

I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

ψ -ESTABILIDADE

Claudio Martins Mendes

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

ψ -ESTABILIDADE

Claudio Martins Mendes

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Favaro

Tese apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos,
da Universidade de São Paulo, para
obtenção do título de Doutor em
Ciências (Matemática).

SÃO CARLOS
1981

À Dolores, Marina e

Heloisa, com amor.

Aos meus pais e à D.

Lola, com gratidão.

AGRADECIMENTOS

Pelo incentivo, pela confiança demonstrada e pela amizade, sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Luiz Antonio Favaro, cuja orientação tornou possível a execução deste trabalho.

Agradeço também:

Ao colega Prof. Dr. Wilson Mauricio Tadini, pelo companheirismo e pelas profícuas trocas de idéias.

Ao Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel, pelo entusiasmo e valiosas sugestões.

A todos os colegas do ICMSC-USP, pelo ambiente propício.

À Lene, pelas horas furtadas para a datilografia deste trabalho, que tão bem executou.

Este trabalho foi parcialmente financiado pelas instituições: CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP.

I N D I C E

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I	
PRELIMINARES	1
§ 1. Espaço de Jatos - Topologia de Whitney	1
§ 2. Anel de Germes	3
§ 3. Estabilidade	6
§ 4. Transversalidade e Singularidades	7
CAPÍTULO II	
ψ -ESTABILIDADE	11
§ 1. Diferentes Noções de Estabilidade	11
§ 2. Caracterização das Deformações ψ -Triviais	23
CAPÍTULO III	
ψ -ESTABILIDADE INFINITESIMAL E ψ -ESTABILIDADE HOMOTÓPICA ..	33
CAPÍTULO IV	
FORMAS LOCAIS	57
§ 1. $\mathbb{R}, 0 \leftarrow \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$	57
§ 2. $\mathbb{R}, 0 \leftarrow \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$	69
\downarrow $\mathbb{R}, 0$	
CAPÍTULO V	
TEOREMAS DE CARACTERIZAÇÃO	85
§ 1. $(f, \psi) : M \rightarrow \mathbb{R}^2, \dim M \geq 2$	86
§ 2. $(f, \psi) : M \rightarrow \mathbb{R}^2, \dim M = 1$	94
§ 3. $(f, \psi) : M \rightarrow \mathbb{R}^3, \dim M = 2$	97
BIBLIOGRAFIA	103

INTRODUÇÃO

O estudo da estabilidade de aplicações diferenciáveis $f : M \rightarrow N$, iniciados sob inspiração de H. Whitney e R. Thom, motivou um vasto campo de pesquisas, culminando com os trabalhos de J. Mather. Diversas extensões do conceito de estabilidade foram introduzidas, visando preservar certas estruturas pré-fixadas nas variedades M e N motivadas por aplicações geométricas ou físicas. A seguir apresentaremos, ligeiramente, os conceitos iniciais e algumas generalizações que têm relação com este trabalho.

As aplicações $f, g : M \rightarrow N$ são equivalentes (A-equivalentes) se existem difeomorfismos $h : M \rightarrow M$ e $k : N \rightarrow N$ tais que $g = k \circ f \circ h^{-1}$. Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é estável (A-estável) se toda $g : M \rightarrow N$ suficientemente próxima de f (topologia de Whitney) for equivalente a f .

Uma primeira extensão desses conceitos é o da K-equivalência, isto é, as aplicações $f, g : M \rightarrow N$ dizem-se K-equivalentes se o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{(Id, f)} & M \times N & \xrightarrow{\pi} & M \\
 \downarrow h & & \downarrow k & & \downarrow h \\
 M & \xrightarrow{(Id, g)} & M \times N & \xrightarrow{\pi} & M
 \end{array}$$

é comutativo, onde h e k são difeomorfismos com $k(x, y) = (h(x), \bar{k}(x, y))$ e $\bar{k}(x, y_0) = y_0$.

Em diversas situações era sensível a necessidade de estudar a estabilidade de diagramas de aplicações diferenciáveis. Trabalhos desenvolvidos por J. P. Dufour revelaram diferenças funda

mentais nos casos de diagramas convergentes

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \dots \longrightarrow M_r \quad \text{e divergentes} \quad Q \xleftarrow{g} M \xrightarrow{f} N,$$

devidas principalmente a ausência de um "Teorema de Preparação" adequado ao tipo divergente.

A equivalência de diagramas $Q \xleftarrow{f_2} M \xrightarrow{f_1} N$ e $Q \xleftarrow{g_2} M \xrightarrow{g_1} N$ corresponde à equivalência usual das aplicações $f = (f_1, f_2) : M \rightarrow N \times Q$ e $g = (g_1, g_2) : M \rightarrow N \times Q$ preservando a estrutura de produto cartesiano de $N \times Q$, isto é, existem difeomorfismos $h : M \rightarrow M$, $k_1 : N \rightarrow N$ e $k_2 : Q \rightarrow Q$ tais que $g = (k_1, k_2) \circ f \circ h^{-1}$.

O objetivo deste trabalho é o de estudar um conceito de estabilidade para aplicações $f : M \rightarrow N$, respeitando a estrutura definida por uma aplicação estável fixada $\psi : M \rightarrow Q$. Isto é: diremos que $f, g : M \rightarrow N$ são ψ -equivalentes se existem difeomorfismos $h : M \rightarrow M$ e $k : N \times Q \rightarrow N \times Q$, com $k(y, q) = (k_1(y, q), k_2(q))$ tais que $(g, \psi) = k \circ (f, \psi) \circ h$. Assim, f será ψ -estável se para toda g suficientemente próxima (topologia de Whitney), tivermos g ψ -equivalente a f .

Para estudar o conceito acima introduzimos uma noção auxiliar de "estabilidade" para o par (f, ψ) . Isto é: diremos que (f, ψ) é "equivalente" a (g, ψ) se existem difeomorfismos $h : M \rightarrow M$ e $k : N \times Q \rightarrow N \times Q$, com $k(y, q) = (k_1(y, q), k_2(q))$ tais que $(g, \psi) = k \circ (f, \psi) \circ h$. Diremos que (f, ψ) é "estável", se dada (g, ψ) suficientemente próxima de (f, ψ) (nas topologias de Whitney) tivermos (g, ψ) "equivalente" a (f, ψ) . Mostraremos no Capítulo II que a estabilidade acima é equivalente a ψ -estabilidade se ψ é estável e própria. Nestas condições a ψ -estabilidade de f corresponde a uma situação intermediária entre a estabilidade usual de $(f, \psi) : M \rightarrow N \times Q$ e a bi-estabilidade do

par (f, ψ) , segundo J. P. Dufour [6].

Observemos ainda que a K -equivalência é um caso especial de ψ -equivalência, quando $\psi = \text{Id}_M$ e $k_1(y, y_0) = y_0$. Também a A -equivalência corresponde a ψ -equivalência se $\psi: M \rightarrow \{q\}$.

Podemos definir de maneira natural os conceitos de ψ -estabilidade infinitesimal e ψ -estabilidade homotópica. Mostraremos que estes conceitos são localmente equivalentes e que, sob determinadas condições, são globalmente equivalentes (ver Teorema 11, Capítulo III). A demonstração que apresentamos baseia-se numa formulação adequada do "Teorema de Preparação" e técnicas de colagens usando partição da unidade adequadas à situação em estudo. Fazemos isto em detalhes no Capítulo III pois estamos convencidos que a demonstração do Teorema análogo apresentado por Dufour em [6], p. 264, padece de imprecisões na globalização.

Localmente, o conceito de ψ -estabilidade (ψ -estabilidade infinitesimal ou homotópica) é equivalente a estabilidade do diagrama $M \xrightarrow{(f, \psi)} N \times Q \xrightarrow{\pi} Q$, desde que ψ seja estável. As formas normais que caracterizam a ψ -estabilidade nos casos

$$R, 0 \xleftarrow{\psi} R^n, 0 \xrightarrow{f} R, 0, \quad R^2, 0 \xleftarrow{\psi} R^2, 0 \xrightarrow{f} R, 0$$

$$R, 0 \xleftarrow{\psi} R^2, 0 \xrightarrow{f} R^2, 0 \quad \text{e} \quad R, 0 \xleftarrow{f} R^n, 0 \xrightarrow{g} R, 0$$

$$\downarrow \psi$$

$$R, 0$$

são apresentadas nos Capítulos IV e V, obtidas como formas normais dos diagramas correspondentes, que não se encontram na literatura.

Globalmente a equivalência acima se verifica se M e N são compactas e ψ é estável. Assim, neste caso restrito, podemos obter o teorema da equivalência entre a ψ -estabilidade in

finitesimal e homotópica usando os resultados de Dufour e Buchner [Stability of the Cert Locus in Dimensions Less Than or Equal to 6 - *Inventiones Mathematicae*, 43 (1977)]. A vantagem do método direto que apresentamos é suprimir a hipótese de compacidade de N , atingindo deste modo teoremas globais de caracterização para $R^p \leftarrow \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{f} R^n$, com M compacta, em particular os casos $R \leftarrow \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{f} R$, $R \leftarrow \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{f} R^2$ e $R^2 \leftarrow \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{f} R$.

Finalmente observamos que globalmente a ψ -estabilidade não é equivalente a estabilidade do diagrama

$M \xrightarrow{(f, \psi)} N \times Q \xrightarrow{\pi} Q$, conforme mostram os exemplos dados nas páginas 20 - 23.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

§ 1. Espaço de Jatos - Topologia de Whitney

Sejam M e N variedades diferenciáveis e $f, g : M \rightarrow N$ aplicações diferenciáveis (durante todo este trabalho diferenciável significará C^∞). Suponhamos (x_1, \dots, x_m) e (y_1, \dots, y_n) sistemas de coordenadas nas vizinhanças de $p \in M$ e $f(p) \in N$, respectivamente.

Seja $\partial^t f_i(p)$ a derivada parcial mista

$$\frac{\partial^{|t|} (y_i \circ f(x(p)))}{\partial^{t_1} x_1 \partial^{t_2} x_2 \dots \partial^{t_m} x_m}, \quad \text{onde } t = (t_1, \dots, t_m)$$

é uma seqüência de inteiros não negativos e $|t| = t_1 + \dots + t_m$.

