

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Estudo da Estabilidade de Escoamento de Fluido Não
Newtoniano Modelado pelo LPTT**

Andreza Beatriz Jacinto da Silva

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ciências
de Computação e Matemática Computacional (PPG-C²MC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Andreza Beatriz Jacinto da Silva

Estudo da Estabilidade de Escoamento de Fluido Não Newtoniano Modelado pelo LPTT

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Leandro Franco de Souza

USP – São Carlos
Março de 2022

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S586 e Silva, Andreza Beatriz Jacinto da
Estudo da estabilidade de escoamento de fluido
não Newtoniano modelado pelo LPTT / Andreza Beatriz
Jacinto da Silva; orientador Leandro Franco de
Souza. -- São Carlos, 2022.
66 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Ciências de Computação e Matemática
Computacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Transição Laminar-Turbulenta. 2. Fluidos
Viscoelásticos. 3. Teoria de Estabilidade Linear.
4. Modelo LPTT. 5. Estabilidade de Escoamentos. I.
Souza, Leandro Franco de, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Andreza Beatriz Jacinto da Silva

**Study of Non Newtonian Fluid Flow Stability Modeled by
LPTT**

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Computer and Mathematical Sciences Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Franco de Souza

**USP – São Carlos
March 2022**

*A Deus, à minha família e meus amigos,
por sempre estarem ao meu lado.*

AGRADECIMENTOS

Dedico este trabalho primeiramente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo da minha vida, e não somente nestes anos como universitária, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

Agradeço imensamente aos meus pais José dos Santos da Silva e Ana Cláudia Jacinto da Silva, que me deram apoio e incentivo nas horas difíceis e que, com muito carinho não mediram esforços para que eu chegasse até a esta etapa da minha vida, à minha irmã Calista Poliana, tios, primos e avós, que de alguma forma também contribuíram para que o sonho da pós-graduação se tornasse realidade.

Ao meu professor orientador Leandro Franco de Souza, pelos ensinamentos, paciência na orientação, apoio e incentivo que tornaram possível o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos da pós-graduação (principalmente do LMACC) e fora da pós, que não me deixaram ser vencida pelo cansaço.

Ao CNPQ, pelo auxílio financeiro.

À Universidade de São Paulo (USP), ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) e aos professores do instituto por me proporcionar conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter afetividade da educação no processo de formação profissional.

“Porque sou eu que conheço os planos que tenho para vocês, diz o Senhor, planos de fazê-los prosperar e não de causar dano, planos de dar a vocês esperança e um futuro.”
(A Bíblia (JEREMIAS, 29:11))

RESUMO

SILVA, A. B. J. **Estudo da Estabilidade de Escoamento de Fluido Não Newtoniano Modelado pelo LPTT**. 2022. 66 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

Diversos escoamentos de interesse prático são de fluidos viscoelásticos e muitas vezes é desejável saber se estes escoamentos propagam-se no estado laminar ou no turbulento. Embora a hidrodinâmica de fluidos viscoelásticos sejam fortemente afetadas pelo balanço entre forças inerciais e elásticas no escoamento, o efeito da elasticidade sobre a estabilidade de escoamentos inerciais não foi completamente estabelecida. No presente trabalho, estuda-se a transição laminar-turbulenta, em que será investigada a convecção de ondas de Tollmien-Schlichting para o escoamento incompressível bidimensional de Poiseuille para um fluido viscoelástico, utilizando a equação constitutiva linear Phan-Thien Tanner (PTT). Será utilizada a Teoria de Estabilidade Linear (LST) para verificar a estabilidade dos escoamentos de fluidos viscoelásticos a perturbações não estacionárias. Na análise LST as equações são linearizadas para um fluido viscoelástico. Com o propósito de avaliar curvas neutras de estabilidade, diferentes simulações numéricas serão realizadas variando-se os parâmetros adimensionais para o escoamento de fluido viscoelástico e comparando com o fluido Newtoniano.

Palavras-chave: Transição Laminar-Turbulenta, Fluidos Viscoelásticos, Modelo LPTT, Estabilidade de Escoamentos, Teoria de Estabilidade Linear.

ABSTRACT

SILVA, A. B. J. **Study of Non Newtonian Fluid Flow Stability Modeled by LPTT**. 2022. 66 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

Several flows of practical interest are viscoelastic fluids and it is often desirable to know whether these flows propagate in the laminar or turbulent state. Although the hydrodynamics of viscoelastic fluids is strongly affected by the balance between inertial and elastic forces in the flow, the effect of elasticity on the stability of inertial flows is not clear. In the present work, we studied a turbulent lamination transition, investigating the evolution of Tollmien-Schlichting waves in an incompressible two-dimensional Poiseuille flow to a viscoelastic fluid, using a linear constitutive Phan-Thien Tanner (PTT) equation. It will be adopted the Linear Stability Theory (LST) to verify the stability of viscoelastic fluid flows to non-stationary disturbances. In the LST analysis the equation are linearized to study the stability of a viscoelastic fluid. In order to analyze the stability curves, simulations may vary according to dimensionless variables for viscoelastic fluid flows and their results are compared with the Newtonian fluid.

Keywords: Laminar-Turbulent Transition, Viscoelastic Fluids, LPTT Model, Flow Stability, Linear Stability Theory.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Espectro de autovalores.	39
Figura 2 – Espectro de autovalores.	40
Figura 3 – Comparação de curvas neutras para os modelos Oldroyd-B (\circ) curva preta e LPTT (-) curva vermelha para os valores de $W_i = 1, 2, 5$ e 10 e fixado $\beta = 0.7$	42
Figura 4 – Comparação de curvas neutras para os modelos Oldroyd-B (\circ) curva preta e LPTT (-) curva vermelha para os valores de $W_i = 1, 2, 5$ e 10 e fixado $\beta = 0.8$	42
Figura 5 – Comparação de curvas neutras para os modelos Oldroyd-B (\circ) curva preta e LPTT (-) curva vermelha para os valores de $W_i = 1, 2, 5$ e 10 e fixado $\beta = 0.9$	43
Figura 6 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.2$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.5$ e $W_i = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100	46
Figura 7 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.2$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.75$ e $W_i = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100	47
Figura 8 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.2$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 1$ e $W_i = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100	47
Figura 9 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.4$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.5$ e $W_i = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100	48
Figura 10 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.4$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.75$ e $W_i = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100	49
Figura 11 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.4$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 1$ e $W_i = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100	49
Figura 12 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.6$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.5$ e $W_i = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100	50
Figura 13 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.6$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.75$ e $W_i = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100	51
Figura 14 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.6$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 1$ e $W_i = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100	51
Figura 15 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.8$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.5$ e $W_i = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100	52
Figura 16 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.8$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.75$ e $W_i = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100	53
Figura 17 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.8$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 1$ e $W_i = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100	53

Figura 18 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.9$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.5$ e $W_i = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100	54
Figura 19 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.9$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.75$ e $W_i = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100	55
Figura 20 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.9$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 1$ e $W_i = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100	55
Figura 21 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ e 0.9 , $\xi = 0$, $\varepsilon = 1$ e $W_i = 1$	56
Figura 22 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ e 0.9 , $\xi = 0$, $\varepsilon = 1$ e $W_i = 20$	57
Figura 23 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ e 0.9 , $\xi = 0$, $\varepsilon = 1$ e $W_i = 100$	57
Figura 24 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.2$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.5, 0.75$, e 1 e $W_i = 2$	58
Figura 25 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.2$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.5, 0.75$, e 1 e $W_i = 100$	59
Figura 26 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.9$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.5, 0.75$, e 1 e $W_i = 2$	59
Figura 27 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.9$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.5, 0.75$, e 1 e $W_i = 100$	60
Figura 28 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.4$, $\xi = 0$ e 0.25 , $\varepsilon = 0.75$, e $W_i = 1$ e 10	61
Figura 29 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.4$ e 0.9 , $\xi = 0$ e 0.25 , $\varepsilon = 0.5$ e $W_i = 2$	61
Figura 30 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.4$, $\xi = 0$ e 0.25 , $\varepsilon = 0.5$ e 1 e $W_i = 1$	62

LISTA DE SÍMBOLOS

t — Tempo

ρ — Densidade do fluido

σ — Tensor tensão total

p — Pressão

I — Tensor identidade

τ — Tensor simétrico das tensões

η_s — Viscosidade dinâmica do solvente

η_0 — Viscosidade dinâmica total do fluido

η_p — Viscosidade dinâmica do polímero

D — Tensor de deformação

T — Tensor extra-tensão

$f(\text{tr}(\mathbf{T}))$ — Função coeficiente de tensão

Re — Número de Reynolds

Wi — Número de Weissenberg

β — Constante β que controla a contribuição do solvente

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	25
2.1	Equações Governantes	25
2.1.1	<i>Modelos Newtoniano e Não Newtoniano</i>	26
2.1.2	<i>Modelo LPTT</i>	28
2.2	Adimensionalização	29
2.3	Teoria de Estabilidade Linear	31
2.4	Escoamento Base	35
3	MÉTODO NUMÉRICO	37
3.1	Método Numérico	37
3.2	Análise de Instabilidades	40
3.3	Verificação	41
4	RESULTADOS DE ANÁLISE DE ESTABILIDADE UTILIZANDO LST	45
5	CONCLUSÃO	63
	REFERÊNCIAS	65

INTRODUÇÃO

O que é um fluido? Um fluido é uma substância que se deforma continuamente quando submetida a uma tensão de cisalhamento de qualquer valor. A tensão de cisalhamento (força por unidade de área) é criada quando uma força atua tangencialmente numa superfície. Os fluidos podem ser classificados como newtonianos e não-newtonianos. Nos fluidos newtonianos cada componente de tensão cisalhante aplicada é linearmente proporcional a taxa de deformação. A constante de proporcionalidade é a viscosidade dinâmica. Em fluidos não-newtonianos essa proporcionalidade não acontece.

Uma classe de fluidos não-newtonianos são os viscoelásticos. Esses fluidos possuem características de líquidos viscosos com propriedades elásticas. Estas substâncias quando submetidas à tensão de cisalhamento sofrem uma deformação e quando esta cessa, ocorre uma certa recuperação da deformação sofrida (comportamento elástico). Os materiais viscoelásticos mais conhecidos incluem tinta, sangue, ketchup, mel, maionese, polímero fundido, solução de polímero e suspensão, shampoo e amido de milho.

De acordo com ([MENDONÇA; AVELAR, 2016](#)) a dinâmica de fluidos computacional é uma área com relevante interesse industrial nas áreas química, alimentícia, aeronáutica e petrolífera, e por isso, há muitos problemas a serem investigados. Entre os diversos problemas surgidos nessa área está o tratamento de escoamentos de fluidos não-Newtonianos. Esse tipo de problema tem se tornado um grande desafio nessa área pois a maioria das aplicações industriais envolvem escoamentos de fluidos viscoelásticos, tais como, injeção de plásticos, processos de extrusão de forma geral e extração de petróleo.

Com o interesse industrial, o intuito é desenvolver métodos numéricos capazes de simular escoamentos de fluidos viscoelásticos para poder prever, a custos baixos e com bons resultados, o comportamento do escoamento de um fluido durante o processo industrial. Entretanto, as equações constitutivas que modelam um fluido viscoelástico são complexas e de difícil tratamento em contornos do domínio computacional.

O modelo viscoelástico linear mais popular é o modelo de Maxwell (BERIS; ARMSTRONG; BROWN, 1987), (MOMPEAN; DEVILLE, 1997), que associa a ideia de um fluido que apresenta características tanto de um sólido elástico, como de um fluido viscoso Newtoniano. Entre os principais modelos viscoelásticos não lineares encontrados na literatura podem ser citados os modelos diferenciais: Oldroyd-B (BRASSEUR *et al.*, 1998), (ALVES; OLIVEIRA; PINHO, 2003), White-Metzner (WHITE; METZNER, 1963), Giesekus (GIESEKUS, 1982), Leonov (LEONOV, 1976), modelos do tipo FENE (BIRD; DOTSON; JOHNSON, 1980), PTT (THIEN; TANNER, 1977), (ALVES; OLIVEIRA; PINHO, 2003) e derivados, PomPom (LUO; TANNER, 1986), (LUO; TANNER, 1988). De maneira geral, modelos viscoelásticos conseguem descrever qualitativamente o comportamento viscoelástico não-linear de polímeros fundidos (BRETAS, 2005).

Muitas instabilidades elásticas têm sido relatadas nos últimos anos, correspondendo a trabalhos experimentais ou teóricos através da análise de estabilidade linear ((LARSON; SHAQFEH; MULLER, 1990), (SHAQFEH; MULLER; LARSON, 1992), (LARSON, 1992)). E, ainda, há vários trabalhos de escoamentos em canais de fluidos viscoelásticos na literatura. Os escoamentos de Poiseuille e de Couette são geralmente utilizados como testes de *benchmark* para as novas equações constitutivas, havendo muito interesse em instabilidades nesse tipo de escoamentos viscoelásticos ((AVGOUSTI; BERIS, 1993), (SURESHKUMAR; BERIS, 1995), (MAK, 2009), (GERVAZONI, 2016), (ZHANG *et al.*, 2013), (SOUZA; BRANDI; MENDONÇA, 2012), (SILVA, 2018)). Ainda hoje, o escoamento de Poiseuille não foi amplamente estudado, tendo algumas questões sem respostas, principalmente na área de estabilidade de fluidos viscoelásticos, despertando assim o interesse para o estudo desse problema para o fluido LPTT.

A Teoria de Estabilidade Linear (LST – do inglês Linear Stability Theory) fornece uma estrutura para obter informações sobre a taxa de crescimento em relação à frequência para um determinado fluxo de base. Esta teoria se baseia nas equações da continuidade e de Navier-Stokes, considerando algumas hipóteses sobre o escoamento e a forma de propagação das perturbações (LACERDA *et al.*, 2018). Ela prevê sob quais condições as instabilidades se formam e fornece informações sobre as escalas espaciais e temporais, identificando o tipo de instabilidade que ocorre. A análise de estabilidade se relaciona diretamente com a transição para a turbulência, fornecendo informações sobre quais condições tornam um escoamento instável e propício a se tornar turbulento.

A importância do projeto proposto está no desenvolvimento de um diagrama de curvas neutras de estabilidade para escoamentos viscoelásticos utilizando a Teoria de Estabilidade Linear. A contribuição da pesquisa científica é inovadora, pois visa agregar conhecimentos e promover o aprimoramento científico e tecnológico de transição laminar-turbulenta, desenvolvimento de códigos e a construção de técnicas eficientes na simulação de escoamentos incompressíveis de fluidos viscoelásticos. Assim, este trabalho vem contribuir com resultados atuais no sentido de disponibilizar uma ferramenta importante na verificação de estabilidade de escoamentos

bidimensionais utilizando o fluido LPTT.

Este trabalho tem como principal objetivo estudar o fenômeno de transição para a turbulência, do escoamento de Poiseuille incompressível, bidimensional, de um fluido viscoelástico, do tipo LPTT. A investigação desse fenômeno é realizada através da análise da convecção de ondas de Tollmien-Schlichting para o escoamento considerado, utilizando as técnicas de Teoria de Estabilidade Linear, a fim de analisar a estabilidade do escoamento do fluido viscoelástico do tipo LPTT e comparar com a de fluidos Newtonianos.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2: Neste capítulo são apresentadas as equações governantes para escoamentos bidimensionais, incompressíveis, isotérmicos, de um fluido Newtoniano e não-Newtoniano. A equação considerada no escoamento viscoelástico é a equação constitutiva do tipo linear Phan Thien Tanner (PTT). Todas as equações estão apresentadas nas formas dimensional e adimensional. Neste mesmo capítulo, são apresentadas as equações utilizadas na teoria de estabilidade linear. No final deste capítulo é apresentado o escoamento base utilizado neste trabalho.

- Capítulo 3: É apresentado o método numérico que foi utilizados para a solução das equações governantes obtidas utilizando a teoria de estabilidade linear e é realizada a verificação do código LST.

- capítulo 4: são apresentados os resultados numéricos obtidos utilizando a teoria de estabilidade linear, como a verificação da implementação das equações de estabilidade utilizando resultados já verificados para o modelo Oldroyd-B, a apresentação de curvas neutras de estabilidade para o modelo LPTT e, também, a comparação entre os resultados obtidos com o fluido Newtoniano.

- capítulo 5: E, por fim, são apresentadas as conclusões do trabalho, assim como as perspectivas de continuidade da pesquisa.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo são apresentadas as equações governantes para fluidos Newtonianos e não-Newtonianos, referente a escoamentos incompressíveis e isotérmicos.

