

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

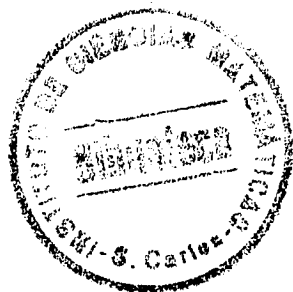
SOBRE SINGULARIDADES DE RESTRIÇÕES DE  
APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS

AUSTER RUZANTE

DEDALUS - Acervo - ICMSC



30300030455



TESE APRESENTADA AO INSTITUTO  
DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE  
SÃO CARLOS, DA UNIVERSIDADE  
DE SÃO PAULO PARA OBTENÇÃO  
DO TÍTULO DE "DOUTOR".

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
SÃO CARLOS  
1972

A Dorothy e à minha

Mãe, com amor.

## Agradecimentos

Primeiramente ao Professor Dr. Gilberto Francisco Loibel por ter orientado este trabalho, pela constante dedicação à minha pessoa, pelo idealismo, pelas críticas construtivas e valiosas sugestões.

Ao Dr. Mário Rameh Saab, colega e amigo, pelo incentivo, pelo seu modo humano de tratar os colegas e pela ajuda material.

Ao Dr. Luiz Antonio Favaro que por muitas vezes, pacientemente ouviu nossas exposições.

Aos meus filhos que conseguiram me suportar nestes últimos meses.

Aos Srs. Antonio Gallo e José Augusto Evaristo Filho pelo excelente trabalho de datilografia e impressão e pelas horas de lazer perdidas para que este trabalho ficasse pronto em tempo hábil.

Ao CNPq e CAPES que através de auxílios ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, permitiram a aquisição de obras de real importância para a realização deste trabalho.

A CAPES pela concessão de auxílio para a publicação desta tese.

PG	LINHA	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
II	1	- singularidade	$\mathcal{R}$ - singularidade
IV	2	- singularidades	$\mathcal{R}$ - singularidades
3	-7	$J^r(m, n)$	$J^r(m, m)$
3	-5	$L^r(m) \times L^r(n)$	$L^r(n) \times L^r(m)$
3	-3	$Y Z X^{-1}$	$X Z Y$
8	-9	(constante)	(constante)
8	-8	$f^k(x, y) = f(x, y, z)$	$f^k(x, y) = f(x, y, k)$
14	11	$J_p^r(m-q, n)$	$J^r(m-q, n)$
15	15	$X \in L_p^r(m), Y \in L^r(n)$	$Y \in L_p^r(m), X \in L^r(n)$
15	16	$Y Z \zeta(X)$	$X Z \zeta(Y)$
15	19	$\pi_p^r(YWX) = Y(\pi_p^r(W))Y$	$\pi_p^r(XWY) = X(\pi_p^r(W))\zeta(Y)$
16	5	$(f^z)^r = \sigma_p^r[j^r f^z(p)]$	$(f^z)^r(p) = \sigma_p^r[j^r f^z(p)]$
16	-2	capítulo I, 3.2 segue que ...	capítulo I, temos nas condições de 3.2 que ...
19	-9	$\mathcal{R}$ -singularidades	$\mathcal{R}$ -singularidade
19	-7	$\mathcal{R}$ -singularidades	$\mathcal{R}$ -singularidade
24	13	$u_{xx}(P_0) = 0$	$u_{xx}(P_0) \neq 0$
33		acrescentar na 1ª linha	$\left. \begin{array}{l} u = x^2 + z \\ v = y \end{array} \right\} \text{Então o}$ <p>ponto (0,0,0) é do tipo I pois,</p>
54	-10	... + A(y', z' + z')	... + A(y', z') + z'
55	-6	agora levar	agora de levar
55	9	$\bar{u} - z_0 = 2x^3 [1 + B(3x^2, z)] + A(3x^2, z)$	$\bar{u} - z_0 = 2x^3 [1 + B(3x^2, z_0)] + A(3x^2, z_0)$
56		aonde apareça $\bar{h}$	colocar $\hat{h}$
56	-9	$\begin{vmatrix} g_u(0,0) & g_v(0,0) \\ h_u(u,v) & h_v(0,0) \end{vmatrix} \neq 0$	$\begin{vmatrix} g_u(0,0) & g_v(0,0) \\ h_u(0,0) & h_v(0,0) \end{vmatrix} \neq 0$
57	1	$k_2 = \bar{h}(0,0) \neq 0$	$k_2 = \hat{h}(0,0) \neq 0$
68	-11	(ver pg. )	(ver pg 51 - 5ª linha)

Índice

	Pág.
Introdução . . . . .	III
Capítulo I - Notações e Pré-requisitos	
§1 - Jatos . . . . .	1
§2 - Singularidades . . . . .	4
§3 - Transversalidade . . . . .	4
Capítulo II - Singularidades de Restrições de Aplicações Diferenciáveis	
§1 - Introdução . . . . .	8
§2 - Folheação . . . . .	9
§3 - Mudança de coordenadas permissível . . . . .	10
§4 - Definições gerais . . . . .	13
§5 - $\mathcal{R}$ -singularidades de ordem 1 . . . . .	16
Capítulo III - $\mathcal{R}$ -singularidades das aplicações do $\mathbb{R}^3$ no $\mathbb{R}^2$	
<u>PARTE A</u>	
§1 - Introdução . . . . .	18
§2 - Definições . . . . .	18
§3 - Invariança das $\mathcal{R}$ -singularidades . . . . .	19
§4 - Forma normal para pontos $\mathcal{R}$ -regulares . . . . .	21
§5 - Sistemas de coordenadas especiais . . . . .	22
§6 - Classificação das $\mathcal{R}$ -singularidades genéricas . . . . .	24
§7 - Invariança e definição intrínseca das $\mathcal{R}$ -singularidades do tipo I, II, III e IV . . . . .	27
§8 - Forma normal para pontos de $\mathcal{R}$ -singularidade do tipo I . . . . .	32

	Pág.
<u>PARTE B</u> - Estudo da - singularidade do tipo II	
§9 - Considerações gerais . . . . .	41
§10 - Primeiras transformações . . . . .	42
§11 - Retificação da curva dos pontos de $\mathcal{R}$ - singularidades do tipo II e de sua imagem . . . . .	43
§12 - Anulamento de $u'_y(o, o, z')$ . . . . .	47
§13 - Adaptação da dobra geral . . . . .	48
§14 - Determinação da expressão do resto . . . . .	50
§15 - Simplificação do resto . . . . .	53
§16 - Condição necessária e suficiente para eliminação do resto . . . . .	55
§17 - Últimas transformações . . . . .	61
§18 - Condição suficiente para eliminação do resto . . . . .	63
§19 - Estudo das transformações quando a aplicação $u$ é analítica . . . . .	67
§20 - Uma descrição parcial das transformações no semi-plano $v > 0$ . . . . .	71
<u>PARTE C</u> - Descrições geométricas	
§21 - $\mathcal{R}$ - singularidade do tipo III . . . . .	75
§22 - $\mathcal{R}$ - singularidade do tipo IV . . . . .	80
Bibliografia . . . . .	88

### Introdução

Em 1968 o Prof. Gilberto F. Loibel nos propôs o problema de estudarmos as singularidades de restrições de aplicações diferenciáveis uma vez que uma dada função poderia não apresentar singularidade e contudo sua restrição a certos sub-espacos apresentar singularidades genéricas. Atacamos primeiramente o caso das funções do  $\mathbb{R}^{n+1}$  no  $\mathbb{R}$  e chegamos a vários resultados, que deixaram de ser publicados em vista dos mesmos coincidirem com os citados por R. Wells, em [9] utilizando técnicas diferentes. Com isto passamos ao estudo das singularidades de restrições das aplicações do  $\mathbb{R}^3$  no  $\mathbb{R}^2$  o qual originou o presente trabalho. Ocupamo-nos aqui somente com o caso em que as singularidades das restrições são pontos regulares da função global.

No capítulo I enunciamos os pré-requisitos da teoria geral das singularidades e fixamos as notações.

No capítulo II, definimos o que entendemos por  $\mathcal{R}$ -singularidades ou seja, singularidades de restrições de aplicações diferenciáveis. Desenvolvemos os principais resultados que utilizamos no capítulo seguinte.

No capítulo III, estudamos especificamente as  $\mathcal{R}$ -singularidades das aplicações diferenciáveis do  $\mathbb{R}^3$  no  $\mathbb{R}^2$ , classificando as  $\mathcal{R}$ -singularidades genéricas.

Subdividimos este capítulo que contém a parte principal da tese em três partes e num total de 22 parágrafos com a finalidade de facilitar sua leitura.

Na parte A damos forma normal aos pontos  $\mathcal{R}$ -regulares e também para os pontos de  $\mathcal{R}$ -singularidade do tipo I. A parte B se ocupa dos pontos de  $\mathcal{R}$ -singularidade do tipo II. Estudamos o problema da redução à forma normal. No processo da redução não resolvemos o passo do parágrafo 16 no caso geral, porém nos parágrafos 18, 19 e 20 damos diversos métodos que levam ao resultado procurado em casos específicos. É nossa intenção aprofundar estes métodos e acre

ditamos que um ou outro poderá conduzir-nos à solução geral.

Na parte C apresentamos exemplos de - singularidades dos tipos III ( $III_a$  e  $III_b$ ) e IV ( $IV_a$  e  $IV_b$ ). Não explicitamos as razões que nos levaram a julgar que estes tipos são realmente representativos, pois isto exige um grande número de transformações de coordenadas envolvendo inúmeros cálculos cujo desenvolvimento sobrecarregaria a tese neste ponto.

Encontramos no decorrer do nosso trabalho inúmeras outras questões abertas, seja no campo das formas normais seja no estudo da teoria geral que pretendemos desenvolver futuramente.

Utilizamos a locução "abandonando as linhas" devido a Whitney e que significa reescrever as funções.



Capítulo I

Notações e Pré-requisitos

Neste capítulo faremos uma rápida apresentação dos pré-requisitos necessários e fixamos as notações que passamos a usar. Não havendo necessidade do caso geral apresentaremos as definições e principais resultados para o  $\mathbb{R}^n$ .

§1 - Jatos

Todas as aplicações aqui consideradas serão supostas de classe  $C^\infty$ . Por  $(x_1, \dots, x_m)$  e  $(y_1, \dots, y_n)$  denotaremos as funções coordenadas no  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$  respectivamente.

Seja  $C_*^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  o conjunto dos pares  $(f, p)$  onde  $p \in \mathbb{R}^m$  e  $f : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação diferenciável com  $V$  aberto e  $p \in V$ .

Por  $\partial^t f_i(p)$  denotaremos a derivada parcial mista

$$\frac{\partial^{|t|} f_i(p)}{\partial x_1^{t_1} \cdots \partial x_m^{t_m}}$$

onde  $t = (t_1, \dots, t_m)$ ,  $t_i \in \mathbb{Z}_+$  e  $|t| = t_1 + \dots + t_m$ .

Vamos introduzir no conjunto  $C_*^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  a relação

$$(f, p) \sim (g, q) \iff \begin{cases} \text{a) } p = q \\ \text{b) } f(p) = g(q) \\ \text{c) } \partial^t f_i(p) = \partial^t g_i(q) \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n$  para todo  $t$  com  $|t| \leq r$ .

De imediato vê-se que tal relação é uma relação de equivalência.

Definição 1.1 - Uma classe de equivalência segundo esta relação chamaremos de r - jato.

O r - jato a que pertence  $(f, p)$  denotaremos por  $j^r f(p)$  ou  $f^r(p)$ . O ponto  $p$  chama-se fonte e o ponto  $f(p)$ , meta do r - jato  $j^r f(p)$ .

O conjunto dos r - jatos será indicado por  $J^r(R^m, R^n)$ , isto é,  $J^r(R^m, R^n) = \{ j^r f(p) \mid f \in C_*^\infty(R^m, R^n) \text{ e } p \in R^m \}$ .

1.2 - Sistema de coordenadas em  $J^r(R^m, R^n)$

Façamos corresponder ao  $j^r f(p)$  com fonte  $p = (p_1, \dots, p_m)$  e meta  $f(p) = (f_1(p), \dots, f_n(p))$ , uma k-upla de números reais do seguinte modo:

$$(p_1, p_2, \dots, p_m, f_1(p), f_2(p), \dots, f_n(p), \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_2}, \dots, \dots,$$

$$\frac{\partial f_1(p)}{\partial x_m}, \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_m}, \dots, \frac{\partial f_n(p)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_n(p)}{\partial x_m}, \dots$$

$$\frac{\partial^{|t|} f_1(p)}{\partial^{t_1} x_1 \partial^{t_2} x_2 \dots \partial^{t_m} x_m}$$

onde se convencionou a seguinte ordem para as derivadas de ordem  $s$  ( $1 \leq s \leq r$ ). Primeiramente as derivadas parciais de ordem  $s$  de  $f_1$ , depois de  $f_2$  etc. ... finalmente as de  $f_n$ . Dentro do conjunto das derivadas parciais de ordem  $s$  de uma  $f_i$  se estabelece a que a derivação seja na ordem oposta da lexicográfica relativamente às m-uplas

$t = (t_1, \dots, t_m)$  com  $t_i \in \mathbb{Z}_+$  e  $|t| = s$ .

Pode-se mostrar que o número  $k$  é dado por

$$k = m + n \binom{m+r}{r}$$

Observemos que tais coordenadas são livres, isto é, dada uma  $k$ -upla basta construir  $f = (f_1, \dots, f_n)$  tal que as  $f_i$  são polinômios de grau  $r$  e determinar os coeficientes de modo que  $j^r f(p)$  tenha as coordenadas dadas.

Com isto estabelece-se uma correspondência biunívoca e sobre  $J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  com  $\mathbb{R}^k$ . Damos a  $J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  por intermédio desta correspondência a estrutura topológica e diferenciável de  $\mathbb{R}^k$ .

Dada a aplicação diferenciável  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  definimos a aplicação  $j^r f : \mathbb{R}^m \rightarrow J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  por  $(j^r f)(p) = j^r f(p)$ . Pode-se mostrar que esta aplicação é de classe  $C^\infty$ .

Designemos por  $J^r(m, n)$  o conjunto dos  $r$ -jatos de fonte e meta fixa, respectivamente  $0 \in \mathbb{R}^m$  e  $0 \in \mathbb{R}^n$ . É óbvio, este conjunto é difeomorfo a um  $\mathbb{R}^{k-m-n}$  e podemos identificar

$$J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times J^r(m, n)$$

Seja agora  $L^r(m) \subset J^r(m, n)$  o conjunto dos  $r$ -jatos de fonte e meta fixa ( $0 \in \mathbb{R}^m$ ) inversíveis. Consideremos  $L^r(m, n) = L^r(m) \times L^r(n)$ . Podemos dar a  $L^r(m, n)$  uma estrutura de grupo de Lie. Este grupo atua diferenciavelmente sobre  $J^r(m, n)$  segundo a lei:  $(X, Y) \cdot Z = Y Z X^{-1}$  para todo  $(X, Y) \in L^r(m, n)$  e para todo  $Z \in J^r(m, n)$ . Esta lei corresponde como é fácil de se observar a mudanças de coordenadas em  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$  respectivamente (maiores detalhes em [4] e [6]).

Definindo  $\mathcal{T}: J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  por  $\mathcal{T}(j^r(p)) = (p, f(p))$  pode-se mostrar que  $\mathcal{T}$  é uma fibração diferenciável com fibra  $J^r(m, n)$  e grupo estrutural  $L^r(m, n)$  (ver [3]).

## §2 - Singularidades

Definição 2.1 - Uma órbita  $Q = L^r(m, n)(X)$  de  $X \in J^r(m, n)$  chama-se uma singularidade de ordem  $r$ .

Definição 2.2 - Uma superfície regular  $S \subset J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  invariante sob a ação do grupo  $L^r(m, n)$  se chama uma "Variedade de  $r$ -singularidades".  $S$  será uma reunião de órbitas.

Seja  $\sigma: J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow J^r(m, n)$  a projeção natural. Para cada  $f: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  definamos a aplicação  $\bar{f}^r: V \rightarrow J^r(m, n)$  por  $\bar{f}^r(p) = \sigma[j^r f(p)]$ .

Definição 2.3 - Diremos que  $f: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  admite (possui) uma singularidade do tipo  $S$  no ponto  $p \in V$  se  $\bar{f}^r(p) \in S$ .

Designemos por  $S(f) = (\bar{f}^r)^{-1}(S)$ .

## §3 - Transversalidade

Definição 3.1 - Diremos que  $f: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável é transversal a uma superfície regular  $N$  do  $\mathbb{R}^n$  no ponto  $p \in V$  se  $f(p) \notin N$  ou se  $f(p) \in N$  então  $f_p(\mathbb{R}^m) + N_{f(p)} = \mathbb{R}^n$ .

Diremos que  $f$  é transversal a  $N$  se for transversal a  $N$  em todos os pontos de  $V$ .

Proposição 3.2 - Seja  $f : \underset{ab}{\mathbb{W}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável e  $N^{n-q} \subset \mathbb{R}^n$  uma superfície regular fechada. Se  $f$  é transversal a  $N^{n-q}$  então  $f^{-1}(N^{n-q})$  é uma superfície regular de dimensão  $m - q$  em  $\mathbb{R}^m$  ou é vazio.

Definição 3.3 - Topologia  $C^r$ : é a topologia em  $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  induzida pela topologia compacto-aberta de  $C^\infty(\mathbb{R}^m, J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$  pela aplicação

$$J^r : C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^m, J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$$

Definição 3.4 - Topologia  $C^r$ -fina : é a topologia em  $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  induzida pela topologia compacto-aberta fina de

$$C^\infty(\mathbb{R}^m, J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$$

pela aplicação

$$J^r : C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^m, J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$$

Seja  $S \subset J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  sub-variedade fechada. Denotemos por  $T^r(K, S) = \left\{ f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \mid j^r f \text{ é transversal a } S \text{ nos pontos de } K \right\}$ .

Teorema 3.5 - (Transversalidade)

- a) Se  $K \subset \mathbb{R}^m$  é compacto então  $T^r(K, S)$  é aberto na topologia  $C^{r+1}$ . Se  $K \subset \mathbb{R}^m$  é fechado então  $T^r(K, S)$  é aberto na topologia  $C^{r+1}$ -fina.
- b) Se  $K \subset M$  é fechado então  $T^r(K, S)$  é denso na topologia  $C^{r+1}$ -fina.

Definição 3.6 - Uma coleção de superfície  $(S_i)_{i=0,1,\dots,t}$  em  $\mathbb{R}^k$  é dada por uma sequência finita de fechados

$$K_0 \supset K_1 \supset \dots \supset K_t \supset K_{t+1} = \emptyset$$

tais que  $S_i = K_i - K_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, t$  e  $S_i$  uma superfície regular em  $\mathbb{R}^k$  com  $\dim S_0 > \dim S_1 > \dots > \dim S_t$ .

Observação 3.7 - O teorema 3.3 vale quando substituímos a superfície  $S$  por uma coleção de superfícies  $(S_i)_{i=0,1,\dots,t}$

Vamos agora definir os conjuntos

$$S_{k_1, k_2, \dots, k_r}(f)$$

Indiquemos por

$$S_{k_1}(f) = \left\{ p \in \mathbb{R}^m \mid \text{posto } f_p = \min(m,n) - k_1 \right\}$$

se  $S_{k_1}(f)$  é uma superfície regular de  $\mathbb{R}^m$ , podemos considerar

$$f_1 = f|_{S_{k_1}(f)} : S_{k_1}(f) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

e falar no conjunto

$$S_{k_1 k_2}(f) = S_{k_2}(f_1)$$

para  $k_2 = 0, 1, \dots, s_1$  onde  $s_1 = \min(\dim S_{k_1}(f), n)$ .

Em geral se  $S_{k_1, \dots, k_{r-1}}(f)$  é superfície regular de  $\mathbb{R}^m$  definimos

$$S_{k_1 k_2 \dots k_r}(f) = S_{k_r}(f_{r-1})$$

onde

$$f_{r-1} = f|_{S_{k_1} \dots S_{k_{r-1}}(f)}$$

e

$$k_r = 0, 1, \dots, s_{r-1}$$

com

$$s_{r-1} = \min(\dim S_{k_1 \dots k_r}(f), n)$$

Estas definições introduzidas por R. Thom em [3], são de conteúdo bastante geométrico porém de pouca aplicação pois de modo geral é bastante difícil mostrar que  $S_{k_1 k_2 \dots k_r}(f)$  é sub-variedade de  $R^m$ . Fazemos menção apenas como título de informação que J. Boardman apresentará uma maneira intrínseca de definir os conjuntos acima e que se mostram mais fáceis de manejar na prática.



Capítulo II

Singularidades de Restrições de Aplicações Dife-  
renciáveis

§1 - Introdução

Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(x,y,z) = (u,v)$  com

$$u = \frac{x^3}{3} - x(y - z) + z$$

$$v = y$$

Logo sua matriz jacobiana será

$$J(f) = \begin{pmatrix} x^2 - y + z & -x & x+1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde se conclui que os pontos da forma  $(0,y,z)$  são pontos regulares de  $F$ .

Se considerarmos agora a função  $f$  restrita ao plano  $z = k$  (constante obtendo portanto uma função do  $\mathbb{R}^2$  no  $\mathbb{R}^2$  dada por  $f^k(x,y) = f(x,y,z)$  temos que tal aplicação terá uma singularidade no ponto  $(0,k)$ . Por outro lado o ponto  $(-1, 1)$  é ponto singular da restrição  $f^0$  e também ponto singular da função global.

