INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

I.C.M.S.C.

APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS EM VARIEDADES COM ESTRATIFICAÇÕES DE TIPO FINITO

Brasil Terra Leme

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS EM VARIEDADES COM ESTRATIFICAÇÕES DE TIPO FINITO

Brasil Terra Leme

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Favaro

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

SÃO CARLOS
1978

À Elisabete e ao
Rafael, nosso filho,
com amor

AGRADECIMENTOS

Desejo externar minha gratidão ao Professor Dr. Luiz Antonio Favaro, pela orientação. Seu otimismo e confiança foram decisivos na execução deste trabalho.

Agradeço também,

Ao Professor Dr. Gilberto Francisco Loibel, que sempre encontrou tempo para conversas elucidativas nas quais muito aprendi.

A todos os meus amigos do ICMSC-USP e do Departamento de Matemática da UFSCar pelo apoio e incentivo durante estes anos.

Aos meus pais, pelo muito que lhes devo.

À Lene pelo excelente trabalho de datilografia.

SUMMARY

The objective of this work is to study stability properties of C^∞-maps between manifolds when the range is a stratified-space.

We deal with two notions of infinitesimal stability related to the behavior of C^∞-maps subjected to constraints. We connected these notions with the classical one, the homotopical-stability. The main tools used to this end are provided by the Malgrange "Preparation" theorem and a recent result on Generic Linear Equations due to J. Mather.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

A teoria das singularidades e da estabilidade de aplicações diferenciáveis teve seu estudo intensificado nestes últimos vinte anos, após os trabalhos pioneiros de H. Whitney (On singularities of mappings in Euclidean spaces I, mappings of the plane into the plane, Ann. of Math. 1955) e de R. Thom (Les singularités des applications différentiables, Ann. Inst. Fourier, 1955-1956). Nos últimos dez anos, várias questões importantes foram solucionadas, merecendo especial destaque os trabalhos de J. Mather (ver [4], [7a]) no campo da teoria da estabilidade. Recentemente, René Thom sugeriu várias linhas de estudo nesse campo, com o intuito de criar modelos matemáticos adaptados à abordagem de problemas relacionados às outras ciências (ver [9]). Para isto, várias extensões e generalizações dentro da teoria da estabilidade vem sendo feitas, algumas atendo-se aos propósitos originais e outras, possivelmente, livres deles. Neste sentido, merecem destaque os trabalhos de V. Poenaru, J. P. Dufour, L. A. Favaro e outros (ver [1], [2], [8]).

Nosso objetivo no presente trabalho, foi examinar duas noções de estabilidade para aplicações diferenciáveis, no caso de existir no contradomínio alguma estrutura a ser levada em consideração. Exemplo típico de tal estrutura é o de uma folheação.

O Capítulo I contém os pré-requisitos básicos de espaços e jatos, módulos e germes de aplicações, estratificações e campos vetoriais. Aqui mostramos que certos módulos, de campos tangentes a uma dada estratificação, são de tipo finito.

No Capítulo II apresentamos duas noções de estabilidade-infinitesimal para aplicações, quando o contradomínio estiver munido de uma estratificação L. A primeira delas, L-estabilidade infinitesimal, apresenta-se algebricamente mais tratável. Esta noção se estende para germes de aplicações, possibilitando então a caracterização da L-estabilidade infinitesimal de uma aplicação em termos da L-estabilidade infinitesimal da família de germes a ela associada. Finalizamos o capítulo exibindo algumas classes de germes $\hat{L}$-estáveis.

Nos Capítulo III introduzimos a noção de estabilidade sob L-deformações para as aplicações e obtivemos um teorema de caracterização, tipo Thom-Levine, para as aplicações estáveis sob L-deformações. Ainda, relacionamos a L-estabilidade homotópica com aquelas anteriormente introduzidas no Capítulo II.

Finalmente, no último capítulo, apresentamos o conceito da L-estabilidade estrutural e destacamos as principais dificuldades que surgem ao se desejar deduzir a estabilidade, ora presente, da $\hat{L}$-estabilidade infinitesimal.

CAPÍTULO I

PRÉ-REQUISITOS

§ 1. *Germes e jatos*

Consideremos N e P variedades diferenciáveis de classe C^∞, assim como $C^\infty(N,P)$ o conjunto de todas as aplicações diferenciáveis de classe C^∞ de N em P. Salvo menção explícita, todas as variedades aqui consideradas terão bases enumeráveis.

Para cada número natural $r \geq 0$ denotamos por $f^{(r)}$ a r-ésima diferencial da aplicação $f : N \to P$. Sejam então $f, g \in C^\infty(N,P)$ e x em N.

DEFINIÇÃO 1:

f é r-tangente a g em x se para cada inteiro k, $0 \leq k \leq r$, $f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$.

Esta definição nos permite particionar $C^\infty(N,P)$ da seguinte forma: Para cada x de N e r natural, seja a relação:

$f\mathcal{R}g$ se e só se f for r-tangente a g em x. Cada classe de equivalência desta relação será denotada por $j^r f(x)$, onde f é um elemento da classe, sendo o conjunto quociente, $C^\infty(N,P)/\mathcal{R}$, denotado por $J^r_x(N,P)$.

DEFINIÇÃO 2:

$j^r f(x)$ é denominado r-jato de fonte x e meta $f^{(0)}(x) = f(x)$.

A definição de r-tangência se traduz em termos de coordenadas locais em torno da fonte e da meta, como segue:

Sejam (x_i) e (y_j) sistemas de coordenadas baseados em x e $f(x)$ respectivamente. Então g será r-tangente a f em x se e só se para todo t e j tivermos

$$\partial^t(y_j o g)(x) = \partial^t(y_j o f) \quad \text{onde}$$

$\partial^t = \partial^{|t|}/\partial_1^{t_1} \ldots \partial_n^{t_n}$ é o operador diferencial misto com $|t| = \sum_1^n t_s$, $0 \leq |t| \leq r$ e $t = (t_1, \ldots, t_n)$.

Em outras palavras, o r-ésimo polinômio de Taylor de $f_j = y_j o f$ é o mesmo que o de g_j, $g_j = y_j o g$ em x, para cada j.

Consideremos $J^r(N,P) = \cup_{x \in N} J_x^r(N,P)$. Este conjunto admite uma estrutura de fibrado diferenciável, de base $N \times P$, sendo que a projeção é dada tomando-se fonte e meta para cada r-jato. Ainda, em $J^1(N,P)$ teremos as subvariedades S_k dadas por

$$j^1 f(x) \in S_k \quad \text{se e só se} \quad \dim P - \text{posto} \ (f^{(1)}(x)) = k.$$

Neste sentido temos a seguinte

DEFINIÇÃO 3:

$f \in C^\infty(N,P)$ é 1-genérica se a aplicação $j^1 f : N \to J^1(N,P)$ for transversal a cada subvariedade S_k (ver [3]).

Sejam f e g em $C^\infty(N,P)$ e S parte não vazia de N.

DEFINIÇÃO 4:

f e g tem o mesmo germe em S se existir aberto U de N, $U \supset S$, de modo que $f|U = g|U$.

Cada classe da relação de equivalência dada pela definição é denominada "germe de aplicação diferenciável" e é denotada por $f : (N,S) \to P$. O espaço quociente obtido será denotado por $C_S^\infty(N,P)$. Quando $P = R$, indicaremos este conjunto por $C_S^\infty(N)$ ou simplesmente por C_S^∞. Ainda, C_S^∞ herda de R uma estrutura natural de R-álgebra.

Os resultados relevantes no nosso contexto, relativamente a essa estrutura, são os seguintes:

PROPOSIÇÃO 1

Se $(S_1, \ldots, S_m)$ for uma partição de S, por fechados de N, teremos

$$C_S = C_{S_1} \times \ldots \times C_{S_m} \quad \text{e} \quad m_S = m_{S_1} \times \ldots \times m_{S_m}$$

onde $m_{S'} = \{f : (N,S') \to (R,0)\}$.

PROPOSIÇÃO 2

Sejam (x_i) sistema de coordenadas locais nulas em x e $u \in C_x^\infty(N)$. Então $u \in \{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k\}^\ell . C_x^\infty$, $\overline{x}_i$ germe de x_i em x, se e só se existir

$\tilde{u} : U \to R$, representante de u, tal que

$j^r\tilde{u} = 0$ em $K \cap U = \{x' \in U : x_i(x') = 0,\ 1 \le i \le k\}$

para $0 \le r < \ell$.

Nesta proposição, $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\}^{\ell}.C^{\infty}_x$ significa "ideal gerado pelos produtos $p_1 . p_2 . \ldots . p_{\ell}$" onde $p_j \in \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\}$. De forma mais geral,

$$I.C^{\infty}_x \equiv \text{ideal gerado por } I \text{ em } C^{\infty}_x.$$

COROLÁRIO 1:

m_x é um C^{∞}_x-módulo com base $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$.

COROLÁRIO 2:

$$m^{\ell}_x = \{u \in C^{\infty}_x : f^r u(x) = 0, \quad 0 \leq r < \ell\}$$

COROLÁRIO 3:

$C^{\infty}_x/m^{\ell}_x \cong R[[x_1, \ldots, x_n]]/m^{\ell}$ onde m é o ideal maximal do anel das séries formais a coeficientes em R.

Lema de Nakayama

Sejam R um anel comutativo com unidade, $\alpha : E \to F$ um homomorfismo de R-módulos e I ideal de R tal que $1+z$ é inversível sempre que $z \in I$. Admitamos que F seja do tipo finito, ou seja, F é R-finitamente gerado.

Então $\alpha(E) + IF = F$ implica $\alpha(E) = F$.

COROLÁRIO 4:

Seja A um C^{∞}_S-módulo de tipo finito e B um submódulo de A satisfazendo $\dim_R A/(m^{\ell+1}_S.A+B) \leq \ell$. Então $m^{\ell}_S \subset B$.

Veremos agora um teorema devido a B. Malgrange que constitui uma das ferramentas analíticas de maior força no presente trabalho.. Antes, observemos que, se $f : (N,S) \to (P,y)$ for um germe de aplicação diferenciável, todo C_S^∞-módulo A admite uma estrutura de C_y^∞-módulo via o homomorfismo de R-álgebras $f^* : C_y^\infty \to C_S^\infty$ definido por $f^*(v) = v \circ f$, a saber:

A adição de A é a anterior e a ação de C_y^∞ é definida por

$$(\forall\ \alpha \in C_y^\infty)\ (\forall\ \alpha \in A) \qquad \alpha.a = f^*(\alpha).a.$$

Teorema de Malgrange

Seja $f : (N,S) \to (P,y)$ germe de aplicação diferenciável (S finito) e A um C_S^∞-módulo do tipo finito. Suponhamos que $\{\pi(e_1), \ldots, \pi(e_r)\}$ seja um sistema de geradores para o R-espaço vetorial $A/(f^*m_y).A$. Então $\{e_1, \ldots, e_r\}$ constitui um sistema de geradores para A com a estrutura de C_y^∞-módulo.

OBSERVAÇÃO:

$(f^*m_y).A$ é o C_S^∞-submódulo de A gerado por f^*m_y.

DEFINIÇÃO 5:

Seja $\psi : R \to S$ um homomorfismo de aneis. Um "homomorfismo misto sobre ψ" é uma lista (α, β, A, B, C) satisfazendo as seguintes condições:

(i) A é um R-módulo do tipo finito.

(ii) B e C são S-módulos com C do tipo finito.

(iii) $\beta : B \to C$ é um S-homomorfismo e $\alpha : A \to C$ satisfaz

$$\alpha(a_1+a_2) = \alpha(a_1)+\alpha(a_2) \quad \text{e} \quad \alpha(r.a_1) = \psi(r).\alpha(a_1).$$

PROPOSIÇÃO 3

Sejam $f : (N,S) \to (P,y)$ germe de aplicação diferenciável, S conjunto finito e (α, β, A, B, C) um homomorfismo misto sobre $f^* : C_y^\infty \to C_S^\infty$. Para $a = \dim_R A/m_y A$ as afirmações abaixo são equivalentes:

(i) $\alpha(A) + \beta(B) = C.$

(ii) $\alpha(A) + \beta(B) + f^* m_y . C = C.$

(iii) $\alpha(A) + \beta(B) + m_S^{a+1}.C = C.$

As provas dos resultados até aqui enunciados podem ser vistas em [5] e [6].

Vejamos agora uma simplificação da proposição anterior, dada em termos dos geradores dos módulos envolvidos. Para isto, continuemos com $f : (N,x) \to (P,y)$, (α, β, A, B, C) homomorfismo misto sobre $f^* : C_y^\infty \to C_x^\infty$, $\alpha^r : A^r \to C^r$ e $\beta^r : B^r \to C^r$ são os homomorfismos-produto para as estruturas-produto dos módulos A, B e C.

PROPOSIÇÃO 4

As afirmações abaixo são equivalentes:

(i) $\alpha(A)+\beta(B) = C$

(ii) $\alpha^r(A^r)+\beta^r(B^r)+m_x^{a+1}.C^r \supset \{(\alpha(e_1),\alpha(e_2),\dots,\alpha(e_r))\}.C_x.$

(iii) $\alpha^r(A^r)+\beta^r(B^r)+m_x^{a+1}.C^r \supset \{x_i(\alpha(e_1),\dots,\alpha(e_r)) \mid \{x_1, \dots, x_n\}.\ C_x^\infty = m_x\}.$

PROVA.

Claramente a condição (i) acarreta a (ii). Suponhamos que (ii) esteja satisfeita e mostremos (i) estará satisfeita ten do-se em conta a proposição 3.

Tomemos τ em C. Logo, $\tau = \sum_j \tau_j G_j$ onde para $1 \leq j \leq r$ temos $G_j = \alpha(e_j)$. Consideremos $\sigma_j = \tau_j . G = \tau_j . (G_1, \ldots, G_r)$. Da nossa hipótese resulta a existência de a_j, b_j e m_j tais que

$$\alpha^r(a_j) + \beta^r(b_j) + m_j = \sigma_j .$$

Tomando-se a j-ésima coordenada de σ_j temos $\tau_j G_j = \alpha(a_{jj}) + \beta(b_{jj}) + m_{jj}$. Logo, $\tau = \sum_j \tau_j G_j = \alpha(\sum_j a_{jj}) + \beta(\sum_j b_{jj}) + \sum_j m_{jj}$ e de acordo com a proposição 3, $\tau \in \alpha(A)+\beta(B)$ pois $\sum_j m_{jj} \in m_x^{a+1}.C$.