2.1 Equações Governantes

A modelagem matemática de escoamentos incompressíveis e isotérmicos pode ser feita através das equações de conservação de massa (continuidade) e de conservação de quantidade de movimento, que são dadas a seguir

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.2)$$

onde \mathbf{u} é o vetor velocidade, t é o tempo, ρ é a densidade do fluido e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor tensão total, definido por

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}, \quad (2.3)$$

sendo p a pressão, \mathbf{I} o tensor identidade e $\boldsymbol{\tau}$ o tensor simétrico das tensões, que pode ser determinado a partir da equação constitutiva do fluido considerado. No caso bidimensional $\mathbf{u} = [u \ v]^T$ retrata as componentes da velocidade nas direções x e y , respectivamente, e o tensor simétrico das tensões é definido por $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} \\ \tau^{xy} & \tau^{yy} \end{bmatrix}$.

2.1.1 Modelos Newtoniano e Não Newtoniano

Cada fluido apresenta diversas características relacionadas às suas propriedades físicas, as quais podem influenciar de maneira direta fatores como o fluxo do material e a taxa de deformação, entre outras. Desse modo, as características relacionadas aos fluidos servem para classificá-los como Newtoniano ou não Newtoniano.

Para modelagem de fluidos Newtonianos, o tensor simétrico das tensões é linearmente proporcional ao tensor taxa de deformação, que é dado por

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D}, \quad (2.4)$$

sendo η_s a viscosidade dinâmica do fluido e \mathbf{D} o tensor de deformação, dado por

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T). \quad (2.5)$$

No caso bidimensional, pode ser escrito da forma a seguir

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Agora, calculando o tensor total dada na equação (2.3) para um fluido Newtoniano, tem-se

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}) = \nabla \cdot (2\eta_s \mathbf{D} - p\mathbf{I}) = 2\eta_s \nabla \cdot \mathbf{D} - \nabla \cdot p\mathbf{I} = \\ &= 2\eta_s \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \\ &= \eta_s \left[2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix} = \\ &= \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Tem-se que, em coordenadas cartesianas bidimensionais, as equações (2.1) e (2.2) para um fluido Newtoniano, tornam-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.7)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad (2.8)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]. \quad (2.9)$$

Os fluidos que não apresentam linearidade entre a taxa de deformação e a tensão de cisalhamento, ou seja, o valor da viscosidade dinâmica não é constante, variando de acordo com a taxa de deformação aplicada, são chamados de fluidos não-Newtonianos. Para cada fluido Newtoniano, são propostos modelos de acordo com o comportamento reológico do fluido. Eles podem ser divididos por exemplo, em: fluidos Tixotrópicos, fluidos pseudoplásticos, fluidos viscoelásticos, entre outros.

Para a modelagem do fluido viscoelásticos, o tensor é definido como:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T}, \quad (2.10)$$

onde η_s é a viscosidade do solvente Newtoniano, \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação definido pela equação (2.5), \mathbf{T} é o tensor extra-tensão (simétrico) que representa a contribuição não Newtoniana (polimérica), que é dado por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix}.$$

O divergente do tensor tensão total (2.4) para um fluido não Newtoniano é dado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}) = \nabla \cdot (2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T} - p\mathbf{I}) = 2\eta_s \nabla \cdot \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{T} - \nabla \cdot p\mathbf{I} = \\ &= 2\eta_s \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \eta_s \left[2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \\ &+ \left[\frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \right] - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix} = \\ &\left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} \right] - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \right]. \end{aligned}$$

Desse modo, as equações de conservação (2.1) e (2.2) em coordenadas cartesianas, para um fluido não Newtoniano, se tornar, respectivamente

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.12)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}, \quad (2.13)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}. \quad (2.14)$$

2.1.2 Modelo LPTT

O modelo reológico utilizado neste trabalho é o PTT (Phan-Thien-Tanner), cuja equação constitutiva é escrita da seguinte forma:

$$f(tr(\mathbf{T}))\mathbf{T} + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2\eta_p \mathbf{D}. \quad (2.15)$$

Onde,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (2.16)$$

é a taxa do tensor de deformação, λ é o tempo de relaxação do fluido, η é a viscosidade contribuída pelo polímero, e $f(tr(\mathbf{T}))$ é considerada função coeficiente de tensão.

Neste trabalho considera-se o modelo PTT na forma linear, ou seja, a função f será dada por:

$$f(tr(\mathbf{T})) = 1 + \frac{\lambda \varepsilon}{\eta_p} tr(\mathbf{T}) \quad (2.17)$$

A notação $f(tr(\mathbf{T}))\mathbf{T}$ é usada para representar o traço do tensor extra tensão \mathbf{T} e o símbolo $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$ representa a derivada convectada dada por:

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} - \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{T}, \quad (2.18)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{T}(\nabla \mathbf{u} - \xi \mathbf{D}) - (\nabla \mathbf{u} - \xi \mathbf{D})^T \cdot \mathbf{T}, \quad (2.19)$$

onde $\frac{D\mathbf{T}}{Dt}$ é a derivada material de \mathbf{T} , dada por $\frac{D\mathbf{T}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T})$, a diferença $\mathbf{L} = \nabla \mathbf{u} - \xi \mathbf{D}$ é chamada de gradiente efetivo de velocidade, ε e ξ são parâmetros positivos do modelo, sendo a constante ε um parâmetro relacionado ao comportamento elongacional do modelo, enquanto ξ afeta o comportamento de cisalhamento.

Reescrevendo a equação (2.15), obtém-se:

$$\begin{aligned} f(tr(\mathbf{T}))\mathbf{T} + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} &= 2\eta_p \mathbf{D}, \\ f(tr(\mathbf{T}))\mathbf{T} + \lambda \left[\frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} - \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{T} \right] &= 2\eta_p \mathbf{D}, \\ f(tr(\mathbf{T}))\mathbf{T} + \lambda \left[\frac{D\mathbf{T}}{Dt} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}) - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u} - \xi \mathbf{D}) - (\nabla \mathbf{u} - \xi \mathbf{D})^T \cdot \mathbf{T} \right] &= 2\eta_p \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Após manipulações algébricas são obtidas as equações dos tensores não-Newtonianos para o modelo LPTT

$$f(\text{tr}(T))T^{xx} + \lambda \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx}(1 - \xi) \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ \left. - 2T^{xy} \left(1 - \frac{1}{2}\xi \right) \frac{\partial u}{\partial y} + T^{xy} \xi \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2\eta_p \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.21)$$

$$f(\text{tr}(T))T^{xy} + \lambda \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \left(1 - \frac{1}{2}\xi \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \\ \left. + T^{xx} \frac{\xi}{2} \frac{\partial u}{\partial y} - T^{yy} \left(1 - \frac{1}{2}\xi \right) \frac{\partial u}{\partial y} + T^{yy} \frac{\xi}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \eta_p \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.22)$$

$$f(\text{tr}(T))T^{yy} + \lambda \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{yy}(1 - \xi) \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \\ \left. - 2T^{xy} \left(1 - \frac{1}{2}\xi \right) \frac{\partial v}{\partial x} + T^{xy} \xi \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2\eta_p \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.23)$$

2.2 Adimensionalização

Em mecânica dos fluidos computacional, para tratar um problema é usual utilizar grandezas dimensionais agrupadas em parâmetros adimensionais que caracterizam o escoamento, a fim de possibilitar o conhecimento das características de um escoamento em dimensões físicas reais. Diante esse tratamento surgem então constantes adimensionais conhecidas na literatura, como por exemplo o número de Reynolds, número de Weissenberg e a constante β , entre outros.

Os parâmetros adotados são: o comprimento L , velocidade U e densidade ρ . As variáveis adimensionais (acrescidas do sobrescrito *) são dadas abaixo:

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad \mathbf{t}^* = \frac{tU}{L}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho U^2}, \quad \mathbf{T}^* = \frac{\mathbf{T}}{\rho U^2}. \quad (2.24)$$

Ao aplicar as mudanças de variáveis (2.24) surgem os números adimensionais.

- Número de Reynolds (Re) : Representa a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas do escoamento e é definido por:

$$Re = \frac{\rho UL}{\eta_0} \quad (2.25)$$

onde η_0 é a viscosidade dinâmica total do fluido, dada por $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$, sendo que η_s é a viscosidade do solvente e η_p a viscosidade do polímero.

- Número de Weissenberg (Wi) : Para um fluido viscoelástico, é a razão entre uma escala de tempo característica do fluido e uma escala de tempo de escoamento:

$$Wi = \frac{\lambda U}{L}. \quad (2.26)$$

• Constante β : A constante $\beta \in (0, 1)$ é uma quantidade que controla a contribuição do solvente Newtoniano, definida por:

$$\beta = \frac{\eta_s}{\eta_0}. \quad (2.27)$$

A seguir são apresentadas as equações de conservação para o modelo viscoelástico LPTT na forma bidimensional cartesiana e adimensionais (sem o sobrescrito *).

Substituindo as variáveis adimensionais e agrupando os adimensionais Re, Wi obtém-se na forma adimensional as equações da continuidade, da quantidade de movimento e constitutiva LPTT:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^T) = -\nabla p + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (2.29)$$

$$f(tr(T))\mathbf{T} + Wi \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \mathbf{D} \quad (2.30)$$

onde $f(tr(T))$ linear é dado por

$$f(tr(T)) = 1 + \varepsilon \frac{ReWi}{(1-\beta)} tr(T). \quad (2.31)$$

Assim, substituindo as transformações (2.24) nas equações de conservação (2.12)-(2.14) e (2.21)-(2.23) obtém as formas bidimensional cartesiana e adimensional

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}, \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} f(tr(T))T^{xx} + Wi \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx}(1-\xi) \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ \left. - 2T^{xy} \left(1 - \frac{1}{2}\xi \right) \frac{\partial u}{\partial y} + T^{xy}\xi \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} f(tr(T))T^{xy} + Wi \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \left(1 - \frac{1}{2}\xi \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\ \left. + T^{xx} \frac{\xi}{2} \frac{\partial u}{\partial y} - T^{yy} \left(1 - \frac{1}{2}\xi \right) \frac{\partial u}{\partial y} + T^{yy} \frac{\xi}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned}
f(\text{tr}(T))T^{yy} + Wi \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{yy}(1-\xi) \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \\
\left. - 2T^{xy} \left(1 - \frac{1}{2}\xi \right) \frac{\partial v}{\partial x} + T^{xy}\xi \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

As equações (2.32)-(2.37) modelam um escoamento incompressível, isotérmico e bidimensional, para um fluido viscoelástico utilizando o modelo LPTT.

É importante destacar que, se nas equações (2.32)-(2.37) o parâmetro ξ for igual a zero e $f(\text{tr}(T))$ for igual a um, o modelo LPTT se reduz ao modelo de fluido viscoelástico do tipo Oldroyd-B.

2.3 Teoria de Estabilidade Linear

Nesta seção é apresentada a análise de estabilidade linear para escoamentos de fluidos viscoelásticos, utilizando a equação constitutiva LPTT.

A análise da estabilidade dos escoamentos deste trabalho é feita utilizando a Teoria de Estabilidade Linear para escoamentos de fluidos viscoelásticos, juntamente com a equação constitutiva LPTT para o modelo viscoelástico.

Para análise utilizando a Teoria de Estabilidade Linear neste trabalho, considerou-se o escoamento base invariante na direção x , ou seja:

$$u = U(y), \quad v = 0 \quad p = P(x,y) \quad T = T(y) \tag{2.38}$$

Considera-se que o escoamento instantâneo pode ser decomposto por um escoamento base e um escoamento perturbado, as variáveis dependentes são decompostas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
u(x,y,t) &= U(y) + \tilde{u}(x,y,t), \\
v(x,y,t) &= \tilde{v}(x,y,t), \\
p(x,y,t) &= P(y) + \tilde{p}(x,y,t), \\
T(x,y,t) &= T(y) + \tilde{T}(x,y,t).
\end{aligned}$$

Substituindo as composições das variáveis acima nas equações de conservação de continuidade e de quantidade de movimento obtém-se as equações abaixo:

Continuidade:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0.$$

Equação de quantidade de movimento na direção x :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y}.$$

Equação de quantidade de movimento na direção y :

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y}.$$

Para equação do tensor não-Newtonianos T^{xx} , tem-se que:

$$f(\text{tr}(T)) = \left[1 + \underbrace{\varepsilon \frac{ReWi}{(1-\beta)}}_{\text{constante } (C)} (T^{xx} + T^{yy}) \right] T^{xx} = [1 + C(T^{xx} + \tilde{T}^{xx}) + (T^{yy} + \tilde{T}^{yy})] (T^{xx} + \tilde{T}^{xx}) = \\ = \tilde{T}^{xx} + C(2T^{xx}\tilde{T}^{xx} + T^{xx}\tilde{T}^{yy} + T^{yy}\tilde{T}^{xx}). \quad (2.39)$$

$$\tilde{T}^{xx} + C(2T^{xx}\tilde{T}^{xx} + T^{xx}\tilde{T}^{yy} + T^{yy}\tilde{T}^{xx}) + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial T^{xx}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial y} + \xi \tilde{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial y} - \right. \\ \left. - 2T^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \xi T^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + T^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + 2\xi T^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \xi T^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \left[\tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \xi \tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2\tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + 2\xi \tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \xi \tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right] \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \quad (2.40)$$

Para equação do tensor não-Newtonianos T^{xy} , tem-se que:

$$\tilde{T}^{xy} + C(T^{xy}\tilde{T}^{xx} + T^{xx}\tilde{T}^{xy} + T^{yy}\tilde{T}^{xy} + T^{xy}\tilde{T}^{yy}) + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} - \right. \\ \left. - \frac{\xi}{2} \tilde{T}^{xx} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\xi}{2} \tilde{T}^{yy} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\xi}{2} T^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - T^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\xi}{2} T^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + T^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + T^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \tilde{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial x} - T^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\xi}{2} T^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\xi}{2} T^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \left[\tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\xi}{2} \tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\xi}{2} \tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \right. \right. \\ \left. \left. - \tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\xi}{2} \tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\xi}{2} \tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right] \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right], \quad (2.41)$$

Para equação do tensor não-Newtonianos T^{yy} , tem-se que:

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{yy} + C(2T^{yy}\tilde{T}^{yy} + T^{yy}\tilde{T}^{xx} + T^{xx}\tilde{T}^{yy}) + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} + \xi \tilde{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial y} + \xi T^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \right. \\ \left. - T^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + 2\xi T^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + T^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \xi T^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \left[\tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \xi \tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\xi \tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \xi \tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\xi}{2} \tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right] \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Os termos entre colchetes são termos não lineares. Schlichting (SCHLICHTING, 1979) afirma que as perturbações devem ser pequenas no sentido de que os termos não lineares possam ser desprezados, quando comparados com os termos lineares. Assim, uma vez que as amplitudes das perturbações são pequenas, esses termos não lineares podem ser desprezados. Desta forma o sistema simplificado dá-se por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{xx} + C(2T^{xx}\tilde{T}^{xx} + T^{xx}\tilde{T}^{yy} + T^{yy}\tilde{T}^{xx}) + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial T^{xx}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial y} + \right. \\ \left. + \xi \tilde{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \xi T^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + T^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + 2\xi T^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \xi T^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) = \\ = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{xy} + C(T^{xy}\tilde{T}^{xx} + T^{xx}\tilde{T}^{xy} + T^{yy}\tilde{T}^{xy} + T^{xy}\tilde{T}^{yy}) + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} - \right. \\ \left. - \frac{\xi}{2} \tilde{T}^{xx} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\xi}{2} \tilde{T}^{yy} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\xi}{2} T^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - T^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\xi}{2} T^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + T^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + T^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \tilde{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial x} - \right. \\ \left. - T^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\xi}{2} T^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\xi}{2} T^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{yy} + C(2T^{yy}\tilde{T}^{yy} + T^{yy}\tilde{T}^{xx} + T^{xx}\tilde{T}^{yy}) + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} + \xi \tilde{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial y} + \right. \\ \left. + \xi T^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - T^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + 2\xi T^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + T^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \xi T^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

As condições de contorno adotadas para o problema de Poiseuille não Newtoniano são:

$$\tilde{u} = \tilde{v} = 0 \quad \text{para } y = -1 \quad \text{e } y = 1 \quad (2.46)$$

