

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Implementação de Modelos Viscoelásticos com Viscosidade Variável no Sistema HiGFlow

Rameyli Godoi

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-C²MC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Rameyli Godoi

Implementação de Modelos Viscoelásticos com Viscosidade Variável no Sistema HiGFlow

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Antonio Castelo Filho

USP – São Carlos
Janeiro de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

G588i Godoi, Rameyli
Implementação de Modelos Viscoelásticos com
Viscosidade Variável no Sistema HiGFlow / Rameyli
Godoi; orientador Antonio Castelo Filho. -- São
Carlos, 2023.
62 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Ciências de Computação e Matemática
Computacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Mecânica dos fluidos computacional. 2. Fluidos
viscoelásticos. I. Castelo Filho, Antonio, orient.
II. Título.

Rameyli Godoi

**Implementation of Viscoelastic Models with Variable
Viscosity in the HiGFlow System**

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Computer and Mathematical Sciences Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Antonio Castelo Filho

**USP – São Carlos
January 2023**

Este trabalho é dedicado à Deus, o meu grande amor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por ter me dado forças para chegar até aqui, sem Ele eu nada seria.

Agradeço ao meu orientador, Antonio Castelo Filho, pela paciência, apoio e ensinamentos que me deu durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu colega de grupo de pesquisa, Hugo Alberto Castillo Sanchez, pelos ensinamentos a respeito deste trabalho.

Agradeço à minha mãe, Madalena, por ser meu maior exemplo de superação, por ser meu porto seguro, por ter compreendido a minha demora e por tudo que ela passou para que eu conseguisse realizar meus objetivos. Agradeço também aos meus irmãos por cada ligação. Eu amo vocês.

Agradeço à Joanna D'Arc Nogueira Veloso por estar ao meu lado durante tantos anos, pela paciência, por me ajudar nos momentos mais difíceis, por me mostrar que nem tudo está perdido. Por esses e outros motivos, muito obrigada.

Agradeço aos meus amigos, velhos e novos, que me apoiaram e que sempre estiveram ao meu lado durante esta longa caminhada.

Agradeço ao Garra Rugby pelo acolhimento. Vocês me proporcionaram momentos inesquecíveis.

Aos colegas do grupo de pesquisa do HiGFlow, pelo enriquecimento intelectual que me proporcionaram.

Ao Laboratório de Matemática Aplicada e Computação Científica (LMACC), por toda estrutura disponível.

À CAPES e ao CNPq pelo auxílio financeiro.

À Universidade de São Paulo (USP), ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC), aos professores que conheço deste instituto, responsáveis pela minha formação acadêmica.

*“Confie no Senhor de todo o seu coração
e não se apoie em seu próprio entendimento.”
(Provérbios 3:5)*

RESUMO

GODOI, R. **Implementação de Modelos Viscoelásticos com Viscosidade Variável no Sistema HiGFlow**. 2023. 62 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Essa dissertação apresenta uma metodologia para a simulação de escoamentos onde a viscosidade varia com a taxa de cisalhamento, modelados por duas combinações: a equação constitutiva Oldroyd-B com o modelo de Carreau-Yasuda e Oldroyd-B com o modelo Power law ou lei de potência. Tais simulações foram realizadas no sistema HigFlow e no ambiente de simulação OpenFoam®, onde foram feitos testes para ambas as modelagens num escoamento totalmente desenvolvido entre placas paralelas e em uma contração 4:1. Foram feitos testes variando os números de Reynolds e Deborah, além da verificação da simulação em malhas diferentes. Pode-se notar que, ao utilizar cinco malhas diferentes, tantos os resultados para τ_{xy} e a velocidade em Carreau-Yasuda quanto para Power law apresentam erros relativamente pequenos em comparação com τ_{xx} e a viscosidade. Em relação ao número de Reynolds, quanto maior ele for, menores serão os esforços no escoamento. Para o número de Deborah, quanto maior ele for, maiores serão os esforços.

Palavras-chave: HigFlow, Oldroyd-B, Carreau-Yasuda, Power law, Viscosidade variavel.

ABSTRACT

GODOI, R. **Implementation of Viscoelastic Models with Variable Viscosity in the HiGFlow System**. 2023. 62 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

This dissertation presents a methodology for simulating flows where viscosity varies with shear rate, modeled by two combinations: the constitutive equation Oldroyd-B with the Carreau-Yasuda model and Oldroyd-B with the Power law model. Such simulations were performed in the HiGFlow system and in the OpenFoam® simulation environment, where tests were performed for both models in a fully developed flow between parallel plates and in a 4:1 contraction. Tests were performed varying the Reynolds and Deborah numbers, in addition to checking the simulation in different meshes. It can be noted that, when using five different meshes, both the results for τ_{xy} and the speed in Carreau-Yasuda and for Power law have relatively small errors compared to τ_{xx} and the viscosity. In relation to the Reynolds number, the higher it is, the lower the flow forces will be. For Deborah's number, the larger it is, the greater the strains.

Keywords: HiGFlow, Oldroyd-B, Carreau-Yasuda, Power law, Variable viscosity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Fluxograma com a classificação dos fluidos. | 22 |
| Figura 2 – Curvas de Fluxo de fluidos de lei de potência: 1.Dilatante, 2.Newtoniano e 3.Pseudoplástico. | 28 |
| Figura 3 – Características implementadas no HiGFlow. | 37 |
| Figura 4 – Visão geral da estrutura do OpenFOAM® (extraído do guia de usuário, (GREENSHIELDS, 2022). | 38 |
| Figura 5 – escoamento entre placas. | 42 |
| Figura 6 – Refinamento de malha para τ_{xx} e τ_{xy} | 43 |
| Figura 7 – Refinamento de malha para a velocidade e a viscosidade. | 43 |
| Figura 8 – Erro relativo - Carreau-Yasuda. | 44 |
| Figura 9 – Erro relativo - Power law. | 45 |
| Figura 10 – Perfil de τ_{xx} para diferentes números de Reynolds. | 46 |
| Figura 11 – Perfil de τ_{xy} para diferentes números de Reynolds. | 46 |
| Figura 12 – Perfis de velocidade e viscosidade para diferentes números de Reynolds. | 47 |
| Figura 13 – Perfil de τ_{xx} para diferentes números de Deborah. | 48 |
| Figura 14 – Perfil de τ_{xy} para diferentes números de Deborah. | 48 |
| Figura 15 – Perfil de velocidade para diferentes números de Deborah. | 48 |
| Figura 16 – Perfil de viscosidade para diferentes números de Deborah. | 49 |
| Figura 17 – Parte do domínio com três níveis de refinamento. | 49 |
| Figura 18 – Parte do domínio com três níveis de refinamento. | 50 |
| Figura 19 – Refinamento de malha para τ_{xx} | 51 |
| Figura 20 – Refinamento de malha para τ_{yy} | 52 |
| Figura 21 – Refinamento de malha para a velocidade. | 52 |
| Figura 22 – Refinamento de malha para a viscosidade. | 52 |
| Figura 23 – Perfil de τ_{xx} para diferentes números de Reynolds. | 53 |
| Figura 24 – Perfil de τ_{yy} para diferentes números de Reynolds. | 53 |
| Figura 25 – Perfil de velocidade para diferentes números de Reynolds. | 54 |
| Figura 26 – Perfil de viscosidade para diferentes números de Reynolds. | 54 |
| Figura 27 – Perfil de τ_{xx} para diferentes números de Deborah. | 55 |
| Figura 28 – Perfil de τ_{yy} para diferentes números de Deborah. | 55 |
| Figura 29 – Perfil de velocidade para diferentes números de Deborah. | 55 |
| Figura 30 – Perfil de viscosidade para diferentes números de Deborah. | 56 |

| | |
|---|----|
| Figura 31 – Comparação entre as soluções numéricas obtidas usando o HiGFlow e o <i>rheoTool</i> : velocidade. | 57 |
| Figura 32 – Comparação entre as soluções numéricas obtidas usando o HiGFlow e o <i>rheoTool</i> : τ_{xx} | 57 |
| Figura 33 – Comparação entre as soluções numéricas obtidas usando o HiGFlow e o <i>rheoTool</i> : τ_{xy} | 57 |
| Figura 34 – Comparação entre as soluções numéricas obtidas usando o HiGFlow e o <i>rheoTool</i> : velocidade. | 58 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 1 – Características das malhas utilizadas nas simulações. | 42 |
| Tabela 2 – Erro relativo - Carreau-Yasuda. | 44 |
| Tabela 3 – Erro relativo - Power law. | 45 |
| Tabela 4 – Características das malhas utilizadas nas simulações. | 50 |
| Tabela 5 – Características das malhas utilizadas nas simulações. | 50 |
| Tabela 6 – Características das malhas utilizadas nas simulações. | 50 |
| Tabela 7 – Características das malhas utilizadas nas simulações. | 50 |
| Tabela 8 – Características das malhas utilizadas nas simulações. | 56 |

SUMÁRIO

| | | |
|---------|--|----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 21 |
| 2 | MODELAGEM MATEMÁTICA | 23 |
| 2.1 | Conservação da massa | 23 |
| 2.2 | Equação de quantidade de movimento | 24 |
| 2.3 | Lei de potência | 27 |
| 2.4 | Carreau - Yasuda | 28 |
| 2.5 | Adimensionalização | 28 |
| 2.6 | Condições iniciais e de contorno | 31 |
| 3 | SISTEMAS HIGFLOW E OPENFOAM® | 33 |
| 3.1 | HiGFlow | 33 |
| 3.1.1 | <i>Equações Governantes</i> | 33 |
| 3.1.2 | <i>O Sistema HiG-Tree</i> | 34 |
| 3.1.3 | <i>O Sistema HiGFlow</i> | 35 |
| 3.1.3.1 | <i>Discretização espaço-temporal</i> | 35 |
| 3.1.3.2 | <i>Aoplamento velocidade-pressão</i> | 36 |
| 3.1.3.3 | <i>Discretização do termo convectivo</i> | 36 |
| 3.2 | Introdução ao OpenFOAM® | 37 |
| 4 | RESULTADOS NUMÉRICOS | 41 |
| 4.1 | Simulação numérica para o escoamento entre duas placas paralelas | 41 |
| 4.1.1 | <i>Simulações para diferentes números de Reynolds</i> | 46 |
| 4.1.2 | <i>Simulações para diferentes número de Deborah</i> | 47 |
| 4.2 | Simulação numérica para uma contração 4:1 | 49 |
| 4.2.1 | <i>Varição do número de Reynolds</i> | 53 |
| 4.2.2 | <i>Varição do número de Deborah</i> | 54 |
| 4.3 | Comparação entre HiGFlow e <i>rheoTool</i> | 56 |
| 5 | CONCLUSÕES | 59 |
| | REFERÊNCIAS | 61 |

INTRODUÇÃO

Segundo [Sochi \(2010\)](#) e [Bird, Armstrong e Hassager \(1987\)](#), como questões relativas aos fluidos, têm-se: sua caracterização, sua classificação e a classificação de seu movimento (escoamento). No que diz respeito à caracterização do fluido, pode-se dizer que um fluido é definido de acordo com o conjunto de grandezas físicas que o caracterizam e, entre essas, podemos citar a velocidade, \mathbf{v} , a viscosidade, η , entre outras. Já na classificação, o fluido pode ser newtoniano ou não-newtoniano. Por fim, o escoamento pode ser classificado como compressível ou incompressível, transiente ou estacionário, laminar ou turbulento.

De acordo com [Fortuna \(2000\)](#), fluidos newtonianos são aqueles onde a relação entre a tensão de cisalhamento e o gradiente de velocidade é linear, caso contrário, diz-se que o fluido é não-newtoniano, que pode ser separado em independentes do tempo, dependentes do tempo, como ilustrado na [Figura 1](#). Segundo [Sochi \(2010\)](#), alguns modelos não-newtonianos dos três grupos são: *Power-Law* ou Lei de potência, Ellis, Carreau-Yasuda, Herschel-Bulkley, Maxwell, Upper Convected Maxwell (UCM), Oldroyd-B.

São de grande interesse os estudos acerca de fluidos não-newtonianos, podendo esse tipo de fluido ser encontrado em alimentos como frutas, ovos, manteiga e *ketchup*, em misturas como amido de milho com água, em tintas, plásticos, no sangue, saliva, na indústria farmacêutica, petroquímica, entre outras.

Nas últimas décadas, a simulação CFD (*Computational Fluid Dynamics*) evoluiu como uma importante ferramenta para orientar os cientistas na tarefa de desenvolver e melhorar o processo de produção de polímeros. No entanto, ainda existe uma lacuna entre as necessidades dos cientistas e o estado da arte atual, principalmente no caso de escoamentos complexos ([HABLA et al., 2012](#)). Pensando nisso, o sistema HiGFlow está em desenvolvimento na Universidade de São Paulo – campus São Carlos, para simulação de tais escoamentos.

Neste trabalho estamos interessados em fluidos não-newtonianos, incompressíveis e estacionários. Mais precisamente, serão abordados os fluidos viscoelásticos com viscosidade variável,

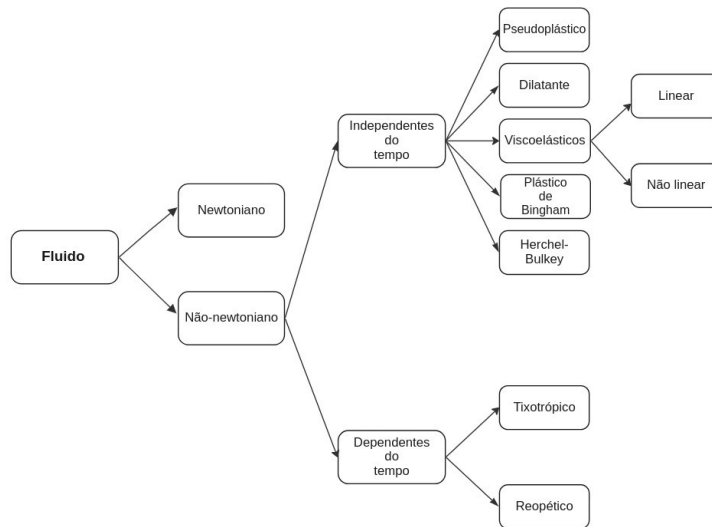


Figura 1 – Fluxograma com a classificação dos fluidos.

onde será utilizado o modelo Oldroyd-B combinado com o modelo de Carreau-Yasuda e o modelo Oldroyd-B com o modelo de Lei de potência. A proposta deste trabalho é a implementação dos modelos que serão utilizados em conjunto com o Oldroyd-B no sistema HiGFlow.

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira:

- O [Capítulo 2](#) é reservado à formulação das Equações de Navier-Stokes e os modelos utilizados nas simulações;
- No [Capítulo 3](#) apresentamos o sistema HiGFlow e as suas principais características, e também do *rheoTool*;
- No [Capítulo 4](#) apresentamos os resultados obtidos nas simulações feitas no HiGFlow e no *rheoTool*;
- No [Capítulo 5](#) apresentamos as conclusões e os trabalhos futuros.

MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo serão apresentadas as equações de Navier-Stokes (equação da conservação de massa (ou equação da continuidade) e a equação de conservação de quantidade de movimento), que modelam escoamentos incompressíveis. Para a formulação destas equações será utilizado o Teorema do Transporte de Reynolds e o Teorema da Divergência de Gauss, que podem ser vistos em (WESSELING, 2009).

Para obter as leis de conservação, consideramos um volume de controle, V , com contorno $\partial V = S$ sendo uma superfície orientável com vetor normal apontando para o exterior de V . A descrição das propriedades do escoamento é feita em termos de grandezas macroscópicas como velocidade, \mathbf{v} , pressão, p , e massa específica, ρ .