Mostremos por fim que (iii) implica (ii), já que a recíproca é evidente. Suponhamos então que $u.G$ e $v.G$ estejam em $C' = \alpha^r(A^r) + \beta^r(B^r) + m_x^{a+1} . C$.

Logo,

$$u.G = \alpha^r(a) + \beta^r(b) + m \tag{1}$$

$$v.G = \alpha^r(a') + \beta^r(b') + m' \tag{2}$$

Disto resulta que

$$uv.G = u.\alpha^r(a') + \beta^r(u.b') + u.m' \tag{3}$$

Mas

$$u.\alpha^r(a') = \alpha^r((e_1,\ldots,e_r).(\gamma_{ij}) = u(G_1,\ldots,G_r).(f^*\gamma_{ij}) \overset{(1)}{=\!=}$$

$$= \alpha^r(a).(f^*\gamma_{ij}) + \beta^r(b.f^*(\gamma_{ij})) + m.(f^*(\gamma_{ij})) .$$

Substituindo em (3) esta última relação, teremos

$$uv.G = \alpha^r(a.(\gamma_{ij})) + \beta^r(b.(f^*\gamma_{ij}) + u.b') + m''$$

onde $m'' = u.m' + m.(f^*\gamma_{ij}) \in m_x^{a+1} . C^r$.

Como $G \in \alpha^r(A^r)$ e $\{x_1, \ldots, x_n\} . C_x^\infty = m_x$, a prova está terminada.

§ 2. *Folheações e campos vetoriais*

Consideremos P variedade diferenciável, R^q o espaço euclideano q-dimensional $(q \geq 0)$ e $(U_i)_{i \in I}$ um recobrimento de P por abertos de sorte que tenhamos, para cada i de I, $\psi_i : U_i \to R^q$ uma submersão diferenciável.

DEFINIÇÃO 6:

A família $(\psi_i)_{i \in I}$ define uma folheação diferenciável em P se existir família (ψ_{ij}) de difeomorfismos (C^∞) locais de R^q satisfazendo $\psi_j = \psi_{ij} o \psi_2$ sempre que $\text{dom}\, \psi_i \cap \text{dom}\, \psi_j \neq \emptyset$, $(i,j) \in I^2$.

As submersões ψ_i são chamadas de descrições locais da folheação. Em geral denotaremos uma folheação em P por $L = (L_\alpha)$ para evidenciar as suas "folhas", ou seja, as subvariedades conexas maximais (para a inclusão) definidas localmente por $\psi_i^{-1}(v)$, $v \in \text{im}\, \psi_i$.

De forma mais geral,

DEFINIÇÃO 7:

Uma estratificação diferenciável de P é uma partição $L = (L_\alpha)$ de P por subvariedades diferenciáveis conexas.

Cada subvariedade é chamada de estrato de L.

DEFINIÇÃO 8:

Seja N variedade diferenciável e TN o seu fibrado tangente. Uma secção diferenciável deste fibrado é denominada um campo vetorial em N.

Em geral denotaremos por $\theta(N)$ o conjunto de todos os campos vetoriais de N munido com a estrutura de $C^\infty(N)$-módulo usual. Aqui, $C^\infty(N)$ é a R-álgebra das funções reais em N.

DEFINIÇÃO 9:

Sejam $f : N \to P$ aplicação diferenciável, $\pi : TP \to P$ a projeção natural e $\omega : N \to TP$, ω diferenciável, tais que $\pi o \omega = f$. Dizemos que ω é um campo vetorial ao longo de f.

$\theta(f)$ indicará a coleção de todos os campos vetoriais ao longo de f, munido da estrutura natural de $C^\infty(N)$-módulo.

As definições dadas anteriormente se estendem para os germes de aplicações. Assim sendo, $\theta_S(f)$ ou $\theta(f{:}S)$ denotará o $C_S^\infty(N)$-módulo de todos os germes de campos de $\theta(f)$ localizados em S. Ainda, se L for uma estratificação (diferenciável) de P, indicaremos por $\theta(L)$ o $C^\infty(P)$-submódulo de $\theta(P)$ constituído de todos aqueles campos que são tangentes aos estratos de L e $\theta(L{:}T)$ o $C_T^\infty(P)$-submódulo de $\theta(P{:}T)$ dos campos de $\theta(L)$ localizados em T, $T \subset P$.

DEFINIÇÃO 10:

Uma estratificação diferenciável L de P é de tipo algébrico finito se para cada y de P, $\theta(L{:}y)$ for um C_y^∞-

-módulo de tipo finito.

Por simplicidade, escreveremos "L é uma estratificação de P de tipo finito" em vez de "L é uma estratificação diferenciável de P de tipo algébrico finito".

A convenção acima será mantida em nossas próximas considerações.

PROPOSIÇÃO 5

Sejam K subvariedade fechada de N, L estratificação de N de tipo finito e $X \in \theta(K)$ tais que, para cada x de K, existe aberto U de N, $U \ni x$, de sorte que em $U \cap K$

$$X = \sum_i a_i G_i^x, \quad a_i \in C^\infty(U \cap K) \quad \text{e os} \quad G_i^x$$

são representantes dos geradores de $\theta(L{:}x)$ em $U \cap K$. Então existe Y em $\theta(L)$ com $Y|K = X$.

PROVA:

Consideremos $\{U(x) : x \in K\}$ o recobrimento de K fornecido pela hipótese da proposição. Em cada $U(x)$ definamos

$$\xi_x = \sum_i \tilde{a}_i G_i^x \tag{1}$$

onde $\tilde{a}_i$ é extensão de a_i a $U(x)$, diferenciável.

Não há perda de generalidade supormos que este recobrimento de K é um recobrimento de N pois K é fechada.

Seja (ρ_α) uma partição da unidade (C^∞) subordinada ao recobrimento $\{U(x)\}_{x \in K}$. Isto significa que para cada α existe $x(\alpha)$ de modo que o suporte ρ_α esteja contido em $U(x(\alpha))$.

Por fim, $Y = \sum_{\alpha} \rho_\alpha \xi_x(\alpha)$ é de $\theta(L)$ e ainda $Y|K = X$.

Tomemos em R^n, $D = \{x \in R^n, \ |x| < 1\}$ e $\Lambda = (\gamma_{ij})$ uma matriz cujos elementos estão em $C^\infty(D)$. Dados ν_i em $C^\infty(D)$ consideremos a equação

$$\Lambda.(\mu_j) = (\nu_i) \quad \text{em} \quad C^\infty(D).$$

PROPOSIÇÃO 6

Seja a equação $\Lambda.(\mu_j) = (\nu_i)$ em $C^\infty(D)$. Admitamos que $\Lambda : D \to M$, $x \to (\gamma_{ij}(x))$, seja transversal a todas as subvariedades S_k de M. Então a equação $\Lambda.(\mu_j) = (\nu_i)$ tem solução em $C^\infty(D)$ se e só se, para cada x de D, a equação $\Lambda(x).(\mu_j(x)) = (\nu_i(x))$ for solúvel.

PROVA: ver [7].

§ 3. *Certas estratificações diferenciáveis*

Neste parágrafo vamos exibir a estrutura local de $\theta(L)$ para L, estratificação de P, dada por uma função de Morse. Essencialmente, mostraremos que os C_x-módulos $\theta(L:x)$ são de tipo finito.

Seja então $\psi : P \to R$ uma função de Morse. P fica então dividida em duas subvariedades: $\Sigma(\psi) = \{x \in P : d\psi(x)=0\}$ e $P' = P - \Sigma(\psi)$. Temos que $\psi|P' : P' \to R$ é submersão e disto resulta uma folheação em P' dada pelas "superfícies de nível" de $\psi|P'$. Se $x \in \Sigma(\psi)$, teremos para uma conveniente vizinhança $U(x)$, de x em P, uma estratificação em que x

é o único estrato 0-dimensional.

A estratificação $L = L(\psi)$ será constituida pelos pontos de $\Sigma(\psi)$ e pelas subvariedades conexas maximais "superfícies de nível" de $\psi|P'$.

Antes, vejamos o seguinte resultado:

LEMA

Seja A o $C^\infty_y(P)$-módulo livre $C^\infty_y \times \dots \times C^\infty_y = (C^\infty_y)^r$ e $B : A^2 \to C^\infty_y$ definida por $B(m,n) = \sum_{i=1}^{r} m_i \cdot n_i$, $1 \le r \le p = \dim P$. Consideremos $\{g_1, \dots, g_r\}$ uma C_y-base de m_y e $g = (g_1, \dots, g_r)$. Então:

$$g^\perp = \{a \in A : B(a,g) = 0\} \text{ é um } C^\infty_y\text{-módulo de tipo finito.}$$

PROVA:

A aplicação $B(\ ,g) : A \to C^\infty_y$, $a \to B(a,g)$, é um C^∞_y-homomorfismo e então $g^\perp$ é um C^∞_y-submódulo de A pois $g^\perp = \ker B(\ ,g)$.

Se $r = 1$, $g^\perp = \{0\}$ e o lema está estabelecido. Consideremos então, para $1 \le i < j \le r$, o elemento $g_{ij} = (a_\ell)$ onde $a_i = -g_j$, $a_j = g_i$ e $a_\ell = 0$ se $\ell \notin \{i,j\}$.

É imediato que $g_{ij} \in g^\perp$. Mostremos que

$$\{g_{ij} : 1 \le i < j \le r\}.C^\infty_y = g^\perp.$$

Sejam $a \in g^\perp$ e g_{ir}. Então existem $c_i \in C^\infty_y$, $1 \le i \le r-1$, tais que

$$a - \sum_{1}^{r-1} c_i g_{ir} \in G_r = \{(b_1, \dots, b_r) \in g^\perp : b_r = 0\}.$$

Temos $b = a - \sum_{i=1}^{r-1} c_i g_{ir} = (a_1 + c_1 g_r, a_2 + c_2 g_r, \dots, a_r - \sum_{i=1}^{r-1} c_i g_i)$.

Agora, $b \in G_{r_{r-1}}$ se e só se $a_r - \sum_{i=1}^{r-1} c_i g_i = 0$. Como $a \in g^{\perp}$ temos $a_r g_r = - \sum_1 a_i g_i$. Pela proposição 2 do § 1, a existência dos c_i's tais que $b \in G_r$ está garantida.

Se $r = 2$, temos $(a_1,a_2)-c_1(-g_2,g_1)=(a_1+c_1g_2,0) \in g^{\perp}$. Disto temos $a_1g_1 = -c.g_1g_2$, ou seja, $a_1 = -c.g_2$.

Logo, $(a_1,a_2) = c_1(-g_2,g_1) = c_1.g_{12}$.

Se $r > 2$, tomemos c_j de sorte que $(b - \Sigma c_j g_{j(r-1)}) \in G_{r-1}$, $G_{r-1} = \{(b_1,\ldots,b_r) \in G_r : b_{r-1} = 0\}$. Assim, sucessivamente apoiados na proposição 2 do § 1, teremos após um número finito de etapas,

$$(a - \Sigma\alpha_{ij}g_{ij}) - \alpha(-g_2,g_1,0,\ldots,0) \in G_2$$

onde $G_2 = \{(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_r) \in g^{\perp} : \bar{b}_j = 0 \text{ para } j \geq 2\}$.

Com argumento idêntico ao caso $r = 2$ concluimos que $a \in g^{\perp}$.

PROPOSIÇÃO 7

Consideremos a estratificação $L = L(\psi)$ em P. Então para cada $y \in P$ $\theta(L:y)$ é um C_y-módulo de tipo finito.Aqui, $\psi : P \to R$ é uma função de Morse.

PROVA:

Suponhamos $y \in \Sigma(\psi)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\psi = \sum_1^p \varepsilon_i y_i^2$ para (y_i) istema local de coordenadadas em y.

Ainda, se $X \in \theta(P:y)$ teremos $\tilde{X} = \sum_1^p a_i \partial_i$ onde $\tilde{X}$ é representante de X e os ∂_i's são os campos coordenados rela tivamente ao sistema (y_i). Para U aberto de P, $U \ni y$, contido no domínio comum das coordenadas, consideremos $<,>$ em TU dado por $<\sum_i a_i \partial_i, \sum_j b_j \partial_j> = \sum_i a_i b_i$.

Logo, $\tilde{X}$ é tangente às "superfícies de nível" de em U se e só se $<\tilde{X}, \text{grad}\,\psi> = 0$ em U. Mas isto nos diz que:

$$\sum_1^p (\varepsilon_i y_i) a_i = 0, \quad \varepsilon_i \in \{-1,1\}.$$

Pelo lema anterior, $\theta(L{:}y)$ é de tipo finito.

Se $y \notin \Sigma(\psi)$, podemos supor $\psi = y_p$ para conveniente sistema de coordenadas (y_i) em y. Neste caso, $x \in \theta(L{:}y)$ se e só se $X = \sum_{i<p} a_i \varepsilon_i + 0$. Segue então que

$\theta(L{:}y)$ é de tipo finito.

COROLÁRIO:

Seja $\psi : R^n,0 \to R,0$ dada por $\psi((x_i)) = \sum_1^k \varepsilon_i x_i^2$. Então $\theta(L{:}0)$ é C_0^∞-finitamente gerado por $\binom{k}{2} + (n-k)$ geradores, $k \geq 2$.

CAPÍTULO II

L-ESTABILIDADE INFINITESIMAL

§ 1. *Duas definições de estabilidade*

Sejam N, P variedades diferenciáveis e $f \in C^{\infty}(N,P)$. Consideremos os módulos $\theta(N)$, $\theta(P)$ e $\theta(f)$ assim como as seguintes aplicações:

$$\omega f : \theta(P) \to \theta(f), \quad v \to \omega f(v) = v\circ f \quad \text{e}$$

$$tf : \theta(N) \to \theta(f), \quad u \to tf(u) = Tf\circ u$$

Uma estratificação L(diferenciável) em P dá origem então aos seguintes submódulos dos anteriores:

$$A = \theta(L), \quad C = \omega f(A).C^{\infty}(N), \quad B = tf^{-1}(C)$$

$$\hat{C} = \{\omega \in \theta(f) : \omega \text{ é tangente aos estratos de } L\}.$$

e $\hat{B} = tf^{-1}(\hat{C})$.