1. DEFINIÇÃO. Dizemos que as aplicações f e g tem o mesmo r -jato em $p \in M$ se $f(p) = g(p)$ e $\partial^t f_i(p) = \partial^t g_i(p)$, com $i = 1, 2, \dots, n$, para toda seqüência $t = (t_1, \dots, t_m)$, com $|t| \leq r$.

A definição acima independe dos sistemas de coordenadas utilizados. Podemos introduzir uma relação de equivalência definindo $f \sim_p g$ se, e somente se, f e g tem o mesmo r -jato em p . A classe de equivalência de f em p será chamada o jato de ordem r de f em p .

Notação: $j^r f(p)$. Os pontos p e $f(p)$ serão chamados fonte e meta de $j^r f(p)$.

Indicaremos por $J^r(M,N)$, a variedade diferenciável de finida por:

$$J^r(M,N) = \{j^r f(p) / f \in C^\infty(M,N) \text{ e } p \in M\}.$$

Dada $f : M \rightarrow N$, podemos considerar $j^r f : M \rightarrow J^r(M,N)$ definida por $(j^r f)(p) = j^r f(p)$. Esta aplicação é de classe C^∞ .

Passamos agora a descrever uma topologia (a de Whitney) no conjunto $C^\infty(M,N)$.

- (i) Fixemos um inteiro não negativo k . Seja U um subconjunto de $J^k(M,N)$. Denotamos por $X(U)$ o conjunto:

$$X(U) = \{f \in C^\infty(M,N) / j^k f(M) \subset U\}.$$

note que $X(U) \cap X(V) = X(U \cap V)$.

- (ii) A família de conjuntos $\{X(U)\}$, onde U é um subconjunto aberto de $J^k(M,N)$, forma uma base para uma topologia em $C^\infty(M,N)$. Denotaremos por W_k a topologia gerada por esta família, a qual é chamada *topologia C^k de Whitney*.
- (iii) A topologia C^∞ de Whitney sobre $C^\infty(M,N)$ é a topologia cuja base é $\bigcup_{k=0}^{\infty} W_k$.

Temos aqui uma boa definição de base, desde que $W_k \subset W_\ell$, quando $k \leq \ell$.

§ 2. Anel de Germes

Sejam f e g em $C^\infty(M, N)$.

1. DEFINIÇÃO. f e g tem o mesmo germe em $x \in M$, se existir aberto U de M , $x \in U$, de modo que $f|U = g|U$.

Cada classe da relação de equivalência dada pela definição acima é denominada *germe* de aplicação diferenciável e é denotada por $[f]_x$. O espaço quociente obtido será denotado por $C_x^\infty(M, N)$. Quando $N = R$ indicaremos este conjunto por $C_x^\infty(M)$. Ainda, $C_x^\infty(M)$ herda de R uma estrutura natural de R -álgebra.

Vamos considerar $m_x = \{[f]_x \in C_x^\infty(M) / f(x) = 0\}$. Observamos que m_x é o único ideal maximal do anel $C_x^\infty(M)$.

Indicaremos por m_x^r o ideal gerado por germes da forma $[f_1]_x \dots [f_r]_x$ onde $[f_i]_x \in m_x$.

Nota: Na maioria das vezes omitiremos os parênteses ao tratarmos com germes, esperando que o contexto deixe claro aquilo a que nos referimos.

Observemos que se $f : (M, x) \rightarrow (N, y)$ é um germe de aplicação diferenciável, todo $C_x^\infty(M)$ -módulo A admite uma estrutura de $C_y^\infty(N)$ -módulo, via o homomorfismo de R -álgebras $f^* : C_y^\infty(N) \rightarrow C_x^\infty(M)$, definido por $f^*(v) = v \circ f$. A adição em A é a anterior e a ação de $C_y^\infty(N)$ é definida por:

$$(\forall \alpha \in C_y^\infty(N)) (\forall a \in A) \quad \alpha a = f^*(\alpha) a = (\alpha \circ f) a$$

2. TEOREMA DE PREPARAÇÃO DE MALGRANGE. Sejam $f : M \rightarrow N$ diferenciável, $x \in M$, $y = f(x) \in N$ e A um $C_x^\infty(M)$ -módulo finitamente gerado. Suponhamos que $\{\pi(e_1), \dots, \pi(e_r)\}$ seja um sistema de geradores para o espaço vetorial real $A \mid_{(f^*m_y)} A$. Então $\{e_1, \dots, e_r\}$ constitui um sistema de geradores para A como um $C_y^\infty(N)$ -módulo (via f^*).

(vide [2], p. 59)

Observação: $(f^*m_y)A$ é o conjunto de somas de elementos da forma $(h \circ f)a$ onde $h \in m_y$ e $a \in A$. Ainda $\pi : A \rightarrow A \mid_{(f^*m_y)} A$ é a projeção natural.

Aplicando-se o Teorema anterior, pode-se demonstrar:

3. TEOREMA. Sejam A um $C_x^\infty(M)$ -módulo finitamente gerado, $f : M \rightarrow N$ diferenciável, $y = f(x)$. Então $\{e_1, \dots, e_k\}$ é um sistema de geradores de A como um $C_y^\infty(N)$ -módulo (via f^*) se, e somente se, $\{\pi(e_1), \dots, \pi(e_k)\}$ é um sistema de geradores de $A \mid_{m_x^{k+1}} A$ como um $C_y^\infty(N)$ -módulo, onde:

$\pi : A \rightarrow A \mid_{m_x^{k+1}} A$ é a projeção natural.

Dada $f : M \rightarrow N$ e y um ponto de N , seja $S = \{x_1, \dots, x_k\} \subset f^{-1}(y)$.

Definimos $C_S^\infty(M) = \bigoplus_{i=1}^k C_{x_i}^\infty(M)$.

Note que $C_S^\infty(M)$ é um anel, onde as operações são da das nas coordenadas.

Sabendo que f induz um homomorfismo de anéis

$f^* : C_y^\infty(N) \rightarrow C_{x_i}^\infty(M)$ para cada i , induzimos um homomorfismo de anéis $C_y^\infty(N) \rightarrow C_S^\infty(M)$, o qual será também denotado por f^* . Assim, se A é um $C_S^\infty(M)$ -módulo, então, via f^* , A torna-se um $C_y^\infty(N)$ -módulo.

4. LEMA. Sejam A_i ($1 \leq i \leq k$) módulos sobre $C_{x_i}^\infty(M)$, finitamente gerados. Então, $A = A_1 \otimes \dots \otimes A_k$ é um $C_S^\infty(M)$ -módulo finitamente gerado (onde a ação de $C_{x_i}^\infty(M)$ sobre A_j é nula se $i \neq j$). Ainda, se $\{\pi(e_1), \dots, \pi(e_r)\}$ é um sistema de geradores para o espaço vetorial $A \mid_{f^*m_y A}$, então $\{e_1, \dots, e_r\}$ constitui um sistema de geradores de A como um $C_y^\infty(N)$ -módulo (via f^*).

(vide [10], p. 113)

5. TEOREMA DA DIVISÃO DE MATHER. Seja F uma função C^∞ de valores reais, definida sobre uma vizinhança de 0 em $R \times R^n$, tal que $F(t, 0) = g(t)t^k$, onde $g(0) \neq 0$ e g é de classe C^∞ em alguma vizinhança de $0 \in R$. Então, dada qualquer função C^∞ de valores reais G , definida sobre uma vizinhança de 0 em $R \times R^n$, existem funções C^∞ , q e r , tais que:

- (i) $G = qF + r$ sobre uma vizinhança de $0 \in R \times R^n$
 (ii) $r(t, x) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i(x)t^i$ para $(t, x) \in R \times R^n$ próximo de 0 .

(vide [10], p. 95)

§ 3. Estabilidade

Neste parágrafo estaremos lembrando as definições de estabilidade infinitesimal e estrutural (C^∞) de aplicações diferenciáveis.

1. **DEFINIÇÃO.** Sejam M e N variedades diferenciáveis e f e g em $C^\infty(M, N)$, dotado da topologia C^∞ de Whitney. Dizemos que f e g são equivalentes, se existem difeomorfismos h e k , comutando o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & N \\ \downarrow h & & \downarrow k \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

2. **DEFINIÇÃO.** $f \in C^\infty(M, N)$ é estável (C^∞ estável) se existir uma vizinhança W de f em $C^\infty(M, N)$, tal que toda $g \in W$ seja equivalente a f .

3. **DEFINIÇÃO.** Sejam M e N variedades diferenciáveis, $f : M \rightarrow N$ diferenciável e $\pi : TN \rightarrow N$ a projeção. Um campo de vetores ao longo de f é uma aplicação $\xi : M \rightarrow TN$, tal que $\pi \circ \xi = f$.

O conjunto dos campos de vetores ao longo de f será denotado por $\theta(f)$. Em particular quando $f = \text{Id}_M$, indicaremos por $\theta(M)$.

4. DEFINIÇÃO. f é infinitesimalmente estável, se para cada campo de vetores w ao longo de f , existirem um campo vetorial ξ sobre M e um campo vetorial η sobre N , tais que:

$$w = (df)\xi + \eta \circ f$$

5. TEOREMA (MATHER). Seja $f : M \rightarrow N$, própria.

$f \in C^\infty(M, N)$ é estável se, e somente se, for infinitesimalmente estável.

§ 4. Transversalidade e Singularidades

1. DEFINIÇÃO. Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é transversal a uma subvariedade S de N em $p \in M$ se:

$$(a) f(p) \notin S$$

ou

$$(b) f(p) \in S \text{ e } (df)_p(T_p M) + T_{f(p)} S = T_{f(p)} N,$$

onde $(df)_p$ é a derivada de f em p e $T_p M$ é o espaço tangente a M no ponto p .

Se f é transversal a S em todo ponto p de M , então diremos simplesmente que f é transversal a S . Neste caso, $f^{-1}(S)$ é subvariedade de M de mesma codimensão que S , ou $f^{-1}(S) = \emptyset$.