2.1 Conservação da massa

De acordo com Fortuna (2000), na ausência de fontes ou sorvedouros, toda massa que entra em um volume de controle deve sair e/ou se acumular neste mesmo volume de controle. Assim, temos o princípio de conservação da massa. Este é muito utilizado na compreensão de vários fenômenos físicos.

Considere M como sendo a massa contida no volume de controle arbitrário, V , no tempo t ,

$$M = \int_V \rho dV. \quad (2.1)$$

Se a massa é conservada, então

$$\frac{dM}{dt} = 0. \quad (2.2)$$

Aplicando o Teorema do Transporte de Reynolds, segue que

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \partial_t \rho dV + \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{\hat{n}} dS = 0. \quad (2.3)$$

Aplicando o Teorema da Divergência no lado direito da Equação (2.3), segue que

$$\int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV. \quad (2.4)$$

A lei de conservação da massa em sua forma integral é dada por

$$\int_V [\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})] dV = 0. \quad (2.5)$$

Como V é arbitrário, segue que a formulação diferencial da equação de conservação da massa é dada por

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.6)$$

Para escoamentos incompressíveis, considera-se constante $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0$, e a equação (2.6) é dada então por

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.7)$$

2.2 Equação de quantidade de movimento

Obtêm-se a equação de quantidade de movimento linear através da aplicação da segunda lei de Newton, a qual afirma que a taxa de variação temporal da quantidade de movimento de uma partícula é igual a resultante das forças que agem sobre essa partícula. Essas forças podem ser de dois tipos: forças de corpo e de superfície (FORTUNA, 2000), (WESSELING, 2009).

A força de corpo age sobre uma partícula material e é proporcional a sua massa. Seja dV o volume da partícula material e seja ρ sua massa específica. As forças de corpo podem ser escritas da seguinte forma

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{f}_b \rho dV. \quad (2.8)$$

Já a força agindo em um elemento de superfície dS de V pode ser escrita como

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{f}_s dS. \quad (2.9)$$

Considerando que a quantidade de movimento linear total é dada por

$$P = \int_V \rho \mathbf{v} dV, \quad (2.10)$$

a lei de conservação da quantidade de movimento linear pode ser escrita como sendo

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{f}_b \rho dV + \int_S \mathbf{f}_s dS. \quad (2.11)$$

Considerando que $\phi = \rho \mathbf{v}$ no Teorema de Transporte de Reynolds, temos então que

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV + \int_S (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.12)$$

$$= \int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV + \int_S (\rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.13)$$

Reescrevemos então a Equação (2.11) da seguinte forma

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV = \int_V \mathbf{f}_b \rho dV + \int_S [\mathbf{f}_s - \rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] dS. \quad (2.14)$$

Pode-se provar que existe um tensor simétrico, σ , o tensor das tensões de Cauchy (WESSELING, 2009), tal que

$$\mathbf{f}_s = \sigma \cdot \mathbf{n}. \quad (2.15)$$

Então, reescrevemos a Equação (2.14) da seguinte forma

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV = \int_V \mathbf{f}_b \rho dV + \int_S [\sigma \cdot \mathbf{n} - \rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] dS. \quad (2.16)$$

Utilizando o Teorema da Divergência, o segundo termo do lado direito da Equação (2.16) pode ser escrito como

$$\int_S [\sigma \cdot \mathbf{n} - \rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] dS = \int_V \nabla \cdot \sigma dV - \int_V \nabla \cdot (\rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})) dV. \quad (2.17)$$

Reescrevemos então a Equação (2.16) da seguinte forma

$$\int_V \left[\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})) - \nabla \cdot \sigma - \mathbf{f}_b \rho \right] dV = 0. \quad (2.18)$$

Como V é arbitrário, obtemos a lei de conservação de quantidade de movimento em sua formulação diferencial

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})) = \rho \mathbf{f}_b + \nabla \cdot \sigma. \quad (2.19)$$

Considerando que a força de corpo é dada pela força da gravidade, $\mathbf{f}_b = \mathbf{g}$ e considerando também a seguinte relação constitutiva (FERREIRA, 2001) (XUE; PHAN-THIEN; TANNER, 1998)

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \tau, \quad (2.20)$$

onde $p = p(\mathbf{x}, t)$ representa o campo de pressão do escoamento e τ é o tensor de tensões viscosas. Tem-se então

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})) &= \nabla \cdot (-p\mathbf{I} + \tau) + \rho \mathbf{g} \\ &= -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

O tensor das tensões viscosas, τ , é dividido em duas contribuições

$$\tau = \tau_s + \tau_p, \quad (2.22)$$

sendo τ_s a contribuição do solvente e τ_p é a contribuição polimérica. Portanto, podemos reescrever a equação (2.21) da seguinte forma

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})) = -\nabla p + \nabla \cdot (\tau_s + \tau_p) + \rho \mathbf{g}. \quad (2.23)$$

Diz-se que um escoamento é newtoniano se a taxa de deformação é proporcional à tensão aplicada (FORTUNA, 2000). Para um escoamento newtoniano, temos que a equação (2.22) é dada apenas por

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s(\dot{\gamma})D, \quad (2.24)$$

onde D é o tensor taxa de deformação, dado por

$$D = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T], \quad (2.25)$$

e $\eta_s(\dot{\gamma})$ é uma função de viscosidade que varia com a taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$, dada por (IRGENS, 2014)

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2trD^2}. \quad (2.26)$$

Desta forma, podemos reescrever a equação (2.23) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})) &= -\nabla p + \nabla \cdot (2\eta_s(\dot{\gamma})D) + \rho\mathbf{g} \\ &= -\nabla p + \nabla \cdot (\eta_s(\dot{\gamma})(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T)) + \rho\mathbf{g}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

No caso onde a tensão de cisalhamento não é proporcional à taxa de deformação, dizemos que o fluido é não-newtoniano. Então, usa-se a equação (2.23), e obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})) &= -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_s + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_p + \rho\mathbf{g} \\ &= -\nabla p + \nabla \cdot (2\eta_s(\dot{\gamma})D) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_p + \rho\mathbf{g}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Para obter $\boldsymbol{\tau}_p$, é necessária a utilização de uma equação constitutiva. Neste caso, um dos modelos utilizados é o Oldroyd-B (OLDROYD; WILSON, 1950). Este é um modelo não-linear muito conhecido e é obtido através da generalização do modelo de Jeffreys, que é linear, mas pode-se considerar tal modelo como uma extensão do UCM, (BIRD; ARMSTRONG; HASSAGER, 1987). Sua equação constitutiva é dada por

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta_0(D + \lambda_2 \overset{\nabla}{D}), \quad (2.29)$$

onde $\overset{\nabla}{(*)}$ é a derivada convectiva, definida por

$$\overset{\nabla}{(*)} = \frac{\partial(*)}{\partial t} + \nabla(v(*)) - (\nabla v \cdot (*)) + (*).(\nabla v)^T, \quad (2.30)$$

λ_1 é o tempo de relaxação e λ_2 é o tempo de retardamento, dado por

$$\lambda_2 = \frac{\eta_S \lambda_1}{\eta_0}, \quad \eta_0 = \eta_S + \eta_P. \quad (2.31)$$

Sabendo que $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\tau}_s$ e $\boldsymbol{\tau}_s = 2\eta_S D$, segue que

$$(\boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\tau}_s) + \lambda_1(\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}_p}) + (\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}_s}) = 2(\eta_S + \eta_P)(D + \lambda_2 \overset{\nabla}{D}), \quad (2.32)$$

$$\boldsymbol{\tau}_p + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}_p} + 2\lambda_1 \eta_S \overset{\nabla}{D} = 2\eta_P D + 2\eta_S \lambda_2 \overset{\nabla}{D} + 2\eta_P \lambda_2 \overset{\nabla}{D}, \quad (2.33)$$

$$\boldsymbol{\tau}_p + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}_p} = 2\eta_P D + 2\eta_S \lambda_2 \overset{\nabla}{D} + 2\eta_P \lambda_2 \overset{\nabla}{D} - 2\lambda_2 \eta_0 \overset{\nabla}{D}, \quad (2.34)$$

$$\boldsymbol{\tau}_p + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}_p} = 2\eta_P D + 2\eta_S \lambda_2 \overset{\nabla}{D} + 2\eta_P \lambda_2 \overset{\nabla}{D} - 2\lambda_2 (\eta_S + \eta_P) \overset{\nabla}{D}, \quad (2.35)$$

$$\boldsymbol{\tau}_p + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}_p} = 2\eta_P D. \quad (2.36)$$

Como a viscosidade varia com a taxa de cisalhamento, teremos então uma função de viscosidade polimérica, $\eta_P(\dot{\gamma})$, e a equação (2.29) é reescrita da seguinte forma

$$\tau_P + \lambda_1 \overset{\nabla}{\tau}_P = 2\eta_P(\dot{\gamma})D, \quad (2.37)$$

Ao incorporar a função de viscosidade, $\eta_P(\dot{\gamma})$, ao modelo Oldroyd-B, obtêm-se o modelo White - Metzner, onde $\eta_P(\dot{\gamma})$ pode, por exemplo, tomar a forma do modelo *Power Law* ou Carreau - Yasuda (BIRD; ARMSTRONG; HASSAGER, 1987). Estes modelos serão detalhados nas próximas seções.

2.3 Lei de potência

O modelo de Lei de Potência é o mais simples e comumente encontrado para o caso de viscosidade variando com a taxa de cisalhamento (BIRD; ARMSTRONG; HASSAGER, 1987). Neste modelo, a função de viscosidade é dada pela seguinte expressão:

$$\eta(\dot{\gamma}) = K\dot{\gamma}^{n-1}, \quad (2.38)$$

onde,

- K é o índice de consistência,
- n é o índice de comportamento do fluido.

Quando $n < 1$, temos um fluido classificado como pseudoplástico (*shear thinning*), como exemplo, podemos citar a manteiga e o *ketchup*. Caso $n > 1$, temos um fluido dilatante (*shear thickening*), a mistura de amido de milho e água é um exemplo de fluido dilatante. Podemos observar esses perfis na Figura 2. Embora a Equação (2.38) seja bastante satisfatória para descrever tais regiões, ela é inadequada para baixas e altas taxas de cisalhamento.

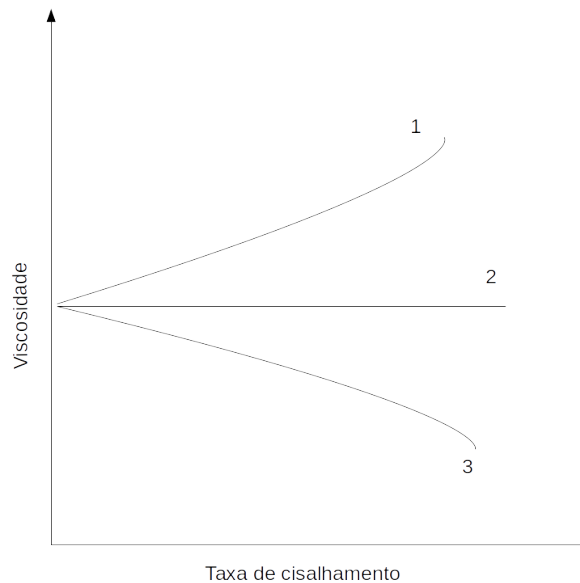


Figura 2 – Curvas de Fluxo de fluidos de lei de potência: 1.Dilatante, 2.Newtoniano e 3.Pseudoplástico.

2.4 Carreau - Yasuda

No modelo de Carreau - Yasuda, um melhor ajuste dos dados pode ser obtido. A função de viscosidade então é dada por

$$\eta_s(\dot{\gamma}) = \eta_0 \left[1 + (K\dot{\gamma})^a \right]^{\frac{n-1}{a}}, \quad (2.39)$$

onde,

- K é uma constante de tempo;
- a determina a rapidez da transição do patamar de viscosidade constante para o comportamento de lei de potência;
- n é o índice de comportamento do fluido.

2.5 Adimensionalização

Problemas de mecânica dos fluidos podem ser caracterizados por grandezas específicas dimensionais que podem ser agrupadas em parâmetros adimensionais que passam a caracterizar o escoamento, como o número de Reynolds e de Froud (FORTUNA, 2000).

Para a adimensionalização das Equações (2.7) e (2.27), são usadas as transformações adotadas em (SOUZA, 2005):

$$\begin{aligned} p &= p^* \rho_0 V_0^2, & v_i &= v_i^* V_0, & x_i &= x_i^* L_0, & t &= t^* L_0 / V_0, & g_i &= g_i^* |\mathbf{g}|, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{V_0}{L_0} \frac{\partial}{\partial t^*}, & \nabla &= \frac{1}{L_0} \nabla^*, & \tau_p &= \tau_p^* \rho_0 V_0^2, & \eta_s(\dot{\gamma}) &= \eta_s^*(\dot{\gamma}) \eta_0, & D &= D^* \frac{V_0}{L_0}, \end{aligned}$$

onde V_0 e L_0 são, respectivamente, valores dimensionais de referência de velocidade e de comprimento.

Desta forma, para a equação da continuidade (2.7), temos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{1}{L_0} \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* V_0 &= \frac{V_0}{L_0} \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^* &= 0. \end{aligned} \tag{2.40}$$

No caso newtoniano, para a equação (2.27), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) &= -\nabla p + \nabla \cdot (\eta_s(\dot{\gamma}) D) + \rho \mathbf{g}, \\ \frac{V_0}{L_0} \frac{\partial(\mathbf{v}^* V_0)}{\partial t^*} + \frac{1}{L_0} \nabla^* \cdot (\mathbf{v}^* V_0 \mathbf{v}^* V_0) &= -\frac{1}{L_0 \rho_0} \nabla^* (p^* \rho_0 V_0^2) + \\ &+ \frac{1}{\rho L_0} \nabla^* \cdot (\eta_s^*(\dot{\gamma}) \frac{\eta_0 V_0}{L_0} D^*) + |\mathbf{g}| \mathbf{g}^*, \\ \frac{V_0^2}{L_0} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{V_0^2}{L_0} \nabla^* \cdot (\mathbf{v}^* \mathbf{v}^*) &= -\frac{V_0^2}{L_0} \nabla^* p^* + \frac{\eta_0 V_0}{\rho L_0^2} \nabla \cdot (\eta_s^*(\dot{\gamma}) D^*) + |\mathbf{g}| \mathbf{g}^*, \\ \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\mathbf{v}^* \mathbf{v}^*) &= -\nabla^* p^* + \frac{\eta_0}{\rho L_0 V_0} \nabla \cdot (\eta_s^*(\dot{\gamma}) D^*) + \frac{L_0 |\mathbf{g}|}{V_0^2} \mathbf{g}^*. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Para o caso não-newtoniano, da a equação (2.28), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) &= -\nabla p + \nabla \cdot (\eta_s(\dot{\gamma})D) + \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_p}{\rho_0} + \mathbf{g}, \\
\frac{V_0}{L_0} \frac{\partial(\mathbf{v}^*V_0)}{\partial t^*} + \frac{1}{L_0} \nabla^* \cdot (\mathbf{v}^*V_0\mathbf{v}^*V_0) &= -\frac{1}{L_0\rho_0} \nabla^* (p^*\rho_0V_0^2) + \frac{1}{\rho L_0} \nabla^* \cdot (\eta_s^*(\dot{\gamma}) \frac{\eta_0V_0}{L_0} D^*) + \\
&\quad + \frac{\nabla^* \cdot (\boldsymbol{\tau}_p^*\rho_0V_0^2)}{L_0\rho_0} + |\mathbf{g}| \mathbf{g}^*, \\
\frac{V_0^2}{L_0} \frac{\partial\mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{V_0^2}{L_0} \nabla^* \cdot (\mathbf{v}^*\mathbf{v}^*) &= -\frac{V_0^2}{L_0} \nabla^* p^* + \frac{\eta_0V_0}{\rho L_0^2} \nabla \cdot (\eta_s^*(\dot{\gamma})D^*) + \\
&\quad + \frac{\rho_0V_0^2}{\rho_0L_0^2} \nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}_p^* + |\mathbf{g}| \mathbf{g}^*, \\
\frac{\partial\mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\mathbf{v}^*\mathbf{v}^*) &= -\nabla^* p^* + \frac{\eta_0}{\rho L_0V_0} \nabla \cdot (\eta_s^*(\dot{\gamma})D^*) + \nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}_p^* + \\
&\quad + \frac{L_0|\mathbf{g}|}{V_0^2} \mathbf{g}^*, \\
\frac{\partial\mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\mathbf{v}^*\mathbf{v}^*) &= -\nabla^* p^* + \frac{\eta_0}{\rho L_0V_0} \nabla \cdot (\eta_s^*(\dot{\gamma})D^*) + \\
&\quad + \nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}_p^* + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}^*. \tag{2.42}
\end{aligned}$$

