



I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA ENTRE MERGULHOS

*Roberto Carvalho Engler Pinto*

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO  
BRASIL

RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA ENTRE MERGULHOS

*Roberto Carvalho Engler Pinto*

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de "Doutor em Ciências" (Matemática).

SÃO CARLOS  
1980

Aqueles a quem amo



# EQUIVALENCE RELATIONS ON EMBEDDINGS

*Roberto Carvalho Engler Pinto*

*Adviser: Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel*

## ABSTRACT

Let  $N^n$  and  $M^m$  be differentiable manifolds and  $f, g : N \rightarrow M$ , embeddings.  $f$  and  $g$  are *equivalent* iff there is a diffeomorphism  $H : M \rightarrow M$  such that  $H \circ f = g$ . This is a very *strong* relation.

We study in this paper weaker relations by using surgery. Complete informations are given in the case  $N = S^1 \times S^1$  and  $M = S^3$ .

In other cases, by adding some restrictions on  $n$  and  $m$  we obtain more complete results.



## INTRODUÇÃO

Para a classificação dos mergulhos entre variedades, dispomos de duas conhecidas relações de equivalência:

(a)  $f, g : N^n \rightarrow M^m$  são equivalentes se, e só se, seus fibrados normais são isomorfos.

(b)  $f$  e  $g$  são equivalentes se, e só se, existe um difeomorfismo  $H : M \rightarrow M$  tal que  $H \circ f = g$ .

Enquanto a primeira relação é demasiadamente grosseira, a segunda é excessivamente fina, acarretando obstáculos praticamente intransponíveis, como no caso da teoria dos nós.

O presente trabalho se insere num plano de pesquisa mais amplo que tem por objetivo definir outras relações que se interpoem entre aquelas e destacar entre estas as mais significativas.

A primeira tentativa neste sentido, apareceu em [2], nosso trabalho de Mestrado, onde, com o auxílio da Cirurgia, definimos o C-relacionamento entre mergulhos, relação reflexiva e simétrica e, a seguir, a C-equivalência, como a relação de equivalência gerada pelo C-relacionamento.

Naquele trabalho, investigamos os mergulhos da esfera  $S^1$  em variedades de dimensão 2 e 3, orientáveis ou não, e concluímos que, em todos estes casos, dois mergulhos são C-relacionados se, e somente se, seus fibrados normais são isomorfos.

Buscando atingir os objetivos estabelecidos acima, dedicamos o Capítulo II para apresentar uma seqüência de defini

ções de relações de equivalência entre mergulhos, utilizando, em todas estas definições, o conceito de Cirurgia. Como a Cirurgia e o Bordismo são teorias intimamente relacionadas, relação esta evidenciada pelo Teorema 1.1 e suficientemente ressaltada no Capítulo I, procuramos ilustrar cada uma das definições apresentadas, com uma versão equivalente à luz da teoria de bordismo.

Por meio destas versões, percebemos facilmente que as relações definidas vão sendo enfraquecidas à medida que a sequência se desenvolve.

Destacamos, ainda, no Capítulo II, o resultado obtido que exhibe a coincidência da relação de equivalência dada pelo i somorfismo dos fibrados normais dos mergulhos (item (a)) e a B-equivalência, uma das últimas relações que comparecem na sequência apresentada.

A tentativa de buscar um exemplo de mergulhos C-equivalentes que não fossem C-relacionados, ou seja, de mergulhos cuja C-equivalência decorresse do C-relacionamento deles com outros mergulhos, nos levou a analisar os mergulhos de  $S^1 \times S^1$  em  $S^3$ , objeto do Capítulo III.

Para esta análise, definimos  $M(f,g)$  a *matriz de relacionamento entre dois mergulhos*  $f, g : S^1 \times S^1 \rightarrow S^3$ . Condições necessárias e suficientes, para a equivalência usual e para o C-relacionamento entre mergulhos, são estabelecidas neste Capítulo, tudo em termos da matriz  $M(f,g)$ . Felizmente, nosso trabalho não foi em vão, pois o exemplo procurado finalmente aparece no final do mesmo. É preciso frisar, no entanto, que toda a dificuldade encontrada reside em concluir quando dois mergulhos *não são C-relacionados*. Não conseguimos encontrar outros



invariantes, senão os respectivos fibrados normais dos mergulhos, o que nos obrigou a realizar *todas* as possíveis cirurgias que eventualmente pudessem exibir o C-relacionamento entre tais mergulhos, levando-nos às mais variadas situações em cujas análises empregamos técnicas diversas.

Finalmente, no Capítulo IV, estudamos três situações adequadas, estabelecendo resultados definitivos:

- (i) Mergulhos de  $S^n$  em variedades  $M^m$  com  $n \leq \frac{m}{2} - 1$ .
- (ii) Mergulhos de variedades bidimensionais em variedades  $M^m$  com  $m \geq 6$ .
- (iii) Mergulhos de variedades  $N^n$  em variedades  $M^m$  com  $n \leq \frac{m}{2} - 1$ .

Num futuro trabalho pretendemos construir um exemplo de mergulhos que não são C-equivalentes, *apesar de possuírem fibrados normais isomorfos*, o que definitivamente constataria que a C-equivalência é uma relação distinta das citadas no início desta introdução.



No encerramento deste trabalho, desejo apresentar os meus agradecimentos:

- a Deus, que me permitiu que o fizesse;
- ao meu Orientador, Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel, que significativamente me ajudou na sua confecção;
- aos meus familiares, que me aturaram enquanto eu o realizava;
- aos colegas do ICMSC-USP, que me incentivaram durante a sua obra, em especial, ao Carlos Biasi e
- a Maria Helena Derigi, pelo carinho que dispensou na sua datilografia.

Este trabalho foi patrocinado parcialmente pelas Instituições: CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP.



# I N D I C E

INTRODUÇÃO .....	i
CAPÍTULO I	
PRELIMINARES .....	1
1. <i>A Cirurgia</i> .....	1
2. <i>Funções de Morse e Cirurgia</i> .....	3
3. <i>Nós e Links</i> .....	6
CAPÍTULO II	
AS RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA ENTRE MERGULHOS .....	13
CAPÍTULO III	
MERGULHOS DE $S^1 \times S^1$ EM $S^3$ .....	27
1. <i>A Matriz de Relacionamento Entre Dois Mergulhos</i> .....	27
2. <i>A Equivalência</i> .....	30
3. <i>A <math>C_0</math>-equivalência</i> .....	35
4. <i>A <math>C_1</math>-equivalência</i> .....	55
CAPÍTULO IV	
RESULTADOS GERAIS .....	63
1. <i>Mergulhos de Esferas</i> .....	63
2. <i>Mergulhos de Variedades Bidimensionais</i> .....	71
3. <i>Uma Generalização</i> .....	81
APÊNDICE .....	87
BIBLIOGRAFIA .....	93



## CAPÍTULO I

### PRELIMINARES

#### 1. A Cirurgia

A Cirurgia, também denominada "modificação esférica", é um método geométrico da Topologia Diferencial, principal ferramenta utilizada neste trabalho, a qual passamos a descrever.

Seja  $M$  uma variedade diferenciável, de dimensão  $m$ , e seja  $\psi : S^p \times D^{m-p} \rightarrow M$  um mergulho que preserva a orientação. Consideremos o espaço:

$$W = [M - \psi(S^p \times D^{m-p})] \cup_{\psi} (D^{p+1} \times S^{m-p-1}),$$

onde a colagem é feita através do bordo comum  $S^p \times S^{m-p-1}$ , identificando-se  $(u,v)$  com  $\psi(u,v)$ .

É possível dotar  $W$  de uma estrutura diferenciável (ver [1]) e diremos que  $W$  foi obtida de  $M$ , por meio de uma cirurgia do tipo  $p$ .

A construção realizada tem sentido para  $0 \leq p < m$  e, às vezes, é conveniente estendê-la para os casos  $p = -1$  e  $p = m$ . Para isto, convencionamos:  $D^0 = R^0 = \{0\}$  e  $S^{-1} = \emptyset$ .

Assim, uma cirurgia do tipo  $-1$ , realizada em  $M$ , substitui esta variedade pela união disjunta  $M \cup S^m$ , enquanto a cirurgia do tipo  $m$  troca  $M \cup S^m$  por  $M$ .

Observemos, ainda, que se uma variedade  $M_2$  é obtida de  $M_1$  por uma cirurgia do tipo  $p$ , então existe uma cirurgia do tipo  $m-p-1$  que pode ser realizada sobre  $M_2$  para se recuperar  $M_1$ . Tal cirurgia é denominada *inversa* da primeira.

Apresentamos, neste parágrafo, alguns resultados importantes em cirurgia, todos citados em capítulos seguintes e cujas provas omitimos, mas que podem ser encontradas em [15].

Em primeiro lugar, o resultado que relaciona a Cirurgia e a Teoria de Bordismo:

*Teorema 1.1.:*

Sejam  $M_1$  e  $M_2$  variedades diferenciáveis, compactas. Então  $M_1$  e  $M_2$  são bordantes se, e somente se, uma pode ser obtida da outra por uma seqüência finita de cirurgias.  $\square$

Dada uma seqüência finita de cirurgias sobre  $M_1$ , a variedade  $V$  tal que  $\partial V = M_1 \cup M_2$  é denominada *traço* desta seqüência.

A seguir, o lema que estabelece que apenas cirurgias de tipo  $p = 0$  ou  $p = m-1$  podem levar variedades orientáveis em variedades não orientáveis, ou vice versa.

*Lema 1.2.:*

Seja  $M_1$  uma variedade orientável e conexa, e seja  $M_2$  obtida de  $M_1$  por uma cirurgia de tipo  $p$ , com  $p \neq 0$  e  $p \neq m-1$ . Então,  $M_2$  é orientável.  $\square$

Uma cirurgia de tipo  $p = 0$ , por exemplo, retira de  $M_1$  dois discos  $m$ -dimensionais e identifica os pontos das duas  $(m-1)$ -esferas, que são os seus bordos. É claro que existem duas maneiras de fazer tal identificação: se  $M_1$  é uma variedade orientável, uma das maneiras nos fornece uma variedade  $M_2$  também orientável e, a outra, uma variedade  $M_2$  não orientável.



Neste trabalho consideraremos tão somente as cirurgias que transformam variedades orientáveis em variedades orientáveis, que são denominadas *cirurgias orientáveis*.

Para encerrarmos esta secção, enunciamos um teorema que nos informa existir uma certa "ordem canônica" sobre uma seqüência de cirurgias.

*Teorema 1.3.:*

Suponhamos que  $M_2$  é obtida de  $M_1$ , através de uma seqüência finita de cirurgias, com traço  $V$ . Então podemos rearranjar esta seqüência de modo que toda cirurgia de tipo  $p$  seja realizada primeiro que as de tipo  $q$ , com  $p < q$ . Além disso, o traço da nova seqüência ainda é  $V$ .  $\square$

## 2. Funções de Morse e Cirurgia

Seja  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real, diferenciável, definida sobre uma variedade  $W$ , de dimensão  $n$ . Um ponto  $P \in W$  é um *ponto crítico* de  $f$  se

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) = 0$$

Se  $P \in W$  ainda satisfaz

$$\det\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)\right] \neq 0,$$

então  $P$  é denominado um *ponto crítico não degenerado* de  $f$ .

Lema 1.4. (Morse):

Seja  $P \in W$  um ponto crítico não degenerado para uma função  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ . Então existe um sistema de coordenadas numa vizinhança de  $P$  no qual

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{constante} - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$$

para algum  $\lambda$  entre 0 e  $n$ . □

O número  $\lambda$  é definido como o *índice* do ponto crítico  $P$ .

$(W; V_0, V_1)$  é uma *triade de variedades diferenciáveis* se  $W$  é uma variedade compacta cujo bordo é a união disjunta de subvariedades fechadas  $V_0$  e  $V_1$ .

Uma *função de Morse* sobre uma triade  $(W; V_0, V_1)$  é uma função diferenciável  $f : W \rightarrow [0, 1]$  que satisfaz:

(i)  $f^{-1}(0) = V_0$  e  $f^{-1}(1) = V_1$ ;

(ii) todos os pontos críticos de  $f$  são não degenerados e pertencem a  $W - \partial W$ .

Teorema 1.5.:

Toda triade de variedades diferenciáveis possui uma função de Morse.

Ver ([8], p. 9). □

Suponhamos que  $(W; V_0, V_1)$  seja um *bordismo elementar*, isto é, uma triade de variedades que admite uma função de Morse  $f : W \rightarrow [0, 1]$  com um único ponto crítico  $P$ . Definida

sobre  $W$ , existe uma família de curvas - trajetórias de um campo vetorial tipo "gradiente" para  $f$  - cuja descrição e propriedades estão descritas em [15], cada uma destas curvas "nascendo" em  $V_0$  ou em  $P$  e "morrendo" em  $P$  ou em  $V_1$ , respectivamente. A interseção das curvas que vão para  $P$  com  $V_0$  é uma esfera  $S_0$  e a interseção das curvas que vêm de  $P$  com  $V_1$  é uma esfera  $S_1$ . As dimensões destas esferas dependem unicamente do índice do ponto crítico  $P$ ; mais especificamente, se  $\lambda$  é o índice de  $P$  então

$$\dim S_0 = \lambda - 1$$

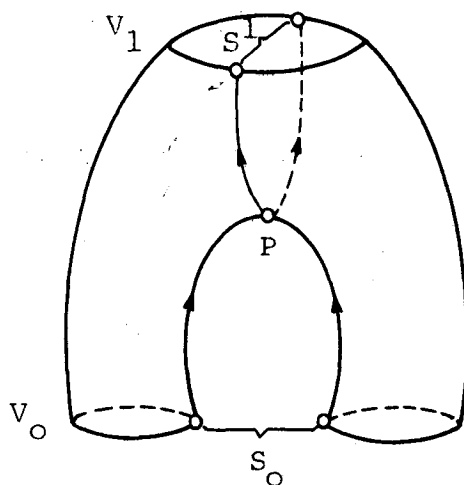
e 
$$\dim S_1 = n - \lambda.$$

Aqui tomamos um contato mais íntimo com a relação entre a Cirurgia e a Teoria de Bordismo, relação esta introduzida pelo Teorema 1.1.

Seja  $M_1$  uma variedade obtida de  $M_0$  por uma seqüência finita de  $r$  cirurgias e consideremos a tríade  $(M; M_0, M_1)$ , cuja existência o teorema citado garante.

Entre todas as funções de Morse para esta tríade, existe uma que apresenta exatamente  $r$  pontos críticos, cada um deles correspondendo a cada cirurgia que comparece na seqüência.

Como todo bordismo pode ser considerado como composição de bordismos elementares,  $(M; M_0, M_1)$  pode ser decomposto numa seqüência de  $r$  tríades do tipo  $(W; V_0, V_1)$ , em cada uma delas existindo um único ponto crítico, correspondendo a uma das cirurgias realizadas. Em cada estágio,  $S_0$  é a esfera retirada de  $V_0$  durante a cirurgia e  $S_1$  é a esfera acrescentada para a obtenção de  $V_1$ . Conseqüentemente,  $\lambda - 1 = p$ , o tipo da cirurgia.



$$S_0 = S^p = S^{\lambda-1}$$

$$S_1 = S^{n-p-1} = S^{n-\lambda}$$

figura 1

### 3. Nós e Links

Um subconjunto  $K$  de um espaço topológico  $X$  é um *nó* se  $K$  é homeomorfo à uma esfera  $S^p$ . Mais geralmente,  $K$  é um *link* se  $K$  é homeomorfo à união disjunta de uma ou mais esferas.

Dois nós ou links  $K$  e  $K'$  são *equivalentes* se existe um homeomorfismo  $H : X \rightarrow X$  com  $H(K) = K'$ .

Se, ao invés de homeomorfismos, exigirmos difeomorfismos, passaremos à categoria dos nós e links *diferenciáveis*.

Às vezes é conveniente utilizarmos outras noções de equivalência mais fortes como, por exemplo:

- (i) Equivalência como *aplicações*: onde  $K$  e  $K'$  são vistos como mergulhos  $S^p \rightarrow X$  e  $H$  deve satisfazer  $H \circ K = K'$ .

(ii) Equivalência orientada: onde todos os espaços envolvidos são orientados e  $H$  deve preservar a orientação.

Uma superfície de Seifert para um nó ou link  $K^n \subset S^{n+2}$  é uma subvariedade compacta e orientada  $M^{n+1} \subset S^{n+2}$  com  $\partial M = K$ . Para um nó exigimos, ainda, que  $M$  seja conexa.

O teorema de existência, em [12], p. 127, garante que todo nó ou link em  $S^{n+2}$  possui uma superfície de Seifert (na categoria  $C^\infty$ ).

Se  $K^n \subset R^{n+2}$  ou  $S^{n+2}$  é um nó ou link, o grupo de  $K$  é definido como sendo o grupo fundamental de seu complementar, isto é,  $\pi_1(R^{n+2} - K) \simeq \pi_1(S^{n+2} - K)$ .

Trabalharemos somente com nós e links  $K^1 \subset R^3$  ou  $S^3$ .

Nestas condições, considerando-se a equivalência orientada,  $K$  é "amphicheiral" se  $K$  é equivalente a si próprio através de um homeomorfismo  $H: S^3 \rightarrow S^3$  que inverte a orientação de  $S^3$  e  $K$  é invertível se existe um homeomorfismo  $K: S^3 \rightarrow S^3$  que realiza a equivalência de  $K$  consigo mesmo, conservando a orientação de  $S^3$  e invertendo a orientação de  $K$ .

Finalmente,  $K$  é um nó trivial se  $K = \partial M$ , onde  $M$  é uma subvariedade homeomorfa ao disco  $D^2$ .

Lema 1.6. (Teorema do não enodamento):

Um nó diferenciável  $K \subset S^3$  é trivial se, e somente se,  $\pi_1(S^3 - K) \simeq \mathbb{Z}$ .

Ver ([12], p. 103).

□

Lema 1.7.:

Para todo nó diferenciável  $K \subset S^3$  temos  $H_1(S^3 - K) \cong \mathbb{Z}$ .

Seja  $V$  uma vizinhança tubular de  $K$  em  $S^3$  e seja  $X = S^3 - K$ . A prova deste lema é imediata após a aplicação da seqüência de Mayer-Vietoris à tríade  $(S^3; X, V)$ .  $\square$

Corolário:

Se  $K \subset S^3$  é um nó diferenciável não trivial então  $\pi_1(S^3 - K)$  é não abeliano.

O homomorfismo de Hurewicz:

$$h : \pi_1(S^3 - K) \rightarrow H_1(S^3 - K) \cong \mathbb{Z}$$

é sobrejetor e  $\ker h$  é o subgrupo comutador de  $\pi_1(S^3 - K)$ . Logo, se  $\pi_1(S^3 - K)$  é abeliano,  $h$  é isomorfismo e, pelo Lema 1.6.,  $K$  é trivial.  $\square$

A seguir, construiremos um lema que nos será útil no Capítulo III:

Lema 1.8.:

Seja  $K_1 \subset S^3$  um nó trivial e  $K_2 \subset S^3$  um nó não trivial. Consideremos os links  $L_1$  e  $L_2$ , obtidos acrescentando-se a  $K_1$  e  $K_2$ , respectivamente, mais uma componente trivial  $K$ , não entrelaçada com  $K_1$  e  $K_2$ . Então os espaços complementares de  $L_1$  e  $L_2$  são necessariamente não homeomorfos. (Figura 2).

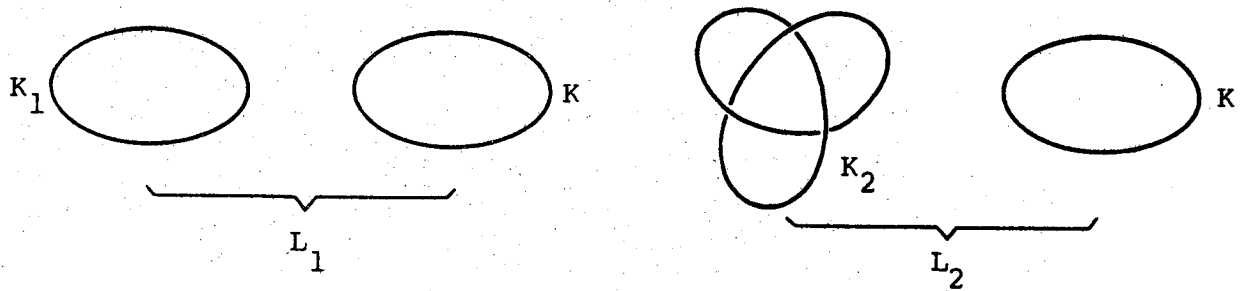


figura 2

*Observação:*

Este lema não é tão trivial quanto possa parecer, como nos mostra o exemplo abaixo:

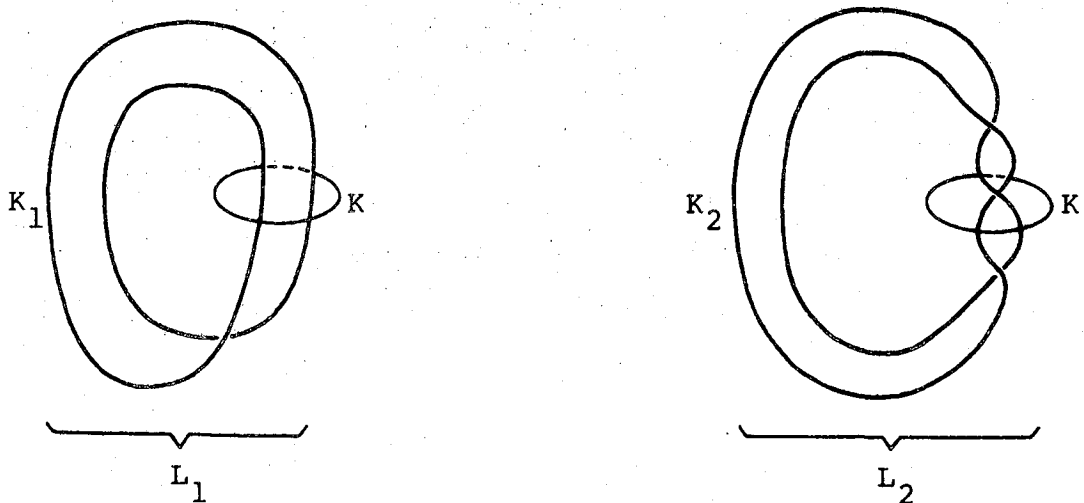


figura 3

Temos que  $K_1$  é o nó trivial e  $K_2$  é o chamado nó trevado, logo não trivial.