Com isto o problema de estudarmos as singularidades das restrições de aplicações diferenciáveis se põe, pois que, uma aplicação pode globalmente não apresentar singularidade e sua restrição apresentar uma singularidade "genérica". Ainda como vimos, os pontos singulares da aplicação restrição podem ou não serem distintos



dos da aplicação global. Nosso intuito neste capítulo é dar uma formulação para tais fatos e estudar em detalhe quando os pontos singulares da restrição não caem sobre os da função global.

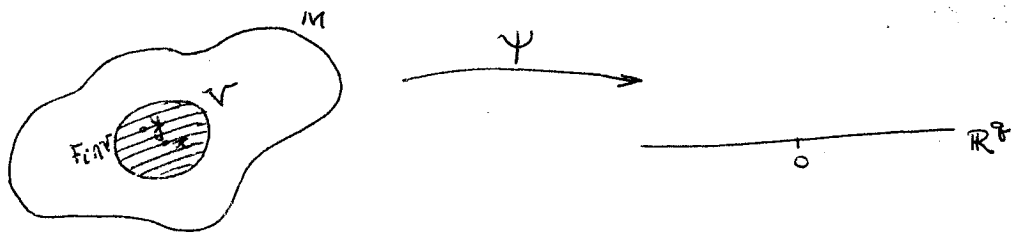
§2 - Folheação

Definição 2.1 - Uma folheação  $F$  de codimensão  $q < m$  e de classe  $C^r$  de uma variedade diferenciável  $M^m$  de classe  $C^r$  é uma coleção  $F = \{ F_i \subset M \mid i \in I \}$  de sub-variedades de classe  $C^r$  e disjuntas, de  $M$  satisfazendo:

a)  $\text{codim } F_i = q \quad \forall i \in I$

b)  $\bigcup_{i \in I} F_i = M$

c) para cada  $x \in M$ , existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $x$  em  $M$  e uma aplicação de classe  $C^r$ , regular,  $\Psi: V \rightarrow \mathbb{R}^q$  tal que:  $\Psi(x) = 0$  e para cada  $y \in V$ ,  $\Psi^{-1}[\Psi(y)]$  é a componente conexa de  $y$  em  $F_i \cap V$  onde  $F_i$  é a sub-variedade da coleção  $F$  que contém  $y$ .



Chamaremos:

- 1) As aplicações  $\Psi: V \rightarrow \mathbb{R}^q$  de definições locais de  $F$  ou equivalentemente que  $F$  é definido em  $V$  por  $\Psi: V \rightarrow \mathbb{R}^q$ .
- 2) De folhas às sub-variedades  $F_i$  da folheação  $F$ .

Sem perda de generalidade o aberto  $V$  pode ser tomado como um aberto coordenado e as coordenadas de modo que  $\Psi: V \rightarrow \mathbb{R}^q$  seja u ma projeção.

Isto nos permite pensar localmente uma folheação  $F$  como uma família de planos paralelos  $(m-q)$ -dimensional no espaço euclidiano  $m$ -dimensional.

Vamos precisar melhor o que acabamos de afirmar. Consideremos  $R^m = R^{m-q} \times R^q$ . Damos a  $R^m$  o seguinte sistema de coordenadas: um ponto  $p \in R^m$  será da forma  $p = (x, z)$  com

$$x = (x_1, \dots, x_{m-q}) \in R^{m-q}$$

$$z = (z_1, \dots, z_q) \in R^q$$

Então  $\Psi: V \rightarrow R^q$  será da forma  $\Psi(x, z) = z$ , logo em  $V$  as folhas se comportam como os  $(m-q)$ -planos paralelos ao espaço linear  $z = 0$ .

Doravante a locução "Variedade Diferenciável Folheada" será entendida como munida de um atlas maximal  $\mathcal{A} = (V_\alpha, \varphi_\alpha)$  onde nos abertos coordenados damos um sistema de coordenadas da forma  $(x, z)$  como acima e as folhas serão pensadas como  $(m-q)$ -planos paralelos ao espaço linear  $z = 0$  ou se preferir definidas pela projeção no segundo fator.

### §3 - Mudança de coordenadas permissível

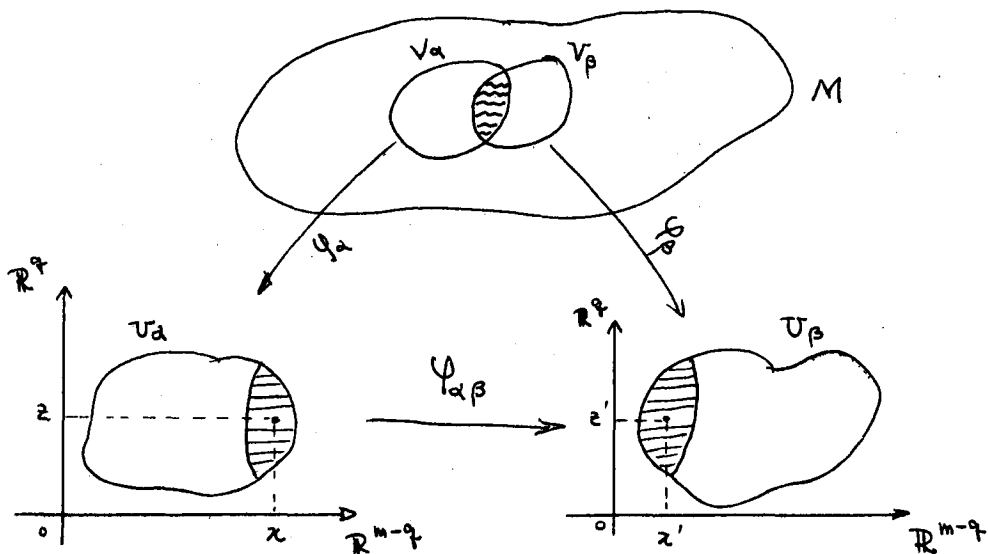
Definição 3.1 - Seja  $(M^m, \mathcal{A})$  uma variedade diferenciável,  $F$  uma folheação sobre  $M$  e  $\mathcal{A} = \{(V, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$  seu atlas maximal.

Chamaremos "Mudanças de coordenadas permissível" às mudanças de coordenadas

$$\varphi_{\alpha\beta}: \varphi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$$

que se exprimem da forma:

$$\varphi_{\alpha\beta}(x, z) = (\varphi_{\alpha\beta}^1(x, z), \varphi_{\alpha\beta}^2(z)) = (x', z')$$



É óbvio da definição acima que tais mudanças de coordenadas preservam localmente as folhas.

Convém aqui observar dois fatos que mais tarde serão de bastante utilidade.

3.2 - É fácil ver que sempre que tiver sentido, a mudança de coordenadas composta de duas mudanças de coordenadas permissíveis será também permissível.

3.3 - A mudança de coordenadas inversa de uma mudança de coordenadas permissível é ainda permissível.

Suponhamos

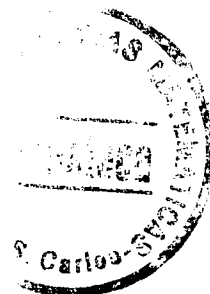
$$\varphi_{\alpha\beta}: \varphi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \rightarrow \varphi_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$$

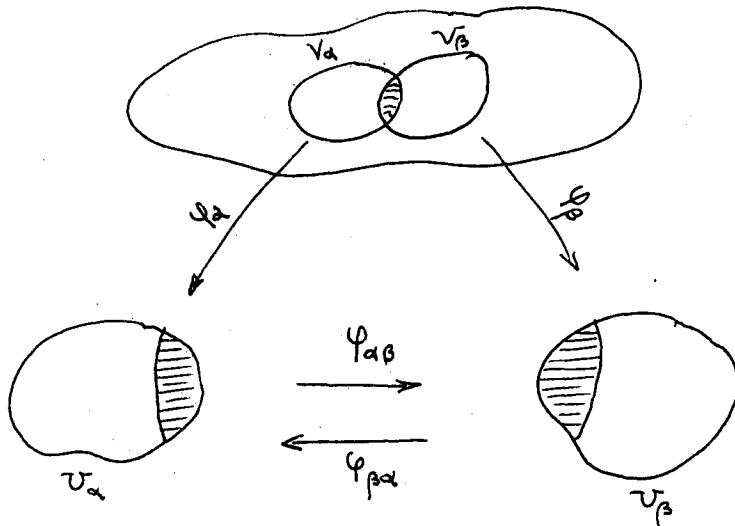
permissível, portanto:

$$\varphi_{\alpha\beta}(x, z) = (\varphi_{\alpha\beta}^1(x, z), \varphi_{\alpha\beta}^2(z)) = (x', z')$$

Vamos mostrar que  $\varphi_{\beta\alpha}$  também é permissível. De fato seja

$$\varphi_{\beta\alpha}(x', z') = (\varphi_{\beta\alpha}^1(x', z'), \varphi_{\beta\alpha}^2(x', z'))$$





Basta agora mostrar que  $\varphi_{\beta\alpha}^2(x', z') = z$  não depende de  $x'$ . Temos

$$z' = \varphi_{\alpha\beta}^2(\varphi_{\beta\alpha}^2(x', z'))$$

Calculando o jacobiano vem

$$0 = \frac{\partial(z')}{\partial(x')} = \frac{\partial(\varphi_{\alpha\beta}^2)}{\partial(z)} \cdot \frac{\partial(\varphi_{\beta\alpha}^2)}{\partial(x')}$$

mas

$$\left| \frac{\partial(\varphi_{\alpha\beta}^2)}{\partial(z)} \right| \neq 0$$

o que implica

$$\frac{\partial(\varphi_{\beta\alpha}^2)}{\partial(x')} = 0$$

ou seja  $\varphi_{\beta\alpha}^2$  é função apenas de  $z'$ .

c.q.d.

Desde que neste trabalho estamos interessados somente nas propriedades locais iremos estudar daqui para frente em detalhe apenas o caso em que  $M = V$  é um aberto do  $\mathbb{R}^m$ .

§4- Definições Gerais

Sejam  $\overline{z}_1 = (t_1, \dots, t_{m-q})$ ,  $\overline{z}_2 = (t'_1, \dots, t'_q)$ ,  $t = (\overline{z}_1, \overline{z}_2)$   
 e  $|t| = |\overline{z}_1| + |\overline{z}_2|$  com  $t_j, t'_\ell \in \mathbb{Z}_+$   $j = 1, \dots, m-q$  e  $\ell = 1, \dots, q$ .

Denotemos por

$$\begin{cases} \partial^{\overline{z}_1} x = \partial^{t_1}_{x_1} \partial^{t_2}_{x_2} \dots \partial^{t_{m-q}}_{x_{m-q}} \\ \partial^{\overline{z}_2} z = \partial^{t'_1}_{z_1} \partial^{t'_2}_{z_2} \dots \partial^{t'_q}_{z_q} \end{cases}$$

e por

$$\frac{\partial^{|t|} f(p)}{\partial^{\overline{z}_1}_x \partial^{\overline{z}_2}_z} = \left( \frac{\partial^{|t|} f_1(p)}{\partial^{\overline{z}_1}_x \partial^{\overline{z}_2}_z}, \dots, \frac{\partial^{|t|} f_n(p)}{\partial^{\overline{z}_1}_x \partial^{\overline{z}_2}_z} \right)$$

onde cada componente

$$\frac{\partial^{|t|} f_i(p)}{\partial^{\overline{z}_1}_x \partial^{\overline{z}_2}_z}$$

é entendida como a sequência obtida tomando-se todas as  $\overline{z}_1$  e  $\overline{z}_2$  de modo que  $|t| = s$ , respeitada a ordem estabelecida no capítulo I.

Com estas convenções podemos escrever as coordenadas de um  $r$ -jato  $j^r f(p) \in J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  como

$$j^r f(p) = \left( (p, f(p), \frac{\partial^{|t|} f(p)}{\partial^{\overline{z}_1}_x \partial^{\overline{z}_2}_z} \right) \quad 1 \leq |t| \leq r$$

Vamos agora definir uma aplicação que denotaremos por  $\Pi_F$

cujos campo de definição será  $J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  do seguinte modo:

$$\Pi_F(j^r f(p)) = \Pi_F \left( (p, f(p), \frac{\partial^{|t|} f(p)}{\partial^{\overline{z}_1}_x \partial^{\overline{z}_2}_z} \right) = \left( (p, f(p), \frac{\partial^{|\overline{z}_1|} f(p)}{\partial^{\overline{z}_1}_x} \right)$$

ou seja somente aparecem os termos em que  $|\overline{z}_2|$  é zero.

Designemos por  $J_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  a imagem pela aplicação  $\pi_{\mathbb{F}}$  de  $J^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ , isto é,

$$J_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \pi_{\mathbb{F}} \left[ (J^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \right].$$

Um elemento de  $J_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  denotaremos por  $j^{\mathbb{R}} f^z(p)$

OBSERVAÇÃO:

$J_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  nos dá os jatos das restrições das aplicações à folheação.

Da maneira como foi definido é óbvio que  $J_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  pode ser identificado com  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times J^{\mathbb{R}}(m-q, n)$ .

Posteriormente utilizaremos a projeção

$$\sigma_{\mathbb{F}} : J_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow J_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(m-q, n)$$

De modo análogo definimos

$$\pi'_{\mathbb{F}} : J^{\mathbb{R}}(m, n) \rightarrow J^{\mathbb{R}}(m-q, n)$$

pondo

$$J_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(m, n) = J^{\mathbb{R}}(m-q, n)$$

Seja  $L_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(m) \subset L^{\mathbb{R}}(m)$  dado por

$X \in L_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(m) \iff X = J^{\mathbb{R}}(h)$  com  $h : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  dado por  $h(x, z) = (x', z')$  onde

$$\begin{cases} x' = h_1(x, z) \\ z' = h_2(z) \end{cases}$$

Segue das observações 2.2 e 2.3 que  $L_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(m)$  é subgrupo de  $L^{\mathbb{R}}(m)$ .

Seja  $L_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(m, n) = L^{\mathbb{R}}(n) \times L_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(m)$  o qual possui uma estrutura de grupo quando munido da lei  $(X', Y')(X, Y) = (X'X, YY')$ . É óbvio

que

$$L_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(m,n) \subset L^{\mathbb{R}}(m,n)$$

donde opera sobre  $J^{\mathbb{R}}(m,n)$  da maneira já mencionada no capítulo I, isto é,  $(X,Y)(Z) = X Z Y$  ou seja se  $X = a^{\mathbb{R}}$  com  $a : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $Y = b^{\mathbb{R}}$  com  $b : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $Z = f^{\mathbb{R}}$  com  $f : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ , então  $XZY = (a f b)^{\mathbb{R}} = a^{\mathbb{R}} f^{\mathbb{R}} b^{\mathbb{R}}$ .

Notemos que a ação de  $L_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(m,n)$  sobre  $J^{\mathbb{R}}(m,n)$  equivale a mudanças de coordenadas permissíveis em  $V \subset \mathbb{R}^m$  e mudanças de coordenadas quaisquer em  $\mathbb{R}^n$ .

Seja  $\varrho : L_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(m) \rightarrow L^{\mathbb{R}}(m-q)$  o homomorfismo definido por

$\varrho(j^{\mathbb{R}}(h)) = j^{\mathbb{R}}(h^z \circ)$  com  $z_0 = 0$ . De imediato segue que  $\varrho$  é sôbre.

Utilizando  $\varrho$  podemos definir uma operação de  $L^{\mathbb{R}}(n) \times L_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(m)$  sobre  $J_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(m,n)$  do seguinte modo:

para  $(X,Y)$  com  $X \in L_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(m)$ ,  $Y \in L^{\mathbb{R}}(n)$  e para todo  $Z \in J_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(m,n)$  pomos  $(X,Y).Z = Y Z \varrho(X)$ .

Esta operação está bem definida e é compatível com a projeção  $\pi_{\mathbb{F}}^1$ , isto é, temos

$$\pi_{\mathbb{F}}^1(Y W X) = Y (\pi_{\mathbb{F}}^1(W))X$$

Designemos por  $S^{\mathbb{F}}$  uma superfície regular de  $J^{\mathbb{R}}(m,n)$  satisfazendo: Se  $\phi$  é a aplicação de definição local de  $S^{\mathbb{F}}$  então  $\exists \phi' : J_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(m,n) \rightarrow \mathbb{R}^s$  tal que  $\phi = \phi' \pi_{\mathbb{F}}^1$ .

$$\begin{array}{ccc} J^{\mathbb{R}}(m,n) \supset S^{\mathbb{F}} & & \\ \downarrow \pi_{\mathbb{F}}^1 & \searrow \phi & \\ J_{\mathbb{F}}^{\mathbb{R}}(m,n) & \xrightarrow{\phi'} & \mathbb{R}^s \end{array}$$

Definição 4.1 - Uma superfície regular  $S^F \subset J^r(m,n)$  é dita uma "Superfície de  $\mathcal{R}$ -singularidades de ordem  $r$ " se for invariante pela ação do grupo  $L_F^r(m,n)$ .

Para cada  $f : V \subset \underset{ab}{R^m} \rightarrow R^n$  definamos

$$(\overline{f^z})^r : V \rightarrow J_F^r(m,n) \text{ por } (\overline{f^z})^r = \sigma_F [(j^r f^z(p))]$$

Definição 4.2 - Diremos que  $f : V \subset \underset{ab}{R^m} \rightarrow R^n$  apresenta uma  $\mathcal{R}$ -singularidade do tipo  $S^F$  no ponto  $p \in V$  se  $(\overline{f^z})^r(p) \in S^F$ .

$$\text{Designemos por } S^F(f) = [(\overline{f^z})^r]^{-1} (S^F)$$

### §5 - $\mathcal{R}$ -singularidades de ordem 1

Lembremos aqui que, como já dissemos na introdução, estamos interessados nas  $\mathcal{R}$ -singularidades que não coincidam com singularidade da função global. Neste sentido damos a definição:

Definição 5.1 - Por  $S_k^F(m,n)$  denotamos o conjunto dos  $l$ -jatos  $X \in J^1(m,n)$  satisfazendo  $X \in S_0(m,n)$  e  $\pi_F'(X) \in S_k(m-q,n)$

São de fácil verificação:

5.2 -  $S_k^F(m,n)$  é superfície regular de  $J^1(m,n)$  de codimensão igual à codimensão de  $S_k(m-q,n) = k (|m-q-n| + k)$ .

5.3 -  $S_k^F(m,n)$  é invariante pela ação de grupo  $L_F^r(m,n)$ .

Em face disto passamos a escrever

$$S_k^F(f) = [(\overline{f^z})^r]^{-1} (S_k^F(m,n))$$

Utilizando capítulo I, 3.2 segue que  $S_k^F(f)$  é superfície regular de codimensão  $k (|m-q-n| + k)$ . Isto nos permite, para dados



valores de  $(m,n)$ , poder calcular quais  $\mathcal{R}$ -singularidades podem ser eliminadas por pequenas deformações.

Ainda queremos frizar que do fato de ser a codimensão igual  $k$  ( $|m-q-n|+k$ ) surge a possibilidade de ocorrer novos tipos de singularidades o que não poderia ocorrer no caso global, além de que o comportamento da função em folhas vizinhas fornece situações geométricas interessantes.

Analogamente à teoria da singularidade clássica se pode definir singularidades de ordem superior. Analisaremos alguns casos especiais no capítulo III.

Utilizando as diversas definições elaboradas neste capítulo seria fácil de estender estas noções ao caso das variedades e onde a variedade da fonte admite folheação. Não elaboramos estes fatos neste trabalho pois é desnecessário para os nossos objetivos.

Capítulo III

$\mathcal{R}$ -singularidades das aplicações do  $\mathbb{R}^3$  no  $\mathbb{R}^2$

§1 - Introdução:

Neste capítulo iremos estudar as  $\mathcal{R}$ -singularidades das aplicações  $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f \in C^\infty$  que não coincidam com singularidades da função global e cuja folheação (de classe  $C^\infty$ ) é dada por

$$\Psi : V \rightarrow \mathbb{R} \mid \Psi(x,y,z) = z.$$

Descreveremos para este caso quais  $\mathcal{R}$ -singularidades genérica podem ocorrer e daremos modelos e descrições geométricas. Para os casos I e II estudaremos o problema da forma normal.

PARTE A

§2 - Definições:

Seja  $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$f(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z))$$

Denotemos por:

1)  $f^z$  a restrição de  $f$  à folha  $\Psi(x,y,z) = z$ ; temos portanto:

$$f^z : V^z \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ dada por } f^z(x,y) = f(x,y,z).$$

$$2) J(f^z) = \begin{pmatrix} u_x(x,y,z) & u_y(x,y,z) \\ v_x(x,y,z) & v_y(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Definição 2.1 - Diremos que  $(x_0, y_0, z_0) \in V$  é um ponto  $\mathcal{R}$ -regular de  $f$  se

$$|J(f^{z_0})|_{(x_0, y_0)} \neq 0$$

Definição 2.2 - Diremos que  $(x_0, y_0, z_0) \in V$  é uma  $\mathcal{R}$ -singularidade de  $f$  se

$$|J(f^{z_0})|_{(x_0, y_0)} = 0$$

Em outras palavras, um ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  é  $\mathcal{R}$ -regular de  $f$  se  $(x_0, y_0)$  é ponto regular da restrição de  $f$  à folha que contém  $(x_0, y_0, z_0)$  e é uma  $\mathcal{R}$ -singularidade de  $f$  se  $(x_0, y_0)$  é uma singularidade da restrição de  $f$  à folha que contém  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Denotemos por  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e por  $p_0 = (x_0, y_0)$ .