DEFINIÇÃO 1:

A aplicação $f : N \to P$ é L-infinitesimalmente estável se $C = \omega f(A) + tf(B)$.

DEFINIÇÃO 1':

$f : N \to P$ é $\hat{L}$-infinitesimalmente estável se $\hat{C} = \omega f(A) + tf(\hat{B})$.

Localizemos $f : N \to P$ em $S \subset N$ de modo que $f(S) = y$ ou seja: Consideremos $f_S : (N,S) \to (P,y)$ o germe de f em S. Teremos então os módulos "germificados":

$A_y = \{\alpha \in \theta(P:y) \ : \ \alpha \in \theta(L:y)\}$, $C(S) = \theta(f:L:S) =$

$= \omega f_S(A_y).C_S^\infty(N)$, $B(S) = tf_S^{-1}(C(S))$.

$\hat{C}(S) = \hat{\theta}(f:L:S) = \{$germes de $\hat{C}$, localizados em $S\}$

$\hat{B}(S) = tf^{-1}(\hat{C}(S))$.

DEFINIÇÃO 2:

f_S é L-infinitesimalmente estável se

$C(S) = \omega f_S(A_y) + tf_S(B(S))$.

DEFINIÇÃO 2':

f_S é $\hat{L}$-infinitesimalmente estável se

$\hat{C}(S) = \omega f_S(A_y) + tf_S(\hat{B}(S))$.

Nas definições acima, ωf_S e tf_S são as aplicações induzidas por ωf e tf sobre os módulos germificados. Ademais, referir-nos-emos à L-estabilidade infinitesimal ($\hat{L}$-estabilidade infinitesimal), tanto para germes como para aplicações, com o termo L-estabilidade ($\hat{L}$-estabilidade).

Quando L for uma folheação em P, teremos que $\hat{\theta}(f:L:S) \cong \theta(g:L:S)$ para quaisquer $f, g \in C^\infty(N,P)$ tais que $f(S) = g(S) = y$.

De fato, podemos supor L de codimensão menor que a dimensão de P e considerar (y_i) sistema de coordenadas locais em torno de y de modo que a descrição local de L, em y, seja dada por $\psi = (y_{k+1}, \ldots, y_p)$. Logo, $A_y = \{\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_k}\}.$ $.C_y^\infty(P)$ sendo então um C_y^∞-módulo livre de posto k. Como cada

$\omega \in \hat{\theta}(f:L:S)$ é da forma $\sum_{1}^{k} a_i \omega f_S(\frac{\partial}{\partial y_i})$ para $a_i \in C_S(N)$, temos que este C_S^∞-módulo é livre de posto k. Da definição de $\theta(g:L:S)$ resulta que este último é também C_S^∞-livre de posto k, e enfim, temos o isomorfismo desejado.

Desta observação resulta que quando L for uma folheação, as definições 2 e 2' serão as mesmas.

Em geral não teremos $\hat{\theta}(f:L:S) \cong \theta(g:L:S)$. Isto será visto mais adiante, no § 3.

PROPOSIÇÃO 1

Seja $f : N \to P$ diferenciável, S parte finita de N com $f(S) = y$ e L uma estratificação de P de tipo finito. Então, f_S é L-estável se e só se:

(i) $\omega f_S(A_y) + tf_S(B(S)) + f^*(m_y).C(S) = C(S)$ ou

(ii) $\omega f_S(A_y) + tf_S(B(S)) + m_y^{a+1}C(S) = C(S)$, onde

$a = \dim_R A_y/m_y.A_y$.

PROVA:

Temos que $tf_S : B(S) \to C(S)$ é um homomorfismo de C_S^∞-módulos e $\omega f_S : A_y \to C(S)$ é um homomorfismo sobre $f_S^*:C_y^\infty \to C_S^\infty$. Como A_y é de tipo finito, segue que $C(S)$ é de tipo finito. Logo, $(\omega f_S, tf_S, A_y, B(S), C(S))$ é um homomorfismo misto sobre f_S^*. Terminamos a prova aplicando a proposição 3 do capítulo I.

Tendo-se em vista a condição (ii) desta proposição, poderíamos pensar que L-estabilidade de f_S estaria dependendo somente do $j^{a+1}f$ em cada ponto de S. No caso de $L = \{P\}$, is to ocorre (ver [3]). Mas uma situação em que tal fato não é verdadeiro se apresenta se considerarmos (y_1, y_2) sistema de coordenadas em R^2 e L dada pelas curvas de nível de y_2. Aqui temos $A_o = \theta(L:0) = \{\frac{\partial}{\partial y_1}\}.C_o^\infty(R^2)$ e $C(0) = \{\frac{\partial}{\partial y_1} o f_o\}.C_o^\infty(R^2)$ para $f_o : R^2.0 \to R^2.0$, C^∞. Ainda,

$B(0) = \{\beta \in \theta(R^2:0): tf_o(\beta) \in C(0)\} = \{\beta : tf_o^2(\beta) = 0$ onde $f_o^2 = y_2 o f_o\}$. Agora, interpretamos a proposição 1 nessas coordenadas e obtemos:

O germe f_o é L-estável se e só se o sistema

$$\begin{pmatrix} \omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha o f_o \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tf_o^1(\beta) \\ tf_o^2(\beta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\omega} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

tiver soluções α e β_i em $C_o^\infty(R^2)$, $\bar{\omega}$ em $m_o^2(R^2)$ para ω dado em $C_o^\infty(R^2)$.

Com isto feito, observemos que as aplicações $f: R^2 \to R^2$, $g_r : R^2 \to R^2$

$(ux) \xrightarrow{f} (u0)$, $\quad (ux) \xrightarrow{g_r} (u, u^r)$ são tais que:

$j^2 f(0) = j^2 g_r(0)$, $\quad r \geq 3$.

No entanto, apenas o germe f_o é L-estável.

O sistema dado em (1) se torna, para f_o,

$$\begin{pmatrix} \omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha o f_o \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\omega} \\ 0 \end{pmatrix}$$ que é claramente solúvel tomando-se, para ω dado, $\beta_1 = \omega$, $\alpha = 0$ e $\bar{\omega} = 0$.

No caso do germe de g_r em 0 temos:

$$\begin{pmatrix} \omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha o g_{or} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\omega} \\ 0 \end{pmatrix}$$

que não é solúvel para $\omega = x$.

O próximo resultado relacionará a L-estabilidade do germe de f em $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ com aquela dos germes de f em cada x_i. Neste caso, $f(S) = y$.

Vejamos antes a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3:

Uma família $(S_i)_{i \in I}$ de subespaços de um espaço vetorial V tem intersecção regular se $\underset{i}{\oplus} \pi_i : V \to \underset{i}{\oplus} V/S_i$ for sobre. Aqui, $\pi_i : V \to V/S_i$ é a projeção natural.

Comecemos observando que $\omega f_S : A_y \to C(S)$ induz uma aplicação R-linear $\bar{\omega} f_S$

$$\bar{\omega} f_S : A_y/m_y.A_y \to [C(S)/f_S^*(m_y).C(S) + tf_S(B(S))] = N(f_S)$$

pois $\omega f_S(m_y.A_y) \subset f_S^*(m_y).C(S)$. Por outro lado,

$$[C(S)/f_S^*(m_y).C(S)+tf_S(B(S))] = \underset{i}{\oplus} C(x_i)/f_{x_i}^*(m_y).C(x_i)+tf_S(B(x_i))].$$

Logo, concluimos que $\bar{\omega} f_S = \underset{i}{\oplus} \bar{\omega} f_{x_i}$.

Sob as hipóteses da proposição 1, temos então que f_S é L-estável se e só se $\bar{\omega} f_S$ for sobre. Enfim, ainda sob as mesmas hipóteses anteriores,

PROPOSIÇÃO 2

O germe f_S é L-estável se e só se f_{x_i} forem L-está veis e $(\ker(\bar{\omega} f_{x_i}))_{i=1,2,\ldots,n}$ tiver intersecção regular em $A_y/m_y.A_y$.

OBSERVAÇÃO:

Esta proposição continua válida para a $\hat{L}$-estabilidade infinitesimal desde que tenhamos

$(\omega f_S,\ tf_S,\ A_y,\ \hat{B}(S),\ \hat{C}(S))$ um homomorfismo misto sobre $f_S^* : C_y^\infty \to C_S^\infty$.

§ 2. A L-estabilidade é uma condição finita

No caso usual de estabilidade infinitesimal, isto é, quando $L = \{P\}$, vale para aplicações próprias o seguinte resultado, para S conjunto finito qualquer

"f é estável se e só se f_S for estável".

Vejamos a extensão deste resultado para a L-estabilidade. Comecemos então com a

DEFINIÇÃO 4:

$f \in C^\infty(N,P)$ é L-submersão, L estratificação em P, se $tf_x : B(x) \to C(x)$ for sobre para cada x de N.

Em geral denotaremos por $\Sigma(f:L)$ os pontos x de N para os quais tf_x não é sobre. Neste sentido temos a

PROPOSIÇÃO 3

Sejam $f : N \to P$ aplicação diferenciável, L estratificação em P e $x \notin \Sigma(f:L)$ tal que $C(x)$ seja de tipo finito. Então $x \notin \overline{\Sigma(f,L)}$.

PROVA:

Suponhamos que $x \in \overline{\Sigma} = \overline{\Sigma(f,L)}$. Seja então (x_n) em N de modo que $x_n \in \Sigma$, $n \geq 1$, e que esta seqüência convirja para x. Como $C(x)$ é finitamente gerado e $x \notin \Sigma$, existem:

$$G_1, \ldots, G_r \in \theta(f|U,L), \quad \beta_1, \ldots, \beta_r \in \theta(U) \quad \text{tais que}$$

$$t(f|U).(\beta_i) = G_i, \quad 1 \leq i \leq r, \quad \text{e } U \text{ aberto contendo } x.$$

Da convergência de (x_n) segue a existência de um inteiro k com $x_k \in U$. Como $x_k \in \Sigma$, existe $\omega \in C(x_k)$ de sorte que $\omega \notin \operatorname{im} tf_{x_k}$. (*)

Tomemos $\overline{\omega}$ representante de ω em $\theta(f|U_{x_k}:L)$ onde U_{x_k} é aberto de N contendo x_k e $\overline{U}_{x_k} \subset U$.

Sejam V_{x_k}, V' abertos com $V_{x_k} \ni x_k$ tais que $\overline{V}_{x_k} \subset V'$ e $\overline{V'} \subset U_{x_k}$. Consideremos agora $\delta : U_x \to R$, C^∞, valendo um em V_{x_k} e zero fora de V'. Tomemos $\overline{\overline{\omega}}$ uma extensão de $\overline{\omega}$, $\overline{\overline{\omega}} \in \theta(f|U)$ e definamos $\tilde{\omega} = \delta.\overline{\overline{\omega}}$. Resulta então que $\tilde{\omega} = \sum_i a_i G_i$ para $a_i \in C^\infty(U)$. Logo, $\tilde{\omega} = t(f|U).(\sum_i a_i\beta_i)$ onde $\sum_i a_i\beta_i \in \theta(U)$. Localizando em x_k, obtemos $\omega = tf_{x_k}(\sum_i \tilde{a}_i\tilde{\beta}_i)$ que contradiz a relação (*).

COROLÁRIO:

Se para cada x de N, $\theta(f:L:x) = C(x)$ for de tipo finito, então $\Sigma(f:L)$ será fechado em N.

LEMA

Seja $f \in C^{\infty}(N,P)$ L-submersão. Então f é L-estável.

PROVA:

Consideremos $\omega \in \theta(f:L)$. Dado x em N, temos a existência de aberto U_x, $U_x \ni x$, $\xi_x \in \theta(N)$ tal que

$$tf(\xi_x)\big|_{U_x} = \omega\big|_{U_x}.$$

Seja (ρ_α) uma partição (C^{∞}) da unidade, subordinada à cobertura $(U_x)_{x\in N}$. Definamos $\xi = \sum_\alpha \rho_\alpha \xi_{x(\alpha)}$. Temos então:

$$\omega = \sum_\alpha (\rho_\alpha . \omega) = \sum_\alpha (\rho_\alpha tf(\xi_{x(\alpha)})) = tf(\sum_\alpha \rho_\alpha \xi_{x(\alpha)}) = tf(\xi)$$

concluindo a prova.

PROPOSIÇÃO 4

Sejam $f : N \to P$ aplicação diferenciável própria e L estratificação de tipo finito em P. Então f é L-estável se e só se para cada parte finita S, com $f(S) = y$, f_S for L-estável.

PROVA:

Seja $S \subset N$ com $f(S) = y$ e suponhamos que f seja L-estável. Seja $\omega \in \theta(f:L:S)$. Consideremos $\tilde{\omega} \in \theta(f:L)$ estendendo um representante de ω numa vizinhança de S. Da L-estabilidade de f resulta $\tilde{\omega} = tf(\beta) + \omega f(\alpha)$. Localizando em S, obtemos que

$$\omega = tf_S(\tilde{\beta}) + \omega f_S(\tilde{\alpha}).$$

Admitamos agora que f_S seja L-estável para cada S, S parte finita de N. Primeiramente vamos mostrar que, para cada y em P,

$$\Sigma y = f^{-1}(y) \cap \Sigma(f:L) \quad \text{é finito.}$$

Suponhamos que não. Seja $T = \{x_1, \ldots, x_{a+1}\}$, $a+1$ pontos de Σy onde $a = \dim_R A_y/m_y.A_y$. Consideremos as aplicações R-lineares

$$\bar{\omega}f_{x_i} : A_y/m_y.A_y \to C(x_i)/tf_{x_i}(B(x_i)) + f^*m_y.C(x_i).$$

Como f_T é L-estável, temos que cada $\bar{\omega}f_{x_i}$ é sobre e ainda, $(\ker(\bar{\omega}f_{x_i}))$ tem intersecção regular em $A_y/m_y.A$. Isto quer dizer que

$$\sum_1^{a+1} \operatorname{codim}(\ker(\bar{\omega}f_{x_i})) = \operatorname{codim}(\bigcap_1^{a+1} \ker(\bar{\omega}f_{x_i})) \qquad (*)$$

Agora, $\dim_R C(x_i)/tf_{x_i}(B(x_i)) + f^*(m_y).C(x_i) \geq 1$ pois caso contrário, $C(x_i) = tf_{x_i}(B(x_i)) + f^*(m_y).C(x_i) \subset$ $\subset tf_{x_i}(B(x_i)) + m_{x_i}.C(x_i)$, que contraria o fato de $x_i \in \Sigma$, pois, pelo corolário 4 do capítulo I, teríamos $C(x_i) = tf_{x_i}(B(x_i))$.