E, para a equação constitutiva, segue que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}_p + \lambda(\dot{\gamma}) \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_p &= 2\eta_P(\dot{\gamma})D, \\
\rho_0V_0^2\boldsymbol{\tau}_p^* + \frac{\rho_0V_0^3}{L_0}\lambda(\dot{\gamma}) \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_p &= \frac{V_0}{L_0}\eta_P(\dot{\gamma})2D, \\
\rho_0V_0L_0\boldsymbol{\tau}_p^* + \frac{\rho_0V_0^2L_0}{L_0}\lambda(\dot{\gamma}) \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_p &= \eta_P(\dot{\gamma})2D, \\
\frac{\eta_0}{\eta_0}\rho_0V_0L_0\boldsymbol{\tau}_p^* + \frac{\eta_0}{\eta_0}\frac{\rho_0V_0^2L_0}{L_0}\lambda(\dot{\gamma}) \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_p &= \eta_P(\dot{\gamma})2D, \\
\frac{\rho_0V_0L_0}{\eta_0}\eta_0\boldsymbol{\tau}_p^* + \eta_0\frac{\rho_0V_0L_0}{\eta_0}\frac{V_0\lambda(\dot{\gamma})}{L_0} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_p &= \eta_P(\dot{\gamma})2D, \\
\boldsymbol{\tau}_p^* + \frac{V_0\lambda(\dot{\gamma})}{L_0} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_p &= \frac{\eta_0}{\rho_0V_0L_0} \frac{\eta_P(\dot{\gamma})}{\eta_0} 2D, \\
\boldsymbol{\tau}_p^* + De \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_p &= \frac{1}{Re} \frac{\eta_P(\dot{\gamma})}{\eta_0} 2D, \tag{2.43}
\end{aligned}$$

onde (FORTUNA, 2000)

- $\frac{\rho_0L_0V_0}{\eta_0} = Re$ é o número de Reynolds, que expressa a razão entre os efeitos inerciais e a intensidade dos efeitos viscosos em um escoamento,
- $\frac{V_0}{\sqrt{L_0|\mathbf{g}|}} = Fr$ é o número de Froude e expressa a razão entre forças inerciais e gravitacionais,
- $\frac{V_0\lambda(\dot{\gamma})}{L_0} = De$ é o número de Deborah, que representa a razão entre uma escala de tempo característico do fluido e a escala de tempo característico do escoamento.

A forma adimensional das Equações (2.7) e (2.27) (caso newtoniano), e da Equação (2.28) (caso não-newtoniano) e sua equação constitutiva (2.37) onde, por simplificação, retira-se o símbolo “*”, é dada pelas Equações (2.44) e (2.45) (caso newtoniano)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\eta_S(\dot{\gamma})D) + \mathbf{g} \frac{1}{Fr^2}, \quad (2.45)$$

pelos Equações (2.46) e (2.47) (caso não-newtoniano)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\eta_S(\dot{\gamma})D) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_p + \mathbf{g} \frac{1}{Fr^2}, \quad (2.46)$$

$$\boldsymbol{\tau}_p + De \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_p = \frac{1}{Re} \frac{\eta_P(\dot{\gamma})}{\eta_0} 2D. \quad (2.47)$$

2.6 Condições iniciais e de contorno

Como condição de contorno, temos as seguintes especificações:

- Entrada: $v_n = v_{inflow}$ prescrito;
- Saída: na saída temos a condição de Neumann homogêneo;
- Fronteira sólida: temos a condição no-slip, e gradiente de velocidade e o gradiente de τ igual a zero.

SISTEMAS HIGFLOW E OPENFOAM®

3.1 HiGFlow

O HiGFlow (*HiG*, do inglês, “*Hierarchical Grid*”) é um sistema em linguagem C, desenvolvido no ICMC-USP, que utiliza a técnica de Diferenças Finitas para a simulação numérica de escoamento de fluidos monofásicos e multifásicos para problemas de grande porte.

Para isto, uma arquitetura do software foi desenvolvida para respeitar as características do problema (grande quantidade de informações e tempo elevado para a simulação) de forma a distribuir o processamento onde o custo é elevado e compartimentar o software em compartimentos de fraco acoplamento. Idealmente, módulos responsáveis por partes diferentes da simulação se comunicam por meio de interfaces bem definidas, sem influência direta da representação interna utilizada por cada módulo. Essa estratégia traz dois benefícios principais. Em primeiro lugar, a modularização pode auxiliar na evolução do código, permitindo que métodos diferentes possam ser implementados, avaliados e, se conveniente, incluídos definitivamente no código. Por exemplo, módulos com estruturas de dados alternativas podem ser utilizados e de modo a selecionar a estrutura que melhor se adequa ao problema. Módulos com diferentes métodos numéricos podem ser experimentados. Em segundo lugar, a modularização pode auxiliar no processo de desenvolvimento do código, que é basicamente desenvolvido de forma distribuída, por diferentes equipes, com contribuições de diversos pesquisadores e alunos. Assim, a modularização com baixo acoplamento permitirá que os desenvolvedores possam se concentrar no módulo pelo qual são responsáveis, minimizando a influência das decisões de projeto dos outros desenvolvedores.

3.1.1 Equações Governantes

O escoamento é assumido ser isotérmico, laminar e o fluido incompressível. Embora tenha sido implementado no código HiGFlow métodos e técnicas para escoamentos newtonianos e newtonianos generalizados, vamos apresentar as equações para escoamentos viscoelásticos por

serem mais complexos e dependerem de mais técnicas numéricas.

As equações governantes são expressas pela equação de conservação da massa

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.1)$$

e da equação da conservação da quantidade de movimento

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\eta_s(\dot{\gamma}) \mathbf{D}) + \nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} + \mathbf{F}, \quad (3.2)$$

onde \mathbf{u} é o campo de velocidade, t é o tempo, p é a pressão, Re é o número de Reynolds, Fr é o número de Froude, \mathbf{g} é a força da gravidade e \mathbf{F} é composta pelas forças de tensão superficial e outras forças externas e \mathbf{S} é o tensor não-newtoniano.

3.1.2 O Sistema HiG-Tree

O sistema HiG-Tree (SOUSA *et al.*, 2019) é responsável pela estrutura de dados, domínios, resolvidores de sistemas lineares e não-lineares, aproximações e interpolações. Os seguintes módulos já foram desenvolvidos neste sistema:

- Módulos de estruturas de dados HiG-Tree.
- Módulos de resolvidores de sistemas lineares e não lineares.
- Módulos de particionamento de domínios e sub-domínios.
- Módulos de aproximações e interpolações.

O código que está sendo produzido é modular e eficiente. Neste sentido, utilizou-se bibliotecas otimizadas de resolvidores lineares e não-lineares baseados em computação paralela com memória compartilhada e distribuída (arquitetura híbrida). As bibliotecas utilizadas são PETSc e HIPRE, que possuem grandes vantagens no desenvolvimento de códigos em paralelo, e já foram otimizadas e testadas em diversos códigos de simulação de escoamentos de fluidos.

Os domínios (do problema) gerados são compostos por blocos podendo ter complexidade para simular problemas em canais com geometrias complexas. Cada bloco é discretizado pela estrutura HiG-Tree que permite refinamento espacial adequado aos problemas simulados. Estes domínios são particionados utilizando a biblioteca ZOLTAN-TRILINOS que permite uma boa distribuição de carga entre os processos durante a execução. Este módulo também permite o armazenamento e a enumeração de propriedades representadas nas células e facetas da malha.

Finalmente o módulo de aproximações e interpolações é responsável pela aproximação de propriedades representadas nas células e facetas podendo-se escolher a ordem da aproximação polinomial que é utilizada pelo método dos mínimos quadrados móveis.

3.1.3 O Sistema HiGFlow

Os objetivos específicos do sistema HiGFlow são a simulação numérica de escoamentos de fluidos com as seguintes características:

- Equações de Navier-Stokes para escoamentos monofásicos em quaisquer dimensão.
- Escoamentos newtonianos e newtonianos generalizados.
- Escoamentos viscoelásticos com técnicas de estabilização numérica.
- Escoamentos multifásicos utilizando “VOF”.

Este sistema também está sendo desenvolvido de forma modular permitindo que novas técnicas e métodos possam ser testados e incluídos ao sistema. O código HiGFlow foi implementado com as seguintes características:

- O usuário escolhe a dimensão em tempo de compilação.
- O usuário escolhe os módulos a serem utilizados em seu programa em tempo de compilação, tais como: monofásico, newtoniano, newtoniano generalizado, viscoelástico, multifásico (ainda em fase de implementação).
- O usuário escolhe as técnicas numéricas por arquivo de entrada de dados, tais como: método da projeção, esquema numérico para o termo convectivo, modelo da equação constitutiva para escoamentos viscoelásticos, além dos vários parâmetros para simulação.

As técnicas e métodos numéricos implementados são ilustrados na [Figura 3](#) e descritos nas seguintes subseções:

3.1.3.1 Discretização espaço-temporal

Foram implementados os mais tradicionais métodos para avanço temporal. Os métodos explícitos implementados são:

- Método de Euler explícito.
- Método de Runge-Kutta TVD de segunda ordem ou método de Euler modificado.
- Método de Runge-Kutta TVD de terceira ordem.

Entre os métodos implícitos, foram implementados os seguintes métodos:

- Método de Euler implícito;
- Método de Crank-Nicolson;
- Método BDF de segunda ordem.

3.1.3.2 Acoplamento velocidade-pressão

Para a obtenção do campo de pressão foi adotado o método de projeção do Chorin, portanto inicialmente obtém-se o campo de velocidades através do avanço temporal das equações de quantidade de movimento, onde exemplificamos com o método de Euler explícito. Este novo campo é referido como \mathbf{u}^* .

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n = \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\eta_s(\dot{\gamma}) \mathbf{D}^n) + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} + \mathbf{F}^n, \quad (3.3)$$

O próximo passo é resolver:

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1}, \quad (3.4)$$

reescrevendo a equação acima da forma:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p^{n+1}, \quad (3.5)$$

e podemos aplicar o operador divergência nesta equação, já eliminando o termo $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}$, pois o mesmo deve ser igual a zero no tempo $n + 1$. Desta forma pode-se obter a equação de Poisson para a pressão:

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*, \quad (3.6)$$

e com a solução desta equação obtemos o valor da pressão p que é utilizada para atualizar o vetor velocidades \mathbf{u}^{n+1} com o uso da Eq. (3.5).

Duas implementações estão disponíveis que são o método de primeira ordem temporal e o método incremental que é de segunda ordem temporal.

3.1.3.3 Discretização do termo convectivo

Quanto aos métodos para discretização do termo convectivo, foram implementados até o momento 4 esquemas clássicos:

- Esquema central;
- Esquema Upwind de primeira ordem;
- Esquema Quick de segunda ordem;
- Método Cubista de segunda ordem.

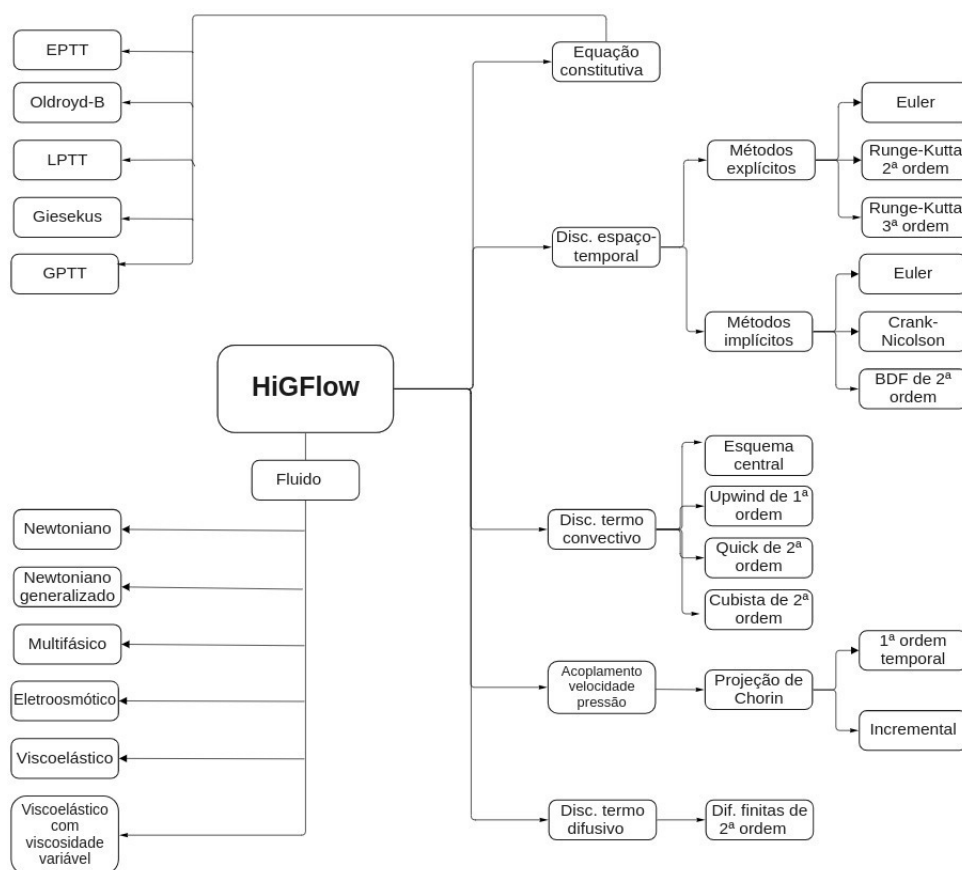


Figura 3 – Características implementadas no HiGFlow.

3.2 Introdução ao OpenFOAM®

O principal software livre e de código aberto para dinâmica de fluidos computacional, OpenFOAM®, foi criado por Henry Weller em 1989 sob o nome “FOAM” e foi lançado como “OpenFOAM” por Henry Weller, Chris Greenshields e Mattijs Janssens em dezembro de 2004. Possui uma ampla gama de recursos para simular desde fluxos turbulentos na aerodinâmica automotiva até incêndios e supressão de incêndios em edifícios, envolvendo combustão, reações químicas, transferência de calor, *sprays* líquidos e filmes. Inclui ferramentas para a integração e em torno de geometrias complexas (por exemplo, um veículo), e para processamento e visualização de dados e muito mais.