2. TEOREMA DE TRANSVERSALIDADE DE THOM. Sejam M e N variedades diferenciáveis e W uma subvariedade de $J^r(M, N)$. Então, o conjunto das aplicações $f : M \rightarrow N$, tais que $j^r f : M \rightarrow J^r(M, N)$ é transversal a W , é residual em $C^\infty(M, N)$, com a topologia C^∞ de Whitney.

Seja $f : M \rightarrow N$. Dizemos que f tem uma singularidade do tipo S_r em $p \in M$, se $(df)_p$ tem deficiência r , isto é, $\text{rank}(df)_p = \min(\dim M, \dim N) - r$.

Notação:

$$S_r(f) = \{p \in M / \text{rank}(df)_p = \min(\dim M, \dim N) - r\}.$$

Definiremos agora uma subvariedade em $J^1(M, N)$, que estará estritamente relacionada com o conjunto $S_r(f)$.

Seja $\sigma \in J^1(M, N)$, com fonte p e meta q , admitindo f para representante. Tomemos $(df)_p : T_p M \rightarrow T_q N$.

$$\text{Definimos: } \text{rank} \sigma = \text{rank}(df)_p.$$

Consideremos

$$S_r = \{\sigma \in J^1(M, N) / \text{rank} \sigma = \min(\dim M, \dim N) - r\}$$

Consegue-se provar que S_r é uma subvariedade de $J^1(M, N)$ de codimensão $r^2 + er$, onde $e = |\dim M - \dim N|$.

$$\text{Observemos que } S_r(f) = (j^1 f)^{-1}(S_r).$$

3. DEFINIÇÃO. Seja $f \in C^\infty(M, N)$. f é *1-genérica* se a aplicação $j^1 f : M \rightarrow J^1(M, N)$ for transversal a cada subvariedade S_r .

Em particular, se f é uma aplicação 1-genérica, então $S_r(f)$ é uma subvariedade de M de codimensão $r^2 + er$.

Sabemos que toda aplicação estável é 1-genérica.

Ainda, podemos considerar $f : M \rightarrow N$, onde f é 1-genérica e denotar por:

$S_{r,s}(f) = \{p \in M / d(f|_{S_r(f)})_p \text{ tem deficiência } s\}$, se $S_r(f) \neq \emptyset$.

Podem-se construir subvariedades $S_{r,s} \subset J^2(M,N)$ (análogas às S_r 's citadas acima), tais que:

$$p \in S_{r,s}(f) \iff j^2 f(p) \in S_{r,s}.$$

Uma aplicação f , tal que $j^2 f$ é transversal às subvariedades $S_{r,s}$, é chamada *2-genérica*. Temos o resultado:
Toda aplicação estável é 2-genérica.

CAPÍTULO II

ψ -ESTABILIDADE

§ 1. Diferentes Noções de Estabilidade

1. DEFINIÇÃO. Consideremos $Q \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$.

f é ψ -infinitesimalmente estável, se dado $w \in \theta(f)$, existirem $u \in \theta(M)$, $v \in \theta(Q)$ e $\eta \in \theta(\pi)$ ($\pi : N \times Q \rightarrow N$, projeção usual), tais que:

$$\begin{cases} w = (df)u + \eta \circ (f, \psi) \\ 0 = (d\psi)u + v \circ \psi \end{cases}$$

1.a. DEFINIÇÃO. Diremos que f é localmente ψ -infinitesimalmente estável em $p \in M$, se o germe $[f]_p$ é ψ -infinitesimalmente estável.

2. PROPOSIÇÃO. Seja ψ infinitesimalmente estável. Então, f é ψ -infinitesimalmente estável se, e somente se, dados $w_1 \in \theta(f)$ e $w_2 \in \theta(\psi)$ existirem $u \in \theta(M)$, $v \in \theta(Q)$ e $\eta \in \theta(\pi)$ ($\pi : N \times Q \rightarrow N$, projeção usual), tais que:

$$\begin{cases} w_1 = (df)u + \eta \circ (f, \psi) \\ w_2 = (d\psi)u + v \circ \psi \end{cases}$$

Demonstração

\leftarrow Imediata.

\rightarrow Dados $w_1 \in \theta(f)$ e $w_2 \in \theta(\psi)$.

Sejam $u_1 \in \theta(M)$ e $v_1 \in \theta(Q)$, tais que $w_2 = (d\psi)u_1 + v_1 \circ \psi$ (ψ é infinitesimalmente estável).

Usando agora a hipótese, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 - (df)u_1 = (df)u + \eta \circ (f, \psi) \\ 0 = (d\psi)u + v \circ \psi \end{array} \right.$$

Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = (df)(u+u_1) + \eta \circ (f, \psi) \\ w_2 = (d\psi)(u+u_1) + (v+v_1) \circ \psi \end{array} \right.$$

3. DEFINIÇÃO. Seja $M \xrightarrow{f} N$. Uma *deformação de f* é uma aplicação diferenciável $F : M \times I_\epsilon \rightarrow N \times I_\epsilon$ onde:

(i) Para cada $s \in I_\epsilon$, $F(M \times \{s\}) \subset N \times \{s\}$.

Denotemos por F_s a aplicação de $M \rightarrow N$ definida por:

$$F(x, s) = (F_s(x), s)$$

(ii) $F_0 = f$

$$I_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}, \quad \epsilon > 0$$

4. DEFINIÇÃO. Consideremos $Q \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$. Uma *deformação F de f é ψ -trivial* se existem difeomorfismos h, k e ℓ , tais que $h(x, 0) = (x, 0)$, $\ell(z, 0) = (z, 0)$, $k(y, 0; z, 0) = (y, 0; z, 0)$, h, k e ℓ conservando níveis, satisfazendo a comutatividade do esquema abaixo (onde $0 < \delta \leq \epsilon$)

$$\begin{array}{ccccc}
 M \times I_\delta & \xrightarrow{(F, \Psi)} & (N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta) & \xrightarrow{\pi} & Q \times I_\delta \\
 \downarrow h & & \downarrow k & & \downarrow \ell \\
 M \times I_\delta & \xrightarrow{(f \times \text{Id}, \Psi)} & (N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta) & \xrightarrow{\pi} & Q \times I_\delta
 \end{array}$$

onde $\Psi = \psi \times \text{Id}$.

Diremos que f é ψ -homotopicamente estável se toda deformação de f for ψ -trivial.

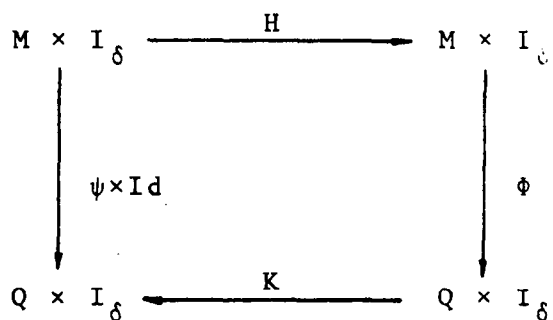
5. PROPOSIÇÃO. Consideremos ψ uma aplicação própria, estável, na topologia C^∞ de Whitney. Seja $Q \leftarrow \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$. Então f é ψ -homotopicamente estável se, e somente se, dadas deformações F de f e Φ de ψ , tivermos difeomorfismos h , k e ℓ tais que $h(x,0) = (x,0)$, $\ell(z,0) = (x,0)$ e $k(y,0;z,0) = (y,0;z,0)$, h , k e ℓ conservando níveis, satisfazendo a comutatividade do esquema abaixo:

$$\begin{array}{ccccc}
 M \times I_\delta & \xrightarrow{(F, \Phi)} & (N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta) & \xrightarrow{\pi} & Q \times I_\delta \\
 \downarrow h & & \downarrow k & & \downarrow \ell \\
 M \times I_\delta & \xrightarrow{(f \times \text{Id}, \psi \times \text{Id})} & (N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta) & \xrightarrow{\pi} & Q \times I_\delta
 \end{array}$$

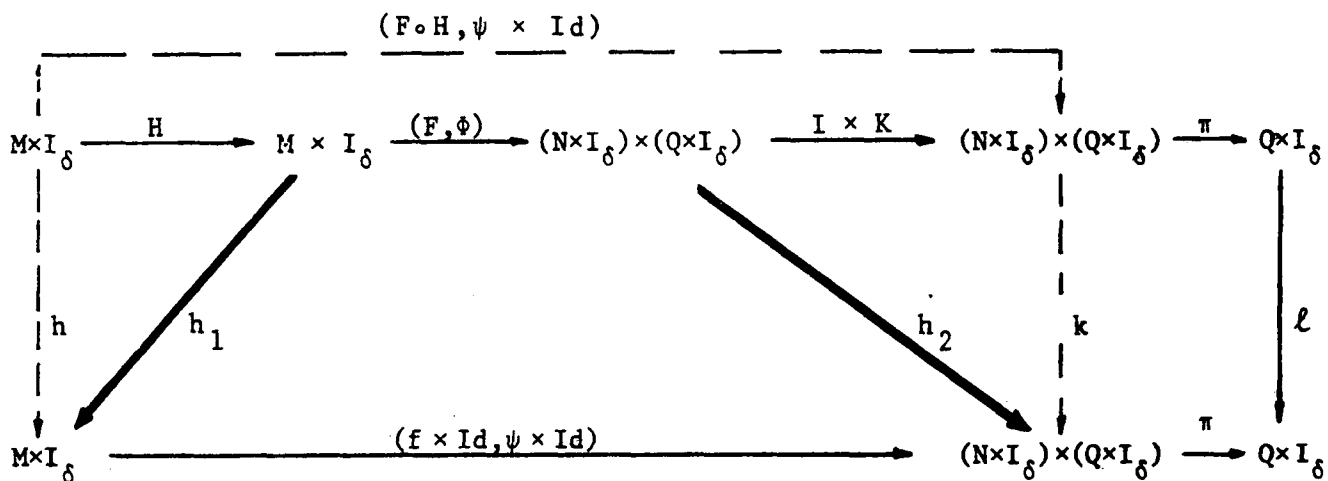
Demonstração

\leftarrow Imediata.