Segue então que cada $\ker(\bar{\omega}f_{x_i})$ é um subespaço propriamente contido em $A_y/m_y.A$ e então a relação $(*)$, dada anteriormente, fornece-nos uma contradição.

Tomemos τ em $\theta(f:L)$. Como $f_{\Sigma y}$ é L-estável, existe $\xi_y \in \theta(N)$ e $\eta_y \in \theta(P:L)$ tais que numa vizinhança U_y de Σy em N

$$[tf(\xi_y) + \omega f(\eta_y)]\big|U_y = \tau\big|U_y$$

Como f é própria, segue que $f(\Sigma - U_y)$ é fechado em P, pois $\Sigma = \Sigma(f:L)$ é fechado em N, conforme garante o corolário da proposição 3 deste capítulo. Seja $V_y = P - f(\Sigma - U_y)$. É claro que $y \in V_y$.

Seja (ρ_α) uma partição da unidade em P subordinada à cobertura (V_y) e consideremos

$$\xi_1 = \sum_\alpha (\rho_\alpha \circ f).\xi_{y(\alpha)} \quad \text{e} \quad \eta = \sum_\alpha \rho_\alpha \eta_{y(\alpha)}$$

Temos então $(tf(\xi_1) + \omega f(\eta))|U = \tau|U$ onde

$$U = \bigcap_\alpha U_{y(\alpha)} \cup f^{-1}(P - \operatorname{supp}(\rho_\alpha)) \text{ é uma vizinhança de } \Sigma.$$

De fato, U é aberto por ser intersecção localmente finita de abertos e $U \supset \Sigma$ pois, se $x \in \Sigma$, teremos $x \in U_{y(\alpha)}$ ou $f(x) \notin V_y$ e, por conseguinte, $x \in f^{-1}(P - \operatorname{supp}(\rho_\alpha))$.

Portanto $\tau - tf(\xi_1) - \omega f(\eta)$ se anula na vizinhança U de Σ. Se $U = N$, terminamos.

Caso contrário, seja U' vizinhança de Σ com $\overline{U'} \subset U \cap (\bigcup_y U_y)$. Tomemos $\rho : N \to R$ diferenciável tal que ρ valha 1 em $\overline{U'}$ e zero fora de $U \cap (\bigcup_y U_y)$.

Consideremos então

$$\tau_1 = \tau - tf(\rho\xi_1) - \omega f(\eta)$$

Segue então que $\tau_1 \in \theta(f:L)$ e $\tau_1 = 0$ em uma vizinhança de Σ. Disto resulta a existência de $\xi_2 \in \theta(N)$ tal que $tf(\xi_2) = \tau_1$.

Enfim, f é L-estável.

É conveniente observar que esta proposição continua vá lida se trocarmos a hipótese de L-estabilidade pela de $\hat{L}$-estabilidade desde que $(\omega f_S,\ tf_S,\ A_Y,\ \hat{B}(S),\ \hat{C}(S))$ seja um homomorfismo misto sobre $f^* : C_Y^\infty \to C_S^\infty$.

O parágrafo a seguir será dedicado a exemplos de germes L-estáveis para estratificações especiais no contradomínio.

§ 3. *Classes de germes L-estáveis*

EXEMPLO 1

Consideremos $f : R,0 \to R^{n+k}$ germe diferenciável, $(y_1:y_2) = (x_1, \ldots, x_n;\ x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$ sistema usual de coordenadas para R^{n+k} e L a folheação deste espaço dada por $y_2 : R^{n+k} \to R^k$, $n \geq 1$ e $k \geq 1$.

Sejam os espaços:

$$A_o = \theta(L:0) = \{X \in \theta(R^{n+k}:0)\ ;\ X = \sum_1^n v_i \partial_i,\quad v_i \in C_o^\infty(R^{n+k})$$

∂_i sendo os germes, em 0, dos campos coordenados

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}.$$

$$C(0) = \{Y \in \theta(f:0) : Y = \sum_1^n \omega_i \partial_i of \quad \text{onde} \quad \omega_i \in C_o^\infty(R)\}.$$

$$B(0) = \{X' \in \theta(R:0) : tf(X') \in C(0)\}.$$

Então, f será L-estável se e só se (E) for solúvel para ω_1 dados, sendo $f = (f^1:f^2)$ onde $f^i = y_2 of$, $i = 1, 2$.

(E) $(\omega_1,\ldots,\omega_n:0,\ldots,0)=((\dot{f}^1).u:(\dot{f}^2).u)+(v_1(f^1:f^2),\ldots,:0,\ldots,0)$

Temos duas possibilidades

(P_1) $tf^2 = 0$

Neste caso $f^2 = 0$ e então as equações (E) se tornam

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \vdots\\ \omega_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{f}^1.u\\ \vdots\\ \dot{f}^1.u\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1(f^1:0)\\ \vdots\\ v_n(f^1:0)\end{pmatrix}$$

ou, de forma mais simples, $\bar{\omega} = tf^1(\bar{u}) + \omega f^1(\bar{v})$.

Logo, temos: f é L-estável se e só se f^1 for estável no sentido usual. Mas isto significa que f é germe de imersão, se $n > 1$. Para $n = 1$, f ou é germe de imersão ou então um germe quadrático. (ver [3]).

Analisemos agora a segunda possibilidade.

(P_2) $tf^2 \neq 0$

Neste caso teremos a condição $tf^2(\bar{u}) = 0$ (ver (E)). Segue então que, para alguma função coordenada f_r^2, com $f_r^2 \neq 0$,

$$f_r^2.u = 0 \tag{1}$$

Daqui resulta que $u \in m_o^\infty(R)$ e, de acordo com a proposição 1 do capítulo II, (E) será solúvel se e só se

$(\omega_1^\ell,\ldots,\omega_n^\ell:0) = ((\dot{f}^1).u:(\dot{f}^2).u) + (v_1(f^1:f^2),\ldots:0) + (\bar{\omega}:0)$

for solúvel para $\omega_i^{\ell} = \delta_{i\ell}.t$ onde $\{t\}.C_o^{\infty} = m_o(R)$, $1 \le \ell \le n$ e $\bar{\omega} \in [m_o^{n+1}(R^{n+k})]^n$. Logo, para algum v, $vof = t + \varepsilon$, $\varepsilon \in m_o^2$ e então f é germe de imersão.

Para finalizar, estudemos a L-estabilidade para $F : (R, \{t_1,t_2\}) \to R^3,0$, sendo L dada em R^3 por $(x_1,x_2,x_3) \to x_3$.

Como cada folha é bidimensional segue que f_{t_i} não é L-submersão, $f_{t_i} : (R,\{t_i\}) \to (R^3,0)$, $i = 1, 2$. Mais ainda, são germes de imersão conforme nossas discussões anteriores. Logo,

$$\dim_R C(t_i)/tf_{t_i}(B(t_i)) + m_{t_i}.C(t_i) \le 2.$$

De acordo com a proposição 2 do capítulo II, devemos ter estas dimensões iguais a 1 se quisermos f L-estável. Com um raciocínio análogo ao da discussão da possibilidade (P_2), concluimos que $x_3 of_{t_i} = 0$. Segue então que f será L-estável desde que $\hat{f} : (R, \{t_1,t_2\}) \to R^2,0$, $\hat{f} = (x_1 of, x_2 of)$ seja estável no sentido usual.

EXEMPLO 2

Consideremos os germes diferenciáveis $F : R^{n+1},0 \to R^2,0$ $\psi : R^2,0 \to R,0$ sendo que este último representa localmente uma folheação L de codimensão 1 em R^2.

Se F for germe de submersão, então claramente teremos F L-estável.

Admitamos então que o posto de $TF(0)$ seja 1.

CASO 1: $\psi o F \in m_o^2(R^{n+1})$.

Seja $\psi : R^2,0 \to R,0$ diferenciável de modo que $\ker T\psi(0) \oplus \ker T\varphi(0) = R^2$. Logo, temos que $u = \psi o F$ se estende a um "sistema de coordenadas locais" em $R^{n+1},0$, $(u,x) = (u, x_1, \ldots, x_n)$. Relativamente a estes sistemas, temos

$$F = (u,f) \quad e \quad \varphi = \pi_2 \qquad (f = \varphi o F) \quad e$$

a equação da L-estabilidade para F se escreve

$$(E) \quad \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ f_u & f_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma o F \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para}$$

$\omega, \beta_i, \alpha \in C_o^\infty(R^{n+1})$ e $\gamma \in C_o^\infty(R^2)$.

Considerando a proposição 2 do capítulo 2, temos:

F é L-estável se e só se $\bar{\omega}F : A_o/m_o.A_o \to N(F)$ for sobre,

$$N(F) = \frac{C(0)}{tF(B(0)) + F^*m_o.C(0)}.$$

Como $\dim_R A_o/m_o.A_o = 1$, temos que $\dim N(F) \leq 1$.

Se esta dimensão for zero, teremos F uma L-submersão já que a inclusão $F^*m_o.C(0) \subset m_o.C(0)$ implica $tF(B(0)) = C(0)$.

Analisando a equação (E) obtemos que F é L-estável se e só se $f_u \in \{f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}\}.C_o^\infty(R^{n+1})$.

Vejamos agora quando $\dim N(F) = 1$. Temos então

$$\dim_R \frac{C(0)}{I + \{u,f\}.C(0)} = 1 \qquad (1)$$

onde $\quad I = \begin{pmatrix} \{\alpha \in C_o^\infty : f_u.\alpha = f_x.\beta\} \\ 0 \end{pmatrix}$. Como

$C(0) \simeq \begin{pmatrix} C_o^\infty(R^{n+1}) \\ 0 \end{pmatrix}$, a relação (1) nos diz que

$(J = \{\alpha : f_u.\alpha = f_x.\beta\}) + \{u,f\}.C^\infty(R^{n+1}) = m_o(R^{n+1})$ ou melhor,

$(J \cup \{u\}).C_o^\infty(R^{n+1}) = m_o(R^{n+1})$, pois $f \in m_o^2$.

Tendo-se em mente a inclusão $i : R^n,0 \to R^{n+1},0$ dada por $x \to (0,x)$, concluimos que F L-estável implica $i^*(J) = J^o = m_o(R^n)$ pois i^* é sobre.

A recíproca também é verdadeira e sua prova está baseada no seguinte resultado:

$m_o(R^s) = \{g_1, \ldots, g_s\}.C_o(R^s)$ se e só se

$\{\pi(g_1), \ldots, \pi(g_s)\}.R = m_o(R^s)/m_o^2(R^s)$,

π a projeção natural.

Em particular, se $\{f_u, f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}\}.C_o(R^{n+1}) = m_o(R^{n+1})$ então F será L-estável se e só se

$\{f^o_{x_1}, \ldots, f^o_{x_n}\}.C^\infty(R^n) = m_o(R^n)$.

De fato, $J = \{\alpha : \alpha.f_u = \sum_1^n \beta_i f_{x_i}\} = \{f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}\}.C_o^\infty(R^{n+1})$ em acordo com a proposição 2 do capítulo I.

CASO 2: $\psi oF \notin m_o^2(R^{n+1})$

Tomemos sistemas de coordenadas (u,x), (ψ,ϕ) de modo que $F = (f,u)$, $f = \psi o F \in m_o^2$, $u = \varphi o F$ e $\varphi = \pi_2$.

Relativamente a estes sistemas a equação da L-estabilidade é

$$\begin{pmatrix} \omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u & f_x \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma o F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Seguindo a mesma filosofia usada na discussão do caso anterior (caso 1), obteremos a seguinte caracterização:

F é L-estável se e só se $J^o = m_o(R^n)$.

CASO 3:

Aqui assumiremos que o posto de $TF(0)$ é zero. As equações da L-estabilidade serão, para $F = (f^1,f^2)$ e $\varphi = \pi_2$

$$(E) \begin{cases} \omega = \alpha . f_u^1 + \sum_i \beta_i f_{x_i}^1 + \gamma o F \\ 0 = \alpha . f_u^2 + \sum_i \beta_i f_{x_i}^2 \end{cases}$$

Suponhamos que F seja L-estável. Como $\gamma o F$ ou é inversível ou é de m_o^2, resulta que

$$\{f_u^1, f_{x_1}^1, \ldots, f_{x_n}^1\}.C_o(R^{n+1}) = m_o(R^{n+1}) \tag{1}$$

Caso contrário, para $\omega^i = x_i$ e $\omega^o = u$, (E) não seria solúvel.

Tomemos $\omega_j = f_{x_j}^1$ e $\omega_o = f_u$. Da solubilidade (E) segue que

$$\begin{cases} f^1_{x_j} = \alpha_j . f^1_u + \sum\limits_i \beta^j_i f^1_{x_i} + \gamma_j \circ F \\ \\ 0 = \alpha_j . f^2_u + \Sigma \beta^j_i . f^2_{x_i} \end{cases}$$

para α_j, β^j_i, $\gamma_j \in m_o(R^{n+1})$ se $i \neq j$ e $\beta^j_j \notin m_o(R^{n+1})$

$$\begin{cases} f_u = \alpha_o . f^1_u + \sum\limits_i \beta^o_i . f^1_{x_i} + \gamma_o \circ F \\ \\ 0 = \alpha_o . f^2_u + \sum\limits_i \beta^o_i . f^2_{x_i} \end{cases}$$

para β^o_i, $\gamma_o \in m_o(R^{n+1})$, $1 \le i \le n$ e $\alpha_o \notin m_o(R^{n+1})$,

conforme nos garante a relação anterior (1). Daqui segue que $\{f^2_u, \ldots, f^2_{x_1}, \ldots, f^2_{x_n}\}.C_o(R^{n+1}) = I$ é tal que $I = m_o(R^{n+1}).I$. Pelo lema de Nakayama, $I = \{0\}$.