Para entender a maneira como a biblioteca OpenFOAM® funciona, é necessário algum conhecimento prévio de C++, sua linguagem base. A estrutura básica de diretórios para um caso no OpenFOAM®, que contém o conjunto mínimo de arquivos necessários para executar um aplicativo, é mostrada na Figura 4 e descrita a seguir:

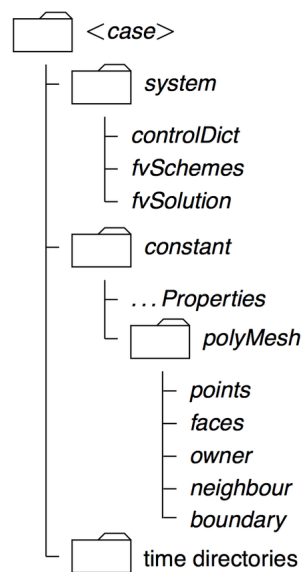


Figura 4 – Visão geral da estrutura do OpenFOAM® (extraído do guia de usuário, (GREENSHIELDS, 2022)).

- Um diretório do sistema: "*system*"

Neste diretório, é possível modificar os parâmetros associados ao procedimento de solução. Ele contém pelo menos os seguintes arquivos: *controlDict* onde são configurados parâmetros como hora de início/término, intervalo de tempo e parâmetros para saída de dados; *fvSchemes* onde os esquemas de discretização podem ser selecionados; *fvSolution* onde os parâmetros e a escolha do solver são definidos para a execução.

- Um diretório constante: "*constant*"

Contém todos os valores que permanecem constantes durante o cálculo, são arquivos que especificam propriedades físicas, por exemplo. Também inclui no subdiretório *polyMesh* todas as informações referentes à malha.

- Os diretórios de tempo: "*time directories*"

Contém arquivos individuais de dados para campos específicos. Os dados podem ser: valores iniciais e condições de contorno que devem ser modificados para definir o problema; ou, resultados gravados em arquivo pelo OpenFOAM®.

Ele precisa ler uma variedade de estruturas de dados, como *strings*, escalares, vetores, tensores, listas e campos. O formato de entrada/saída (*input/output*; *I/O*) dos arquivos é projetado para ser extremamente flexível para permitir que o usuário modifique a *I/O* em aplicativos OpenFOAM® com a maior facilidade possível. A *I/O* segue um conjunto simples de regras que tornam os arquivos extremamente fáceis de entender, em contraste com muitos pacotes de software cujo formato de arquivo pode não apenas ser difícil de entender intuitivamente,

mas também não ser publicado. Mais informações podem ser obtidas no Guia de usuário, (GREENSHIELDS, 2022).

Uma série de equações constitutivas para Fluidos Newtonianos Generalizados já estão disponíveis no *software* e um *solver* para problemas viscoelásticos já foi desenvolvido. Habla, Obermeier e Hinrichsen (2013) modificaram este *solver* para fortalecer o acoplamento entre velocidade e tensões poliméricas, através de um tratamento semi-implícito da equação constitutiva. A robustez do *solver* foi aumentada ainda mais com a implementação da abordagem de *log-conformation*.

Pimenta e Alves (2017) tentam minimizar problemas de estabilidade em determinadas condições modificando pontos críticos no *solver* e no manuseio de modelos viscoelásticos. o solucionador modificado foi testado em fluxos de referência e precisão de segunda ordem, tanto em espaço quanto em tempo, além de uma maior estabilidade O pacote que implementa o método descrito é o *rheoTool*. Este é mais do que uma coleção de solucionadores e bibliotecas. Além de *solvers* robustos para a simulação de fluxos acionados por pressão e eletricamente para fluidos Newtonianos Generalizados e viscoelásticos, também fornece tutoriais e utilitários que podem ser úteis para os usuários que estão começando a aplicar o *software* OpenFOAM® na simulação de fluxos de fluidos complexos.

RESULTADOS NUMÉRICOS

Uma série de problemas de escoamento são frequentemente usados para o desenvolvimento de novos métodos numéricos e avaliação de sua precisão. Como exemplos, podemos citar os escoamentos viscoelásticos entre placas paralelas e contrações planares, entre alguns outros (ALVES; OLIVEIRA; PINHO, 2003),(XUE; PHAN-THIEN; TANNER, 1998). Ao longo deste capítulo serão discutidos os resultados obtidos em testes para os escoamentos citados, feitos no HiGFlow. Também é feita, de forma breve, uma comparação entre resultados obtidos nos sistemas HiGFlow e *rheoTool*.

4.1 Simulação numérica para o escoamento entre duas placas paralelas

Para a etapa de verificação da metodologia numérica, será considerado um escoamento totalmente desenvolvido entre duas placas paralelas, como ilustrado na [Figura 5](#), onde podemos ver um perfil parabólico de escoamento e, como medidas, temos que a distância entre placas é $L = 1m$ e o comprimento é de $10L$.

Os seguintes dados foram propostos para as simulações no HiGFlow:

- $dt = 0.0001$;
- Número de passos: 1000 passos;
- Número de Deborah: $De = 1.0$;
- Número de Reynolds: $Re = 1.0$;
- $\beta = 0.01$;
- Os dados foram extraídos de um corte transversal em $x = 9.0$ para $0.0 \leq y \leq 1.0$.

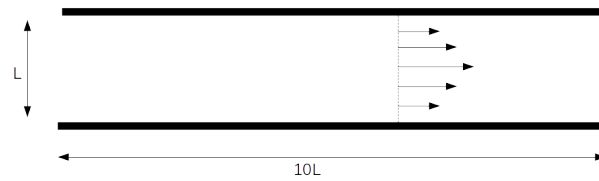


Figura 5 – Escoamento entre placas.

Como condições de contorno na parede, temos que em $y = 0$ e $y = 1$ a velocidade é nula. Temos um perfil de velocidade parabólico imposto na entrada do canal, $4y(1 - y)$, e o escoamento desenvolvido na saída do canal. Os parâmetros propostos para os modelos são:

- Carreau - Yasuda:

- $a = 1.0$;
- $n = 0.1$;
- $K = 1.5$;

- Power Law:

- $q_{min} = 0.035$;
- $n = 0.5$.

Para a análise de convergência, será adotado como solução de referência os resultados para a malha mais refinada, M_5 . Na Tabela 1, temos as informações sobre as malhas que serão consideradas.

| | Malha | Espaçamento ($\delta x = \delta y$) |
|-------|-------------------|---------------------------------------|
| M_1 | 100×10 | 0.1 |
| M_2 | 200×20 | 0.05 |
| M_3 | 400×40 | 0.025 |
| M_4 | 800×80 | 0.0125 |
| M_5 | 1600×160 | 0.00625 |

Tabela 1 – Características das malhas utilizadas nas simulações.

A seguir, nas Figuras 6 e 7, temos os gráficos de viscosidade, velocidade e dos tensores, comparando os resultados obtidos nas diferentes malhas, tanto para o modelo Carreau-Yasuda quanto para o Power Law.

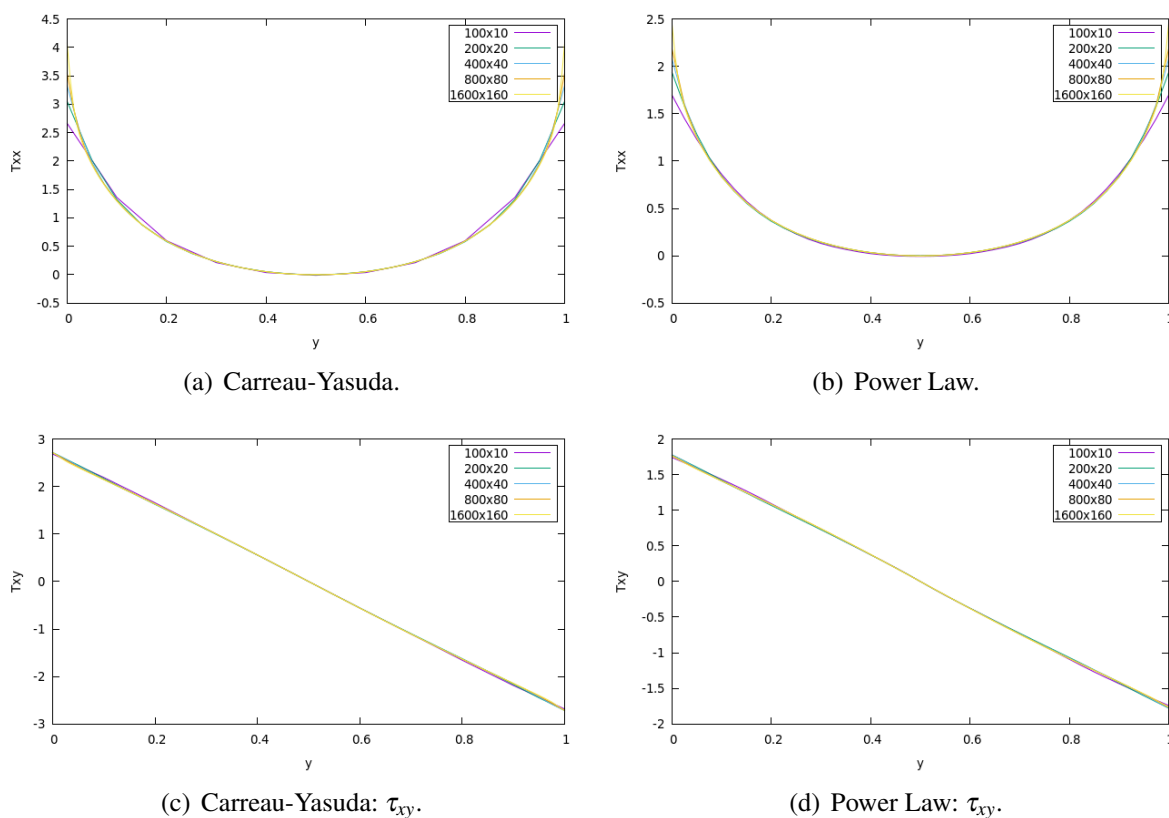


Figura 6 – Refinamento de malha para τ_{xx} e τ_{xy} .

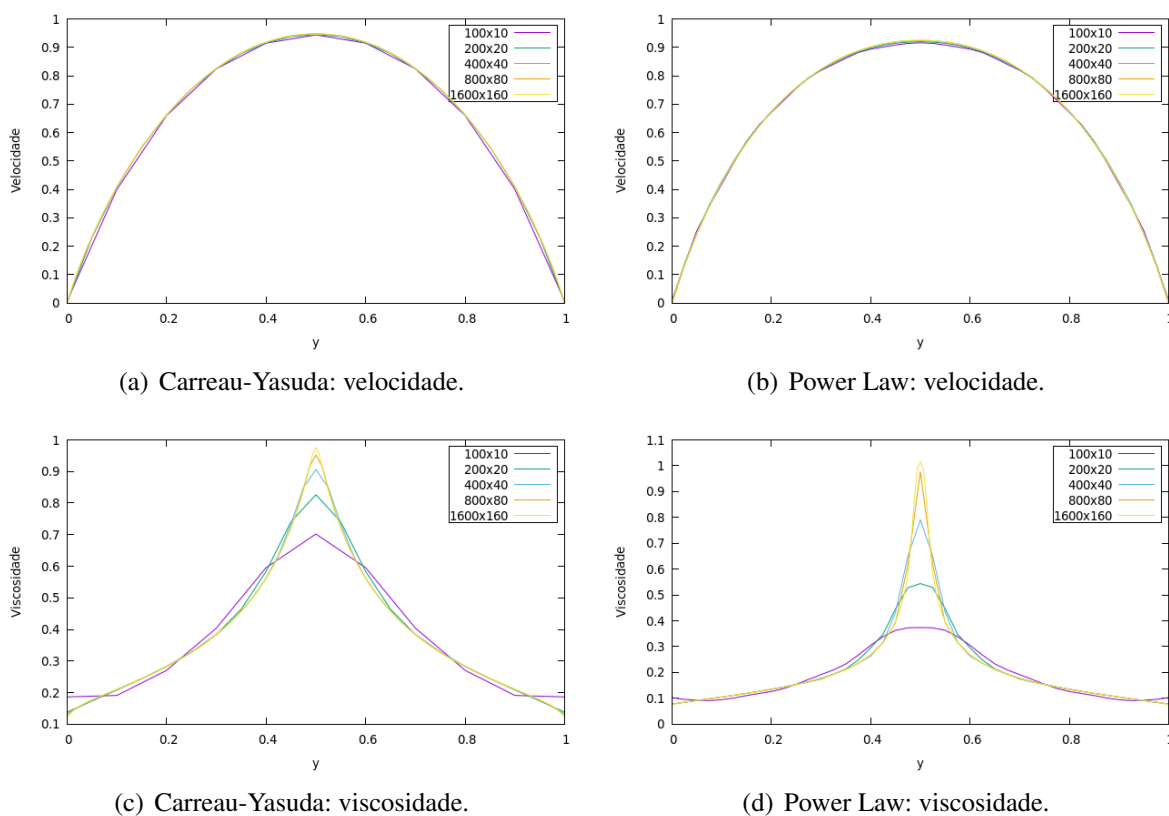
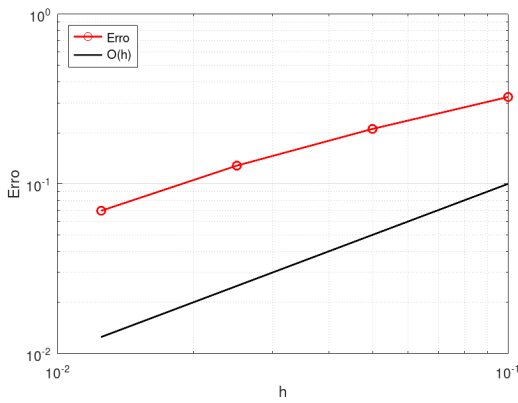


Figura 7 – Refinamento de malha para a velocidade e a viscosidade.

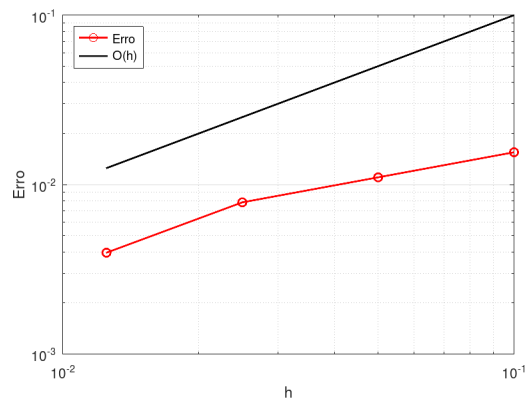
A Tabela 2 apresenta o erro relativo em relação aos resultados obtidos com a malha M_5 para as variáveis τ_{xx} , τ_{xy} , ν e η , que podem também ser visualizados na Figura 8 para o modelo Carreau-Yasuda.

| | τ_{xx} | τ_{xy} | Velocidade | Viscosidade |
|-------|-------------|-------------|------------|-------------|
| M_1 | 0.32508 | 0.015508 | 0.0070063 | 0.20130 |
| M_2 | 0.21067 | 0.011031 | 0.0026612 | 0.078115 |
| M_3 | 0.12801 | 0.0078499 | 0.0010664 | 0.026645 |
| M_4 | 0.069414 | 0.0039589 | 0.0010697 | 0.0072937 |

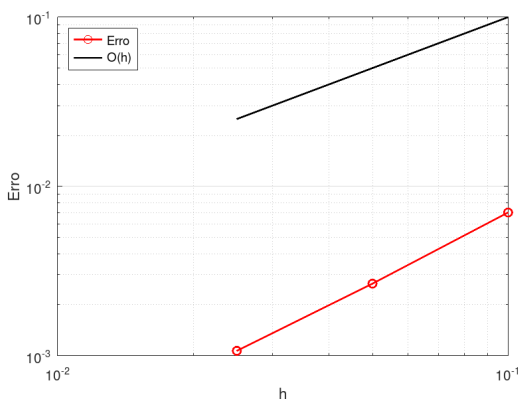
Tabela 2 – Erro relativo - Carreau-Yasuda.