Onde estas condições de contorno correspondem à condição de não escorregamento na parede (no-slip) e ao decaimento das perturbações longe da parede. As equações resultantes são lineares e os coeficientes das equações não dependem de t e x , as soluções podem ser buscadas através do método de separação de variáveis, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y, t) &= \bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}, \\ \tilde{v}(x, y, t) &= \bar{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}, \\ \tilde{p}(x, y, t) &= \bar{p}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}, \\ \tilde{T}(x, y, t) &= \bar{T}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}, \end{aligned}$$

sendo $i = \sqrt{-1}$, α o número de onda na direção x e u, v, p e T as amplitudes das perturbações. Sendo ω a frequência com que as perturbações, de comprimento de onda $\lambda = 2\pi/\alpha$ e velocidade de onda $c = \frac{\omega}{\alpha}$, propagam-se. Considera-se ainda \bar{u}, \bar{v} e \bar{p} como amplitudes das perturbações. Supondo-se que essas equações compõem uma solução para o sistema simplificado, os complexos conjugados também compõem uma possível solução para o sistema em questão. Para uma solução pertencente ao conjunto dos números reais, toma-se como solução uma combinação linear das soluções. Substituindo essas combinações lineares nas equações obtidas para as perturbações, tem-se:

Continuidade:

$$i\alpha\bar{u} + \bar{v}' = 0, \quad (2.47)$$

Para a equação de quantidade de movimento na direção x , obtém-se

$$Re(i\alpha U - i\omega)\bar{u} - \beta(\bar{u}'' - \alpha^2\bar{u}) + Re\bar{v}U' = i\alpha(\bar{T}^{xx} - \bar{p}) + \bar{T}'^{xy}. \quad (2.48)$$

Para a equação de quantidade de movimento na direção y , tem-se:

$$Re(i\alpha U - i\omega)\bar{v} - \beta(\bar{v}'' - \alpha^2\bar{v}) = i\alpha\bar{T}^{xy} + \bar{T}'^{yy} - \bar{p}. \quad (2.49)$$

Para os tensores T^{xx} , T^{xy} e T^{yy} , tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{xx} + C(2T^{xx}\bar{T}^{xx} + T^{xx}\bar{T}^{yy} + T^{yy}\bar{T}^{xx}) + Wi \left(-i\omega\bar{T}^{xx} + i\alpha U\bar{T}^{xx} + \bar{v}T^{xx} - 2\bar{T}^{xy}\frac{\partial U}{\partial y} + \xi\bar{T}^{xy}\frac{\partial U}{\partial y} - \right. \\ \left. - 2T^{xy}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \xi T^{xy}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + T^{xx}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - i\alpha\bar{u}T^{xx} + 2i\alpha\xi\bar{u}T^{xx} + i\alpha\xi\bar{v}T^{xy} \right) = \frac{2i\alpha(1-\beta)}{Re\bar{u}}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{xy} + C(T^{xy}\bar{T}^{xx} + T^{xx}\bar{T}^{xy} + T^{yy}\bar{T}^{xy} + T^{xy}\bar{T}^{yy}) + Wi \left(-i\omega\bar{T}^{xy} + i\alpha U\bar{T}^{xy} + \bar{v}T^{xy} + \frac{\xi}{2}\bar{T}^{xx}\frac{\partial U}{\partial y} - \right. \\ \left. - \frac{\xi}{2}\bar{T}^{yy}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\xi}{2}\bar{T}^{yy}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\xi}{2}T^{xx}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - T^{yy}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\xi}{2}T^{yy}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + T^{xy}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + i\alpha\bar{u}T^{xy} - i\alpha\bar{v}T^{xx} + \right. \\ \left. + i\alpha\frac{\xi}{2}\bar{v}T^{xx} + i\alpha\frac{\xi}{2}\bar{v}T^{yy} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re(\frac{\partial u}{\partial y + i\alpha\bar{v}})}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{yy} + C(2T^{yy}\bar{T}^{yy} + T^{yy}\bar{T}^{xx} + T^{xx}\bar{T}^{yy}) + Wi \left(-i\omega\bar{T}^{yy} + i\alpha U\bar{T}^{yy} + \bar{v}T^{yy} + \xi\bar{T}^{xy}\frac{\partial U}{\partial y} + \xi T^{xy}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \right. \\ \left. - T^{yy}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + 2\xi T^{yy}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + i\alpha T^{yy}\bar{u} - 2i\bar{v}\alpha T^{xy} + i\alpha\xi\bar{v}T^{xy} \right) = \frac{2i\alpha(1-\beta)}{Re\bar{v}}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

Com este conjunto de equações e condições de contorno apropriadas pode-se obter resultados de análise de estabilidade linear.

2.4 Escoamento Base

O escoamento base é conhecido como laminar ou totalmente desenvolvido. Para calcular o escoamento no canal, primeiramente assume-se que todas as variáveis são dependentes apenas do eixo y , com exceção para a pressão cujo gradiente é constante da direção x . O domínio na direção y é compreendido entre $[-1,1]$.

Pela equação da continuidade, a componente v do vetor velocidade é nula. De fato,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v(x, y, t) \equiv \text{constante}, \quad (2.53)$$

como $v_{parede} = 0$ então $v(x, y, t) \equiv \text{constante}$.

Foi obtida uma solução explícita usando a solução numérica vista nas equações (2.47)-(2.52) para o escoamento base para o fluido LPTT, utilizando a ferramenta Mathematica. Em breve será publicado um artigo explicitando essa solução.

MÉTODO NUMÉRICO

Neste capítulo, será apresentado o método numérico utilizado para a solução das equações governantes, a classificação das instabilidades através da abordagem LST e a realização da verificação do código LST.

3.1 Método Numérico

Utilizou-se um código LST espacial 2D para análise de estabilidade espacial de fluxo de canal para o modelo de viscoelasticidade LPTT. Se tratando de uma análise espacial, procura-se α para análise de estabilidade de uma perturbação dado ω (frequência angular real). Através da solução dos autovalores deste sistema é obtido um espectro de autovalores onde é feita uma busca pelo autovalor mais instável, que corresponde ao conjunto de dados estável ou instável dependendo do valor da parte imaginária do alpha. Inicialmente faz-se uma limpeza eliminando todos os modos espúrios e em seguida procura-se pelo α imaginário de menor valor dentro do espectro obtido. O sistema para o modelo viscoelástico LPTT partindo das equações (2.47)-(2.52) é da seguinte forma:

Na matriz abaixo, Id é a matriz identidade $m \times n$ modos de chebyshev. Zero representa uma matriz $m \times n$ tamanho de modos de chebyshev. $1i$ é a unidade imaginária de um número complexo que pode ser escrito dessa forma no matlab ou no octave. É uma matriz de blocos e cada bloco tem o número de chebyshev ao quadrado.

$$varT_{xx_u} = -2 \cdot Wi \cdot T_{xyb} \cdot Dy + Wi \cdot xi \cdot T_{xyb} \cdot Dy;$$

$$varT_{xx_v} = +Wi \cdot dT_{xxb} \cdot Id;$$

$$varT_{xx_{T_{xy}}} = -2 \cdot Wi \cdot dUdy \cdot Id + Wi \cdot xi \cdot dUdy \cdot Id;$$

$$varT_{xx_{T_{yy}}} = +cte \cdot T_{xxb} \cdot Id;$$

$$varT_{xx_{\alpha_u}} = +21i \cdot Wi \cdot T_{xxb} \cdot Id - 2 \cdot 1i \cdot Wi \cdot xi \cdot T_{xxb} \cdot Id + 2 \cdot 1i \cdot (1 - \beta) / Re \cdot Id;$$

$$varT_{xx_{\alpha_v}} = -1i \cdot Wi \cdot xi \cdot T_{xyb} \cdot Id;$$

$$\text{var}T_{xx\alpha T_{xx}} = -1i \cdot Wi \cdot U \cdot Id;$$

$$\text{var}T_{xy_u} = +1/2 \cdot Wi \cdot xi \cdot T_{xxb} \cdot Dy - Wi \cdot T_{yyb} \cdot Dy + 0.5 \cdot Wi \cdot xi \cdot T_{yyb} \cdot Dy - (1 - \beta)/Re \cdot Dy;$$

$$\text{var}T_{xy_v} = +Wi \cdot dT_{xybdy} \cdot Id + Wi \cdot xi \cdot T_{xyb} \cdot Dy;$$

$$\text{var}T_{xyT_{xx}} = +cte \cdot T_{xyb} \cdot Id + 0.5 \cdot Wi \cdot xi \cdot dUdy \cdot Id;$$

$$\text{var}T_{xyT_{yy}} = +cte \cdot T_{xyb} \cdot Id - Wi \cdot dUdy \cdot Id + 0.5 \cdot Wi \cdot xi \cdot dUdy \cdot Id;$$

$$\text{var}T_{xy\alpha_u} = -1i \cdot Wi \cdot xi \cdot T_{xyb} \cdot Id;$$

$$\text{var}T_{xy\alpha_v} = +1i \cdot Wi \cdot T_{xxb} \cdot Id - 0.5 \cdot Wi \cdot xi \cdot T_{xxb} \cdot Id - 0.5 \cdot 1i \cdot Wi \cdot xi \cdot T_{yyb} \cdot Id + 1i \cdot (1 - \beta)/Re \cdot Id;$$

$$\text{var}T_{xy\alpha T_{xy}} = -1i \cdot Wi \cdot U \cdot Id;$$

$$\text{var}T_{yy_u} = +Wi \cdot xi \cdot T_{xyb} \cdot Dy;$$

$$\text{var}T_{yy_v} = +Wi \cdot dT_{yybdy} \cdot Id - 2Wi \cdot T_{yyb} \cdot Dy - 2 \cdot Wi \cdot xi \cdot T_{yyb} \cdot Dy + 2 \cdot (1 - \beta)/Re \cdot Dy;$$

$$\text{var}T_{yyT_{xx}} = +cte \cdot T_{yyb} \cdot Id;$$

$$\text{var}T_{yyT_{xy}} = +Wi \cdot xi \cdot dUdy \cdot Id;$$

$$\text{var}T_{yy\alpha_v} = +2 \cdot 1i \cdot Wi \cdot T_{xyb} \cdot Id - 1i \cdot Wi \cdot xi \cdot T_{xyb} \cdot Id;$$

$$\text{var}T_{yy\alpha T_{yy}} = -1i \cdot Wi \cdot U \cdot Id;$$

$$\text{var} = -1i \cdot \omega \cdot Id - (\beta/Re) \cdot Dy^2;$$

$$\text{var}T_{xxT_{xx}} = +Id + 2 \cdot cte \cdot T_{xxb} \cdot Id + cte \cdot T_{yyb} \cdot Id - 1i \cdot \omega \cdot Wi \cdot Id;$$

$$\text{var}T_{xyT_{xy}} = +Id + cte \cdot T_{xxb} \cdot Id + cte \cdot T_{yyb} \cdot Id - 1i \cdot \omega \cdot Wi \cdot Id;$$

$$\text{var}T_{yyT_{yy}} = +Id + cte \cdot T_{xxb} \cdot Id + 2 \cdot cte \cdot T_{yyb} \cdot Id - 1i \cdot \omega \cdot Wi \cdot Id;$$

Onde a matriz L é dada por:

$$\begin{bmatrix} \text{zero} & \text{zero} & Dy & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} \\ \text{var} & \text{zero} & dUdy & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & -Dy & \text{zero} \\ \text{zero} & Id & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} \\ \text{zero} & \text{zero} & \text{var} & \text{zero} & Dy & \text{zero} & \text{zero} & -Dy \\ \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & Id & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} \\ \text{var}T_{xx_u} & \text{zero} & \text{var}T_{xx_v} & \text{zero} & \text{zero} & \text{var}T_{xxT_{xx}} & \text{var}T_{xxT_{xy}} & \text{var}T_{xxT_{yy}} \\ \text{var}T_{xy_u} & \text{zero} & \text{var}T_{xy_v} & \text{zero} & \text{zero} & \text{var}T_{xyT_{xx}} & \text{var}T_{xyT_{xy}} & \text{var}T_{xyT_{yy}} \\ \text{var}T_{yy_u} & \text{zero} & \text{var}T_{yy_v} & \text{zero} & \text{zero} & \text{var}T_{yyT_{xx}} & \text{var}T_{yyT_{xy}} & \text{var}T_{yyT_{yy}} \end{bmatrix}$$

e a matriz F é dada por:

$$\begin{bmatrix} -1i*Id & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} \\ -1i*U & -(\beta/Re)*Id & \text{zero} & \text{zero} & -1i*Id & 1i*Id & \text{zero} & \text{zero} \\ Id & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} \\ \text{zero} & \text{zero} & -1i*U & -(\beta/Re)*Id & \text{zero} & \text{zero} & 1i*Id & \text{zero} \\ \text{zero} & \text{zero} & Id & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} \\ \text{var}T_{xx\alpha_u} & \text{zero} & \text{var}T_{xx\alpha_v} & \text{zero} & \text{zero} & \text{var}T_{xx\alpha T_{xx}} & \text{zero} & \text{zero} \\ \text{var}T_{xy\alpha_u} & \text{zero} & \text{var}T_{xy\alpha_v} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{var}T_{xy\alpha T_{xy}} & \text{zero} \\ \text{zero} & \text{zero} & \text{var}T_{yy\alpha_v} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{zero} & \text{var}T_{yy\alpha T_{yy}} \end{bmatrix}$$

O sistema foi construído da seguinte forma:

$$L * [u; \alpha * u; v; \alpha * v; p; Txx; Txy; Tyy]^T = \alpha * F * [u; \alpha * u; v; \alpha * v; p; Txx; Txy; Tyy]^T,$$

onde todas as variáveis que acompanham o vetor u são colocadas na primeira coluna da matriz L , até chegar na última coluna onde estão todas as variáveis que acompanha o tensor Tyy . O mesmo raciocínio é feito para a matriz F .

Nas figuras 1 e 2 estão os espectros de autovalores. Na figura 2 é feita uma busca pelo autovalor mais instável.

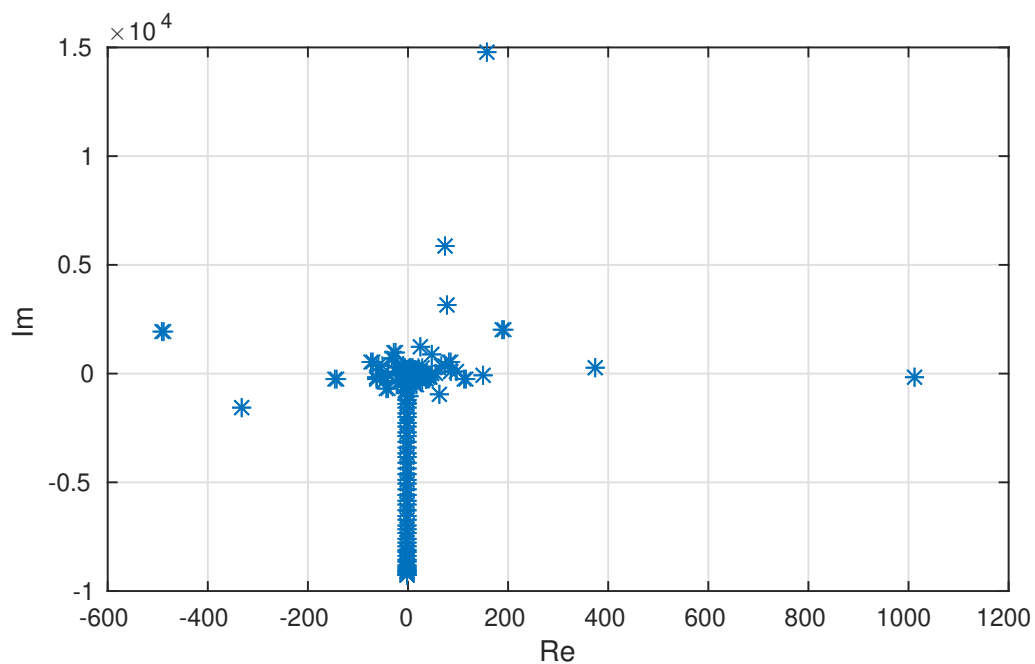


Figura 1 – Espectro de autovalores.