Estamos interessados, é óbvio, nas  $\mathcal{R}$ -singularidades genéricas. Neste sentido comecemos por observar que num ponto de  $\mathcal{R}$ -singularidade se posto  $[J(f^{z_0})]_{(p_0)} = 0$  ou seja se:

$$u_x(P_0) = u_y(P_0) = v_x(P_0) = v_y(P_0) = 0$$

não poderá ser  $\mathcal{R}$ -singularidade genérica uma vez que estas equações definem um conjunto de codimensão 4 num espaço de dimensão 3. Como consequência da transversalidade segue que tal situação é eliminável. Então se desejamos  $\mathcal{R}$ -singularidade genérica devemos supor posto  $[J(f^{z_0})]_{(p_0)} = 1$  e assim o faremos daqui para frente.

### §3 - Invariança da $\mathcal{R}$ -singularidade

Nos parágrafos que seguem as mudanças de coordenadas se

rão sempre de classe  $C^\infty$ .

Lema 3.1 - O fato de uma função apresentar uma  $\mathcal{Q}$ -singularidade é invariante por mudanças de coordenadas permissíveis na fonte e por mudanças de coordenadas na meta.

Demonstração: temos:

$$f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

dada por

$$f(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z))$$

e suponhamos

$$(x_0, y_0, z_0) \in V$$

Sejam:

a)  $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \varphi(s,t,r) = (x(s,t,r), y(s,t,r), z(r))$

uma mudança de coordenadas permissível nas vizinhanças do ponto

$(s_0, t_0, r_0)$  com

$$\begin{cases} x_0 = x(s_0, t_0, r_0) \\ y_0 = y(s_0, t_0, r_0) \\ z_0 = z(r_0) \end{cases}$$

b)  $\psi : W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \psi(u,v) = (m(u,v), n(u,v))$  uma mudança de coordenadas nas vizinhanças do ponto  $(u_0, v_0)$  com

$$\begin{cases} u_0 = u(x_0, y_0, z_0) \\ v_0 = v(x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

Consideremos a aplicação composta

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\varphi} & V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^2 \\ & & & & & \searrow & \\ & & & & & \psi \circ f \circ \varphi & \end{array}$$

dada por

$$(m,n) = ( m'(s,t,r), n'(s,t,r) )$$

calculando os jacobianos temos

$$J [ ( \psi \circ f \circ \varphi )^x ] = J(\psi) \cdot J(f^z) \cdot J(\varphi^x)$$

logo

$$(3.0) \quad | J [ ( \psi \circ f \circ \varphi )^x ] | = | J(\psi) | \cdot | J(f^z) | \cdot | J(\varphi^x) |$$

Desta igualdade segue imediatamente:

$(s_0, t_0, r_0)$  é  $\mathcal{R}$ -singularidade de  $\psi \circ f \circ \varphi \iff (x_0, y_0, z_0)$  é  $\mathcal{R}$ -singularidade de  $f$ .

c.q.d.

Corolário 3.2 - O fato de um ponto ser  $\mathcal{R}$ -regular de  $u$  ma aplicação  $f$ , é invariante por mudanças de coordenadas permissíveis na fonte e por mudanças de coordenadas na meta.

Imediato:

§4 - Forma normal para pontos  $\mathcal{R}$ -regulares

Teorema 4.1 - Seja  $f : V \subseteq_{ab} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x, y, z) = (u(x,y,z), v(x,y,z))$  e  $(x_0, y_0, z_0) \in V$  um ponto  $\mathcal{R}$ -regular de  $f$ . Então podemos introduzir nas condições de 3.2 um sistema de coordenadas  $(x', y', z')$  nas vizinhanças de  $(x_0, y_0, z_0)$  em termos das quais  $f$  toma a forma:

$$\begin{cases} u = x' \\ v = y' \end{cases}$$

Demonstração:

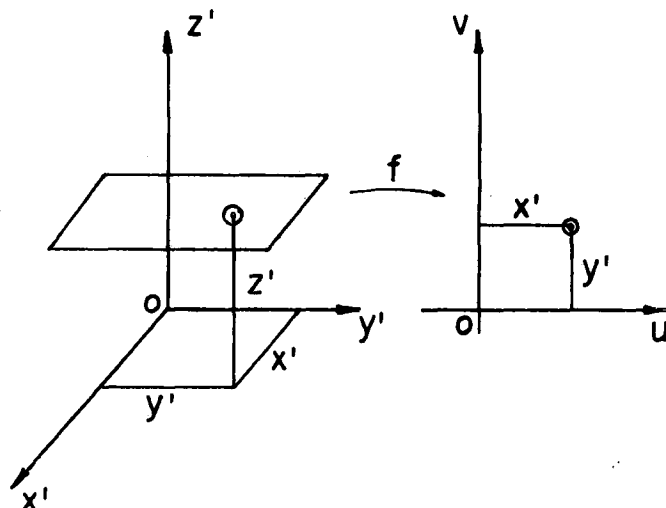
Como  $| J ( f^z ) |_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0$  basta efetuar a mudança

de coordenadas permissível

$$\begin{cases} x' = u(x,y,z) \\ y' = v(x,y,z) \\ z' = z \end{cases}$$

e obtermos

$$\begin{cases} u = x' \\ v = y' \end{cases}$$



c.q.d.

Observação:

4.2 - Como dissemos anteriormente, desejamos estudar as  $\mathcal{R}$ -singularidades que não estão sobre singularidades da função global. Nestas condições a locução: " $(x_0, y_0, z_0)$  é uma  $\mathcal{R}$ -singularidade de  $f$ " será entendida daqui para frente como satisfazendo a definição 2.2 mais a hipótese:

$$\text{posto } [ J(f)_{(P_0)} ] = 2.$$

§5 - Sistemas de coordenadas especiais

Temos

$$f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

dada por

$$f(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z)) = (u,v)$$

Suponhamos que  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in V$  seja uma  $\mathcal{R}$ -singularidade. Então como vimos no §2 devemos ter

$$\text{posto } [ J(f^{z_0})_{(P_0)} ] = 1.$$

Sem perda de generalidade podemos supor que  $v_y(P_0) \neq 0$ . Pela continuidade existe uma vizinhança  $V_1$  do ponto  $P_0$  na qual esta derivada se conserva diferente de zero.

Efetuada em  $V_1$  a mudança de coordenadas permissível

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = v(x, y, z) \\ z' = z \end{cases}$$

temos que nas novas coordenadas  $f$  se escreve

$$\begin{cases} u = u'(x', y', z') \\ v = y' \end{cases}$$

Abandonando as linhas concluímos nas condições de 3.1 que  $f$  nas vizinhanças de um ponto de  $\mathcal{R}$ -singularidade possui sistemas de coordenadas na fonte e na meta nas quais se escreve da forma

$$u = u(x, y, z)$$

$$v = y$$

Definição 5.1 - A um tal par de sistemas de coordenadas denominaremos de "par especial" e à função escrita nestas condições de "forma especial".

Observações:

5.2 - Neste par especial a definição 2.2 toma a forma:  
"Um ponto  $P_0 \in V$  é dito uma  $\mathcal{R}$ -singularidade de  $f$  se  $u_x(P_0) = 0$ ".

5.3 - O fato de que o ponto  $P_0 \in V$  não é ponto singular da função global se exprime agora por  $u_z(P_0) \neq 0$ .

§6 - Classificação das  $\mathcal{R}$  - singularidades genéricas

Utilizando os resultados expostos no parágrafo anterior vamos classificar os pontos de  $\mathcal{R}$  - singularidade genérica para uma função que se apresenta sob a forma especial. No parágrafo seguinte mostraremos a invariância desta classificação o que nos permite estender a mesma para funções que não se apresentam na forma especial. Mais adiante daremos uma interpenetração geométrica desta classificação.

Para a classificação procedemos do seguinte modo:

1º passo:

Temos  $u_x(P_0) = 0$ . Olhamos para  $u_{xx}(P_0)$ . Duas hipóteses podem ser levantadas:

a<sub>1</sub>)  $u_{xx}(P_0) = 0$ . Neste caso ocorrerá transversalidade pois a matriz linha

$$\left( \begin{array}{ccc} u_{xx}(P_0) & u_{xy}(P_0) & u_{xz}(P_0) \end{array} \right)$$

possui característica 1.

Definição 6.1: - Diremos que  $f$  apresenta uma  $\mathcal{R}$  - singularidade do tipo I no ponto  $P_0 \in V$  se

$$\begin{cases} u_x(P_0) = 0 \\ u_{xx}(P_0) \neq 0 \end{cases}$$

Consequência da transversalidade segue que o lugar dos pontos onde ocorre  $\mathcal{R}$  - singularidade do tipo I é uma superfície regular (codim 1).

b<sub>1</sub>)  $u_{xx}(P_0) = 0$ . Nestas condições damos mais um passo.



2º passo:

Temos  $u_x(P_0) = u_{xx}(P_0) = 0$ .

Olhamos para  $u_{xy}(P_0) \cdot u_{xxx}(P_0)$ .

Duas hipóteses podem ocorrer:

a<sub>2</sub>)  $u_{xy}(P_0) \cdot u_{xxx}(P_0) \neq 0$ . Neste caso ocorrerá transversalidade pois a matriz

$$\begin{pmatrix} u_{xx}(P_0) & u_{xy}(P_0) & u_{xz}(P_0) \\ u_{xxx}(P_0) & u_{ixy}(P_0) & u_{xxz}(P_0) \end{pmatrix}$$

possui característica 2.

Definição 6.2 - Diremos que  $f$  apresenta uma  $\mathcal{Q}$ -singularidade do tipo II no ponto  $P_0 \in V$  se:

$$\begin{cases} u_x(P_0) = u_{xx}(P_0) = 0 \\ u_{xy}(P_0) \cdot u_{xxx}(P_0) \neq 0 \end{cases}$$

Novamente consequência da transversalidade segue que o lugar dos pontos onde ocorre  $\mathcal{Q}$ -singularidade do tipo II é uma curva regular (codim 2).

b<sub>2</sub>)  $u_{xy}(P_0) \cdot u_{xxx}(P_0) = 0$

Se tal ocorre, convém observar que não podemos ter simultaneamente

$$u_{xy}(P_0) = u_{xxx}(P_0) = 0$$

pois que a codimensão vai a 4 e pelos motivos expostos a  $\mathcal{Q}$ -singularidade é eliminável. Segue portanto que devemos ter:

$$(u_{xy}(P_0), u_{xxx}(P_0)) \neq (0,0)$$

Feita esta observação damos mais um passo:

3º passo:

Temos duas direções a seguir:

- 1) Se  $u_x(P_0) = u_{xx}(P_0) = u_{xy}(P_0) = 0$  para que ocorra transversalidade é necessário que a matriz abaixo

$$\begin{pmatrix} u_{xx}(P_0) & u_{xy}(P_0) & u_{xz}(P_0) \\ u_{xxx}(P_0) & u_{xxy}(P_0) & u_{xxz}(P_0) \\ u_{xxy}(P_0) & u_{xyy}(P_0) & u_{xyz}(P_0) \end{pmatrix}$$

possua característica 3. Isto nos leva à:

Definição 6.3 - Diremos que  $f$  apresenta uma  $\mathcal{Q}$ -singularidade do tipo III no ponto  $(x_0, y_0, z_0) \in V$  se:

$$\begin{cases} u_x(P_0) = u_{xx}(P_0) = u_{xy}(P_0) = 0 \\ u_{xz}(P_0) \cdot \begin{vmatrix} u_{xxx}(P_0) & u_{xxy}(P_0) \\ u_{xxy}(P_0) & u_{xyy}(P_0) \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases}$$

Outra vez consequência da transversalidade segue que a  $\mathcal{Q}$ -singularidade do tipo III só pode ocorrer em pontos isolados (codim 3).

Não podemos mais prosseguir nesta direção visto que a codimensão será a partir daqui maior ou igual a 4.

- 2) Se  $u_x(P_0) = u_{xx}(P_0) = u_{xxx}(P_0) = 0$  para que ocorra transversalidade é necessário que a matriz a seguir:

$$\begin{pmatrix} u_{xx}(P_0) & u_{xy}(P_0) & u_{xz}(P_0) \\ u_{xxx}(P_0) & u_{xyy}(P_0) & u_{xxz}(P_0) \\ u_{xxxx}(P_0) & u_{xyxy}(P_0) & u_{xxxz}(P_0) \end{pmatrix}$$

possua característica 3. Isto sugere a

Definição 6.4 - Diremos que  $f$  apresenta uma  $\mathcal{R}$ -singularidade do tipo IV no ponto se  $P_0 \in V$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x(P_0) = u_{xx}(P_0) = u_{xxx}(P_0) = 0 \\ u_{xxxx}(x_0, y_0, z_0) \cdot \begin{vmatrix} u_{xy}(P_0) & u_{xz}(P_0) \\ u_{xyy}(P_0) & u_{xxz}(P_0) \end{vmatrix} \neq 0 \end{array} \right.$$

Novamente da transversalidade segue que a  $\mathcal{R}$ -singularidade do tipo IV só pode ocorrer em pontos isolados (codim 3).

Finalmente não podemos prosseguir em face da codimensão a partir daqui ser maior ou igual a 4.

§7 - Invariança e definição intrínseca das  $\mathcal{R}$ -singularidades do tipo I, II, III e IV

Suponhamos que  $f : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  admita uma  $\mathcal{R}$ -singularidade no ponto  $P_0 \in V$  e que os sistemas  $(x, y, z)$ ,  $(u, v)$  constituem um par especial para esta  $\mathcal{R}$ -singularidade.

Definição 7.1 - Chamaremos "par adequado" para  $f$  a um par de mudanças de coordenadas  $(\Psi, \Phi)$  onde:

$$a) \varphi : \mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^3 \mid \varphi(X, Y, Z) = (x, y, z) = (x(X, Y, Z), y(X, Y, Z), z(Z))$$

é uma mudança de coordenadas permissível nas vizinhanças do ponto  $(X_0, Y_0, Z_0)$  com

$$\begin{cases} x_0 = x(X_0, Y_0, Z_0) \\ y_0 = y(X_0, Y_0, Z_0) \\ z_0 = z(Z_0) \end{cases}$$

b)  $\phi : W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \phi(u, v) = (U, V) = (U(u, v), V(u, v))$  é uma mudança de coordenadas nas vizinhanças do ponto  $(u_0, v_0)$  com

$$\begin{cases} U_0 = U(u_0, v_0) \\ V_0 = V(u_0, v_0) \end{cases}$$

e satisfazendo à seguinte condição que também os sistemas  $(X, Y, Z)$  e  $(U, V)$  constituem um par especial ou seja  $f$  se exprime da forma

$$\begin{cases} U = U(X, Y, Z) \\ V = Y \end{cases}$$

Com isto podemos enunciar uma proposição de bastante importância:

Proposição 7.2 - "Os tipos I, II, III e IV de  $\mathcal{Q}$ -singularidades são invariantes por pares adequados".

No decorrer da demonstração também mostraremos como se apresentam os diversos tipos de  $\mathcal{Q}$ -singularidades independentemente de sua forma relativamente à pares especiais.

Lembramos aqui que sempre supomos que  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  não apresenta singularidade no ponto em estudo.

a) Invariança do tipo I

$f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  apresenta no ponto  $(x_0, y_0, z_0) \in V$  uma  $\mathcal{R}$ -singularidade do tipo I se e somente se a restrição  $f^{z_0}$  apresenta um ponto de dobra em  $(x_0, y_0)$ .

Isto nos dá uma definição intrínseca da  $\mathcal{R}$ -singularidade do tipo I e mostra a invariança da caracterização do § 6 em termos de um par adequado.

b) Invariança do tipo II

$f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  apresenta no ponto  $(x_0, y_0, z_0) \in V$  uma  $\mathcal{R}$ -singularidade do tipo II se e somente se a restrição  $f^{z_0}$  apresenta um ponto cuspidal em  $(x_0, y_0)$ .

Novamente obtemos assim uma definição intrínseca da  $\mathcal{R}$ -singularidade do tipo II. Além disso obtemos também a invariança da caracterização do § 6 em termos de um par adequado.

c) Invariança do tipo IV

Se  $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  apresenta no ponto  $(x_0, y_0, z_0) \in V$  uma  $\mathcal{R}$ -singularidade do tipo IV então a restrição  $f^{z_0}$  é boa no ponto  $(x_0, y_0)$  porém não excelente e este ponto é isolado. Estas condições são assumidas transversalmente.

Vice-versa, se tivermos  $(x_0, y_0, z_0) \in V$  uma  $\mathcal{R}$ -singularidade expressa em termos de um par especial na qual a restrição  $f^{z_0}$  é boa em  $(x_0, y_0)$  sem ser excelente teremos  $u_x(x_0, y_0, z_0) = u_{xx}(x_0, y_0, z_0) = 0$ ,  $u_{xy}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  e  $u_{xxx}(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Além disso se estas condições são assumidas transversalmente resulta:

$$u_{xxxx}(x_0, y_0, z_0) \cdot \begin{vmatrix} u_{xy}(x_0, y_0, z_0) & u_{xz}(x_0, y_0, z_0) \\ u_{xxy}(x_0, y_0, z_0) & u_{xxz}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

ou seja o ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  é do tipo IV o que mostra a invariança e dá uma definição intrínseca da  $\mathcal{R}$ -singularidade do tipo IV.

d) Invariança do tipo III

Se  $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  apresenta no ponto  $(x_0, y_0, z_0) \in V$  uma  $\mathcal{R}$ -singularidade do tipo III então a restrição  $f^{z_0}$  deixa de ser boa no ponto  $(x_0, y_0)$  o qual é isolado e para  $z$  próximo de  $z_0$  todas as restrições  $f^z$  são excelentes. Estas condições são assumidas transversalmente.

Vice-versa, se tivermos  $(x_0, y_0, z_0) \in V$  uma  $\mathcal{R}$ -singularidade expressa em termos de um par especial na qual a restrição  $f^{z_0}$  deixa de ser boa então  $u_x(x_0, y_0, z_0) = u_{xx}(x_0, y_0, z_0) = u_{xy}(x_0, y_0, z_0) = 0$ .

Se estas condições são assumidas transversalmente resulta:

$$u_{xz}(x_0, y_0, z_0) \begin{vmatrix} u_{xxx}(x_0, y_0, z_0) & u_{xxy}(x_0, y_0, z_0) \\ u_{xxy}(x_0, y_0, z_0) & u_{xyy}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

em qualquer sistema especial. Para finalizar a demonstração da invariança precisamos mostrar que  $u_{xxx}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  é independente do particular par especial.

De fato, sejam  $f$  e  $(\psi, \phi)$  como na definição 6.1. Denote mos por  $P'_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$ ,  $p'_0 = (X_0, Y_0)$ ,  $T = |J((\phi, \psi)^Z)|$  e  $t = |J(f^Z)|$ .

Então de (3.0) temos

$$T = |J(\phi)| + |J(\psi^Z)|$$

é óbvio que:

$$T = U_X \quad e \quad t = u_x$$

$$\text{Como já vimos } T(p'_0) = 0 \Leftrightarrow t(p_0) = 0$$

Calculando  $T_{XX}$  e levando-se em conta que

$$T_x(p'_0) = 0 \Leftrightarrow t_x(p_0) = 0$$

obtemos:

$$T_{XX}(p'_0) = |J(\phi)|_{(u_0, v_0)} \cdot t_{XX}(p'_0) \cdot |J(\psi^Z)|_{(p'_0)}$$

mas

$$t_{XX}(p'_0) = u_{xxx}(P_0) [x_X(P'_0)]^2 + 2 u_{xxy}(P_0) x_X(P'_0) y_X(P'_0) + \\ + u_{xyy}(P_0) [y_X(P'_0)]^2 + u_{xx}(P_0) x_{XX}(P'_0) + u_{xy}(P_0) y_{XX}(P'_0)$$

Contudo de

$$\begin{cases} v_Y(P'_0) = [v_u(u_0, v_0) u_y(P_0) + v_v(u_0, v_0) v_y(P_0)] y_Y(P'_0) = 1 \\ v_X(P'_0) = [v_u(u_0, v_0) u_y(P_0) + v_v(u_0, v_0) v_y(P_0)] y_X(P'_0) = 0 \end{cases}$$

tiramos que  $y_X(P'_0) = 0$  e disto segue que  $x_X(P'_0) \cdot y_Y(P'_0) \neq 0$  então temos finalmente

$$T_{XX}(p'_0) = |J(\phi)|_{(u_0, v_0)} \cdot t_{xx}(p_0) [x_X(P'_0)]^2 |J(\psi^Z)|_{(p'_0)}$$

Com isto finalizamos a demonstração da invariância.

Esta invariância relativamente à pares adequados permite-nos definir as  $\mathcal{R}$  - singularidades do tipo III também no caso em que as coordenadas não são especiais simplesmente dizendo que uma  $\mathcal{R}$  - singularidade é do tipo III se reduzida à forma especial satisfaz a definição 5.3.

### OBSERVAÇÕES

7.3 - Salvo menção em contrário, a função em estudo estará sempre nas vizinhanças de um ponto de  $\mathcal{R}$  - singularidade, na forma especial.