Reciprocamente, suponhamos que $f^2 = 0$ e esteja válida a relação (1). Então F será L-estável. Para provar isto podemos usar, por exemplo, a proposição 1 do capítulo II modelada na proposição 4 do capítulo I.

EXEMPLO 3

Consideremos $F : R^2,0 \to R^3,0$, dada nas coordenadas usuais por $(u,v) \to (u,uv,v^2)$ e L_i a folheação de R^3 definida por $\pi_i : R^3 \to R$, $(x_j) \to x_i$.

Vejamos que F é L_i-estável se e só se $i = 3$.

A equação da L_i-estabilidade é

$$(E_i)\quad \begin{pmatrix} \omega_{1i} \\ \omega_{2i} \\ \omega_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \\ 0 & 2v \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{1i} o F \\ \gamma_{2i} o F \\ \gamma_{3i} o F \end{pmatrix}$$

onde $\omega_{ki} = (1 - \delta_{ki})\omega_k$ e $\gamma_{ki} = (1 - \delta_{ki})\gamma_k$.

De (E_1) obtemos $\begin{cases} \omega_2 = u.\beta_1 + \gamma_2 o F \\ \omega_3 = 2v.\beta_1 + \gamma_3 o F \end{cases}$

que não é solúvel para $\omega_2 = v$ pois $v \notin F^*(C_o^\infty(R^3))$.

(E_2) nos fornece $\begin{cases} \omega_1 = \alpha'.u + \gamma_1 o F \\ \omega_3 = -2\alpha'.v^2 + \gamma_3 o F \end{cases}$

que também não é solúvel para $\omega_1 = v$.

Finalmente, mostremos que (E_3) é solúvel para ω_1, ω_2 em $C_o^\infty(R^2)$.

Temos $\begin{cases} \omega_1 = \alpha_1 + \gamma_1 o F \\ \omega_2 = \alpha_1.v + \gamma_2 o F \end{cases}$

Pela proposição 4 do capítulo I segue que F é L_3-estável pois:

$$\begin{pmatrix} u & 0 & v & 0 \\ 0 & u & 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \\ 0 & 2v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & v & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi_1 o F & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & \pi_1 o F - \pi_3 o F & 0 \end{pmatrix}$$

EXEMPLO 4

Seja $f : R,0 \to R^n,0$ germe de imersão e L a estratificação fornecida por $\psi = \sum_1^n \varepsilon_i x_i^2$ onde (x_i) constitue um sistema de coordenadas em R^n, $n \geq 2$. Então f é $\hat{L}$-estável.

Observemos inicialmente que $\hat{\theta}(f:L:0) = \{\omega = \sum_i a_i \partial_i of$ $\sum_1^n a_i \varepsilon_i f_i = 0$, $a_i \in m_o(R)$ e $f_i = x_i of\}$. Como f é germe de imersão, podemos supor que $f_1 \notin m_o^2(R)$. Logo, de $\sum_i a_i \varepsilon_i f_i = 0$, tiramos que

$$a_1 = \sum_2^n (\varepsilon_1 a_1/f_1)(-f_i . \varepsilon_i) \quad \text{e então}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_2^n (\varepsilon_1 a_i/f_i)(-\varepsilon_i . f_i) \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_2^n (\varepsilon_1 a_i/f_1)(-\varepsilon_i . f_i) \\ \varepsilon_1 (a_2/f_1)(\varepsilon_1 . f_1) \\ \vdots \\ \varepsilon_1 (a_n/f_1)(\varepsilon_1 . f_1) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_2^n (\varepsilon_1 a_i/f_1) \begin{bmatrix} -\varepsilon_i . f_i \\ 0 \\ \vdots \\ \varepsilon_1 . f_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_2^n f^*(c_i) \begin{bmatrix} -\varepsilon_i . f_i \\ 0 \\ \vdots \\ \varepsilon_1 . f_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Segue então que $\omega = (\sum_2^n c_i(-\varepsilon_i x_i \partial_1 + \varepsilon_i x_1 \partial_i))of = \eta of$. Pela proposição 7 do capítulo I, $\eta \in \theta(L:0)$ e portanto f é $\hat{L}$--estável.

EXEMPLO 5

Consideremos $F : R^{n+1},0 \to R^2,0$ diferenciável e L dada por $\psi = y_1^2 + y_2^2$. Admitindo-se que o posto de $TF(0)$ seja 1, podemos supor (u,x) sistema de coordenadas de sorte que $F = (u,f)$ onde $u = y_1 oF$ e $f = y_2 oF$.

Aqui, $\theta(F:L:0) = \{-f.\partial_1 oF + u.\partial_2 oF\}.C_o^\infty(R^{n+1})$ desde que $f \notin \{u\}.C_o^\infty(R^{n+1})$ pois $\omega = a_1.\partial_1 oF + a_2.\partial_2 oF$ será "tangente aos estratos" se e só se $ua_1 + fa_2 = 0$ e $a_i \in m_o(R^{n+1})$.

Neste caso a equação da $\hat{L}$-estabilidade é

$$a.\begin{pmatrix} -f \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f_u & f_x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + boF.\begin{bmatrix} -f \\ u \end{bmatrix}$$

que na forma simplificada se torna

$$\text{(E)} \quad [a - boF][u + f.f_u] = f_x.\beta = \sum_i \beta_i f_{x_i}.$$

Suponhamos que $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset \{f_{x_1},\ldots,f_{x_n}\}.C_o^\infty(R^{n+1})$. Nestas condições, F é $\hat{L}$-estável.

Para $a_o = u$, tomamos $b = y_1$ e $\beta_i = 0$, ao passo que para $a_i = x_i$, tomamos $b = 0$ e então (E) estará satisfeita levando-se em conta nossa hipótese.

No caso de $f \in \{u\}.C_o^\infty(R^{n+1})$, teremos que $\omega = a_1\partial_1 oF + a_2\partial_2 oF$ será de $\hat{\theta}(F:L:0)$ se e só se

$a_1 = -ga_2$, onde g é tal que $f = u.g$ e $a_2 \in m_o(R^{n+1})$.

Temos então $\begin{pmatrix} -g.a_2 \\ \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g(c_o u + \sum\limits_1^n c_i x_i) \\ \\ (c_o u + \sum\limits_1^n c_i x_i) \end{pmatrix} =$

$$= c_o \begin{pmatrix} -f \\ \\ u \end{pmatrix} + \sum_1^n c_i \begin{pmatrix} -g.x_i \\ \\ x_i \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad \omega, \quad c_i \in C_o(R^{n+1}).$$

Procuremos resolver

$$x_i \cdot \begin{pmatrix} -g.x_i \\ \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \\ f_u & f_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \\ \beta \end{bmatrix} + \gamma o F \begin{bmatrix} -f \\ \\ u \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\begin{cases} \alpha = -g.x_i^2 + (\gamma o F).f \\ \\ x_i^2 = f_u.\alpha + f_x.\beta + (\gamma o F).u \end{cases}$$

Substituindo-se o valor de α na segunda equação, dado pela primeira, obtemos

$$x_i^2 = f_u(-gx_i^2 + (\gamma o F).f) + f_x.\beta + (\gamma o F).u \qquad \text{ou}$$

$$x_i^2(1 + f_u.g) = (f.f_u + u)(\gamma o F) + f_x.\beta.$$

Como $f = ug$, teremos $f_u = g + u.g_u$ e $f_{x_i} = u.g_{x_i}$ e, portanto,

$$x_i^2(1 + g^2 + ugg_u) = u[(g.f_u + 1)\gamma oF + \sum_i \beta_i g_{x_i}].$$

Como $(1 + g^2 + ugg_u)$ é inversível, obtemos que $x_i^2 \in \{u\}.C_o^\infty(R^{n+1})$. Contradição ! Logo, F não é $\hat{L}$-estável.

EXEMPLO 6

Consideremos $F : (R^{n+s}.(0,0)) \to (R^{p+s}.(0,0))$ e $\pi : (R^{p+s}.(0,0)) \to (R^s,0)$ dadas por $F(x,u) = (g(x,u),u)$, $\pi(y,u) = u$ onde (x,u) e (y,u) são as coordenadas usuais destes espaços.

Seja $f : (R^n,0) \to (R^p,0)$ definida por $f(x) = g(x,0)$ e L a folheação em R^{P+S} dada por π. Localizando-se F e f nos respectivos pontos-base teremos:

$F_{(0,0)}$ será L-estável se e só se f_0 for estável no sentido usual.

Por simplicidade omitiremos os índices $(0,0)$ e 0 dos germes em questão.

Como de costume temos

$\theta(L:(0,0)) = A_{(0,0)}$, $\theta(R^p:0) = A_0$, $\theta(F:L:(0,0)) = C_{(0,0)}$ e $\theta(f:0) = C_0$.

Ainda, se $i : (R^n.0) \to (R^{n+s},(0,0))$ e $j : (R^p.0) \to (R^{p+s}.(0,0))$ são as inclusões naturais temos que os diagramas a seguir são comutativos:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "F"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"] & \cdot \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd} \quad (\mathrm{I}) \qquad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "TF"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "T_i"] \arrow[r, "Tf"] & \cdot \arrow[u, "T_j"'] \end{tikzcd} \quad (\mathrm{II})$$

Definamos então $\alpha : C^{\infty}_{(0,0)} \to C_0$ e $\beta : A_{(0,0)} \to A_0$ por

$$\alpha(\tau) = T_j^{-1} o \tau o i, \qquad \beta(\eta) = T_j^{-1} o \eta o j$$

Temos que α é um $C^{\infty}_{(0,0)}(R^{n+s})$-homomorfismo ($C_0$ tem essa estrutura via i^*) e β é um $C^{\infty}_{(0,0)}(R^{p+s})$-homomorfismo. ($A_0$ é um $C^{\infty}_{(0,0)}(R^{p+s})$-módulo via j^*). Ainda, de (II) temos que $\alpha o \omega F = \omega f o \beta$ (1).

Provaremos nossa afirmação mostrando que α e β induzem R-isomorfismos $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ comutando o diagrama abaixo: (conferir prop. 2 - cap. II)

$$\begin{tikzcd} A_{(0,0)}/m_{(0,0)}.A_{(0,0)} \arrow[r, "\overline{\omega}F"] \arrow[d, "\tilde{\beta}"] & C_{(0,0)}/tF(B_{(0,0)})+F^*m_{(0,0)}.C_{(0,0)} \arrow[d, "\tilde{\alpha}"] \\ A_0/m_0.A_0 \arrow[r, "\overline{\omega}f"] & C_0/tf(B_0)+f^*m_0.C_0 \end{tikzcd}$$

Observemos inicialmente que para $\frac{\tilde{\partial}}{\partial y_\ell} = T_j^{-1} o \frac{\partial}{\partial y_\ell} o j = \beta(\frac{\partial}{\partial y_\ell})$

$$A_{(0,0)} = \{\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_p}\}.C^{\infty}_{(0,0)}(R^{P+S}) \text{ e } A_0 = \{\frac{\tilde{\partial}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\tilde{\partial}}{\partial y_p}\}.C^{\infty}_0(R^{P}) \quad (2)$$

Desse modo temos

$$C_{(0,0)} = \{\frac{\partial}{\partial y_1}oF, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_p}oF\}.C^{\infty}_{(0,0)}(R^{n+s}) \quad e$$

$$C_0 = \{\frac{\tilde{\partial}}{\partial y_1}of, \ldots, \frac{\tilde{\partial}}{\partial y_p}of\}.C^{\infty}_0(R^n)$$

Ainda,

$$\frac{\tilde{\partial}}{\partial y_\ell}of = T_j^{-1}o\frac{\partial}{\partial y_\ell}ojof = T_j^{-1}o(\frac{\partial}{\partial y_\ell}oF)oi = \alpha(\frac{\partial}{\partial y_\ell}oF) \qquad (3)$$

De (2) e (3) concluimos que α e β são epimorfismos e é claro que $\tilde{\beta}$ é R-isomorfismo.

Como $B_{(0,0)} = \{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}.C^{\infty}_{(0,0)}(R^{n+s})$ e $B_0 = \{\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\tilde{\partial}}{\partial x_n}\}.C^{\infty}_0(R^n)$, $\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_k} = T_i^{-1}o\frac{\partial}{\partial x_k}oi$, obtemos

$$\alpha(TF(B_{(0,0)})) = tf(B_0) \qquad (4)$$

pois $Tfo\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_k} = TfoT_i^{-1}o\frac{\partial}{\partial x_k}oi = T_j^{-1}o(TFo\frac{\partial}{\partial x_k})oi = \alpha(TFo\frac{\partial}{\partial x_k})$.

Agora,

$$\alpha(\Sigma a_\ell F^*(m_\ell)\frac{\partial}{\partial y_\ell}oF) = T_j^{-1}o(\Sigma a_\ell F^*(m_\ell)\frac{\partial}{\partial y_\ell}oF)oi =$$

$$= T_j^{-1}o[\Sigma i^*(a_\ell)(i^*oF^*)(m_\ell)\frac{\partial}{\partial y_\ell}oFoi] =$$

$$= \Sigma i^*(a_\ell)(f^*oj^*)(m_\ell).T_j^{-1}o(\frac{\partial}{\partial y_\ell}oF)oi =$$

$$= \Sigma\bar{a}_\ell f^*(\bar{m}_\ell).\frac{\partial}{\partial y_\ell}of \quad \text{e então}$$

$$\alpha(F^*m_{(0,0)}.C_{(0,0)}) = f^*m_0.C_0 \qquad (5)$$

tendo-se em conta a sobrejetividade de (i^*,j^*).

Para finalizar juntemos a(4) e (5) o fato que ker $= \pi^* m_0(R^s).C_{(0,0)} \subset F^* m_{(0,0)}.C_{(0,0)}$. Segue então que $\tilde{\alpha}$ é um $C^\infty_{(0,0)}(R^{p+s})$-isomorfismo e por fim um R-isomorfismo.