Retirando-se de  $S^3$  uma vizinhança tubular de  $K$ , obtemos toros sólidos  $V_1$  e  $V_2$ , nos quais  $K_1$  e  $K_2$  se situam ao longo das respectivas almas:



figura 4

Após conveniente torção, é possível obter um homeomorfismo  $H : V_1 \rightarrow V_2$  com  $H(K_1) = K_2$ . A restrição de  $H$  ao complementar em  $V_1$ , de uma vizinhança tubular de  $K_1$ , exibe um homeomorfismo entre os complementares de  $L_1$  e  $L_2$ , apesar de serem links não equivalentes.

*Lema Auxiliar:*

Seja  $G$  um grupo qualquer. Então

$$Z * G \simeq Z * Z \iff G \simeq Z$$

( $\Leftarrow$ ) óbvio.

( $\Rightarrow$ ) Seja  $\theta : Z * G \rightarrow Z * Z$  um isomorfismo. Sabemos que  $Z * G$  possui um subgrupo isomorfo a  $G$ .

Pelo teorema do subgrupo ([5], p. 158), o subgrupo  $\theta(G)$  do grupo livre  $Z * Z$  é um grupo livre e, portanto, um produto livre de cópias de  $Z$ . Logo, para que o isomorfismo  $\theta$  se realize, é necessário que  $G \simeq \theta(G) \simeq Z$ .  $\square$

*Prova do Lema 1.8.:*

Temos que  $\pi_1(S^3 - K_1) \simeq Z$  e  $\pi_1(S^3 - K_2) \simeq G$ , com  $G$  não abeliano. Nas condições do lema, é fácil verificar ([12], p. 56), que  $\pi_1(S^3 - L_1) \simeq Z * Z$  e  $\pi_1(S^3 - L_2) \simeq Z * G$ .



Como  $G \neq \mathbb{Z}$ , pelo lema auxiliar, segue-se que  $\pi_1(S^3 - L_1) \neq \pi_1(S^3 - L_2)$ , donde os espaços complementares a  $L_1$  e  $L_2$  são não homeomorfos.  $\square$



## CAPÍTULO II

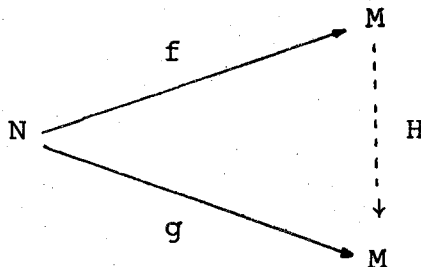
### AS RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA ENTRE MERGULHOS

Neste Capítulo procuraremos formalizar as diversas definições das relações de equivalência entre mergulhos, assim como ilustrar cada uma delas com uma versão equivalente, à luz da teoria de bordismo. Para isto, sejam  $N^n$ ,  $M^m$  variedades diferenciáveis.

Iniciaremos com a usual

*Definição (1):* A equivalência (E)

Dois mergulhos  $f, g : N \rightarrow M$  são *equivalentes* se existe um difeomorfismo  $H$  de  $M$  em si mesmo tal que  $H \circ f = g$ , isto é, um difeomorfismo  $H$  que completa o diagrama:

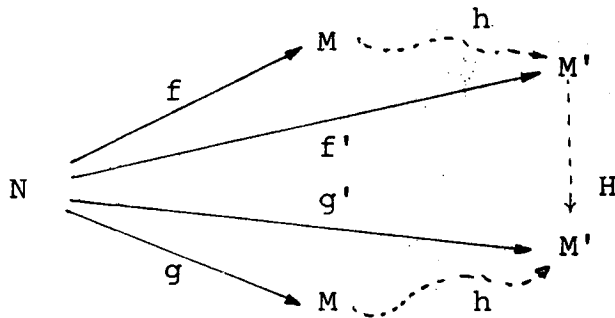


É óbvio que a relação acima é de equivalência.

*Definição (2):* O C-relacionamento

Dois mergulhos  $f, g : N \rightarrow M$  são *C-relacionados* se existe uma cirurgia realizada por um mergulho  $h : S^p \times D^{m-p} \rightarrow M$ ,

com  $\text{im } h$  disjunta de  $\text{im } f$  e  $\text{im } g$ , transformando  $M$  em  $M'$  e fornecendo novos mergulhos  $f'$  e  $g' : N \rightarrow M'$ , equivalentes.



Segue, do que foi exposto no Capítulo I, que existe u ma variedade  $W^{m+1}$ , com bordo  $\partial W = M \cup M'$ , união disjunta, que admite uma função de Morse  $m : W \rightarrow [0,1]$  com um único ponto crítico de índice  $p+1$ , correspondente à cirurgia realizada por  $h$ . Como tal cirurgia não destroi as imagens de  $f$  e de  $g$  é possível considerar mergulhos  $\psi_f, \psi_g : N \times I \rightarrow W$  com

$$\psi_f(x,0) = i \circ f(x) \quad , \quad \psi_f(x,1) = i' \circ f'(x)$$

$$\psi_g(x,0) = i \circ g(x) \quad , \quad \psi_g(x,1) = i' \circ g'(x)$$

onde  $i : M \rightarrow W$  e  $i' : M' \rightarrow W$  são as inclusões.

Além disso, podemos colar duas cópias de  $W$ , via o difeomorfismo  $H$ , obtendo uma variedade  $V^{m+1}$ , com bordo  $\partial V = M \cup M''$ ,  $M''$  difeomorfa a  $M$ , com uma função de Morse que admite dois pontos críticos de índices complementares que representam a cirurgia realizada por  $h$  e a sua inversa (realizada numa cópia difeomorfa de  $M'$ ). Ainda, com o auxílio do

Teorema do Colarinho, é possível obter de  $\psi_f$  e  $\psi_g$  um mergulho  $\psi : N \times I \rightarrow V$  com  $\psi(x,0) = i \circ f(x)$  e  $\psi(x,1) = i'' \circ \alpha \circ g(x)$ , onde  $\alpha$  é o difeomorfismo de  $M$  a  $M''$  e  $i'' : M'' \rightarrow V$  é a inclusão.

Tudo isto nos sugere dizer que  $f$  e  $g$  são  $C$ -relacionados se:

- (i) existe uma variedade  $V^{m+1}$  com  $\partial V = M_1 \cup M_2$ , união disjunta de cópias difeomorfas de  $M$ , difeomorfismos dados por  $\alpha_1 : M \rightarrow M_1$  e  $\alpha_2 : M \rightarrow M_2$ ;
- (ii) existe um mergulho  $\psi : N \times I \rightarrow V$  com  $\psi(x,0) = i_1 \circ \alpha_1 \circ f(x)$  e  $\psi(x,1) = i_2 \circ \alpha_2 \circ g(x)$ , onde  $i_1 : M_1 \rightarrow V$  e  $i_2 : M_2 \rightarrow V$  são as inclusões;
- (iii) existe uma função de Morse  $m : V \rightarrow [0,1]$  com apenas dois pontos críticos simétricos, isto é, de índices complementares representando cirurgias inversas, tal que  $m \circ \psi(x,t) = t$ ,  $\forall (x,t) \in N \times I$ .

Nos referiremos à estas três condições dizendo que existe uma terna  $(\alpha_1 \vee \alpha_2; \psi, m)$ .

É claro que esta relação é reflexiva e simétrica.

*Definição (3): A C-equivalência (CE)*

A  $C$ -equivalência entre dois mergulhos  $f, g : N \rightarrow M$  é definida como a relação de equivalência gerada pelo  $C$ -relacionamento entre eles, onde impomos a transitividade. Em outras palavras,  $f$  e  $g$  são  $C$ -equivalentes se existe uma seqüência finita de mergulhos de  $N$  em  $M$ ,  $f = \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_k = g$ , tais que

cada  $\rho_i$  é C-relacionado com  $\rho_{i+1}$ , para todo  $i=0,1,\dots,k-1$ .

Em termos de bordismo,  $f$  e  $g$  são C-equivalentes se existe uma variedade  $V^{m+1}$  obtida de um número finito de ternas  $(\alpha_{1,i}, V_{1,i}, \alpha_{2,i}; \psi_i, m_i)$ ,  $0 \leq i \leq k$ , coladas sucessivamente por uma das componentes de bordo.

*Definição (4): O  $C^r$ -relacionamento*

Dois mergulhos  $f, g : N \rightarrow M$  são  $C^r$ -relacionados se existe uma seqüência finita de  $r$  cirurgias realizadas em  $M$ , sem alterar as imagens de  $f$  e de  $g$ , tal que os novos mergulhos resultantes são equivalentes. Trata-se, pois, de uma generalização do C-relacionamento.

Diremos, por outro lado, que  $f$  e  $g$  são  $C^r$ -relacionados se existe uma terna  $(\alpha_1, V, \alpha_2, \psi, m_r)$  onde a função de Morse  $m_r : V \rightarrow [0,1]$  admite um número par de pontos críticos ( $= 2r$ ) onde os últimos  $r$  pontos correspondem, respectivamente, às cirurgias inversas das representadas pelos primeiros  $r$  pontos, em ordem inversa. Em outras palavras, as últimas  $r$  cirurgias devem "desmanchar" o que as primeiras realizaram para se recuperar, no final, uma cópia difeomorfa da variedade  $M$ . Nesta situação, diremos que os pontos críticos de  $m_r$  apresentam uma "simetria".

*Definição (5): A  $C^*$ -equivalência ( $C^*E$ )*

Analogamente à C-equivalência, a  $C^*$ -equivalência é definida como a relação de equivalência gerada pelo  $C^r$ -relacionamento, visto ser este último uma relação claramente reflexiva e simétrica.

Assim construiremos uma variedade  $V$  através de um número finito de ternas  $(\alpha_{1,i} \vee_i \alpha_{2,i}; \psi_i, m_{r_i})$ , cada uma delas representando um  $C_{r_i}$ -relacionamento.

Restringindo as cirurgias permitidas aos tipos  $-1 \leq p_1, \dots, p_\ell \leq n$ , podemos ainda, de maneira idêntica ao que fizemos acima, definir o  $C_{p_1}, \dots, p_\ell$ -relacionamento, a  $C_{p_1}, \dots, p_\ell$ -equivalência  $(C_{p_1}, \dots, p_\ell E)$ , o  $C_{p_1}^r, \dots, p_\ell$ -relacionamento e a  $C_{p_1}^*, \dots, p_\ell$ -equivalência  $(C_{p_1}^*, \dots, p_\ell E)$ .

*Definição (6): A B-equivalência (BE)*

Os mergulhos  $f$  e  $g$  são *B-equivalentes* se nenhuma condição é estabelecida sobre os pontos críticos de  $m$ , ou seja,  $f$  e  $g$  são *B-equivalentes* se existe um par  $(\alpha_1 \vee \alpha_2, \psi)$  com as propriedades conhecidas.

É imediato que se trata de uma relação de equivalência, a mais fraca de todas já estabelecidas.

Tal definição é ainda equivalente a exigir um bordismo de pares entre  $(M, f(N))$  e  $(M, g(N))$  tal que entre as subvariedades  $f(N)$  e  $g(N)$  exista o *bordismo produto*.

Assim, para enfraquecermos ainda mais a relação acima, podemos levantar esta última condição estabelecendo a

*Definição (7): A P-Equivalência (PE)*

$f$  e  $g$  são *P-equivalentes* se os pares  $(M, f(N))$  e  $(M, g(N))$  são bordantes.

Lema 2.1.:

Se os mergulhos  $f, g : N \rightarrow M$  são equivalentes, então  $f$  e  $g$  são C-relacionados.

Basta realizar uma cirurgia trivial, tipo  $p = -1$ , que introduz simplesmente uma esfera  $S^m$ , disjunta de  $M$ .  $\square$

Resulta do Lema 2.1 e das próprias definições que podemos dispor as relações de equivalência numa cadeia ordenada por inclusão, a saber:

$$(E) \subseteq (C_{p_1}, \dots, p_\ell E) \subseteq (CE) \subseteq (C^*E) \subseteq (BE) \subseteq (PE)$$

É claro que  $(C_{p_1}^*, \dots, p_\ell E) \subseteq (C^*E)$  mas a inclusão  $(CE) \subseteq (C_{p_1}^*, \dots, p_\ell E)$  depende, em cada caso, dos  $p_j$ 's.

Lema 2.2.:

Se os mergulhos  $f, g : N \rightarrow M$  são B-equivalentes, então os seus fibrados normais são isomorfos.

Sejam  $i_0, i_1 : N \rightarrow N \times I$  dadas por  $i_0(x) = (x, 0)$  e  $i_1(x) = (x, 1)$  e consideremos  $\nu\psi$ , o fibrado normal do mergulho  $\psi$ .

$$\begin{array}{ccc} & & \nu\psi \\ & & \downarrow \\ N & \xrightarrow[i_1]{i_0} & N \times I \end{array}$$

Como os fibrados induzidos  $i_0^*(\nu\psi)$  e  $i_1^*(\nu\psi)$  são respectivamente equivalentes aos fibrados normais  $\nu f$  e  $\nu g$ , e como  $i_0$  e  $i_1$  são obviamente homotópicas, concluímos que  $\nu f \approx \nu g$ .  $\square$



Sejam  $M$  e  $M'$  variedades diferenciáveis, de dimensão  $m$ , com bordo, e sejam  $V$  e  $V'$  subvariedades de dimensão  $m-1$ , difeomorfas entre si, contidas respectivamente em  $\partial M$  e  $\partial M'$ . Denotemos por  $L = M + M'$  o espaço obtido de  $M$  e  $M'$  identificando-se  $V$  e  $V'$  através do difeomorfismo existente. Utilizando-se um processo de "arredondamento dos cantos", é possível obter  $L$  como variedade diferenciável (fig. 5). Isto será utilizado na demonstração do teorema seguinte, recíproca do Lema 2.2.

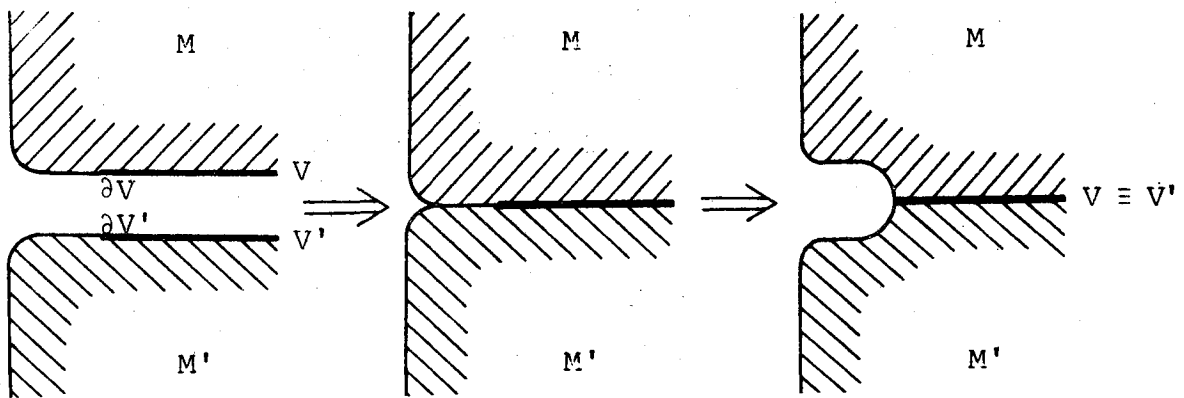


figura 5

*Teorema 2.3.:*

Se  $f, g : N \rightarrow M$  são mergulhos com fibrados normais isomorfos, então  $f$  e  $g$  são B-equivalentes.

Uma vizinhança tubular fechada de  $f(N)$ , em  $M$ , pode ser identificada com o espaço total  $E$  do fibrado  $\xi_f = (E, p, N)$ , associado a  $\nu f$ , o fibrado normal de  $f$ , com fibra  $D^{m-n}$ .

Analogamente, uma vizinhança tubular fechada de  $g(N)$ , em  $M$ , pode ser identificada com o espaço total  $E'$  do fibrado  $\xi_g = (E', p', N)$ , associado a  $vg$ , o fibrado normal de  $g$ , com fibra  $D^{m-n}$ .

Denotemos por  $X = E \times I$  o espaço total do fibrado  $\xi = (E \times I, \bar{p}, N \times I)$ , onde a projeção  $\bar{p}$  é dada por:

$$\bar{p}(e, t) = (p(e), t)$$

Por hipótese, o fibrado  $\xi|_{N \times \{1\}}$  é equivalente a  $\xi_g$ .

Seja  $P = M \times I + X + M \times I$ , a variedade obtida através das respectivas identificações ao longo de vizinhanças tubulares fechadas de  $f(N) \times \{1\}$  na primeira parcela e de  $g(N) \times \{0\}$  na última, após os convenientes "arredondamentos de cantos", (fig. 6).

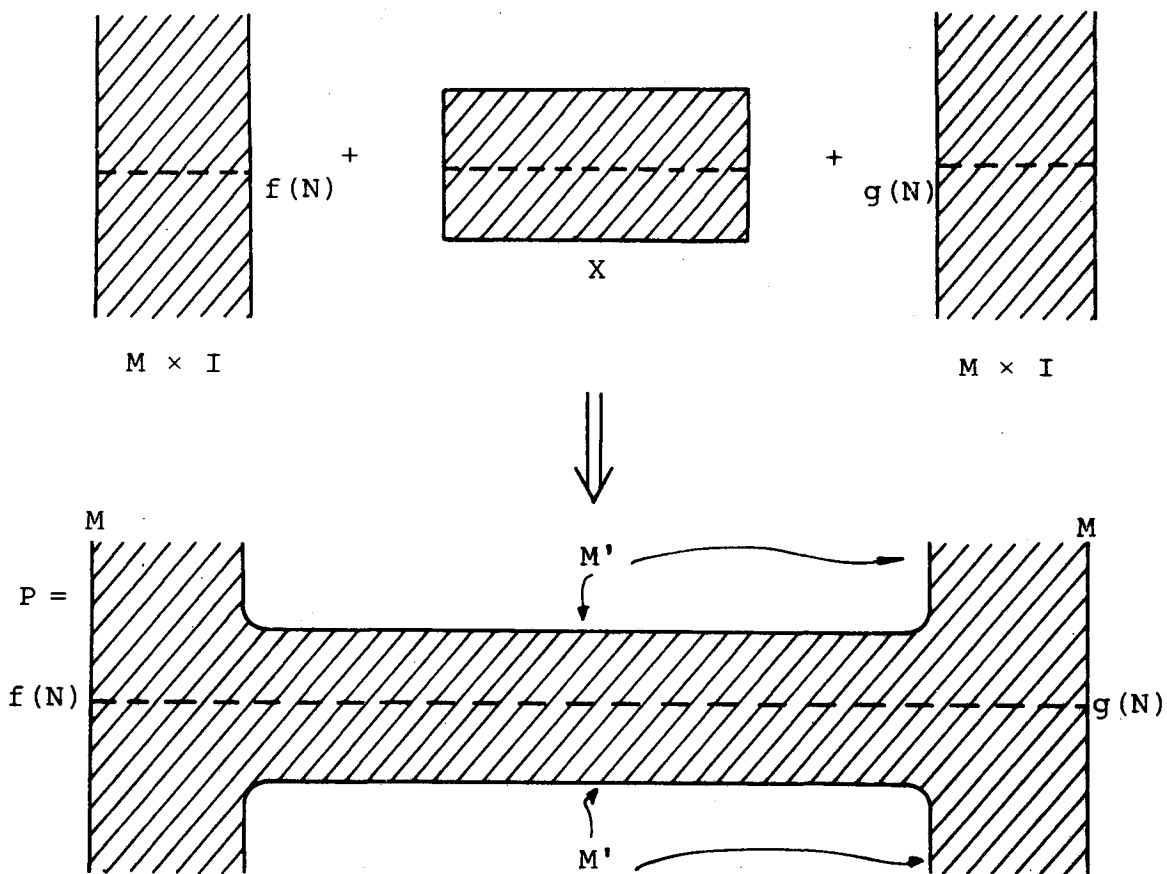


figura 6

Temos que  $P$  é uma variedade com bordo e indiquemos por  $M'$  o complementar de  $M \cup (-M)$  em  $\partial P$ . Segue-se que  $P$  realiza um bordismo de  $M \cup (-M)$  com  $M'$ .

Como  $M \cup (-M)$  é bordante a zero, da transitividade da relação de bordismo,  $M'$  é bordante a zero.

Portanto existe uma variedade  $W$  com  $\partial W = M'$ . Seja  $V = P + W$ .

Pela construção, concluímos que  $V$  exhibe a B-equivalência de  $f$  e  $g$ . □

*Observação:*

A técnica utilizada na demonstração acima, é similar à existente em [14].

*Corolário 2.4.:*

$f$  e  $g$  são B-equivalentes se, e somente se,  $vf \approx vg$ .

Faremos, agora, uma conveniente adaptação no Teorema do Rearranjamento de Bordismos, [8], p. 37.