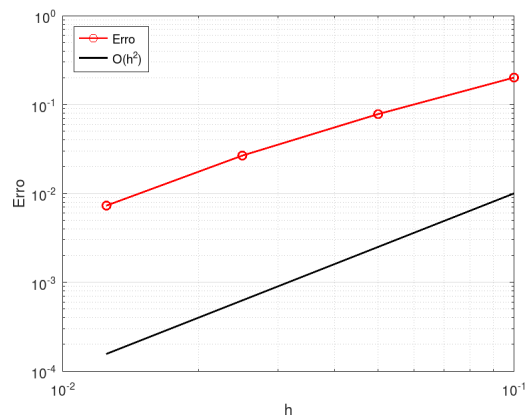
(a) Txx.



(b) Txy.



(c) Velocidade.



(d) Viscosidade.

Figura 8 – Erro relativo - Carreau-Yasuda.

A Tabela 3 apresenta o erro relativo para as variáveis τ_{xx} , τ_{xy} , ν e η , que podem também ser visualizados na Figura 9 para o modelo Power Law.

| | τ_{xx} | τ_{xy} | Velocidade | Viscosidade |
|-------|-------------|-------------|------------|-------------|
| M_1 | 0.2877 | 0.012432 | 0.010069 | 0.5635 |
| M_2 | 0.1735 | 0.012851 | 4.9570e-03 | 0.3550 |
| M_3 | 0.1029 | 7.7519e-03 | 1.7036e-03 | 0.1417 |
| M_4 | 0.055983 | 2.5183e-03 | 2.3967e-04 | 0.026181 |

Tabela 3 – Erro relativo - Power law.

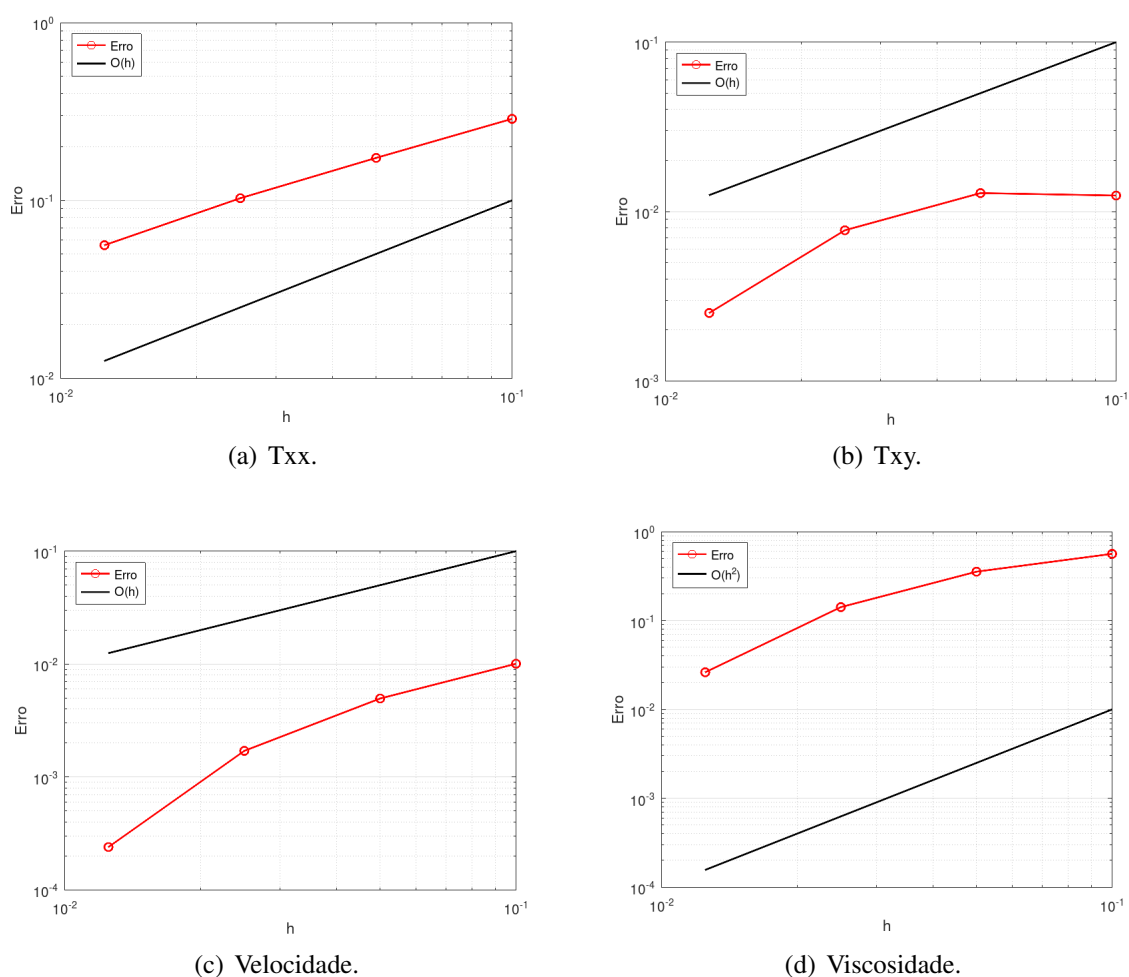


Figura 9 – Erro relativo - Power law.

Podemos notar, através das Tabelas 2 e 3, erros relativamente grandes de viscosidade, nas Figuras 8(d) e 9(d) e de τ_{xx} nas Figuras 8(a) e 9(a), são observados quando se utilizam malhas com maior espaçamento (M_1 e M_2). Já para o caso de τ_{xy} , nas Figuras 8(b) e 9(b) e da velocidade nas Figuras 8(c) e 9(c), podemos notar que, apesar do uso de malhas diferentes, obtém-se uma menor variação do erro relativo.

4.1.1 Simulações para diferentes números de Reynolds

Nesta seção, nas Figuras 10, 11 e 12, apresentamos resultados obtidos para diferentes números de Reynolds para os modelos Carreau-Yasuda em (a) e Power Law em (b). Para as simulações, foram utilizados os mesmos dados da seção anterior, alterando apenas o número de Reynolds para $Re = 1.0, 3.0, 5.0, 10.0$.

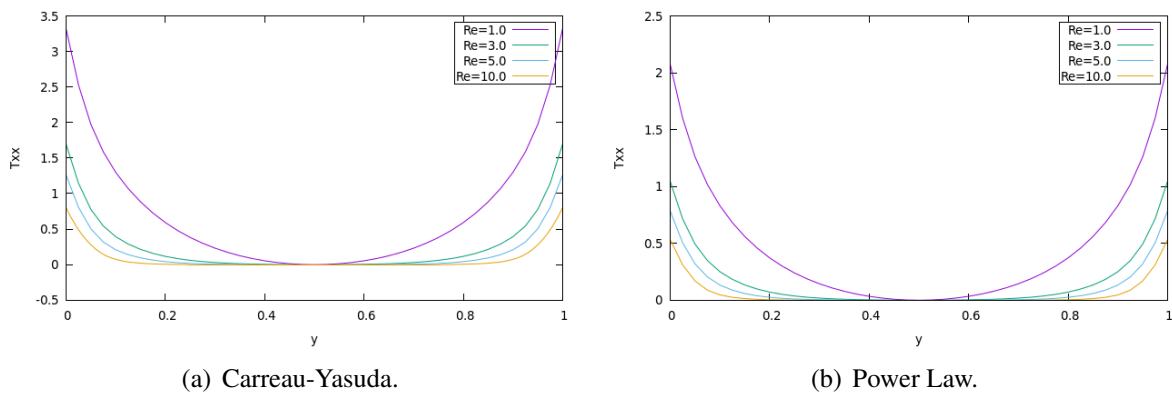


Figura 10 – Perfil de τ_{xx} para diferentes números de Reynolds.

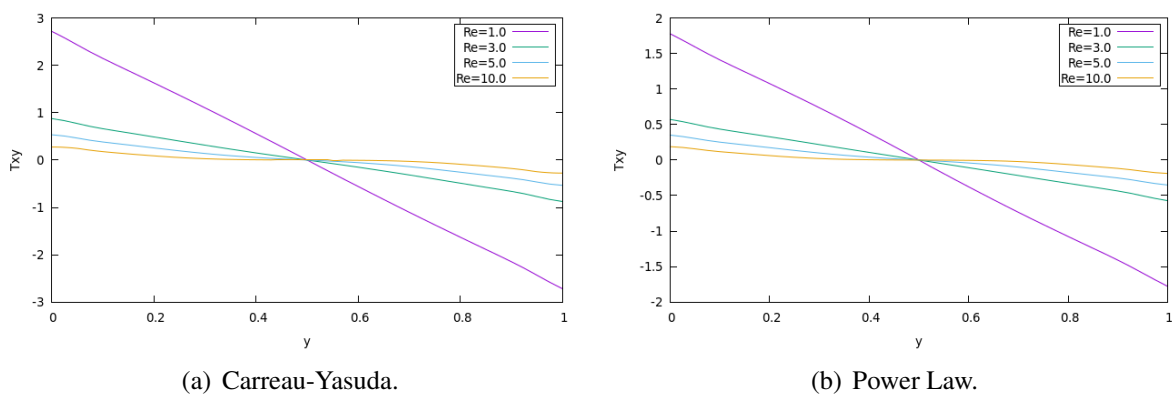


Figura 11 – Perfil de τ_{xy} para diferentes números de Reynolds.

Nas Figuras 10 e 11, pode-se notar que para maiores números de Reynolds, menores são as componentes τ_{xx} e τ_{xy} . E valores maiores podem ser notados no modelo de Carreau-Yasuda, em relação ao modelo de lei de potência.

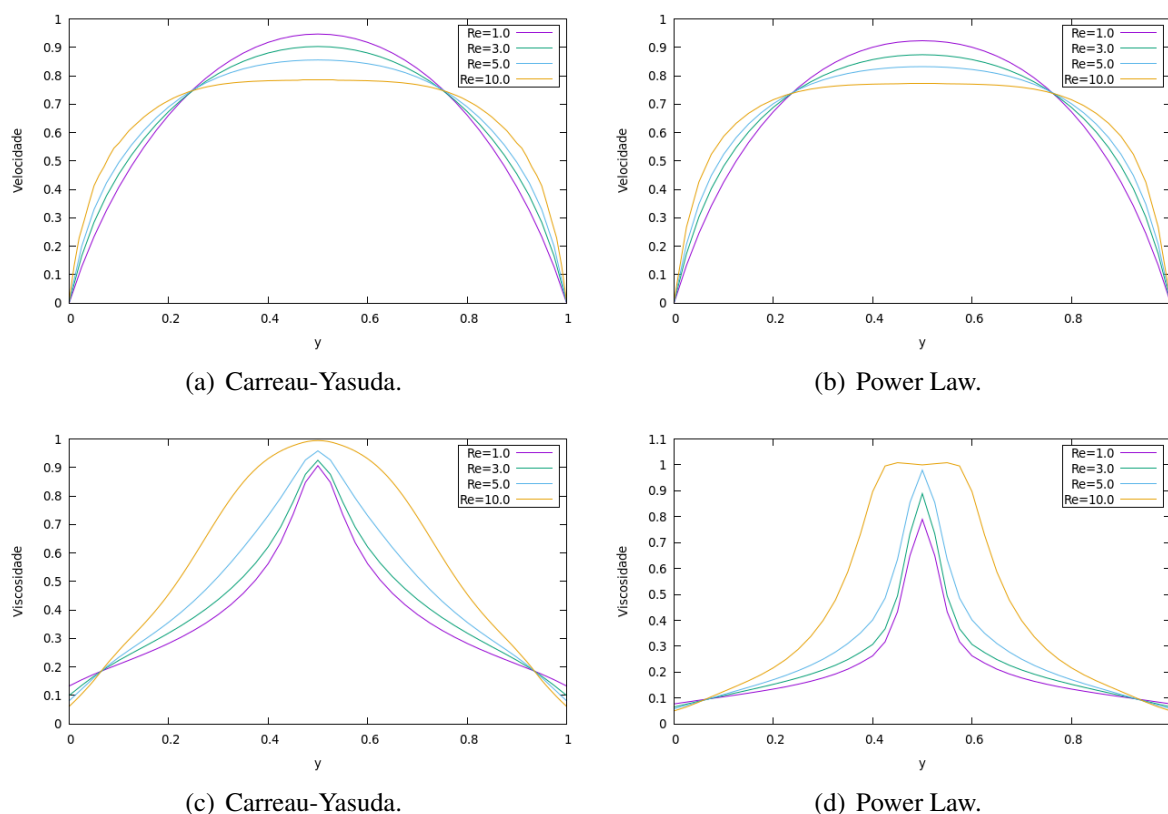


Figura 12 – Perfis de velocidade e viscosidade para diferentes números de Reynolds.

Na Figura [Figura 12](#), tem-se os gráficos de velocidade e viscosidade para o modelo de Carreau-Yasuda e Lei de potência. Pode-se notar que a velocidade, em [12\(a\)](#) e [12\(b\)](#), aumenta enquanto Re diminui. Já a viscosidade, em [12\(c\)](#) e [12\(d\)](#), aumenta com Re . Pode-se observar a viscosidade diminuir perto das paredes se Re aumentar.

4.1.2 Simulações para diferentes número de Deborah

As Figuras [13](#), [14](#) e [16](#), apresentam resultados obtidos para diferentes números de Deborah para os modelos Carreau-Yasuda em (a) e Power Law em (b). Para as simulações, foram utilizados os mesmos dados da seção [4.1](#), alterando apenas o número de Deborah para $De = 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$.

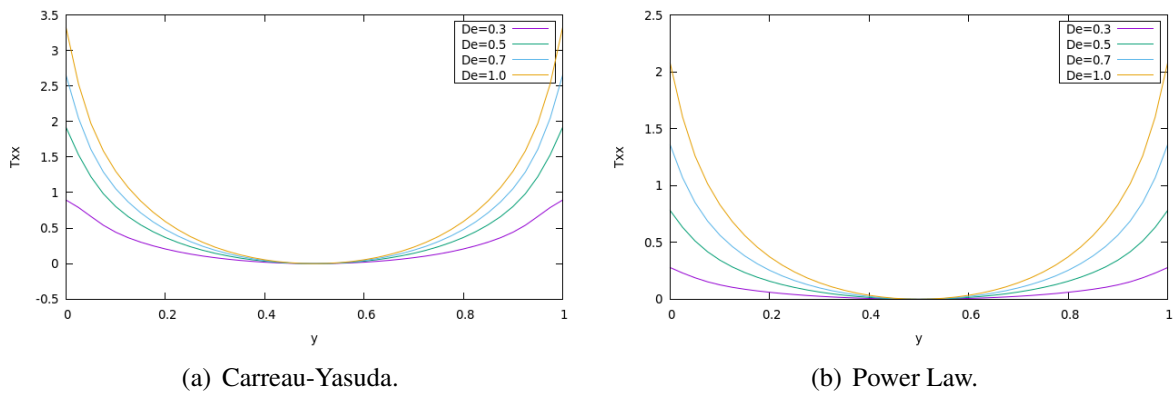


Figura 13 – Perfil de τ_{xx} para diferentes números de Deborah.