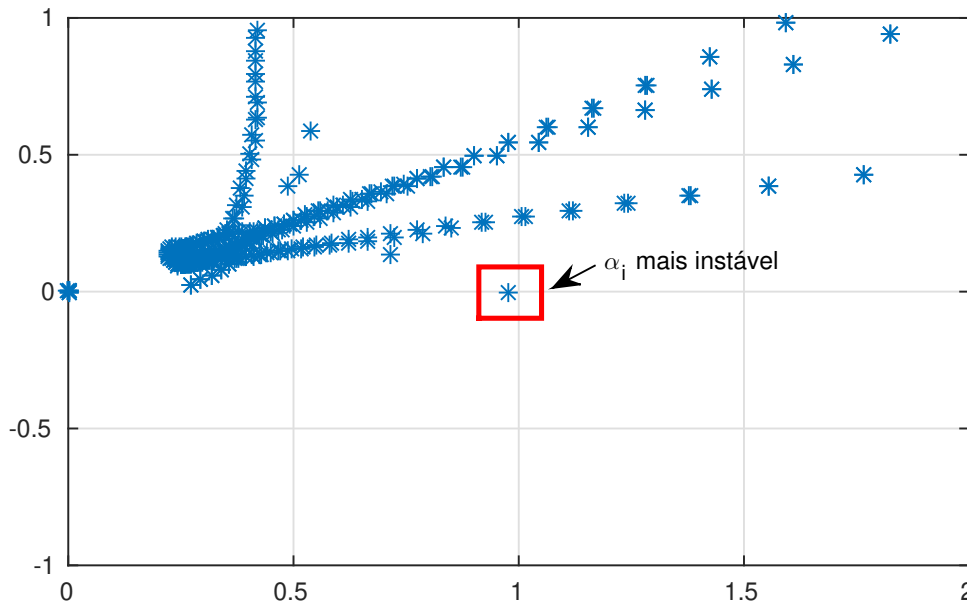


Figura 2 – Espectro de autovalores.

3.2 Análise de Instabilidades

O sistema:

$$\tilde{u}(x, y, t) = \bar{u}(y) e^{(-\alpha_i x + \omega_i t)} e^{i(\alpha_r x + \omega_r t)}, \quad (3.1)$$

representa índices r e i onde são componentes real e imaginária, respectivamente. Nota-se que, quando ω é um número real e α é um número complexo, a amplitude da perturbação cresce na direção do escoamento médio em x . Neste caso, a formulação em questão é chamada de formulação espacial. Os componentes ω_r , α_r e α_i representam, respectivamente, a frequência, o número de onda e a taxa de amplificação espacial. Por outro lado, na formulação denominada temporal, α é tomado como um número real e ω como sendo um número complexo. Neste caso, a amplitude da perturbação cresce diretamente em função do tempo. A taxa de amplificação, para esta formulação, é dada por ω_i . Dessa forma, a Tabela 1 apresenta a classificação das instabilidades, utilizando as análises temporal e espacial.

Tabela 1 – Classificação de instabilidades.

Tipo de análise	taxa de amplificação	amplitude	classificação
análise temporal	$\omega_i < 0$	decrece	estável
	$\omega_i = 0$	constante	neutro
	$\omega_i > 0$	crece	instável
análise espacial	$\alpha < 0$	crece	instável
	$\alpha = 0$	constante	neutro
	$\alpha > 0$	decrece	estável

No presente trabalho optou-se por realizar somente a análise de estabilidade espacial do

escoamento. A análise temporal também pode ser realizada, alterando-se as matrizes L e F de modo que o α passe a ser real e o ω passe a ser complexo.

3.3 Verificação

Nesta seção é realizada a verificação do código LST implementado para o problema de Poiseuille plano, bidimensional, incompressível e isotérmico, utilizando o modelo de fluido viscoelástico LPTT. A verificação foi realizada comparando o código desenvolvido neste trabalho considerando $\xi = 0$ e $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$ (zero fica instável e o código não converge para solução) na equação 2.15 que representa o modelo LPTT com o que já havia sido desenvolvido para o modelo Oldroyd-B (GERVAZONI, 2016). Vale ressaltar que, quando $\xi = 0$ e $\varepsilon = 0$ na equação 2.15, a equação constitutiva obtida é do modelo Oldroyd-B. Enfatiza-se, ainda que, o código LST implementado com o modelo Oldroyd-B foi verificado com resultados da literatura de (ZHANG *et al.*, 2013).

Para a verificação do código LST utilizando o modelo LPTT foram analisados resultados para diferentes valores da constante β e do número de Weissenberg (Wi), e comparados com o código do modelo Oldroyd-B. Nessas simulações numéricas foram considerados doze casos, de forma que para cada $\beta = 0, 7, 0, 8$ e $0, 9$, foram consideradas variações de $Wi = 1, 2, 5$ e 10 . Os valores de Reynolds simulados são $Re = 4500$ a $Re = 8000$. As curvas neutras de estabilidade que foram geradas para esses casos utilizando os dois diferentes códigos estão apresentadas nas Figuras 3, 4 e 5.

As Figuras 3, 4 e 5 apresentam os resultados da comparação entre o modelo Oldroyd-B e o modelo LPTT considerando $\xi = 0$ e $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$ no código desenvolvido. Nas figuras abaixo, foi fixado β e foram simulados diferentes valores de Wi . Pode-se observar que o comportamento do escoamento não é monotônico com a variação Wi . Nota-se ainda, que para o modelo Oldroyd-B (considerando $\xi = 0$ e $\varepsilon = 0$), para $Wi = 2$ o escoamento apresenta uma região de instabilidade maior que os demais valores de Wi . Observa-se também que quando aumenta o valor de β as curvas neutras de instabilidade vão se aproximando umas das outras. Este comportamento é mais nítido para valores de $Wi = 1$ e $Wi = 5$ nas figuras 4 e 5.

A partir das curvas neutras das Figuras 3, 4 e 5, observa-se uma concordância próxima entre os modelos viscoelásticos Oldroyd-B e LPTT. Sendo assim, a verificação realizada é um indicativo de que o código implementado, está apto a simular e analisar a estabilidade de escoamentos bidimensionais com o modelo LPTT.

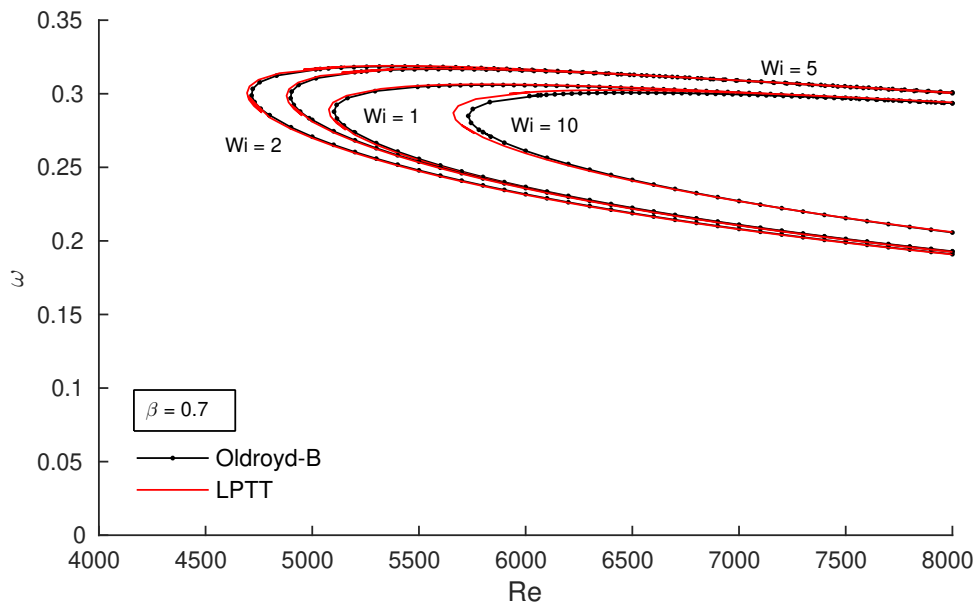


Figura 3 – Comparação de curvas neutras para os modelos Oldroyd-B (\circ) curva preta e LPTT (-) curva vermelha para os valores de $Wi = 1, 2, 5$ e 10 e fixado $\beta = 0.7$.

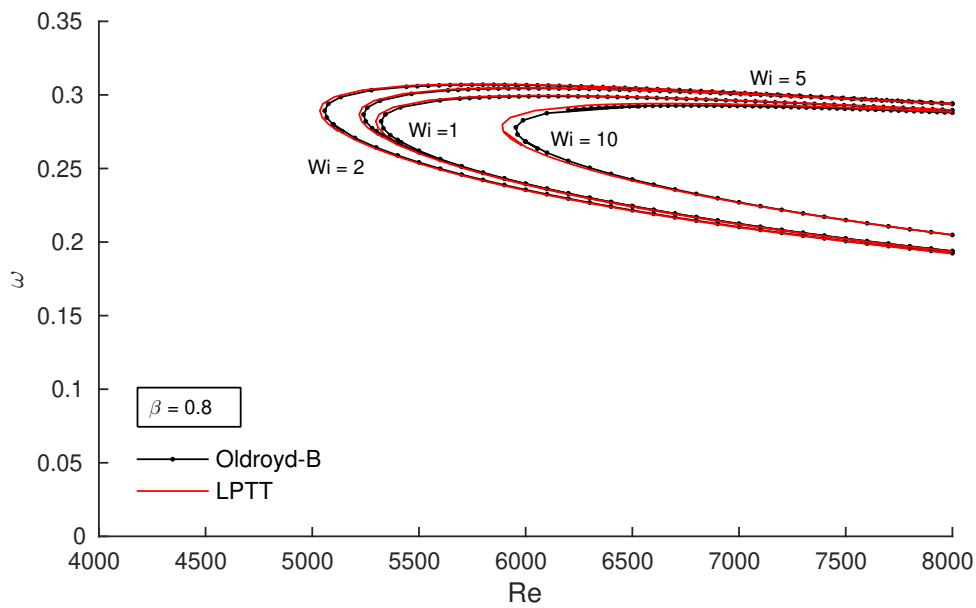


Figura 4 – Comparação de curvas neutras para os modelos Oldroyd-B (\circ) curva preta e LPTT (-) curva vermelha para os valores de $Wi = 1, 2, 5$ e 10 e fixado $\beta = 0.8$.

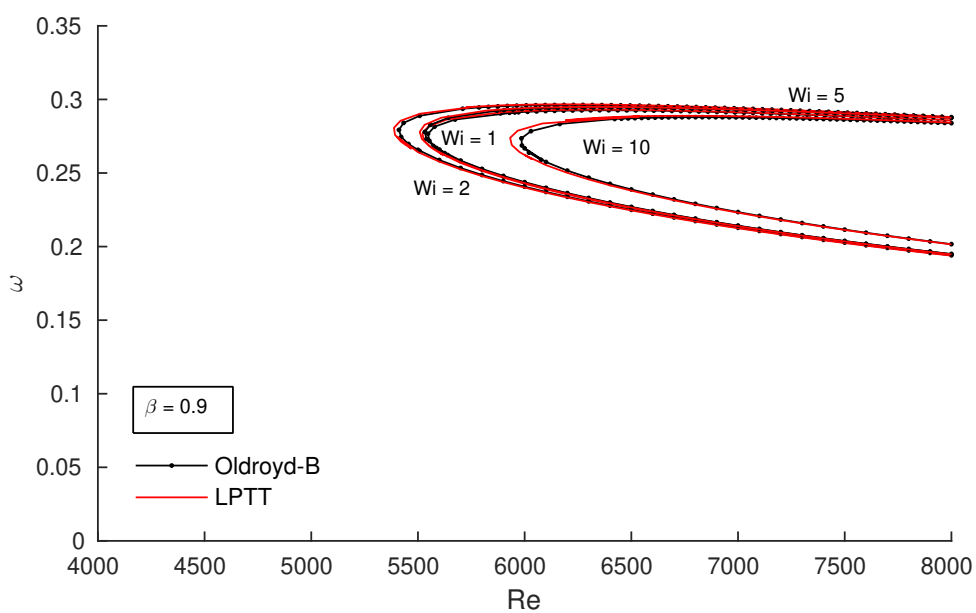


Figura 5 – Comparação de curvas neutras para os modelos Oldroyd-B (\circ) curva preta e LPTT (-) curva vermelha para os valores de $Wi = 1, 2, 5$ e 10 e fixado $\beta = 0.9$.

RESULTADOS DE ANÁLISE DE ESTABILIDADE UTILIZANDO LST

Neste capítulo, são apresentados os resultados para a análise da estabilidade de um escoamento bidimensional para um fluido viscoelástico do tipo linear Phan Thien Tanner (PTT) utilizando a Teoria de Estabilidade Linear. Nesta análise considera-se ω real e α complexo, conforme Tab. 1. Com o objetivo de avaliar as curvas neutras de estabilidade, diferentes simulações numéricas foram realizadas variando-se os parâmetros adimensionais para o escoamento do fluido LPTT e comparando com o escoamento de fluido Newtoniano. A análise espacial foi realizada através da elaboração de curvas de estabilidade para cada conjunto de parâmetros. Os parâmetros que variaram neste estudo foram o número de Reynolds (Re), o número de Weissenberg (Wi) e as constantes β , ξ e ε .

Para cada simulação é possível determinar um diagrama de estabilidade neutra, ou seja, onde os valores de $\alpha_i = 0$. Os diagramas de estabilidade neutra são apresentados com o número de Reynolds no eixo x e a frequência da perturbação ω no eixo y . Estes diagramas apresentam um formato característico de banana. As taxas de amplificação maiores do que zero ($\alpha_i > 0$), ou seja, região estável, estão do lado de fora da banana, e as taxas de amplificação menores do que zero ($\alpha_i < 0$), região instável, estão no interior da banana. Simulações numéricas foram realizadas para encontrar os valores de α_i para diversos valores de Reynolds e frequência ω , possibilitando a geração do diagrama de estabilidade para cada conjunto de variáveis.

Para verificar a influência do número de Weissenberg (Wi) na estabilidade do escoamento de Poiseuille do fluido LPTT foram realizadas simulações numéricas considerando os parâmetros $\beta = 0.2$, $\xi = 0$ e $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100 , para três diferentes valores de ε em cada figura: $\varepsilon = 0.5, 0.75$ e 1 . Utilizando o código LST desenvolvido para o modelo LPTT, foram obtidas os diagramas de estabilidade neutras para cada caso e estão apresentadas nas Figuras 6, 7 e 8. As curvas neutras do modelo LPTT foram comparadas com a curva neutra do fluido Newtoniano. Nota-se nas figuras 6, 7 e 8 que as curvas neutras de estabilidade do modelo LPTT conforme

o valor de Wi aumenta, há um deslocamento da curva neutra para a esquerda, indicando que o escoamento fica instável para valores do número de Reynolds menores. Este deslocamento é bem menos pronunciado quando o número de Weissenberg (Wi) tem valores de 50 e 100. Observa-se também que conforme o valor de ε aumenta em cada figura, há um pequeno deslocamento para a esquerda, ficando instável para valores do número de Reynolds menores. Este deslocamento também é menos pronunciado quando o número de Weissenberg (Wi) tem valores de 50 e 100. Vale destacar que neste caso o escoamento de fluido Newtoniano é mais estável que os escoamentos do fluido LPTT. O número crítico de Reynolds para $Wi = 100$ está entre 1000 e 2000.

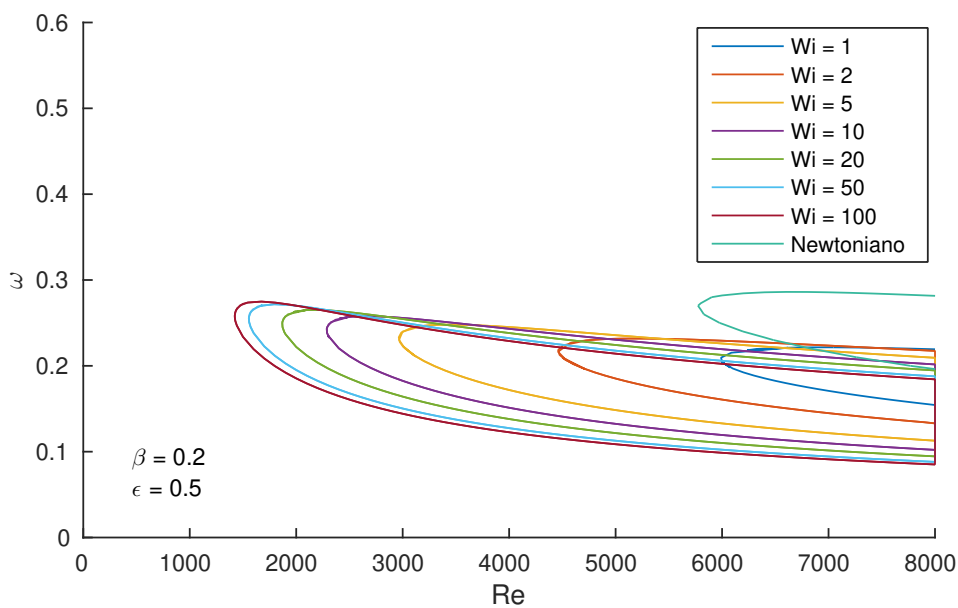


Figura 6 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.2$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.5$ e $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100.