→ Sejam F e ϕ deformações de f e ψ respectivamente. Como ψ é estável e própria existem $\delta (0 < \delta \leq \epsilon)$ e difeomorfismos H e K com $H(x,0) = (x,0)$ e $K(z,0) = (z,0)$, conservando níveis, tais que o diagrama abaixo seja comutativo:



Temos, assim, o esquema:



Observando que $F \circ H$ é uma deformação de f , temos, pela hipótese, garantida a existência de difeomorfismos h , k e ℓ comutando o diagrama (conservam níveis e no nível zero são identidades).

Definimos os difeomorfismos:

$$h_1 : M \times I_\delta \rightarrow M \times I_\delta$$

$$h_1 = h \circ H^{-1}$$

$$h_2 : (N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta) \rightarrow (N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta)$$

$$h_2 = k \circ (I \times K)$$

$$h_3 : Q \times I_\delta \rightarrow Q \times I_\delta$$

$$h_3 = l \circ K$$

Logo, o seguinte esquema é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 M \times I_\delta & \xrightarrow{(F, \phi)} & (N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta) & \xrightarrow{\pi} & Q \times I_\delta \\
 \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 \\
 M \times I_\delta & \xrightarrow{(f \times Id, \psi \times Id)} & (N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta) & \xrightarrow{\pi} & Q \times I_\delta
 \end{array}$$

6. DEFINIÇÃO. Consideremos $Q \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$. Diremos que f é ψ -estável se existir vizinhança V_f de f , na topologia C^∞ de Whitney, tal que, para cada $g \in V_f$ existam difeomorfismos h , k e l de modo que o esquema a seguir seja comutativo (π - projeção usual):

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{(g, \psi)} & N \times Q & \xrightarrow{\pi} & Q \\
 \downarrow h & & \downarrow k & & \downarrow l \\
 M & \xrightarrow{(f, \psi)} & N \times Q & \xrightarrow{\pi} & Q
 \end{array}$$

Quando existe um tal esquema, dizemos que f é ψ -equivalente a g .

Enunciaremos, a seguir, um resultado (de [13], p. 267), que será utilizado na demonstração do próximo lema:

"Se $\psi : M \rightarrow Q$ é estável e própria, então existem uma vizinhança U de ψ em $C^\infty(M, Q)$ e aplicações contínuas $H_1 : U \rightarrow \text{Diff}^\infty(M)$ e $H_2 : U \rightarrow \text{Diff}^\infty(Q)$, tais que $H_1(\psi) = \text{Id}_M$, $H_2(\psi) = \text{Id}_Q$ e $g = H_2(g) \circ \psi \circ H_1(g)$, $\forall g \in U$ ".

7. LEMA. Consideremos $Q \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$, onde ψ é estável e própria. f é ψ -estável se, e somente se, existem vizinhanças W_f de f e W_ψ de ψ , nas respectivas topologias C^∞ de Whitney, que para cada $g \in W_f$ e $\varphi \in W_\psi$ existam difeomorfismos h , k e ℓ , de modo que o esquema abaixo seja comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{(g, \psi)} & N \times Q & \xrightarrow{\pi} & Q \\
 \downarrow h & & \downarrow k & & \downarrow \ell \\
 M & \xrightarrow{(f, \psi)} & N \times Q & \xrightarrow{\pi} & Q
 \end{array}$$

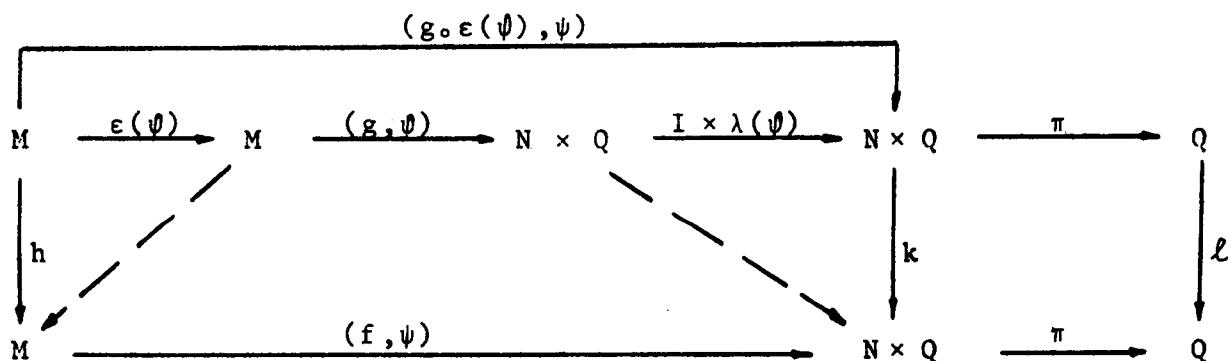
Demonstração

← Imediata.

→ Como ψ é estável e própria, sabemos que existe vizinhança W_ψ de ψ em $C^\infty(M, Q)$, tal que se $\varphi \in W_\psi$ então $\varphi = \lambda(\varphi) \circ \psi \circ \varepsilon(\varphi)$, onde λ e ε são contínuas em W_ψ , com $\lambda(\varphi) = \text{Id}_Q$ e $\varepsilon(\varphi) = \text{Id}_M$.

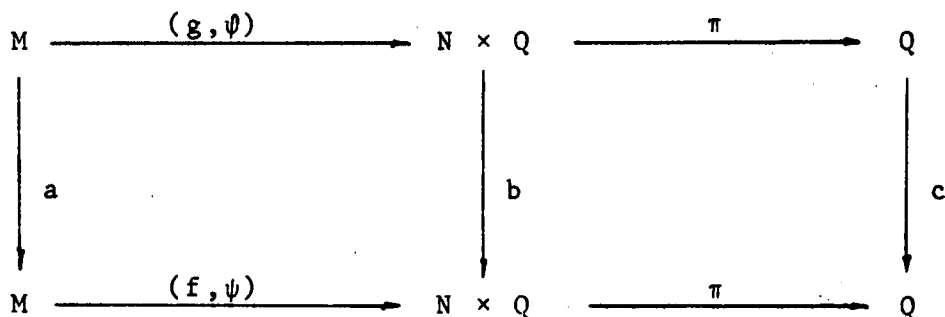
Tomando φ suficientemente próxima de ψ , teremos que $\varepsilon(\varphi)$ está suficientemente próximo do difeomorfismo Id_M . Além disso, existe vizinhança W_f de f , tal que $g \circ \varepsilon(\varphi) \in W_f$, para toda $g \in W_f$ [W_f da definição 6].

Assim, temos garantida a comutatividade do esquema abaixo:



Tomemos agora os difeomorfismos $a : M \rightarrow M$, $b : N \times Q \rightarrow N \times Q$, $c : Q \rightarrow Q$ dados por $a = h \circ [\epsilon(\psi)]^{-1}$, $b = k \circ (I \times \lambda(\psi))$ e $c = \ell \circ \lambda(\psi)$.

Teremos então a comutatividade do esquema:



8. DEFINIÇÃO. Consideremos $Q \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$. Diremos que

(f, ψ) é *D-estável* se o diagrama

$M \xrightarrow{(f, \psi)} N \times Q \xrightarrow{\pi} Q$ for estável, isto é, existem vizinhanças V_f , V_ψ e V_π , tais que se $g \in V_f$, $\psi \in V_\psi$ e $\rho \in V_\pi$, então existem difeomorfismos h , k e ℓ tais que o esquema a abaixo seja comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{(g, \psi)} & N \times Q & \xrightarrow{\rho} & Q \\
 \downarrow h & & \downarrow k & & \downarrow \ell \\
 M & \xrightarrow{(f, \psi)} & N \times Q & \xrightarrow{\pi} & Q
 \end{array}$$

(Observe que esta é a definição de estabilidade de diagramas, dada em [3]).

9. PROPOSIÇÃO. Consideremos $Q \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$, onde N é compacta e (f, ψ) é própria. (f, ψ) é D -estável se, e somente se, existem vizinhanças W_f de f e W_ψ de ψ , nas respectivas topologias C^∞ de Whitney, tais que para cada $\bar{f} \in W_f$ e $\bar{\psi} \in W_\psi$ existam difeomorfismos a , b e c , de modo que o esquema abaixo seja comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{(\bar{f}, \bar{\psi})} & N \times Q & \xrightarrow{\pi} & Q \\
 \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c \\
 M & \xrightarrow{(f, \psi)} & N \times Q & \xrightarrow{\pi} & Q
 \end{array}$$

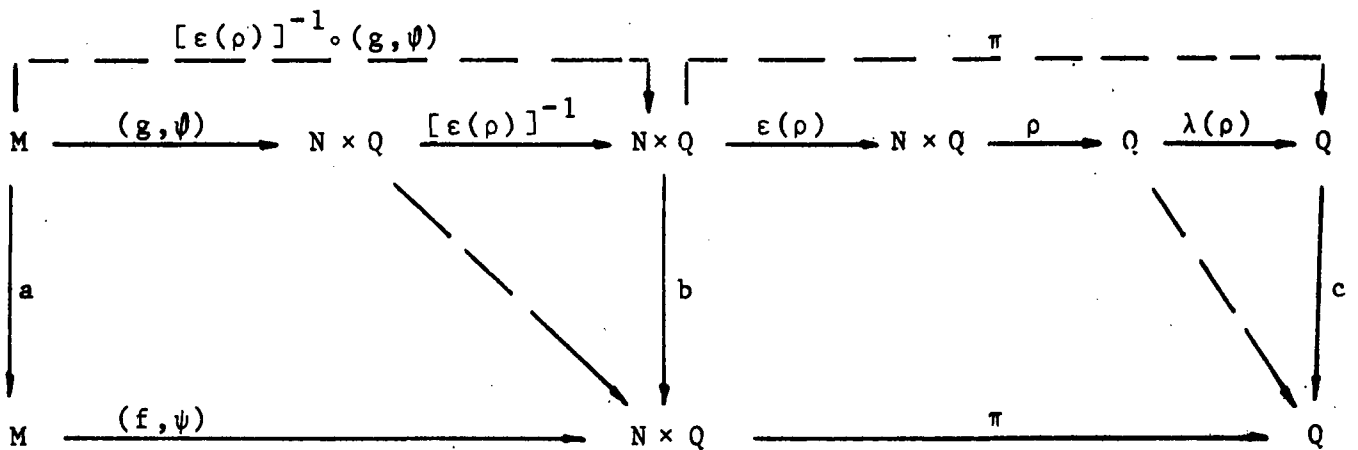
Demonstração

\longrightarrow Imediata.