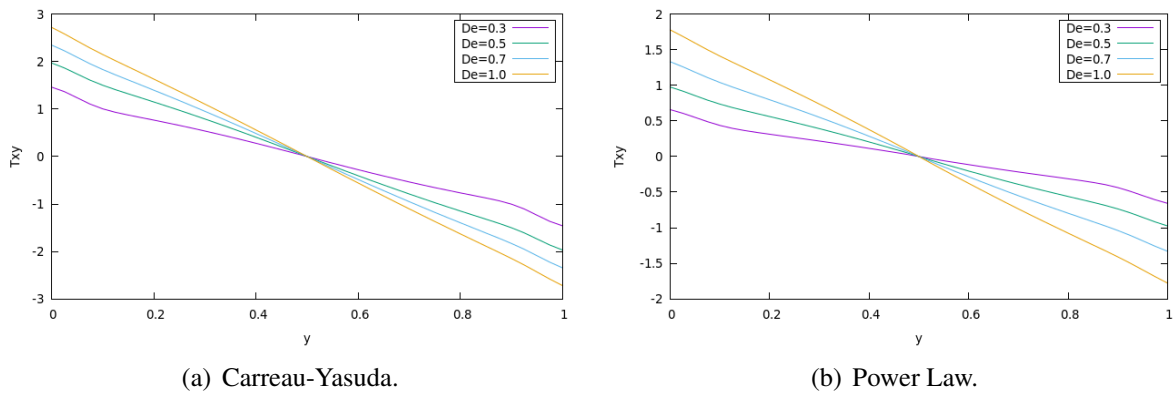


Figura 14 – Perfil de τ_{xy} para diferentes números de Deborah.

Pode-se notar, pelas Figuras 13 e 14, que em ambos os modelos não há diferença entre as tensões no eixo de simetria ($y = 0.5$), $\tau_{xx} = \tau_{xy} = 0.0$. Observa-se também o aumento de τ_{xx} entre a parede e o eixo de simetria. Na componente τ_{xy} , as linhas de tensão se cruzam apenas no eixo de simetria.

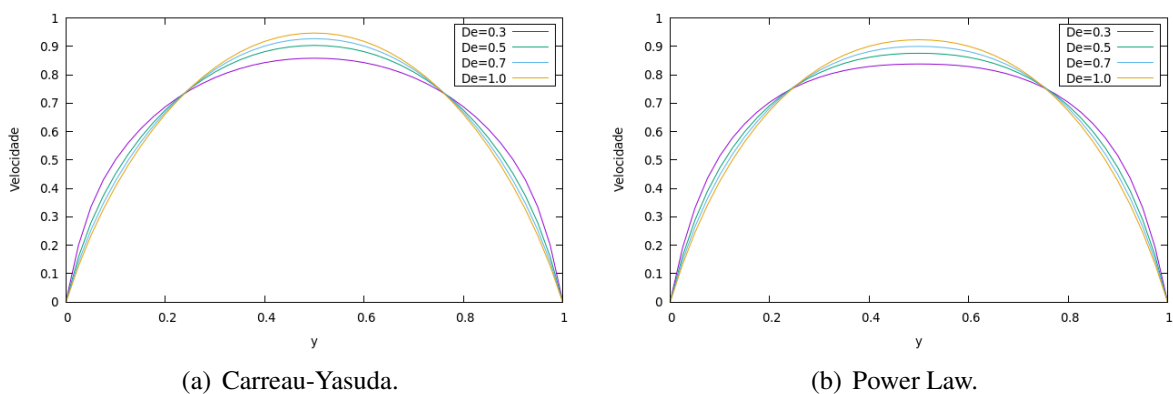


Figura 15 – Perfil de velocidade para diferentes números de Deborah.

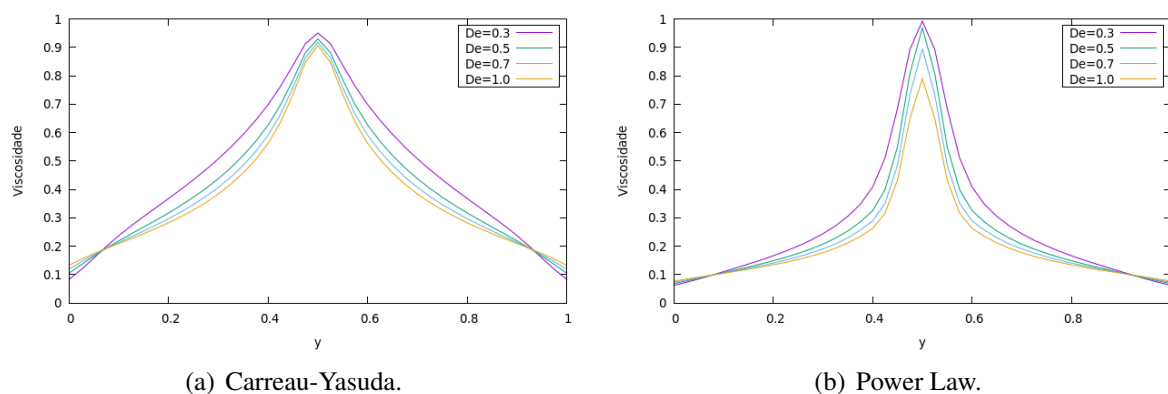


Figura 16 – Perfil de viscosidade para diferentes números de Deborah.

Na Figura 16, temos os perfis de viscosidade. Em ambos os casos, os gráficos se intersectam entre $y = 0.06$ e $y = 0.08$ e entre $y = 0.92$ e $y = 0.94$, onde nota-se uma mudança nos valores de η_p . Quanto menor o número de Deborah, maior será o valor da viscosidade.

4.2 Simulação numérica para uma contração 4:1

Para a etapa de validação, serão feitas simulações numa contração 4:1. Podemos ver, na Figura 17, a geometria do problema tratado nesta seção. O canal maior possui as seguintes medidas: $-2 \leq y \leq 2$ e $-20 \leq x \leq 0$. Já o canal menor possui as seguintes medidas: $-0.5 \leq y \leq 0.5$ e $0 \leq x \leq 25$.

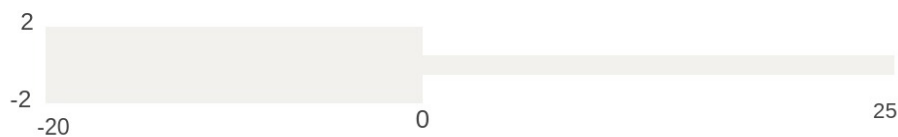


Figura 17 – Parte do domínio com três níveis de refinamento.

Nas simulações para o caso da contração, para efeito de comparação, foram usadas três tipos de malha, M_1 , M_2 e M_3 , para cada bloco, sendo a malha M_3 uma malha com três níveis de refinamento para o bloco $B1$, com legendas 1, 2 e 3, e dois níveis para o bloco $B2$, com legendas 4 e 5, ilustradas na Figura 18.

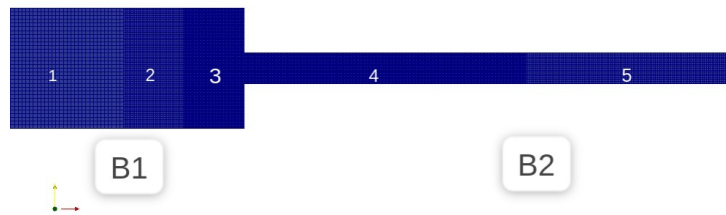


Figura 18 – Parte do domínio com três níveis de refinamento.

Para a construção do domínio, são utilizados dois blocos, B_1 e B_2 . Nas Tabelas 4 e 5, temos as informações sobre as malhas consideradas nos dois blocos para M_1 e M_2 .

| | Malha B_1 | Espaçamento ($\delta x = \delta y$) |
|-------|-----------------|---------------------------------------|
| M_1 | 160×32 | 0.125 |
| M_2 | 64×64 | 0.0625 |

Tabela 4 – Características das malhas utilizadas nas simulações.

| | Malha B_2 | Espaçamento ($\delta x = \delta y$) |
|-------|-----------------|---------------------------------------|
| M_1 | 200×8 | 0.125 |
| M_2 | 400×16 | 0.0625 |

Tabela 5 – Características das malhas utilizadas nas simulações.

Nas Tabelas 6 e 7, temos as informações sobre o refinamento feito nos blocos 1 e 2, ilustrado na Figura 18.

| | Malha $M_3 - B_1$ | Espaçamento ($\delta x = \delta y$) |
|---|-------------------|---------------------------------------|
| 1 | 160×32 | 0.125 |
| 2 | 64×64 | 0.0625 |
| 3 | 64×128 | 0.03125 |

Tabela 6 – Características das malhas utilizadas nas simulações.

| | Malha $M_3 - B_2$ | Espaçamento ($\delta x = \delta y$) |
|---|-------------------|---------------------------------------|
| 4 | 300×32 | 0.03125 |
| 5 | 400×16 | 0.0625 |

Tabela 7 – Características das malhas utilizadas nas simulações.

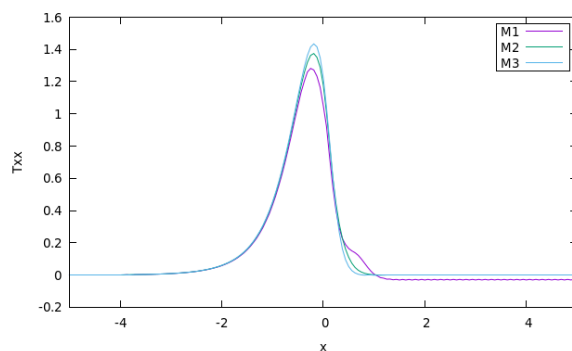
Os seguintes dados foram obtidos de simulações foram feitas em uma contração 4:1, num corte longitudinal em $y = 0.0$ e $-5 \leq x \leq 5$. A Figura da esquerda representa o Modelo de Carreau-Yasuda, enquanto a da direita representa o Modelo Power Law.

Dados

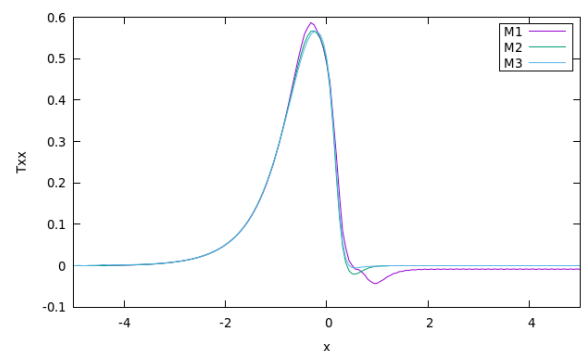
- $dt = 0.0001$;
- 1000 passos;
- $De = 1.0$;
- $\beta = 0.01$;
- $Re = 1.0$.

Como condições de contorno na parede, temos que em $y = -2$ e $y = 2$ a velocidade é nula. Temos um perfil de velocidade parabólico imposto na entrada do canal, $\frac{-y}{16}y(y-2)(y+2)$, e o escoamento desenvolvido na saída do canal. Os parâmetros usados para os modelos são:

- Carreau - Yasuda:
 - $a = 1.0$;
 - $n = 0.1$;
 - $K = 1.5$;
- Power Law:
 - $q_{min} = 0.01$;
 - $n = 0.5$.



(a) Carreau-Yasuda.



(b) Power Law.

Figura 19 – Refinamento de malha para τ_{xx} .

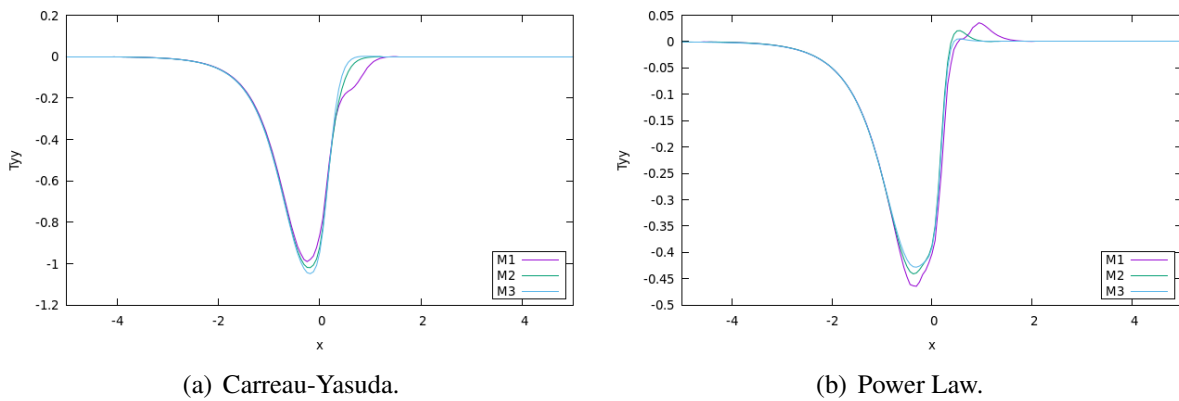


Figura 20 – Refinamento de malha para τ_{yy} .

Na Figura 19, podemos notar que τ_{xx} , em ambos os modelos, aumenta pouco antes da contração e logo em seguida tem uma queda. Já Na Figura 20, nota-se o contrário. Fora da região onde ocorre a transição do canal maior para o menor, tanto τ_{xx} quanto τ_{yy} são nulos.

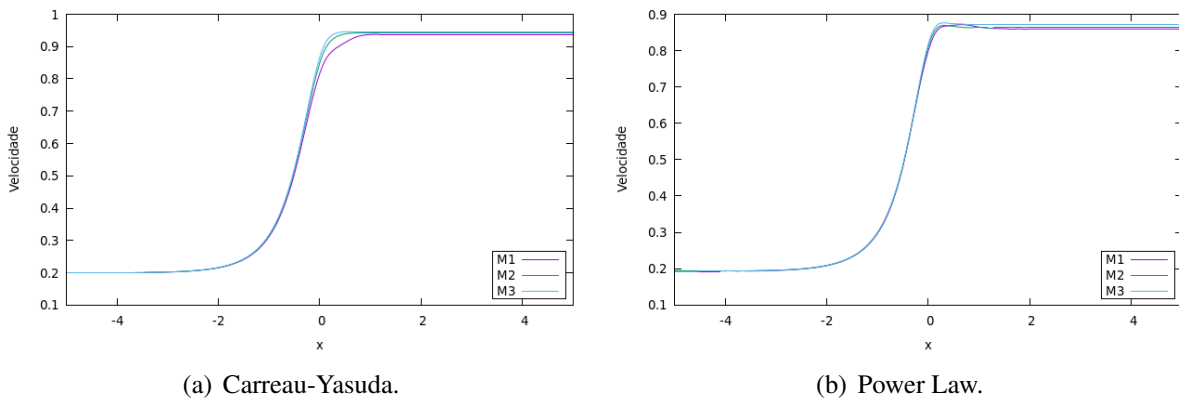


Figura 21 – Refinamento de malha para a velocidade.

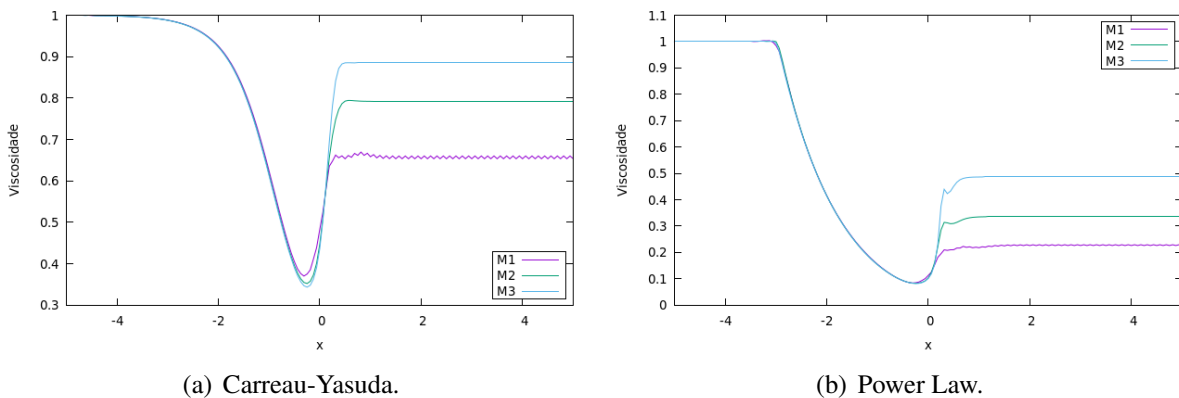


Figura 22 – Refinamento de malha para a viscosidade.