7.4 - Sem perda de generalidade podemos supor que o ponto  $P_p$  onde uma aplicação  $f$  apresente uma  $\mathcal{R}$  - singularidade seja a origem  $(0,0,0)$  e que  $f(0,0,0) = (0,0)$  pois em caso contrário bastaria efetuar o par adequado  $(\psi, \phi)$  com

$$\psi \equiv \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \\ z' = z - z_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \phi \equiv \begin{cases} u' = u - u_0 \\ v' = v - v_0 \end{cases}$$

Definição 7.5 - Denominamos "dobra geral" de

$$f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

ao lugar dos pontos em  $V$  onde

$$|J(f^Z)|_{(x,y)} = 0$$

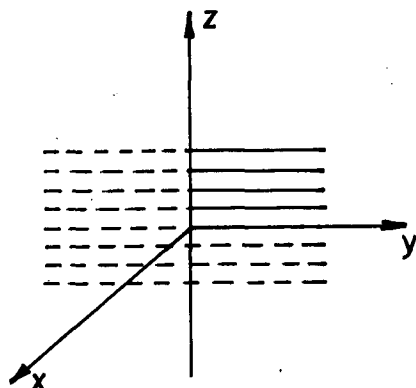
### §8 - Forma normal para pontos de $\mathcal{R}$ - singularidades do tipo I

Antes de passarmos à forma normal vamos descrever geometricamente um modelo para tais pontos.

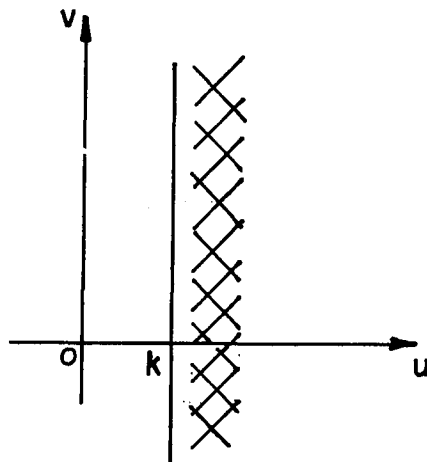
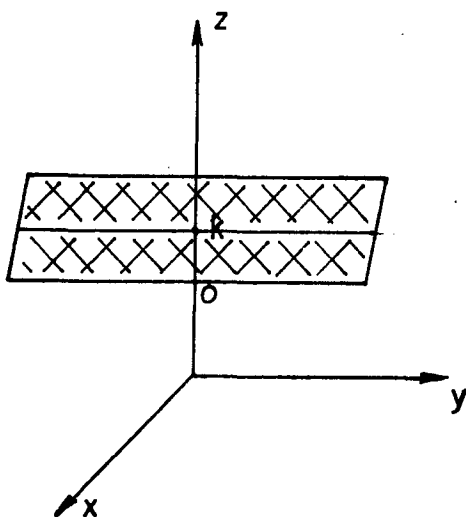
8.1 - Seja  $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  |  $f(x,y,z) = (u,v)$  com



$$\begin{cases} u_x(0,0,0) = 0 \\ u_{xxx}(0,0,0) \neq 0 \end{cases}$$



De  $u_x(x,y,z) = 2x$  segue que a dobra gerada é o plano  $x = 0$ . Além disso observa-se que tal aplicação dobra cada plano  $z = k$  (constante) sobre o semi-espaço  $u \geq k$ .



**Teorema 8.2** - Seja  $f : V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x,y,z) = (u,v)$  com  $0 = (0,0,0) \in V$  um ponto  $\mathcal{Q}$ -singular de tipo I. Então podemos introduzir nas condições de 6.2 sistemas de coordenadas  $(x^*,y^*,z^*)$  nas vizinhanças de  $(0,0,0)$  e  $(u^*,v^*)$  nas vizinhanças de  $(0,0)$ , em termos das quais  $f$  toma a forma:

$$\begin{cases} u^* = (x^*)^2 + z^* \\ v^* = y^* \end{cases}$$

Demonstração:

Temos

$$f \begin{cases} u = u(x,y,z) \\ v = y \end{cases}$$



satisfazendo

$$\begin{cases} u_x(0,0,0) = 0 \\ u_{xx}(0,0,0) \neq 0 \end{cases}$$

equações do tipo I.

Efetuando o par adequado  $(\psi, \phi)$  onde

$$\psi \equiv \text{identidade} \quad \text{e} \quad \phi \equiv \begin{cases} u' = u - u_y(0,0,0) v \\ v' = v \end{cases}$$

obtemos abandonando as linhas

$$\begin{cases} u_x(0,0,0) = u_y(0,0,0) = 0 \\ u_{xx}(0,0,0) \neq 0 \end{cases}$$

Desenvolvendo  $u$  por Mac-Laurin temos

$$u(x,y,z) = u_z(0,0,0) z + u_1(x,y,z), \text{ ord } u_1 \geq 2$$

mas  $u_z(0,0,0) \neq 0$  (ver observação 2, §5) então efetuando o par adequado  $(\psi, \phi)$  com

$$\psi \equiv \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = u_z(0,0,0)z + u_1(0,0,z) \end{cases} \quad \phi \equiv \text{identidade}$$

teremos abandonando as linhas

$$\begin{cases} u = u_1(x,y,z) + z \\ v = y \end{cases}$$

satisfazendo, além das equações de definição mais as condições:

$$\begin{cases} (u_1)_x(0,0,0) = (u_1)_y(0,0,0) = (u_1)_z(0,0,0) = 0 \\ u_1(0,0,z) = 0 \quad \forall z \\ (u_1)_{xx}(0,0,0) \neq 0 \end{cases}$$

Notar que esta última mudança de coordenadas foi efetuada com a finalidade de obter que  $u$  dependa linearmente do parâmetro  $z$ .

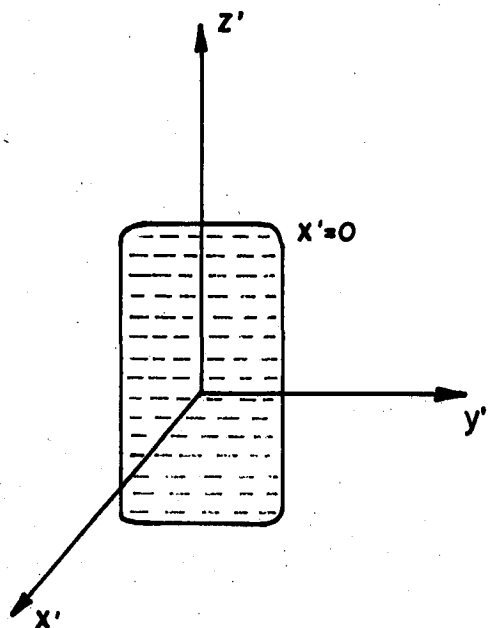
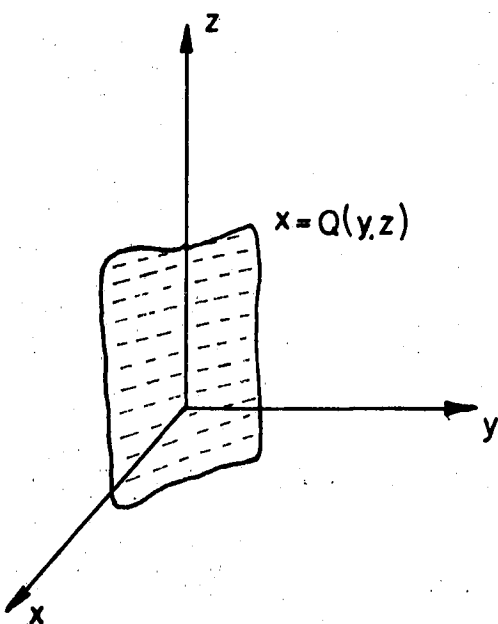
Agora de

$$\begin{cases} (u_1)_x(x,y,z) = 0 \\ (u_1)_{xx}(0,0,0) \neq 0 \end{cases}$$

tiramos pelo teorema das funções implícitas (T.F.I.) numa vizinhança  $\mathcal{V}$  da origem:  $x = Q(y,z)$  (equação da dobra geral) satisfazendo

$$0 = Q(0,0) \quad \text{e} \quad (u_1)_x(Q(y,z), y, z) = 0 \quad \forall (y,z) \in \mathcal{V}$$

Vamos transformar agora a superfície  $x = Q(y,z)$  no plano  $x' = 0$



Para tal efetuamos o par adequado  $(\Psi, \phi)$  com

$$\Psi \equiv \begin{cases} x = x' + Q(y', z') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \quad \phi \equiv \text{identidade}$$

donde

$$\begin{cases} u = u_1'(x', y', z') + z' \\ v = y' \end{cases}$$

é tal que além das equações de definição satisfaz

$$(u_1')_{x'}(x', y', z') = (u_1)_x(x' + Q(y', z'), y', z')$$

disto segue

$$(u_1')_{x'}(0, y', z') = 0 \quad \forall (y', z') \in \mathcal{V}'$$

( $\mathcal{V}'$  transformada de  $\mathcal{V}$  por  $\Psi$ ).

Novamente abandonando as linhas temos:

$$\begin{cases} u = u_1(x, y, z) + z \\ v = y \end{cases}$$

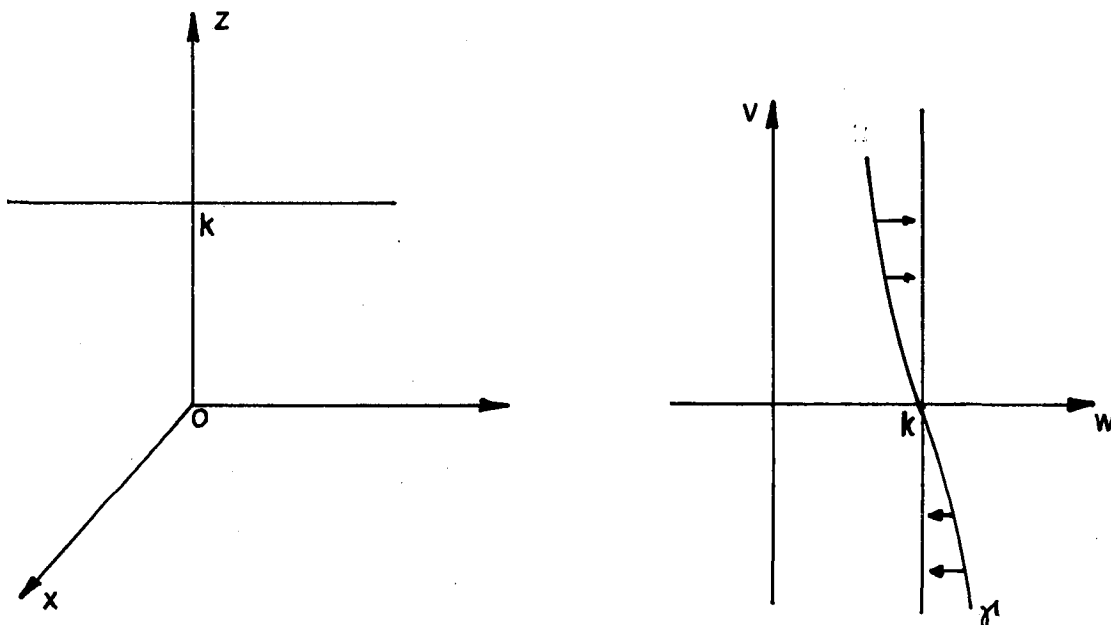
para a qual valem

$$\begin{cases} u_1(0, 0, z) = 0 \\ (u_1)_y(0, 0, 0) = (u_1)_z(0, 0, 0) = 0 \\ (u_1)_x(0, y, z) = 0 \quad \forall (y, z) \in \mathcal{V} \\ (u_1)_{xx}(0, 0, 0) \neq 0 \end{cases}$$

Observemos agora que nossa aplicação leva cada reta

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = k \end{cases}$$

numa curva  $\gamma'$  passando pelo ponto respectivo  $(u, v) = (k, 0)$ .



desejamos levar esta reta na reta  $u = k$ . Para tal vamos transformar a curva  $\gamma^1$  na reta  $u = k$ .

Definamos a função  $A(y, z)$  por:

$$A(y, z) = u_1(o, y, z)$$

então

$$A_z(o, o) = (u_1)_z(o, o, o) = 0$$

mas pela continuidade de  $A_z(y, z)$  podemos afirmar que existe uma vizinhança  $\mathcal{U}_1$  da origem onde

$$|A_z(y, z)| < \epsilon < 1$$

e aí vale

$$1 + A_z(y, z) \neq 0$$

Efetuem os par adequado  $(\Psi, \phi)$  com

$$\Psi \equiv \text{identidade} \quad \phi \equiv \begin{cases} u = u' + A(v', u') \\ v = v' \end{cases}$$

(Observar que sendo  $1 + A_{u'}(v', u') \neq 0$  para  $(u', v')$  numa conveniente vizinhança da origem garante que  $\phi$  é boa).

Vamos mostrar que:

$$\begin{cases} \text{a) } u'(0, y, z) = z \\ \text{b) } (u')_x(0, y, z) = 0 \end{cases} \quad \forall (y, z) \in \tilde{\mathcal{U}}$$

a) De fato seja:

$$G(y, z, u') = u' + A(y, u') - u(0, y, z)$$

portanto

$$G_{u'}(0, 0, 0) = 1 + A_{u'}(0, 0) = 1 \neq 0$$

logo usando T.F.I. segue  $u' = \tilde{u}'(y, z)$  satisfazendo

$$G(y, z, \tilde{u}'(y, z)) = 0 \quad \forall (y, z) \in \tilde{\mathcal{U}}_1$$

Por outro lado da definição de  $u'$  temos

$$G(y, z, u'(0, y, z)) = 0$$

e portanto  $\tilde{u}'(y, z) = u'(0, y, z)$  numa conveniente vizinhança  $\tilde{\mathcal{U}}_2$  da origem. Agora observando que também  $G(y, z, z) = 0$  concluímos finalmente que  $u'(0, y, z) = z$  numa vizinhança  $\tilde{\mathcal{U}}$  da origem.

b) Por outro lado temos:

$$u'_x(0, y, z) = u'_x(0, y, z) (1 + A_{u'}(y, z))$$

donde

$$u'_x(0, y, z) = 0 \quad \forall (y, z) \in \tilde{\mathcal{U}}$$

Finalmente obtivemos abandonando as linhas

$$\begin{cases} u = u_1(x, y, z) + z \\ v = y \end{cases}$$

satisfazendo:

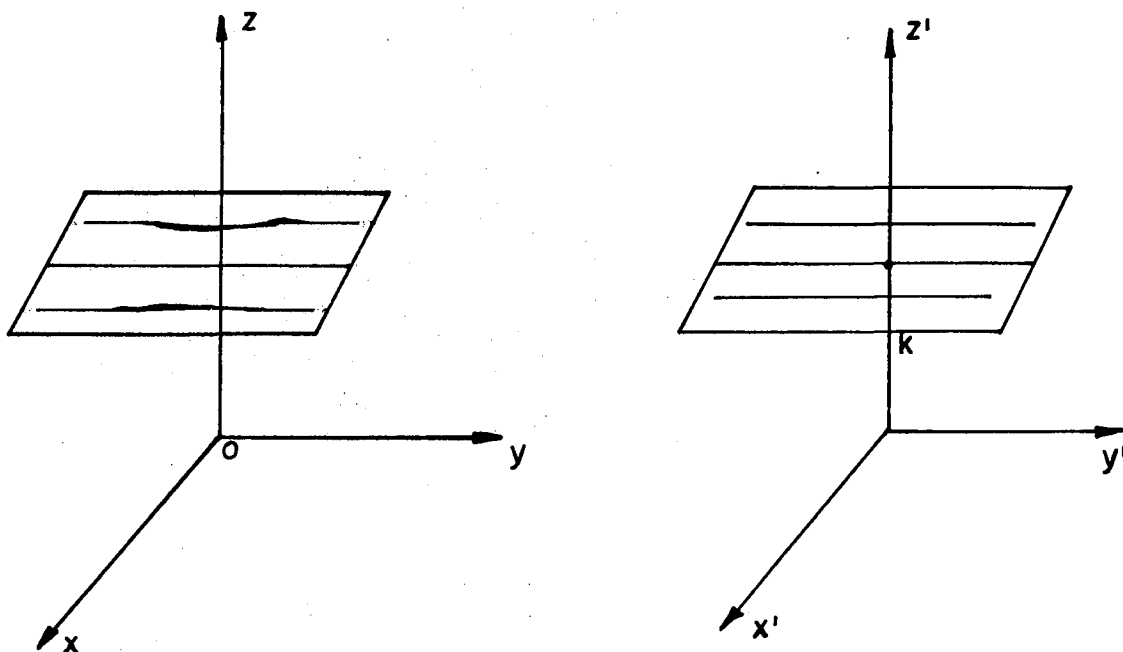
$$(\beta) \quad u_1(0, y, z) = (u_1)_x(0, y, z) = 0 \quad \forall (y, z) \in \tilde{\mathcal{U}}$$

que realiza a transformação desejada.

Falta-nos portanto uma última transformação a saber, realizar a simetria, isto é, que o plano  $z = k$  seja dobrado de modo que pontos simétricos em relação à reta

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = k \end{cases}$$

sejam levados sobre o mesmo ponto.



Para realizar tal transformação lembremos que por [1] pág. 392 (b) podemos escrever de  $(\beta)$ :

$$u_1(x, y, z) = x^2 B(x, y, z) \text{ com } B(0, 0, 0) \neq 0$$

(visto que  $u_{xx}(0, 0, 0) \neq 0$ ).

Efetuando o par adequado  $(\psi, \phi)$  com

$$\psi \equiv \begin{cases} x^* = x (B(x, y, z))^{1/2} \\ y^* = y \\ z^* = z \end{cases} \quad \phi \equiv \begin{cases} u^* = u \\ v^* = v \end{cases}$$

teremos finalmente:

$$\begin{cases} u^* = (x^*)^2 + z^* \\ v^* = y^* \end{cases}$$

c.q.d.



PARTE B

Estudo da  $\mathcal{R}$  - singularidade do tipo II

§9 - Considerações gerais

9.1 - Vamos primeiramente descrever um modelo para pontos do tipo II.

$$\text{Seja } f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x,y,z) = (u,v)$$

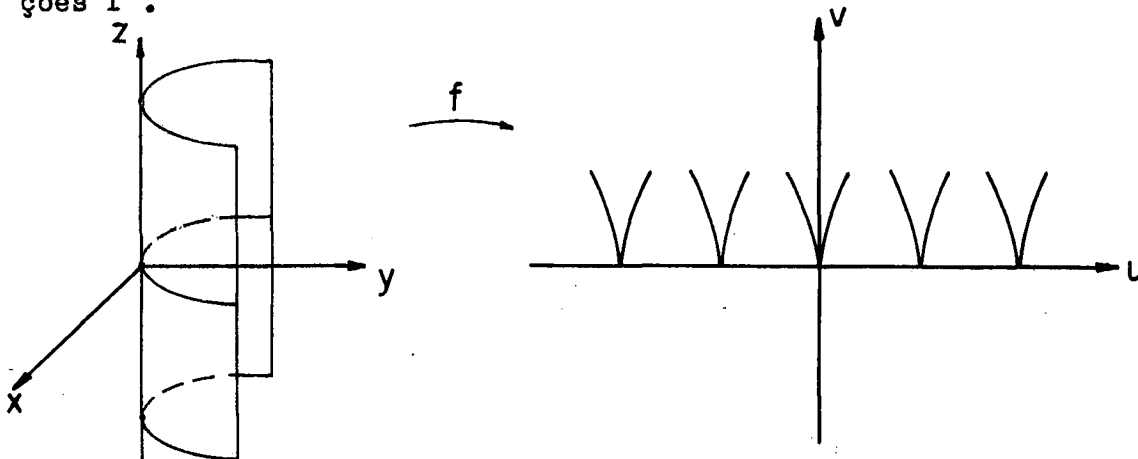
com

$$\begin{cases} u = xy - x^3 + z \\ v = y \end{cases}$$

Então o ponto  $(0,0,0)$  é do tipo II pois

$$\begin{cases} u_x(0,0,0) = u_{xx}(0,0,0) = 0 \\ u_{xy}(0,0,0) \cdot u_{xxx}(0,0,0) \neq 0 \end{cases}$$

De  $u_x = y - 3x^2$  segue que a dobra geral é a superfície cilíndrica parabólica  $y = 3x^2$ . Além disso de  $u_x(x,y,z) = u_{xx}(x,y,z) = 0$  tiramos  $x = y = 0$  ou seja o lugar onde  $f$  apresenta pontos do tipo II é o eixo dos  $z$ . É óbvio que tais pontos são cuspidais para as restrições  $f^z$ .



O eixo  $z$  é levado por  $f$  sobre o eixo  $u$  e a imagem por  $f$  da dobra geral que tem por equação  $(u - z)^2 = \frac{2^2}{3^3} v^3$  será uma família de cúspides cujos pontos de cúspide ocorrem nos pontos  $(z, 0) = (u, v)$ . Observemos também que as tangentes nos pontos de cúspide são perpendiculares ao eixo  $u$ .

9.2 - No que segue iremos ver até que ponto o caso geral se assemelha ao modelo apresentado. Verificaremos que geometricamente a situação é sempre a mesma. Mostraremos que a menos de um único passo que não logramos resolver no caso geral, a forma normal da  $\mathcal{R}$ -singularidade do tipo II deve ser o modelo exposto. Diversos casos onde a redução é possível serão exibidos e no caso em que a função  $u$  de partida é analítica indicamos uma técnica de como obter as transformações necessárias.