\longleftarrow Como π é submersão e própria (pois N é compacta), existe vizinhança V_π de π em $C^\infty(N \times Q, Q)$ de modo que se $\rho \in V_\pi$ então $\pi = \lambda(\rho) \circ \rho \circ \varepsilon(\rho)$, onde λ e ε são contínuas em V_π , com $\lambda(\pi) = I_Q$ e $\varepsilon(\pi) = I_{N \times Q}$.

Tomando ρ suficientemente próxima de π , teremos $[\epsilon(\rho)]^{-1}$ suficientemente próximo de $I_{N \times Q}$ e além disso, existem vizinhanças V_f de f e V_ψ de ψ , tais que $[\epsilon(\rho)]^{-1} \circ (g, \psi) \in W_f \times W_\psi$, para toda $g \in V_f$ e $\psi \in V_\psi$ [observe: como (f, ψ) é própria, se (g, ψ) está suficientemente próxima de (f, ψ) , então (g, ψ) é própria].

Temos assim garantida a comutatividade do esquema abaixo:



Tomemos agora os difeomorfismos $h : M \rightarrow M$, $k : N \times Q \rightarrow N \times Q$ e $l : Q \rightarrow Q$, dados por $h = a$, $k = b \circ [\epsilon(\rho)]^{-1}$ e $l = c \circ \lambda(\rho)$. Disto, temos que (f, ψ) é D-estável.

10. COROLÁRIO. Consideremos $Q \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$ com ψ estável e própria, (f, ψ) própria e N compacta. Então f é ψ -estável se, e somente se, (f, ψ) é D-estável.

Demonstração

Basta aplicar o Lema 7 e a Proposição 9.

Encerramos este parágrafo examinando exemplos onde a ψ -estabilidade de f não é equivalente à estabilidade do diagrama $((f, \psi)$ não é D-estável).

Exemplo

Consideremos:

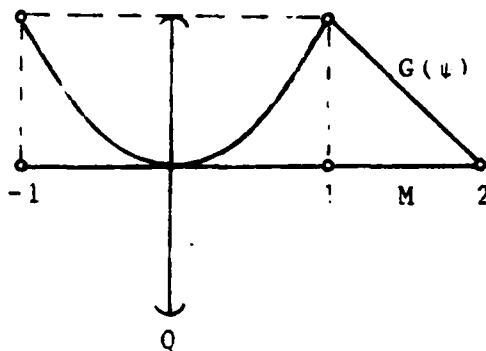
$$N = M = (-1, 1) \quad (1, 2)$$

$$Q = (-1, 1)$$

$$f : M \rightarrow N, \quad f(x) = x$$

$$g : M \rightarrow Q$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in (-1, 1) \\ 2-x & \text{se } x \in (1, 2) \end{cases}$$



Observemos:

- (i) ψ não é própria.
- (ii) ψ é infinitesimalmente estável.
- (iii) ψ não é estável, uma vez que ψ tem a propriedade: $\forall a \in \mathbb{R}, \psi^{-1}(a)$ contém 0, 1 ou 3 pontos. Esta propriedade pode ser destruída por perturbações arbitariamente próximas.
- (iv) f é ψ -estável. Podemos tomar $g \sim f$, tal que $g'(x) = 0, \forall x \in M$. No diagrama, tomamos $h = \text{Id}_M$ e $k(u, v) = (g(u), v)$.
- (v) O diagrama $M \xrightarrow{(f, \psi)} N \times Q \xrightarrow{\pi} Q$ é infinitesimalmente estável, isto é: Dados $w \in \theta(f, \psi)$ e $\bar{w} \in \theta(\pi)$

temos

$$\begin{cases} w = (d(f, \psi))u + \eta \circ (f, \psi) \\ \bar{w} = (d\pi)\eta + \gamma \circ \pi \end{cases}$$

Ainda:

O diagrama $M \xrightarrow{(f, \psi)} N \times Q \xrightarrow{\pi} Q$ não é estável. De acordo com a definição precedente, diremos que (f, ψ) não é D-estável.

Este exemplo mostra que a ψ -estabilidade de f não é equivalente à estabilidade do diagrama e que a estabilidade do diagrama não é equivalente à estabilidade infinitesimal do mesmo.

2.º Exemplo

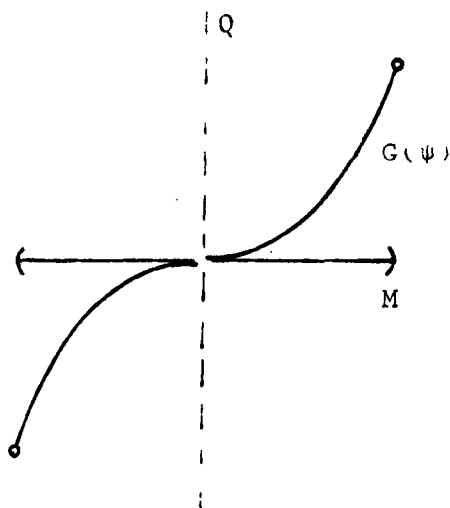
Consideremos:

$$M = (-1, 0) \cup (0, 1)$$

$$N = (-1, 1) \quad Q = \mathbb{R}$$

$$f : M \rightarrow N, \quad f(x) = x$$

$$\psi : M \rightarrow Q, \quad \psi(x) = x^3$$



Observemos:

- (i) ψ não é própria.
- (ii) ψ é infinitesimalmente estável. (Dado $w(x)$, fazemos $u(x) = \frac{w(x)}{3x^2}$).
- (iii) ψ é estável. (Tomamos $\phi \sim \psi$, tal que $\phi'(x) > 0$).
- (iv) f é " ψ -estável" (não necessariamente C^∞). Seja $\varepsilon(x)$ chata em 0 ($\varepsilon \in C^\infty$) com $\varepsilon(0) = 0$, $\varepsilon(x) > 0$ para $x \neq 0$, descrevendo uma vizinhança V_f em $(-1, 0) \cup (0, 1)$ tal que $\forall g \in V_f, g'(x) > 0$.

$$\text{Seja } \bar{g} \text{ tal que } \bar{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$|\bar{g}(x) - x| \leq \varepsilon(x), \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\bar{g}(x) - x|}{|x|} = 0. \quad \text{Logo } \bar{g} \text{ é diferenciável em } 0.$$

No diagrama tomamos $h = \text{Id}_M$ e $k(u, v) = (\bar{g}(u), v)$.

- (v) O diagrama $M \xrightarrow{(f, \psi)} N \times Q \xrightarrow{\pi} Q$, é infinitesimalmente estável.

Ainda:

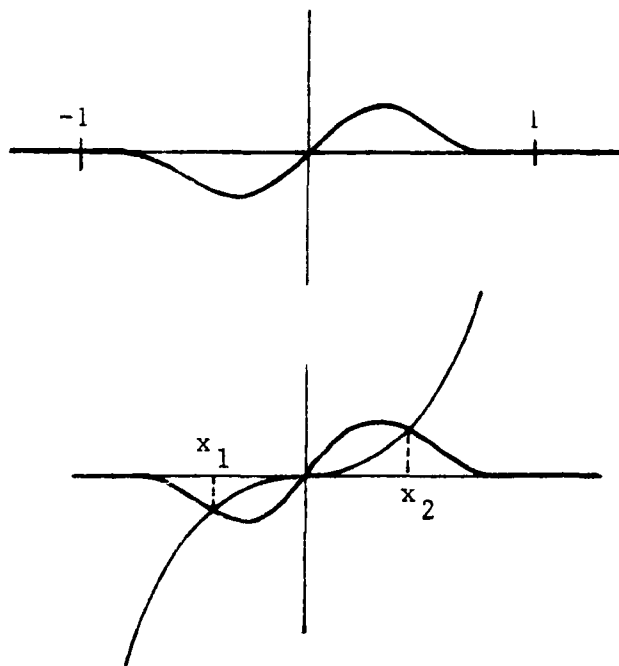
O diagrama $M \xrightarrow{(f, \psi)} N \times Q \xrightarrow{\pi} Q$, onde $\pi(u, v) = v$, não é estável.

De fato:

Podemos considerar, arbitrariamente próxima da aplicação nula, uma aplicação

$\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cujo gráfico tem o aspecto ao lado ($\varepsilon'(0) > 0$).

Notemos que a equação $x^3 - \varepsilon(x) = 0$ admite duas soluções em M : x_1 e x_2 .



Definimos, agora:

$$\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\rho(u, v) = v - \varepsilon(u). \quad \text{Logo, } \rho \sim \pi.$$

Temos:

$$[\pi \circ (f, \psi)]^{-1}\{p\} = \psi^{-1}\{p\} = \{q\}, \quad \text{para todo } p \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$[\pi \circ (f, \psi)]^{-1}\{0\} = \psi^{-1}\{0\} = \emptyset$$

Por outro lado:

$$[\rho \circ (f, \psi)]^{-1}\{0\} = \{x / x^3 = \varepsilon(x)\} = \{x_1, x_2\}$$

Assim, em qualquer vizinhança da aplicação π , existe uma aplicação do tipo ρ , tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{(f, \psi)} & N \times Q & \xrightarrow{\rho} & Q \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{(f, \psi)} & N \times Q & \xrightarrow{\pi} & Q
 \end{array}$$

não seja comutativo.

Novamente, a ψ -estabilidade de f não é equivalente à estabilidade do diagrama.

§ 2. Caracterização das Deformações ψ -Triviais

Neste parágrafo estaremos considerando M compacta.

Seja V vizinhança de 0 em R e t coordenada standard em R .

1. DEFINIÇÃO. Consideremos $M \xrightarrow{g} P$ e G uma deformação de g . Definimos o campo vetorial ao longo de G

$$\tau_G = (dG)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - G^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

onde $\frac{\partial}{\partial t}$ é um campo vetorial sobre $M \times R$ ou $P \times R$, conforme o caso.

