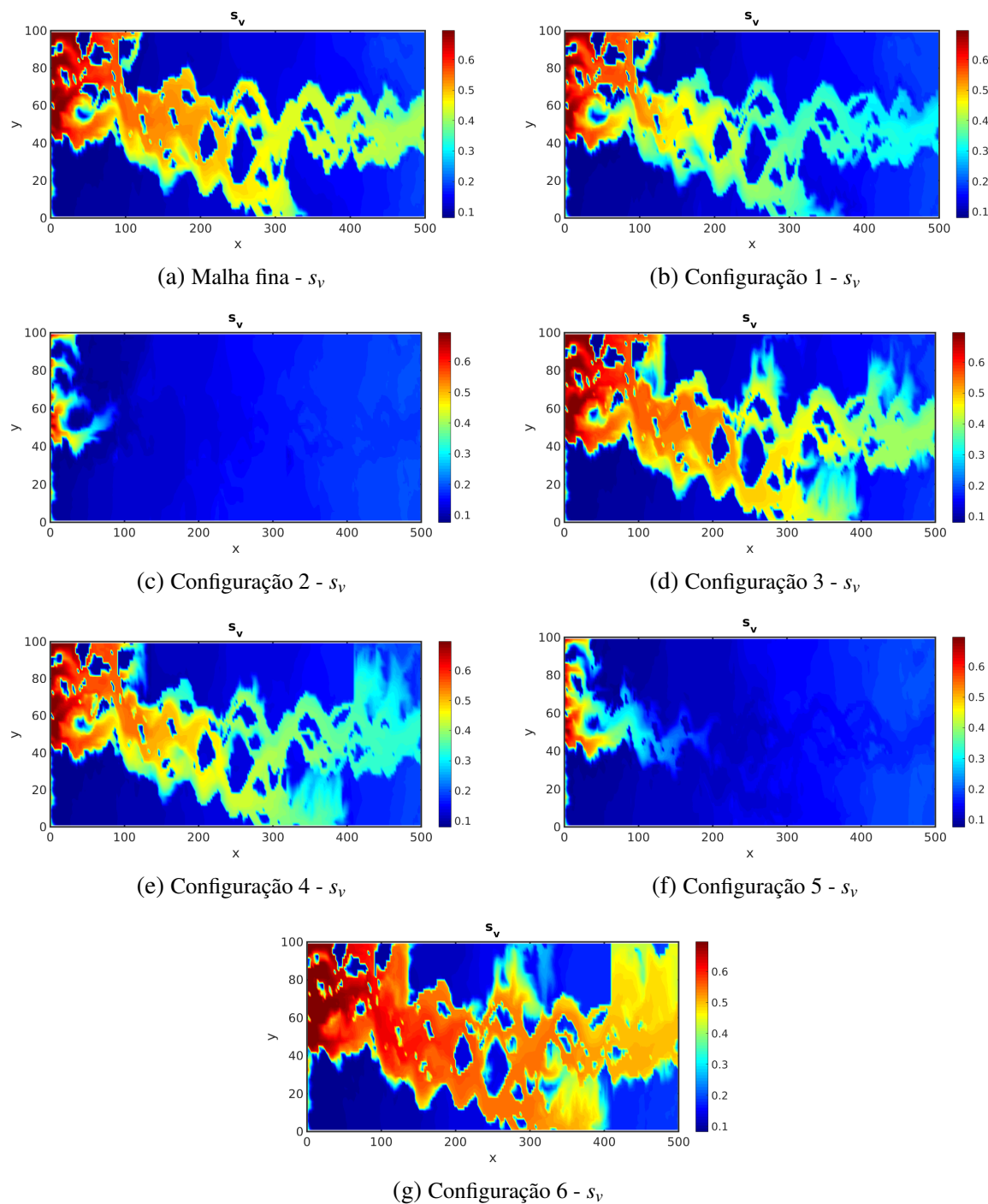


Figura 85 – Saturação da fase líquida - $t = 70$ dias

Figura 86 – Saturação da fase vapor - $t = 70$ dias

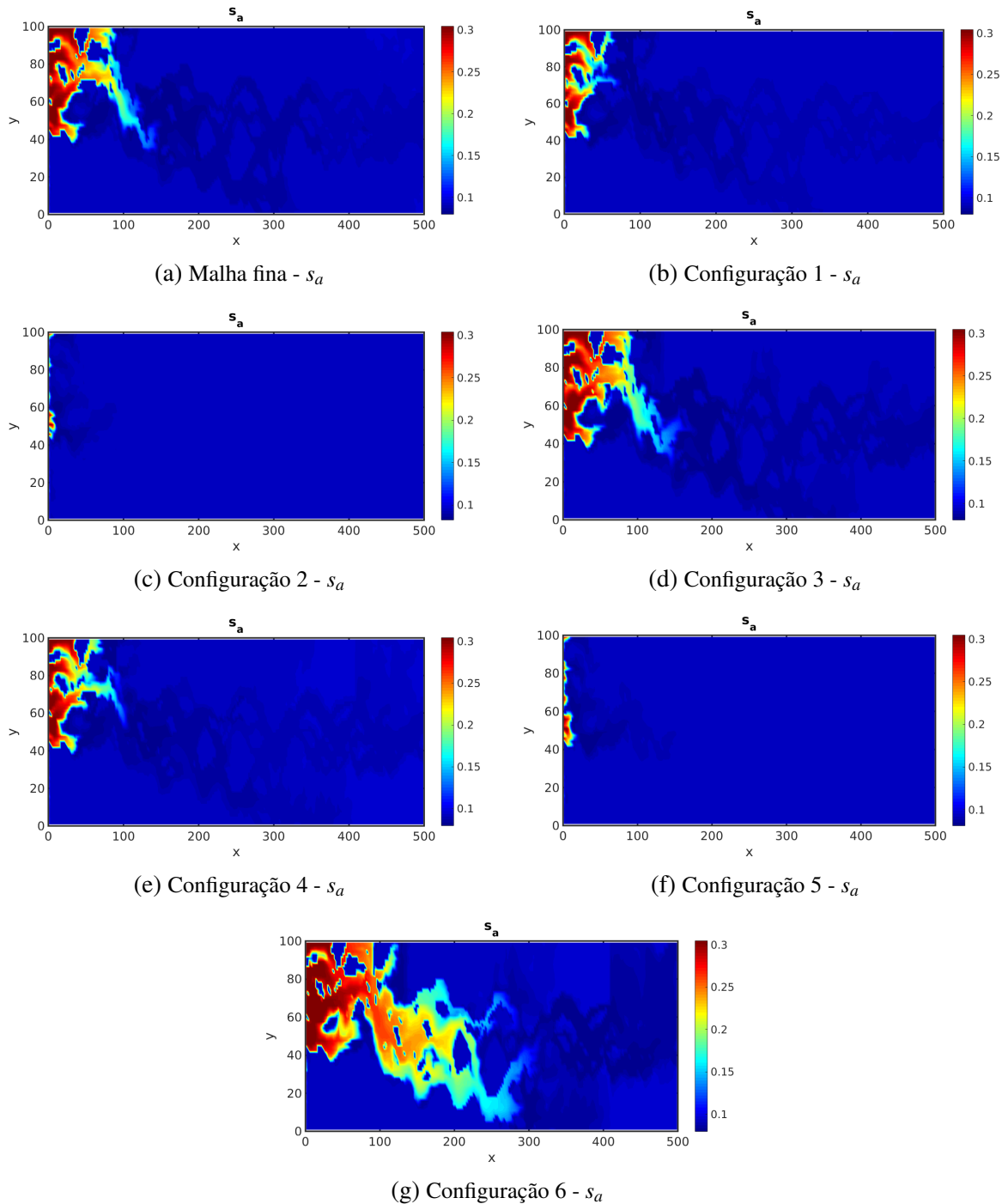


Figura 87 – Saturação da fase aquosa - $t = 70$ dias

Observa-se nas Figuras 88, 89 e 90 as soluções obtidas para as saturações das fases líquida, vapor e aquosa, respectivamente. Com o enriquecimento dos espaços de interface de pressão e fluxo as soluções obtidas são mais próximas da solução de malha, sendo que com os espaços quadráticos tem-se uma solução satisfatória. Ainda sim, nota-se pela Figura 88c que a mesma apresenta um pequeno atraso quando comparada a malha fina 85a.

Assim como para a saturação da fase líquida, os resultados para as saturações da fase

vapor e aquosa apresentam o mesmo comportamento, mostrando a possibilidade de enriquecer os espaços de interface para obter uma solução mais próxima da malha fina.