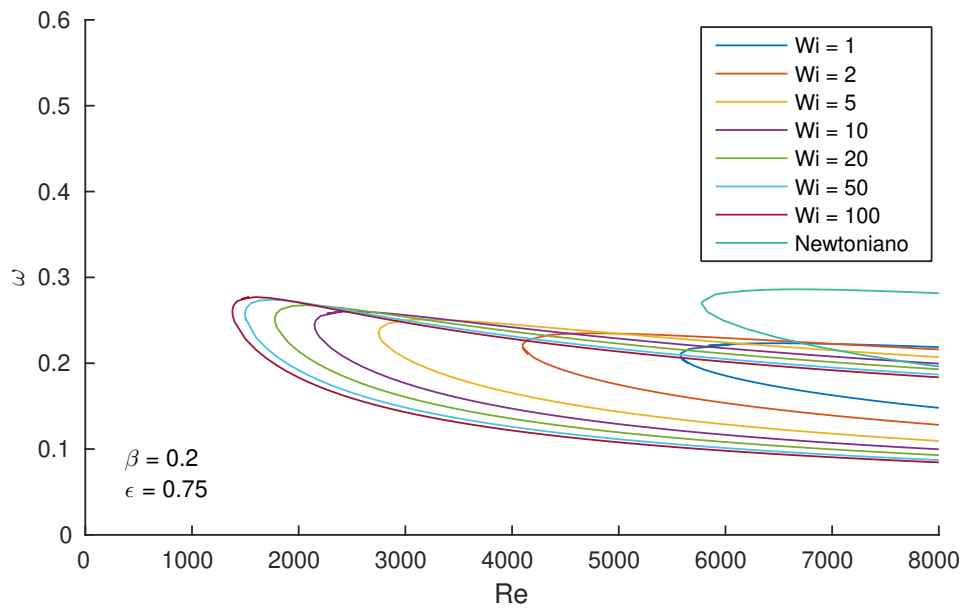


Figura 7 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.2$, $\xi = 0$, $\epsilon = 0.75$ e $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100.

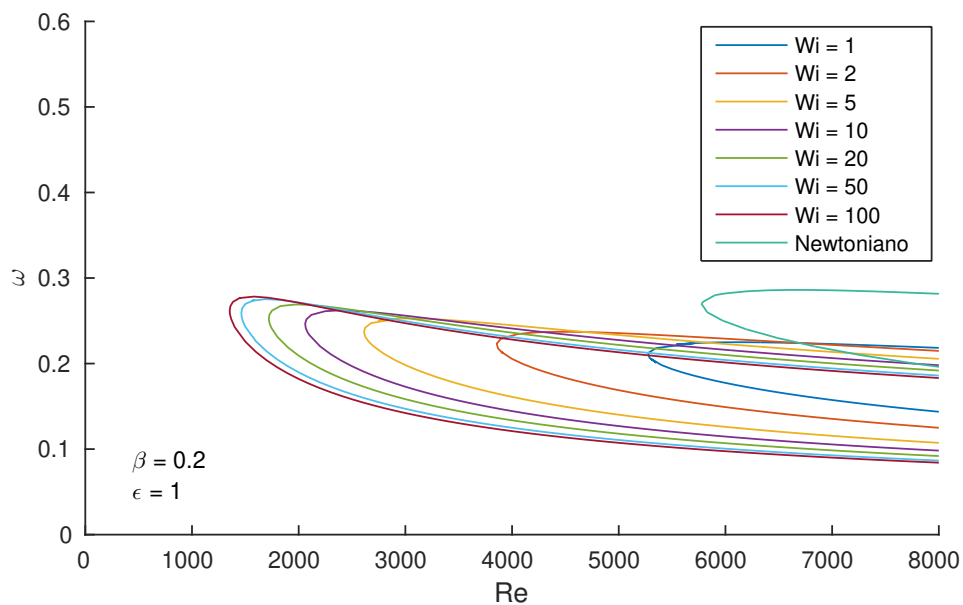


Figura 8 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.2$, $\xi = 0$, $\epsilon = 1$ e $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100.

Considerando os parâmetros $\beta = 0.4$, $\xi = 0$, $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100, para três diferentes valores de ϵ em cada figura: $\epsilon = 0,5, 0,75$ e 1. Analisando as figuras 9, 10 e 11, observa-se que as curvas neutras de estabilidade do modelo LPTT se deslocam para a esquerda conforme o valor de Wi aumenta, indicando que o escoamento fica instável para valores do número de Reynolds menores. Este deslocamento é bem menos pronunciado quando o número de Weissenberg (Wi) tem valores de 50 e 100. Conforme o valor de ϵ aumenta em cada figura, há

um pequeno deslocamento para a esquerda, ficando instável para valores do número de Reynolds menores. Este deslocamento também é menos pronunciado quando o número de Weissenberg (Wi) tem valores de 50 e 100. Nota-se também que quando o valor de β aumenta de $\beta = 0.2$ para $\beta = 0.4$, há um deslocamento das curvas neutras para a direita, indicando que o escoamento fica instável para valores de Reynolds maiores. Comparando com o escoamento de fluido Newtoniano, neste caso é mais estável que os escoamentos do fluido LPTT. O número crítico de Reynolds para $\beta = 0.4$ e $Wi = 100$, está entre 2000 e 3000.

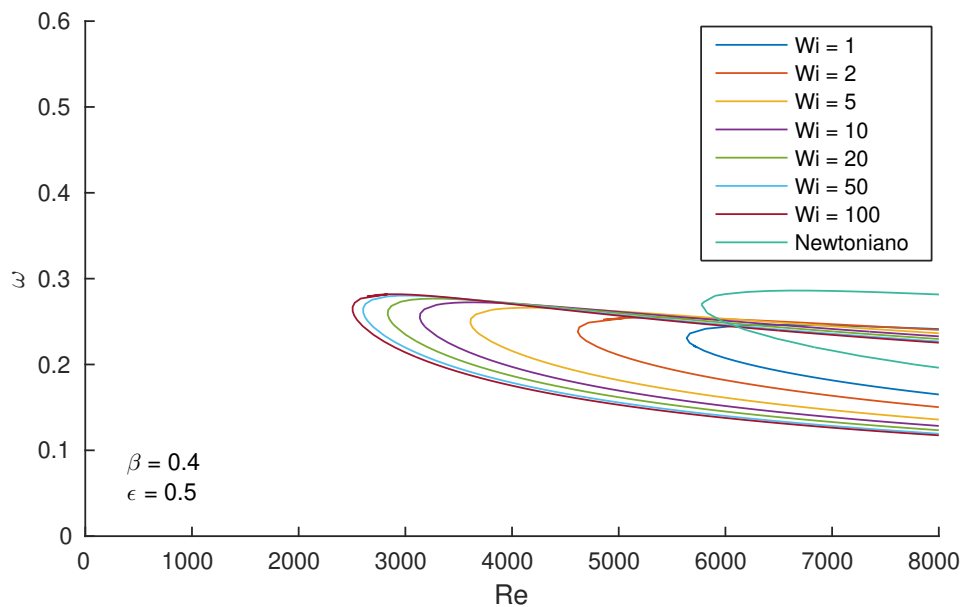


Figura 9 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.4$, $\xi = 0$, $\epsilon = 0.5$ e $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100.

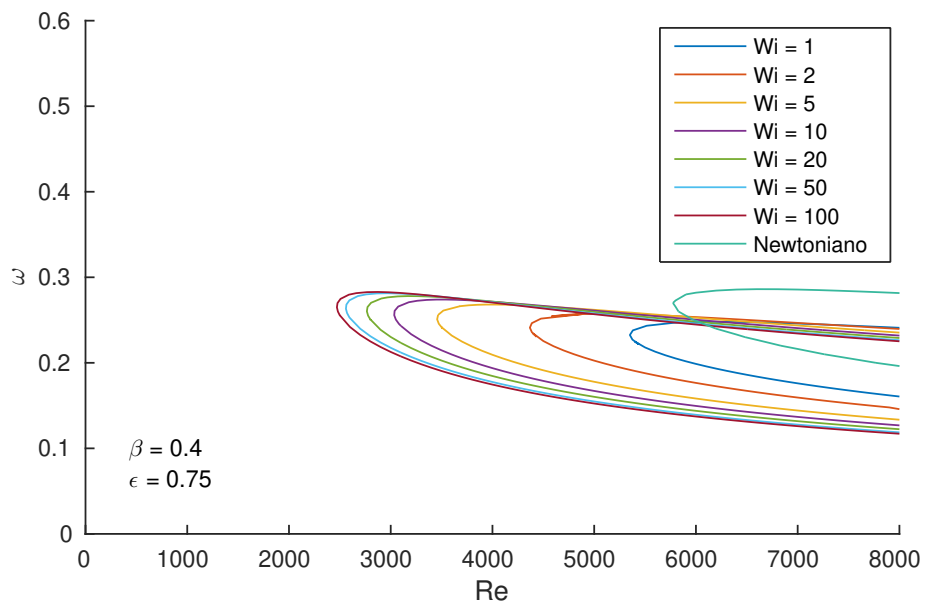


Figura 10 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.4$, $\xi = 0$, $\epsilon = 0.75$ e $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100 .

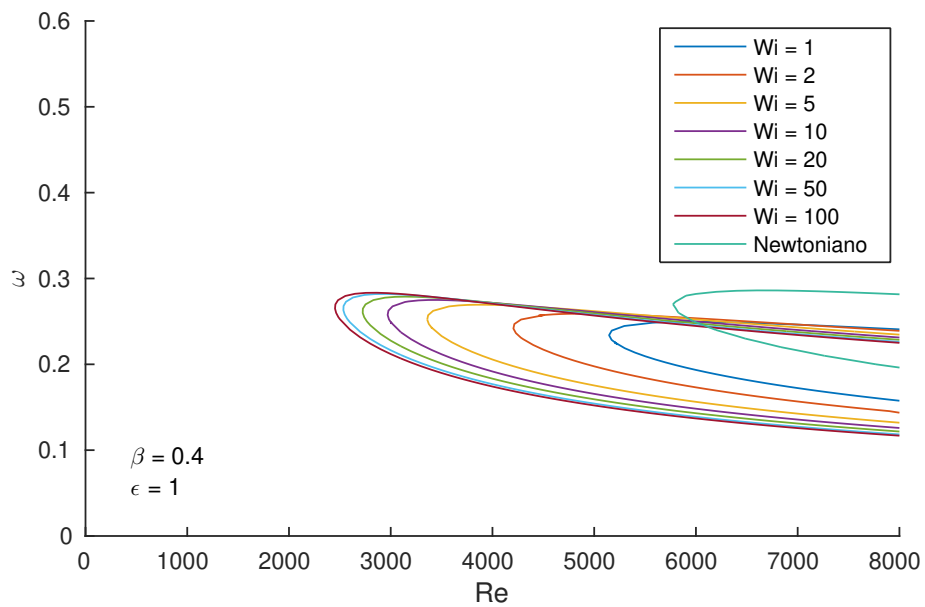


Figura 11 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.4$, $\xi = 0$, $\epsilon = 1$ e $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100 .

Aumentando o valor de β para $\beta = 0.6$, $\xi = 0$, $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100 , para três diferentes valores de ε em cada figura: $\varepsilon = 0.5, 0.75$ e 1 . Analisando as figuras 12, 13 e 14, observa-se que as curvas neutras de estabilidade do modelo LPTT conforme o valor de Wi aumenta, há um deslocamento da curva neutra para a esquerda, demonstrando que o escoamento fica instável para valores do número de Reynolds menores. Este deslocamento é bem menos pronunciado quando o número de Weissenberg (Wi) tem valores de 50 e 100 . Conforme o valor de ε aumenta em cada figura, há um pequeno deslocamento para a esquerda, ficando instável para valores do número de Reynolds menores. Este deslocamento também é menos pronunciado quando o número de Weissenberg (Wi) tem valores de 50 e 100 . Aumentando o valor de β para $\beta = 0.6$, há um deslocamento da curva neutra para a direita, indicando que o escoamento fica instável para valores de Reynolds maiores. Vale destacar que aumentando o valor de β os escoamentos do fluido LPTT se aproximam do escoamento de fluido Newtoniano. O número crítico de Reynolds para $Wi = 100$ está entre 3000 e 4000 .

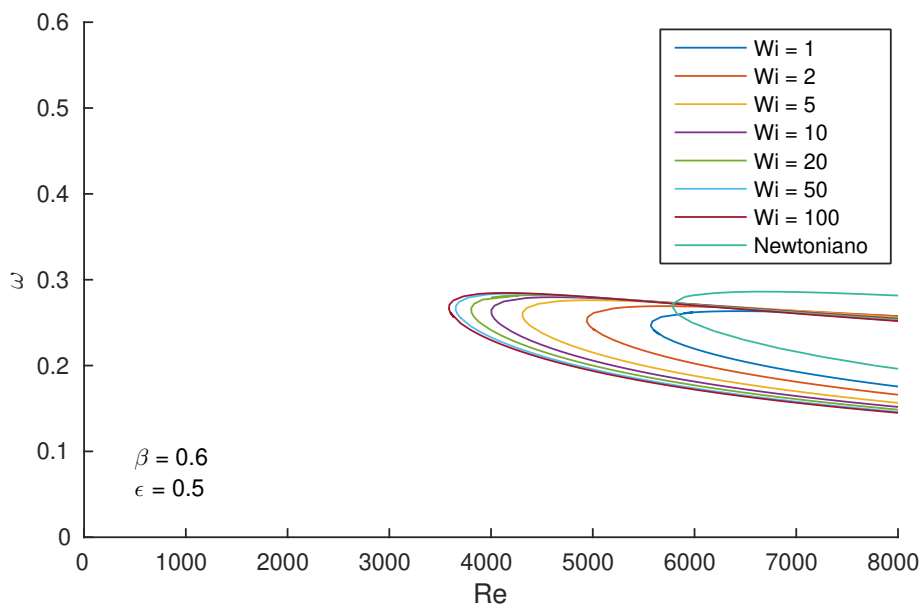


Figura 12 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.6$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.5$ e $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100 .

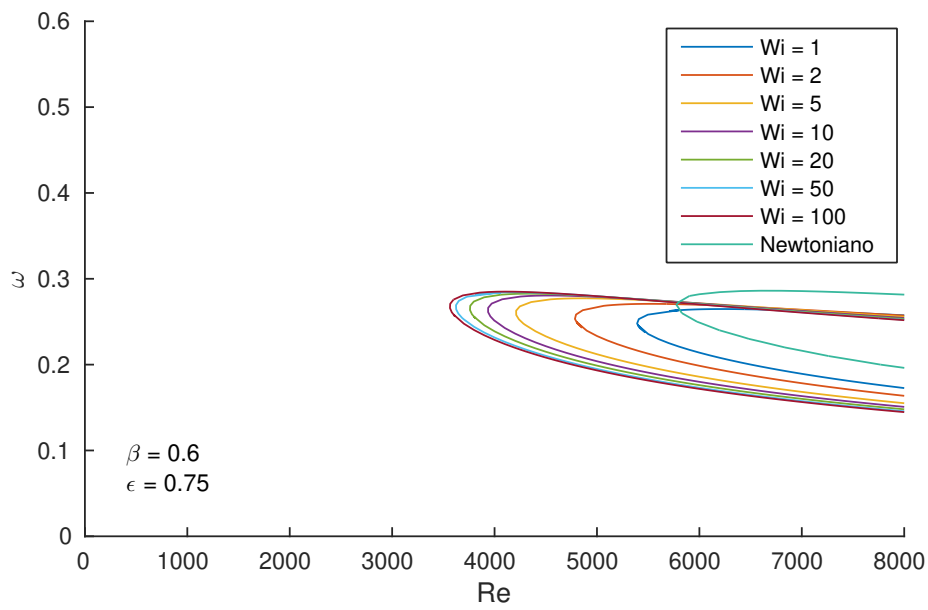


Figura 13 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.6$, $\xi = 0$, $\epsilon = 0.75$ e $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100.