Estabeleceremos uma notação:

Sejam

$$\Omega : M \times R \rightarrow M$$

$$\Lambda : M \times R \rightarrow R \quad \text{as projeções usuais.}$$

Então, $T(M \times R) = \Omega^*(TM) \oplus \Lambda^*(TR)$. Qualquer vetor $\xi \in T(M \times R)$ pode ser escrito de maneira única como $\xi = \xi_M + \xi_R$, onde $\xi_M \in \Omega^*(TM)$ e $\xi_R \in \Lambda^*(TR)$. Chamamos ξ_M a M-componente de ξ e ξ_R a R-componente de ξ , denotando:

$$\tau_M = \Lambda(\xi)$$

$$\tau_R = \Lambda(\zeta)$$

2. LEMA. Seja G uma deformação de g . Então $G = g \times \text{Id}_V$ se, e somente se, $\tau_G = 0$. Em particular, G é independente de t , se $\tau_G = 0$.

Para a prova deste lema o leitor poderá consultar [10], p. 123.

3. TEOREMA. Consideremos $Q \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$. Seja F uma deformação de f . Então F é ψ -trivial se, e somente se, existem $I_\delta = (-\delta, \delta) \subset I_\varepsilon$, $\xi \in \theta(M \times I_\delta)$, $\eta \in \theta(Q \times I_\delta)$ e $\gamma \in \theta(\pi)$ ($\pi : (N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta) \rightarrow N \times I_\delta$, projeção usual), satisfazendo:

$$(i) \quad \Lambda(\xi) = \Lambda(\eta) = \Lambda(\gamma) = 0$$

$$(ii) \quad \tau_F = (dF)(\xi) + \gamma_0(F, \Psi)$$

$$(iii) \quad 0 = (d\Psi)(\xi) + \eta_0\Psi$$

sobre $M \times I_\delta$, onde $\Psi = \psi \times \text{Id}$.

Demonstração

Primeiramente, notemos que para qualquer deformação G de g , a R -componente de $(dG)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right)$ é $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{G(p)}$, desde que $\Lambda \circ G = \Lambda$.

Assim,

$$(dG)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{G(p)} + \Omega(dG)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right)$$

ou seja,

$$\tau_G(p) = \Omega(dG)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right).$$

Condição necessária

Assumimos que F é ψ -trivial.

Então, existem I_δ e difeomorfismos h_1 , h_2 e h_3 , satisfazendo a Definição 4, § 1.

$$\begin{array}{ccccc} p \in M \times I_\delta & \xrightarrow{(F, \Psi)} & (N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta) & \xrightarrow{\pi} & Q \times I_\delta \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_3 = (\bar{h}_3, h_2) & & \downarrow h_2 \\ M \times I_\delta & \xrightarrow{(f \times \text{Id}, \psi)} & (N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta) & \xrightarrow{\pi} & Q \times I_\delta \\ & & \downarrow \psi & & \\ & & (s, z) & & \end{array}$$

Lembre-se: $\Psi = \psi \times \text{Id}$

$$(s, z) = (f \times \text{Id}, \psi \times \text{Id})(h_1(p))$$

Observe ainda que $h_3^{-1} = (\bar{h}_3, h_2^{-1})$.

$$d(F, \Psi)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) = \left((dF)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right), (d\Psi)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) \right)$$

mas também:

$$\begin{aligned} d(F, \Psi)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) &= [(dh_3^{-1})_{(s, z)} \circ d(f \times \text{Id}, \psi \times \text{Id})_{h_1(p)} \circ \\ &\circ (dh_1)_p] \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) = (dh_3^{-1})_{(s, z)} \circ d(f \times \text{Id}, \psi \times \text{Id})_{h_1(p)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{h_1(p)} \right. \\ &\left. + \Omega_M(dh_1)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) \right] = (dh_3^{-1})_{(s, z)} [d(f \times \text{Id})_{h_1(p)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{h_1(p)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Omega_M(dh_1)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) ; d(\psi \times \text{Id})_{h_1(p)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{h_1(p)} \right. \\
& \left. + \Omega_M(dh_1)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) \right)] = (dh_3^{-1})_{(s,z)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \Big|_s \right. \\
& \left. + d(f \times \text{Id})_{h_1(p)} \left(\Omega_M(dh_1)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) \right) ; \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial t} \Big|_z + d(\psi \times \text{Id})_{h_1(p)} \left(\Omega_M(dh_1)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) \right) \right] \\
& = (\partial_1 h_3^{-1})_{(s,z)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_s \right) \\
& + (\partial_1 h_3^{-1})_{(s,z)} d(f \times \text{Id})_{h_1(p)} \left(\Omega_M(dh_1)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) \right) \\
& + (\partial_2 h_3^{-1})_{(s,z)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_z \right) \\
& + (\partial_2 h_3^{-1})_{(s,z)} d(\psi \times \text{Id})_{h_1(p)} \left(\Omega_M(dh_1)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) \right) \\
& = (\partial_1 h_3^{-1})_{(s,z)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_s \right) + (\partial_2 h_3^{-1})_{(s,z)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_z \right) \\
& + (dh_3^{-1})_{(s,z)} d(f \times \text{Id}, \psi \times \text{Id})_{h_1(p)} \Omega_M(dh_1)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) \quad (*)
\end{aligned}$$

Seja $\xi(p) = (dh_1^{-1})_{h_1(p)} \Omega_M(dh_1)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right)$.

Assim, ξ é um campo vetorial sobre

$$\begin{aligned}
M \times I_\delta \quad \text{e} \quad \Lambda(\xi) &= \Lambda(dh_1^{-1})_{h_1(p)} \Omega_M(dh_1)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) \\
&= \Lambda \Omega_M(dh_1^{-1})_{h_1(p)} \Omega_M(dh_1)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) = 0,
\end{aligned}$$

pois h_1^{-1} é uma deformação da identidade e $\Lambda \Omega_M = 0$.

Agora, inserimos $(dh_1)_p \circ (dh_1^{-1})_{h_1(p)}$ antes de Ω_M no último termo de (*), e obtemos:

$$d(F, \Psi)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) = (\partial_1 h_3^{-1})_{(s, z)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_s \right) \\ + (\partial_2 h_3^{-1})_{(s, z)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_z \right) + d(F, \Psi)_p (\xi_p).$$

Logo,

$$\left((dF)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right), (d\Psi)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) \right) = \left((dF)_p (\xi_p), (d\Psi)_p (\xi_p) \right) \\ + (dh_3^{-1})_{(s, z)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_s \right), \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_z \right) = \left((dF)_p (\xi_p), (d\Psi)_p (\xi_p) \right) \\ + \left((d\bar{h}_3)_{(s, z)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_s, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_z \right); (dh_2^{-1})_z \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_z \right) \right) \\ \therefore (dF)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) = (dF)_p (\xi_p) + (d\bar{h}_3)_{(s, z)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_s, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_z \right)$$

e

$$(**) \quad (d\Psi)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) = (d\Psi)_p (\xi_p) + (dh_2^{-1})_z \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_z \right)$$

Assim,

$$(***) \quad \tau_F(p) = (dF)_p (\xi_p) + (d\bar{h}_3)_{(s, z)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_s, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_z \right) - \frac{\partial}{\partial t} \Big|_F(p)$$

Definimos:

$$\gamma(x, q) = (d\bar{h}_3)_{h_3(x, q)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\bar{h}_3(x, q)}, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{h_2(q)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \Big|_x$$

γ é um campo vetorial satisfazendo as condições do Teorema.

Substituindo γ em (**), temos:

$$\begin{aligned}\tau_F(p) &= (dF)_p(\xi_p) + \gamma(h_3^{-1}(s, z)) \\ &= (dF)_p(\xi_p) + \gamma(F(p), \Psi(p))\end{aligned}$$

Então,

$$\tau_F = (dF)(\xi) + \gamma \circ (F, \Psi).$$

Ainda, voltando em (**):

$$(\text{****}) \quad (d\Psi)_p\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_p\right) = (d\Psi)_p(\xi_p) + \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{h_2^{-1}(z)} + \Omega_Q(dh_2^{-1})_z\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_z\right).$$

Definimos:

$$\eta_q = \Omega_Q(dh_2^{-1})_{h_2(q)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{h_2(q)}\right)$$

Claramente, η é um campo vetorial sobre $Q \times I_\delta$ com R componente nula.

Substituindo η em (****) e lembrando que $\tau_\Psi = 0$ ($\Psi = \psi \times \text{Id}$), temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{\Psi(p)} = (d\Psi)_p(\xi_p) + \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{h_2^{-1}(z)} + \eta_{h_2^{-1}(z)}$$

mas $h_2^{-1}(z) = \Psi(p)$ e assim

$$0 = (d\Psi)(\xi) + \eta \circ \Psi$$

Antes de provarmos a recíproca, vejamos um resultado auxiliar:

LEMA A. Seja ξ um campo vetorial a suporte compacto sobre $M \times \mathbb{R}$, tal que a \mathbb{R} componente de ξ seja nula. Então, existe um difeomorfismo $g : M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$, satisfazendo:

$$g(x, t) = (g_t(x), t)$$

$$g(x, 0) = (x, 0)$$

$$(dg)_{(x, t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(x, t)} \right) = \left(\xi + \frac{\partial}{\partial t} \right) \Big|_{g(x, t)}$$

Para a prova deste Lema o leitor poderá consultar [10], p. 125.

LEMA B. Usando as notações do Lema A, temos:

$$(i) \quad \xi g = \Omega_M(dg) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$$

$$(ii) \quad \xi = -(dg) \Omega_M(dg^{-1}) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$$

Voltemos então à prova do Teorema 3:

Condição Suficiente

Seja F uma deformação de f e I_δ , ξ , η , γ , tais que:

$$(i) \quad \Lambda(\xi) = \Lambda(\eta) = \Lambda(\gamma) = 0$$

$$(ii) \quad \tau_F = (dF)(\xi) + \gamma \circ (F, \Psi) \quad \text{sobre } M \times I_\delta$$

$$(iii) \quad 0 = (d\Psi)(\xi) + \eta \circ \Psi$$

Precisamos mostrar que F é ψ -trivial.