#### §10 - Primeiras transformações

Temos

$$f \cong \begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = y \end{cases}$$

satisfazendo

$$\begin{cases} u_x(0, 0, 0) = u_{xx}(0, 0, 0) = 0 \\ u_{xy}(0, 0, 0) \cdot u_{xxx}(0, 0, 0) \neq 0 \end{cases}$$

equações de definição do tipo II.

Efetuando o par adequado  $(\psi, \phi)$  com

$$\psi \cong \text{identidade} \quad \phi \cong \begin{cases} u' = u - u_y(0, 0, 0) v \\ v' = v \end{cases}$$

obtemos abandonando as linhas

$$\begin{cases} u_x(0,0,0) = u_y(0,0,0) = u_{xx}(0,0,0) = 0 \\ u_{xy}(0,0,0) = u_{xxx}(0,0,0) \neq 0 \end{cases}$$

Desenvolvendo u por Mac-Laurin temos

$u(x,y,z) = u_z(0,0,0) z + u_1(x,y,z)$ , ord  $u_1 \geq 2$  mas  $u_z(0,0,0) \neq 0$  (ver observação 2, §5) portanto efetuando o par adequado  $(\varphi, \phi)$  com

$$\varphi = \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = u_z(0,0,0) z + u_1(0,0,z) \end{cases} \quad \phi \equiv \text{identidade}$$

obtemos abandonando as linhas

$$\begin{cases} u = u_1(x,y,z) + z \\ v = y \end{cases}$$

satisfazendo além das equações de definição mais  $(u_1)_z(0,0,z) = u_1(0,0,z) = 0$ . Mais uma vez obtemos que u dependa linearmente do parâmetro z.

§11 - Retificação da curva dos pontos de  $\mathcal{R}$ -singularidades de tipo II e de sua imagem

De

$$\begin{cases} u_x(x,y,z) = 0 \\ u_{xy}(0,0,0) \neq 0 \end{cases}$$

pelo T. F. I. podemos tirar, numa vizinhança  $\mathcal{U}_1$  da origem,  $y = \theta(x,z)$  (equação da dobra geral com  $0 = \theta(0,0)$  e  $u_x(x, \theta(x,z), z) = 0$   $(y,z) \in \mathcal{U}_1$ )

Além disso temos também

$$\begin{cases} \theta_x(0,0) = -\frac{u_{xx}(0,0,0)}{u_{xy}(0,0,0)} = 0 \\ \theta_{xx}(0,0) = -\frac{u_{xxx}(0,0,0)}{u_{xy}(0,0,0)} \neq 0 \end{cases} \quad (11.1)$$

De

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y,z) = 0 \\ u_{xxx}(0,0,0) \neq 0 \end{cases}$$

pelo T. F. I. podemos tirar  $x = \eta(y,z)$  numa vizinhança  $\mathcal{U}_2$  da origem com  $0 = \eta(0,0)$  e  $u_{xx}(\eta(y,z), y, z) = 0 \quad \forall (y,z) \in \mathcal{U}_2$ . Sejam

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = y - \theta(x,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = x - \eta(y,z) = 0 \end{cases}$$

Observemos que tais superfícies regulares se cortam transversalmente numa vizinhança da origem pois que

$$\nabla F_1 = ((F_1)_x(0,0,0), (F_1)_y(0,0,0), (F_1)_z(0,0,0)) = (0, 1, *)$$

$$\nabla F_2 = ((F_2)_x(0,0,0), (F_2)_y(0,0,0), (F_2)_z(0,0,0)) = (1, *, *)$$

são linearmente independentes. Disto segue que tal interseção é uma curva regular  $\mathcal{J}'$ , lugar dos pontos de  $\mathcal{Q}$ -singularidade do tipo

II. Do fato de

$$\begin{vmatrix} (F_1)_x(0,0,0) & (F_1)_y(0,0,0) \\ (F_2)_x(0,0,0) & (F_2)_y(0,0,0) \end{vmatrix} \neq 0$$

segue que podemos parametrizar  $\mathcal{J}'$  em termos de  $z$  obter as equações:

$$\gamma \equiv \begin{cases} x = k_1(z) \\ y = k_2(z) \end{cases}$$

satisfazendo:

$$\begin{cases} k_1(0) = k_2(0) = 0 \\ u_x(k_1(z), k_2(z), z) = u_{xx}(k_1(z), k_2(z), z) = 0 \\ u_{xy}(k_1(z), k_2(z), z) \cdot u_{xxx}(k_1(z), k_2(z), z) \neq 0 \end{cases}$$

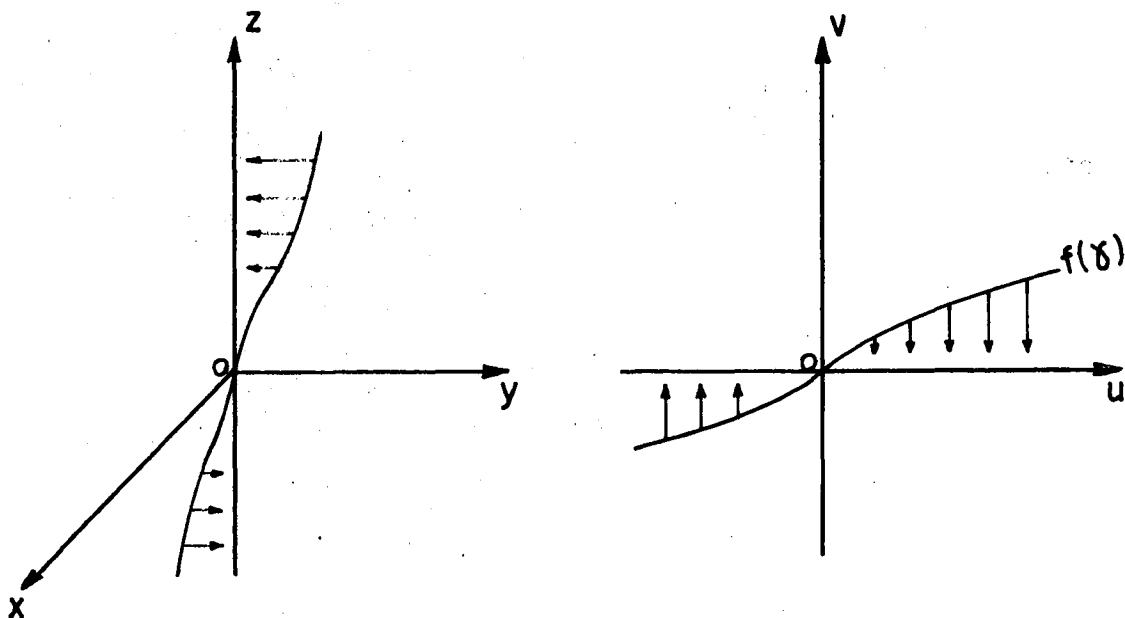
(observar que a interseção desta curva com um plano  $z = \text{constante}$  nos dá um ponto cuspidal da restrição).

Além disso temos que sobre  $\gamma^1$  valem

$$\begin{cases} \theta_x(k_1(z), z) = -\frac{u_{xx}(k_1(z), k_2(z), z)}{u_{xy}(k_1(z), k_2(z), z)} = 0 \\ \theta_{xx}(k_1(z), z) = -\frac{u_{xxx}(k_1(z), k_2(z), z)}{u_{xy}(k_1(z), k_2(z), z)} \neq 0 \end{cases} \quad (11.2)$$

As expressões acima serão de grande utilidade nos parágrafos que seguem.

Daremos agora um par adequado para o qual a curva  $\gamma^1$  será o novo eixo dos  $z$  e sua imagem o novo eixo dos  $u$ .



Com esta finalidade notemos que a imagem de  $\gamma^1$  por  $f$  é dada parametricamente por:

$$f(\gamma^1) \equiv \begin{cases} u = u_1(k_1(z), k_2(z), z) + z \\ v = k_2(z) \end{cases}$$

Como  $u_z(0,0,0) = 1$  segue que podemos tirar nas vizinhanças da origem e sobre  $f(\gamma^1)$ ,  $z = \xi(u)$  donde  $v = k_2(\xi(u)) = h(u)$  é a equação de  $f(\gamma^1)$  no plano  $u, v$ .

Efetuada então o par adequado  $(\psi, \phi)$

$$\psi \equiv \begin{cases} x' = x - k_1(z) \\ y' = y - k_2[\xi(u(x,y,z))] \\ z' = z \end{cases} \quad \phi \equiv \begin{cases} u' = u \\ v' = v - h(u) \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{cases} u' = u_1'(x', y', z') + z' \\ v' = y' \end{cases}$$

que além das equações de definição do tipo II satisfaz:

$$\begin{cases} u'_{x'}(0,0,z') = u'_{x'x'}(0,0,z') = 0 \\ u'_{x'y'}(0,0,z') \cdot u'_{x'x'x'}(0,0,z') \neq 0 \end{cases}$$

ou seja a curva dos pontos de tipo II passa a ser o eixo  $z'$  e sua imagem o eixo  $u'$ .

§12 - Anulamento de  $u'_y(0,0,z')$  - Normalização do sistema de tangentes cuspidais

Seja agora  $g(z') = u'_y(0,0,z')$  e efetuemos o par adequado  $(\psi, \phi)$  com

$$\psi \equiv \text{identidade} \quad \phi \equiv \begin{cases} u'' = u' - g(u') \cdot v' \\ v'' = v' \end{cases}$$

levando-se em conta que  $1 - g_{u'}(u') \cdot v' > 0$  para  $(u', v')$  próximo da origem (pois  $\phi$  é mudança de coordenadas) temos:

$$u''_{y'}(x', y', z') = u'_{y'}(x', y', z') - g(u'(x', y', z')) - g_{u'}(u'(x', y', z')) u'_{y'}(x', y', z') y'$$

donde

$$u''_{y'}(0,0,z') = 0$$

com isto obtemos abandonando as linhas

$$\begin{cases} u = u_1(x, y, z) + z \\ v = y \end{cases}$$

satisfazendo

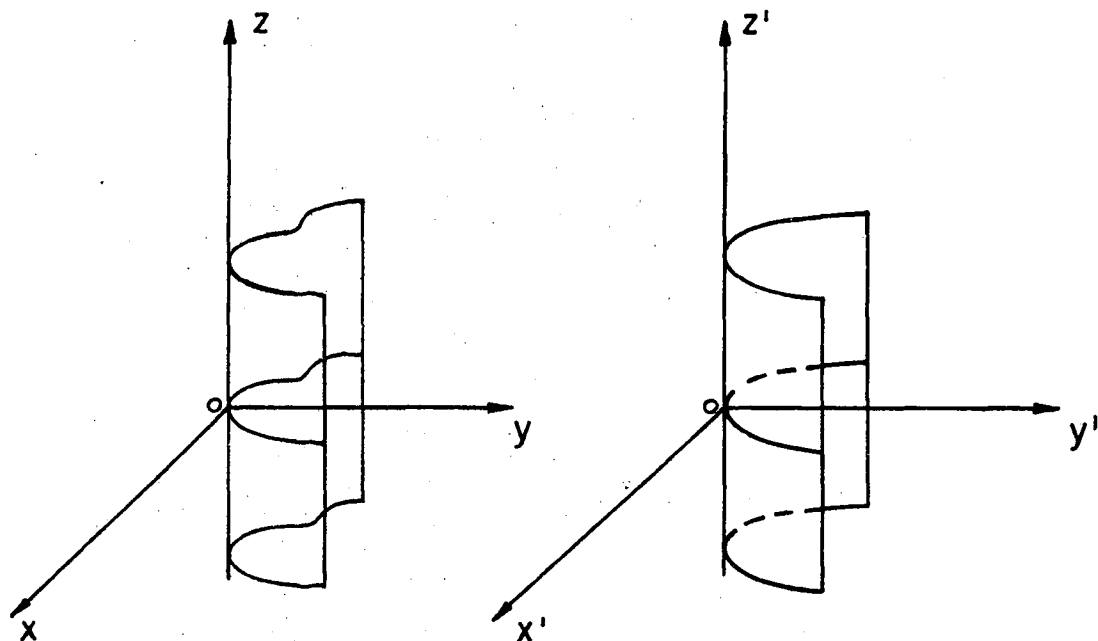
$$\begin{cases} u_{x'}(0,0,z) = u_y(0,0,z) = u_{xx}(0,0,z) = 0 \\ u_{x'y'}(0,0,z) \cdot u_{xxx}(0,0,z) \neq 0 \end{cases}$$



Veremos mais adiante que com isto obtivemos que as tangentes cuspidais na imagem são todas paralelas ao novo eixo dos  $v$ .

### §13 - Adaptação da dobra geral

Desejamos no momento transformar a superfície da dobra geral no cilindro parabólico  $y' = 3(x')^2$ .



Para tal analisemos mais detalhadamente a superfície da dobra geral. Sua equação  $y = \theta(x, z)$  - tirada das condições

$$u_x(x, y, z) = 0$$

e

$$u_{xy}(0, 0, 0) \neq 0$$

satisfaz nestas novas coordenadas (lembrar as expressões 11.1 e 11.2) a



$$\begin{cases} \theta(o, z) = 0 \\ \theta_x(o, z) = -\frac{u_{xx}(o, o, z)}{u_{xy}(o, o, z)} = 0 \\ \theta_{xx}(o, z) = -\frac{u_{xxx}(o, o, z)}{u_{xy}(o, o, z)} \neq 0 \end{cases}$$

então de [1] pág. 392 (b) segue que:

$$y = 3 x^2 D(x, z)$$

com

$$D(o, o) \neq 0 ;$$

isto sugere efetuar o par adequado  $(\psi, \phi)$  com

$$\psi \equiv \begin{cases} x' = x \left[ \frac{+}{-} D(x, y, z) \right]^{1/2} \\ y' = \frac{+}{-} y \\ z' = z \end{cases} \quad \phi \equiv \text{identidade}$$

(usando o sinal de acordo com o de  $D(o, o, o)$ ).

Nas novas coordenadas temos que a equação da dobra geral fica escrita como  $y' = 3(x')^2$ .

Abandonando as linhas obtemos:

$$\begin{cases} u = u_1(x, y, z) + z \\ v = y \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} u_x(o, o, z) = u_y(o, o, z) = u_{xx}(o, o, z) = 0 \\ u_x(x, 3 x^2, z) = 0 \\ u_{xy}(o, o, z) \cdot u_{xxx}(o, o, z) \neq 0. \end{cases}$$

§14 - Determinação da expressão do Resto

Desde que  $(u_1)_x(x, 3x^2, z) = 0$  podemos escrever

$$(u_1)_x(x, y, z) = (y - 3x^2) E(x, y, z)$$

com  $E(0, 0, 0) \neq 0$  visto  $(u_1)_{xy}(0, 0, 0) \neq 0$ . Seja  $k = E(0, 0, 0) \neq 0$  então  $(u_1)_x(x, y, z) = (y - 3x^2)[k + E'(x, y, z)]$  com  $\text{ord } E' \geq 1$  ou se ja:

$$(u_1)_x(x, y, z) = k(y - 3x^2) + (y - 3x^2) E'(x, y, z)$$

donde tiramos

$$u_1(x, y, z) = k(xy - x^3) + R_1(x, y, z)$$

com

$$(R_1)_x(x, 3x^2, z) = 0$$

então f se escreve

$$u = k(xy - x^3) + R_1(x, y, z) + z$$

$$v = y$$

efetuando o par adequado  $(\psi, \phi)$  com

$$\psi \equiv \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = \frac{z}{k} + R_1(0, 0, z) \end{cases} \quad \phi \equiv \begin{cases} u' = \frac{u}{k} \\ v' = v \end{cases}$$

obtemos abandonando as linhas

$$\begin{cases} u = xy - x^3 + R(x, y, z) + z \\ v = y \end{cases}$$

satisfazendo:

$$\begin{cases} u_x(0,0,z) = u_y(0,0,z) = u_{xx}(0,0,z) = 0 \\ u_x(x, 3x^2, z) = 0 \\ u_{xy}(0,0z) \cdot u_{xxx}(0,0z) \neq 0 \end{cases}$$

mais as condições sobre o resto

$$\begin{cases} R(0,0,z) = R_z(0,0z) = R_y(0,0,z) = 0 \\ R_x(x, 3x^2, z) = 0. \end{cases}$$

Antes de prosseguir convém aqui frizar que a dificuldade encontrada para levar o caso geral neste ponto à forma normal é que em geral  $R(x, 3x^2, z) \neq 0$ .

Seja:

$$M(x,z) = R(x, 3x^2, z)$$

então:

$$M_x(x,z) = R_x(x, 3x^2, z) + R_y(x, 3x^2, z) \cdot 6x.$$

Portanto:

$$\begin{cases} M(0,z) = 0 \\ M_x(0,z) = 0 \end{cases}$$

ou seja podemos escrever

$$M(x,z) = x^2 N(x,z)$$

Sejam  $S'$  e  $T'$  as partes : par e ímpar de  $N$  relativamente a  $x$ , isto é,

$$\begin{cases} S'(x,z) = \frac{1}{2} [ N(x,z) + N(-x,z) ] \\ T'(x,z) = \frac{1}{2} [ N(x,z) - N(-x,z) ] \end{cases}$$

De [2] tiramos que

$$\begin{cases} S'(x, z) = x^2 S_1(x^2, z) \\ T'(x, z) = x T_1(x^2, z) \end{cases}$$

donde:

$$R(x, 3x^2, z) = x^2 S_1(x^2, z) + x T_1(x^2, z) = x^2 S_1(x^2, z) + x^3 T_1(x^2, z)$$

ou seja reescrevendo convenientemente

$$R(x, 3x^2, z) = 3x^2 S(3x^2, z) + 2x^3 T(3x^2, z)$$

Definamos agora

$$A(y, z) = y S(y, z)$$

e

$$B(y, z) = T(y, z)$$

e consideremos

$$R'(x, y, z) = R(x, y, z) - A(y, z) - (xy - x^3) B(y, z)$$

segue imediatamente

$$\begin{cases} R'(x, 3x^2, z) = 0 \\ R'_x(x, 3x^2, z) = 0 \end{cases}$$

Seja  $P(x, z) = R'(x, 3x^2, z)$ .  $\therefore P(x, z) \equiv 0$  o que implica

$$\begin{cases} P_x(x, z) = 0 \\ P_z(x, z) = 0 \end{cases}$$

mas

$$P_z(x, z) = R'_x(x, 3x^2, z) + R'_y(x, 3x^2, z) \cdot 6x = 0$$

donde:

$$R'_y(x, 3x^2, z) = 0$$

Agora do fato de

$$\begin{cases} R'_x(x, 3x^2, z) = 0 \\ R'_y(x, 3x^2, z) = 0 \end{cases}$$

segue de [1] pág. 393 (h) que

$$R'(x, y, z) = (y - 3x^2)^2 C(x, y, z)$$

ou seja obtemos para o resto a forma

$$R(x, y, z) = A(y, z) + (xy - x^3) B(y, z) + (y - 3x^2)^2 C(x, y, z).$$

### §15 - Simplificação do resto

Temos chegado à expressão:

$$\begin{cases} u = (xy - x^3) [1 + B(y, z)] + A(y, z) + (y - 3x^2)^2 C(x, y, z) + z \\ v = y \end{cases}$$

Vamos agora eliminar a parcela  $(y - 3x^2)^2 C(x, y, z)$  do resto, observando que esta parcela é a parte que sobre a dobra geral se anula e que portanto não perturba a sua imagem por  $f$ . Utilizamos aqui uma transformação similar à usada por Whitney em [1].

Definamos através do T. F. I. uma função  $L = L(x, y, z)$  nas vizinhanças da origem satisfazendo

$$\left\{ 1 - 3x L(x, y, z) - (y - 3x^2) [L(x, y, z)]^2 \right\} L(x, y, z) = \frac{C(x, y, z)}{1 + B(y, z)}$$

Para tal seja:

$$F(x, y, z, L) = \left\{ 1 - 3x L - (y - 3x^2) L^2 \right\} L - \frac{C(x, y, z)}{1 + B(y, z)}$$

observando que

$$\begin{cases} F(0, 0, 0, L_0) = 0 \\ F_L(0, 0, 0, L_0) \neq 0 \end{cases} \quad \text{onde } L_0 = \frac{C(0, 0, 0)}{1 + B(0, 0)}$$

segue a existência de  $L(x,y,z)$  satisfazendo a condição exigida. Isto nos sugere o par adequado  $(\psi, \phi)$  com

$$\psi \equiv \begin{cases} x' = x + (y - 3x^2) L(x,y,z) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \phi \equiv \text{identidade}$$

Calculando

$$\begin{aligned} (x'y' - (x')^3) [1 + B(y',z')] + A(y',z') &= \{ [x + (y-3x^2)L(x,y,z)] y - \\ & [x + (y-3x^2)L(x,y,z)]^3 \} [1+B(y,z)] + A(y,z) = \{ xy - x^3 + \\ & (y-3x^2)^2 [1-3x L(x,y,z) - (y-3x^2) [L(x,y,z)]^2] L(x,y,z) \} [1+B(y,z)] + \\ & A(y,z) = (xy-x^3) [1+B(y,z)] + A(y,z) + (y-3x^2)^2 C(x,y,z) \end{aligned}$$

ou seja nas novas coordenadas  $f$  se escreve

$$\begin{cases} u' = [x'y' - (x')^3] [1 + B(y',z')] + A(y',z') + z' \\ v' = y' \end{cases}$$

abandonando as linhas e relembrando as condições a que satisfaz vem:

$$\textcircled{A} \quad \begin{cases} u = [xy - x^3] [1 + B(y,z)] + A(y,z) + z \\ v = y \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} u_x(0,0,z) = u_y(0,0,z) = u_{xx}(0,0,z) = 0 \\ u_x(x, 3x^2, z) = 0 \\ u_{xy}(0,0,z) \cdot u_{xxx}(0,0,z) \neq 0 \end{cases}$$

Se as funções  $A$  e  $B$  forem nulas chegamos à forma normal proposta.