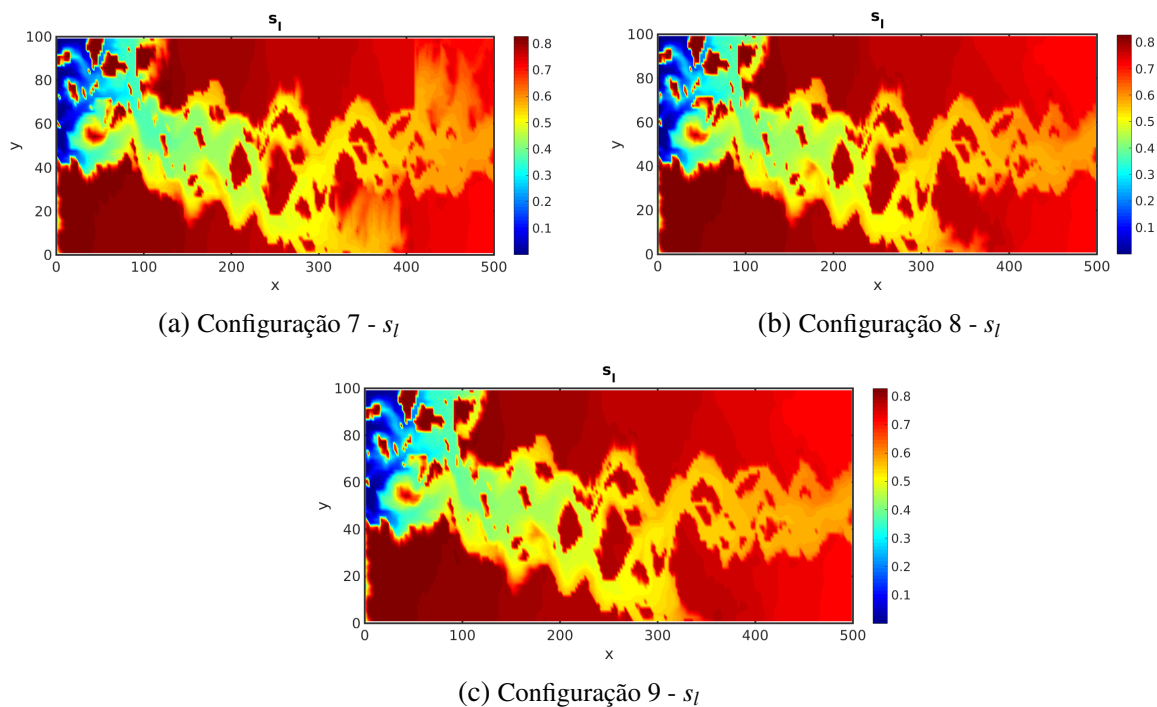


Figura 88 – Saturação da fase líquida - $t = 70$ dias

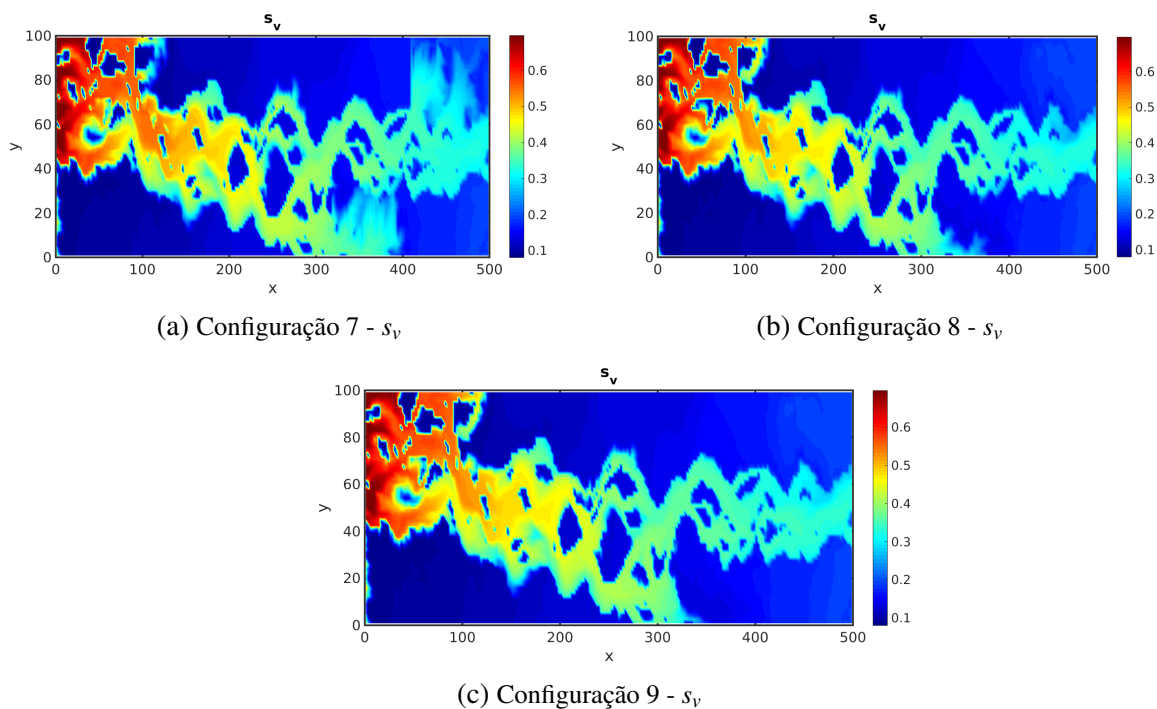


Figura 89 – Saturação da fase vapor - $t = 70$ dias

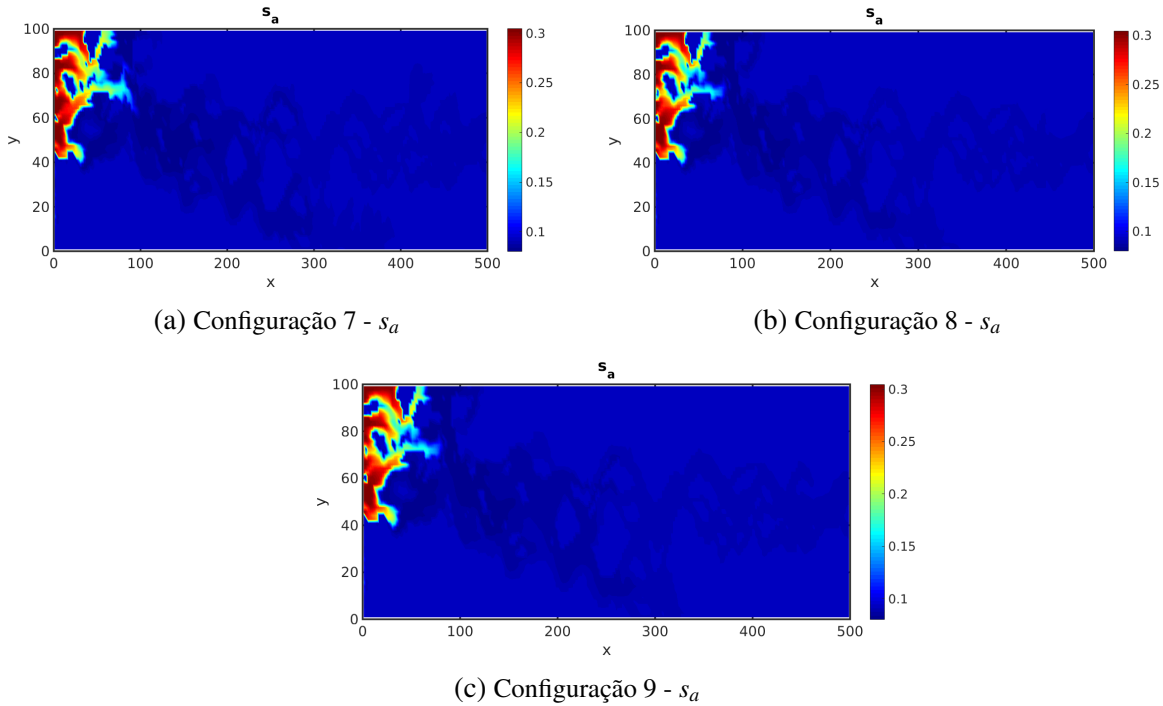


Figura 90 – Saturação da fase aquosa - $t = 70$ dias

Com os resultados obtidos, é interessante analisar as possíveis soluções com o enriquecimento dos espaços de interface da pressão e do fluxo além dos casos quadráticos por partes. Dessa forma, são consideradas para a camada 40 do SPE10 três novas configurações para o método MRCM usual, tal que:

- Configuração 10:

$$\alpha = 1, \quad \mathcal{P}_{H,3}, \quad \mathcal{U}_{H,1} \quad (5.11)$$

- Configuração 11:

$$\alpha = 1, \quad \mathcal{P}_{H,1}, \quad \mathcal{U}_{H,3} \quad (5.12)$$

- Configuração 12:

$$\alpha = 1, \quad \mathcal{P}_{H,1}, \quad \mathcal{U}_{H,5} \quad (5.13)$$

Observa-se em (5.11) que o espaço de interface é cúbico por partes para a pressão e linear por partes para o fluxo, ou seja, há um enriquecimento maior para a pressão. Em (5.12) há um enriquecimento maior para o fluxo, sendo que o mesmo apresenta um espaço de interface cúbico por partes e linear para a pressão. Essas duas configurações possuem a intenção de verificar qual enriquecimento possui mais efeito para que a solução seja mais próxima da malha fina. A última configuração, apresentada em (5.13), possui um espaço de interface linear por partes para a pressão e de grau cinco para a velocidade.

As Figuras 91, 92 e 93 mostram os resultados das saturações da fase líquida, vapor e aquosa para as configurações (5.11), (5.12) e (5.13). Observa-se pelas Figuras 91a, 91b e 91c que

o fato de realizar um enriquecimento dos espaços de interface faz com que as soluções fiquem mais próximas da malha fina, principalmente para as configurações (5.12) e (5.13), como podem ser observadas nas Figuras 91b e 91c.