CAPÍTULO III

ESTABILIDADE SOB DEFORMAÇÕES

§ 1. *Deformações triviais*

Consideremos $f \in C^{\infty}(N,P)$, V aberto de R^k com $0 \in V$, $F \in C^{\infty}(N \times V, P \times V)$ e L uma estratificação (diferenciável) em P.

Definição 1:

F é uma L-k-deformação de f se existir $\delta > 0$ tal que, para todo x de N e v com $||v|| < \delta$,

(i) $F(x,v) = (g(x,v),v)$ e $g(x,0) = f(x)$

(ii) $f(x)$ e $g(x,v)$ estão em mesmo estrato de L.

Em $P \times V$ consideremos $\tilde{L}$ a estratificação produto $L \times \{P\}$. Por outro lado, $\mathcal{D}(M)$ denotará o grupo dos difeomorfismos de M. Ainda, se tivermos em M uma partição $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}(M,\mathcal{P})$ indicará o subgrupo de $\mathcal{D}(M)$ que deixa cada elemento da partição globalmente invariante.

Definição 2:

F é uma L-k-deformação trivial de f se:

(i) F é uma L-k-deformação de f.

(ii) Existem $H \in \mathcal{D}(N \times V)$ e $K \in \mathcal{D}(P \times V, \tilde{L})$ tais que

$$F = K^{-1} \circ (f \times I_{\delta}) \circ H$$

(iii) H e K são, respectivamente, $\{N\}$-k-deformação de 1_N

e L-k-deformação de 1_P.

Nesta definição $f \times I_\delta : N \times B_\delta \to P \times B_\delta$

$$(x,v) \to (f(x),v)$$

O resultado a seguir nos dá uma caracterização das deformações triviais para aplicações com domínio compacto.

PROPOSIÇÃO 1

Consideremos $f \in C^\infty(N,P)$, N compacta e $F \in C^\infty(N\times V, P\times V)$ L-k-deformação de f. Então F é trivial se e só se existir $\delta > 0$ tal que:

$$(\forall\ \tau \in \theta(B_\delta))\ (\exists\ \xi \in \theta(N \times B_\delta))\ (\exists\ \eta \in \theta(P \times B\ :\tilde{L}))\ |$$

$$tF(\xi) = \omega F(\eta) \quad \text{e} \quad t\pi(\eta) = \omega\pi(\tau) \quad \text{onde}$$

$B_\delta = \{v \in R^k : ||v|| < \delta\}$ e $\pi : P \times B_\delta \to B_\delta$ é dada por $(y,v) \to v$.

Prova:

Admitamos F trivial. Sejam então H e K os difeomorfismos realizando esta trivialização. Tomemos os campos $\tau_1 = (0,\tau) \in \theta(N \times B_\delta)$ e $\tau_2 = (0,\tau)$ $\tau_2 \in \theta(P \times B_\delta)$ tendo em vista as identificações naturais.

Sejam ξ e η tais que $tH(\xi) = \omega H(\tau_1)$ e $tK(\eta) = \omega K(\tau_2)$. Como K é L-k-deformação de 1_P temos $\eta \in \theta(P\times B_\delta : \tilde{L})$ e $t\pi(\eta) = \omega\pi(\tau)$. Ainda,

$$TKoTFo\xi = T(f \times I_\delta)\ o\ THo\xi = T(f \times I_\delta) \times \tau_1 oH = \tau_2 oKoF = TKo\eta oF.$$

Logo, como tK é isomorfismo, segue que $tF(\xi) = \omega F(\eta)$.

Seja $\delta > 0$ de modo que tenhamos, para $(v_i) = v$ sistema de coordenadas de B_δ,

(I) $tF(\xi_i) = F(\eta_i)$ e $t\pi(\eta_i) = \omega\pi(\frac{\partial}{\partial v_i})$, $1 \leq i \leq k$,

$\xi_i \in \theta(N \times B_\delta)$ e $\eta_i \in \theta(P \times B_\delta, \tilde{L})$. Podemos supor que os campos ξ_i, assim como os η_i, tenham suporte compacto. (Caso contrário, anulamos os ξ_i fora de $N \times \bar{B}_{\delta'}$ e aí então zeramos os η_i no complementar de uma vizinhança compacta de $F(N \times \bar{B}_{\delta'}))$.

Consideremos os fluxos $\phi_{i,t}$, $\psi_{i,t}$ e $Z_{i,t}$ associados, respectivamente, aos campos ξ_i, η_i e $\frac{\partial}{\partial v_i}$.

Da condição (I) obtemos as relações:

(1) $Fo\phi_{i,t} = \psi_{i,t}oF$ (2) $\pi o\psi_{i,t} = Z_{i,t}o\pi$.

Definamos então as seguintes aplicações:

$h(x,v) = (i^{-1}o\phi_{k,-v_k} \; o \ldots o \; \phi_{1,-v_1})(x,v)$ (1') $H = (h,\pi oF)$

$\ell(x,v) = (j^{-1}o\psi_{k,-v_k} \; o \ldots o \; \psi_{1,-v_1})(x,v)$ (2') $K = (\ell,\pi)$

onde $i : N \to N \times B_\delta$ e $j : P \to P \times B_\delta$

$x \to (x,0)$ $y \to (y,0)$

Tendo-se em conta que $Foi = jof$, concluimos que $foh = \ell oF$ e então $K^{-1} \; o \; (f \times I_{\delta'}) \; o \; H = F$ para H e K satisfazendo as condições da definição 2, como garantem (1), (2), (1') e (2'). Logo, F é trivial.

PROPOSIÇÃO 2

Sejam $f \in C^\infty(N,P)$, N compacta e $F \in C^\infty(N \times V, P \times V)$

L-k-deformação de f. Então F será trivial se e só se existirem campos $\xi_i \in \theta(N \times B_\delta)$, $\eta_i \in \theta(P \times B_\delta, \tilde{L})$ com as R^k-componentes nulas, tais que

$$\tau_i^F = tF(\xi_i) + \omega F(\eta_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

sendo $\tau_i^F = tF(\frac{\partial}{\partial v_i}) - \omega F(\frac{\partial}{\partial v_i})$.

Prova:

Suponhamos que F seja trivial. Logo, pela proposição 1, existem campos ξ_i e η_i tais que $tF(\xi_i) = \omega F(\eta_i)$ e $t\pi(\eta_i) = \omega\pi(\frac{\partial}{\partial v_i})$ (2)

$$\xi_i \in \theta(N \times B_\delta) \text{ e } \eta_i \in \theta(P \times B_\delta, \tilde{L}), \quad 1 \leq i \leq k$$

Como F é L-k-deformação temos, de acordo com (2), que $\xi_i = \frac{\partial}{\partial v_i} + \xi_i'$ e $\eta_i = \frac{\partial}{\partial v_i} + \eta_i'$ onde ξ_i' e η_i' tem as R^k-componentes nulas e ainda $\eta_i' \in \theta(P \times B_\delta, \tilde{L})$.

Disto resulta que $\tau_i^F = tF(-\xi_i') + \omega F(\eta_i')$, $1 \leq i \leq k$.

Consideremos agora τ em $\theta(B_\delta)$, $\tau = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial v_i}$. Da hipótese sobre F, segue a existência de campos $\xi_i \in \theta(N \times B_\delta)$ e $\eta_i \in \theta(P \times B_\delta)$ com as R^k-componentes nulas tais que

$$tF(\frac{\partial}{\partial v_i}) - \omega F(\frac{\partial}{\partial v_i}) = tF(\xi_i) + \omega F(\eta_i)$$

Multiplicando-se ambos os membros por a_i, tendo-se em conta que $a_i \in C^\infty(B_\delta)$, obtemos

$$tF(a_i \frac{\partial}{\partial v_i}) - \omega F(a_i \frac{\partial}{\partial v_i}) = tF(a_i \xi_i) + \omega F(a_i \eta_i)$$

ou seja, $tF(\tau+\xi) = \omega F(\tau+\eta)$ onde $\tau+\eta \in \theta(P \times B_\delta, \tilde{L})$ e $t\pi(\tau+\eta) = \omega\pi(\tau)$. A prova está então terminada.

Definição 3:

Consideremos $f \in C^\infty(N,P)$ e L estratificação em P. Dizemos que f é estável sob L-deformações se toda L-k-deformação de f for trivial.

PROPOSIÇÃO 3

Sejam $f \in C^\infty(N,P)$, N compacta e L estratificação de tipo finito em P. Suponhamos que f seja estável sob L-deformações. Então f é L-infinitesimalmente estável.

Prova:

Seja $\omega \in \theta(f:L)$. Consideremos em $N \times P$ a estratificação L' dada por $\{N\} \times L$. Definamos sobre o gráfico de f, $G(f)$, o campo

$$\omega'(x,f(x)) = (0,\omega(x))$$

Por ser L do tipo finito, temos que para cada x_o de N existem abertos U e V de x_o e $f(x_o)$, respectivamente, tais que para $J \subset N$, J finito,

(a) $f(U) \subset V$

(b) $\omega|U = \sum_{j\in J} a_j g_j o f, \quad a_j \in C^\infty(U),$

$$\{g_j o f : j \in J\}.C^\infty(U) = \theta(f|U:L) \text{ e } \{g_j : j\in J\}.C^\infty(V) = \theta(V:L)$$

Logo podemos escrever

$\omega'_{x_o} = \omega' \mid U \times V \cap G(f) = \sum_{j\,J} a'_j g'_j \mid U \times V \cap G(f)$ onde

para $(x,y) \in U \times V$, $a'_j(x,f(x)) = a_j(x)$ e $g'_j(x,y) = g_j(y)$.

Consideremos ω''_{x_o} em $\theta(U \times V)$ dado por

$\omega''_{x_o} = \sum_{j \in J} a''_j g'_j$ onde a''_j é uma extensão C^∞ de a'_j a $U \times V$.

Agora, fazendo x_o variar em N, obtemos uma cobertura $\{W_{x_o}\}$, de $G(f)$, por abertos.

Seja (ρ_α) uma partição da unidade (C^∞) subordinada a $\{W_{x_o}\}_{x_o \in N}$ e consideremos $\tilde{\omega} = \sum_{\alpha} \rho_\alpha \omega''_{x_o(\alpha)}$.

Como N é compacta, podemos considerar $\overline{\omega}$ em $\theta(N\times P)$ de modo que $\overline{\omega}$ tenha suporte compacto e $\overline{\omega} = \tilde{\omega}$ em uma vizinhança compacta de $G(f)$. Ainda, resulta de definição de $\overline{\omega}$ que o mesmo é de $\theta(N \times P, L')$.

Seja $\phi : N \times P \times R \to N \times P$ o fluxo gerado por $\overline{\omega}$ e definamos $F \in C^\infty(N \times R, P \times R)$ por

$$F(x,t) = ((\pi_P \circ \phi_t)(x,f(x)),t)).$$

Como $\overline{\omega} \in \theta(N \times P, L')$ segue que F é uma L-1-deformação de f. Como f é estável sob L-deformações, temos que F é trivial.

Logo, para $\tau = \frac{\partial}{\partial t}$, existem campos, com as R-componentes nulas, $\overline{\xi}$ e $\overline{\eta}$ tais que:

$\tau^F = tF(\overline{\xi}) + \omega F(\overline{\eta})$ com $\overline{\eta} \in \theta(P \times R, \tilde{L})$. Ao restringirmos a equação (1) a $N \times \{0\}$, teremos:

$\tau^F|A = tf(\xi) + \omega f(\eta)$ onde $\xi \in \theta(N)$ e $\eta \in \theta(P,L)$, módulo as identificações naturais.

Para finalizar, mostremos que $\tau^F|A = \omega$. A curva $t \to (x,t)$ representa $\frac{\partial}{\partial t}|_{(x,0)}$ de modo que $t \to (\pi_P o \phi_t)(x,f(x))$ representa $\tau^F(x,0)$. Enfim,

$$\tau^F(x,0) = \frac{d}{dt}[\pi_P o \phi_t(x,f(x))]|_{t=0} = T\pi(x,f(x)).\omega'(x,f(x)) = \omega(x).$$

§ 2. *$\hat{L}$-Estabilidade infinitesimal implica estabilidade sob L-1-deformações*

O nosso objetivo presente é mostrar que a $\hat{L}$-estabilidade infinitesimal implica a estabilidade sob L-1-deformação sob certas condições de regularidade para as aplicações em estudo. Teremos que mostrar então que a equação

$$\text{(E)} \quad \tau^F = tF(\xi) + \omega F(\eta)$$

é solúvel para L-1-deformações F de f.

Mostraremos, em primeiro plano, a existência dos campos ξ e η, satisfazendo (E), localmente.

Definição 4:

Uma estratificação L, de tipo finito, em P é regular se para cada y de P

$$\theta_o(\tilde{L}:(y,0)) = \{G_i : 1 \le i \le r\}.C^\infty_{(y,0)}(P \times V), \quad V \subset R$$

onde o primeiro espaço é constituido de todos os germes de campos de $\theta(\tilde{L}:(y,0))$ com as R-componentes nulas, $G_i(z,u) = (z,u,\overline{g}_i(z))$ com $\{g_i : 1 \le i \le r\}.C^\infty_y(P) = \theta(\tilde{L}:y)$ e $g_i(z) = (z,\overline{g}_i(z))$.

Sejam L estratificação regular em P, $F \in C^{\infty}(N \times V, P \times V)$ L-1-deformação de $f : N \to P$ e $\theta_o(F:\tilde{L}:S \times 0)$ o C_S^{∞}-módulo dos germes dos campos tangentes aos estratos de $\tilde{L}$, ao longo de F, com as R-componentes nulas.

Definição 5:

$f : N \to P$ é L-regular se para cada S parte finita de N, $k = 0, 1$ valer, $f(S) = y$:

(i) $\hat{\theta}_o(F:\tilde{L}:S \times 0)$ é C_S^{∞}-módulo de tipo finito para cada L-k-deformação F de f.

(ii) A inclusão $N \to (N \times V)$, $x \to (x,0)$ induz uma sobrejeção $\alpha : \hat{B}_o(S \times 0) \to B(S)$ onde

$\hat{B}_o(S \times 0) = \{\xi \in \theta(N \times V, S \times 0) : tF(\xi) \in \hat{\theta}_o(F:\tilde{L}:S \times 0)\}$.