§16 - Condição necessária e suficiente para eliminação do resto

Vamos agora observar que as tangentes cuspidais na imagem são perpendiculares ao eixo  $v = 0$ . De fato mostremos que tal acontece em cada nível  $z = z_0$ . A equação paramétrica em termos de  $x$  da cúspide é

$$\begin{cases} \tilde{u} = u(x, 3x^2, z_0) = 2x^3 [1 + B(3x^2, z_0)] + A(3x^2, z_0) + z_0 \\ \tilde{v} = 3x^2 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} \tilde{u} - z_0 = 2x^3 [1 + B(3x^2, z)] + A(3x^2, z) \\ \tilde{v} = 3x^2 \end{cases}$$

NOTA: daqui para frente o  $\sim$  sobre  $u$  ou  $v$  significa o valor destas funções sobre a dobra geral.

Calculando os limites vem:

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\tilde{v}}{\tilde{u} - z_0} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{\tilde{v}}{\tilde{u} - z_0} = -\infty$$

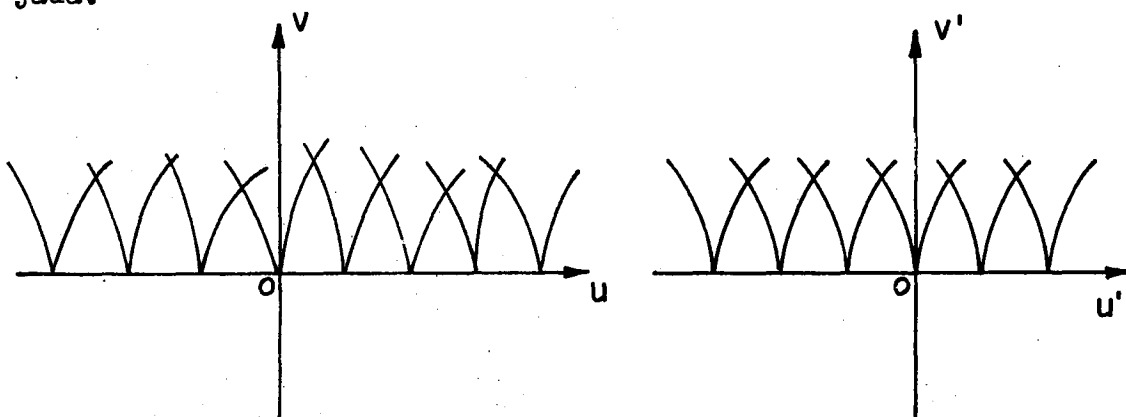
(lembrando que  $A(y, z) = y S(y, z)$  e que  $u_y(0, 0, z) = 0$  podemos em  $A(y, z)$  por um  $y^2$  em evidência donde a ordem infinitesimal de  $A(3x^2, z)$  é maior que 3), o que mostra ser a tangente perpendicular ao eixo  $v = 0$ .

Gostaríamos agora levar nossa família de cúspides na família de cúspides simétricas do modelo exposto.

Para tal precisaríamos obter um par  $(\varphi, \phi)$  adequado satisfazendo:

- a) A imagem dos pontos do tipo II permaneça como o eixo  $v' = 0$  (isto é, que o eixo  $v = 0$  seja levado no eixo  $v' = 0$ ).

- b) As tangentes na imagem dos pontos cuspidais se mantenham perpendiculares ao eixo  $v' = 0$ .
- c) Sobre a dobra geral verifique a relação  $(u' - z')^2 = \frac{2^2}{3^3} (v')^3$  o que significa que a família de cúspides estaria na posição desejada.



Vamos analisar que forma deverá ter este par adequado  $(\varphi, \phi)$ . Primeiramente seja  $\phi_1(u, v) = (u', v') = (g(u, v), h(u, v))$  e para ser mudança de coordenadas nas vizinhanças da origem devemos ter:

$$\begin{vmatrix} g_u(0,0) & g_v(0,0) \\ h_u(0,0) & h_v(0,0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Impondo que  $v = 0$  seja levado em  $v' = 0$  segue  $h(u, 0) = 0 \forall u$  ou seja  $v' = h(u, v) = v \tilde{h}(u, v)$ .

Calculando:

$$\begin{cases} h_u(u, v) = v \tilde{h}_u(u, v) \\ h_v(u, v) = \tilde{h}(u, v) + v \tilde{h}_v(u, v) \end{cases}$$

na origem teremos

$$\begin{cases} h_u(0,0) = 0 \\ h_v(0,0) = \tilde{h}(0,0) \end{cases}$$



donde  $k_2 = \tilde{h}(0,0) \neq 0$  e portanto podemos escrever

$$v' = v (k_2 + H_0(u,v))$$

com

$$H_0(0,0) = 0$$

Do fato de ser  $h_u(0,0) = 0$  segue que  $g_u(0,0) \neq 0$  donde de de senvolvendo  $u'$  por Mac-Laurin vem

$$u' = g(0,0) + g_u(0,0) u + g_v(0,0) v + G_1(u,v)$$

com ord  $G_1 \geq 2$ .

Mas  $g(0,0) = 0$  e impondo que as tangentes na imagem dos pontos cuspidais sejam levadas em perpendiculares ao eixo  $v' = 0$ , se gue que devemos impor  $g_v(u,0) = 0$  ou seja que  $u' = k_1 u + G_1(u,v)$  on de  $k_1 = g_u(0,0) \neq 0$ .

Com isto obtemos que a transformação  $\phi_1$  terá a forma:

$$\begin{cases} u' = k_1 u + G_1(u,v) \\ v' = v [(k_2 + H_0(u,v))] \end{cases}$$

ou equivalente se efetuarmos o par adequado  $(\psi, \phi_2)$  com

$$\psi \equiv \text{identidade} \quad \phi_2 \equiv \begin{cases} u'' = \frac{u'}{k_1} \\ v'' = \frac{v'}{k_2} \end{cases}$$

terá a forma

(B) 
$$\begin{cases} u'' = u + G(u,v) \\ v'' = v [(1 + H_1(u,v))] \end{cases}$$



Observemos agora que a existência de uma  $H_1(u,v)$  nas condições do nosso problema implica na existência de uma  $H(u,v)$  dife-

renciável ( $C^\infty$ ) satisfazendo a condição

$$\left[1 + H_1(u, v)\right]^3 = \left[1 + H(u, v)\right]^2$$

para a qual a transformação  $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$  passa a ser escrita como:

$$\textcircled{C} \quad \begin{cases} u'' = u + G(u, v) \\ v'' = v \left[1 + H(u, v)\right]^{2/3} \end{cases}$$

que será a transformação desejada na meta.

Reciprocamente se existe a transformação  $\phi$  acima nas condições impostas segue a existência de uma  $H_1(u, v)$  diferenciável ( $C^\infty$ ) satisfazendo

$$\left[1 + H(u, v)\right]^2 = \left[1 + H_1(u, v)\right]^3$$

para a qual a transformação  $\phi$  fica escrita como  $\textcircled{B}$ .

Por razões de simplificação de cálculos iremos preferir trabalhar na forma  $\textcircled{C}$ , a qual escrevemos daqui para frente abandonando uma das linhas de  $u$  e  $v$ .

No início do estudo da singularidade do tipo II fizemos transformações de coordenadas de modo que os pontos do tipo II (que são da forma  $(0, 0, z)$ ) fossem levados linearmente sobre o eixo dos  $u$  ( $v = 0$ ) e isto se traduziu pela equação  $u(0, 0, z) = z$ .

Agora se existir uma transformação  $\phi$  de coordenadas que resolve nosso problema não está dito que  $u'(0, 0, z) = z + G(u(0, 0, z), 0) = z + G(z, 0)$  seja igual a  $z$  pois podemos ter  $G(z, 0) \neq 0$ . Então se desejamos que a propriedade acima ainda se conserve devemos efetuar o par adequado  $(\psi, \phi)$  com

$$\varphi \equiv \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z + G(z, 0) \end{cases} \quad \phi = \phi_2 \circ \phi_1$$

e então teremos  $u'(0, 0, z') = z + G(z, 0) = z'$  mantendo a citada propriedade.

Proposição 16.1 - Uma condição necessária e suficiente para que exista a transformação  $\phi$  nas condições impostas, isto é,  $\phi$  dada por (C) é tal que sobre a dobra geral se verifique

$$(\tilde{u}' - z')^2 = \frac{2^2}{3^3} (\tilde{v}')^3$$

é que existam  $G(u, v)$  e  $H(u, v)$  satisfazendo

$$G(\tilde{u}, \tilde{v}) - G(z, 0) = -A(\tilde{v}, z) + 2x^3 \left[ (H(\tilde{u}, \tilde{v}) - B(\tilde{v}, z)) \right]$$

Demonstração:

Condição necessária:

Temos:

$$\begin{cases} u = (xy - x^3)(1 + B(y, z)) + A(y, z) + z \\ v = y \end{cases}$$

logo

$$u(x, y, z) - z - A(y, z) = (xy - x^3)(1 + B(y, z))$$

a qual sobre a dobra geral se escreve

$$\tilde{u} - z - A(\tilde{v}, z) = 2x^3(1 + B(\tilde{v}, z))$$

ou equivalentemente

$$\left[ \tilde{u} - z - A(\tilde{v}, z) \right]^2 = \frac{2^2}{3^3} (\tilde{v})^3 \left[ 1 + B(\tilde{v}, z) \right]^2$$

Multiplicando membro a membro esta igualdade por



$$\frac{[1 + H(\tilde{u}, \tilde{v})]^2}{[1 + B(\tilde{v}, z)]^2}$$

obtemos

$$\left\{ [\tilde{u}-z-A(\tilde{v}, z)] \frac{1+H(\tilde{u}, \tilde{v})}{1+B(\tilde{v}, z)} \right\}^2 = \frac{2^2}{3^3} (\tilde{v})^3 [1+H(\tilde{u}, \tilde{v})]^2 = \frac{2^2}{3^3} (\tilde{v}')^3$$

então

$$\tilde{u}'-z' = [\tilde{u}-z-A(\tilde{v}, z)] \frac{1+H(\tilde{u}, \tilde{v})}{1+B(\tilde{v}, z)} = [\tilde{u}-z-A(\tilde{v}, z)] \left[ 1 + \frac{H(\tilde{u}, \tilde{v})-B(\tilde{v}, z)}{1+B(\tilde{v}, z)} \right]$$

logo

$$\begin{aligned} \tilde{u}'-z' &= \tilde{u}-z+G(\tilde{u}, \tilde{v})-G(z, 0) = \tilde{u}-z-A(\tilde{v}, z) + [\tilde{u}-z-A(\tilde{v}-z)] \frac{H(\tilde{u}, \tilde{v})-B(\tilde{v}, z)}{1+B(\tilde{v}, z)} = \\ &= -A(\tilde{v}, z) + \frac{H(\tilde{u}, \tilde{v})-B(\tilde{v}, z)}{1+B(\tilde{v}, z)} [2x^3(1+B(\tilde{v}, z))] = -A(\tilde{v}, z) + \\ &+ 2x^3 [H(\tilde{u}, \tilde{v}) - B(\tilde{v}, z)] \end{aligned}$$

Isto conclui a condição necessária.

Condição suficiente:

Suponhamos que existam  $G(u, v)$  e  $H(u, v)$  tais que sobre a dobra geral  $y = 3x^2$  satisfaz a condição

$$G(\tilde{u}, \tilde{v}) - G(z, 0) = -A(\tilde{v}, z) + 2x^3 [H(\tilde{u}, \tilde{v})-B(\tilde{v}, z)]$$

então fazendo

$$\begin{cases} u' = u + G(u, v) \\ v' = v [1 + H(u, v)]^{2/3} \end{cases}$$

e também

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z + G(z, 0) \end{cases}$$

segue que

$$(\tilde{u}' - z')^2 = \frac{2^2}{3^3} (\tilde{v}')^3$$

De fato:

$$\begin{aligned} \tilde{u}' - z &= \tilde{u} + G(\tilde{u}, \tilde{v}) - z - G(z, 0) = \\ &= \tilde{u} - z + \left\{ -A(\tilde{v}, z) + 2x^3 [H(\tilde{u}, \tilde{v}) - B(\tilde{v}, z)] \right\} = \\ &= \tilde{u} - z - A(\tilde{v}, z) + 2x^3 \left[ \frac{H(\tilde{u}, \tilde{v}) - B(\tilde{v}, z)}{1 + B(\tilde{v}, z)} \right] [1 + B(\tilde{v}, z)] = \\ &= 2x^3 [1 + B(\tilde{v}, z)] + 2x^3 \left[ \frac{1 + H(\tilde{u}, \tilde{v})}{1 + B(\tilde{v}, z)} - 1 \right] [1 + B(\tilde{v}, z)] = \\ &= 2x^3 [1 + H(\tilde{u}, \tilde{v})] \end{aligned}$$

Portanto:

$$(\tilde{u}' - z')^2 = \frac{2^2}{3^3} (\tilde{v}')^3$$

c.q.d.

### §17 - Últimas transformações

Supondo a existência das funções  $G(u, v)$  e  $H(u, v)$  de modo que a transformação

$$\begin{cases} u' = u + G(u, v) \\ v' = v [1 + H(u, v)]^{2/3} \end{cases}$$

satisfaça às condições a), b) e c) do § anterior segue que efetuando o par adequado  $(\varphi, \phi)$  com

$$\varphi \equiv \begin{cases} x' = x \left\{ 1 + H[u(x, y, z), y] \right\}^{1/3} \\ y' = y \left\{ 1 + H[u(x, y, z), y] \right\}^{2/3} \\ z' = z \end{cases} \quad \phi \equiv \begin{cases} u' = u + G(u, v) \\ v' = v (1 + H(u, v))^{2/3} \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{cases} u' = u'_1(x', y', z') + z' \\ v' = y' \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} u'_{x'}(0, 0, z') = u'_{y'}(0, 0, z') = u'_{x'x'}(0, 0, z') = 0 \\ u'_{x'y'}(0, 0, z') \cdot u'_{x'x'x'}(0, 0, z') \neq 0 \end{cases}$$

Observemos ainda que o eixo  $z$  foi levado sobre o eixo  $z'$  e que a dobra geral  $y = 3x^2$  foi levada sobre  $y' = 3(x')^2$ .

Usando raciocínio idêntico ao do §14 temos

$$u'_{x'}(x', y', z') = (y' - 3x'^2) W(x', y', z')$$

com

$$W(0, 0, 0) \neq 0$$

e portanto podemos escrever

$$\begin{cases} u' = x'y' - x'^3 + R(x', y', z') + z' \\ v' = y' \end{cases}$$

com

$$R'_{x'}(x', 3x'^2, z') = 0$$

Mas

$$\tilde{u}' = 2x'^3 + R(x', 3x'^2, z') + z'$$

Considerando a expressão

$$\tilde{u}' - 2x'^3 - z' = \tilde{u} - z + G(\tilde{u}, \tilde{v}) - G(z, 0) - 2x^3 [1 + H(\tilde{u}, \tilde{v})]$$

da proposição 16.1 temos:

$$2x^3 H(\tilde{u}, \tilde{v}) = G(\tilde{u}, \tilde{v}) - G(z, 0) + R(x, 3x^2, z)$$

logo

$$\begin{aligned} \tilde{u}' - 2x'^3 - z' &= 2x'^3 + R(x, 3x^2, z) + z + G(\tilde{u}, \tilde{v}) - z - G(z, 0) - \\ &\left\{ 2x'^3 + R(x, 3x^2, z) + G(\tilde{u}, \tilde{v}) - G(z, 0) \right\} = 0 \end{aligned}$$

donde segue

$$R'(x', 3x'^2, z') = 0$$

e disto como já vimos decorre  $R'_{y'}(x', 3x'^2, z') = 0$

Outra vez usando [1] pág. 392 temos

$$R'(x', y', z') = (y' - 3x'^2)^2 C_1(x, y, z)$$

abandonando as linhas obtemos

$$\begin{cases} u = xy - x^3 + (y - 3x^2)^2 C_1(x, y, z) \\ v = y \end{cases}$$

Usando outra vez o raciocínio do §15 só que neste caso  $A = B = 0$  te remos finalmente levado à forma normal

$$\begin{cases} u = xy - x^3 + z \\ v = y \end{cases}$$

### §18 - Condição suficiente para eliminação do resto

Proposição 18.1 - Uma condição suficiente para que exista a transformação  $\phi$  nas condições da proposição 16.1 é que exista uma aplicação  $\lambda = \lambda(u, v, z)$  diferenciável com  $\lambda(0, 0, 0) = 0$  e tal que:

$$1) \quad B(v, z) + \lambda(u, v, z)(1 + B(v, z)) = H(u, v, z)$$

$$2) \quad \lambda(u, v, z)(u - z - A(v, z)) - A(v, z) = G(u, v, z)$$

independam de  $z$ .

Demonstração:

Com efeito, façamos  $\phi$  como sendo a transformação

$$\begin{cases} u' = u + G(u,v) \\ v' = v (1 + H(u,v))^{2/3} \end{cases}$$

Por outro lado lembremos que

$$\begin{cases} u = (xy - x^3)(1 + B(y,z)) + A(y,z) + z \\ v = y \end{cases}$$

donde

$$u - z - A(y,z) = (xy - x^3)(1 + B(y,z))$$

multiplicando membro a membro por  $1 + \lambda(u,v,z)$  temos:

$$(1 + \lambda(u,v,z))(u - z - A(y,z)) = (xy - x^3)(1+B(y,z))(1 + \lambda(u,v,z))$$

em particular sobre a dobra geral obtemos

$$\tilde{u} - z + G(\tilde{u}, \tilde{v}) = 2 x^3 (1 + H(\tilde{u}, \tilde{v}))$$

ou seja.

$$(\tilde{u} - z + G(\tilde{u}, \tilde{v}))^2 = \frac{2^2}{3^3} v^3 (1 + H(\tilde{u}, \tilde{v}))^2$$

portanto

$$(u' - z)^2 = \frac{2^2}{3^3} (v')^3$$

c.q.d.

Proposição 18.2 - Uma condição necessária e suficiente para que exista  $\lambda = \lambda(u,v,z)$  nas condições da proposição 18.1 é que  $A(y,z)$  e  $B(y,z)$  satisfaçam à equação diferencial:

$$2 B_z(y,z) = \frac{[1+B(y,z)] \{ [1+B(y,z)] A_{zz}(y,z) + [u-z-A(y,z)] B_{zz}(y,z) \}}{[u-z-A(y,z)] B_z(y,z) + [1+A_z(y,z)][1+B(y,z)]}$$



Demonstração:

Por simplicidade denotaremos por

$$\lambda = \lambda(u, v, z), \quad A = A(v, z), \quad B = B(v, z), \quad G = G(u, v, z)$$

e

$$H = H(u, v, z)$$

Se  $\lambda$  satisfaz às condições da proposição 18.1 segue derivando  $G$  e  $H$  relativamente a  $z$  que:

$$\textcircled{\text{I}} \quad G_z = 0 = \lambda_z(u-z-A) - \lambda(1 + A_z) - A_z$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad H_z = 0 = B_z(1 + \lambda) + (1 + B)\lambda_z$$

de  $\textcircled{\text{II}}$  obtemos

$$\lambda_z = - \frac{(1 + \lambda) B_z}{1 + B}$$

substituindo em  $\textcircled{\text{I}}$  vem

$$\textcircled{\text{III}} \quad \lambda = - \frac{(1 + B) A_z + (u-z-A) B_z}{(u-z-A) B_z + (1 + A_z)(1 + B)}$$

ou seja

$$\textcircled{\text{III}'} \quad 1 + \lambda = \frac{1 + B}{(u-z-A) B_z + (1 + A_z)(1 + B)}$$

que substituída em  $\textcircled{\text{II}}$  nos dá

$$\textcircled{\text{IV}} \quad \lambda_z = - \frac{B_z}{(u-z-A) B_z + (1 + A_z)(1 + B)}$$

Por outro lado derivando  $\textcircled{\text{III}'}$  temos

$$\textcircled{\text{V}} \quad \lambda_z = \frac{(u-z-A) B_z^2 + (1 + A_z)(1 + B) B_z - (1 + B)^2 A_{zz} - (1 + B)(u-z-A) B_{zz}}{((u-z-A) B_z + (1 + A_z)(1 + B))^2}$$

comparando  $\textcircled{\text{IV}}$  e  $\textcircled{\text{V}}$  temos

$$2 B_z = \frac{(1 + B)((1 + B) A_{zz} + (u-z-A) B_{zz})}{(u-z-A) B_z + (1 + A_z)(1 + B)}$$

que é a equação diferencial de compatibilidade a que devem satisfazer as funções  $A(v, z)$  e  $B(v, z)$ .