Sendo M compacta, ξ é trivialmente a suporte compacto.

Podemos considerar os campos vetoriais sobre $(N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta)$, definidos por $\bar{\eta} = (0, \eta)$ e $\bar{\gamma} = (\gamma, 0)$.

Diminuindo δ , podemos supor que $\tau_F = (dF)(\xi) + \gamma \circ (F, \Psi)$ e $0 = (d\Psi)(\xi) + \eta \circ \Psi$ sobre $M \times \bar{I}_\delta$. Podemos então tomar η nulo $[(\gamma, \eta)\text{-nulo}]$ fora de uma vizinhança compacta de $F(M \times \bar{I}_\delta)$. [fora de uma vizinhança compacta de $(F, \Psi)(M \times \bar{I}_\delta)$] e assumir então que η e (γ, η) são a suporte compactos.

Aplicando o Lema B, sabemos da existência de difeomorfismos:

$$G : M \times I_\delta \rightarrow M \times I_\delta$$

$$H : Q \times I_\delta \rightarrow Q \times I_\delta$$

$$L : (N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta) \rightarrow (N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta)$$

conservando níveis e $G(x, 0) = (x, 0)$, $H(y, 0) = (y, 0)$ e $L(y, 0; z, 0) = (y, 0; z, 0)$, satisfazendo:

$$-\xi \circ G^{-1} = \Omega_M(dG^{-1})\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$\eta = -(dH^{-1})\Omega_Q(dH)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$(\gamma, \eta) = -(dL^{-1})\Omega_{N \times Q}(dL)\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

Consideremos o esquema abaixo, onde $(E_1, E_2) = L \circ (F, \Psi) \circ G^{-1}$:

$$\begin{array}{ccccc}
 M \times I_\delta & \xrightarrow{(F, \Psi)} & (N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta) & \xrightarrow{\pi} & Q \times I_\delta \\
 \downarrow G & & \downarrow L & & \downarrow H \\
 M \times I_\delta & \xrightarrow{E = (E_1, E_2)} & (N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta) & \xrightarrow{\pi} & Q \times I_\delta
 \end{array}$$

Observe que a comutatividade da segunda parte do esquema é decorrente do fato de L ser obtido pela integração de um campo de vetores (γ, η) sobre $(N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta)$, com a propriedade de ter a projeção em $T(Q \times I_\delta)$ constante em cada "fibra" (x, q) - para q fixo.

$$\text{Seja } p \in M \times R \text{ e } (r, u) = ((F, \Psi) \circ G^{-1})(p)$$

$$d(E_1, E_2)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) = ((dE_1)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right), (dE_2)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right))$$

mas por outro lado:

$$\begin{aligned} d(E_1, E_2)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) &= [(dL)_{(r, u)} \circ d(F, \Psi)_{G^{-1}(p)} \circ (dG^{-1})_p] \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) \\ &= (dL)_{(r, u)} \circ d(F, \Psi)_{G^{-1}(p)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{G^{-1}(p)} + \Omega_M(dG^{-1})_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) \right] \\ &= (dL)_{(r, u)} \left[(dF)_{G^{-1}(p)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{G^{-1}(p)} + \Omega_M(dG^{-1})_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) \right) ; \right. \\ &\quad \left. (d\Psi)_{G^{-1}(p)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{G^{-1}(p)} + \Omega_M(dG^{-1})_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) \right) \right] \\ &= (dL)_{(r, u)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \Big|_r + \Omega_N(dF)_{G^{-1}(p)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{G^{-1}(p)} \right) \right. \\ &\quad \left. + (dF)_{G^{-1}(p)} \Omega_M(dG^{-1})_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) ; \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial t} \Big|_u + (d\Psi)_{G^{-1}(p)} \Omega_M(dG^{-1})_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) \right] \\ &= (dL)_{(r, u)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \Big|_r + \Omega_N(dF)_{G^{-1}(p)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{G^{-1}(p)} \right) \right. \\ &\quad \left. - (dF)_{G^{-1}(p)} \left(\xi \Big|_{G^{-1}(p)} \right) ; \frac{\partial}{\partial t} \Big|_u - (d\Psi)_{G^{-1}(p)} \left(\xi \Big|_{G^{-1}(p)} \right) \right] \\ &= (dL)_{(r, u)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \Big|_r + \tau_F(G^{-1}(p)) - (dF)_{G^{-1}(p)} \left(\xi \Big|_{G^{-1}(p)} \right) ; \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \Big|_u - (d\Psi)_{G^{-1}(p)} (\xi \Big|_{G^{-1}(p)})] \\
&= (dL)_{(r,u)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_r, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_u \right) + (dL)_{(r,u)} (\gamma(r,u), \eta(u)) \\
&= (dL)_{(r,u)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_r, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_u \right) - \Omega_{N \times Q} (dL)_{(r,u)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_r, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_u \right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\bar{L}(r,u)}, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{H(r)} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{E_1(p)}, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{E_2(p)} \right)
\end{aligned}$$

Assim:

$$\tau_{E_1}(p) = (dE_1)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) - \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{E_1(p)} = 0 \implies E_1 = f \times \text{Id}$$

$$\tau_{E_2}(p) = (dE_2)_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_p \right) - \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{E_2(p)} = 0 \implies E_2 = \psi \times \text{Id}$$

o que significa que a deformação F de f é ψ trivial.

CAPÍTULO III

ψ -ESTABILIDADE INFINITESIMAL E ψ -ESTABILIDADE HOMOTÓPICA

Neste capítulo estaremos considerando M compacta.

1. PROPOSIÇÃO. Consideremos $Q \leftarrow \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$. Se f é ψ -homotopicamente estável, então f é ψ -infinitesimalmente estável.

Demonstração

Para provar que f é ψ -infinitesimalmente estável precisamos produzir para cada campo vetorial $w \in \theta(f)$ campos vectoriais $\xi \in \theta(M)$, $\eta \in \theta(Q)$ e $\gamma \in \theta(\pi)$ tais que:

$$\begin{cases} w = (df)\xi + \gamma \circ (f, \psi) \\ 0 = (d\psi)\xi + \eta \circ \psi \end{cases}$$

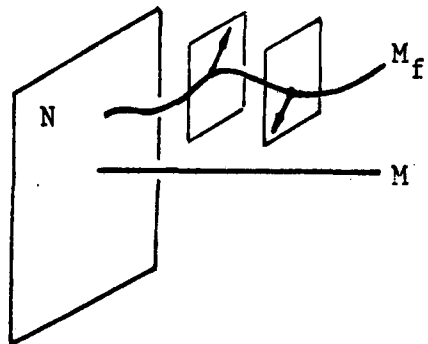
Seja $M_f = \text{graff} \subset M \times N$.

Podemos ver w como um campo vetorial sobre M_f apontando na direção N , como segue:

$$\bar{w}(p, f(p)) = w(p) \in \{0\} \times T_{f(p)}N \subset T_{(p, f(p))}(M \times N)$$

Estendemos \bar{w} a um campo vetorial sobre $M \times N$ a suporte compacto e seja

$\Delta_t : M \times N \rightarrow M \times N$ o grupo a um parâmetro, cujo gerador infinitesimal seja \bar{w} .



Definimos

$$F : M \times R \rightarrow N \times R$$

$$F(x, t) = (\pi_N \Delta_t(x, f(x)), t)$$

onde $\pi_N : M \times N \rightarrow N$ é a projeção usual.

Observemos que $F \in C^\infty$ é tal que

$$F(x, 0) = (\pi_N(x, f(x)), 0) = (f(x), 0)$$

Assim, F é uma deformação de f . Como f é ψ -homotopicamente estável, pelo Teorema 3 do Capítulo II, temos garantida a existência de campos vetoriais $\bar{\xi} \in \theta(M \times I_\delta)$, $\bar{\eta} \in \theta(Q \times I_\delta)$ e $\bar{\gamma} \in \theta(\pi)$ ($\pi : (N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta) \rightarrow N \times I_\delta$, projeção usual), com R componentes nulas satisfazendo:

$$\begin{cases} \tau_F = (dF)(\bar{\xi}) + \bar{\gamma} \circ (F, \Psi) \\ 0 = (d\Psi)(\bar{\xi}) + \bar{\eta} \circ \Psi \end{cases}$$

sobre $M \times I_\delta$, onde $\Psi = \psi \times \text{Id}$.

Restringindo a $M \times \{0\}$, obtemos:

$$\begin{cases} \tau_F|_{M \times \{0\}} = (df)\xi + \gamma \circ (f, \psi) \\ 0|_{M \times \{0\}} = (d\psi)(\xi) + \eta \circ \psi \end{cases}$$

onde $\xi_p = \bar{\xi}(p, 0)$, $\eta_r = \bar{\eta}(r, 0)$ e $\gamma(r, q) = \bar{\gamma}(r, 0; q, 0)$ definem campos vetoriais sobre M , Q e ao longo de π , respectivamente, já que as R -componentes de $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\gamma}$ são nulas.

Para finalizar, mostremos que $\tau_F(p, 0) = w_p$.

Sabemos que

$$\tau_F(p, 0) = \Omega_N(dF)_{(p, 0)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(p, 0)} \right)$$

A curva $t \rightarrow (p, t)$ representa $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(p, 0)}$ de modo que $t \rightarrow \pi_N \Delta_t(p, f(p))$ representa $\tau_F(p, 0)$.

Agora:

$$\frac{d}{dt} \pi_N \Delta_t(p, f(p)) \Big|_{t=0} = (d\pi_N)_{(p, f(p))} \bar{w}_{(p, f(p))} = w_p$$

visto que $\bar{w}_{(p, f(p))}$ aponta na N-direção.

$$\text{Assim, } \tau_F(p, 0) = w_p.$$

De agora em diante nos preocuparemos em obter a recíproca da Proposição 1. A idéia é aplicar o Teorema 3 do Capítulo II, § 2. Primeiramente, mostraremos que ξ , η e γ existem localmente (na realidade, com a hipótese de ψ ser infinitesimalmente estável, obtemos um resultado mais geral). Isto é feito na seguinte:

2. PROPOSIÇÃO. Se f é localmente ψ -infinitesimalmente estável em $p \in M$ e ψ é infinitesimalmente estável, então existem germes de campos vetoriais ξ , η e γ com R-componentes nulas, tais que:

$$\begin{cases} \tau_F = (dF)\xi + \gamma \circ (F, \Phi) \\ \tau_\Phi = (d\Phi)\xi + \eta \circ \Phi \end{cases}$$

a nível de germe em $(p, 0)$.