Na Figura 21, podemos notar que, próximo da região de transição, a velocidade sofre um aumento e só volta a ser constante um pouco depois da contração. Na Figura 22, pode-se notar uma queda na viscosidade e que logo após a contração ela volta a subir, porém pode-se perceber também que os resultados são dependentes da malha, já que assumem valores distantes dependendo da malha utilizada.

4.2.1 Variação do número de Reynolds

Nesta seção, nas Figuras 23, 24, 25 e 26, apresentamos resultados obtidos para diferentes números de Reynolds para os modelos Carreau-Yasuda e Power Law. Para as simulações, foram utilizados os mesmos dados da seção anterior, alterando apenas o número de Reynolds para $Re = 1.0, 3.0, 5.0, 10.0$.

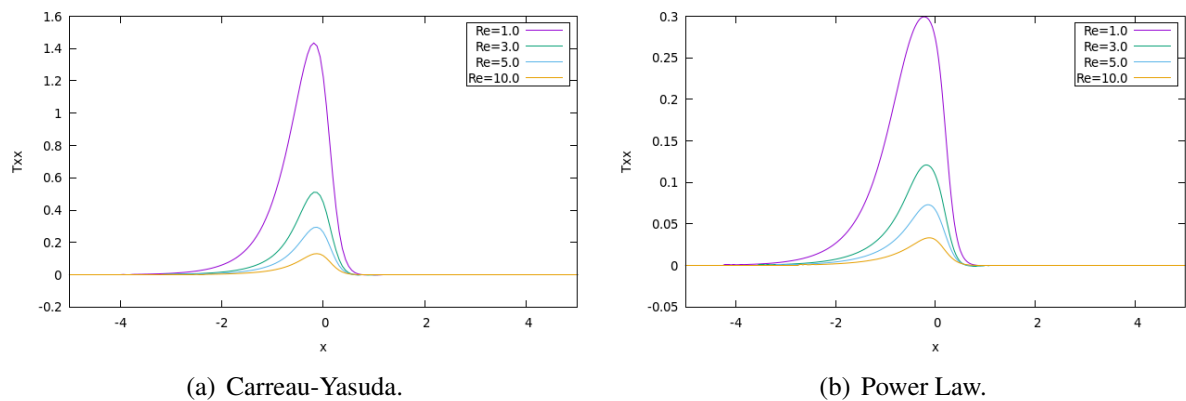


Figura 23 – Perfil de τ_{xx} para diferentes números de Reynolds.

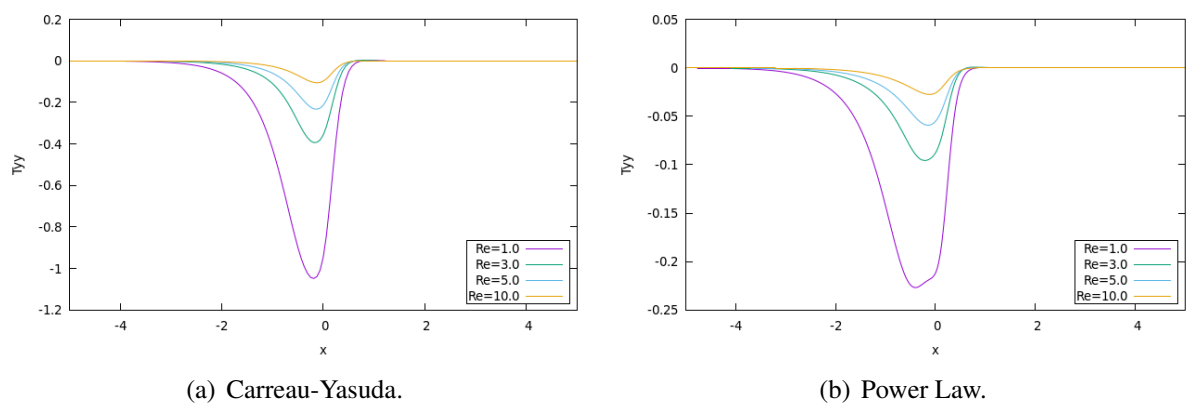
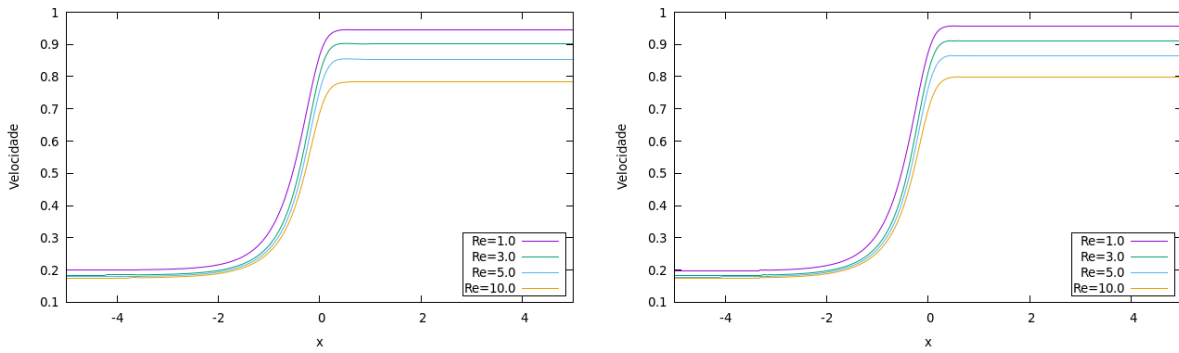


Figura 24 – Perfil de τ_{yy} para diferentes números de Reynolds.

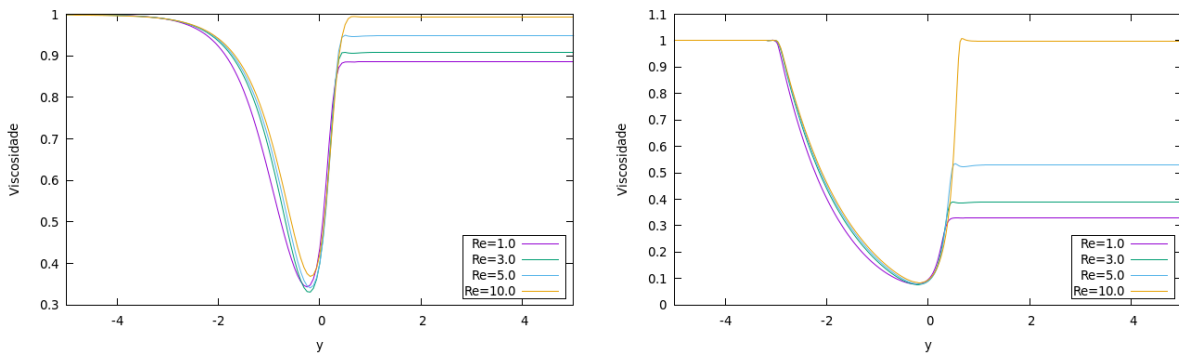
Nas Figuras 23 e 24, pode-se notar que para maiores números de Reynolds, menores são as componentes τ_{xx} e quanto menor o número de Reynolds, menor será a componente τ_{yy} .



(a) Carreau-Yasuda.

(b) Power Law.

Figura 25 – Perfil de velocidade para diferentes números de Reynolds.



(a) Carreau-Yasuda.

(b) Power Law.

Figura 26 – Perfil de viscosidade para diferentes números de Reynolds.

Na Figura 25, pode-se notar que para maiores números de Reynolds, menor será a componente de velocidade. Na Figura 26, quanto maior for o número de Reynolds, maior será a viscosidade.

4.2.2 Variação do número de Deborah

As Figuras 27, 28, 29 e 30, apresentam resultados obtidos para diferentes números de Deborah para os modelos Carreau-Yasuda e Power Law. Para as simulações, foram utilizados os mesmos dados da seção 4.2, alterando apenas o número de Deborah para $De = 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$.

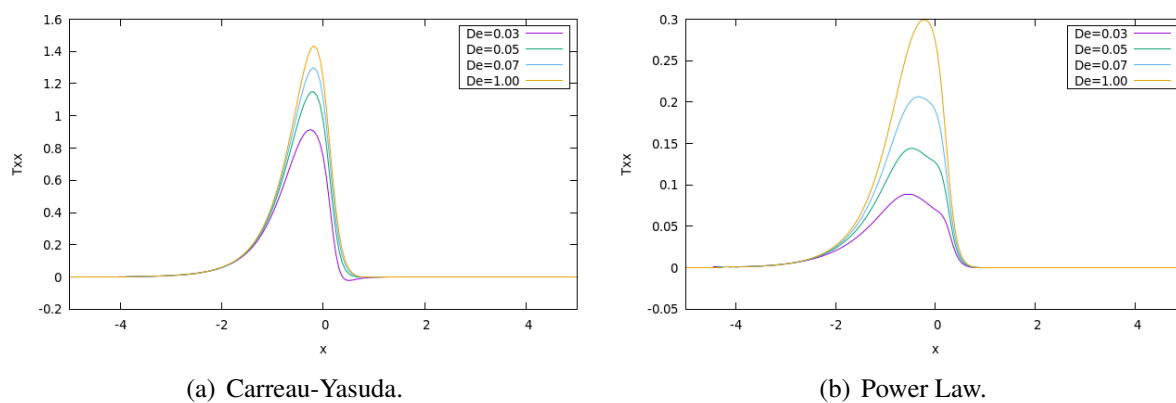


Figura 27 – Perfil de τ_{xx} para diferentes números de Deborah.

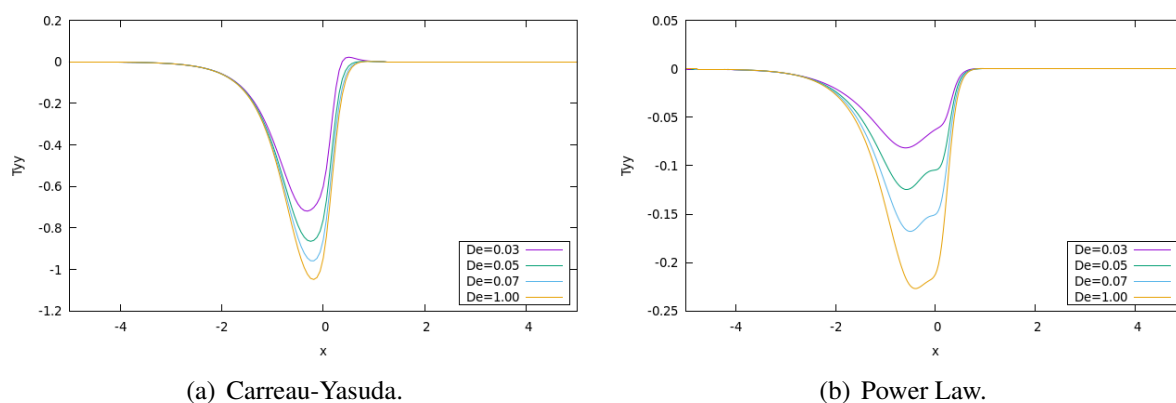


Figura 28 – Perfil de τ_{yy} para diferentes números de Deborah.

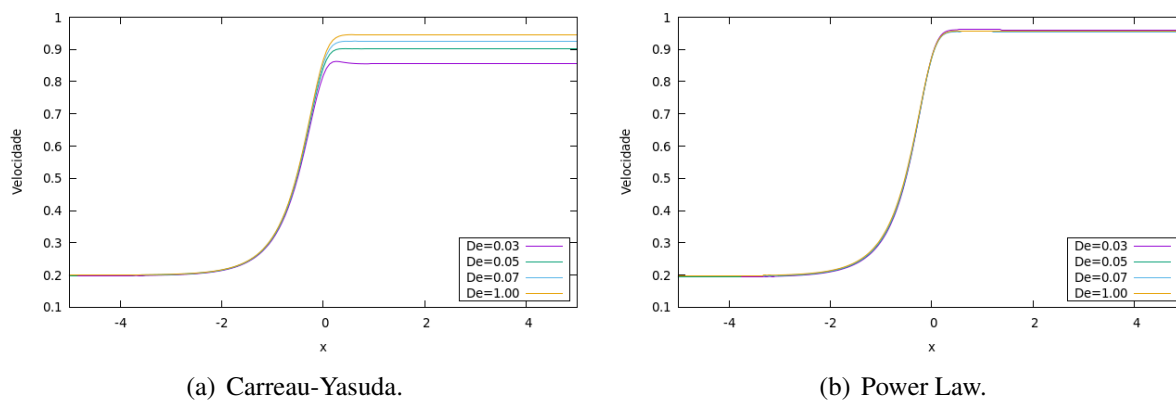
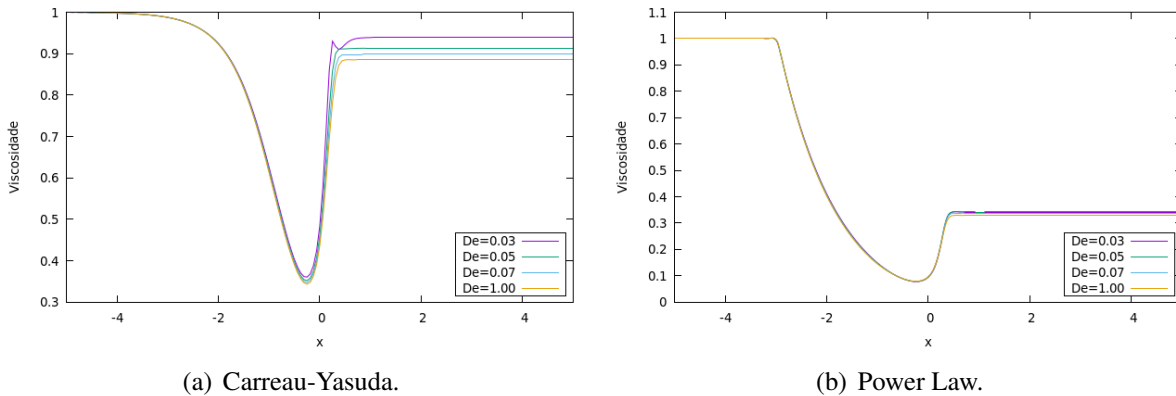


Figura 29 – Perfil de velocidade para diferentes números de Deborah.



(a) Carreau-Yasuda.

(b) Power Law.

Figura 30 – Perfil de viscosidade para diferentes números de Deborah.

Assim como acontece na seção 4.1.2, quanto maior o número de Deborah, maior será a influência no escoamento, como mostram as Figuras 27, 28 e 29 a menos no caso da viscosidade que, quanto menor o número de Deborah, maior será a viscosidade, como mostra a Figura 30.