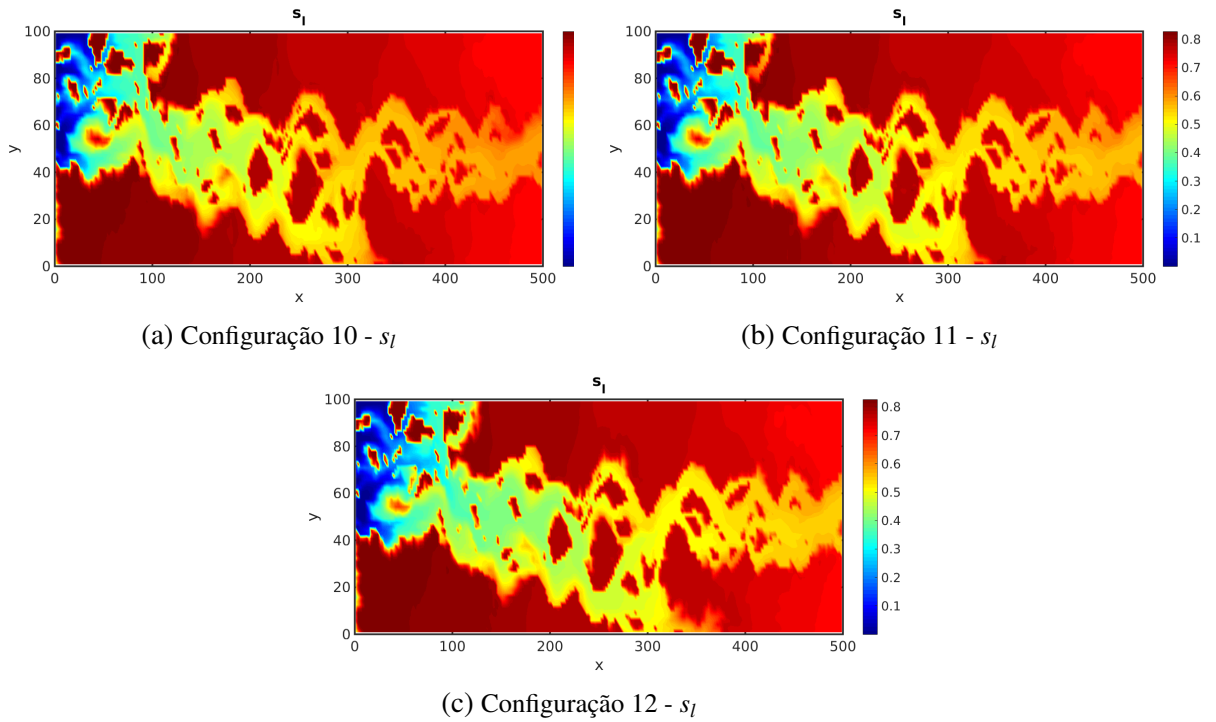


Figura 91 – Saturação da fase líquida - $t = 70$ dias

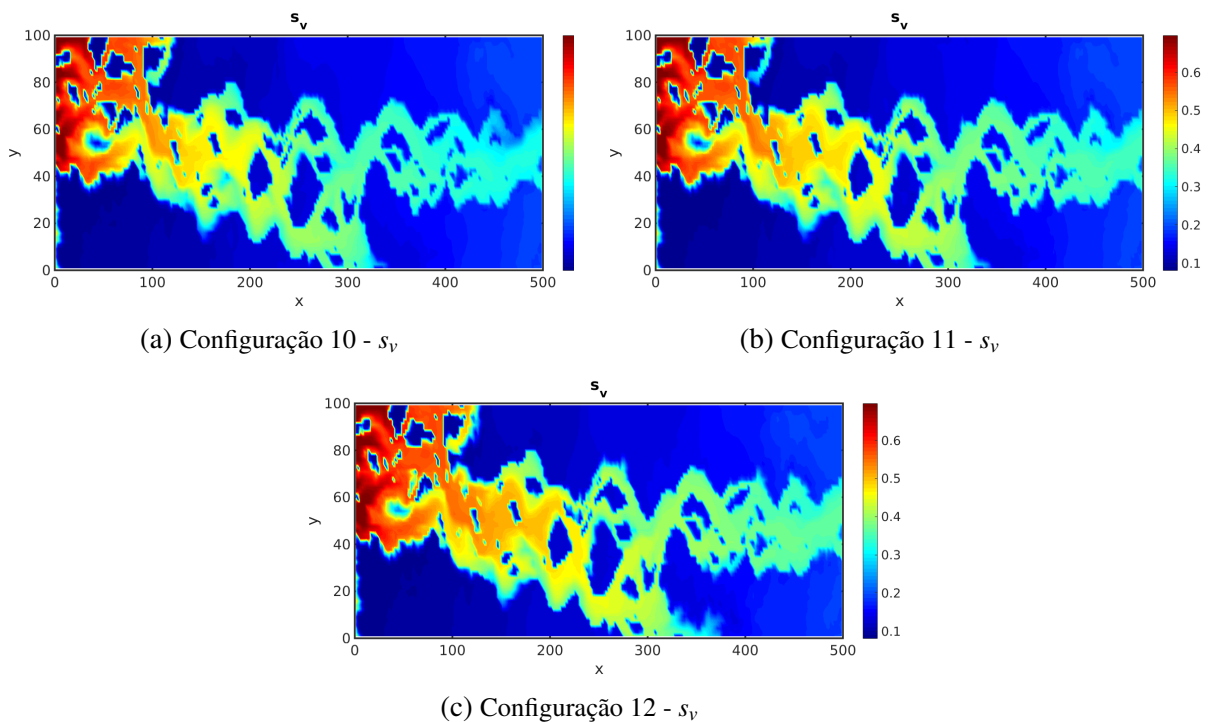


Figura 92 – Saturação da fase vapor - $t = 70$ dias

Assim como para a saturação da fase líquida, as fases vapor e líquida apresentam o mesmo comportamento para a solução no tempo $t = 70$ dias, conforme pode ser observado nas Figuras 92 e 93.