Inversamente, sejam  $A$  e  $B$  duas funções satisfazendo a equação diferencial. Definamos a aplicação  $\lambda$  por:

$$\lambda = \frac{1 + B}{(u-z-A) B_z + (1 + A_z) (1 + B)} - 1$$

Sejam:

$$\bar{H}(u, v, z) = B + \lambda(1 + B)$$

$$\bar{G}(u, v, z) = \lambda(u-z-A) - A$$

Vamos mostrar que  $\bar{H}$  e  $\bar{G}$  não dependem de  $z$ . De fato, reescrevendo temos:

$$\bar{H} = \frac{(1 + B)^2}{(u-z-A) B_z + (1 + A_z) (1 + B)} - 1$$

e

$$\bar{G} = \frac{(u-z-A) (1 + B)}{(u-z-A) B_z + (1 + A_z) (1 + B)} - (u-z)$$

Por simplicidade denotemos por  $N$  a expressão:

$$N = (u-z-A) B_z + (1 + A_z) (1 + B)$$

Calculando agora as derivadas de  $\bar{H}$  e  $\bar{G}$  relativamente a  $z$  obtemos:

$$\bar{H}_z = \frac{2 B_z (1 + B) N - (1 + B)^2 ((1 + B) A_{zz} + (u-z-A) B_{zz})}{N^2}$$

Reescrevendo a equação diferencial temos:

$$(1 + B) ((1 + B) A_{zz} + (u-z-A) B_{zz}) = 2 B_z N$$

que levada na expressão de  $\bar{H}_z$  nos dá

$$\bar{H}_z = 0$$

Analogamente temos:

$$\overline{G}_z = \frac{N((u-z-A) B_z - (1+A_z)(1+B)) - (u-z-A)(1+B)((u-z-A)B_{zz} + (1+B)A_{zz})}{N^2} + 1$$

levando em conta a equação diferencial temos:

$$\overline{G}_z = \frac{(u-z-A) B_z N - (1 + A_z)(1 + B) N - 2(u-z-A) B_z N}{N^2} + 1$$

donde

$$\overline{G}_z = 0$$

c.q.d.

OBSERVAÇÃO: Como aplicação deste processo tiramos por exemplo que:

Se A e B são da forma:  $B = B_1(y)$  e  $A = A_0(y) + z.A_1(y)$  eles satisfazem à equação diferencial e portanto podemos eliminá-los através da aplicação  $\lambda$  acima descrita.

§19 - Estudo das transformações quando a aplicação u é analítica

Desejamos mostrar aqui que se de partida a aplicação u for suposta analítica então podemos determinar passo a passo os coeficientes do desenvolvimento de Mac-Laurin das aplicações  $G(u,v)$  e  $H(u,v)$ .

Sejam tais desenvolvimentos escritos como:

$$\begin{aligned} G(u,v) = & G_{0,0} + G_{1,0} v + G_{0,1} u + G_{2,0} v^2 + G_{1,1} v u + G_{0,2} u^2 + \\ & + G_{3,0} v^3 + G_{2,1} v^2 u + G_{1,2} v u^2 + G_{0,3} v^3 + G_{4,0} v^4 + \dots + \\ & + G_{i,j} v^i u^j + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(u,v) = & H_{0,0} + H_{1,0} v + H_{0,1} u + H_{2,0} v^2 + H_{1,1} v u + H_{0,2} u^2 + \\
 & + H_{3,0} v^3 + H_{2,1} v^2 u + H_{1,2} v u^2 + H_{0,3} v^3 + \dots + \\
 & + H_{1,j} v^1 u^j + \dots
 \end{aligned}$$

A razão pela qual usamos nos coeficientes o primeiro índice relacionado com  $v$  e o segundo com  $u$  é que sobre a dobra  $v$  é do segundo grau e  $u$  inicia com o terceiro grau de  $x$ .

De acordo com a proposição 16.1 devemos ter:

$$G(\tilde{u}, \tilde{v}) - G(z, 0) = 2 x^3 (H(\tilde{u}, \tilde{v}) - B(\tilde{v}, z)) - A(\tilde{v}, z)$$

Num desenvolvimento qualquer em termos de  $x$  e  $z$  vamos dar aos termos  $x^\alpha \cdot z^\beta$  o peso  $\alpha + 3\beta$ .

Olhando agora para:

$$\tilde{u} = 2 x^3 (1 + B(3 x^2, z)) + A(3 x^2, z) + z$$

e lembrando que em  $A(y, z)$  podíamos por um  $y^2$  em evidência (ver pág.

) segue que os únicos termos que possuem peso 3 são  $x^3$  e  $z$  os demais terão peso superior a 3. Então uma potência de  $\tilde{u}$ , isto é,  $\tilde{u}^n$  se decompõe:

$$\tilde{u}^n = (2 x^3 + z)^n + P(x, z)$$

onde a primeira parcela contém todos os termos de peso  $3n$  e em  $P(x, z)$  estão todos os demais termos todos com peso superior a  $3n$ .

Por outro lado o único termo de  $\tilde{v}^m$  tem peso  $2m$ .

Fazendo agora a hipótese suplementar que  $G(u, 0) = 0$  ou seja  $G_{0,p} = 0 \forall p$  podemos obter sucessivamente as restantes incógnitas pelo método dos coeficientes a determinar.

Lema 19.1 - O termo  $x^n z^p$  determina a incógnita

a)  $G_{\frac{n}{2}, p}$  se  $n$  é par

b)  $H_{\frac{n-3}{2}, p}$  se  $n$  é ímpar

para demonstrar o lema acima estabelecemos a seguinte ordem entre pares de números naturais

$$(n, p) \leq (n', p') \Leftrightarrow \begin{cases} n + 3p < n' + 3p' \\ \text{ou} \\ \begin{cases} n + 3p = n' + 3p' \\ e \\ n \leq n' \end{cases} \end{cases}$$

Com esta ordem estabelecida a qual seguiremos na resolução das equações vamos mostrar que não podem comparecer na equação  $x^n z^p$  incógnitas:

$$G_{i,j} \text{ com } \begin{cases} 2i + 3j > n + 3p \\ \text{ou} \\ \begin{cases} 2i + 3j = n + 3p \\ 2i > n \end{cases} \end{cases}$$

nem

$$H_{l,k} \text{ com } \begin{cases} 2l + 3 + 3k > n + 3p \\ \text{ou} \\ \begin{cases} 2l + 3 + 3k = n + 3p \\ e \\ 2l + 3 > n \end{cases} \end{cases}$$

De fato, se

$G_{i,j}$  coeficiente de  $\tilde{v}^i \tilde{u}^j$  comparece na equação  $x^n z^p$  en-



tão  $2i \leq n$  pois  $\tilde{v}^i$  contribui com peso  $2i$ . Se o termo em questão  $x^\alpha z^{3j-\alpha}$  tiver peso  $3j$  segue que  $2i + 3j = n + 3p$  ou seja estará na equação  $x^n z^p$  caso  $2i = n$  e então esta é a nossa incógnita ou então comparecerá posteriormente à sua determinação. Agora se o peso for superior a  $3j$  portanto  $x^{3\alpha+\delta} z^{j-\alpha+\epsilon}$  segue que

$$x^n z^p = x^{2i} x^{3\alpha+\delta} z^{j-\alpha+\epsilon}$$

ou seja

$$\begin{cases} n = 2i + 3\alpha + \delta \\ p = j - \alpha + \epsilon \end{cases} \Rightarrow n + 3p = 2i + 3j + \delta + 3\epsilon$$

donde  $n + 3p > 2i + 3j$  logo a equação é posterior à de sua determinação. Em outras palavras  $G_{i,j}$  só intervém em equações posteriores à equação de sua determinação.

Vejamos agora  $H_{l,k}$ . Suponhamos que  $H_{l,k}$  compareça na equação  $x^n z^p$ , mas  $H_{l,k}$  é coeficiente de  $x^3 \tilde{v}^l \tilde{u}^k$  portanto  $2l + 3 \leq n$  pois  $\tilde{v}^l$  contribui com um termo de peso  $2l$ . Com isto em  $\tilde{u}^k$  se o termo em questão tiver peso  $3k$  segue que  $2l + 3 + 3k = n + 3p$  e então está na sua equação de determinação se  $2l + 3 = n$  ou então será posterior a ela. Agora se o peso é superior a  $3k$  portanto  $x^{3\alpha+\delta} z^{k-\alpha+\epsilon}$  então devemos ter  $n + p = 3k + \epsilon + 3\delta + 2l + 3$  e portanto  $2l + 3 + 3k < n + p$ . Logo a equação é posterior à de sua determinação. Outra vez chegamos a conclusão de que  $H_{l,k}$  só intervém nas equações posteriores à de sua determinação.

Com isto fica demonstrado que podemos passo a passo determinar as constantes  $G_{i,j}$  e  $H_{l,k}$  obtendo os desenvolvimentos desejados. Observamos que  $G_{i,j}$  comparece na equação de sua determinação com coeficiente  $3^i$  e que  $H_{l,k}$  comparece na sua equação de determinação com coeficiente  $2 \cdot 3^l$ .

Como aplicação deste método citamos o exemplo em que a aplicação  $f$  é da forma

$$\begin{cases} u = (xy - x^3)(1 + z) + z \\ v = y \end{cases}$$

para a qual determinamos o desenvolvimento de Mac-Laurin obtendo através da convergência das séries expressões para  $G$  e  $H$ , a partir das quais chegamos à transformação

$$\begin{cases} u' = u + \frac{\frac{2^2}{3^3} (1 + u) v^3}{1 - \frac{2^2}{3^3} v^3} \\ v' = v \left[ 1 + \frac{u + \frac{2^2}{3^3} v^3}{1 - \frac{2^2}{3^3} v^3} \right]^{2/3} \end{cases}$$

que seria muito difícil de intuir. Os cálculos deste exemplo deixam de constar deste trabalho pelas razões óbvias.

Observamos que sendo  $B = z$  e  $A = 0$  não está satisfeita a equação diferencial de compatibilidade da proposição 18.2 e portanto não poderia ser reduzido à forma normal pelo método daquele parágrafo.

#### §20 - Uma descrição parcial das transformações no semi-plano $v > 0$

Para pontos da dobra geral temos

$$\begin{cases} u = u(x, 3x^2, z) = 2x^3 + z + R(x, 3x^2, z) \\ v = 3x^2 \end{cases}$$

denotemos por  $M(x, z) = R(x, 3x^2, z)$ .

Para  $x > 0$ , seja  $F(x, z, u) = u - 2x^3 - z - M(x, z)$  a qual para pontos próximos da origem tem-se  $F_z(x, z, u) \neq 0$  ou seja podemos obter pelo T. F. I.

$$z_+ = \theta_+(x, u)$$

satisfazendo a  $F(x, \theta_+(x, u), u) = 0 \quad \forall (x, u)$  numa conveniente vizinhança.

Analogamente substituindo  $x$  por  $-x$  temos

$$F_-(x, z, u) = F(-x, z, u) = u + 2x^3 - z - M(-x, z)$$

e novamente pelo T. F. I. temos

$$z_- = \theta_-(x, u)$$

satisfazendo

$$F_-(x, \theta_-(x, u), u) = 0 \quad \forall (x, u)$$

numa conveniente vizinhança.

Observemos também que  $\theta_+$  e  $\theta_-$  são de classe  $C^\infty$  para  $x \neq 0$ .

Considerando um ponto  $(u_0, v_0)$  próximo da origem com  $v_0 > 0$  e tal que em

$$(u_0, \sqrt{\frac{v_0}{3}})$$

as funções  $\theta_+$  e  $\theta_-$  estejam definidas.

Como  $v_0 > 0$  segue que  $\sqrt{\frac{v}{3}}$  é de classe  $C^\infty$  numa vizinhança  $v_0$  donde

$$\left\{ \begin{array}{l} z_+ = \theta_+ \left( \sqrt{\frac{v}{3}}, u \right) \\ z_- = \theta_- \left( \sqrt{\frac{v}{3}}, u \right) \end{array} \right. \quad \text{são de classe } C^\infty$$

Suponhamos agora que exista a transformação  $\phi$ . Então para



todos os pontos da dobra geral vale:

$$M(x, z) + G(\tilde{u}, \tilde{v}) = 2x^3 H(\tilde{u}, \tilde{v})$$

como todos os pontos  $(u, v)$  com  $v > 0$  próximos da origem são imagens da dobra geral temos:

$$M\left(\sqrt{\frac{v}{3}}, \theta_+\left(\sqrt{\frac{v}{3}}, u\right)\right) + G(u, v) = 2 \left(\sqrt{\frac{v}{3}}\right)^3 H(u, v)$$

e também

$$M\left(-\sqrt{\frac{v}{3}}, \theta_-\left(\sqrt{\frac{v}{3}}, u\right)\right) + G(u, v) = -2 \left(\sqrt{\frac{v}{3}}\right)^3 H(u, v)$$

Somando-se membro a membro obtemos:

$$G(u, v) = -\frac{1}{2} \left[ M\left(\sqrt{\frac{v}{3}}, \theta_+\left(\sqrt{\frac{v}{3}}, u\right)\right) + M\left(-\sqrt{\frac{v}{3}}, \theta_-\left(\sqrt{\frac{v}{3}}, u\right)\right) \right]$$

e subtraindo-se membro a membro teremos

$$H(u, v) = \frac{1}{4\left(\sqrt{\frac{v}{3}}\right)^3} \left[ M\left(\sqrt{\frac{v}{3}}, \theta_+\left(\sqrt{\frac{v}{3}}, u\right)\right) - M\left(-\sqrt{\frac{v}{3}}, \theta_-\left(\sqrt{\frac{v}{3}}, u\right)\right) \right]$$

expressões que nos fornecem  $G$  e  $H$  no semi-plano  $v > 0$ .

Se  $G$  e  $H$  se estendem para o eixo dos  $u$  e para o semi-plano  $v < 0$ , diferenciavelmente numa vizinhança da origem, teríamos resolvido o problema da forma normal, o que será alvo de uma análise futura.

#### OBSERVAÇÃO:

Considerando o exemplo do parágrafo 19 ou seja

$$\begin{cases} u = (xy - x^3)(1 + z) + z \\ v = y \end{cases}$$

teremos sobre a dobra geral

$$u = 2x^3 + 2x^3 z + z \quad \text{com} \quad M(x, z) = 2x^3 z$$

então

$$\left\{ \begin{array}{l} z_+ = \theta_+(x, u) = \frac{u - 2x^3}{1 + 2x^3} \\ z_- = \theta_-(x, u) = \frac{u + 2x^3}{1 - 2x^3} \end{array} \right.$$

que substituídas nas expressões de G e H dadas acima nos dão

$$\left\{ \begin{array}{l} G(u, v) = \frac{2^2}{3^3} v^3 \frac{1 + u}{1 - \frac{2^2}{3^3} v^3} \\ H(u, v) = \frac{\frac{2^2}{3^3} v^3 + u}{1 - \frac{2^2}{3^3} v^3} \end{array} \right.$$

resultados a que já havíamos chegado no parágrafo anterior.

As diferenças que se observam nos dois métodos são as seguintes: a deste parágrafo somente dá informações sobre o semi-plano superior enquanto no outro obtemos a hipótese da convergência um resultado válido em toda uma vizinhança da origem. Porém aqui só necessitamos a diferenciabilidade e não a analiticidade.

PARTE C

Descrições geométricas

§21 -  $\mathcal{Q}$  - singularidades do tipo III

De acordo com a definição 5.3 temos que  $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  possui no ponto  $0 \in V$  uma  $\mathcal{Q}$ -singularidade do tipo III se

$$\begin{cases} u_x(0,0,0) = u_{xx}(0,0,0) = u_{xy}(0,0,0) = 0 \\ u_{xz}(0,0,0) \begin{vmatrix} u_{xxx}(0,0,0) & u_{xxy}(0,0,0) \\ u_{xxy}(0,0,0) & u_{xyy}(0,0,0) \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases}$$

Uma rápida análise nos mostra que existem ao menos dois modelos distintos para o tipo III a saber:

III<sub>a</sub>) Se

$$\begin{vmatrix} u_{xxx}(0,0,0) & u_{xxy}(0,0,0) \\ u_{xxy}(0,0,0) & u_{xyy}(0,0,0) \end{vmatrix} > 0$$

III<sub>b</sub>) se

$$\begin{vmatrix} u_{xxx}(0,0,0) & u_{xxy}(0,0,0) \\ u_{xxy}(0,0,0) & u_{xyy}(0,0,0) \end{vmatrix} < 0$$

Vamos estudar em detalhes estes modelos.

Modelo para o ponto de  $\mathcal{Q}$  - singularidade do tipo III<sub>a</sub>

Seja  $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x,y,z) = (u,v)$  com

$$\begin{cases} u = \frac{x^3}{3} + xy^2 - xz + z \\ v = y \end{cases}$$

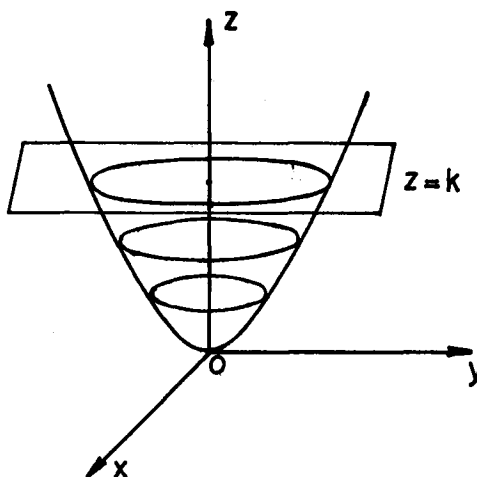
então temos:

$$\begin{cases} u_x(0,0,0) = u_{xx}(0,0,0) = u_{xy}(0,0,0) = 0 \\ u_{xz}(0,0,0) = -1 \\ \begin{vmatrix} u_{xxx}(0,0,0) & u_{xxy}(0,0,0) \\ u_{xxy}(0,0,0) & u_{xyy}(0,0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0 \end{cases}$$

a dobra geral

$$u_x = x^2 + y^2 - z = 0$$

é um parabolóide elíptico onde a intersecção com cada plano  $z = k > 0$  (constante) é uma circunferência de centro  $(0,0,k)$  e raio  $k$ .



Vamos agora olhar para a imagem por  $f$  da dobra geral. Temos:

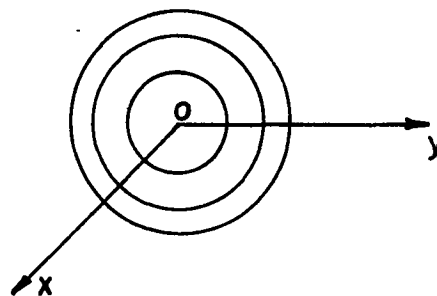
$$u_x = x^2 + y^2 - z = 0$$

Portanto:

$$y^2 - z = -x^2 \quad \therefore \quad v^2 - z = -x^2 \quad \therefore \quad x(v^2 - z) = -x^3$$

de

$$u - z = \frac{x^3}{3} + x(v^2 - z) = \frac{x^3}{3} - x^3 = -\frac{2}{3} x^3$$



logo:

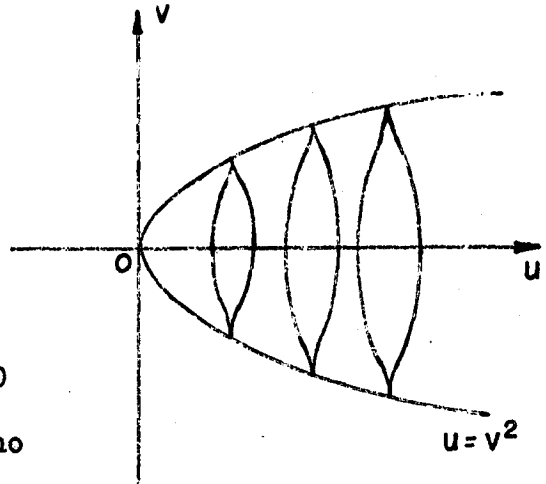
$$(u - z)^2 = \frac{4}{9} x^6 = -\frac{4}{9} (v^2 - z)^3$$

ou seja

$$9(u - z)^2 + 4(v^2 - z)^3 = 0$$

é a equação da família de curvas imagem por  $f$  da dobra geral, isto é, cada circunferência no plano  $z = k \geq 0$  é levada por  $f$  na curva  $9(u - k)^2 + 4(v^2 - k)^3 = 0$ .

Vamos analisar esta família de curvas: para  $x = 0$  temos  $u = k$  donde  $v^2 - k = 0$ .  
 $v = \pm k^{1/2} = \pm u^{1/2}$ . Como  $(u-k)^2 \geq 0$  as curvas estarão sempre contidas no interior da parábola  $u = v^2$  e por serem imagens de curvas fechadas serão também curvas fechadas. Ainda observamos que para  $k > 0$  os pontos  $(k, k^{1/2})$  e  $(k, -k^{1/2})$  são pontos de cúspides ou seja a curva  $u = v^2$  é constituída de pontos de cúspide à excessão da origem onde as curvas fechadas colapsam num ponto.