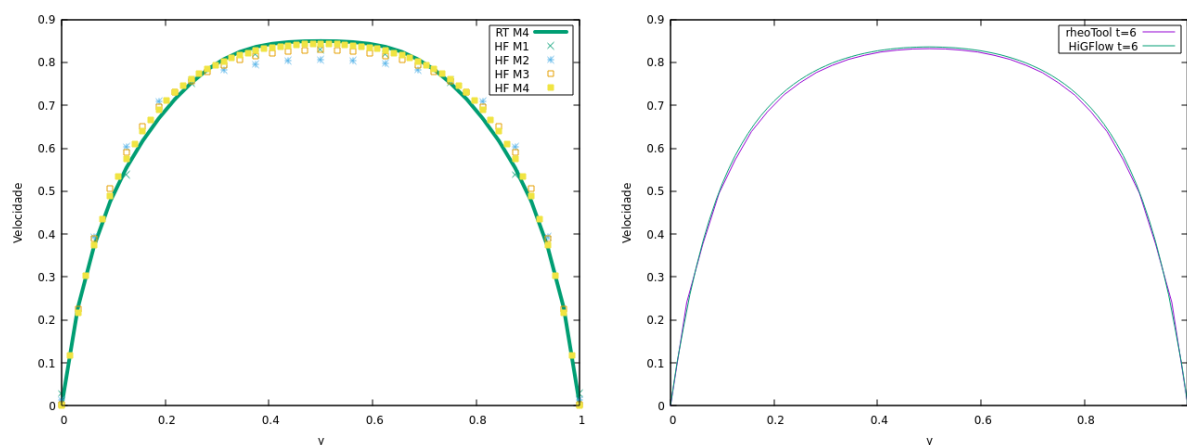
4.3 Comparação entre HiGFlow e *rheoTool*

Outras simulações feitas utilizando a geometria da Figura 5 foram feitas no HiGFlow, agora utilizando um tempo de simulação maior, com $t = 6.0$, e um dt menor, $dt = 0.0005$, que é equivalente a 12000 passos, para o modelo de Carreau - Yasuda, com as malhas mostradas na Tabela 8. Os resultados obtidos são comparados então com os resultados obtidos utilizando o *rheoTool*, que é baseado no OpenFOAM®.

| | Malha | Espaçamento ($\delta x = \delta y$) |
|-------|-----------------|---------------------------------------|
| M_1 | 80×8 | 0.125 |
| M_2 | 160×16 | 0.0625 |
| M_3 | 320×32 | 0.03125 |
| M_4 | 640×64 | 0.015625 |

Tabela 8 – Características das malhas utilizadas nas simulações.

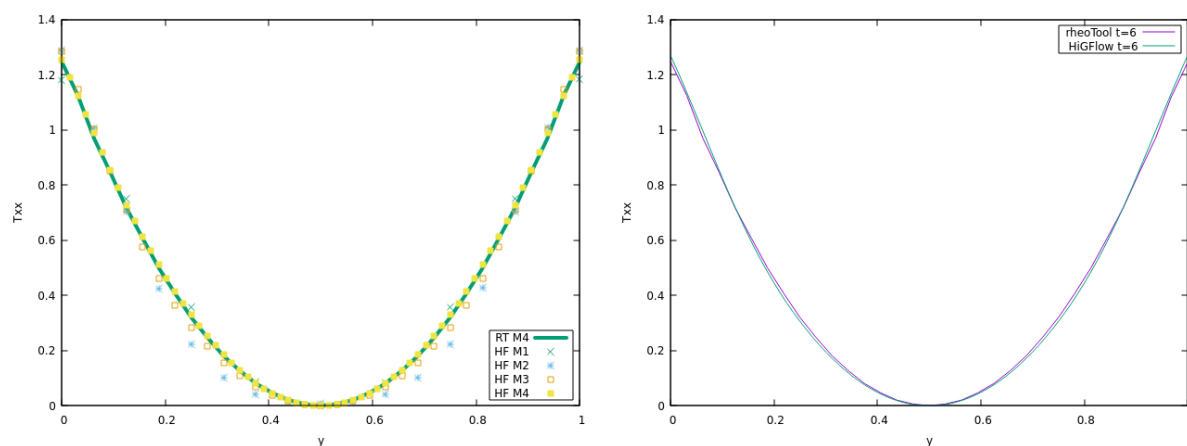
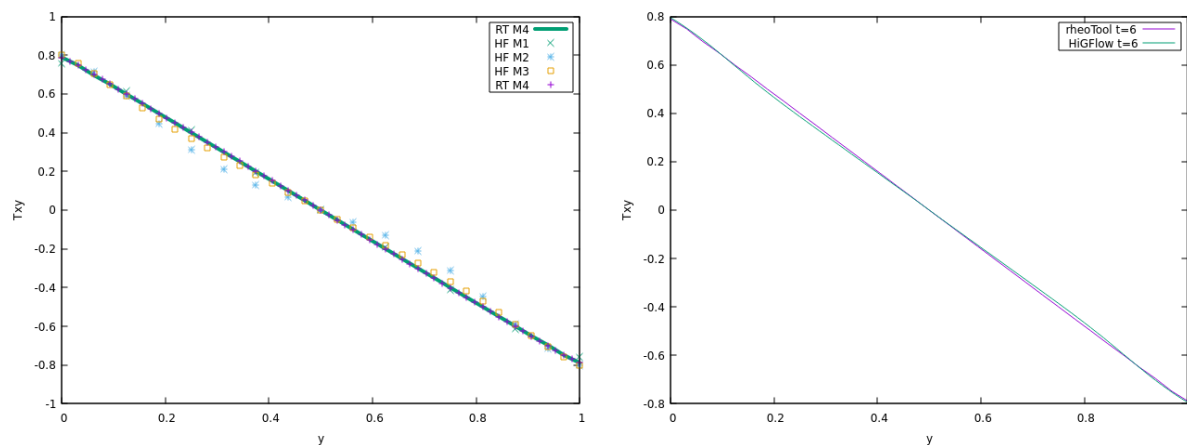
Nas Figuras 31, 32 e 33, temos os gráficos das simulações de velocidade, τ_{xx} e τ_{xy} . Nas Figuras à esquerda temos as simulações feitas no HiGFlow utilizando quatro malhas distintas descritas na Tabela 8 em conjunto com o gráfico da simulação feita no *rheoTool* utilizando a malha M_4 , enquanto nas Figuras à direita temos os gráficos obtidos no HiGFlow e no *rheoTool* utilizando a malha M_4 .



(a) Gráfico de velocidade utilizando diferentes malhas.

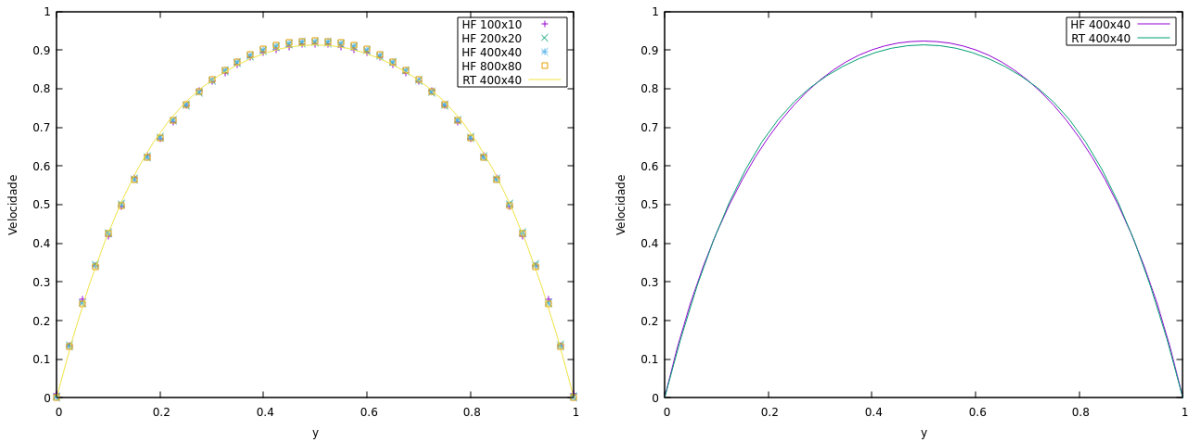
(b) Gráfico de velocidade utilizando a malha M4.

Figura 31 – Comparação entre as soluções numéricas obtidas usando o HiGFlow e o rheoTool: velocidade.

(a) Gráfico para τ_{xx} utilizando malhas distintas.(b) Gráfico para τ_{xx} utilizando a malha M4.Figura 32 – Comparação entre as soluções numéricas obtidas usando o HiGFlow e o rheoTool: τ_{xx} .(a) Gráfico para τ_{xy} utilizando malhas diferentes.(b) Gráfico para τ_{xy} utilizando a malha M4.Figura 33 – Comparação entre as soluções numéricas obtidas usando o HiGFlow e o rheoTool: τ_{xy} .

Pode-se observar nas Figuras 31, 32 e 33 que, para o modelo de Carreau-Yasuda, há uma boa concordância entre os resultados obtidos em ambos os sistemas.

Também fez-se uma comparação utilizando o modelo *Power Law*. As simulações ilustradas na Figura 34 foram feitas com as mesmas condições utilizadas na seção 4.1. Devido as limitações do *rheoTool*, não foi possível comparar os gráficos para τ_{xx} , τ_{xy} e para a viscosidade.



(a) Gráfico de velocidade utilizando malhas diferentes. (b) Gráfico de velocidade utilizando a malha *M3* da Tabela 1.

Figura 34 – Comparação entre as soluções numéricas obtidas usando o HiGFlow e o *rheoTool*: velocidade.

Do mesmo modo que no modelo de Carreau-Yasuda, podemos observar na Figura 34 que, para o modelo *Power law*, nos gráficos de velocidade obtidos nos dois sistemas também há uma boa concordância.

CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentadas as equações que modelam um escoamento incompressível, independente do tempo, viscoelástico, como a equação constitutiva Oldroyd-B combinado tanto com o modelo de Carreau-Yasuda quanto o modelo de Lei de potência. Os resultados das simulações foram obtidos através do *software* HiGFlow.

Para a primeira parte dos resultados, utilizou-se a geometria de um canal com escoamento totalmente desenvolvido. Na análise de erros, cinco malhas diferentes foram utilizadas: $M_1 = 100 \times 10$, $M_2 = 200 \times 20$, $M_3 = 400 \times 40$, $M_4 = 800 \times 80$, $M_5 = 1600 \times 160$, onde a solução obtida com a malha mais refinada, M_5 , foi utilizada como solução de referência. Desta forma, pode-se concluir que, tanto para a combinação Oldroyd-B com Carreau-Yasuda quanto para Oldroyd-B e Lei de potência, os resultados para a componente τ_{xy} e para a velocidade v são independentes da malha, o que não acontece para a componente τ_{xx} e para a viscosidade η .

Ainda no caso do escoamento entre duas placas paralelas, para as duas combinações citadas anteriormente, foram feitas simulações variando os parâmetros Re e De . Para $Re = 1.0, 3.0, 5.0, 10.0$, notou-se que, quanto maior Re , menores foram as componentes τ_{xx} e τ_{xy} e a velocidade. Para $De = 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$, o contrário acontece com τ_{xx} e τ_{xy} , quanto maior De , maiores são os valores dos componentes do tensor extra-tensão, já a viscosidade aumenta conforme De diminui.

Também foram feitas simulações numa contração 4:1, numa malha com três níveis de refinamento, sendo a região mais próxima da transição do canal maior para o canal menor, a região com malha mais refinada e onde as transições de valor acontecem. Foi observado que antes e depois dessa região, τ_{xx} e τ_{yy} são nulos. Já a viscosidade, antes dessa região tem valor $\eta = 1.0$, como especificado no código, e sofre uma queda de valor na região de transição. A velocidade é constante antes e depois da região de transição, tendo um salto em tal região.

Assim como no caso do escoamento entre duas placas paralelas, para as duas combinações citadas anteriormente, foram feitas simulações variando os parâmetros $Re = 1.0, 3.0, 5.0, 10.0$

e $De = 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$. Como anteriormente, τ_{xx} , τ_{yy} e a velocidade aumentam quando Re diminui. Com o aumento de De , aumentou-se τ_{xx} e diminuiu-se τ_{yy} .

Também foram apresentadas simulações numéricas dos modelos de Carreau - Yasuda e Power Law, tanto no sistema HiGFlow quanto no rheoTool. Quatro malhas diferentes com simulações feitas no HiGFlow e, para fins de comparação, a malha M_4 no rheoTool. Pode-se observar que foram obtidos resultados muito semelhantes para os dois modelos, nos dois sistemas.

Sobre os modelos, o modelo Carreau-Yasuda é uma versão generalizada do modelo de potência, porém, tal modelo usa mais parâmetros, uma desvantagem em relação ao modelo de lei de potência. Por outro lado, o modelo de potência é um modelo simples, que requer apenas dois parâmetros, a desvantagem é que este prevê viscosidades infinitas quando a taxa de deformação $\dot{\gamma}$ é zero.

Os resultados numéricos obtidos foram satisfatórios para ambas as técnicas. Como trabalhos futuros, poderão ser implementados outros modelos para viscosidade variável como, por exemplo, a viscosidade variando com a temperatura (onde será necessário adicionar também a equação de energia), ou a pressão.

REFERÊNCIAS

ALVES, M. A.; OLIVEIRA, P. J.; PINHO, F. T. Benchmark solutions for the flow of oldroyd-b and ptt fluids in planar contractions. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 110, n. 1, p. 45–75, 2003. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037702570200191X>>. Citado na página 41.

BIRD, R. B.; ARMSTRONG, R. C.; HASSAGER, O. Dynamics of polymeric liquids. vol. 1: Fluid mechanics. John Wiley and Sons Inc., New York, NY, 1987. Citado nas páginas 21, 26 e 27.

FERREIRA, V. G. **Análise e implementação de esquemas de convecção e modelos de turbulência para simulação de escoamentos incompressíveis envolvendo superfícies livres**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2001. Citado na página 25.

FORTUNA, A. de O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações**. [S.l.]: Edusp, 2000. ISBN 85-314-0526-2. Citado nas páginas 21, 23, 24, 26, 28 e 30.

GREENSHIELDS, C. **OpenFOAM v10 User Guide**. London, UK: The OpenFOAM Foundation, 2022. Disponível em: <<https://doc.cfd.direct/openfoam/user-guide-v10>>. Citado nas páginas 15, 38 e 39.

HABLA, F.; OBERMEIER, A.; HINRICHSEN, O. Semi-implicit stress formulation for viscoelastic models: Application to three-dimensional contraction flows. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 199, p. 70–79, 2013. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025713001092>>. Citado na página 39.

HABLA, F.; WOITALKA, A.; NEUNER, S.; HINRICHSEN, O. Development of a methodology for numerical simulation of non-isothermal viscoelastic fluid flows with application to axisymmetric 4:1 contraction flows. **Chemical Engineering Journal**, v. 207-208, p. 772–784, 2012. ISSN 1385-8947. 22nd International Symposium on Chemical Reaction Engineering (ISCRE 22). Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1385894712009515>>. Citado na página 21.

IRGENS, F. **Rheology and non-newtonian fluids**. [S.l.]: Springer, 2014. v. 1. Citado na página 26.

OLDROYD, J. G.; WILSON, A. H. On the formulation of rheological equations of state. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, v. 200, n. 1063, p. 523–541, 1950. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1950.0035>>. Citado na página 26.

PIMENTA, F.; ALVES, M. Stabilization of an open-source finite-volume solver for viscoelastic fluid flows. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 239, p. 85–104, 2017. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025716303329>>. Citado na página 39.

SOCHI, T. Non-newtonian flow in porous media. **Polymer**, v. 51, n. 22, p. 5007–5023, 2010. ISSN 0032-3861. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032386110006750>>. Citado na página 21.

SOUSA, F.; LAGES, C.; ANSONI, J.; CASTELO, A.; SIMAO, A. A finite difference method with meshless interpolation for incompressible flows in non-graded tree-based grids. **Journal of Computational Physics**, 2019. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999119304966>>. Citado na página 34.

SOUZA, F. S. d. **Simulação de Escoamentos Multifásicos em Malhas não Estruturadas**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, Agosto, 2005. Citado na página 29.

WESSELING, P. **Principles of computational fluid dynamics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009. v. 29. Citado nas páginas 23, 24 e 25.

XUE, S.-C.; PHAN-THIEN, N.; TANNER, R. Three dimensional numerical simulations of viscoelastic flows through planar contractions. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 74, n. 1, p. 195–245, 1998. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025797000724>>. Citado nas páginas 25 e 41.