PROPOSIÇÃO 4

Consideremos L uma estratificação regular em P, $f \in C^{\infty}(N,P)$ $\hat{L}$-infinitesimalmente estável e L-regular, com $f(\{x_1, \ldots, x_s\}) = y$. Então, para $F \in C^{\infty}(N \times V, P \times V)$ L-k-deformação de f a equação (E) a solúvel a nível de germes em $\{x_1, \ldots, x_s\} \times 0$.

Prova:

Consideremos $S = \{(x_1,0)\} = \{\bar{x}\}$ e os espaços $Z = \hat{\theta}_o(F:\tilde{L}:\bar{x})$, $K = tF_{\bar{x}}(\hat{B}_o(\bar{x}))$ e $A = Z/K$.

Das condições de regularidade temos que A é um $C_{\bar{x}}^{\infty}(N \times V)$-módulo de tipo finito.

Tomemos em A a sua estrutura de $C_{\bar{y}}^{\infty}(P \times V)$-módulo onde $\overline{y} = F(\overline{x})$. Mostremos que

$$A = \{\pi(\tilde{G}_1), \ldots, \pi(\tilde{G}_r)\}.C_y^{\infty}(P \times V) \quad \text{onde} \quad \tilde{G}_\ell = \omega F_{\overline{x}}(G_\ell)$$

$\{G_1, \ldots, G_r\}.C_{\overline{y}}^{\infty}(P \times V) = \theta_o(\tilde{L}:\overline{y})$ e $\pi : Z \to A$ é projeção natural.

Seja $h \in Z$. Logo $h = \sum_\nu h^\nu O_\nu$ para $h^\nu \in C_{\overline{x}}^{\infty}(N \times V)$ e $1 \leq \nu \leq m$.

A nível de representantes podemos escrever:

$h^\nu - h_o^\nu = t.h_\nu'$ e então temos

$h = \sum_\nu h_o^\nu O_\nu + t.\ h_\nu' O_\nu$, $h_\nu' \in C_{\overline{x}}^{\infty}(N \times V)$ e $h_o^\nu(x,t) = h^\nu(x,0)$.

Como $O_\nu = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i\nu} \partial_i o F_{\overline{x}} = \sum_i \alpha_{i\nu}^o \partial_i o F_{\overline{x}} + t(\sum_i \alpha_{i\nu}' \partial_i o F_{\overline{x}})$ onde $\{\partial_1, \ldots, \partial_p\}.C_{\overline{y}}^{\infty}(P \times V) = \theta_o(P \times V)$ concluimos que $\sum_i \alpha_{i\nu}' \partial_i o F_x \in Z$ e então $h = h_o + t.h'$ sendo que h, $h' \in Z$ e h_o é uma extensão trivial de um campo $\tilde{h}_o \in \hat{\theta}(f:L:x_1)$.

Como f_{x_1} é $\hat{L}$-estável vem a existência de $\overline{\xi} \in \theta(N,x_1)$ e $\overline{\eta} \in \theta(L:y)$ tais que $\tilde{h}_o = tf_{x_1}(\overline{\xi}) + \omega f_{x_1}(\overline{\eta})$.

Da hipótese da regularidade de f tiramos a existência de extensão ξ de $\overline{\xi}$, $\xi \in \hat{B}_o(\overline{x})$; ainda, seja η extensão trivial de $\overline{\eta}$ com a R-componente nula. Consideremos o campo

$$h - tF_{\overline{x}}(\xi) - \omega F_{\overline{x}}(\eta).$$

Da construção de ξ e η resulta $h = tF_{\overline{x}}(\xi) + \omega f(\eta) + th''$ onde $h'' \in Z$.

Consideremos o R-espaço $A/\langle t\rangle.A = I$. Temos que a classe de equivalência de h, em I, é a mesma que a de $\omega F_{\bar{x}}(\eta)$. Como η é extensão trivial de $\bar{\eta}$ obtemos que

$$\eta = \Sigma \eta_j G_j$$

e assim $\omega F_{\bar{x}}(\eta) = \Sigma F^*(\eta_j) G_j o F.$

Deste modo as projeções de $G_j o F$ geram I como R-espaço vetorial.

Por fim, tomemos $S = A/F^*_{\bar{x}}(m_{\bar{y}}).A$. Como $<t> \subset m_{\bar{y}}$ existe uma projeção natural de $A/<t>.A$ sobre S sendo que as projeções de $\pi(G_j o F)$ são geradores de S.

Usando-se o teorema de Malgrange, obtem-se

$$A = \{\pi(G_j o F);\ j \in J\}.C^\infty_{\bar{y}}(P \times V).$$

Seja $\pi(\tau^F)$ em A, $\tau^F \in Z$. Temos então

$$\pi(\tau^F) = \sum_j F^*_{\bar{x}}(\alpha_j).\pi(G_j o F) \quad \text{e em } Z \text{ ficamos com}$$

$\tau^F = tF_{\bar{x}}(\xi) + \omega F_{\bar{x}}(\Sigma \alpha_j G_j)$ e isto termina a prova pois ξ, $\Sigma \alpha_j G_j$ são germes de campos com as R-componentes nulas e $\Sigma \alpha_j G_j \in \theta(\tilde{L}:\bar{y})$.

No caso de $S = \{(x_1,0), \ldots, (x_n,0)\}$ repetimos os mesmos argumentos usados nesta demonstração usando-se o teorema de Malgrange na forma adequada.

Nosso próximo passo será mostrar que podemos resolver a equação (E) em uma vizinhança de $\Sigma(f,L)$ em $N \times T$.

PROPOSIÇÃO 5

Consideremos L estratificação regular em P, N variedade compacta, $f \in C^\infty(N,P)$ L-regular e $\hat{L}$-estável. Então pa ra $F \in C^{\infty}(N \times T, P \times T)$ L-1-deformação de f a equação (E) é solúvel em uma vizinhança de $\Sigma^{o} = \Sigma(f:L) \times \{0\}$ em $N \times T$.

Prova:

Mostremos a existência de abertos (V_i, W_i) de $P \times P$ e U_i de N, $i = 1, 2, \ldots, Q$ e $\delta > 0$ tais que:

(1) $f(\Sigma) \subset \bigcup_1^Q W_i$

(2) $\overline{W}_i \subset V_i$

(3) $F_t^{-1}(\overline{W}_i) \cap \Sigma \subset U_i$ para $||t|| < \delta$ e $F_t(x) = \pi_1(F(x,t))$

(4) $U_i \subset F_t^{-1}(V_i)$ para $||t|| < \delta$

(5) Em $U_i \times B_\delta$ a equação (E) é solúvel.

Como N é compacta e Σ é fechado segue que $f(\Sigma)$ é compacto. Basta então verificar a existência desses objetos em cada ponto de Σ. Como $\Sigma_y = f^{-1}(y) \cap \Sigma$ é finito (pois f é L-regular) a proposição anterior se aplica e obtemos U, V, ξ, η e δ satisfazendo (5).

(Podemos, se necessário, diminuir U de modo que $f(\overline{U}) \subset V$).

Tomemos W satisfazendo (2) e (3) para $F_o = f$. Para δ, eventualmente menor, podemos supor que (3) e (4) estejam satisfeitas.

Seja (ρ_i) uma partição da unidade (C^{∞}) subordinada à cobertura $\bigcup_1^Q W_i$ e estendamos $\rho_i \equiv 0$ fora de W_i. Como Σ é compacto e U_i aberto, existe vizinhança U de Σ tal que

$$f^{-1}(\overline{W}_i) \cap U \subset U_i, \quad i = 1, 2, \ldots, Q.$$

Seja $\rho : N \to R$, diferenciável, tal que $\mathrm{supp}(\rho) \subset U$ e $\rho \equiv 1$ numa vizinhança de Σ. Sejam

$$\xi = \sum_{1}^{Q} \rho.(\rho_i oF)\xi_i \quad \text{e} \quad \eta = \sum_{1}^{Q} \rho_i . \eta_i .$$

Temos então

$$tF(\xi) + \omega F(\eta) = tF(\Sigma \rho(\rho_i oF)\xi_i) + \sum_i (\rho_i \eta_i) oF =$$

$= \sum_i (\rho_i oF)[tF(\xi_i) + \eta_i oF] = \tau^F$ numa vizinhança B de Σ^o e com isto a prova termina.

Para concluirmos nosso objetivo, necessitamos de mais um passo auxiliar. Para isto consideremos L uma estratificação em P e a seguinte

Definição:

O traço de $\theta(L)$ em y de P é

$L(y) = \{v \in TP_y : \exists\ \eta \in \theta(L)$ tal que $\eta(y) = v\}$.

Temos então a

PROPOSIÇÃO 6

Seja L uma estratificação em P e $f \in C^\infty(N,P)$ 1--genérica. Se para cada x de N $Tf(TN_x) \supset L(f(x))$ então f é $\hat{L}$-submersão.

Prova:

Suponhamos então que para x_o em N $Tf(TN_{x_o}) \supset L(f(x_o))$.

Queremos mostrar que $tf_{x_o} : \hat{B}(x_o) \to \hat{\theta}(f:L:x_o)$ é sobre.

Procuremos então resolver a equação $tf_{x_o}(\xi) = \tau$. Em coordenadas locais, temos

$$(Tf).(\xi_i) = (\tau_j)$$

Esta equação tem solução pontual em torno de x_o conforme nossa hipótese. Como f é 1-genérica estamos nas condições das hipóteses da proposição 6 do capítulo I. Segue então que $tf_{x_o}(\xi) = \tau$ tem solução para τ dado e então f é $\hat{L}$-submersão.

Por fim,

PROPOSIÇÃO 7

Consideremos $f \in C^{\infty}(N,P)$, N compacta e L estratificação regular em P. Suponhamos ainda que f seja 1-genérica, L-regular e $\hat{L}$-estável. Então f é estável sob L-1-deformações.

Prova:

Tomemos F uma L-1-deformação de f. Se $\Sigma=\Sigma(f,L)=N$ já estabelecemos o resultado na proposição 5 anterior. Caso contrário, sejam ξ, η e B como construidos nessa proposição. Da 1-genericidade de f segue a de F para δ suficientemente pequeno; então para $(x,0) \not\in \Sigma \times \{0\}$ temos que $F_{(x,0)}$ é $\hat{L}$-submersão pois de

$$TF(x,0).T(N\times B_\delta)_{(x,0)} = Tf(TN_x) \oplus R^k \supset L(f(x)) \oplus R^k,$$

concluimos que $TF(x,0).T(N\times B_\delta)_{(x,0)} \supset \tilde{L}((f(x),0))$.

Logo F é $\hat{\tilde{L}}$-submersão em uma vizinhança B' de $N\times\{0\}-Z$, onde Z é uma vizinhança de $\Sigma \times \{0\}$ com $\bar{Z} \subset B$.

Disto temos $\sigma = \tau^F - tF(\xi) - \omega F(\eta) = tF(\xi')$ em B' com a R-componente de ξ' igual a zero. Como $\sigma \equiv 0$ em B, podemos estender ξ', $\xi' \equiv 0$ próximo da fronteira de B'.

Assim

$$\tau^F = tF(\xi+\xi') + \omega F(\eta) \quad \text{em uma vizinhança de} \quad N \times \{0\},$$

o que conclui a prova.

CAPÍTULO IV

ESTABILIDADE ESTRUTURAL

§ 1. *A Topologia C^∞ de Whitney*

Consideremos N e P variedades diferenciáveis e o conjunto $C^\infty(N,P)$. Para k, inteiro não negativo, sejam U aberto de $J^k(N,P)$ e $M(U)$ o conjunto:

$$\{f \in C^\infty(N,P) \; : \; (j^k f)(N) \subset U\}.$$

A coleção $\{M(U) : U$ é aberto de $J^k(N,P)\}$ forma uma base para uma topologia em $C^\infty(N,P)$ denotada por W^k.

Definição 1:

W^k é a topologia C^k de Whitney em $C^\infty(N,P)$.

Definição 2:

A topologia C^∞ de Whitney em $C^\infty(N,P)$ é aquela dada pela base $W = \bigcup_{k\geq 0} W^k$.

Nas proposições abaixo, todos os espaços funcionais estarão munidos da topologia C^∞ de Whitney.

PROPOSIÇÃO 1

Consideremos variedades N e P, $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ cobertura localmente finita de N com $\overline{U}_\alpha$ compacto para cada $\alpha \in A$, $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ coleção de abertos de P com V_α domínio de carta local em P para cada $\alpha \in A$ e ainda $f \in C^\infty(N,P)$ tal que $f(\overline{U}_\alpha) \subset V_\alpha$, $\alpha \in A$. Então $\{g \in C^\infty(N,P) : (\forall\, a \in A)\; g(\overline{U}_\alpha) \subset V_\alpha\}$

é aberto em $C^{\infty}(N,P)$.

PROPOSIÇÃO 2

A aplicação $j^k : C^{\infty}(N,P) \to C^{\infty}(N,j^k(N,P))$, definida por $f \to j^k f$, é contínua.

PROPOSIÇÃO 3

Para $\phi \in C^{\infty}(P,Q)$ a aplicação $\phi_* : C^{\infty}(N,P) \to C^{\infty}(N,Q)$, $f \to \phi o f$, é contínua.

PROPOSIÇÃO 4

Consideremos $C^{\infty}_{pr}(N,P)$ o espaço das aplicações próprias de N em P com a topologia induzida por $C^{\infty}(N,P)$. Então a aplicação

$$0 : C^{\infty}_{pr}(N,P) \times C^{\infty}(P,Q) \to C^{\infty}(N,Q), \quad 0(f,g) = g o f$$

é contínua

PROPOSIÇÃO 5

Sejam N e N' variedades difeomorfas e $Diff(N,N') =$ $= \{$todos os difeomorfismos de N sobre $N'\}$. Então, valem:

(i) $Diff(N,N')$ é aberto em $C^{\infty}(N,N')$

(ii) $(Diff(N,N),0)$ é grupo topológico.

PROPOSIÇÃO 6

Seja (E,π,N) um fibrado vetorial e $\Gamma^{\infty}(E)$ o espaço das secções diferenciáveis de E equipado com a topologia induzida pela de $C^\infty(N,E)$. Então $\Gamma^\infty(E)$ é um $C^\infty(N)$-módulo topológico.