Modelo para o ponto de  $\mathcal{Q}$  - singularidade do tipo  $III_0$

Seja  $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x,y,z) = (u,v)$  com

$$\begin{cases} u = \frac{x^3}{3} - x y^2 - x z + z \\ v = y \end{cases}$$

então temos:

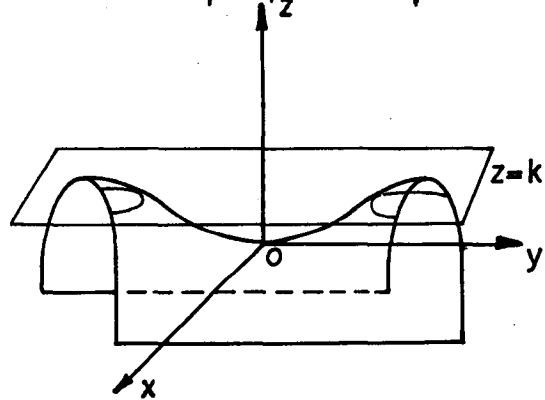
$$u_x(0,0,0) = u_{xx}(0,0,0) = u_{xy}(0,0,0) = 0$$

$$u_{xz}(0,0,0) = -1$$

$$\begin{vmatrix} u_{xxx}(0,0,0) & u_{xxy}(0,0,0) \\ u_{xxy}(0,0,0) & u_{xyy}(0,0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} < 0$$

A dobra geral

$u_x = x^2 - y^2 - z = 0$  é um parabolóide hiperbólico onde a intersecção com cada plano  $z = k$  (constante) é uma hipérbole.



Vamos agora olhar para a imagem por  $f$  da dobra geral. Temos:

$$u_x = x^2 - y^2 - z = 0 \text{ . . .}$$

$$x^2 = y^2 + z \text{ . . . } x^3 = x(y^2 + z)$$

logo

$$u - z = \frac{x^3}{3} - x^3 = \frac{2}{3} x^3 \text{ donde } (u-z)^2 = \frac{4}{9} x^6 = \frac{4}{9} (y^2+z)^3$$

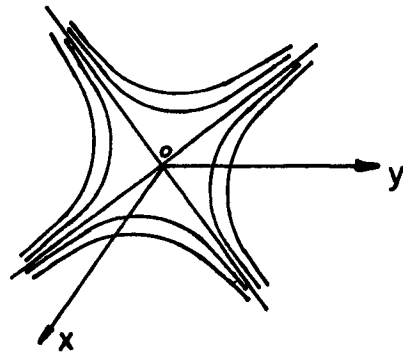
ou seja

$$9(u - z)^2 - 4(y^2 + z)^3 = 0$$

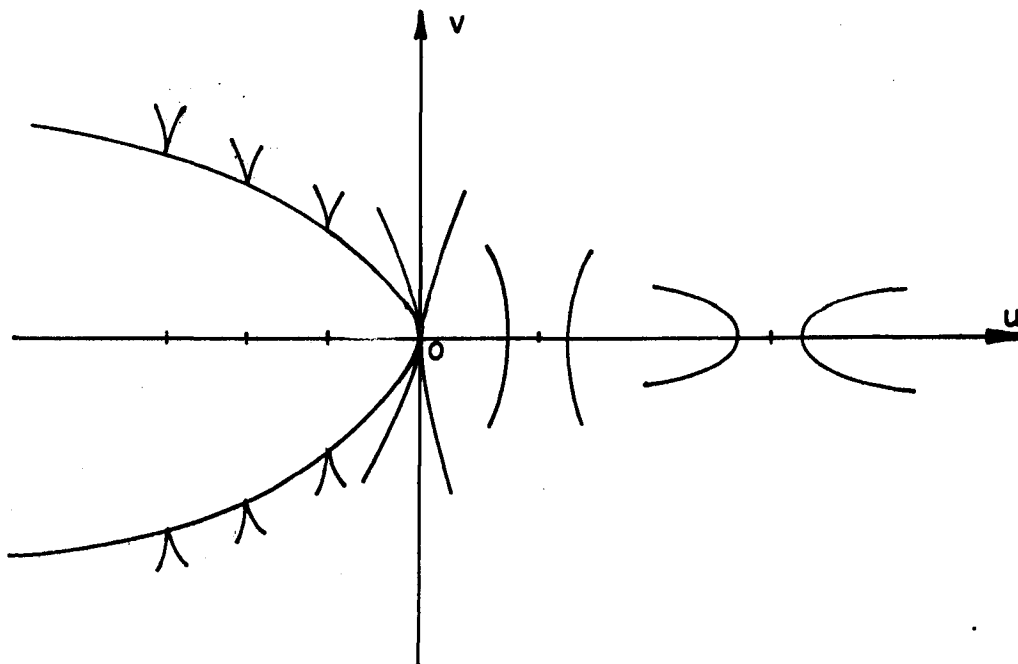
é a equação da família de curvas imagem por  $f$  da dobra geral, ou seja, a hipérbole do plano  $z = k$  é levada por  $f$  na curva

$$9(u - k)^2 - 4(y^2 + k)^3 = 0$$

Para  $x = 0$  temos  $u = k$  donde  $y^2 + u = 0$  ou seja uma parábola e como



$(u - z)^2 \geq 0$  segue que a imagem por  $f$  das hipérboles estarão sempre exteriores à parábola  $u + v^2 = 0$ .



Convém notar ainda que os pontos da parábola  $u + v^2 = 0$  são todos pontos de cúspide com excessão da origem. A origem é o ponto onde os cúspides se tocarão pelo vértice e a partir daí se separarão em hipérboles cujo centro percorre a parte positiva do eixo dos  $u$ .

Temos fortes razões para acreditar que estes modelos representam as formas normais para os tipos  $III_a$ ) e  $III_b$ ). Em trabalho futuro pretendemos analisar esta questão.



§22 -  $\mathcal{Q}$  - singularidades do tipo IV

De acordo com a definição 5.3 temos que  $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  possui no ponto  $0 \in V$  uma  $\mathcal{Q}$ -singularidade do tipo IV se:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x(0,0,0) = u_{xx}(0,0,0) = u_{xxx}(0,0,0) = 0 \\ u_{xxxx}(0,0,0) \left| \begin{array}{cc} u_{xy}(0,0,0) & u_{xz}(0,0,0) \\ u_{xy}(0,0,0) & u_{xz}(0,0,0) \end{array} \right| \neq 0 \end{array} \right.$$

Realizando transformações de coordenadas relativamente simples poderemos simplificar o desenvolvimento de Mac-Laurin de  $f$  chegando a expressões que sugerem a existência de dois tipos de  $\mathcal{Q}$ -singularidade  $IV_a$  e  $IV_b$  representados pelos modelos abaixo:

$$IV_a \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^4 - x^2z - xy + z \\ v = y \end{array} \right.$$

$$IV_b \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^4 + x^2z - xy + z \\ v = y \end{array} \right.$$

Vamos estudar estes modelos em detalhes.

Modelo para o ponto de  $\mathcal{Q}$ -singularidade do tipo  $IV_a$

$$\text{Seja } \left\{ \begin{array}{l} u = x^4 - x^2z - xy + z \\ v = y \end{array} \right.$$

então temos:



$$u_x(0,0,0) = u_{xx}(0,0,0) = u_{xxx}(0,0,0) = 0$$

$$u_{xxx}(0,0,0) = 24$$

$$\begin{vmatrix} u_{xy}(0,0,0) & u_{xz}(0,0,0) \\ u_{xy}(0,0,0) & u_{xz}(0,0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} > 0$$

este sinal caracteriza o tipo  $IV_a$ .

De  $u_x = 4x^3 - 2xz - y = 0$  tiramos  $y = 4x^3 - 2xz$  equação da dobra geral. Além disso de  $u_{xx} = 12x^2 - 2z = 0$  tiramos a superfície  $z = 6x^2$  que intercepta a dobra geral transversalmente numa vizinhança da origem e cuja intersecção é uma curva regular  $\gamma$  dada por

$$\gamma \equiv \begin{cases} y = 4x^3 - 2xz \\ z = 6x^2 \end{cases}$$

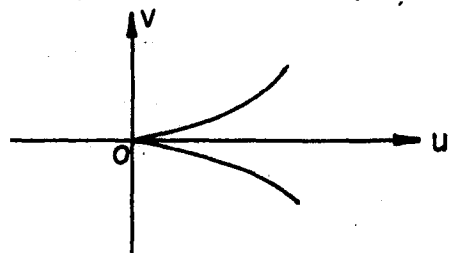
ou parametrizada em função de  $x$

$$\gamma \equiv \begin{cases} x = x \\ y = -8x^3 \\ z = 6x^2 \end{cases}$$

constituída inteiramente de pontos cuspidais ( $u_{xy} \neq 0$ ), exceto na origem.

Olhando para a imagem por  $f$  de  $\gamma$  temos por equação

$$f(\gamma) \equiv \begin{cases} u = 6x^2 - 3x^4 \\ v = -8x^3 \end{cases}$$



que é uma cúspide simétrica em relação ao eixo dos  $u$ .

Analisemos um pouco as curvas de nível. Para  $z = k$  (constante) temos:

$$y^k = 4x^3 - 2xk$$

então

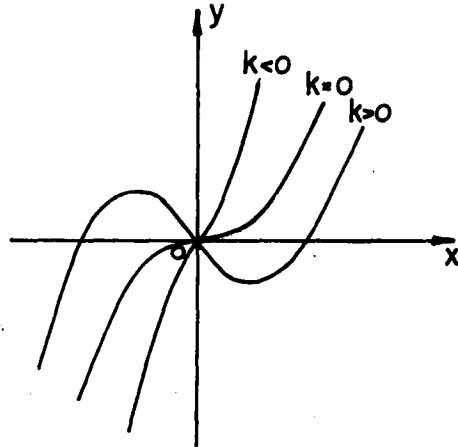
$$y_x^k = 12x^2 - 2k$$

$$y_{xx}^k = 24x$$

donde tiramos que se  $k > 0$  a curva possui dois pontos estacionários

$$x = \pm \sqrt{\frac{k}{6}}$$

que é um máximo e um mínimo. Se  $k = 0$  a curva possui uma inflexão na origem e se  $k < 0$  não admite pontos estacionários.



Olhemos agora para a imagem por  $f$  destas curvas cuja equação é:

$$\begin{cases} u = -3x^3 + x^2k + k \\ v = 4x^3 - 2xk \end{cases}$$

Se  $k > 0$  temos para

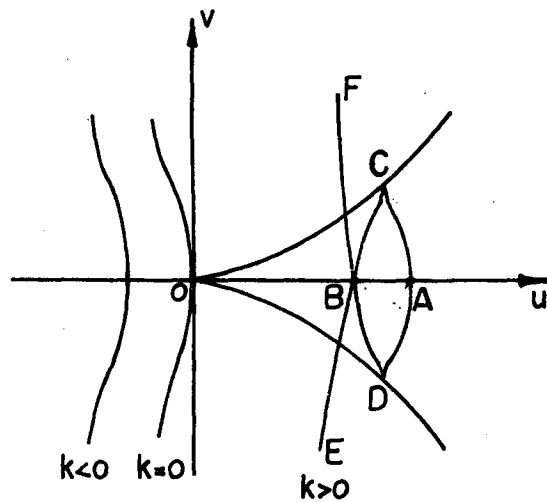
$$v = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{k}{2}} \end{cases}$$

donde

$$x = 0 \Rightarrow u = k \quad \therefore (k, 0) = A$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{k}{2}} \Rightarrow u = k(1 - \frac{k}{4}) > 0 \quad \therefore (k - \frac{k^2}{4}, 0) = B$$

Agora para



$x = \pm \sqrt{\frac{k}{6}}$  (ponto onde a curva apresenta máximo e mínimo), temos:

$$x = \sqrt{\frac{k}{6}} \Rightarrow \begin{cases} u = k - \frac{k^2}{6} \\ v = 2 \left(\frac{k}{6}\right)^{3/2} \end{cases} \quad C = \left(k - \frac{k^2}{6}, 2\left(\frac{k}{6}\right)^{3/2}\right)$$

$$x = -\sqrt{\frac{k}{6}} \Rightarrow \begin{cases} u = k - \frac{k^2}{6} \\ v = -2 \left(\frac{k}{6}\right)^{3/2} \end{cases} \quad D = \left(k - \frac{k^2}{6}, -2\left(\frac{k}{6}\right)^{3/2}\right)$$

Então a curva terá o trajeto E B C A D B F apresentando em C e D cúspides.

Se  $k = 0$  obtemos

$$\begin{cases} u = -3x^4 \\ v = 4x^3 \end{cases}$$

que é uma curva de 4º grau com tangente vertical na origem.

Se  $k < 0$  obtemos

$$\begin{cases} u = -3x^4 + x^2 k + k \\ v = 4x^3 - 2x k \end{cases}$$

que corta o eixo dos u no semi-eixo negativo e tem também tangente vertical neste ponto.

Modelo para o ponto de  $\mathcal{Q}$  - singularidade do tipo  $IV_b$

Seja  $\begin{cases} u = x^4 + x^2 z - xy + z \\ v = y \end{cases}$

então temos:

$$u_x(0,0,0) = u_{xx}(0,0,0) = u_{xxx}(0,0,0) = 0$$

$$u_{xxxx}(0,0,0) = 24$$

$$\begin{vmatrix} u_{xy}(0,0,0) & u_{xz}(0,0,0) \\ u_{xy}(0,0,0) & u_{xz}(0,0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} < 0$$

este sinal caracteriza o tipo  $IV_b$ .

De  $u_x = 4x^3 + 2xz - y = 0$  tiramos  $y = 4x^3 + 2xz$  equação da dobra geral. Além disso de  $u_{xx} = 12x^2 + 2z = 0$  tiramos a superfície  $z = -6x^2$  que corta a dobra geral transversalmente numa vizinhança da origem e cuja intersecção é uma curva regular  $\gamma^1$  dada por

$$\gamma^1 \equiv \begin{cases} y = 4x^3 + 2xz \\ z = -6x^2 \end{cases}$$

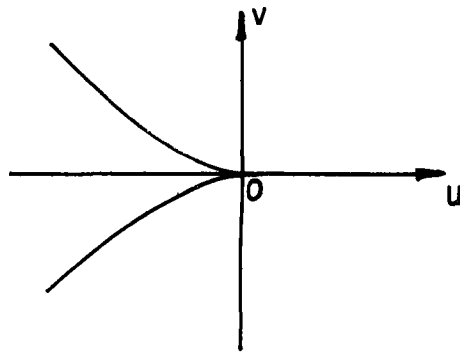
ou parametrizada por  $x$

$$\gamma^1 \equiv \begin{cases} x = x \\ y = -8x^3 \\ z = -6x^2 \end{cases}$$

constituída inteiramente de pontos cuspidais ( $u_{xy} \neq 0$ ) exceto a origem.

Olhando para a imagem por  $f$  de  $\gamma^1$  temos por equação

$$f(\gamma^1) \begin{cases} u = -6x^2 + 3x^4 \\ v = -8x^3 \end{cases}$$



que é uma cúspide simétrica.

Analisando agora as curvas de nível vem: para  $z=k$  (constante) obtemos:

$$y^k = 4x^3 + 2xk$$

então

$$y_x^k = 12x^2 + 2k$$

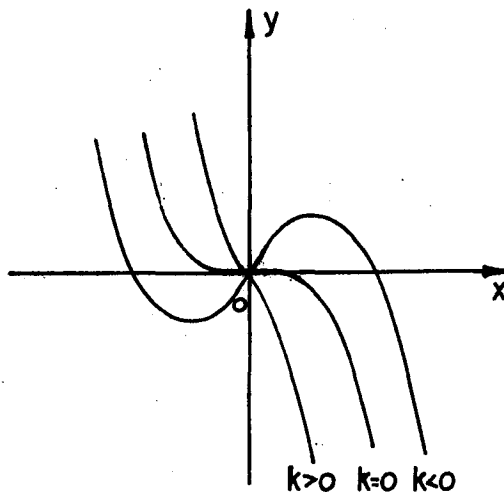
$$y_{xx}^k = 24x$$

donde concluímos que se  $k < 0$  a curva possui dois pontos estacionários a saber

$$x = \pm \sqrt{\frac{-k}{6}}$$

que é um mínimo e um máximo.

Se  $k = 0$  a curva possui na origem uma inflexão e se  $k > 0$  não possui pontos estacionários.



Agora a imagem por  $f$  destas curvas será

$$\begin{cases} u = -3x^4 - x^2k + k \\ v = 4x^3 + 2xk \end{cases}$$

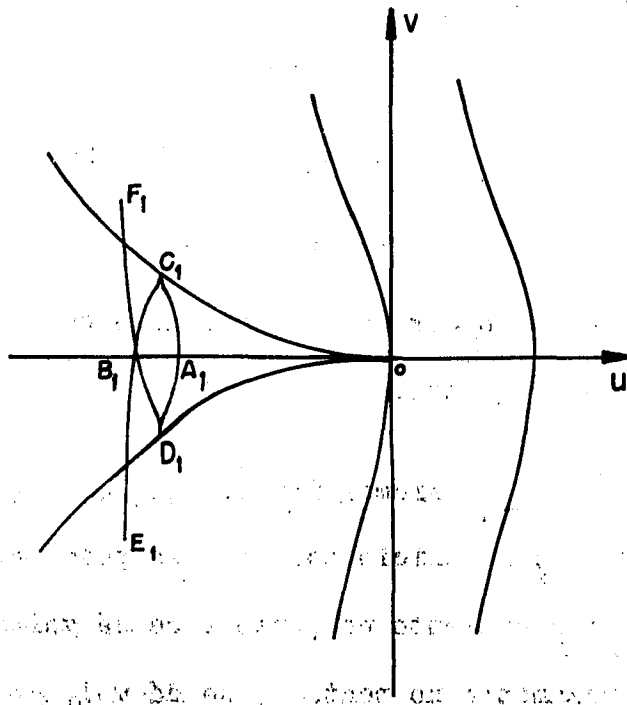
Se  $k < 0$  teremos para

$$v = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{-k}{2}} \end{cases}$$

logo

$$x = 0 \Rightarrow u = k \quad (k < 0)$$

seja  $A_1 = (k, 0)$



$$x = \pm \sqrt{\frac{-k}{2}} \Rightarrow u = k - \frac{k^2}{4} < 0 \therefore B_1: \left(k - \frac{k^2}{4}, 0\right)$$

Agora para

$$x = \pm \sqrt{\frac{-k}{6}} \text{ (pontos de m\u00ednimo e m\u00e1ximo) vem}$$

$$x = + \sqrt{\frac{-k}{6}} \rightarrow \begin{cases} u = k - \frac{k^2}{6} \\ v = 2\left(\frac{-k}{6}\right)^{3/2} \end{cases} \quad C_1 = \left(k - \frac{k^2}{6}, 2\left(\frac{-k}{6}\right)^{3/2}\right)$$

$$x = - \sqrt{\frac{-k}{6}} \rightarrow \begin{cases} u = k - \frac{k^2}{6} \\ v = -2\left(\frac{-k}{6}\right)^{3/2} \end{cases} \quad D_1 = \left(k - \frac{k^2}{6}, -2\left(\frac{-k}{6}\right)^{3/2}\right)$$

Ent\u00e3o a curva ter\u00e1 o trajeto:  $E_1 B_1 C_1 A_1 D_1 B_1 F_1$  apresentando em  $C_1$  e  $D_1$  uma c\u00faspide.

Se  $k = 0$  obtemos

$$\begin{cases} u = -3x^4 \\ v = 4x^3 \end{cases}$$

que \u00e9 uma curva de 4\u00b0 grau com tangente vertical na origem.

Se  $k > 0$  obtemos

$$\begin{cases} u = -3x^4 - x^2k + k \\ v = 4x^3 + 2xk \end{cases}$$

que corta o eixo dos  $u$  no semi-eixo positivo e tem tangente vertical neste ponto.

Queremos frizar aqui que os modelos s\u00e3o distintos como a firmamos no in\u00edcio pois n\u00e3o se pode levar um no outro visto que no  $IV_a$  o cruzamento no ponto  $B$  se d\u00e1 voltado para a c\u00faspide e no  $IV_b$  o cruzamento no ponto  $B_1$  se d\u00e1 voltado para o lado oposto da c\u00faspide, portanto n\u00e3o h\u00e1 simetria entre os dois modelos.

Acreditamos que no caso geral o comportamento geométrico das  $\mathcal{Q}$ -singularidade dos tipos  $IV_a$  e  $IV_b$  seja análogo ao dos modelos, porém dificilmente estes são formas normais pois em uma vizinhança da imagem do ponto  $\mathcal{Q}$ -singular temos uma região que é coberta três vezes pela dobra geral, o que provavelmente impossibilita a adaptação ao modelo. É de se esperar que exista uma família de formas normais possivelmente dependente de um ou mais parâmetros.



Bibliografia

- 1 - WHITNEY, H. - Singularities of mappings of Euclidean spaces I. Ann. Math. 62, 1955.
- 2 - WHITNEY, H. - Differentiable even function. Duke Math. Journal 10, 1943.
- 3 - LEVINE, I. - Singularities of differential mappings - Lectures notes, Bonn, 1959.
- 4 - LOIBEL, G.F. - Singularidades das aplicações diferenciáveis - Curso ministrado no VI Colóquio Brasileiro de Matemática, 1967.
- 5 - LOIBEL, G.F. - Aplicaciones de Variedades em Variedades - Universidad de Venezuela - Caracas.
- 6 - LOIBEL, G.F. - Estudo do Comportamento de Funções Diferenciáveis - Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP 1972.
- 7 - THOM, R. - Un lemme sur les applications differentiables - Bol. Soc. Mat. Mex., 1956.
- 8 - FAVARO, L.A. - Sobre Singularidades de Aplicações Diferenciáveis - Tese - São Carlos, 1971.
- 9 - WELLS, R. - Introduction to theory of singularities - Lectures notes - São Paulo, 1970.
- 10 - MILNOR, J. - Foliations and Foliated Vector Bundles - Lectures notes - MIT, 1969.