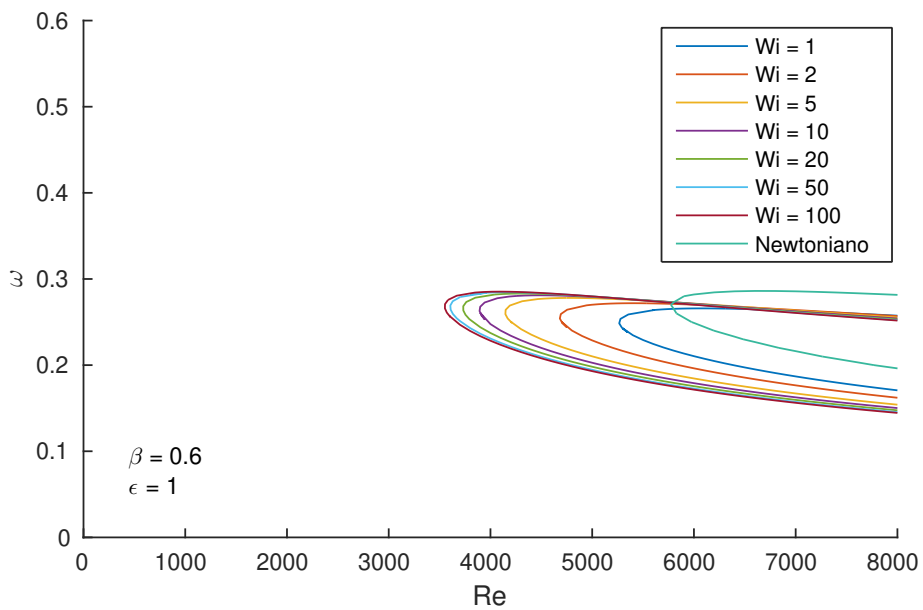


Figura 14 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.6$, $\xi = 0$, $\epsilon = 1$ e $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100.

Os resultados para $\beta = 0.8$, $\xi = 0$, $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100 , para três diferentes valores de $\varepsilon = 0.5, 0.75$ e 1 são apresentados nas figuras 15, 16 e 17. Observa-se que as curvas neutras de estabilidade do modelo LPTT conforme o valor de Wi aumenta, há um deslocamento da curva neutra para a esquerda, demonstrando que o escoamento fica instável para valores do número de Reynolds menores. Este deslocamento é bem menos pronunciado quando o número de Weissenberg (Wi) tem valores de 50 e 100. Conforme o valor de ε aumenta em cada figura, há um pequeno deslocamento para a esquerda, ficando instável para valores do número de Reynolds menores. Este deslocamento é menos pronunciado quando o número de β aumenta. Aumentando o valor de β para $\beta = 0.8$, há um deslocamento da curva neutra para a direita, indicando que o escoamento fica instável para valores de Reynolds maiores. Nestas figuras o escoamento do fluido Newtoniano também é mais estável que os escoamentos do fluido LPTT. Os números críticos de Reynolds para $Wi = 50$ e 100 estão entre 4000 e 5000.

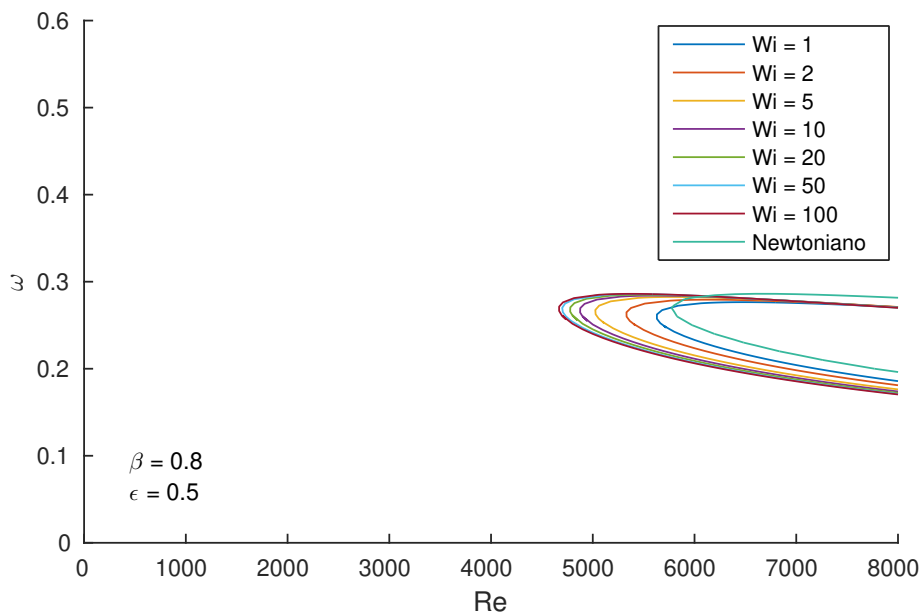


Figura 15 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.8$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.5$ e $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100 .

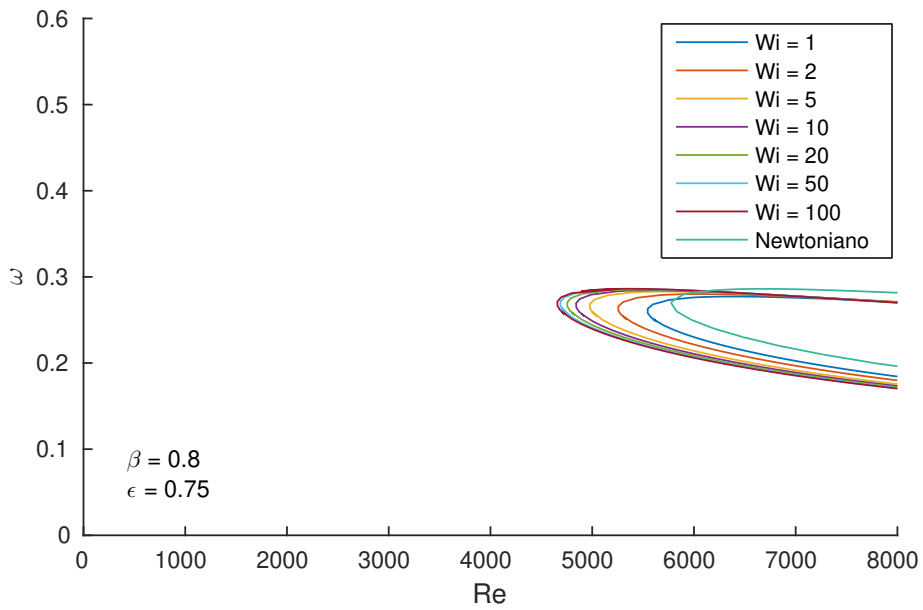


Figura 16 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.8$, $\xi = 0$, $\epsilon = 0.75$ e $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100.

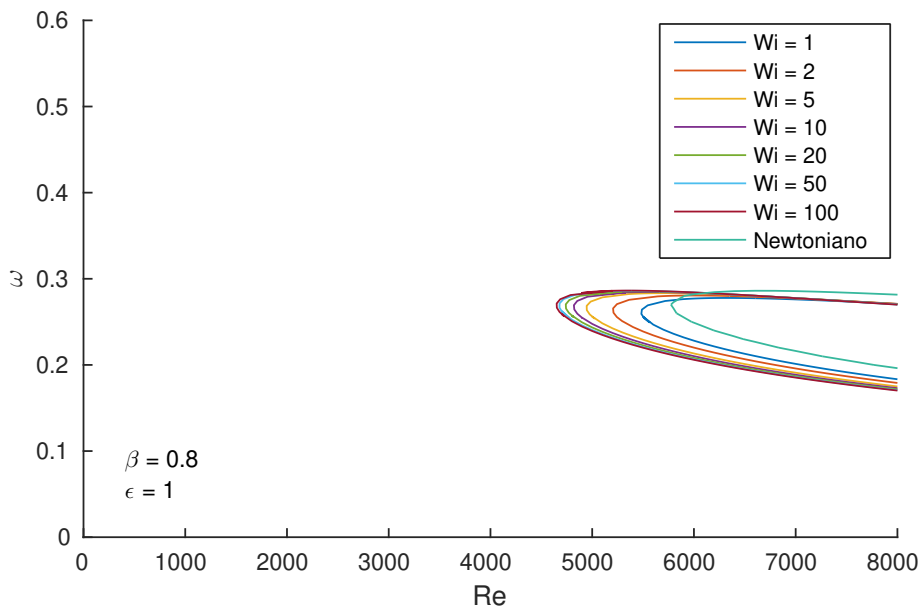


Figura 17 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.8$, $\xi = 0$, $\epsilon = 1$ e $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100.

Aumentando o valor da constante β , para $\beta = 0.9$ deixando o fluido mais próximo do fluido Newtoniano, tem-se $\xi = 0$, $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100 , para três diferentes valores de ϵ em cada figura: $\epsilon = 0.5, 0.75$ e 1 . Nota-se nas figuras 18, 19 e 20 que as curvas neutras de estabilidade do modelo LPTT conforme o valor de Wi aumenta, há um deslocamento da curva neutra para a esquerda, apontando que o escoamento fica instável para valores do número de Reynolds menores. Este deslocamento é bem menos pronunciado quando o número de Weissenberg (Wi) tem valores de 50 e 100. Conforme o valor de ϵ aumenta em cada figura, há um pequeno deslocamento para a esquerda, ficando instável para valores do número de Reynolds menores. Este deslocamento se torna menos pronunciado quando o número de β aumenta. Aumentando o valor de β para $\beta = 0.9$, há um deslocamento da curva neutra para a direita, indicando que o escoamento fica instável para valores de Reynolds maiores. Os números críticos de Reynolds para os números de Weissenberg $Wi = 50$ e 100 estão entre 5000 e 6000.

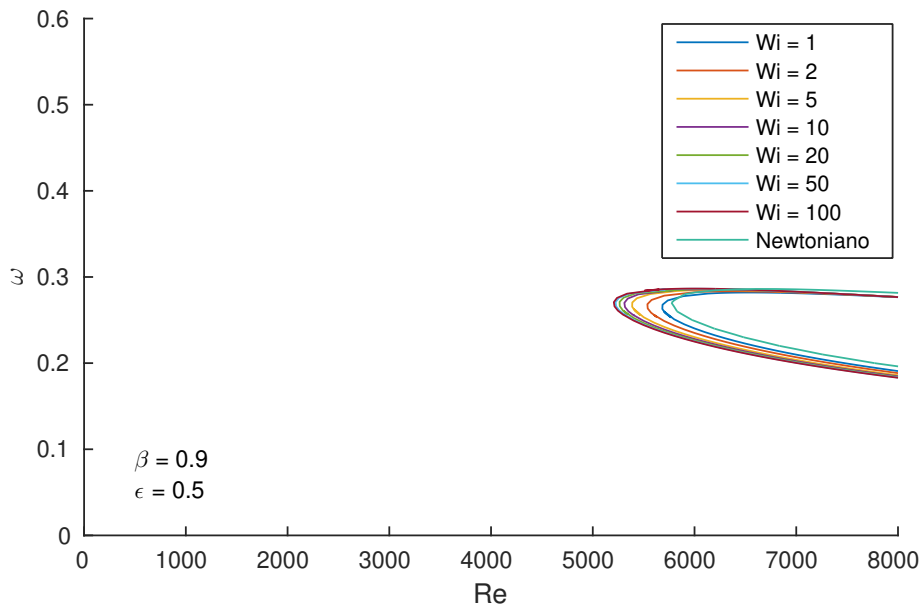


Figura 18 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.9$, $\xi = 0$, $\epsilon = 0.5$ e $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100 .

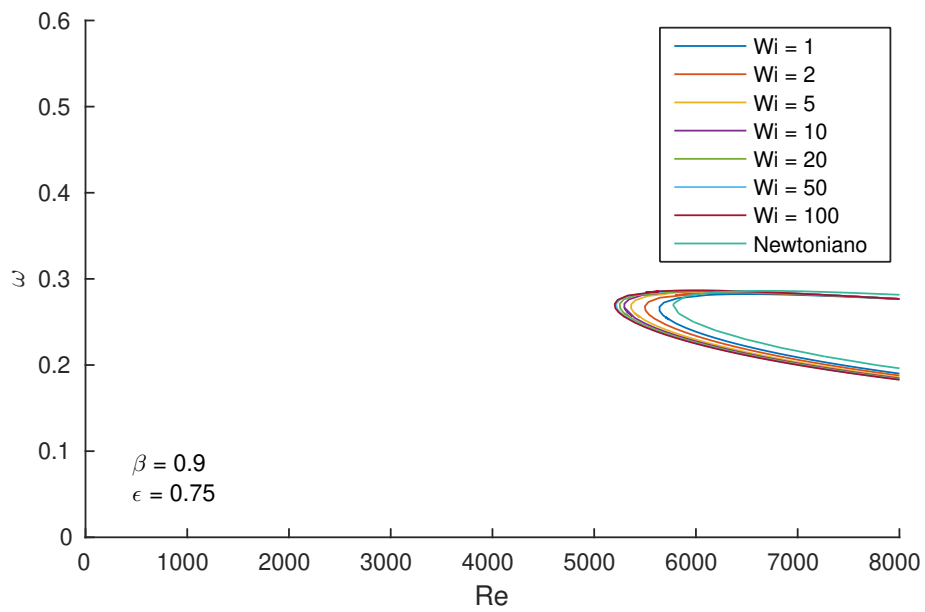


Figura 19 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.9$, $\xi = 0$, $\epsilon = 0.75$ e $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100.

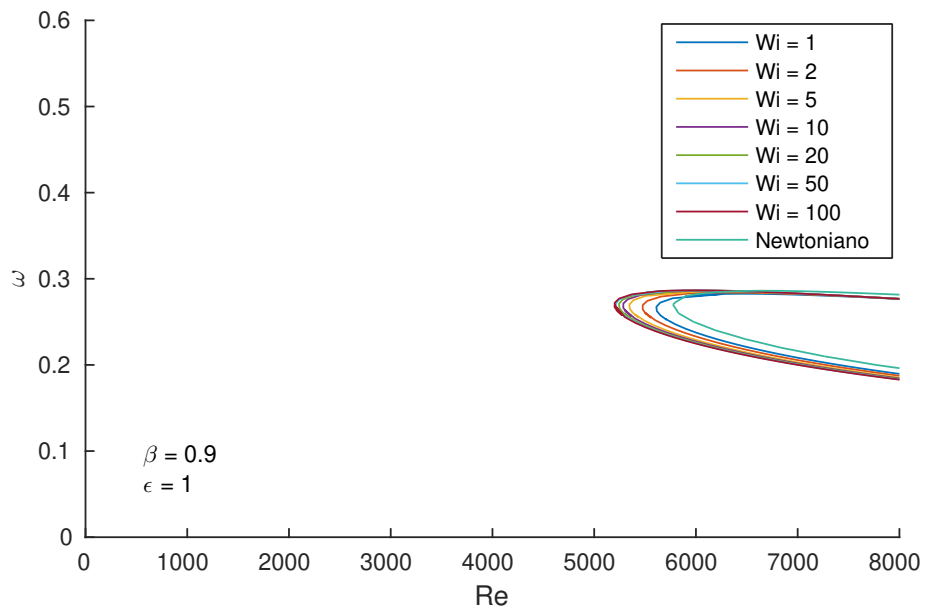


Figura 20 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.9$, $\xi = 0$, $\epsilon = 1$ e $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100.

Para verificar a influência da constante β na estabilidade do escoamento de Poiseuille do fluido LPTT foram realizadas simulações numéricas considerando fixos os parâmetros em cada figura: $Wi = 1, 20$ e 100 , $\xi = 0$ e $\varepsilon = 1$, para oito diferentes valores de β : $\beta = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ e 0.9 . Utilizando o código LST desenvolvido para o modelo LPTT, foram obtidas as curvas neutras de estabilidade para cada caso e estão apresentadas nas Figuras 21, 22 e 23. Analisando as Figuras 21, 22 e 23 observa-se que as curvas neutras de estabilidade do modelo LPTT assim que o valor de β aumenta, o valor de ω cresce. Na Figura 21, nota-se que para valores próximos de $\beta = 0.2$ e para valores próximos de $\beta = 0.9$ há um deslocamento da curva neutra para direita. Para os valores de β entre $\beta = 0.8$ e $\beta = 0.4$, o afastamento da curva neutra tende para a esquerda, indicando que o escoamento fica instável para valores do número de Reynolds menores. O número crítico de Reynolds está próximo de 5000. Nas figuras 22 e 23 observa-se que as curvas neutras de estabilidade, à medida que o valor de β diminui, a curva neutra de estabilidade se afasta para a esquerda, onde é notável que o escoamento fica instável para valores do número de Reynolds menores. Nota-se que quando o valor de Weissenberg (Wi) aumenta, o deslocamento da curva neutra para a esquerda é maior, onde aparentemente o escoamento fica instável para valores de Reynolds menores. Destaca-se que ao aumentar o valor de β as curvas neutras de estabilidade do modelo LPTT vão se aproximando da curva neutra do modelo Newtoniano. O número crítico de Reynolds está entre 1000 e 2000.