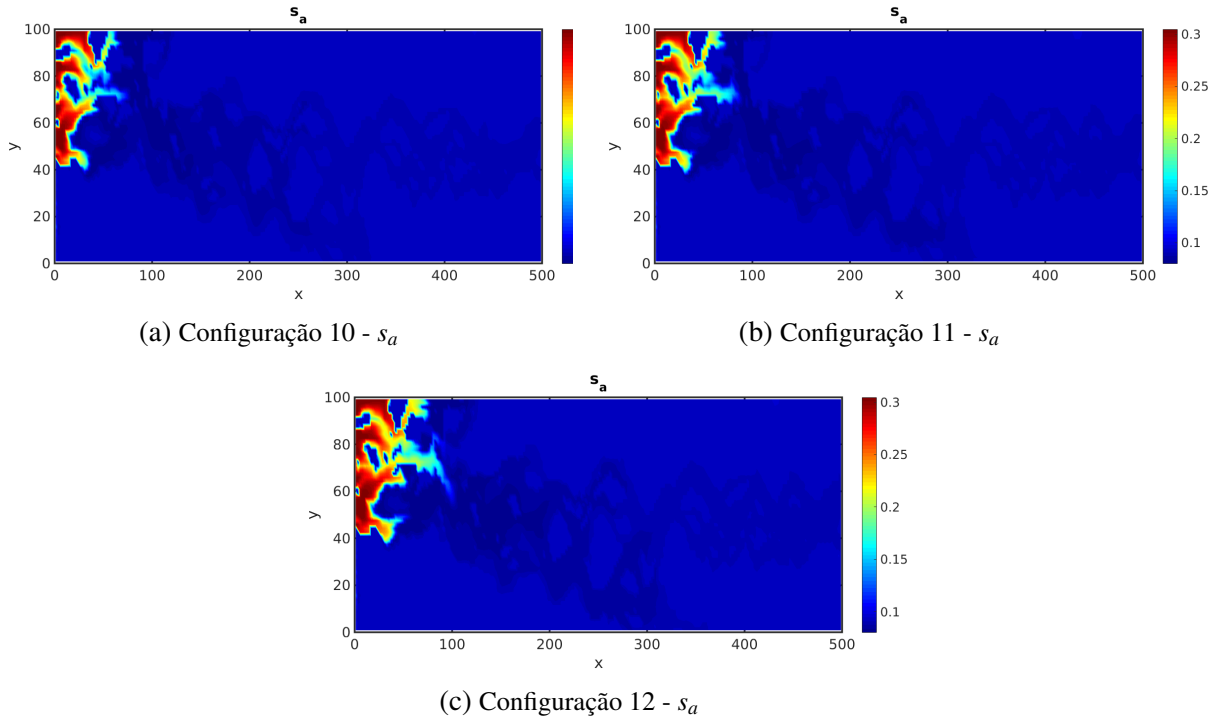


Figura 93 – Saturação da fase aquosa - $t = 70$ dias

Dessa forma, com os campos de permeabilidade e as configurações para o *Multiscale Robin Coupled Method* (MRCM) (GUIRALDELLO *et al.*, 2018b) foi possível realizar diversas combinações com os parâmetros que envolvem esse método e conseqüentemente resolver o modelo black-oil para o cálculo das saturações das fases líquida, vapor e gasosa. Ao modificar o parâmetro α , considerou-se situações que envolvessem o *Multiscale Hybrid Miced Finite Element Method* (MHM) (ARAYA *et al.*, 2013), cujo acoplamento de subdomínios é feito com uma condição de conservação de fluxo e o *Multiscale Mortar Mixed Finite Element Method* (MMMFEM) (ARBOGAST; PENCHEVA; WHEELER MARY ANDA YOTOV, 2007) que aproxima a solução em cada subdomínio impondo a conservação de pressão na interface, sendo que o primeiro utiliza valores pequenos ($\alpha = 10^{-3}$) e o segundo valores grandes ($\alpha = 1000$).

Além do parâmetro α , é possível realizar diferentes combinações com relação aos espaços de interface da pressão ($\mathcal{P}_{H,\gamma}$) e do fluxo ($\mathcal{U}_{H,\gamma}$), sendo que foram considerados espaços de interface constante, linear e quadrático por partes. Além desses, para o último caso foi considerado também espaço com ordem maiores afim de observar os efeitos nas soluções dos problemas considerados.

Com isso, através do caso homogêneo observou-se como cada uma das configurações afetam a solução quando comparadas com a solução de malha fina, independente da saturação

ser da fase líquida, vapor ou aquosa. As soluções com $\alpha = 1000$ (MMMFEM) apresentam as melhores aproximações com o espaço de interface linear por partes da pressão e contante do fluxo. Já para $\alpha = 10^{-3}$ as soluções bastante imprecisas, assim como para o MRCM usual com $\alpha = 1$. Porém, com o enriquecimento do espaço de interface da pressão há uma melhora na solução, aproximando-se da malha fina.

Após a verificação inicial do método de decomposição de domínio para o modelo black-oil, considerou-se uma camada do SPE10 que apresenta regiões de alta e baixa permeabilidade, a camada 33. Observa-se que a mesma não apresenta um canal de alta permeabilidade, mas com regiões que o escoamento irá procurar natural até a região de produção. Para esse caso as diferenças entre as configurações são mais sutis, porém observa-se que quando $\alpha = 1$ ou $\alpha = 1000$ com espaço de interface linear por partes da pressão apresenta resultados mais próximas da solução de malha fina, sendo que o mesmo não acontece com $\alpha = 10^{-3}$ que é bastante imprecisa. Porém, com o espaço de interface linear por partes do fluxo a solução torna-se mais precisa e aproxima-se da malha fina.

Com o campo de permeabilidade da camada 40 do SPE10, tem-se um canal de alta permeabilidade que possui características interessantes para aplicação do modelo black-oil. Observa-se que esse caso $\alpha = 1000$ apresenta soluções muito imprecisas, independente das escolhas dos espaços de interface. Já para o método MRCM usual com $\alpha = 1$ as soluções com o enriquecimento dos espaços de interface da pressão apresentam melhores resultados, aproximando-se da solução de malha fina. Essa investigação foi estendida para configurações com maior enriquecimento desses espaços com a finalidade de explorar as soluções obtidas, comprovando que ao utilizar uma ordem maior resulta em uma aproximação mais precisa. Para $\alpha = 10^{-3}$ com espaço de interface linear por partes da pressão tem-se uma melhor aproximação quando comparada com o espaço de interface linear do fluxo que torna a solução imprecisa.