Para isto, consideremos uma tríade de variedades  $(W; V_0, V_1)$  para a qual existe uma função de Morse  $f: W \rightarrow [0, 1]$  com dois pontos críticos  $p$  e  $p'$  e com  $f(p) < \frac{1}{2} < f(p')$ . Seja  $\xi$  um campo vetorial tipo gradiente para  $f$  tal que o conjunto compacto  $K_p$  dos pontos sobre as trajetórias que passam por  $p$  é disjunto do conjunto compacto  $K_{p'}$  dos pontos sobre as trajetórias que passam por  $p'$ . Seja  $M_0$  uma subvariedade de  $V_0$ , disjunta de  $(K_p \cup K_{p'}) \cap V_0$  e denotemos por  $F$  o conjunto compacto dado pelos pontos sobre as trajetórias que nascem em  $M_0$  e vão, portanto, morrer diretamente em  $V_1$ . Seja

$M_1 = F \cap V_1$ , subvariedade de  $V_1$ , difeomorfa a  $M_0$ , (fig. 7).

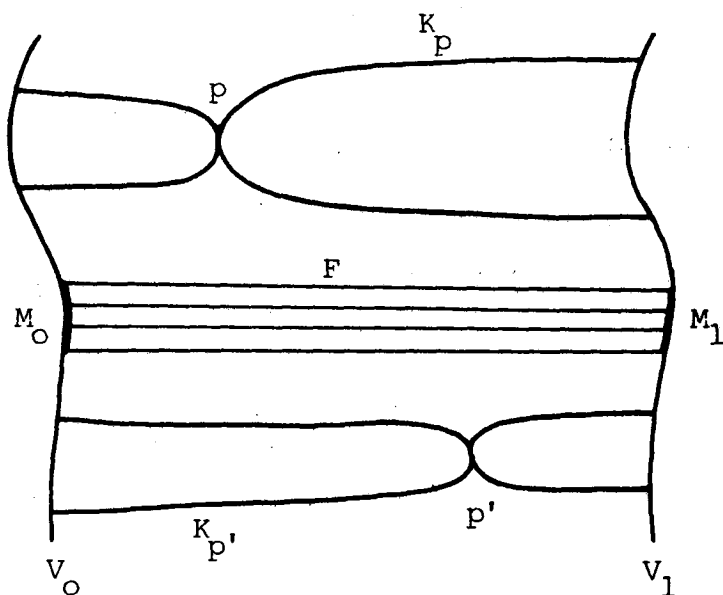


figura 7

Teorema 2.5.:

Sejam  $a, a' \in (0, 1)$ . Nas condições acima, existe uma função de Morse  $g : W \rightarrow [0, 1]$  tal que:

- (i)  $\xi$  é campo vetorial tipo gradiente para  $g$ ;
- (ii) os pontos críticos de  $g$  são ainda  $p$  e  $p'$  e  $g(p) = a$ ,  $g(p') = a'$ ;
- (iii)  $g$  coincide com  $f$  próximo de  $V_0 \cup V_1 \cup F$ .

Consideremos os abertos disjuntos:

$U =$  vizinhança de  $K_p \cap V_0$

$U' =$  vizinhança de  $K_{p'} \cap V_0$

e  $U'' =$  vizinhança de  $M_0$

e consideremos funções diferenciáveis

$$\alpha, \beta : V_0 \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$$

tais que

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \in U \\ \frac{1}{2}, & x \in U' \cup U'' \end{cases}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} 0, & x \in U \cup U'' \\ \frac{1}{2}, & x \in U' \end{cases}$$

Se  $\mu : V_0 \rightarrow [0,1]$  é dada por  $\mu = \alpha + \beta$ , então  $\mu$  pode ser unicamente estendida a uma função diferenciável  $\bar{\mu}:W \rightarrow [0,1]$  que é constante ao longo das trajetórias, valendo 0 próximo de  $K_p$ , 1 próximo de  $K_{p'}$ , e  $\frac{1}{2}$  próximo de  $F$ .

Seja  $G : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  uma função diferenciável com as propriedades:

1.  $\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) > 0$ , para todo  $x,y \in [0,1]$  e  $G(x,y)$  cresce de 0 a 1, quando  $x$  cresce de 0 a 1.
2.  $G(f(p), 0) = a$  e  $G(f(p'), 1) = a'$ .
3.  $G(x,y) = x$ , para  $x$  próximo de 0 ou 1 e para todo  $y$ .
4.  $G(x, \frac{1}{2}) = x$ , para todo  $x$ .

5.  $\frac{\partial G}{\partial x}(x,0) = 1$ , para  $x$  numa vizinhança de  $f(p)$
- $\frac{\partial G}{\partial x}(x,1) = 1$ , para  $x$  numa vizinhança de  $f(p')$ ,
- (fig. 8).

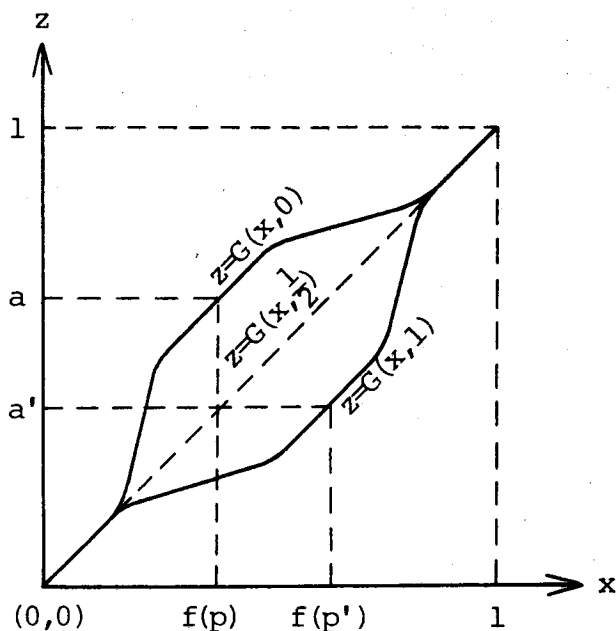


figura 8

Basta definir, então,  $g : W \rightarrow [0,1]$  pondo  $g(q) = G(f(q), \bar{\mu}(q))$ .  $\square$

*Observação:*

Se  $\lambda \geq \lambda'$ , onde  $\lambda = \text{índice de } p$  e  $\lambda' = \text{índice de } p'$ , [8], nos mostra que esta condição é suficiente para que o rearrançamento possa ser efetuado, modificando-se ligeiramente o campo vetorial  $\xi$ , numa vizinhança arbitrariamente

te pequena de  $V = f^{-1}(\frac{1}{2})$ . Como tal modificação pode ser feita ainda no complementar do compacto  $F$ , segue-se que aquela condição é suficiente para que o teorema 2.5 possa ser aplicado.

*Corolário 2.6.:*

No  $C^r$ -relacionamento entre dois mergulhos  $f, g : N \rightarrow M$ , é sempre possível supor que todas as cirurgias do tipo  $p$  sejam realizadas antes que as do tipo  $q$ , com  $p < q$ .

Basta considerarmos  $M_0 = f(N)$ ,  $M_1 = g(N)$ ,  $F = \psi(N \times I)$ , e aplicarmos o teorema 2.5.  $\square$

Como já citamos na Introdução, em [2] mostramos que o  $C$ -relacionamento entre mergulhos de  $S^1$  em variedades de dimensão 2 e 3 coincide com a  $B$ -equivalência. No final do Capítulo III, damos exemplos de mergulhos que não são  $C$ -relacionados apesar de possuírem fibrados normais isomorfos, assim como exemplos de mergulhos  $C$ -equivalentes que não são  $C$ -relacionados. Finalmente, no Capítulo IV, exibimos situações onde a  $C$ -equivalência ou a  $C^*$ -equivalência coincidem com a  $B$ -equivalência.





## CAPÍTULO III

### MERGULHOS DE $S^1 \times S^1$ EM $S^3$

O objetivo deste Capítulo é obter resultados que possibilitem a classificação de todos os mergulhos da superfície de toro  $S^1 \times S^1$  na esfera  $S^3$ , segundo as relações apresentadas no capítulo anterior.

#### 1. A Matriz de Relacionamento Entre Dois Mergulhos

Sejam  $f, g : S^1 \times S^1 \rightarrow S^3$  mergulhos e denotemos por  $T_f = \text{im } f$  e  $T_g = \text{im } g$ .

Com uma conveniente adaptação para o caso  $C^\infty$  do "Teorema do Toro Sólido" em [12], p. 107, verificamos que a imagem de um mergulho de  $S^1 \times S^1$  em  $S^3$  borda um toro sólido em pelo menos um dos lados. Sejam, pois,  $V_f$  e  $V_g$  toros sólidos em  $S^3$  com  $\partial V_f = T_f$  e  $\partial V_g = T_g$  e sejam  $K_f$  e  $K_g$  as respectivas almas.

Os mergulhos  $f$  e  $g$  dão origem a isomorfismos

$$f_* : H_1(S^1 \times S^1; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(T_f; \mathbb{Z})$$

e

$$g_* : H_1(S^1 \times S^1; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(T_g; \mathbb{Z})$$

Consideremos  $a$  e  $b$  geradores de  $H_1(T_f)$  representados por curvas simples e fechadas que se situam em  $T_f$ , respectivamente, como *meridiano* obtido pela interseção de  $T_f$  com uma secção normal à alma, e como *paralelo* obtido pela interseção de

$T_f$  com uma superfície de Seifert que se apoia na alma de  $T_f$ .

Analogamente, obtemos  $a'$  e  $b'$ , geradores para  $H_1(T_g)$ .

*Observação:*

O gerador  $b$  acima, como também  $b'$ , a menos de orientação, está bem definido, isto é, sua escolha não depende da particular superfície de Seifert considerada. De fato, se  $\tilde{b} \in H_1(T_f)$  é a classe de uma curva obtida pela interseção de outra superfície de Seifert com  $T_f$ , então  $\tilde{b} = \xi_1 a \pm b$ ,  $\xi_1 \in \mathbb{Z}$ .

Se  $i : T_f \rightarrow S^3 - \overset{\circ}{V}_f$  é a inclusão, temos:

$$0 = i_*(\tilde{b}) = \xi_1 i_*(a) \pm \overset{0}{\parallel} i_*(b) = \xi_1 i_*(a)$$

$$\therefore \xi_1 = 0 \quad e$$

$$b = \pm \tilde{b}$$

Denotemos por  $\alpha$  e  $\beta$  geradores de  $H_1(S^1 \times S^1)$  tais que  $f_*(\alpha) = a$  e  $f_*(\beta) = b$ .

Suponhamos que

$$g_*(\alpha) = r_1 a' + s_1 b'$$

e

$$g_*(\beta) = r_2 a' + s_2 b'.$$

A matriz de relacionamento entre os mergulhos  $f$  e  $g$  é definida como sendo:

$$M(f,g) = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{bmatrix}$$

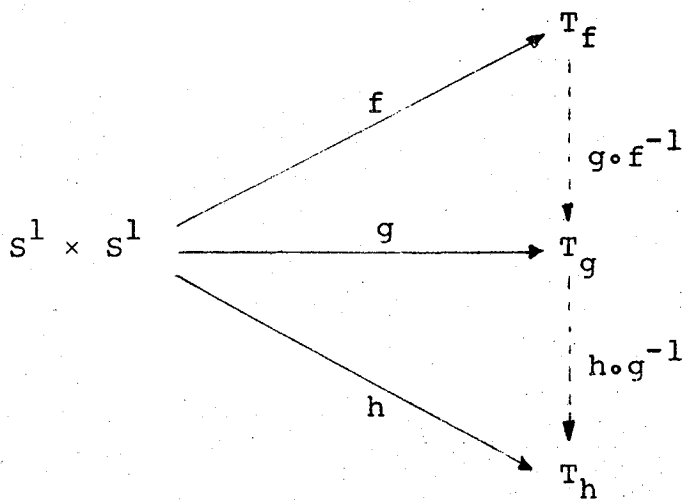
É claro que tal matriz pertence ao subgrupo de  $GL(\mathbb{Z}, 2)$ , constituído das matrizes de determinante igual a  $\pm 1$ .

Lema 3.1.:

Se  $f, g, h : S^1 \times S^1 \rightarrow S^3$  são mergulhos, então

$$M(f,h) = M(f,g) \cdot M(g,h)$$

Representemos também por  $f$  e  $g$  os difeomorfismos fornecidos pelos respectivos mergulhos e que comparecem no diagrama abaixo:



Nestas condições, temos:

$$(g \circ f^{-1})_* (a) = g_* \circ f_*^{-1} (a) = g_* (\alpha) = r_1 a' + s_1 b'$$

$$(g \circ f^{-1})_* (b) = g_* \circ f_*^{-1} (b) = g_* (\beta) = r_2 a' + s_2 b'$$

Logo a matriz  $M(f, g)$  coincide com a matriz do isomorfismo

$$(g \circ f^{-1})_* : H_1(T_f) \rightarrow H_1(T_g),$$

relativamente às bases  $a, b \in H_1(T_f)$  e  $a', b' \in H_1(T_g)$ .

Raciocínio análogo pode ser feito para as matrizes  $M(g, h)$  e  $M(f, h)$ .

Como  $(h \circ f^{-1})_* = (h \circ g^{-1})_* \circ (g \circ f^{-1})_*$ , concluímos que

$$M(f, h) = M(f, g) \cdot M(g, h). \quad \square$$

*Corolário:*

$$M(g, f) = M(f, g)^{-1}. \quad \square$$

## 2. A Equivalência

Seja  $V$  um toro sólido, isto é, uma variedade difeomorfa a  $S^1 \times D^2$  e seja  $h : \partial V \rightarrow \partial V$  um difeomorfismo. Sabemos que  $h$  admite uma extensão a um autodifeomorfismo de  $V$  se, e somente se,  $h$  aplica meridiano em meridiano. Deste resultado segue imediatamente o

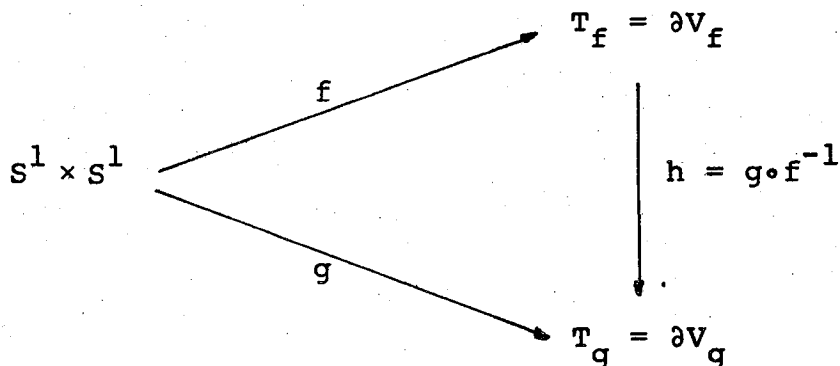
*Lema 3.2.:*

Dois mergulhos não enodados  $f, g : S^1 \times S^1 \rightarrow S^3$  são

equivalentes se, e somente se,

$$M(f,g) = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Basta considerar o diagrama



e aplicar o resultado acima. □

Suponhamos, agora, que  $f$  e  $g : S^1 \times S^1 \rightarrow S^3$  são *mergulhos enodados* e denotemos por  $K_f$  e  $K_g$  os nós dados pelas almas de  $V_f$  e  $V_g$ .

Para facilitar a notação, façamos as seguintes convenções a respeito de orientações:

- os geradores  $a$  e  $b$ , em  $T_f$ , são escolhidos com orientações arbitrárias, como anteriormente;
- para o gerador  $a'$ , em  $T_g$ , escolhemos a orientação tal que

$$g_*(\alpha) = r_1 a' + s_1 b' \quad \text{com} \quad r_1 \geq 0$$

e para  $b'$  a orientação tal que

$$g_*(\beta) = r_2 a' + s_2 b' \quad \text{com} \quad s_2 \geq 0;$$

- os nós  $K_f$  e  $K_g$  serão orientados segundo  $b$  e  $b'$ .

Temos:

Lema 3.3.:

Para que  $f$  e  $g$  sejam equivalentes são *necessárias* as condições:

$$(i) \quad M(f,g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii)  $K_f$  e  $K_g$  são equivalentes, como nós orientados.

Consideremos  $f \sim g$  e seja  $H : S^3 \rightarrow S^3$  um difeomorfismo tal que  $H \circ f = g$ .

Logo,

$M(f,g)$  = matriz de  $(H|T_f)_*$

Como  $H|T_f$  se estende para o interior de  $V_f$ , temos  $(H|T_f)_*(a) = \pm a'$  e como  $b$  e  $b'$  são homólogos a zero em  $S^3 - \dot{V}_f$  e  $S^3 - \dot{V}_g$ , temos  $(H|T_f)_*(b) = \pm b'$ .

Finalmente, em vista das convenções feitas sobre as orientações, concluímos que

$$M(f,g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o que prova (i). A condição (ii) é óbvia. □

Desejamos, a seguir, estabelecer uma recíproca para o lema acima. Notemos que, se vale (ii), e  $H : S^3 \rightarrow S^3$  é um difeomorfismo que exhibe a equivalência de  $K_f$  e  $K_g$ ,  $H$  aplica uma vizinhança tubular de  $K_f$  sobre uma vizinhança tubular de  $K_g$  e podemos supor que  $H(V_f) = V_g$ . Considerando a restrição

$$H|_{T_f} : T_f \rightarrow T_g,$$

teremos necessariamente

$$\text{matriz } (H|_{T_f})_* = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Provaremos que:

*Lema 3.4.:*

As condições (i) e (ii) do lema anterior são também suficientes se

$$(a) \text{ matriz de } (H|_{T_f})_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$(b) \text{ matriz de } (H|_{T_f})_* = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com a condição adicional dos nós serem "amphicheiral".

Sabemos por [12], p. 26, que dois autodifeomorfismos da superfície de toro são homotópicos se, e só se, são isotópicos e se, e só se, possuem a mesma matriz.

$$\text{Logo, se matriz } (H|T_f)_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = M(f,g)$$

segue-se que existe uma isotopia  $h_t : T_f \rightarrow T_g$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , com  $h_0(x) = H|T_f(x)$  e  $h_1(x) = g \circ f^{-1}(x)$ .

Pelo Lema de Extensão de Isotopias ([8], p. 63),  $h_t$  se estende a uma isotopia

$$H_t : S^3 \rightarrow S^3, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

com  $H_0(x) = H(x)$ . É claro que o difeomorfismo  $H_1 : S^3 \rightarrow S^3$ , satisfaz  $H_1 \circ f = g$ .

Por outro lado, se

$$\text{matriz de } (H|T_f)_* = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e os nós são "amphicheiral", a equivalência deles pode ser exibida também por um difeomorfismo  $H' : (S^3, K_f) \rightarrow (S^3, K_g)$  com

$$\text{matriz } (H'|T_f)_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e a prova segue como acima. □



3. A  $C_0$ -equivalência

Denotaremos por

$$R_f = \text{int } V_f$$

$$R_g = \text{int } V_g$$

$$R = S^3 - (V_f \cup V_g)$$

Como a transitividade foi imposta na definição da  $C_0$ -equivalência, sempre consideraremos os mergulhos  $f$  e  $g$  em uma "situação padrão", na qual as imagens  $T_f$  e  $T_g$  são disjuntas e  $R$  aparece como a região obtida do complementar de um toro sólido, do qual retiramos um outro toro sólido.

Para o estudo do  $C_0$ -relacionamento entre  $f$  e  $g$ , efetuaremos uma única cirurgia sobre  $S^3$  através de um mergulho  $\psi : S^0 \times D^3 \rightarrow S^3$  e distinguiremos três casos:

- (I)  $f$  e  $g$  são não enodados;
- (II)  $f$  é não enodado e  $g$  é enodado;
- (III)  $f$  e  $g$  são enodados.

Antes de analisarmos cada caso, passaremos a construir dois lemas auxiliares.

Para o primeiro, fixemos um mergulho qualquer  $f: S^1 \times S^1 \rightarrow S^3$  e realizemos sobre  $S^3$  uma cirurgia via um mergulho  $\psi: S^0 \times D^3 \rightarrow S^3$  que aplica uma célula em  $R_f$  e a outra em  $S^3 - V_f$ . Esta cirurgia transforma  $S^3$  em  $S^2 \times S^1$ .

Seja  $A$  a variedade obtida de  $S^2 \times S^1$  cortando-se ao longo de  $T_f$ . Logo,  $\partial A = T_f \cup T_f$  e  $A$  pode ser vista como  $A_1 \cup A_2$ , onde

$$A_1 = V_f - \text{disco}$$

$$A_2 = (\text{fecho do complementar de } V_f) - \text{disco}$$

e a identificação é feita através da esfera  $S^2$ , comum aos bordos de  $A_1$  e  $A_2$  (fig. 9-a).

Agora  $A_1$  é difeomorfa a um disco do qual retiramos o interior de um toro sólido não enodado (fig. 9-b).