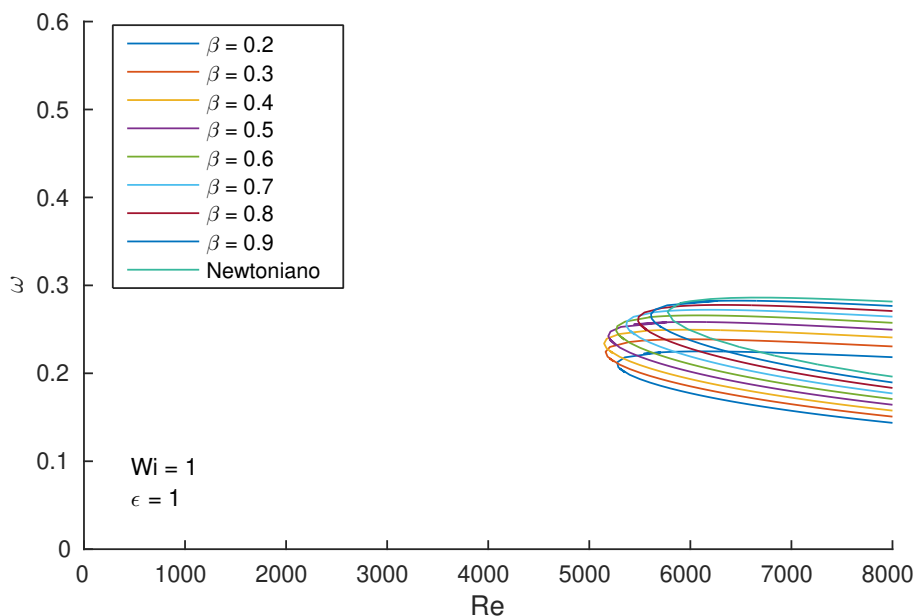


Figura 21 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ e 0.9 , $\xi = 0$, $\varepsilon = 1$ e $Wi = 1$.

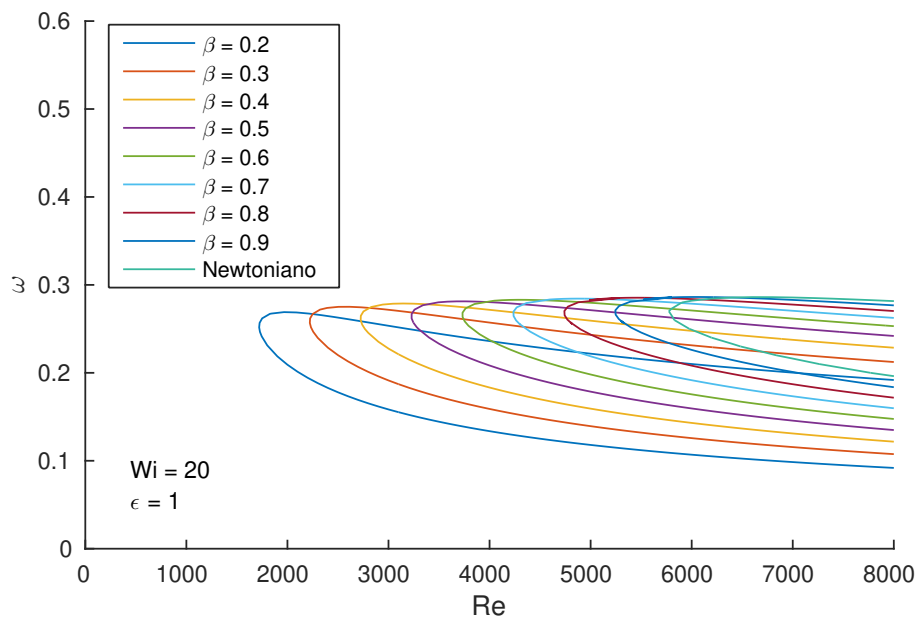


Figura 22 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ e 0.9 , $\xi = 0$, $\epsilon = 1$ e $Wi = 20$.

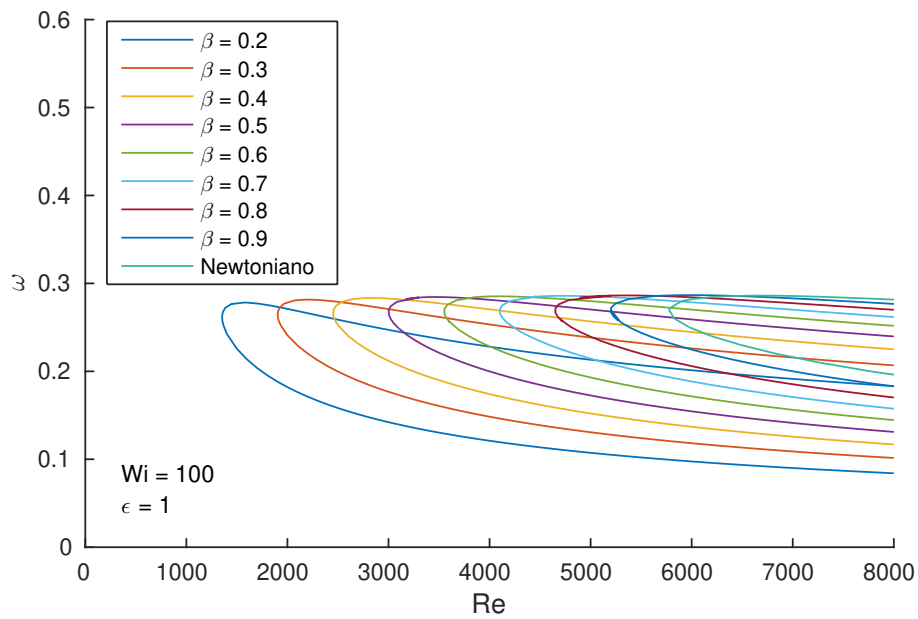


Figura 23 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ e 0.9 , $\xi = 0$, $\epsilon = 1$ e $Wi = 100$.

Para analisar a influência da constante ε na estabilidade do escoamento de Poiseuille do fluido LPTT, realizou-se simulações numéricas considerando fixos os parâmetros $\beta = 0.2$ e 0.9 , $Wi = 2$ e 100 e $\xi = 0$, para três diferentes valores de ε : $\varepsilon = 0.50$, 0.75 , e 1 . Usando o código LST desenvolvido para o modelo LPTT, foram obtidas as curvas neutras de estabilidade para cada caso e estão apresentadas nas Figuras 24, 25, 26 e 27. Analisando as Figuras 24, 25, 26 e 27, as curvas neutras de estabilidade do modelo LPTT na medida que o valor de ε aumenta, há um deslocamento da curva neutra para a esquerda. Este afastamento é mais notável na Figura 24, mostrando que o escoamento fica instável para valores do número de Reynolds menores. Nas figuras 24 e 25, observa-se que quando o número de Weissenberg (Wi) aumenta, há um afastamento da curva neutra para a esquerda, porém, o espaçamento entre as curvas neutras é menos pronunciado. Observa-se que nas figuras 26 e 27 conforme o valor de β aumenta para $\beta = 0.9$, o deslocamento da curva neutra de estabilidade tende para a direita e conforme o número de Weissenberg (Wi) aumenta, há um pequeno afastamento para a esquerda tornando o escoamento mais instável para valores do número de Reynolds menores. Nestas figuras o escoamento do fluido Newtoniano é mais estável que os escoamentos do fluido LPTT. Para $\beta = 0.9$ as curvas neutras de estabilidade do modelo LPTT se aproximam da curva neutra de estabilidade do modelo Newtoniano. O número crítico de Reynolds está entre 5000 e 6000.

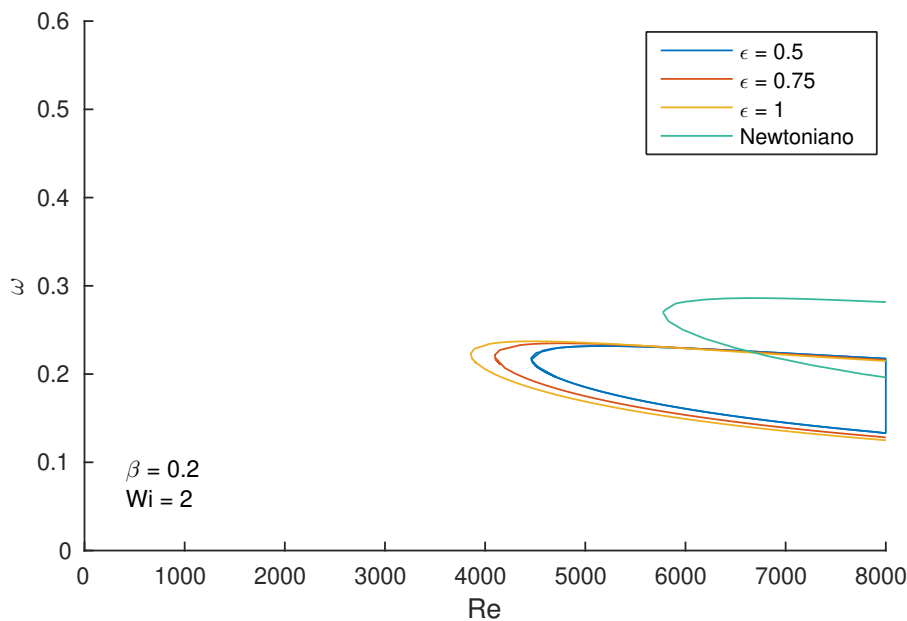


Figura 24 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.2$, $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.5, 0.75$, e 1 e $Wi = 2$.

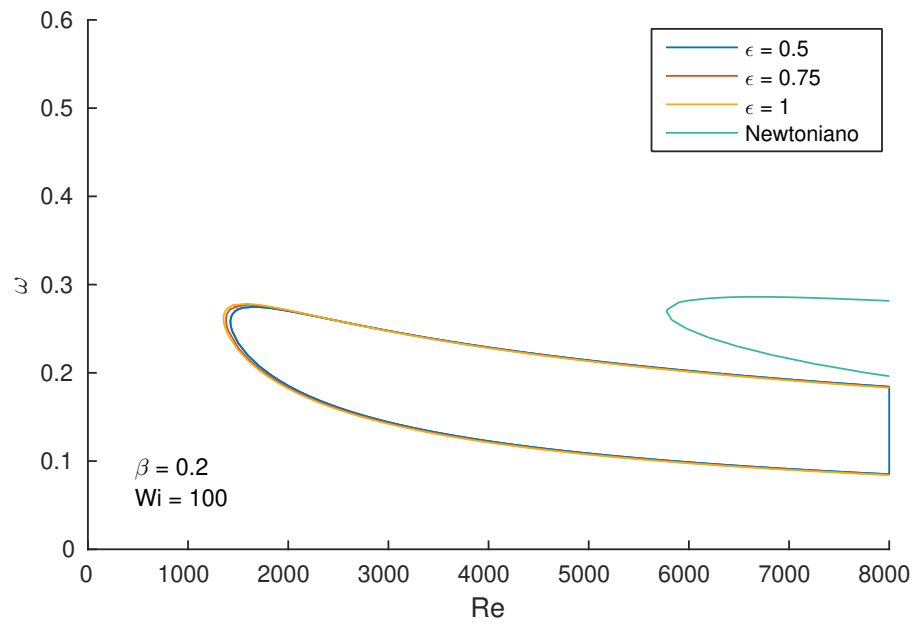


Figura 25 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.2$, $\xi = 0$, $\epsilon = 0.5, 0.75, e 1$ e $Wi = 100$.

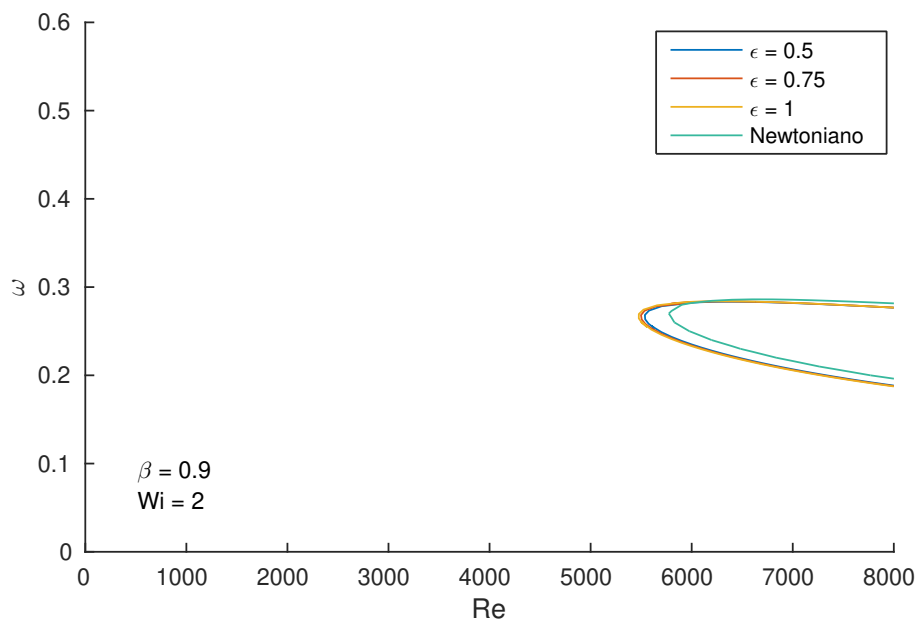


Figura 26 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.9$, $\xi = 0$, $\epsilon = 0.5, 0.75, e 1$ e $Wi = 2$.

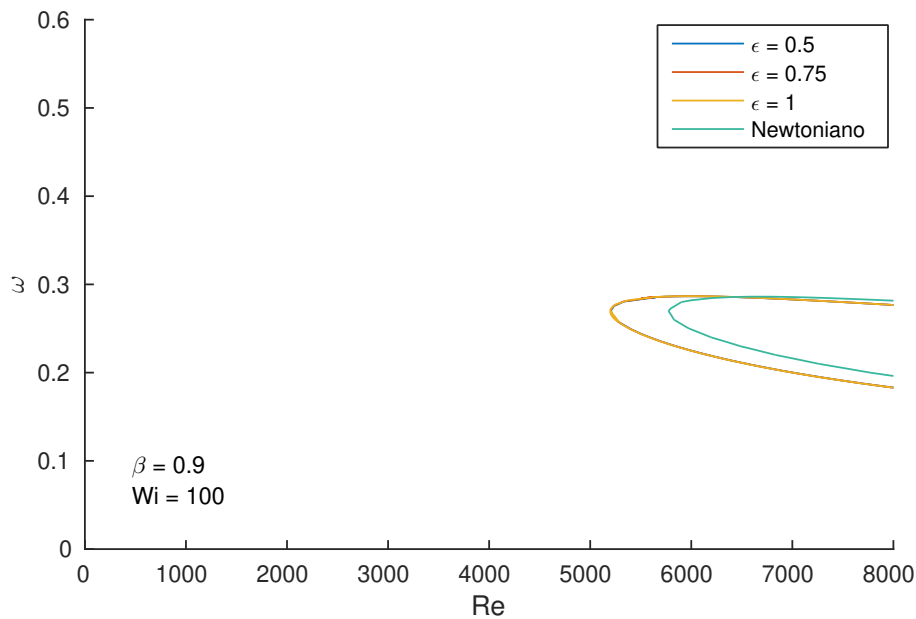


Figura 27 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.9$, $\xi = 0$, $\epsilon = 0.5, 0.75$, e 1 e $Wi = 100$.