As provas destes resultados podem ser vistas em [4].

§ 2. *$\mathcal{L}$-Estabilidade estrutural, $\mathcal{L}$ folheação*

Consideremos $\mathcal{L}$ uma folheação em P, $f \in C^\infty(N,P)$ e $\rho : P \to P/R$, a projeção natural, onde R é dada por

"xRy se e só se existir estrato L de $\mathcal{L}$ com $\{x,y\} \subset L$".

Seja

$F(f) = \{g \in C^\infty(N,P) \quad \rho o g = \rho o f\}$ munido da topologia induzida pela de $C^\infty(N,P)$, que como sempre é a C^∞ de Whitney.

Definição:

Dizemos que $f \in C^\infty(N,P)$ é $\mathcal{L}$-estruturalmente estável se existir vizinhança $V(f)$, de f, em $F(f)$, satisfazendo

$$(\forall \ g \in V(f)) \ (\exists \ h \in \mathcal{D}(N)) \ (\exists \ k \in \mathcal{D}(P:\mathcal{L})) \quad g = k^{-1} o f o h$$

onde $\mathcal{D}(N)$ é o grupo dos difeomorfismos de N e $\mathcal{D}(P:\mathcal{L})$ é o grupo dos difeomorfismos de P que deixam cada estrato de $\mathcal{L}$ globalmente invariante.

LEMA 1

Sejam $\mathcal{L}$ folheação em P, $f \in C^\infty(N,P)$ e o espaço $F(f)$ com N variedade compacta. Então existe vizinhança U_f de f, em $F(f)$, que é "conexa por caminhos", isto é:

$(\forall\ g \in U_f)(\exists\ G : N \times I \to P \times I,\quad L\text{-deformação} : G_o = f \text{ e } G_1 = g)$

Prova:

Consideremos em $N \times P$ a subvariedade N_f
$N_f = \{(x,f(x)) : x \in N\}$ e tomemos um recobrimento $(V_j)_{j\geq 1}$, por abertos coordenados, de imf em P e outro $(U_j)_{j\geq 1}$ de N tais que:

(i) $(U_j)_{j\geq 1}$ é localmente finito e $f(\bar{U}_j) \subset V_j$, $j \geq 1$.

(ii) Cada V_j é domínio de uma descrição ψ_j de L.

Seja então $(U_j \times V_j)_{j\geq 1}$ a cobertura de N_f em $N \times P$ e definamos o conjunto S como segue, para (x,y) em $N \times P$:

$(x,y) \in S$ se existir $j \geq 1$ tal que $\psi_j(f(x)) = \psi_j(y)$

onde $\psi_j : V_j \to R^q$ é uma descrição de L (local) com $\{y, f(x)\} \subset V_j$.

Observemos que S está bem definido pois se $\{f(x), y\} \subset \text{dom}\ \psi_i$ teremos $\psi_i(f(x)) = (\psi_{ji} o \psi_j)(f(x)) = \psi_{ji}(\psi_j(y)) = \psi_{ji} o \psi_j(y) = \psi_i(y)$. Mais ainda:

S é subvariedade de $A = \bigcup_{j\geq 1} U_j \times V_j$ e $S \supset N_f$.

Provemos esta afirmação. Para isto consideremos $\phi_j : U_j \times V_j \to R^q$ dada por $(x,y) \to \psi_j(f(x)) - \psi_j(y)$.

Temos que ϕ_j é submersão. Daqui segue que $\phi_j^{-1}(0) = \{(x,y) \in U_j \times V_j : \psi_j(f(x)) = \psi_j(y)\} = U_j \times V_j \cap S$.
Claramente $S \supset N_f$.

Seja T uma vizinhança tubular de S em A e Z uma vizinhança tubular de N_f em S. Consideremos $\tilde{Z} = \rho^{-1}(Z)$ onde $\rho : T \to S$ é a projeção deste fibrado.

Observemos que $\tilde{Z} \cap S = Z$ (1)

Como $j^0 : C^\infty(N,P) \to C^\infty(N,J^0(N,P)) = C^\infty(N, N \times P)$ é contínua (ver prop. 2), temos que, para $\mathcal{B} = \{\tilde{g} \in C^\infty(N,N \times P)$ im $\tilde{g} \subset \tilde{Z}\} = C^\infty(N,\tilde{Z})$, aberto de $C^\infty(N,N \times P)$,

$$\mathcal{V}_1(f) = (j^0)^{-1}(\mathcal{B}) \text{ é vizinhança de } f \text{ em } C^\infty(N,P) \quad (2)$$

Por outro lado, a proposição 1 nos garante que $\mathcal{V}_2(f) = \{g \in C^\infty(N,P) : g(\bar{U}_j) \subset V_j, \ j \geq 1\}$ é também vizinhança de f em $C^\infty(N,P)$.

Consideremos $\mathcal{V}(f) = (\mathcal{V}_1(f) \cap \mathcal{V}_2(f)) \cap \mathcal{F}(f)$.

Mostremos agora que j^0 aplica $\mathcal{V}(f)$ em $C^\infty(N,Z)$.

Seja $g \in \mathcal{V}(f)$. Como $g \in \mathcal{V}_1$, (2) nos diz que $j^0(g) \in C^\infty(N,\tilde{Z})$ e então do fato de $g \in \mathcal{F}(f) \cap \mathcal{V}_2$ segue que, para $x \in U_j$, $\psi_j(g(x)) = \psi_j(f(x))$, ou seja, $(x,g(x)) \in S$ (3)

Combinando-se (1) e (3) obtemos $j^0(g) \in C^\infty(N,Z)$.

Seja $\pi : Z \to N_f$ a projeção natural, assim como $\pi_N : Z \to N$ a restrição de $\pi_1 : N \times P \to N$ a Z e ainda as seguintes aplicações:

$$\mathcal{V}(f) \xrightarrow{j^0} C^\infty(N,Z) \xrightarrow{\pi_*} C^\infty(N,N_f)$$

$$\Gamma^\infty(Z) \xrightarrow{(\pi_N)_*} C^\infty(N_f,N).$$

As proposições 2 e 3 do parágrafo anterior nos garantem que estas aplicações são contínuas. Mais ainda, pela propo-

vel e 1-genérica. Então existe vizinhança $V(f)$ de f, em $F(f)$, constituida de aplicações L-infinitesimalmente estáveis.

A prova deste lema é bastante técnica e segue, em linhas gerais, aquela para o caso usual (ver [3], pag. 117 e 122). Para efeito de referência futura, delinearemos aqui uma das etapas dessa prova sob a forma da

PROPOSIÇÃO A

Sob as mesmas hipóteses do lema acima, existe vizinhança $V(f)$ de f, em $F(f)$, tal que se $g \in V(f)$ então, para cada x de N, g_x é L-estável.

Prova:

Seja x em N e $y = f(x)$. Como f é L-infinitesimalmente estável $(L:I:E)$ temos que

$$\theta(f:L:x) = C(x) = tf_x(B(x)) + \omega f_x(A(y)) + m_x^{a+1}.C(x)$$

onde $A(y) = \theta(L:y)$ e $a = \dim_R A(y)/m_y.A(y)$, $y = f(x)$.

"Jetificando na ordem <u>a</u>" os espaços $A(y)$, $C(x)$ e $B(x)$, obtemos

$$C(x) = C^o(x) \oplus m_x^{a+1}.C(x)$$

$$B(x) = B^o(x) \oplus M$$

$$A(y) = A^o(y) \oplus m_y^{a+1}.A(y)$$

Consideremos $\rho(x,f) : A^o(y) \oplus B^o(x) \to C^o(x)$ dada por $\rho(x,f) = [tf_x] + [\omega f_x]$ onde $[tf_x]$ e $[\omega f_x]$ são as induzidas de tf_x e ωf_x respectivamente. Em particular, se tomarmos vizinhanças coordenadas U de x e V de y, com $V = \mathrm{dom}\ \psi_i$, tais que $f(\bar{U}) \subset V$, então nessas coordenadas locais $\rho(x,f)$ é uma aplicação R-linear de $S^a_{p,p} \oplus S^a_{n,n} \to S^a_{n,p}$ onde cada $S^a_{\alpha,\beta}$ é um subespaço do espaço vetorial $B^a_{\alpha,\beta}$ das aplicações polinomiais de R^α em R^β de grau menor ou igual a $\underline{a}$.

Segue então que ρ depende continuamente de x e de $j^{a+1}f$. Então existe uma vizinhança aberta W_x de f em $F(f)$ tal que, se $g \in W_x$ então $g(\bar{U}) \subset V$ (uma condição C^0) e se x' estiver em U_x, então $\rho(x',g)$ é sobre.

Conforme a proposição 1 do capítulo II temos que $g_{x'}$ é L-estável.

Como N é compacta, existe uma cobertura finita de N pelos U_x's. A intersecção das correspondentes W_x's será a vizinhança de f, satisfazendo a tese.

Vejamos agora os argumentos básicos da prova de que a L-estabilidade infinitesimal implica a L-estabilidade estrutural.

Nossas hipóteses serão

L folheação em P, $f \in C^\infty(N,P)$ L-infinitesimalmente estável e 1-genérica e N variedade compacta.

Em acordo com os lemas 1 e 2, seja $W(f)$ vizinhança de f em $F(f)$, conexa por caminhos, e constituida de aplicações L-estáveis. Seja $g \in W(f)$ e consideremos a L-1-deformação de f dada por, para $I = [0,1]$,

$$F : N \times I \to P \times I \quad (x,t) \to (g_t(x),t), \; g_t \in W(f)$$

com $g_o = f$ e $g_1 = g$. Definamos em I a seguinte relação:

$s \sim t$ se existirem difeomorfismos

$h \in \mathcal{D}(N)$ e $k \in \mathcal{D}(P,L)$ tais que $g_s = k^{-1} o g_t o h$.

Como F nos fornece L-deformações triviais e $W(f)$ é constituida de aplicações L-estáveis, temos que cada classe de equivalência é aberto de I. Como I é conexo, teremos $g = k^{-1} o f o h$.

§ 3. *Comentários sobre a L-estabilidade estrutural*

Para L uma estratificação em P, consideremos os espaços $F(f)$, $\mathcal{D}(N)$ e $\mathcal{D}(P,L)$ definidos de forma análoga à do parágrafo anterior, para $f \in C^\infty(N,P)$.

Temos então, de forma análoga, a noção de L-estabilidade estrutural, ou seja,

Definição:

$f \in C^\infty(N,P)$ é L-estruturalmente estável se existir $W(f)$ vizinhança de f em $F(f)$ tal que, para cada $g \in W(f)$, existem difeomorfismos $h \in \mathcal{D}(N)$ e $h \in \mathcal{D}(P:L)$ tais que $g = k^{-1} o f o h$.

Uma questão natural que se apresenta é a de examinar a equivalência entre as noções de L-estabilidade infinitesimal. Isto porque esta última é bem mais simples de ser analisada que a primeira, na maioria dos casos.

Salientaremos então, a seguir, algumas dificuldades básicas concernentes ao estudo da equivalência de tais noções.

(1) *L-Estabilidade Infinitesimal* $\Longrightarrow$ *L-Estabilidade Estrutural*

Tendo-se em mente a estratégia usada no parágrafo 2 anterior no caso de folheações, temos a primeira dificuldade:

"f tem vizinhança "conexa por caminhos" em $F(f)$".

De maneira geral, a prova do lema 1 não se adapta para estratificações que não sejam folheações.

Nossa segunda dificuldade está ligada à prova da proposição A. Lá, os espaços $A(y)$, $C(x)$ e $B(x)$ eram essencialmente os mesmos para cada $(g,x) \in F(f) \times N$. Isto nos permitiu concluir a sobrejetividade de $\rho(g,x)$.

Para outras estratificações, em geral, o espaço $A(y)$ varia de ponto para ponto e por conseguinte, os espaços $C(x)$ e $B(x)$. Ainda, estes últimos também variam com as g's próximas de f (ver pag. 34).

Parece-nos difícil estabelecer, nestas condições, a prova da proposição A e por isso a prova do lema 2.

(2) *L-Estabilidade Estrutural* $\Longrightarrow$ *L-Estabilidade Infinitesimal*

No caso usual esta implicação é válida. Para a prova disto é introduzido o conceito de estabilidade transversal. Daí mostra-se que a estabilidade estrutural implica a estabilidade transversal, via os teoremas de transversalidade de Thom-Mather. A seguir a estabilidade infinitesimal é deduzida da estabilidade transversal com auxílio do cálculo de espaços tangentes a certas órbitas em $J^k(N,P)$ (ver [3]).

Mesmo no caso de estratificação tipo folheação não sabemos sobre a validade de (2). A dificuldade principal reside no fato do espaço $F(f)$ não ser domínio natural para as aplicações dos teoremas de transversalidade de Thom-Mather.

BIBLIOGRAFIA

[1] DUFOUR, J.P. - Sur la stabilité des diagrames d'applications différentiables - Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, 10 (1977).

[2] FÁVARO, L.A. - Singularidades e estabilidade de aplicações diferenciáveis em variedades folheadas - Tese de Livre-Docência, Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-USP, (1975).

[3] GOLUBITSKY, M. and GUILLEMIN, V. - Stable mappings and their singularities - Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14, Springer-Verlag, (1973).

[4] MATHER, J.N. - Stability of C^∞ mappings, II: Infinitesimal stability implies stability - Ann. of Math. 89, nº 2, (1969).

[5] ———————— - Stability of C^∞ mappings, III: Finitely determined map germs - Publ. Math. I.H.E.S., 35 (1968).

[6] ———————— - Stability of C^∞ mappings, IV: Classification of stable germs by R-algebras - Publ. Math. I.H.E.S., 37 (1969).

[7] ———————— - Solutions to generic families of linear equations - Dynamical Systems, Academic Press, (1973).

[7a] ———————— - How to stratify mappings and jet spaces - Lectures Notes in Math. 535, Springer-Verlag, (1976).

[8] POENARU, V. - Singularités C^∞ en présence de symétrie - Lectures Notes in Math. 510, Springer-Verlag, (1977).

[9] THOM, R. - Stabilité Structurelle et Morphogénèse - W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass. (1972).