Colando-se, então,  $A_1$  com  $A_2$  obtemos uma representação para a variedade  $A$ , (fig. 9-c), que justifica o

Lema 3.5.:

A variedade  $A$  é difeomorfa ao espaço complementar de um "link"  $L$  com duas componentes não entrelaçadas entre si, sendo uma trivial e a outra dada pelo nó  $K_f$ .  $\square$

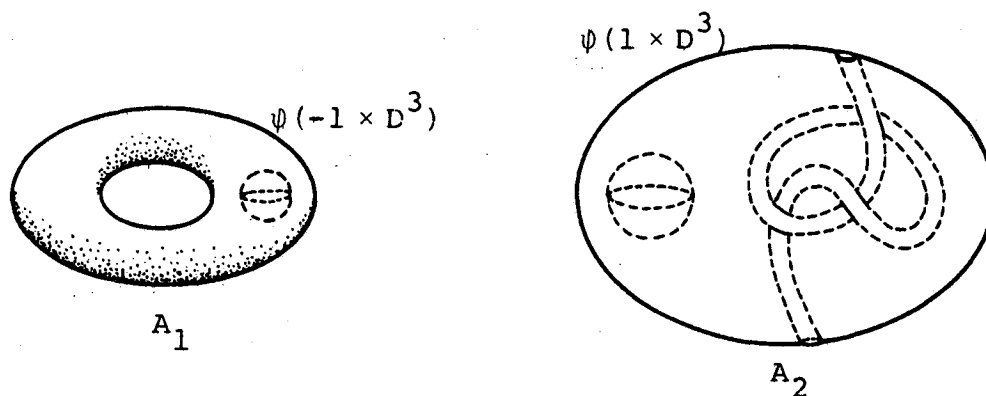


figura 9-a

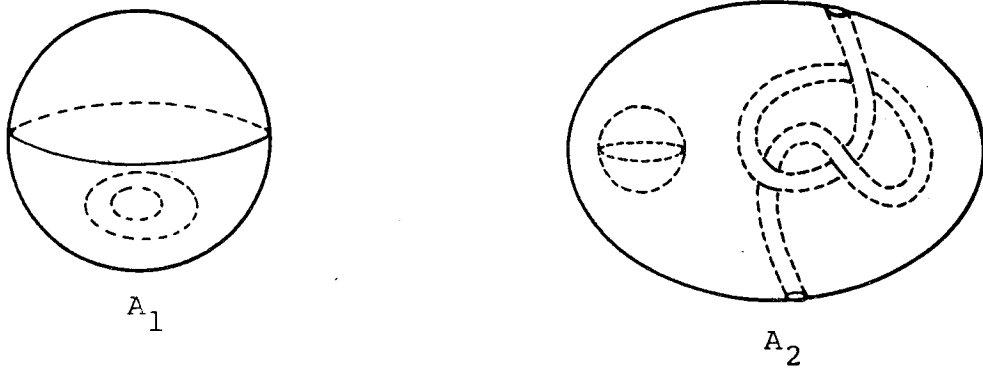


figura 9-b

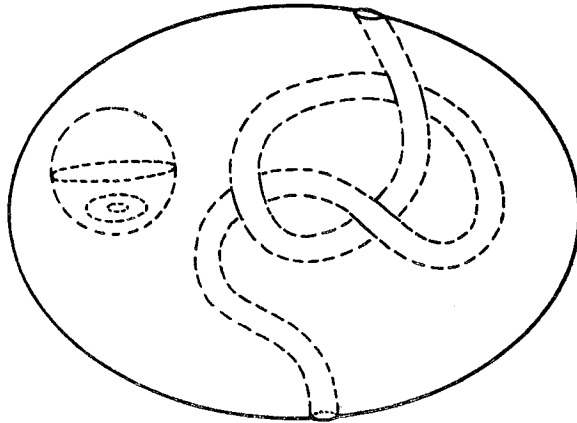


figura 9-c

Para a construção do segundo lema auxiliar, seja agora  $A$  a variedade obtida do toro sólido  $S^1 \times D^2$  do qual retiramos o interior de um outro toro sólido não enodado e contido numa célula tridimensional do primeiro.

$A$  é uma variedade com bordo e  $\partial A$  é constituído de duas componentes conexas  $T_1$  e  $T_2$ , ambas difeomorfas a  $S^1 \times S^1$ .

Em  $T_1$ , fixemos  $a_1$  e  $b_1$  como meridiano e paralelo

canônicos, respectivamente; da mesma forma,  $a_2$  e  $b_2$  em  $T_2$ .

Seja  $\sigma : T_1 \rightarrow T_2$ , o difeomorfismo que identifica meridianos de  $T_1$  com meridianos de  $T_2$  e paralelos com paralelos. Com esta identificação, a variedade  $A$  se transforma em  $S^2 \times S^1$ . Seja  $p : (A, \partial A) \rightarrow S^2 \times S^1$ , a projeção natural (fig. 10).

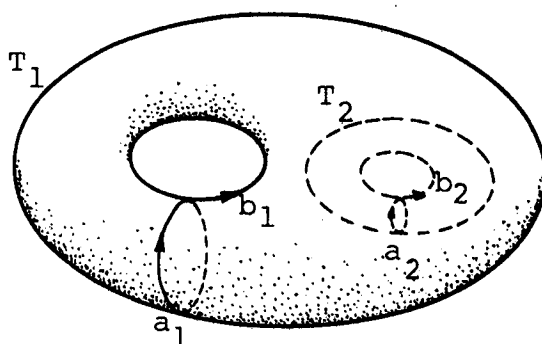


figura 10

Lema 3.6.:

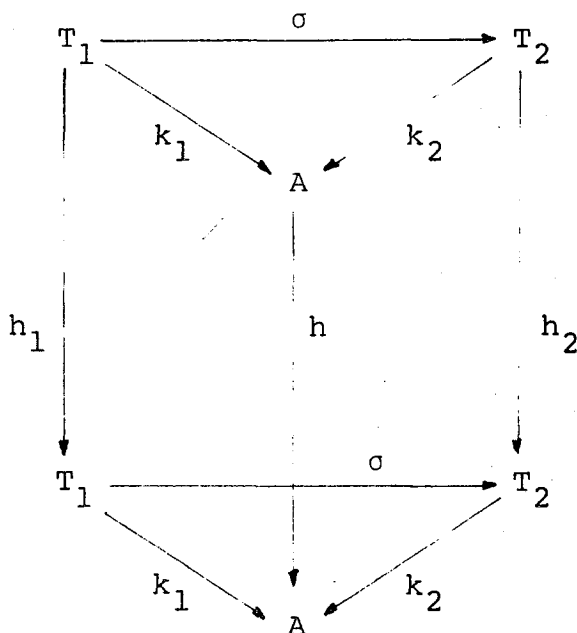
Todo difeomorfismo  $h : (A, \partial A) \rightarrow (A, \partial A)$ , compatível com a projeção  $p$ , quando restrito a qualquer de suas componentes de bordo, a induzida em homologia (dimensão 1) é um isomorfismo de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  sobre si mesmo que aplica geradores canônicos em geradores canônicos, podendo eventualmente inverter orientações ou trocar geradores.

Faremos a demonstração em duas partes:

- (i) Suponhamos que  $h$  aplica a componente  $T_1$  sobre  $T_1$  e, portanto,  $T_2$  sobre  $T_2$ .

Sejam  $h_i = h|_{T_i} : T_i \rightarrow T_i$ ,  $i = 1, 2$  e  $k_i : T_i \rightarrow A$ ,  $i = 1, 2$  as inclusões.

É imediato que os quadros laterais do diagrama abaixo são comutativos.



Denotemos por  $\tilde{b} = k_{1*}(b_1)$  e  $\tilde{a} = k_{2*}(a_2)$ , geradores de  $H_1(A)$ . É claro que

$$k_{1*}(a_1) = 0 = k_{2*}(b_2).$$

Os homomorfismos  $h_{i*} : H_1(T_i) \rightarrow H_1(T_i)$ ,  $i = 1, 2$ , podem ser identificados com matrizes  $2 \times 2$ , constituídos por números inteiros e cujos determinantes valem  $\pm 1$ . Procuraremos determinar as possíveis formas que tais matrizes podem assumir.

Suponhamos que

$$h_{1*}(a_1) = Xa_1 + Yb_1$$

e

$$h_{1*}(b_1) = Za_1 + Wb_1$$

Temos:

$$k_{1*} \circ h_{1*}(a_1) = Xk_{1*}(a_1) + Yk_{1*}(b_1) = Y\tilde{b}$$

e

$$k_{1*} \circ h_{1*}(b_1) = Zk_{1*}(a_1) + Wk_{1*}(b_1) = W\tilde{b}$$

Por outro lado,

$$h_* \circ k_{1*}(a_1) = h_*(0) = 0$$

e

$$h_* \circ k_{1*}(b_1) = h_*(\tilde{b})$$

$$\therefore Y\tilde{b} = 0 \quad \implies \underline{Y = 0}$$

$$W\tilde{b} = h_*(\tilde{b})$$

Como  $\sigma_*(a_1) = a_2$  e  $\sigma_*(b_1) = b_2$ , segue-se que

$$\begin{aligned} h_{2*}(a_2) &= h_{2*}(\sigma_*(a_1)) = \sigma_* \circ h_{1*}(a_1) = \\ &= \sigma_*(Xa_1 + Yb_1) = Xa_2 + Yb_2 \end{aligned}$$

Da mesma forma,  $h_{2*}(b_2) = Za_2 + Wb_2$ . Segue, daí, que

$$\text{matriz de } h_{1*} = \text{matriz de } h_{2*} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}$$

Temos:

$$k_{2*} \circ h_{2*}(a_2) = Xk_{2*}(a_2) + Yk_{2*}(b_2) = X\tilde{a}$$

$$k_{2*} \circ h_{2*}(b_2) = Zk_{2*}(a_2) + Wk_{2*}(b_2) = Z\tilde{a}$$

Como

$$h_* \circ k_{2*}(a_2) = h_*(\tilde{a})$$

e

$$h_* \circ k_{2*}(b_2) = h_*(0) = 0,$$

segue-se que

$$x_{\tilde{a}} = h_*(\tilde{a})$$

e

$$z_{\tilde{a}} = 0 \quad \implies \quad \underline{z = 0}$$

$$\therefore \text{matriz de } h_{1*} = \text{matriz de } h_{2*} = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

(ii)  $h : (A, T_1, T_2) \rightarrow (A, T_2, T_1)$ , inverte as componentes de  $\partial A$ .

Fixemos  $h_0 : (A, T_1, T_2) \rightarrow (A, T_2, T_1)$ , a inversão natural de  $A$  (fig. 11):

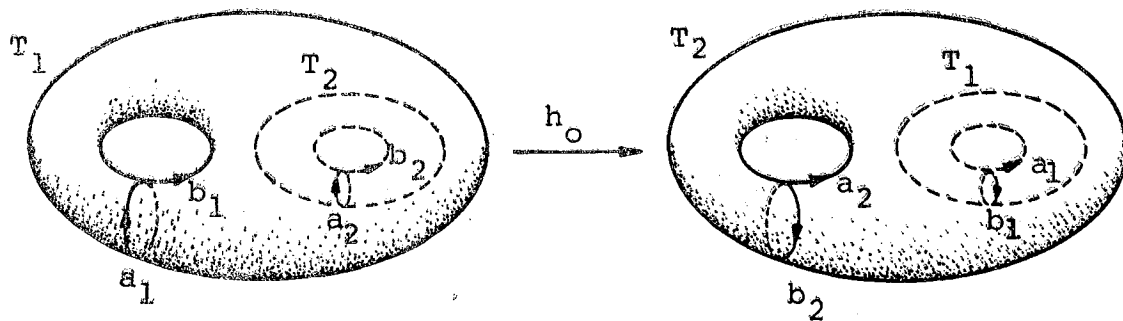


figura 11

Chamando

$$h_{o_1} = h_o|_{T_1} : T_1 \rightarrow T_2$$

$$h_{o_2} = h_o|_{T_2} : T_2 \rightarrow T_1,$$

teremos

$$\text{matriz de } h_{o_1*} = \text{matriz de } h_{o_2*} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Segue-se que o difeomorfismo  $h$  pode ser fatorado num difeomorfismo  $\tilde{h} : (A, T_1, T_2) \rightarrow (A, T_1, T_2)$ , do primeiro caso, seguido de  $h_o$ :

$$\begin{array}{ccc} (A, T_1, T_2) & \xrightarrow{h} & (A, T_2, T_1) \\ & \searrow \tilde{h} & \uparrow h_o \\ & & (A, T_1, T_2) \end{array}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \text{matriz de } h_{1*} &= (\text{matriz de } h_{o_1*}) (\text{matriz de } \tilde{h}_1) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Similarmente para a matriz de  $h_{2*}$ .

□



Iniciemos, então, o estudo do  $C_0$ -relacionamento.

(I)  $f$  e  $g$  são não enodados:

A fig. 12 expõe a situação admitida como "padrão":

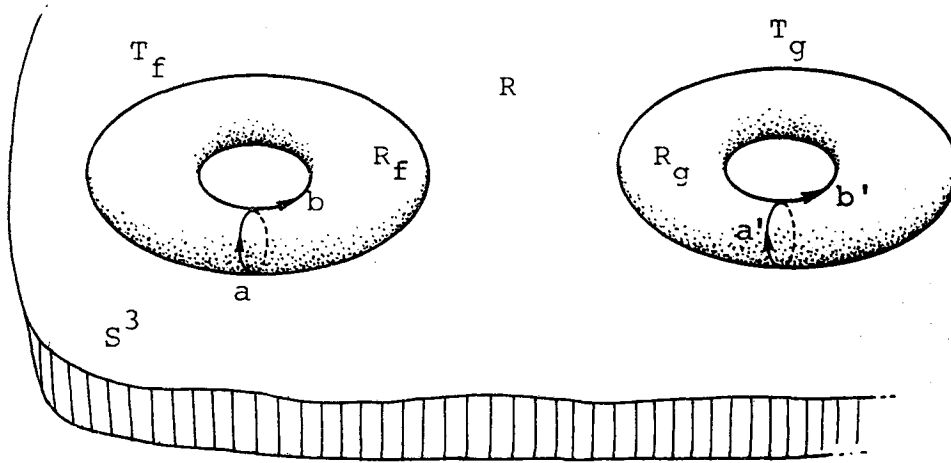


figura 12

(I.a)  $\psi$  aplica uma célula de  $S^0 \times D^3$  em cada região  $R_f$  e  $R_g$ .

Cortando-se simultaneamente ao longo de  $T_f$  e  $T_g$ , a variedade  $S^2 \times S^1$  pode ser vista como obtida dos sólidos  $V_1$  e  $V_2$ , onde  $V_1$  é a soma conexa  $V_1 = \bar{R}_f \# \bar{R}_g$  e  $V_2 = \bar{R}$ , através da identificação de seus bordos comuns  $T_f \cup T_g$ , conforme fig. 13, a seguir.

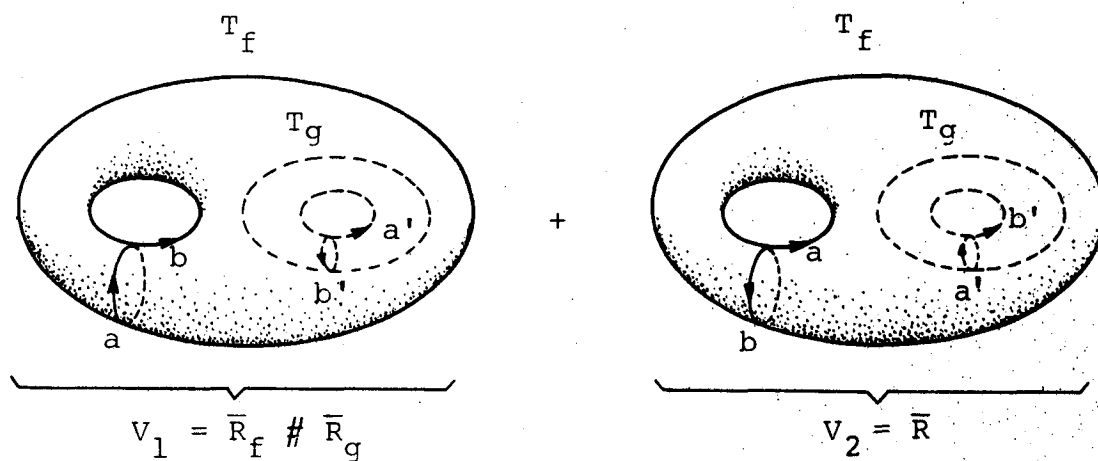


figura 13

Fazendo a identificação de  $V_1$  e  $V_2$ , inicialmente via a componente  $T_g$ , obtemos uma variedade com bordo, nas condições de variedade  $A$ , descrita no Lema 3.6, com

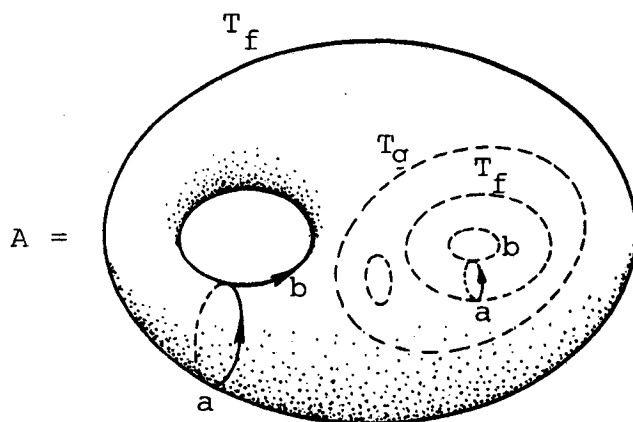
$$\partial A = T_f \cup T_f$$


figura 14

Seja  $H : S^2 \times S^1 \rightarrow S^2 \times S^1$  um difeomorfismo tal que  $H(T_f) = T_f$ . Nestas condições,  $H$  se levanta, pela projeção  $p : (A, \partial A) \rightarrow S^2 \times S^1$  a um difeomorfismo  $h : (A, \partial A) \rightarrow (A, \partial A)$  como no Lema 3.6.

$$\begin{array}{ccc}
 (A, \partial A) & \xrightarrow{p} & (S^2 \times S^1, T_f) \\
 \downarrow h & & \downarrow H \\
 (A, \partial A) & \xrightarrow{p} & (S^2 \times S^1, T_f)
 \end{array}$$

donde

matriz de  $(H|T_f)_*$  = matriz de  $(h|T_f)_*$  =

$$= \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Consideremos  $\theta_0 : S^2 \times S^1 \rightarrow S^2 \times S^1$ , o difeomorfismo que inverte canonicamente as componentes  $V_1$  e  $V_2$ :

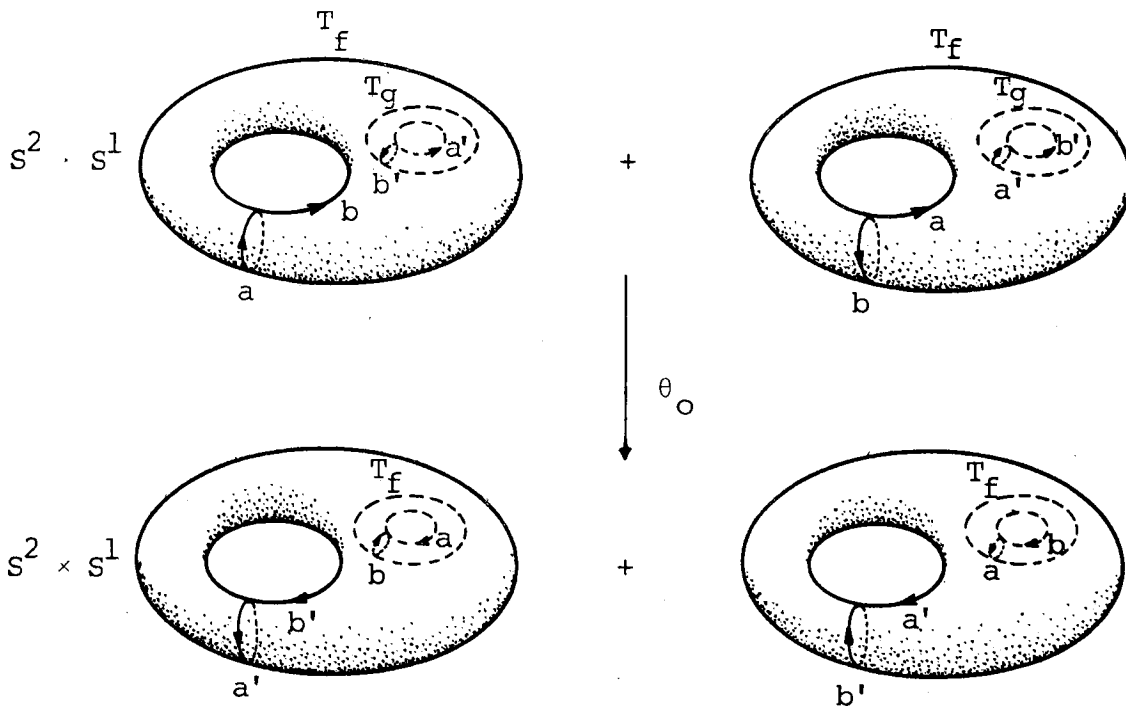


figura 15

Logo,

$$(\theta_o)_*(a) = -a'$$

$$(\theta_o)_*(b) = -b'$$

$$\theta_o(T_f) = T_g$$

e

$$\text{matriz de } (\theta_o|_{T_f})_* : H_1(T_f) \rightarrow H_1(T_g) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Supomos, finalmente, que  $f$  e  $g$  são  $C_0$ -relacionados. Então, existe um difeomorfismo  $\tilde{H} : S^2 \times S^1 \rightarrow S^2 \times S^1$  com  $\tilde{H}(T_f) = T_g$ .

Tal difeomorfismo se fatora segundo o diagrama abaixo, onde  $H(T_f) = T_f$ :

$$\begin{array}{ccc} S^2 \times S^1 & \xrightarrow{\tilde{H}} & S^2 \times S^1 \\ & \searrow H & \uparrow \theta_o \\ & & S^2 \times S^1 \end{array}$$

Logo:

$$\begin{aligned} M(f,g) &= \text{matriz de } (\tilde{H}|_{T_f})_* = \\ &= (\text{matriz de } (\theta_o|_{T_f})_*) (\text{matriz de } (H|_{T_f})_*) = \\ &= \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(I.b)  $\psi(S^0 \times D^3) \subset R$ :

Supondo que  $f$  e  $g$  sejam  $C_0$ -relacionados, seja  $H: S^2 \times S^1 \rightarrow S^2 \times S^1$  o difeomorfismo tal que  $H \circ f = g$ . Como necessariamente  $H(V_f) = V_g$ , segue-se que  $H_*(a) = \pm a'$  e  $H_*(b) = \alpha a' \pm b'$ . Além disso, os complementares de  $V_f$  e  $V_g$ , em  $S^2 \times S^1$  são difeomorfos a uma variedade obtida de um toro sólido, realizando-se uma cirurgia do tipo  $\underline{0}$  em seu interior e como tal cirurgia não impede que  $b$  e  $b'$  sejam homólogos a zero em tais complementares, segue-se que

$$\begin{aligned} 0 &= H_*(b) = \alpha a' \pm b' \\ &\parallel \\ &0 \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha = 0 \quad e$$

$$M(f, g) = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

(I.c)  $\psi$  aplica uma célula  $S^0 \times D^3$  em cada região  $R$  e  $R_f$  (ou  $R_g$ ).