CONCLUSÕES

Com o estudo e revisão bibliográfica dos métodos de volumes finitos para equações hiperbólicas foi possível avaliar os métodos do tipo upwind e centrados, sendo que através da reconstrução linear por partes com a utilização de limitadores como o *minmod*, *superbee* e *monotonized central* permitem obter métodos de ordem formal $O(h^2)$, tais como o Kurganov-Tadmor. Dessa forma, com os métodos de $O(h)$ que possuem essa reconstrução constante por partes e com os métodos de ordem alta foi possível resolver a equação de Buckley-Leverett com a finalidade de observar a solução das saturações e determinar a ordem empírica dos métodos upwind com e sem reconstrução linear, Rusanov e Kurganov-Tadmor.

Para o cálculo dessas ordens foram utilizadas as normas $L^1(\Omega)$ e $Lip'(\Omega)$, sendo que foi possível observar como as ondas de choque e rarefação afetam no cálculo das normas e conseqüentemente na comparação da ordem formal com a ordem empírica. Para as situações em que ocorriam apenas onda de choque, os métodos de ordem formal $O(h^2)$ tinham uma redução de ordem para $O(h)$ com a norma $L^1(\Omega)$. Porém, essa norma é recuperada com a norma $Lip'(\Omega)$, resultando de fato na ordem esperada para os métodos de ordem alta. A presença de uma onda de choque e rarefação faz com que os métodos de alta ordem tenham uma redução no cálculo da ordem empírica para $O(h)$, mesmo com a utilização da norma $Lip'(\Omega)$.

Assim, através desse estudo com os métodos de volumes finitos observou-se como a presença das ondas de choque e rarefação podem afetar na ordem empírica dos métodos de alta ordem, principalmente pelo fato da onda de rarefação. Além dos estudos em problemas unidimensionais, notou-se também alguns comportamentos interessantes para os casos bidimensionais, em que a ordem dos métodos de primeira ordem sofriam redução para $O(h^{1/2})$, enquanto que os métodos de $O(h^2)$ sofriam a redução de ordem e possuíam também erros menores para o cálculo das saturações.

É importante destacar que assim como para a equação de Buckley-Leverett para escoamentos bifásicos, essas observações quanto ao estudo dos métodos de volumes finitos também

foi realizada para escoamentos trifásicos, onde ocorre a presença do gás além óleo e água. Da mesma maneira que o bifásico, no estudo trifásico os métodos de alta ordem sofrem uma redução da mesma com a presença de ondas de choque e rarefação, seja para os casos unidimensionais ou bidimensionais.

Além disso, tanto no bifásico como no trifásico as soluções com os métodos upwind com e sem reconstrução e os métodos de Rusanov e Kurganov-Tadmor permitiram realizar comparações da qualidade da solução. Dessa forma, foram realizadas comparações com uma malha fina, onde observou-se que os métodos de maior ordem aproximavam melhor a solução quando comparadas com os métodos de $O(h)$.

O estudo do modelo trifásico foi importante para compreender a estrutura das equações e como as mesmas são construídas considerando a presença de três fases. Com isso, o próximo passo consistiu em compreender o modelo black-oil que possui diversas características diferentes do modelo trifásico. Através do estudo dessas características e das equações que compõem o modelo, foi possível compreender a relação das componentes e fases. Para isso foram estudados o equilíbrio termodinâmico, a lei de Darcy, a equação de estado e a equação de conservação de massa.

Como é permitida a relação entre as componentes e as fases, pode-se ter um escoamento saturado ou subsaturado, ou seja, quando há a presença das três fases (líquida, vapor e aquosa) ou então quando uma das fases não existe, caracterizando que algum dos componentes está totalmente dissolvido em outra fase. Além disso, foram considerados diversos parâmetros para o modelo black-oil, definindo as unidades para o comprimento, tempo da ocorrência do escoamento, pressão e viscosidade, além de outras que são de suma importância para o mesmo. Expressões para as permeabilidades, viscosidades e fatores de volume de formação também foram considerados.

A partir do estudo detalhado da equação de pressão do modelo black-oil, foi possível simplificá-la de três fluxos para apenas um fluxo, que posteriormente acaba resultando em uma aplicação mais direta para métodos de decomposição de domínio. Para realizar esse procedimento foram consideradas algumas simplificações que permitem reduzir a equação para apenas um fluxo. Assim, foram considerada uma abordagem parcialmente implícita e outra explícita tanto para o caso com três fluxos como para o caso com apenas um fluxo, permitindo assim construir soluções manufaturadas e comparar as soluções obtidas. Inicialmente observou-se que as soluções eram similares e que poderiam ser utilizadas sem maiores problemas para a resolução do modelo black-oil.

Além da equação de pressão, tem-se a equação de conservação de massa que permitirá a utilização dos métodos de volumes finitos do tipo upwind e centrados para a resolução da mesma. Dessa forma, os métodos upwind com e sem reconstrução linear por partes, Rusanov e Kurganov-Tadmor podem ser utilizados para obter as saturações de cada uma das fases, aproveitando assim os estudos realizados anteriormente. Assim como para a equação de Buckley-Leverett para os

escoamentos bifásicos e trifásicos, é importante a comparação da solução dos métodos tanto para os problemas unidimensionais como bidimensionais.

Com isso, foram considerados alguns casos unidimensionais saturados e subsaturados, onde foi possível observar as soluções com a equação de pressão de três fluxos e um fluxo. Dessa forma, o erro entre as soluções foi bem pequeno tanto para a pressão como para as saturações de cada um das fases, possibilitando assim a utilização no modelo black-oil e conseqüentemente para os próximos problemas a serem resolvidos. Além da comparação das soluções com as diferentes abordagens para a pressão, as soluções também foram comparadas entre os métodos de volumes finitos considerados para a equação de transporte. Assim como para o caso bifásico e trifásico, observou-se que os métodos de alta ordem como o upwind com reconstrução e Kurganov-Tadmor aproximam melhor a solução quando comparados com os métodos de $O(h)$ como o upwind com reconstrução constante por partes e o Rusanov.