Verificou-se a influência da constante ξ na estabilidade do escoamento de Poiseuille do fluido LPTT, simulações numéricas foram feitas variando os parâmetros ξ , Wi , β e ϵ . Usando o código LST desenvolvido para o modelo LPTT, foram obtidas as curvas neutras de estabilidade e estão apresentadas nas figuras 28, 29 e 30. Analisando a figura 28, observa-se que as curvas neutras de estabilidade do modelo LPTT na medida que o valor de Wi aumenta e ξ diminui para $\xi = 0$, há um deslocamento da curva neutra para a esquerda, indicando que o escoamento fica instável para valores do número de Reynolds maiores. Na figura 29, observa-se que quando o valor de β diminui para $\beta = 0.5$ e ξ aumenta para $\xi = 0.25$, é notável o afastamento da curva neutra para a esquerda, porém, o espaçamento entre as curvas neutras é menos pronunciado. Observa-se na figura 30 conforme o valor de ϵ aumenta para $\epsilon = 1$ e o valor de ξ diminui para $\xi = 0$, o deslocamento da curva neutra de estabilidade tende para a esquerda, tornando o escoamento mais instável para valores do número de Reynolds maiores. Analisando as figuras, nota-se que as curvas neutras de estabilidade do modelo LPTT vão se aproximando da curva neutra do modelo Newtoniano, conforme o valor de β é aumentado e também quando o valor de Wi diminui.

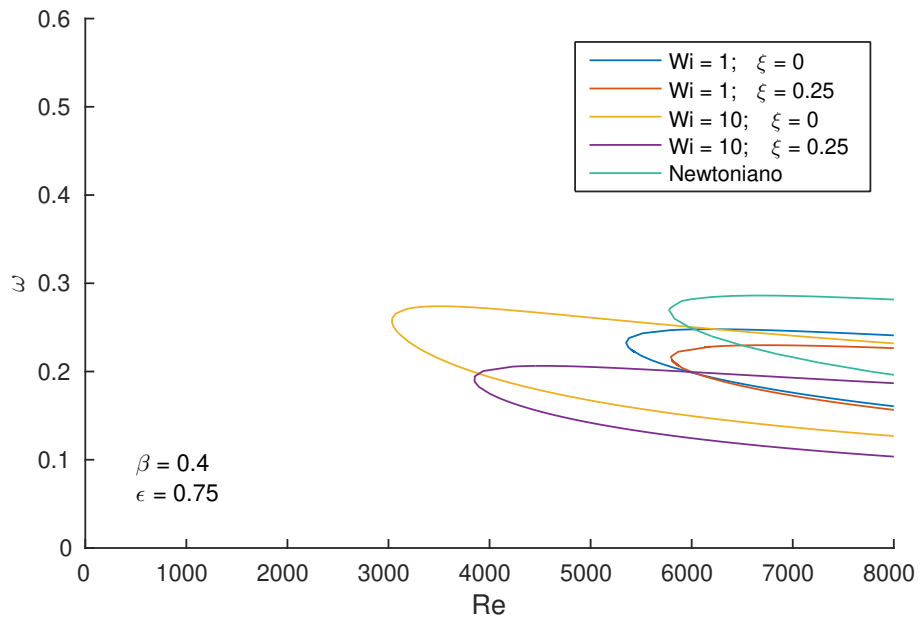


Figura 28 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.4$, $\xi = 0$ e 0.25 , $\epsilon = 0.75$, e $Wi = 1$ e 10 .

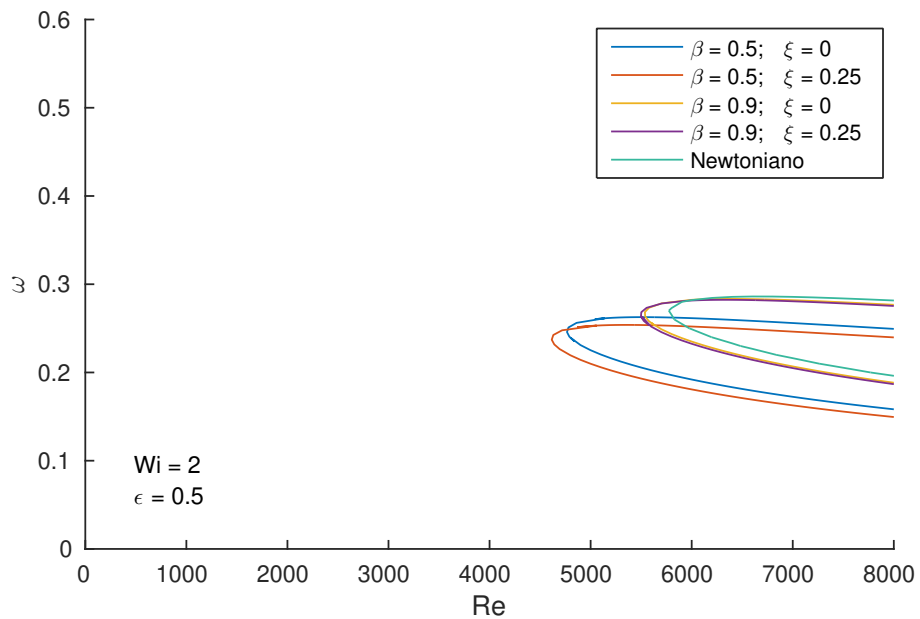


Figura 29 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.4$ e 0.9 , $\xi = 0$ e 0.25 , $\epsilon = 0.5$ e $Wi = 2$.

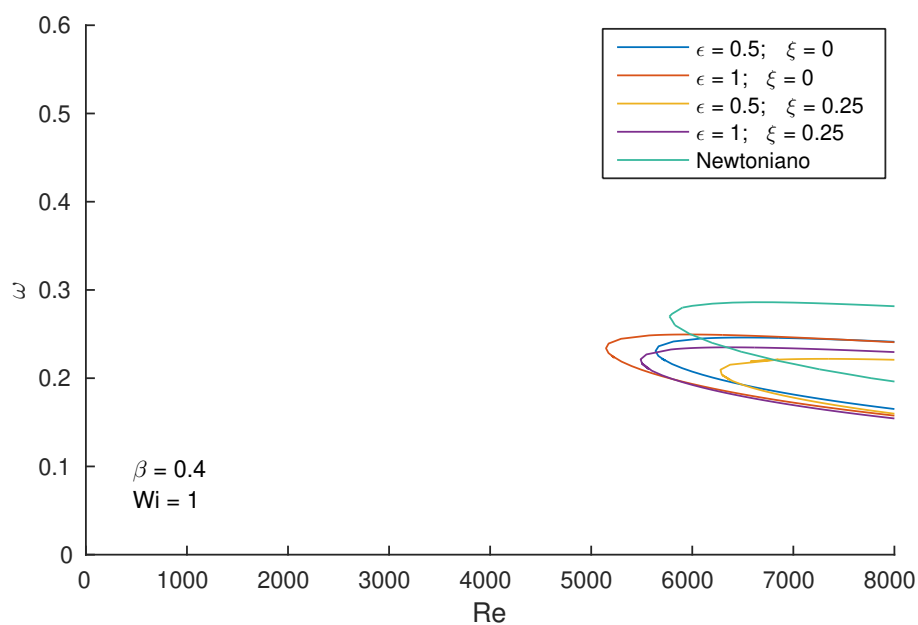


Figura 30 – Diagrama de estabilidade neutra espacial para $\beta = 0.4$, $\xi = 0$ e 0.25 , $\epsilon = 0.5$ e 1 e $Wi = 1$.

CONCLUSÃO

No presente trabalho foram apresentadas as equações que modelam escoamentos incompressíveis, isotérmicos, bidimensional, para um fluido não Newtoniano do tipo viscoelástico, utilizando a equação constitutiva do modelo linear Phan Thien Tanner (PTT). Então, foi investigada a convecção das ondas de Tollmien-Schlichting para o escoamento entre placas paralelas.

As equações que modelam escoamentos para um fluido não Newtoniano viscoelástico foram apresentadas em suas formas dimensional e adimensional. Neste trabalho foi utilizada somente a análise espacial para investigar a estabilidade de escoamentos de fluidos viscoelásticos utilizando a Teoria de Estabilidade Linear, através das curvas neutras de estabilidade. Foram apresentadas para diferentes parâmetros adimensionais do modelo LPTT.

As curvas neutras de estabilidade foram avaliadas através das perturbações bidimensionais para diferentes valores de parâmetros adimensionais do modelo. Além disso, a influência dos parâmetros adimensionais presentes no modelo LPTT tais como β , Wi , ξ e ε foram estudados, considerando os valores de Reynolds de $Re = 1000$ a $Re = 8000$.

O efeito das forças elásticas, dada pelo número de Weissenberg (Wi), na estabilidade do escoamento foi simulado para sete diferentes valores de Weissenberg, a saber $Wi = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100 diferentes valores de β , ε e $\xi = 0$. Os resultados numéricos mostraram que conforme o valor de Wi aumenta, há um deslocamento da curva neutra para a esquerda, indicando que o escoamento fica instável para valores do número de Reynolds menores.

A influência da constante β , que controla a contribuição do solvente Newtoniano no fluido, também foi estudada para analisar a estabilidade do escoamento de Poiseuille do fluido LPTT e foram realizadas simulações numéricas considerando sete diferentes valores de β , $\beta = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ e 0.9 , para diferentes valores de β , ε e $\xi = 0$. Os resultados numéricos mostraram que as curvas neutras de estabilidade do modelo LPTT conforme o valor de β aumenta, o valor de ω cresce. Os resultados numéricos mostraram que as curvas neutras de estabilidade do modelo LPTT foram se aproximando da curva neutra do modelo Newtoniano,

conforme o valor de β aumentado, o que está coerente com a literatura, pois quando β foi se aproximando de 1 no modelo considerado, maior a quantidade de solvente Newtoniano no fluido.

O parâmetro relacionado ao comportamento elongacional do modelo, dada pela constante ε , foi simulada para três diferentes valores: $\varepsilon = 0.5, 0.75$ e 1, diferentes valores de β , Wi e $\xi = 0$. Os resultados numéricos mostraram que as curvas neutras de estabilidade do modelo LPTT conforme o valor de ε aumenta, há um deslocamento da curva neutra para a esquerda, apontando que o escoamento fica instável para valores do número de Reynolds menores. E, também, pode-se concluir que o escoamento do fluido Newtoniano foi mais estável que todos os outros escoamentos do fluido LPTT.

O parâmetro que afeta o comportamento de cisalhamento, dada pela constante ξ , foi simulada para diferentes valores de β , Wi , $\xi = 0$ e ε . Os resultados numéricos mostraram que as curvas neutras de estabilidade do modelo LPTT conforme o valor de Wi e ε aumenta e o valor de β diminui há um deslocamento das curvas neutras para a esquerda, indicando que o escoamento fica instável para valores do número de Reynolds menores.

Os resultados numéricos obtidos utilizando a técnica LST foram satisfatórios e importante na análise da estabilidade de escoamentos viscoelásticos, visto que não existem muitos resultados na literatura para o modelo de fluido viscoelástico LPTT. Sendo esta a principal contribuição científica deste trabalho, disponibilizando resultados atuais a partir de uma ferramenta numérica importante na verificação da estabilidade de escoamentos bidimensionais utilizando o fluido LPTT.

Como trabalhos futuros, pode-se desenvolver e implementar um código DNS. Estudar e analisar a estabilidade de um escoamento tridimensional entre placas paralelas para um fluido viscoelástico do tipo linear Phan Thien Tanner (PTT).

REFERÊNCIAS

- ALVES, M. A.; OLIVEIRA, P. J.; PINHO, F. T. Benchmark solutions for the flow of oldroyd-b and ptt fluids in planar contractions. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, Elsevier, v. 110, n. 1, p. 45–75, 2003. Citado na página 22.
- AVGOUSTI, M.; BERIS, A. N. Non-axisymmetric modes in viscoelastic taylor-couette flow. **Journal of non-newtonian fluid mechanics**, Elsevier, v. 50, n. 2-3, p. 225–251, 1993. Citado na página 22.
- BERIS, A.; ARMSTRONG, R.; BROWN, R. Spectral/finite-element calculations of the flow of a maxwell fluid between eccentric rotating cylinders. **Journal of non-newtonian fluid mechanics**, Elsevier, v. 22, n. 2, p. 129–167, 1987. Citado na página 22.
- BIRD, R.; DOTSON, P.; JOHNSON, N. Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead—spring chain model. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, Elsevier, v. 7, n. 2-3, p. 213–235, 1980. Citado na página 22.
- BRASSEUR, E.; FYRILLAS, M. M.; GEORGIU, G. C.; CROCHET, M. J. The time-dependent extrudate-swell problem of an oldroyd-b fluid with slip along the wall. **Journal of Rheology**, The Society of Rheology, v. 42, n. 3, p. 549–566, 1998. Citado na página 22.
- BRETAS, R. E. **Reologia de polímeros fundidos**. [S.l.]: Editora da UFSCar, 2005. Citado na página 22.
- GERVAZONI, E. S. Análise de estabilidade linear de escoamentos bidimensionais do fluido oldroyd-b. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2016. Citado nas páginas 22 e 41.
- GIESEKUS, H. A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, Elsevier, v. 11, n. 1-2, p. 69–109, 1982. Citado na página 22.
- LACERDA, J. F.; SOUZA, L. F. d.; ROGENSKI, J. K.; MENDONÇA, M. T. d. Direct numerical simulation code validation for compressible shear flows using linear stability theory. **Journal of Aerospace Technology and Management**, SciELO Brasil, v. 10, 2018. Citado na página 22.
- LARSON, R. G. Instabilities in viscoelastic flows. **Rheologica Acta**, Springer, v. 31, n. 3, p. 213–263, 1992. Citado na página 22.
- LARSON, R. G.; SHAQFEH, E. S.; MULLER, S. J. A purely elastic instability in taylor–couette flow. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 218, p. 573–600, 1990. Citado na página 22.
- LEONOV, A. Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media. **Rheologica acta**, Springer, v. 15, n. 2, p. 85–98, 1976. Citado na página 22.
- LUO, X.-L.; TANNER, R. A streamline element scheme for solving viscoelastic flowproblems part ii: integral constitutive models. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, Elsevier, v. 22, n. 1, p. 61–89, 1986. Citado na página 22.

- _____. Finite element simulation of long and short circular die extrusion experiments using integral models. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 25, n. 1, p. 9–22, 1988. Citado na página 22.
- MAK, J. Hydrodynamic stability of newtonian and non-newtonian fluids. **Research-Gate.[Online]**, 2009. Citado na página 22.
- MENDONÇA, M. T.; AVELAR, A. C. **Turbulência**. [S.l.]: ABCM, 2016. Citado na página 21.
- MOMPEAN, G.; DEVILLE, M. Unsteady finite volume simulation of oldroyd-b fluid through a three-dimensional planar contraction. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, Elsevier, v. 72, n. 2-3, p. 253–279, 1997. Citado na página 22.
- SCHLICHTING, H. **Boundary-layer theory**. [S.l.]: [S.l.]: McGraw-Hill, IncH., 1979. Citado na página 33.
- SHAQFEH, E. S.; MULLER, S. J.; LARSON, R. G. The effects of gap width and dilute solution properties on the viscoelastic taylor-couette instability. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 235, p. 285–317, 1992. Citado na página 22.
- SILVA, A. A. d. **Simulação numérica da estabilidade de escoamentos de um fluido Giesekus**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2018. Citado na página 22.
- SOUZA, L.; BRANDI, A.; MENDONÇA, M. Estabilidade de escoamentos de fluidos não newtonianos. **Mendonça, MT; Avelar, AC Turbulência**. ABCM, 2012. Citado na página 22.
- SURESHKUMAR, R.; BERIS, A. N. Linear stability analysis of viscoelastic poiseuille flow using an arnoldi-based orthogonalization algorithm. **Journal of non-newtonian fluid mechanics**, Elsevier, v. 56, n. 2, p. 151–182, 1995. Citado na página 22.
- THIEN, N. P.; TANNER, R. I. A new constitutive equation derived from network theory. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, Elsevier, v. 2, n. 4, p. 353–365, 1977. Citado na página 22.
- WHITE, J.; METZNER, A. Development of constitutive equations for polymeric melts and solutions. **Journal of Applied Polymer Science**, Wiley Online Library, v. 7, n. 5, p. 1867–1889, 1963. Citado na página 22.
- ZHANG, M.; LASHGARI, I.; ZAKI, T. A.; BRANDT, L. Linear stability analysis of channel flow of viscoelastic oldroyd-b and fene-p fluids. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 737, p. 249–279, 2013. Citado nas páginas 22 e 41.