Nestas condições  $f$  e  $g$  não podem ser  $C_0$ -relacionados pois, em  $S^2 \times S^1$ ,  $T_f$  (ou  $T_g$ ) não borda e  $T_g$  (ou  $T_f$ ) continua bordando um toro sólido.

Resumindo os casos acima, temos:

Lema 3.7.:

Dois mergulhos  $f, g : S^1 \times S^1 \rightarrow S^3$ , não enodados, são  $C_0$ -relacionados se, e somente se, são equivalentes.

(II)  $f$  é não enodado e  $g$  é enodado:

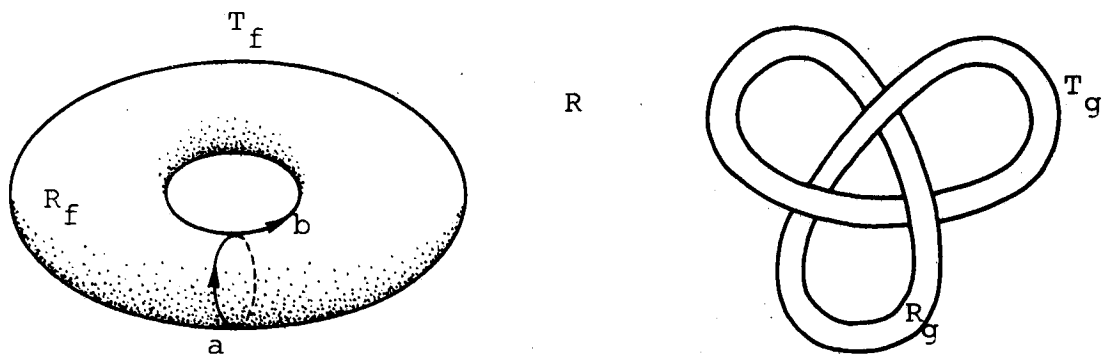


figura 16

(II.a)  $\psi$  aplica uma célula de  $S^0 \times D^3$  em cada região  $R_f$  e  $R$ .

Na variedade obtida após a cirurgia,  $T_f$  não borda e  $T_g$  continua bordando um toro sólido. Logo  $f$  e  $g$  não são  $C_0$ -relacionados.

(II.b) Idem, em  $R_g$  e  $R$ .

Raciocínio análogo, com  $T_f$  bordante e  $T_g$  não bordante.

(II.c) Idem, em  $R_f$  e  $R_g$ .

Suponhamos que exista um difeomorfismo

$$H : (S^2 \times S^1, T_f) \rightarrow (S^2 \times S^1, T_g)$$

que exiba o  $C_0$ -relacionamento entre  $f$  e  $g$ .

Seja  $A$ , a variedade obtida de  $S^2 \times S^1$ , cortando-se ao longo de  $T_f$  e seja  $A'$ , obtida cortando-se ao longo de  $T_g$ .

Logo,

$$\partial A = T_f \cup T_f$$

e

$$\partial A' = T_g \cup T_g$$

Sejam:

$$p : (A, T_f, T_f) \rightarrow (S^2 \times S^1, T_f)$$

e

$$p' : (A', T_g, T_g) \rightarrow (S^2 \times S^1, T_g)$$

as respectivas identificações. Segue-se que  $H$  se levanta a um difeomorfismo

$$h : (A, T_f, T_f) \rightarrow (A', T_g, T_g).$$

Como no Lema 3.5,  $A$  pode ser vista como o espaço complementar de um "link"  $L_1$  com duas componentes triviais não entrelaçadas entre si e  $A'$  como o espaço complementar de um "link"  $L_2$ , também com duas componentes não entrelaçadas, sendo uma trivial e outra não, pelo Lema 1.8, chegamos a uma contradição. Logo  $f$  e  $g$  não são  $C_0$ -relacionados.

$$(II.d) \psi(S^0 \times D^3) \subset R.$$

Se  $f$  e  $g$  forem  $C_0$ -relacionados, o difeomorfismo  $H$  que exhibe tal relacionamento, deve aplicar necessariamente o toro sólido  $V_f$  sobre o toro sólido  $V_g$ , assim como  $S^2 \times S^1 - \overset{\circ}{V}_f$  sobre  $S^2 \times S^1 - \overset{\circ}{V}_g$ . Mas, por Van Kampen:

$$\pi_1(S^2 \times S^1 - \overset{\circ}{V}_f) \approx \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

e

$$\pi_1(S^2 \times S^1 - \overset{\circ}{V}_g) \approx G * \mathbb{Z}$$

onde  $G$  é o grupo do nó  $K_g$  (não trivial). Logo, pelo Lema 1.8,  $\pi_1(S^2 \times S^1 - \overset{\circ}{V}_f) \neq \pi_1(S^2 \times S^1 - \overset{\circ}{V}_g)$  e  $f$  e  $g$  não podem ser  $C_0$ -relacionados.

$$(II.e) \psi(S^0 \times D^3) \subset R_f.$$

Análogo ao caso anterior.

$$(II.f) \psi(S^0 \times D^3) \subset R_g.$$

$f$  e  $g$  não podem ser  $C_0$ -relacionados pois, em  $S^2 \times S^1$ ,  $T_f$  borda um toro sólido e  $T_g$  borda duas variedades não difeomorfas ao toro sólido.

Em consequência, temos o

Lema 3.8.:

Um mergulho  $f : S^1 \times S^1 \rightarrow S^3$  não enodado, não pode ser  $C_0$ -relacionado com um mergulho  $g : S^1 \times S^1 \rightarrow S^3$ , enodado.



(III)  $f$  e  $g$  são enodados:

Os casos: (III.a)  $\psi(S^0 \times D^3) \subset R_f$ , (III.b)  $\psi(S^0 \times D^3) \subset R_g$ , (III.c)  $\psi$  aplica uma célula em  $R_f$  (ou  $R_g$ ) e a outra em  $R$ , são todos elementares, com raciocínios idênticos a outros já realizados. Abordaremos, apenas, os seguintes:

(III.d)  $\psi(S^0 \times D^3) \subset R$ .

A variedade resultante da cirurgia

$$S^2 \times S^1 = (S^3 - \psi(S^0 \times D^3)) \cup_{\psi} D^1 \times S^2,$$

pode ser vista como obtida de duas componentes  $C_1$  e  $C_2$ , ambas difeomorfas a  $D^1 \times S^2$ , coladas através do bordo comum  $S^0 \times S^2$ , via  $\psi$  (fig. 17).

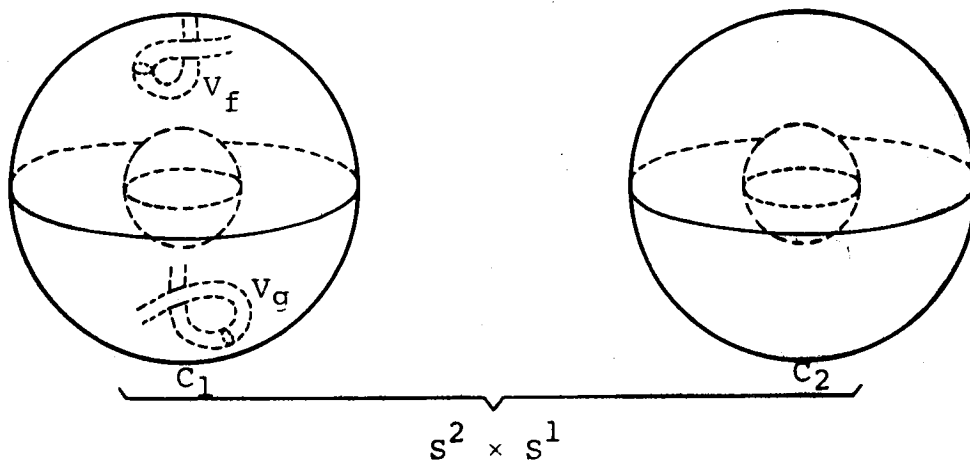


figura 17

Supondo que exista um difeomorfismo  $H : S^2 \times S^1 \rightarrow S^2 \times S^1$ , com  $H \circ f = g$ , a induzida em homotopia

$$H_* : \pi_2(S^2 \times S^1) \rightarrow \pi_2(S^2 \times S^1)$$

é um automorfismo do grupo cíclico infinito e como  $H(V_f) = V_g$ , podemos modificar  $H$ , por uma isotopia que mantém  $V_g \subset C_1$ , de tal maneira que a imagem de uma célula que envolve  $T_f$  e contida em  $C_1$ , seja uma célula - que envolve  $T_g$  - inteiramente contida em  $C_1$ . Mais ainda, podemos supor que  $H(C_1) \subset C_1$ .

Em [9], Munkres constrói os grupos  $\Gamma^n$ , introduzidos por Milnor e Thom, que são os grupos de difeomorfismos de  $S^{n-1}$  que preservam a orientação, módulo aqueles que se estendem para o disco  $D^n$  e, em [10], Munkres exhibe uma demonstração que  $\Gamma^3 = 0$ .

Logo, a restrição  $H|_{C_1} : (C_1, T_f) \rightarrow (H(C_1), T_g)$  pode ser estendida a um difeomorfismo  $\bar{H} : (S^3, T_f) \rightarrow (S^3, T_g)$ , o qual mostra que os mergulhos  $f$  e  $g$  são equivalentes. Assim, a cirurgia realizada foi irrelevante.

(III.e)  $\psi$  aplica cada célula de  $S^0 \times D^3$  em  $R_f$  e  $R_g$ .

Como foi feito em (II.c), sejam:

- 1)  $H : (S^2 \times S^1, T_f) \rightarrow (S^2 \times S^1, T_g)$ , um difeomorfismo que determina o  $C_0$ -relacionamento entre  $f$  e  $g$ ;
- 2)  $A$  e  $A'$  as variedades obtidas de  $S^2 \times S^1$  pelos cortes ao longo de  $T_f$  e  $T_g$ , respectivamente, portanto:  
 $A = T_f \cup T_f$  e  $A' = T_g \cup T_g$ ;
- 3)  $p : (A, T_f, T_f) \rightarrow (S^2 \times S^1, T_f)$   
 $p' : (A', T_f, T_g) \rightarrow (S^2 \times S^1, T_g)$ ,

as identificações e;

4)  $h : (A, T_f, T_f) \rightarrow (A', T_g, T_g)$  o difeomorfismo obtido pelo levantamento de  $H$ :

$$\begin{array}{ccc}
 (A, T_f, T_f) & \xrightarrow{p} & (S^2 \times S^1, T_f) \\
 \downarrow h & & \downarrow H \\
 (A', T_g, T_g) & \xrightarrow{p'} & (S^2 \times S^1, T_g)
 \end{array}$$

O espaço  $A$  pode, então, ser visualizado como o complementar de um "link"  $L_1 = K_f \cup K$ , constituído pelo nó  $K_f$  e por uma componente trivial  $K$ , não entrelaçada com  $K_f$ , e o espaço  $A'$  como o complementar de um "link"  $L_2 = K_g \cup K$ , onde  $K$  também é trivial e não entrelaçada com o nó  $K_g$ :

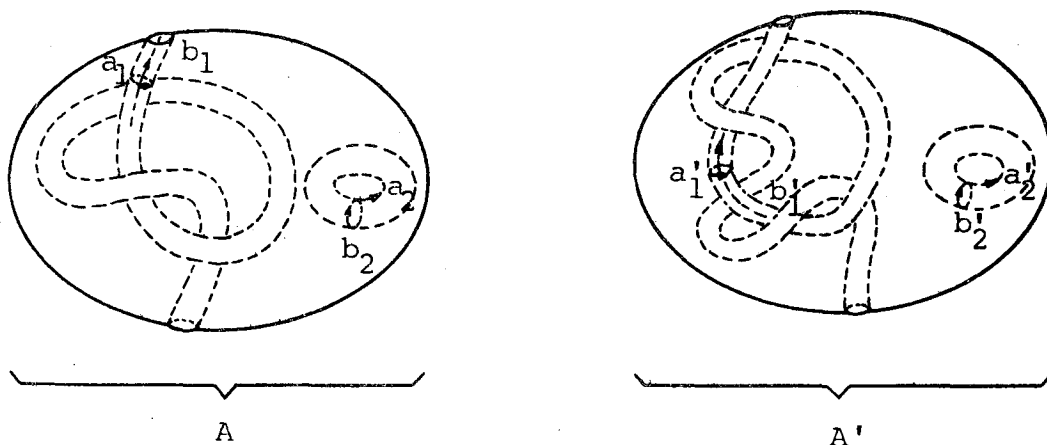


figura 18

Temos:

$$p(a_1) = p(a_2) = a$$

$$p(b_1) = p(b_2) = b$$

$$p'(a'_1) = p'(a'_2) = a'$$

$$p'(b'_1) = p'(b'_2) = b'$$

É claro que  $h$  deve satisfazer

$$h(a_1) = \pm a'_1 + mb'_1$$

$$h(b_1) = \pm b'_1$$

$$h(a_2) = \pm a'_2$$

$$h(b_2) = na'_2 \pm b'_2, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Como,

$$p' \circ h(a_1) = H \circ p(a_1) = H(a) = H \circ p(a_2) = p' \circ h(a_2)$$

e

$$p' \circ h(b_1) = H \circ p(b_1) = H(b) = H \circ p(b_2) = p' \circ h(b_2),$$

teremos:

$$p'(\pm a'_1 + mb'_1) = p'(\pm a'_2)$$

$$\therefore \pm a' + mb' = \pm a'$$

$$\therefore \underline{m = 0}$$

$$p'(\pm b'_1) = p'(na'_2 \pm b'_2)$$

$$\therefore \pm b' = na' \pm b'$$

$$\therefore \underline{n = 0}$$

Assim, em cada componente de bordo,  $h$  aplica meridiano em meridiano. Segue-se que  $h$  se estende a um difeomorfismo de  $S^3$  em  $S^3$  que exhibe a equivalência dos mergulhos  $f$  e  $g$ .

Daí segue o

*Lema 3.9.:*

Dois mergulhos  $f$  e  $g : S^1 \times S^1 \rightarrow S^3$  enodados são  $C_0$ -relacionados se, e somente se, são equivalentes.  $\square$

Dos lemas 3.7, 3.8 e 3.9 concluímos que no estudo do  $C$ -relacionamento entre mergulhos de  $S^1 \times S^1$  em  $S^3$ , as cirurgias do tipo  $\underline{0}$  são irrelevantes, o que é traduzido pelo

*Teorema 3.10.:*

A  $C_0$ -equivalência entre mergulhos de  $S^1 \times S^1$  em  $S^3$  coincide com a equivalência entre os mesmos.  $\square$

#### 4. A $C_1$ -equivalência

No Capítulo III, de [2], ao analisarmos o problema dos nós em variedades tridimensionais, concluímos que dois mergulhos  $\psi_0$  e  $\psi_1$  de  $S^1$  naquelas variedades são  $C_1$ -relacionados se, e so se, possuem fibrados normais isomorfos. Em partiucular, tomando-se nós em variedades orientáveis, dois deles são sempre  $C_1$ -relacionados.

Naquele trabalho, demos uma descrição da única cirurgia realizada para modificar o espaço subjacente aos nós e tornã-los equivalentes na nova variedade e verificamos que, apos

tal cirurgia, tais nós apareciam em posições extraordinariamente simples: como bordos de uma subvariedade  $W$  difeomorfa ao cilindro  $S^1 \times D^1$ .

Esta técnica será empregada nesta secção e é apresentada, como Apêndice, no final deste trabalho.

No estudo da  $C_1$ -equivalência, como antes, podemos considerar os mergulhos  $f, g : S^1 \times S^1 \rightarrow S^3$  com imagens  $T_f$  e  $T_g$  disjuntas e a  $S^3$  decomposta em três regiões bem definidas  $R_f$ ,  $R_g$  e  $R$ .

Assumindo, ainda, as convenções sobre as orientações dos geradores  $a$ ,  $b$ ,  $a'$  e  $b'$  estabelecidas na secção anterior, temos o

*Teorema 3.11.:*

Para que os mergulhos  $f, g : S^1 \times S^1 \rightarrow S^3$  sejam  $C_1$ -relacionados, é necessário e suficiente que a matriz de relacionamento entre eles seja dada por

$$M(f, g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix},$$

para algum  $\alpha \in \mathbb{Z}$ .

Supondo que  $f$  e  $g$  sejam  $C_1$ -relacionados, é claro que a cirurgia deve ser realizada necessariamente na região  $R$ .

Assim, na variedade cirurgiada,  $T_f$  e  $T_g$  continuam bordando toros sólidos. Isto implica que o difeomorfismo que verifica a equivalência dos novos mergulhos deve aplicar meridiano em meridiano;

$$\therefore M(f,g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Reciprocamente, admitindo que a matriz de relacionamento entre  $f$  e  $g$  seja do tipo acima, (fig. 19), realizamos em  $R$  a cirurgia descrita em [2], (vide Apêndice), que coloca os n $\circ$ s que representam as classes  $f_*(\beta)$  e  $g_*(\beta)$  como bordos de um cilindro  $W$  (fig. 20).

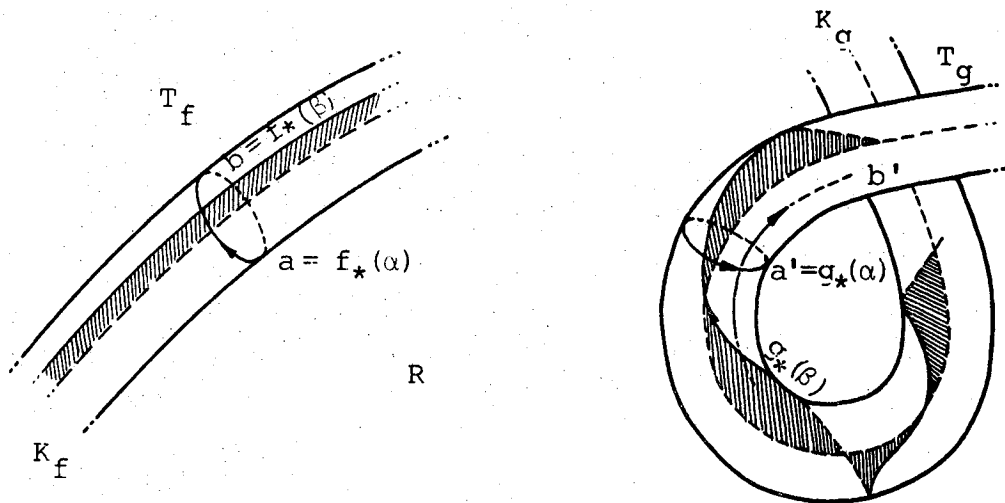


figura 19

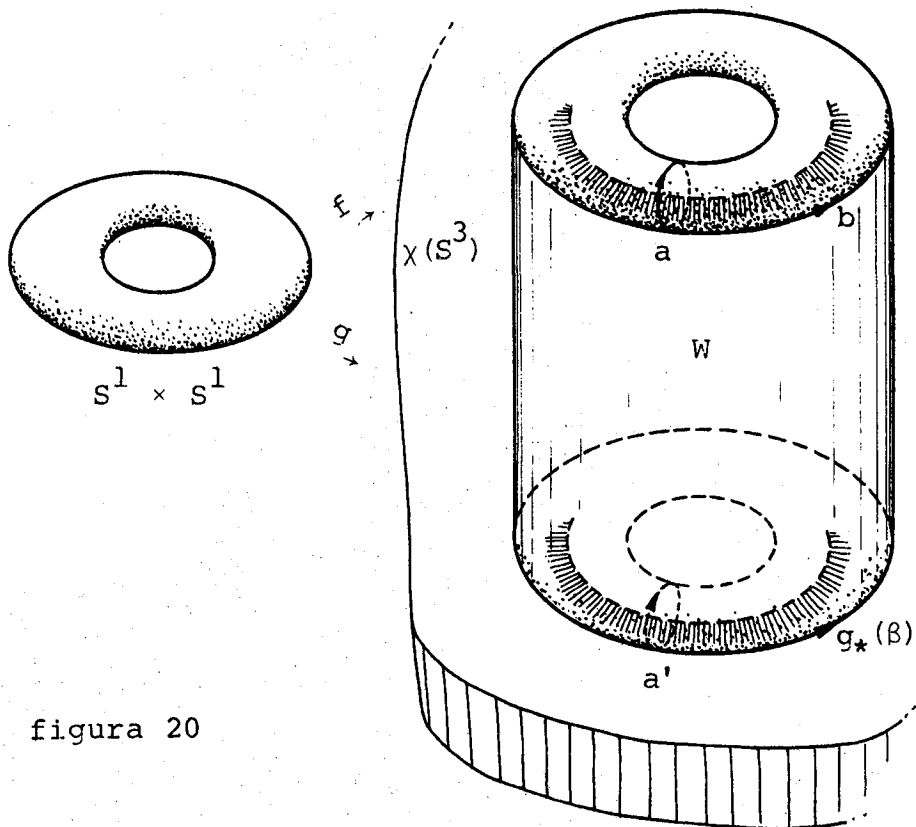


figura 20

Se  $\chi(S^3)$  representa a nova variedade, pelo Lema 1.2,  $\chi(S^3)$  é orientada. Logo, o fibrado normal de  $W$  em  $\chi(S^3)$  é trivial e podemos supor que os toros  $V_f$  e  $V_g$  estejam mergulhados no espaço total daquele fibrado.