Através dos problemas saturados observou-se a presença das três fases que compõem o modelo black-oil (líquida, vapor e aquosa). Já para os casos subsaturados com $R_a \neq 0$, $R_v \neq 0$ e $R_l \neq 0$ foi possível observar como as componentes podem estar totalmente dissolvidas em outra fase, não formando por exemplo a fase vapor ou líquida. Isso acontece quando é considerado o caso mais geral do modelo black-oil. Geralmente, apenas a componente gás pode estar dissolvida na fase líquida e conseqüentemente não ter a presença da fase vapor no problema considerado.

Os problemas unidimensionais foram importantes para compreender como ocorre o escoamento e assim obter a saturação de cada uma das fases. Para os problemas bidimensionais, tanto as equações que compõem o modelo como as discretizações são realizadas de maneira bastante direta. Para isso, foram considerados alguns casos com a finalidade de observar as soluções a serem obtidas. Assim, iniciou-se com um problema homogêneo similar ao caso unidimensional afim de verificar o funcionamento do código desenvolvido. Posteriormente, foram considerados problemas heterogêneos que apresentam campos de permeabilidade de alto contraste, através de um campo Gaussiano e um com canais de alta permeabilidade. Para esses casos foi utilizado o método de volumes finitos de Kurganov-Tadmor.

Com os resultados do modelo black-oil para problemas unidimensionais e bidimensionais, inicia-se uma investigação para a solução do mesmo com a utilização do método de decomposição de domínio multiescala *Multiscale Robin Coupled Method* (MRCM) com diferentes escolhas de parâmetros. Dessa forma, o método MRCM é desenvolvido de forma que os problemas locais estão sujeitos às condições de contorno de Robin. O mesmo é uma generalização de outros métodos multiescala, como por exemplo o *Multiscale Hybrid Mixed Finite Element Method* (MHM) e o *Multiscale Mortar Mixed Finite Element Method* (MMMFEM), sendo que o primeiro acopla os subdomínios através de uma condição de conservação de fluxo e o segundo aproxima a solução em cada subdomínio impondo a conservação de pressão na interface.

No MRCM tem-se o parâmetro α que permite a explorar as soluções equivalentes de cada um desses métodos, sendo que para $\alpha = 1$ tem-se o MRCM usual, para $\alpha = 1000$ tem o MHM e

para $\alpha = 10^{-3}$ tem-se o MMMFEM. Além disso, é possível considerar diferentes espaços de interface para a pressão e para o fluxo, realizando enriquecimento quanto as ordens. Através disso, foi possível observar a solução para um problema inicial com campo de permeabilidade homogêneo para as diferentes configurações considerados. Observou-se o funcionamento do código e as diferentes soluções para as saturações de cada uma das fases, sendo possível perceber como o parâmetro α e os espaços de interface podem afetar a solução do modelo black-oil.

Além desse problema inicial, foram considerados casos com campos de permeabilidades do SPE10, sendo estes campos de alto contraste e que apresentam um desafio interessante para o método de decomposição de domínio multiescala MRCM. Dessa forma, através das mesmas configurações foi possível notar como as soluções se comportam, favorecendo assim a escolha do parâmetro α e quais enriquecimentos para os espaços de interface são necessários para cada tipo de problema envolvendo as equações do modelo black-oil, comparando-as com a solução de malha fina.

Com a finalidade de enriquecer ainda mais os espaços de interface, foram consideradas novas configurações para a camada 40 do SPE10, sendo que foi possível observar uma melhora nas soluções quando comparadas com a malha fina. Isso mostra que há algumas combinações de espaço entre pressão e fluxo que podem contribuir para soluções mais precisas.

REFERÊNCIAS

ABREU, E.; DOUGLAS, J.; PEREIRA, P. Operator splitting for three-phase flow in heterogeneous porous media. **Communications in Computational Physics**, v. 6, n. 1, p. 72–84, 2009. Nenhuma citação no texto.

ABREU, E.; PEREIRA, F.; RIBEIRO, S. Central schemes for porous media flows. **Computational & Applied Mathematics**, SciELO Brasil, v. 28, n. 1, p. 87–110, 2009. Nenhuma citação no texto.

ARAYA, R.; HARTER, C.; PAREDES, D.; VALENTIN, F. Multiscale hybrid-mixed method. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 51, 2013. Citado nas páginas 24, 126 e 148.

ARBOGAST, T.; PENICHEVA, G.; WHEELER MARY ANDA YOTOV, I. A multiscale mortar mixed finite element method. **Multiscale Modeling & Simulation - MULSTISCALE MODEL SIMUL**, v. 6, 2007. Citado nas páginas 24, 125, 126 e 148.

BELL, J. B.; COLELLA, P.; TRANGENSTEIN, J. A. Higher order godunov methods for general systems of hyperbolic conservation laws. **Journal of Computational Physics**, v. 82, n. 2, p. 362 – 397, 1989. ISSN 0021-9991. Nenhuma citação no texto.

BELL, J. B.; SHUBIN, G. R.; TRANGENSTEIN, J. A. A method for reducing numerical dispersion in two-phase black-oil reservoir simulation. **Journal of Computational Physics**, v. 65, n. 1, p. 71 – 106, 1986. ISSN 0021-9991. Citado nas páginas 24, 69 e 83.

BELL, J. B.; TRANGENSTEIN, J. A.; SHUBIN, G. R. Conservation laws of mixed type describing three-phase flow in porous media. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 46, n. 6, p. 1000 – 1017, 1986. ISSN 0036-1399. Nenhuma citação no texto.

BERGAMASCHI, L.; MANTICA, S.; MANZINI, G. A mixed finite element–finite volume formulation on the black-oil model. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 20, n. 3, p. 970 – 997, 1998. ISSN 1064-8275. Nenhuma citação no texto.

BUCKLEY, S. E.; LEVERETT, M. C. Mechanism of fluid displacement in sands. **Transactions of the AIME**, Society of Petroleum Engineers, v. 146, n. 01, p. 107–116, 1942. Citado nas páginas 24, 37 e 38.

CHEN, Z. Formulations and numerical methods of the black-oil model in porous media. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 38, n. 2, p. 489 – 514, 2000. ISSN 0036-1429. Citado na página 24.

CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. **Computational methods for multiphase flows in porous media**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006. Citado na página 23.

DAMIÁN, S. M.; NIGRO, N. M.; BUSCAGLIA, G. C. A central scheme for advecting scalars by velocity fields obtained from finite volume multiphase incompressible solvers. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 40, n. 15, p. 6934–6955, 2016. Citado nas páginas 32, 34 e 35.