Assim, por isotopia sobre  $\chi(S^3)$ , podemos conseguir um difeomorfismo

$$H : (\chi(S^3), T_f) \rightarrow (\chi(S^3), T_g)$$

A exemplo do que fizemos na demonstração do Lema 3.4,  $H$  pode ainda ser deformado, isotopicamente, a outro difeomorfismo

$$H' : \chi(S^3) \rightarrow \chi(S^3), \quad \text{com } H' \circ f = g. \quad \square$$

Levantadas as convenções sobre as orientações dos geradores, resulta do lema 3.3 e teoremas 3.10 e 3.11 que, se a matriz  $M(f,g)$  não for do tipo

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ \alpha & \pm 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{Z},$$

então  $f$  e  $g$  não são  $C$ -relacionados, apesar de possuírem fibrados normais isomorfos.

Lema 3.12.:

O grupo multiplicativo  $GL(\mathbb{Z}, 2)$  das matrizes  $2 \times 2$ , inteiras e invertíveis ( $\Delta$  de determinante  $= \pm 1$ ) é gerado pelo conjunto:



$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ver [11], p. 139. □

*Teorema 3.13.:*

Existe uma única classe de C-equivalência de mergulhos de  $S^1 \times S^1$  em  $S^3$ .

Dados dois mergulhos  $f, g : S^1 \times S^1 \rightarrow S^3$ , pelo lema anterior

$$M(f, g) = \prod_{i=0}^n A_i,$$

onde cada  $A_i$  é uma matriz geradora. Agora, é possível construir mergulhos  $h_0 = f, h_1, \dots, h_{n+1} = g$  tais que

$$M(h_i, h_{i+1}) = A_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad \square$$

Para a última observação, notemos que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

indicam o C-relacionamento entre mergulhos em situações geométricas bem simples, ao passo que, para comparecer uma matriz do tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é preciso que no C-relacionamento correspondente esteja envolvido um mergulho *não enodado* a fim de que possamos fazer a inversão dos geradores.

Exemplo:

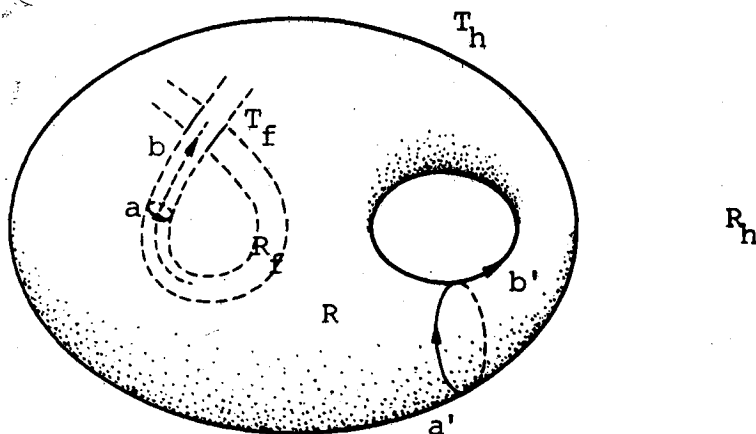


figura 21

Na figura acima, consideremos

$$h_*(\alpha) = -a' \quad , \quad h_*(\beta) = b'$$

A matriz de  $f$  e  $h$ , em relação às bases  $a, b \in H_1(T_f)$  e  $a', b' \in H_1(T_h)$  é dada por

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$M(f, h) = (\text{em relação às bases } a, b \in H_1(T_f) \text{ e } b', a' \in H_1(T_h)!) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*Corolário:*

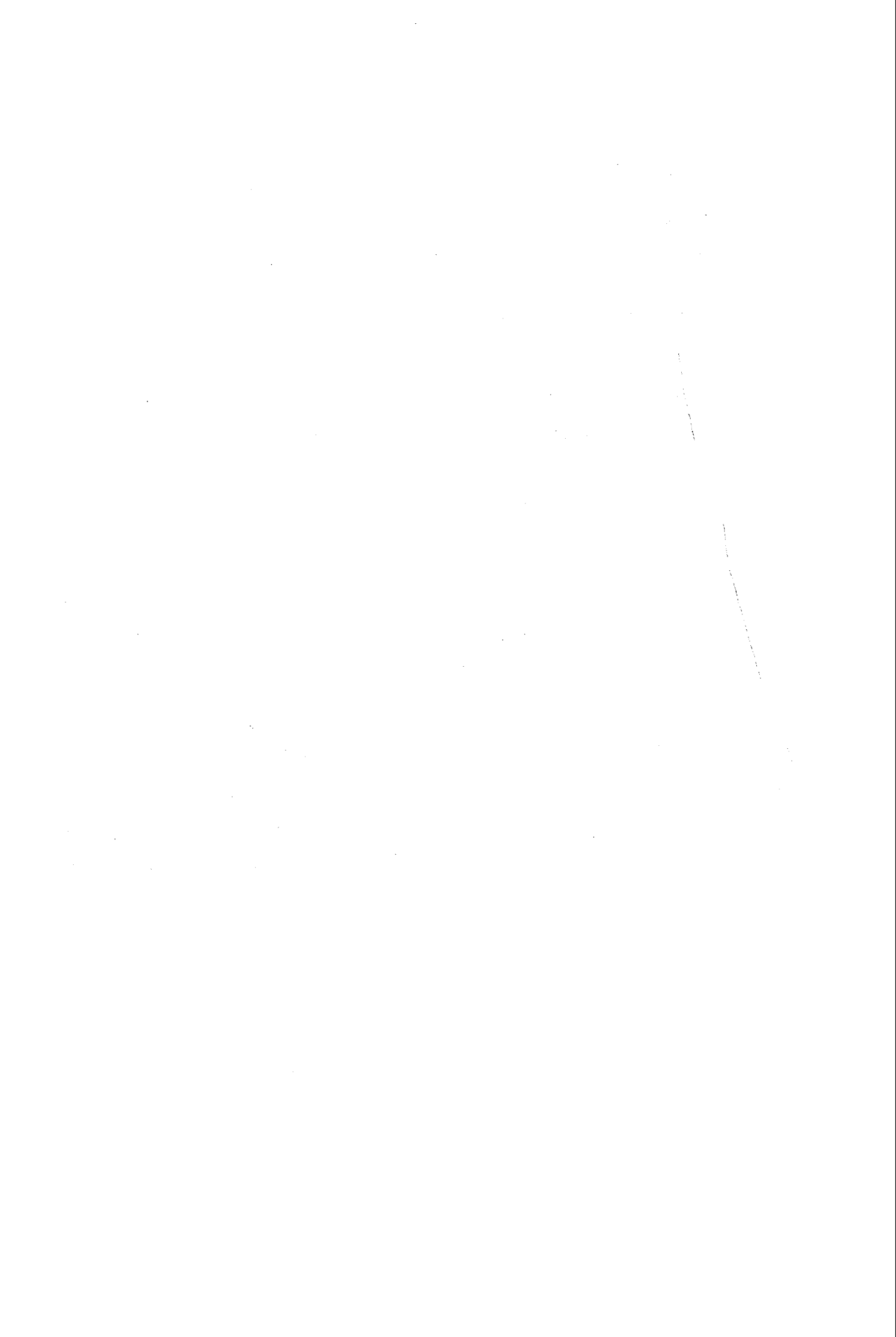
Seja  $M^3$  diferenciável, fechada, orientável e conexa. Quaisquer dois mergulhos  $f, g : S^1 \times S^1 \rightarrow M^3$  tais que  $T_f = \text{im } f$  e  $T_g = \text{im } g$  bordam toros sólidos em  $M^3$ , são  $C^*$ -equivalentes.

Em [16], p. 126, Wallace mostra que por uma seqüência finita de  $r$  cirurgias, *todas do tipo 1*, a variedade  $M^3$  pode ser transformada na esfera  $S^3$ . Podemos supor que os toros sólidos bordados por  $T_f$  e  $T_g$  estejam contidos em células que não sejam destruídas pelas cirurgias acima.

Pelo teorema 3.13, existem mergulhos  $f = \rho_0, \dots, \dots, \rho_1, \dots, \rho_\ell = g$  de  $S^1 \times S^1$  em  $S^3$ , tais que cada  $\rho_i$  é  $C$ -relacionado com  $\rho_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, \ell-1$ .

Como as  $r$  cirurgias inversas das constantes da seqüência acima, *também são do tipo 1*, podemos ainda supor que elas preservem as imagens de cada mergulho  $\rho_i$ , isto é, podemos considerar que estes mergulhos já existam como mergulhos de  $S^1 \times S^1$  em  $M^3$ .

Agora, cada  $\rho_i$  é  $C^{r+1}$ -relacionado com  $\rho_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, \ell-1$ , donde  $f$  e  $g$  são  $C^*$ -equivalentes.  $\square$



## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS GERAIS

Neste Capítulo procuraremos, em três etapas, obter alguns resultados gerais.

Iniciaremos com o estudo de mergulhos de esferas utilizando, essencialmente, técnicas empregadas por M. V. Mielke em [6]; seguiremos com o caso de mergulhos de variedades bidimensionais e encerraremos com uma generalização da segunda etapa.

#### 1. Mergulhos de Esferas

Definição:

Seja

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & B \\ & & \downarrow p \\ & & X \end{array}$$

um G-fibrado principal sobre um espaço topológico  $X$ ,  $x_0 \in X$ , e  $G_0 = p^{-1}(x_0)$ . Suporemos que  $G$  é um grupo topológico conexo por caminhos.

Na seqüência de homotopia deste fibrado

$$\begin{array}{ccccc} \dots & \xrightarrow{p_*} & \pi_k(X, x_0) & \xrightarrow{\Delta_k} & \pi_{k-1}(G_0, y_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{k-1}(B, y_0) \\ & & \searrow \chi_k & & \uparrow \xi_{k-1} & & \\ & & & & \pi_{k-1}(G, e) & & \end{array}$$

$\cong$

define-se

$$\chi_k = \xi_{k-1}^{-1} \circ \Delta_k : \pi_k(X, x_0) \rightarrow \pi_{k-1}(G, e),$$

$k \geq 1$ , como sendo o  $k$ -ésimo homomorfismo característico do fibrado dado, onde

$$\xi_{k-1} : \pi_{k-1}(G, e) \rightarrow \pi_{k-1}(G_0, y_0)$$

é o isomorfismo induzido em homotopia, por uma "aplicação admissível" do fibrado (ver [13], p. 38).

Seja

$$\begin{array}{c} \text{SO}(n) \rightarrow U \\ \downarrow \\ \text{BSO}(n) \end{array}$$

o fibrado universal para o grupo ortogonal  $\text{SO}(n)$  e seja  $f : N \rightarrow \text{BSO}(n)$  uma aplicação qualquer.

Lema 4.1.:

Se  $\chi_k$  é o homomorfismo característico do fibrado universal e  $\chi'_k$  é o homomorfismo característico do fibrado induzido por  $f$ , então  $\chi'_k = \chi_k \circ f_*$ .

A prova segue da comutatividade dos quadros do diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(N, x_1) & \xrightarrow{\Delta'_k} & \pi_{k-1}(G_1, y_1) \\ \downarrow f_* & \searrow \chi'_k & \nearrow \xi'_{k-1} \\ & \pi_{k-1}(\text{SO}(n), e) & \\ & \nearrow \chi_k & \searrow \xi_{k-1} \\ \pi_k(\text{BSO}(n), x_2) & \xrightarrow{\Delta_k} & \pi_{k-1}(G_2, y_2) \end{array}$$

(Note that the arrows from  $\pi_{k-1}(\text{SO}(n), e)$  to  $\pi_{k-1}(G_1, y_1)$  and  $\pi_{k-1}(G_2, y_2)$  are labeled with  $\cong$ .)

onde  $f'$  é a restrição à fibra  $G_1$  da aplicação induzida por  $f$  nos espaços totais dos fibrados.  $\square$

*Definição:*

Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Uma *aplicação tangencial* é qualquer aplicação  $T : M \rightarrow BSO(n)$  tal que o fibrado induzido  $T^*(U)$  seja equivalente ao fibrado principal, associado ao fibrado tangente de  $M$ .

*Definição:*

Seja  $G \rightarrow B$   
 $\downarrow$   
 $S^r$

um  $G$ -fibrado principal sobre a esfera  $S^r$  e seja  $\tau \in \pi_r(S^r)$  um gerador. Então  $\chi_r(\tau) \in \pi_{r-1}(G)$  é denominado *classe característica* do fibrado sobre  $S^r$ .

*Lema 4.2.:*

Seja  $x \in \pi_r(M)$  uma classe de homotopia de uma variedade  $M$  que pode ser representada por um mergulho  $f : S^r \rightarrow M$ . Então  $\chi_r \circ T_*(x)$  é a classe característica do fibrado principal, associado ao fibrado tangente de  $M$ , restrito à  $S^r$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{ccc}
 \pi_r(S^r) & \xrightarrow{f_*} & \pi_r(M) \\
 & \searrow^{(Tf)_*} & \downarrow T_* \\
 & & \pi_r(BSO(n)) \\
 & & \downarrow \chi_r \\
 & & \pi_{r-1}(SO(n))
 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc}
 S^r & \xrightarrow{f} & M \xrightarrow{T} BSO(n) \\
 \downarrow U & \implies & \\
 & & \downarrow
 \end{array} & & 
 \end{array}$$

Se  $\chi'_r$  é o  $r$ -ésimo homomorfismo característico do fibrado induzido  $(Tf)^*(U)$ , então a classe característica deste fibrado, pelo Lema 4.1, é dada por

$$\chi'_r(\tau) = \chi_r \circ (Tf)_*(\tau) = \chi_r \circ T_*(x) \quad \square$$

Sejam

$$\begin{array}{ccc} SO(n) \rightarrow B_n & e & SO(k) \rightarrow B_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^r & & S^r \end{array}$$

fibrados principais sobre a esfera  $S^r$ , com classes características  $x \in \pi_{r-1}(SO(n))$  e  $y \in \pi_{r-1}(SO(k))$ . Consideremos as inclusões canônicas

$$i_1 : SO(n) \rightarrow SO(n+k) \quad e \quad i_2 : SO(k) \rightarrow SO(n+k)$$

dadas por

$$i_1(\omega) = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad e \quad i_2(\omega) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$$

Lema 4.3.:

Se  $x \oplus y$  denota a classe característica da soma de Whitney,

$$\begin{array}{c} SO(n+k) \rightarrow B_n \oplus B_k \\ \downarrow \\ S^r \end{array}$$

então,



$$x \oplus y = i_{1*}(x) + i_{2*}(y).$$

Ver [6]. □

*Corolário:*

Seja  $x \in \pi_r(M)$  que pode ser representada por um mergulho  $f : S^r \rightarrow M$ . Então,

$$\chi_r \circ T_*(x) = i_{1*}(\tau) + i_{2*}(\eta),$$

onde  $\tau \in \pi_{r-1}(SO(r))$  é a classe característica do fibrado tangente principal de  $S^r$  e  $\eta \in \pi_{r-1}(SO(n-r))$  é a classe característica do fibrado normal principal de  $f$ . □

*Lema 4.4.:*

Se  $r \leq n-1$  então  $i_{1*}(\tau) = 0$

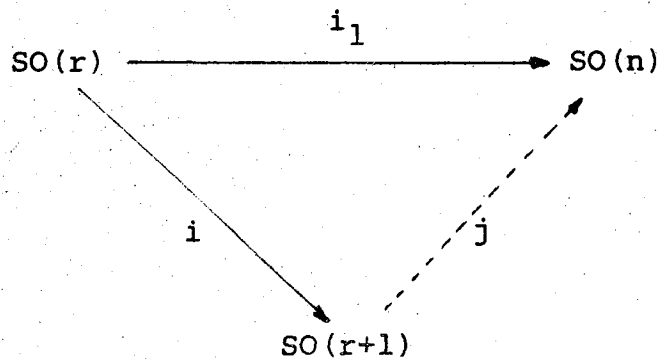
Por [13], p. 121, o fibrado tangente principal sobre  $S^r$  é dado por

$$\begin{array}{c} SO(r+1) \\ \downarrow \\ \frac{SO(r+1)}{SO(r)} \simeq S^r \end{array}$$

e a classe característica deste fibrado pertence ao núcleo de

$$i_* : \pi_{r-1}(SO(r)) \rightarrow \pi_{r-1}(SO(r+1))$$

Logo, se  $r \leq n-1$ , a inclusão  $i_1$  pode ser fatorada por



e teremos:

$$i_{1*}(x) = j_* \circ i_*(x) = 0 \quad \square$$

Lema 4.5.:

Se  $r \leq n-r-1$ , então  $i_{2*}$  é um isomorfismo.

Sabemos, por [13], p. 117, que  $\pi_i(\text{SO}(m), \text{SO}(k)) = 0$ , para  $i < k \leq m$ . Na seqüência

$$\begin{array}{c}
 \dots \rightarrow \pi_r(\text{SO}(n), \text{SO}(n-r)) \rightarrow \pi_{r-1}(\text{SO}(n-r)) \rightarrow \\
 \xrightarrow{i_{2*}} \pi_{r-1}(\text{SO}(n)) \rightarrow \pi_{r-1}(\text{SO}(n), \text{SO}(n-r)) \dots
 \end{array}$$

se  $r \leq n-r-1 \rightarrow \pi_r(\text{SO}(n), \text{SO}(n-r)) = \pi_{r-1}(\text{SO}(n), \text{SO}(n-r)) = 0$   
e, portanto,  $i_{2*}$  é um isomorfismo.  $\square$

Definição:

Para  $r \leq n-r-1$ , definimos o homomorfismo

$$\theta_r : \pi_r(M) \rightarrow \pi_{r-1}(\text{SO}(n-r))$$

através da composição:

$$\pi_r(M) \xrightarrow{T_*} \pi_r(\text{BSO}(n)) \xrightarrow{\chi_r} \pi_{r-1}(\text{SO}(n)) \xleftarrow[\cong]{i_{2*}} \pi_{r-1}(\text{SO}(n-r))$$

Se  $r \leq \frac{n}{2} - 1$ , qualquer classe  $x \in \pi_r(M)$  pode ser representada por um mergulho  $f : S^r \rightarrow M$ . Seja  $\eta_x =$  classe característica do fibrado normal principal do mergulho  $f$ .

Lema 4.6.:

Nas condições acima:

$$\theta_r(x) = \eta_x, \quad \text{para todo } x \in \pi_r(M).$$

Temos que  $\chi_r \circ T_*(x) = i_{1*}(\tau) + i_{2*}(\eta_x)$ , para todo  $x \in \pi_r(M)$ .

Como  $r \leq \frac{n}{2} - 1$ , pelo Lema 4.4,  $i_{1*}(\tau) = 0$  e pelo Lema 4.5,  $i_{2*}$  é isomorfismo.

$$\therefore \eta_x = i_{2*}^{-1} \circ \chi_r \circ T_*(x) = \theta_r(x). \quad \square$$

Lema 4.7.:

Para  $r \leq \frac{n}{2} - 1$ ,  $\theta_r(x) = 0$  se, e somente se, qualquer mergulho  $f : S^r \rightarrow M$  que representa  $x$ , tem fibrado normal trivial.

A demonstração deste lema utiliza os seguintes fatos:

(i) o homomorfismo característico

$$\chi_r : \pi_r(\text{BSO}(n)) \rightarrow \pi_{r-1}(\text{SO}(n))$$

é um isomorfismo para  $1 \leq r \leq n$  ([13], p. 104);

(ii) se  $K$  é um complexo  $k$ -dimensional e se  $\xi$  é um fibrado vetorial sobre  $K$  de dimensão  $m > k$ , então  $\xi$  é trivial se, e somente se,  $\xi \oplus 0^1$  é trivial, onde  $0^1$  é um fibrado linha trivial ([7]).

Assim, se  $r \leq \frac{n}{2} - 1 \rightarrow n-r > r$  e teremos:

$$\theta_r(x) = 0 \iff i_{2*}^{-1} \circ \chi_r \circ T_*(x) = 0 \iff T_*(x) = 0,$$

pois  $i_{2*}$  e  $\chi_r$  são isomorfismos  $\iff (T \circ f)_*(\tau) = 0 \iff$   
 $\iff T \circ f : S^r \rightarrow BSO(n)$  é homotópica a aplicação constante. Pelo Teorema de Classificação ([13]) a última condição é equivalente ao fibrado induzido  $(T \circ f)^*(U) = 0^n$ , o fibrado tangente principal de  $M$ , restrito a  $S^r$  ser trivial  $\iff \forall f \oplus \tau S^r = 0^n$   
 $\iff \forall f \oplus \tau S^r \oplus 0^1 = 0^{n+1}$ , por (ii)  $\iff \forall f \oplus 0^{r+1} = 0^{n+1} \iff$   
 $\iff \forall f = 0^{n-r}$ , através de sucessivas aplicações de (ii).  $\square$

*Teorema 4.8.:*

Supomos  $r \leq \frac{n}{2} - 1$ . Então dois mergulhos  $f, g : S^r \rightarrow M$  são  $C$ -relacionados se, e somente se, possuem fibrados normais isomorfos.

Devido ao Lema 2.2, precisamos mostrar apenas a suficiência.

De fato, se

$$\forall f \simeq \forall g \implies \forall f \oplus \tau(S^r) \simeq \forall g \oplus \tau(S^r) \implies$$

$$\implies (T \circ f)^*(U) \simeq (T \circ g)^*(U) \implies T \circ f \text{ e } T \circ g : S^r \rightarrow BSO(n)$$

são aplicações homotópicas  $\implies T_*(x) = T_*(y) \in \pi_r(BSO(n))$ , onde  $x = [f]$  e  $y = [g] \implies \theta_r(x) = \theta_r(y) \implies \theta_r(x-y) = 0$ .

Seja  $h : S^r \rightarrow M$ , um mergulho que representa o elemento  $x-y \in \pi_r(M)$ . Pelo Lema 4.7,  $h$  tem fibrado normal trivial.