FJORDHOLM, U. S.; SOLEM, S. Second-order convergence of monotone schemes for conservation laws. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, SIAM, v. 54, n. 3, p. 1920–1945, 2016. Nenhuma citação no texto.

FRANCISCO, A.; GINTING, V.; PEREIRA, F.; RIGELO, J. Design and implementation of an multiscale mixed based on a nonoverlapping domain decomposition procedure. **Mathematics and Computer in Simulation**, v. 99, p. 125–138, 2014. Citado nas páginas 24 e 126.

FURTADO, F.; PEREIRA, F.; RIBEIRO, S. A new two-dimensional second order non-oscillatory central scheme applied to multiphase flows in heterogeneous porous media. **arXiv preprint arXiv:0803.4224**, 2008. Nenhuma citação no texto.

GLOWINSKI, R.; WHEELER, M. Domain decomposition and mixed finite element methods for elliptic problems. In: . [S.l.: s.n.], 1988. Nenhuma citação no texto.

GODUNOV, S. K. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. **Matematicheskii Sbornik**, Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, v. 89, n. 3, p. 271–306, 1959. Citado nas páginas 24, 28 e 31.

GOTTLIEB, S.; SHU, C.-W. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. **Mathematics of computation of the American Mathematical Society**, v. 67, n. 221, p. 73–85, 1998. Citado na página 33.

GUIRALDELLO, R.; AUSAS, R.; SOUSA, F.; PEREIRA, F.; BUSCAGLIA, G. Interface spaces for the multiscale robin coupled method in reservoir simulation. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 164, 2018. Nenhuma citação no texto.

GUIRALDELLO, R. T.; AUSAS, R. F.; SOUSA, F. S.; PEREIRA, F.; BUSCAGLIA, G. C. The multiscale robin coupled method for flows in porous media. **Journal of Computational Physics**, v. 355, p. 1 – 21, 2018. ISSN 0021-9991. Citado nas páginas 24, 125, 126 e 148.

GUZMAN, R. E.; FAYERS, F. J. Solutions to the three-phase buckley-leverett problem. **SPE Journal**, v. 2, p. 301–311, 09 1997. Nenhuma citação no texto.

JENNY, P.; LEE, S.; TCHELEPI, H. Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation. **Journal of Computational Physics**, v. 187, p. 47–67, 2003. Citado na página 125.

JUANES, R.; PATZEK, T. Multiscale numerical modeling of three-phase flow. In: . [S.l.: s.n.], 2003. Citado nas páginas 24 e 57.

JUANES, R.; PATZEK, T. W. Stabilized numerical solutions of three-phase porous media flow using a multiscale finite element formulation. 2003. Citado nas páginas 24, 54 e 57.

_____. Three-phase displacement theory: an improved description of relative permeabilities. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. **SPE Annual Technical Conference and Exhibition**. [S.l.], 2004. Citado na página 24.

KARIMI, A.; NADERAN, H.; MANZARI, M. T.; HANNANI, S. K. A comparison between high-resolution central and godunov-based schemes for the black-oil simulation. **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**, v. 19, n. 2, p. 125 – 145, 2009. ISSN 0961-5539. Nenhuma citação no texto.

- KURGANOV, A.; LIN, C.-T. On the reduction of numerical dissipation in central-upwind schemes. **Communications in Computational Physics**, v. 2, n. 1, p. 141 – 163, 2007. Nenhuma citação no texto.
- KURGANOV, A.; NOELLE, S.; PETROVA, G. Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and hamilton-jacob equations. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 23, n. 3, p. 707 – 740, 2001. Nenhuma citação no texto.
- KURGANOV, A.; TADMOR, E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection–diffusion equations. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 160, n. 1, p. 241–282, 2000. Citado nas páginas 24, 28 e 32.
- LEVEQUE, R. J. **Finite volume methods for hyperbolic problems**. [S.l.]: Cambridge university press, 2002. v. 31. Citado nas páginas 24, 28, 31, 32, 33, 34, 38 e 40.
- LIU, T.-P. The riemann problem for general systems of conservation laws. **Journal of Differential Equations**, v. 18, n. 1, p. 218–234, 1975. Nenhuma citação no texto.
- LUNATI, I.; LEE, S. An operator formulation of the multiscale finite-volume method with correction function. **Multiscale Modeling & Simulation**, v. 8, 2009. Nenhuma citação no texto.
- MEHMANI, Y.; BALHOFF, M. Bridging from pore to continuum: A hybrid mortar domain decomposition framework for subsurface flow and transport. **Multiscale Model. Simul.**, v. 12, p. 667–693, 2014. Nenhuma citação no texto.
- NADERAN, H.; MANZARI, M. T.; HANNANI, S. K. Simulation of three-phase flow in porous media using a high-resolution central scheme. In: . [S.l.: s.n.], 2006. Nenhuma citação no texto.
- _____. Application and performance comparison of high-resolution central schemes for the black-oil model. **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**, v. 17, n. 7, p. 736 – 753, 2007. ISSN 0961-5539. Nenhuma citação no texto.
- NESSYAHU, H.; TADMOR, E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws. **Journal of Computational Physics**, v. 87, n. 2, p. 408 – 463, 1990. ISSN 0021-9991. Nenhuma citação no texto.
- OLEINIK, O. A. Discontinuous solutions of non-linear differential equations. **Uspekhi Matematicheskikh Nauk**, Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, v. 12, n. 3, p. 3–73, 1957. Citado na página 40.
- PEACEMAN, D. W. **Fundamentals of numerical reservoir simulations**. [S.l.]: Elsevier scientific, 1977. Nenhuma citação no texto.
- PEREIRA, F.; RAHUNANTHAN, A. A semi-discrete central scheme for the approximation of two-phase flows in three space dimensions. **Mathematics and Computers in Simulation**, Elsevier, v. 81, n. 10, p. 2296–2306, 2011. Nenhuma citação no texto.
- TRANGENSTEIN, J. A.; BELL, J. B. Mathematical structure of the black-oil model for petroleum reservoir simulation. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 49, n. 3, p. 749 – 783, 1989. ISSN 0036-1399. Citado nas páginas 24, 27, 69, 70, 80, 95 e 96.