Realizando-se uma cirurgia em  $M$ , ao longo de  $h$ , sem destruir as imagens de  $f$  e de  $g$  (o que é possível devido às condições sobre as dimensões), na nova variedade obtida  $M'$ , os novos mergulhos  $f'$  e  $g'$  representarão classes  $x', y' \in \pi_r(M')$ , com  $x' - y' = 0$ .

$$\therefore x' = y'.$$

Assim,  $f'$  e  $g'$  são homotópicas e como  $r \leq \frac{n}{2} - 1$ , segue-se que são isotópicas e, portanto, equivalentes. Daí, concluimos que  $f$  e  $g$  são C-relacionados.  $\square$

## 2. Mergulhos de Variedades Bidimensionais

*Teorema 4.9.:*

Sejam  $Y$  um espaço topológico 1-conexo e  $K$  um complexo simplicial. Suponhamos que exista um inteiro  $m \geq 2$  tal que:

(i) para todo  $p = 2, \dots, m-1$ :

$$H^{p-1}(K; \pi_p(Y)) = 0$$

$$H^p(K; \pi_p(Y)) = 0$$

(ii) para todo  $n \geq m+1$ :

$$H^n(K; \pi_n(Y)) = 0$$

$$H^{n+1}(K; \pi_n(Y)) = 0$$

Então, as classes de homotopia de aplicações de  $|K|$  em  $Y$ , estão em correspondência biunívoca com os elementos de  $H^m(K; \pi_m(Y))$ .

O teorema ainda vale para  $m = 1$ ,  $Y$  conexo e  $n$ -simples, para todo  $n$ .

Para a prova, ver [4], p. 298.  $\square$

*Corolário:*

Se  $Y$  é um espaço topológico  $(m-1)$ -conexo e se  $K$  é um complexo simplicial finito de dimensão  $m$ , então as classes de homotopia de  $|K|$  em  $Y$ , estão em correspondência biunívoca com os elementos de  $H^m(K; \pi_m(Y))$ .  $\square$

*Observação:*

Como  $\pi_i(Y) = 0$ ,  $i \leq m-1$ , por Hurewicz segue-se que  $\pi_m(Y) \simeq H_m(Y)$ . Além disso, pelo Teorema dos Coeficientes Universais:

$$H^m(Y; \pi_m(Y)) \simeq \text{Hom}(H_m(Y); \pi_m(Y)) = \text{Hom}(H_m(Y); H_m(Y))$$

A correspondência biunívoca referida no Corolário acima

$$\alpha : [|K|, Y] \xrightarrow{\cong} H^m(K; \pi_m(Y))$$

é dada por  $\alpha([f]) = f^*(\mu)$ , onde

$$f^* : H^m(Y; \pi_m(Y)) \rightarrow H^m(K; \pi_m(Y))$$

e  $\mu$  é a classe distinguida de  $H^m(Y; \pi_m(Y))$  correspondente ao

homomorfismo identidade de  $H_m(Y)$ .

*Lema 4.10.:*

Seja  $K$  um complexo simplicial de dimensão  $k \leq 3$ . Então as classes de equivalência de fibrados vetoriais orientados, de posto  $n \geq 3$ , sobre  $K$ , estão em correspondência biunívoca com os elementos de  $H^2(K; \pi_2(BSO(n)))$ .

Pelo Teorema de Classificação, as classes de equivalência de fibrados principais sobre  $K$ , com grupo  $SO(n)$ , estão em correspondência biunívoca com as classes de homotopia  $[|K|; BSO(n)]$ .

Como dois fibrados vetoriais sobre  $K$  são equivalentes se, e somente se, seus fibrados principais associados são equivalentes, segue-se que as primeiras classes acima estão em correspondência biunívoca com as classes de equivalência de fibrados vetoriais, de posto  $n$ , sobre  $K$ . Por outro lado, no temos que

$$\pi_0(BSO(n)) = 0$$

$$\pi_1(BSO(n)) \simeq \pi_0(SO(n)) = 0$$

$$\pi_2(BSO(n)) \simeq \pi_1(SO(n)) \simeq \mathbb{Z}_2 \quad ([13])$$

$$\pi_3(BSO(n)) \simeq \pi_2(SO(n)) = 0 \quad (\text{idem})$$

Logo, pelo Corolário do Teorema 4.9, segue-se que

$$[|K|; BSO(n)] \simeq H^2(K; \pi_2(BSO(n))) \simeq H^2(K; \mathbb{Z}_2)$$

Portanto, existe uma correspondência biunívoca

{classes de equivalência de fibrados vetoriais orientados, de posto  $n$ , sobre  $K$ }

$$\cong \downarrow \beta$$

$$H^2(K; \pi_2(\text{BSO}(n)))$$

□

Observações:

1) Se  $\eta = (E, p, K)$  é um fibrado vetorial orientado, de posto  $n$ , sobre  $K$ , existe  $[f] \in [|K|; \text{BSO}(n)]$  tal que  $f^*(U) \cong \eta$ . Então  $\beta([\eta]) = f^*(\mu)$  onde  $f^* : H^2(\text{BSO}(n); \pi_2(\text{BSO}(n))) \rightarrow H^2(K; \pi_2(\text{BSO}(n)))$  e  $\mu$  é a classe distinguida de  $H^2(\text{BSO}(n); \pi_2(\text{BSO}(n)))$ .

2)  $H^2(\text{BSO}(n); \pi_2(\text{BSO}(n))) \cong \text{Hom}(H_2(\text{BSO}(n)), \pi_2(\text{BSO}(n))) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$  e  $\mu$  é o gerador de  $H^2(\text{BSO}(n); \pi_2(\text{BSO}(n)))$ . Por outro lado, a segunda classe de Stiefel-Whitney do fibrado universal

$$\xi : U$$

$$\downarrow$$

$$\text{BSO}(n)$$

também é o gerador  $\omega_2(\xi) \in H^2(\text{BSO}(n); \mathbb{Z}_2)$ . Logo,

$$\mu = \omega_2(\xi); \quad \therefore \beta([\eta]) = f^*(\omega_2(\xi))$$

Lema 4.11.:

Seja  $K$  um complexo simplicial de dimensão  $k \leq 3$  e seja  $\eta = (E, p, K)$  um fibrado vetorial orientado, de posto  $n \geq 3$ ,



sobre  $K$ . Então  $\eta$  é trivial se, e somente se,  $\omega_2(\eta) = 0$ .

A necessidade é óbvia. Suponhamos então que  $\omega_2(\eta) = 0$  e seja  $f : K \rightarrow BSO(n)$  uma aplicação classificante para  $\eta$ . Temos:

$$0 = \omega_2(\eta) = \omega_2(f^*(\xi)) = f^*(\omega_2(\xi)) = f^*(\mu) = \beta([\eta])$$

Como  $\beta$  é uma correspondência biunívoca, segue-se que  $[\eta] = 0$ , donde  $\eta$  é trivial.  $\square$

Lema 4.12.:

Toda variedade compacta e orientada, de dimensão 2, é uma  $\pi$ -variedade.

Resulta imediatamente do fato de que toda variedade, nas condições acima, pode ser mergulhada no  $R^3$ .  $\square$

Lema 4.13.:

Se  $N$  é uma  $\pi$ -variedade então  $\omega_2(N) = 0$ .

De fato, se  $\tau N \oplus 0^1 = 0^{n+1}$ , então

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_2(0^{n+1}) = \omega_2(\tau N \oplus 0^1) = \\ &= \omega_2(N) + \omega_1(N) \cup \omega_1(0^1) + \omega_2(0^1) = \omega_2(N). \end{aligned} \quad \square$$

Lema 4.14.:

Sejam  $N^2$ ,  $M^m$ ,  $m \geq 5$ , variedades compactas, orientadas e conexas e seja  $f : N \rightarrow M$  um mergulho. Então  $\nu f$  é trivial se, e somente se,  $\theta([f]) = 0$  onde  $\theta : [N, M] \rightarrow Z_2$  é

definida por

$$\theta([f]) = \langle f^*(\omega_2(M)), \mu_2(N) \rangle = \langle \omega_2(M), f_*(\mu_2(N)) \rangle$$

( $\mu_2(N)$  = classe fundamental de  $N$ , mod. 2).

Temos:

$$\tau_M|_N = f^*(\tau_M) = \nu f \oplus \tau_N.$$

Logo,

$$f^*(\omega_2(M)) = \omega_2(f^*(\tau_M)) = \omega_2(\nu f \oplus \tau_N) = \omega_2(\nu f),$$

pois  $\omega_2(N) = 0$  pelo lema anterior.

Assim, se  $\nu f$  é trivial, temos

$$0 = \omega_2(\nu f) = f^*(\omega_2(M)) \quad \text{e} \quad \theta([f]) = 0.$$

Reciprocamente, se  $\theta([f]) = 0$ , então

$$\langle f^*(\omega_2(M)), \mu_2(N) \rangle = 0$$

$$\therefore f^*(\omega_2(M)) = \omega_2(\nu f) = 0.$$

Pelo Lema 4.11,  $\nu f$  é trivial. □

*Teorema 4.15.:*

Sejam  $f, g : N^2 \rightarrow M^m$ ,  $m \geq 6$ , mergulhos, com  $N$  e  $M$  variedades compactas, orientadas. Então  $f$  e  $g$  são  $C^r$ -relacionados se, e somente se,  $\nu f \approx \nu g$ .

É imediato que se  $f$  e  $g$  são  $C^r$ -relacionados, então possuem fibrados normais isomorfos. Para provarmos a recíproca,

consideremos o homomorfismo

$$\psi : H_2(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

definido por

$$\psi(x) = \langle \omega_2(M), x \rangle$$

Podemos supor que  $\pi_1(M) = 0$ , o que conseguimos "matando" os geradores (em número finito!) deste grupo, que são representados por esferas diretamente mergulhadas em  $M$ , isto é, possuem fibrados normais triviais. Além disso, as condições de dimensão nos permitem fazê-lo sem destruir as imagens de  $f$  e de  $g$ .

Logo, pelo Corolário do Teorema 4.9, existe uma correspondência biunívoca

$$\alpha : [N, M] \rightarrow H^2(N; \pi_2(M))$$

Como

$$\begin{aligned} H^2(N; \pi_2(M)) &\simeq \text{Hom}(H_2(N); \pi_2(M)) \simeq \\ &\simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}, H_2(M)) \simeq H_2(M) \end{aligned}$$

$\alpha$  é dada por  $\alpha([f]) = f_*(\mu(N))$ .

Seja  $\alpha_2 : [N, M] \rightarrow H_2(M; \mathbb{Z}_2)$ , a redução módulo 2 de  $\alpha$ , isto é,

$$\alpha_2([f]) = f_*(\mu_2(N))$$

O diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 [N, M] & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{Z}_2 \\
 & \searrow \alpha_2 & \nearrow \psi \\
 & H_2(M; \mathbb{Z}_2) &
 \end{array}$$

é comutativo. De fato,

$$\begin{aligned}
 \psi \circ \alpha_2([f]) &= \psi(f_*(\mu_2(N))) = \langle \omega_2(M), f_*(\mu_2(N)) \rangle = \\
 &= \theta([f]).
 \end{aligned}$$

Logo, se

$$\begin{aligned}
 \forall f \approx vg &\implies \omega_2(vf) = \omega_2(vg) \implies \omega_2(f^*(\tau M)) = \\
 &= \omega_2(g^*(\tau M)) \implies f^*(\omega_2(M)) = g^*(\omega_2(M)) \implies \theta([f]) = \\
 &= \theta([g]) \implies \psi \circ \alpha_2([f]) = \psi \circ \alpha_2([g]) \implies \\
 &\implies \psi(f_*(\mu_2(N))) = \psi(g_*(\mu_2(N))) \implies \\
 &\implies \psi(f_*(\mu_2(N)) - g_*(\mu_2(N))) = 0
 \end{aligned}$$

Consideremos o elemento

$$f_*(\mu(N)) - g_*(\mu(N)) \in H_2(M; \mathbb{Z}) \simeq \pi_2(M)$$

e seja  $h : S^2 \rightarrow M$ , um mergulho que representa a classe acima.

Logo,

$$h_*(\mu(S^2)) = f_*(\mu(N)) - g_*(\mu(N))$$

$$\therefore h_*(\mu_2(S^2)) = f_*(\mu_2(N)) - g_*(\mu_2(N))$$

(devido à naturalidade da redução módulo 2).

$$\therefore \psi \circ h_*(\mu_2(S^2)) = 0$$

$$\therefore \psi \circ \alpha_2[h] = 0$$

$$\therefore \theta([h]) = 0$$

e, pelo Lema 4.14, o fibrado  $\nu h$  é trivial.

Logo a classe  $[h]$  pode ser "morta" por uma cirurgia do tipo 2, realizada longe das imagens de  $f$  e de  $g$ . Na nova variedade  $M'$ , teremos:

$$f'_*(\mu(N)) = g'_*(\mu(N))$$

$$\therefore \alpha([f']) = \alpha([g'])$$

$$\therefore [f'] = [g']$$

$$\therefore f' \text{ e } g' \text{ são homotópicas}$$

$$\therefore f' \text{ e } g' \text{ são isotópicas (devido às dimensões)}$$

$$\therefore f' \text{ e } g' \text{ são equivalentes}$$

$$\therefore f \text{ e } g \text{ são C-relacionados.} \quad \square$$

É claro que, se a variedade  $M$  é simplesmente conexa, no teorema acima, bastaria uma única cirurgia. Daí

*Corolário:*

No Teorema 4.15, supomos  $\pi_1(M) = 0$ . Então  $f$  e  $g$  são C-relacionados se, e somente se, possuem fibrados normais isomorfos. □

Teorema 4.16.:

Sejam  $N^2$ ,  $M^m$ , variedades compactas orientadas com  $m \geq 5$  e  $\pi_1(M) = 0$ . Então, todo mergulho  $f : N \rightarrow M$  tem frado normal trivial se, e somente se,  $\omega_2(M) = 0$ .

Se  $\omega_2(M) = 0$ , então, para todo mergulho  $f$ ,

$$f^*(\omega_2(M)) = 0$$

$$\therefore \omega_2(f^*(\tau M)) = 0$$

$$\therefore \omega_2(\nu f) = 0$$

$$\therefore \nu f \text{ é trivial}$$

Reciprocamente, seja a correspondência biunívoca

$\alpha : [N, M] \rightarrow H_2(M; \mathbb{Z})$  dada por  $\alpha([f]) = f_*(\mu(N))$ . Como a redução módulo 2 :  $H_2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(M; \mathbb{Z}_2)$  é um homomorfismo sobre, segue-se que para todo  $x \in H_2(M; \mathbb{Z}_2)$  existe  $[f] \in [N, M]$  com  $f_*(\mu_2(N)) = x$  ( $f$  sempre pode ser tomada como mergulho).

Segue daí que

$$\langle \omega_2(M), x \rangle = \langle \omega_2(M), f_*(\mu_2(N)) \rangle = \theta[f] = 0,$$

para todo  $x \in H_2(M; \mathbb{Z}_2)$ .

Logo,

$$\omega_2(M) = 0$$

□

## 3. Uma Generalização

Encerraremos este Capítulo exibindo uma generalização do caso anterior, especificamente, uma generalização do Corolário do Teorema 4.15.

Inicialmente, fixemos alguns resultados que serão utilizados no que se segue:

Lema 4.17.:

Sejam  $f, g : K \rightarrow Y$ , aplicações de um complexo simplicial  $K$  de dimensão  $n$ , num espaço topológico  $Y$ ,  $(n-1)$ -conexo. A obstrução à existência de uma homotopia entre  $f$  e  $g$  é um elemento de  $H^n(K; \pi_n(Y))$ .

Ver [4], p. 295. □

Lema 4.18.:

Seja  $X$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ , conexa mas não compacta. Então  $H_n(X; Z) = 0$ .

Ver [3], p. 121. □

Lema 4.19.:

Seja  $f : N^n \rightarrow M^m$  uma aplicação qualquer de uma variedade  $N$  numa variedade  $M$ ,  $(n-1)$ -conexa. Então, para todo  $x \in N$ , a restrição  $f' = f|_{N - \{x\}} : N - \{x\} \rightarrow M$  é homotopicamente nula.

A obstrução à existência de uma homotopia entre  $f'$  e

a aplicação constante  $k : N - \{x\} \rightarrow M$  é, pelo Lema 4.17, um elemento de  $H^n(N - \{x\}; \pi_n(M))$ . Mas pelo Teorema dos Coeficientes Universais:

$$\begin{aligned} H^n(N - \{x\}; \pi_n(M)) &\simeq \\ &\simeq \text{Hom}(H_n(N - \{x\}); \mathbb{Z}, \pi_n(M)) \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(N - \{x\}); \mathbb{Z}, \pi_n(M)) \end{aligned}$$

Como  $H_{n-1}(N - \{x\}; \mathbb{Z})$  é livre, segue-se que

$$\text{Ext}(H_{n-1}(N - \{x\}); \mathbb{Z}, \pi_n(M)) = 0$$

e, pelo Lema 4.18, concluímos que

$$H^n(N - \{x\}; \pi_n(M)) = 0. \quad \square$$

Dada uma variedade  $N^n$ , consideremos a projeção  $\rho : N^n \rightarrow S^n$ , que identifica o complementar de uma célula  $D^n \subset N^n$  sobre um dos polos, (por exemplo, o polo norte), de  $S^n$ .

Lema 4.20.:

Dada qualquer aplicação  $f : N \rightarrow M$ , com  $M$  sendo  $(n-1)$ -conexa, existe uma aplicação  $\tilde{f} : S^n \rightarrow M$ , que torna o diagrama abaixo, comutativo, a menos de homotopia:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & M \\ & \searrow \rho & \nearrow \tilde{f} \\ & S^n & \end{array}$$



Pelo Lema anterior, existe uma homotopia

$$H' : (N - \overset{\circ}{D}^n) \times I \rightarrow M,$$

com  $H'(x,0) = f'(x)$  e  $H'(x,1) = \text{constante}$ , onde

$$f' = f|_{N - \overset{\circ}{D}^n}.$$

Como  $(D^n \times 0) \cup (\partial D^n \times I)$  é retrato de  $D^n \times I$ , segue-se que  $H'$  pode ser estendida a uma homotopia  $H : N \times I \rightarrow M$ , de  $f$ . Definimos  $\tilde{f} : S^n \rightarrow M$ , pondo

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} \text{constante}, & \text{se } y = \text{polo norte de } S^n \\ H(x,1) & , \quad y = \rho(x) \text{ e } y \in S^n - \{\text{polo norte}\} \end{cases}$$

Pela construção:

$$\tilde{f} \circ \rho = H(\cdot, 1) \simeq H(\cdot, 0) = f. \quad \square$$

De agora em diante, consideraremos mergulhos de uma variedade  $N^n$  numa variedade  $M^m$  com  $n \leq \frac{m}{2} - 1$  e  $M$   $(n-1)$ -conexa.

Notemos que, dado um mergulho  $f : N \rightarrow M$ , pelo Lema 4.20, podemos construir  $\tilde{f} : S^n \rightarrow M$  tal que  $\tilde{f} \circ \rho = f$ . Devido à condição imposta sobre as dimensões, podemos sempre supor que a  $\tilde{f}$  encontrada seja também um mergulho.

O fibrado normal de  $\tilde{f}$ , restrito a um disco  $D_1^n$  que contém o polo norte de  $S^n$ , é trivial. Logo, o seu espaço total  $E$  é homeomorfo a  $R^m$  e podemos mergulhar  $N - \overset{\circ}{D}^n$  em  $E$ . Além disso, é possível realizar, diferenciavelmente, uma colagem de  $N - \overset{\circ}{D}^n$  com o complementar em  $S^n$ , de uma vizinhança do polo norte contida em  $D_1^n$ , colagem efetuada através do bordo comum  $S^{n-1}$ , (fig. 22).

Assim obtemos um mergulho  $f' : N \rightarrow M$ , que denominaremos de "forma padrão" do mergulho  $f$ .

Observemos que  $f' \approx \tilde{f} \circ \rho$ ; portanto,  $f' \approx f$ , donde  $\nu f' \approx \nu f$ .

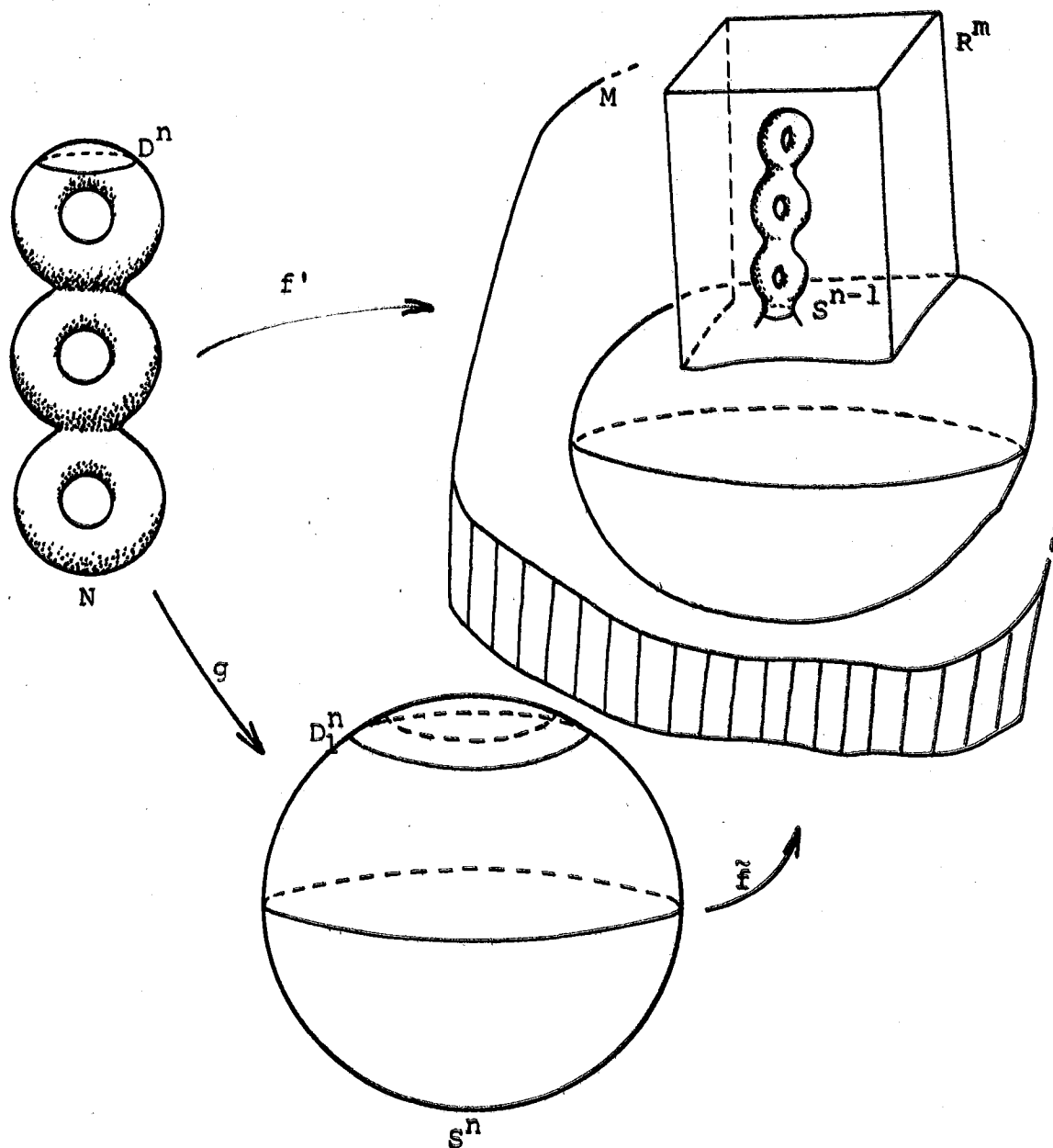


figura 22

Além disso, o fibrado normal de  $f'$  depende tão somente da colagem realizada através de  $S^{n-1}$ ; mais especificamente, tal fibrado é caracterizado por um elemento  $\alpha \in \pi_{n-1}(SO(m-n))$ . Mas  $\alpha$  determina também o fibrado normal de  $\tilde{f}$ . Assim, temos provado o

*Lema 4.21.:*

Sejam  $f, g : N \rightarrow M$  mergulhos, nas condições estabelecidas. Então  $vf \approx vg$  se, e somente se,  $\tilde{v}f \approx \tilde{v}g$ .  $\square$

*Teorema 4.22.:*

Os mergulhos  $f$  e  $g$  são C-relacionados se, e somente se, possuem fibrados normais isomorfos.

Admitindo que  $vf \approx vg$ , então  $\tilde{v}f \approx \tilde{v}g$ .

Pelo Teorema 4.8, é possível realizar uma única cirurgia em  $M$ , sem destruir as imagens dos mergulhos em jogo, de tal maneira que, na nova variedade  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  são, agora, equivalentes.

Da construção da "forma padrão" de um mergulho, segue-se que também  $f'$  e  $g'$  serão equivalentes, na nova variedade, o mesmo acontecendo com  $f$  e  $g$ , pois, as homotopias  $f \approx f'$  e  $g \approx g'$  implicam, devido às dimensões, em respectivas isotopias. Logo  $f$  e  $g$  são C-relacionados.  $\square$

*Corolário:*

Sejam  $f, g : N^n \rightarrow M^m$  mergulhos com  $n \leq \frac{m}{2} - 1$  e  $M$  uma  $\pi$ -variedade compacta. Então  $f$  e  $g$  são  $C^k$ -relacionados

se, e somente se,  $vf \approx vg$ .

De fato, em [7], Milnor mostra que qualquer  $\pi$ -variedade compacta  $M$ , através de uma seqüência de cirurgias de tipo  $p < \frac{m}{2} - 1$ , pode-se transformar numa outra  $\pi$ -variedade  $M'$  que é  $[\frac{m}{2} - 1]$ -conexa. Devido às dimensões, tais cirurgias não destroem os mergulhos  $f$  e  $g$  e estamos nas condições do Teorema 4.22.  $\square$

## APÊNDICE

O conteúdo deste Apêndice foi extraído de [2], nosso trabalho de Mestrado.

O objetivo é mostrar que dois nós disjuntos quaisquer  $K_0$  e  $K_1$ , contidos no interior de uma variedade  $M^3$ , conexa e orientada, são sempre C-relacionados; mais ainda, a única cirurgia realizada por um mergulho  $\psi : S^1 \times D^2 \rightarrow M$  para modificar o espaço subjacente a  $K_0 \cup K_1$ , em  $M$ , faz aparecer tais nós, na nova variedade  $\chi(M)$ , em posições extraordinariamente simples: como bordos de uma variedade  $W$ , difeomorfa ao cilindro  $S^1 \times D^1$ .

Inicialmente provemos que todo nó  $K$  em  $M$  pode ser trivializado através de uma única cirurgia.

*Lema 1.:*

Seja  $f : S^1 \rightarrow M$  um mergulho.

Existe uma cirurgia em  $M$ , realizada por um mergulho  $\psi : S^1 \times D^2 \rightarrow M$  tal que o mergulho correspondente a  $f$ ,

$$f' : S^1 \rightarrow \chi(M),$$

satisfaz a condição de  $K' = f'(S^1)$  ser um nó trivial em  $M$ .

Seja  $V$  uma vizinhança tubular fechada de  $f(S^1)$ , em  $M$ , e seja  $\psi : V \rightarrow S^1 \times D^2$  um difeomorfismo.

Introduzindo em  $S^1$  coordenadas angulares e em  $D^2$  coordenadas polares, um ponto  $P \in S^1 \times D^2$  é dado por  $P = (\theta, \lambda, \Omega)$ , onde  $\theta, \Omega \in \mathbb{R}, \text{ mod } 2\pi$  e  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

No fibrado  $(S^1 \times D^2, p_1, S^1)$  tomamos a secção diferen-

ciável  $s : S^1 \rightarrow S^1 \times D^2$ , dada por  $s(\theta) = (\theta, \frac{1}{2}, \Omega_0)$ , para algum  $\Omega_0$  fixado e chamamos de  $F$  a vizinhança tubular fechada de  $s(S^1)$ , em  $S^1 \times D^2$ , de raio  $\frac{1}{2}$ .

Seja, agora,  $A = \psi^{-1}(F)$  e  $\phi : A \rightarrow S^1 \times D^2$  o difeomorfismo consequente.

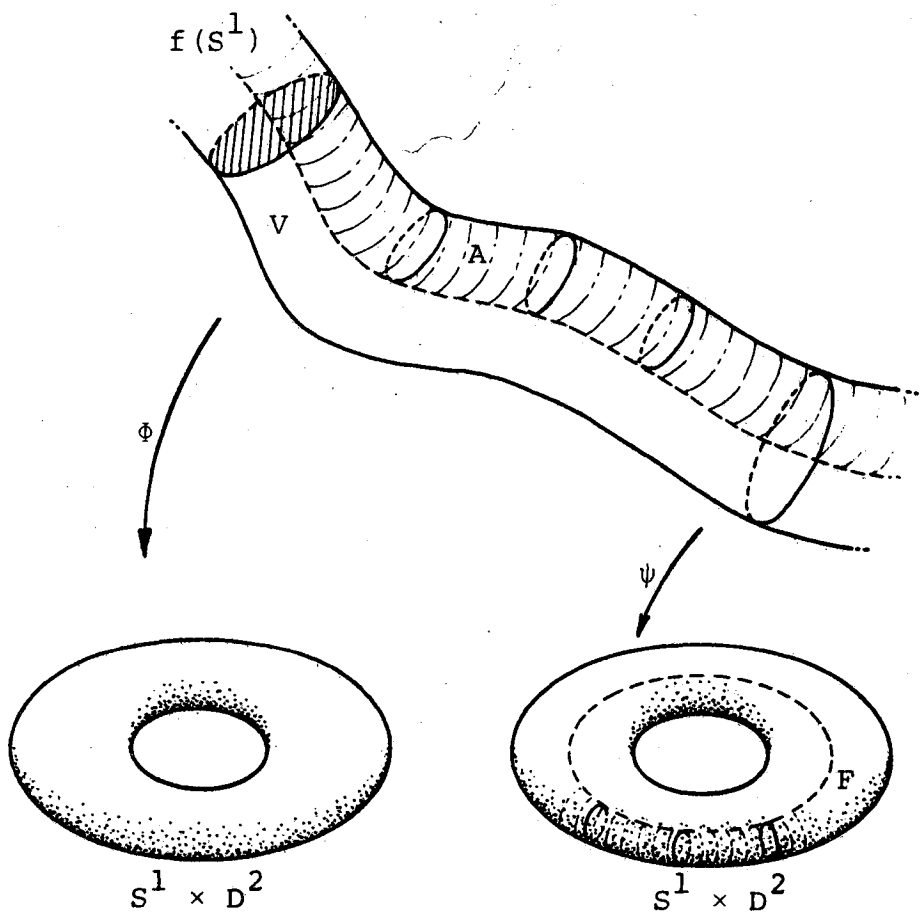


figura 1

Definimos  $\psi : S^1 \times D^2 \rightarrow M$  pela composta

$$S^1 \times D^2 \xrightarrow{\phi^{-1}} A \xrightarrow{i} M,$$

onde  $i$  é a inclusão.

Então, com a trivialização da vizinhança tubular  $A$  introduzida,  $f(S^1)$  coincidirá com a imagem, pela  $\psi$ , de um paralelo de  $S^1 \times D^2$ . Como tal imagem, durante o processo da cirurgia, é identificada com um meridiano de  $D^2 \times S^1$ , segue-se que em  $\chi(M)$ , o nó  $K' = f'(S^1)$  borda um disco, o que conclui a demonstração.  $\square$

*Teorema 2.:*

Sejam  $f, g : S^1 \rightarrow M$ , mergulhos.

Então  $f$  e  $g$  são C-relacionados.

Chamando de  $K_0 = f(S^1)$  e  $K_1 = g(S^1)$ , tomemos pontos  $x_0 \in K_0$  e  $x_1 \in K_1$  e consideremos uma curva  $\lambda$  em  $M$ , difeomorfa a  $R$ , com  $\lambda \cap K_0 = \{x_0\}$  e  $\lambda \cap K_1 = \{x_1\}$ .

Como  $\lambda$  é difeomorfa a  $R$ , seu fibrado normal em  $M$  é trivial e, então, podemos conseguir um difeomorfismo

$$h : V(\lambda) \rightarrow R^3,$$

onde  $V(\lambda)$  é uma vizinhança tubular de  $\lambda$  em  $M$ , que completa o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V(\lambda) & \xrightarrow{h} & R^3 \\ \uparrow i & & \uparrow i' \\ \lambda & \xrightarrow{\cong} & R \end{array}$$

Indiquemos por  $M = h[(K_0 \cup K_1) \cap V(\lambda)]$ . Escolhendo-se  $\lambda$  de modo que se verifique

$$\dim(T_{x_i}^\lambda \oplus T_{x_i} K_i) = 2, \quad i = 0, 1,$$

podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$h(K_0 \cap V(\lambda)) \subset 0 \times 0 \times \mathbb{R}$$

e

$$h(K_1 \cap V(\lambda)) \subset 1 \times 0 \times \mathbb{R}$$

Tomemos  $r > 0$  tal que

$$([0,1] \times B^2(0,r)) \cap M \subset [(0 \times 0 \times \mathbb{R}) \cap M] \cup [(1 \times 0 \times \mathbb{R}) \cap M]$$

e consideremos uma curva diferenciável

$$\xi : [0,1] \rightarrow [0,1] \times 0 \times \left[\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right]$$

que faz a concordância das semi-retas  $0 \times 0 \times [0, \infty)$  e  $1 \times 0 \times [0, \infty)$  pelos pontos  $(0, 0, \frac{r}{2})$  e  $(1, 0, \frac{r}{2})$ .

Seja  $\bar{M}$  o sólido de revolução obtido pela rotação da curva  $\xi$  em torno do eixo  $\mathbb{R} \times 0 \times 0$  e indiquemos por  $\xi'$  a curva diferenciável, simétrica de  $\xi$ , em relação ao eixo  $\mathbb{R} \times 0 \times 0$ .

A figura 2, abaixo, mostra a construção realizada, onde indicamos os pontos:

$$p_0 = (h \circ f)^{-1}(0, 0, \frac{r}{2}), \quad q_0 = (h \circ f)^{-1}(0, 0, -\frac{r}{2})$$

$$p_1 = (h \circ g)^{-1}(1, 0, \frac{r}{2}), \quad q_1 = (h \circ g)^{-1}(1, 0, -\frac{r}{2})$$

$$A = f(p_0), \quad B = f(q_0), \quad C = g(p_1) \quad \text{e} \quad D = g(q_1)$$



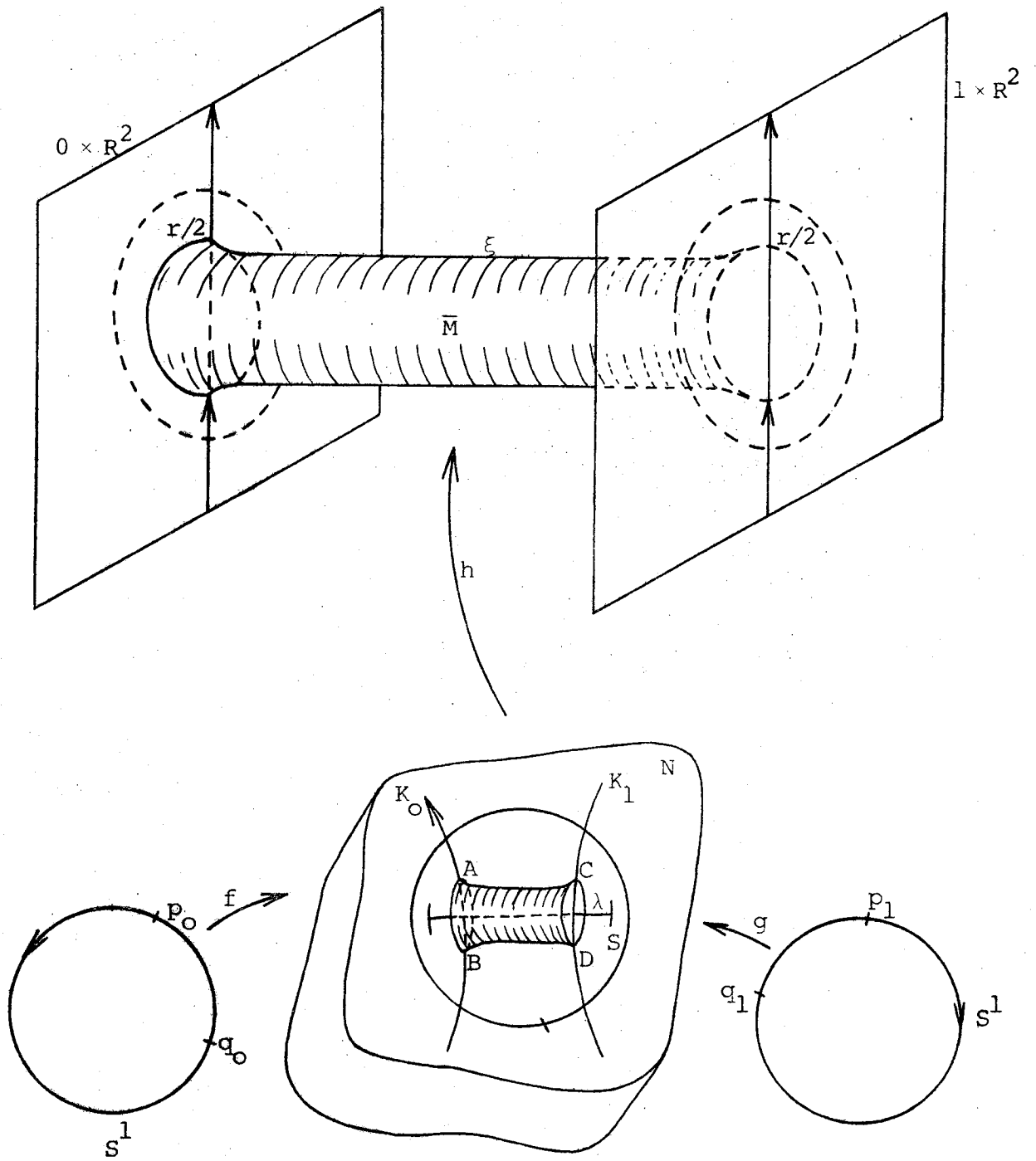


figura 2

Consideremos o nó  $K$  em  $M$ , cujo traço a partir do ponto  $A$  segue pelo nó  $K_0$ , com a mesma orientação de  $K_0$ , até o ponto  $B$ .

Daí segue por  $h^{-1}(\xi')$  até o ponto  $D$ , continuando pelo nó  $K_1$ , com a orientação contrária de  $K_1$ , até o ponto  $C$ . De  $C$ , finalmente, retorna ao ponto  $A$ , via a curva  $h^{-1}(\xi)$ .

Aplicando o Lema 1, é possível realizar uma cirurgia em  $M$ , ao longo de  $K$ , através de um mergulho  $\psi: S^1 \times D^2 \rightarrow M$ , de modo que  $K$  apareça em  $\chi(M)$ , bordando uma variedade  $E$ , difeomorfa a um disco.

No complementar deste disco  $E$ , em  $\chi(M)$ , devemos colar o retângulo  $R = h^{-1}([0,1] \times 0 \times \mathbb{R}) \cap \bar{M}$ , resultando uma variedade  $W$  que é homeomorfa e, portanto, difeomorfa ao cilindro  $S^1 \times D^1$  e na qual se tem  $\partial W = K_0 \cup K_1$  (fig. 3).  $\square$

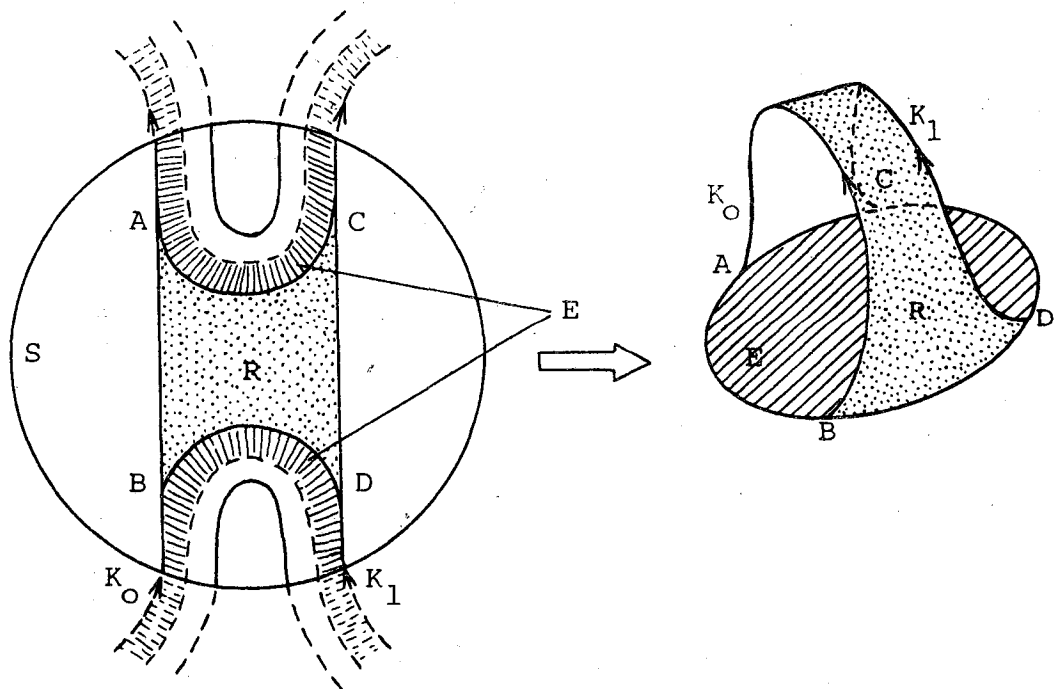


figura 3

## BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] - DACCACH, J. A. - Cirurgias e Aplicações - Dissertação de Mestrado, ICMSC-USP, (1974).
- [ 2 ] - ENGLER, R. C. - Uma Classificação de Mergulhos por Cirurgia - Dissertação de Mestrado, ICMSC-USP, (1976).
- [ 3 ] - GREENBERG, M. - Lectures on Algebraic Topology - Northeastern University , (1967).
- [ 4 ] - HILTON, P. J. e WYLIE, S. - Homology Theory - Cambridge University, (1967).
- [ 5 ] - KUROSH, A. G. - Lectures in General Algebra - Pergamon Press, (1965).
- [ 6 ] - MIELKE, M. V. - Generalized modifications and cobounding manifolds - Journ. Math. Meck., 15(1966), 683-711.
- [ 7 ] - MILNOR, J. - A Procedure for Killing Homotopy Groups of Differentiable Manifolds - Math. Soc. Symp. in Pure Math. III, (1961).
- [ 8 ] - MILNOR, J. - Lectures on the h-Cobordism Theorem - Princeton University, (1965).
- [ 9 ] - MUNKRES, J. - Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms - Ann. of Math., 72 (1960), 521-554.
- [10] - MUNKRES, J. - Differentiable isotopies on the 2-spheres - Mich. Math. Journal, 7(1960), 193-197.
- [11] - NEWMAN, M. - Integral Matrices - Pure and Applied Mathematics, (1972).
- [12] - ROLFSEN, D. - Knots and Links - University of British Columbia, (1976).
- [13] - STEENROD, N. - The Topology of Fibre Bundles - Princeton University, (1951).
- [14] - WALL, C. T. C. - Cobordism of pairs - Comment. Math. Helv., 35(1961), 136-145.
- [15] - WALLACE, A. H. - Modifications and cobounding manifolds, I, Canad. J. Math., 12(1960), 503-528.

- [16] - WALLACE, A. H. - Differential Topology - W. A. Benjamin, Inc., New York, (1968).