(onde F é uma deformação de f e Φ é uma deformação de ψ . Diremos, neste caso, que (F, Φ) é uma deformação de (f, ψ)).

Sejam $Z = \{ \text{germes em } (p,0) \text{ de campos vetoriais } w : M \times R \rightarrow T((N \times R) \times (Q \times R)) \text{ ao longo de } (F, \phi) \text{ com } R\text{-componentes nulas} \}$

$K = \{ d(F, \phi)[\xi]_{(p,0)} / \xi \text{ é um campo vetorial sobre } M \times R, \text{ com } R\text{-componente nula} \}$.

Existe uma ação de $C_{(p,0)}^\infty(M \times R)$ sobre Z , dada pela multiplicação, tornando Z um módulo sobre $C_{(p,0)}^\infty(M \times R)$ finitamente gerado. Se escolhermos coordenadas x_1, \dots, x_m baseadas em p sobre M , y_1, \dots, y_n baseadas em $f(p)$ sobre N e z_1, \dots, z_q baseadas em $\psi(p)$ sobre Q , então todo germe em $(p,0)$ de campo vetorial ao longo de (F, ϕ) com R -componentes nulas pode ser escrito como:

$$\left(\sum_{i=1}^n \tau_i(x,t) \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_F ; \sum_{j=1}^q \theta_j(x,t) \frac{\partial}{\partial z_j} \Big|_\phi \right)$$

Ainda, $K \subset Z$ como submódulo sobre $C_{(p,0)}^\infty(M \times R)$.

Desta maneira, $A = Z|_K$ pode ser visto como um módulo sobre $C_{(p,0)}^\infty(M \times R)$ finitamente gerado. Via ϕ^* , A pode ser considerado como um $C_{(\psi(p),0)}^\infty(Q \times R)$ -módulo.

$$C_{(\psi(p),0)}^\infty(Q \times R) \xrightarrow{\phi^*} C_{(p,0)}^\infty(M \times R)$$

$Z|_K$
 \vdots
 \vdots
 \vdots

Afirmação: $A_\phi^P = A = Z|_K$ é finitamente gerado como $C_{(\psi(p),0)}^\infty(Q \times R)$ -módulo, com um conjunto de geradores dado por:

$e_i =$ projeção de $(\frac{\partial}{\partial y_i}|_F, 0)$ em A

$\bar{e}_j =$ projeção de $(0, \frac{\partial}{\partial z_j}|_\phi)$ em A

$(i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots, q)$.

Primeiramente mostraremos que a afirmação \tilde{e} é suficiente para provarmos a proposição.

Em A :

$$(\tau_F, \tau_\phi) = (i \sum_{i=1}^n (\gamma_i \circ \phi) \frac{\partial}{\partial y_i} |_F ; j \sum_{j=1}^q (\eta_j \circ \phi) \frac{\partial}{\partial z_j} |_F)$$

Assim, em Z :

$$\tau_F = (dF)\xi + i \sum_{i=1}^n (\gamma_i \circ \phi) \frac{\partial}{\partial y_i} |_F$$

$$\tau_\phi = (d\phi)\xi + j \sum_{j=1}^q (\eta_j \circ \phi) \frac{\partial}{\partial z_j} |_F = (d\phi)\xi + (j \sum_{j=1}^q \eta_j \frac{\partial}{\partial z_j}) \circ \phi$$

Agora, $\eta = j \sum_{j=1}^q \eta_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ tem R -componente nula e

$$\tau_\phi = (d\phi)\xi + \eta \circ \phi \quad \text{a nível de germe em } (p, 0).$$

Ainda:

$$Q \times R \xrightarrow{\gamma_i} R$$

Definimos

$$(N \times R) \times (Q \times R) \xrightarrow{\tilde{\gamma}_i} R$$

$$\tilde{\gamma}_i(\bar{x}, \bar{y}) = \tilde{\gamma}_i(\bar{y})$$

Logo,

$$\tau_F = (dF)\xi + (i \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_i \frac{\partial}{\partial y_i} |_F) \circ (F, \phi) = (dF)\xi + \gamma \circ (F, \phi)$$

onde $\gamma = \left. \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right|_{\pi}$ satisfaz as condições da proposição.

$$\therefore \tau_F = (dF)\xi + \gamma \circ (F, \phi) \quad \text{a nível de germe em } (p, 0).$$

Para provarmos a afirmação, usaremos o Teorema de Malgrange.

Usando o Teorema de Taylor, escrevemos:

$$(*) \quad w(x, t) = (w^1(x, t); w^2(x, t)) = (w_0^1(x) + t\bar{w}^1(x, t); w_0^2(x) + t\bar{w}^2(x, t))$$

Como w é um campo vetorial ao longo de (F, ϕ) , (w_0^1, w_0^2) é um campo vetorial ao longo de (f, ψ) .

Como f é ψ -infinitesimalmente estável e ψ é infinitesimalmente estável, pela Proposição 2, § 1 do Capítulo II, podemos escrever:

$$\begin{cases} w_0^1 = (df)\xi + \gamma \circ (f, \psi) \\ w_0^2 = (d\psi)\xi + \eta \circ \psi \end{cases}$$

Estendendo ξ , η e γ horizontalmente e aplicando o Teorema de Taylor novamente, obtemos:

$$\begin{aligned} & [w_0^1(x) - ((dF)\xi + \gamma \circ (F, \phi))(x, t) ; w_0^2(x) - ((d\phi)\xi \\ & + \eta \circ \phi)(x, t)] = [t\bar{w}^1(x, t) ; t\bar{w}^2(x, t)] \end{aligned}$$

Substituindo em (*), temos:

$$\begin{aligned} w(x, t) = & [((dF)\xi + \gamma \circ (F, \phi))(x, t) + t\tilde{w}^1(x, t) ; \\ & ((d\phi)\xi + \eta \circ \phi)(x, t) + t\tilde{w}^2(x, t)]. \end{aligned}$$

Consideremos agora o espaço vetorial

$$\frac{A}{(t)A} \approx \frac{Z}{K + (t)Z}$$

A classe de equivalência de w em $A|_{(t)A}$ é igual à de $(\gamma \circ (F, \phi), \eta \circ \phi)$.

Mas

$$\eta \circ \phi = \sum_{j=1}^q (\eta_j \circ \phi) \frac{\partial}{\partial z_j} \Big|_{\phi}$$

$$\gamma \circ (F, \phi) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \circ (F, \phi) \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_F \quad (F = \pi \circ (F, \phi))$$

pois η e γ são extensões triviais de campos.

Assim, as projeções de $(\frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_F, 0)$, $(0, \frac{\partial}{\partial z_j} \Big|_{\phi})$ geram o espaço vetorial $\frac{A}{(t)A}$.

Consideremos o espaço vetorial

$$\frac{A}{\phi^* m(Q \times R)A}$$

Como $(t)A \subset \phi^* m(Q \times R)A$, existe uma natural projeção de $\frac{A}{(t)A}$ sobre $\frac{A}{\phi^* m(Q \times R)A}$.

Logo, as projeções de $(\frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_F, 0)$, $(0, \frac{\partial}{\partial z_j} \Big|_{\phi})$ geram-no como espaço vetorial real.

Agora, aplicando o Teorema de Preparação de Malgrange, obtemos o resultado desejado. (Ver Capítulo I, § 2, Teorema 2).

3. COROLÁRIO. Consideremos $Q \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$ onde ψ é infinitesimalmente estável e f é ψ -infinitesimalmente estável. Seja (F, ϕ) uma deformação de (f, ψ) . Seja ainda $S = \{p_1, \dots, p_s\} \subset \psi^{-1}(q)$. Então, existem uma vizinhança U

de $S \times \{0\}$ em $M \times R$, $\xi \in \theta(M \times I_\delta)$, $\eta \in \theta(N \times I_\delta)$ e $\gamma \in \theta(\pi)$ tais que

- (i) $\Lambda(\xi) = \Lambda(\eta) = \Lambda(\gamma) = 0$
- (ii) $\tau_F = (dF)\xi + \gamma \circ (F, \phi)$
- (iii) $\tau_\phi = (d\phi)\xi + \eta \circ \phi$

sobre U .

Demonstração

O caso de S ser um único ponto é justamente a Proposição anterior. A prova segue análoga àquela, substituindo A_ϕ^P por $A_\phi^S = A_\phi^{P_1} \oplus \dots \oplus A_\phi^{P_S}$ e usando o Lema 4 do Capítulo I, § 2.

Definiremos agora dois subconjuntos de pontos de M e mostraremos que é possível resolver as equações em vizinhanças relacionadas com estes subconjuntos.

4. DEFINIÇÃO. Consideremos $Q \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$.

Diremos que $p \in M$ é um ponto crítico de (f, ψ) se $d(f, \psi)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \times T_{\psi(p)} Q$ não é sobre.

Notação: $p \in \Sigma$.

Diremos que $p \in M$ é um ponto do tipo Σ_1 se existirem $w_1 \in \theta(f)$ e $w_2 \in \theta(\psi)$, tais que:

$$\begin{cases} w_1 = (df)u + v \circ (f, \psi) \\ w_2 = (d\psi)u \end{cases}$$

não tem solução, em u e v , como germe em p .

Notação: $p \in \Sigma_1$.

Logo:

$\Sigma = \{p \in M / \exists m \ w_1 \in \theta(f) \text{ e } w_2 \in \theta(\psi) \text{ tais que}$
 $w_1 = (df)u \text{ e } w_2 = (d\psi)u \text{ não tem solução em } u, \text{ co}$
 $\text{mo germe em } p\}$.

$\Sigma_1 = \{p \in M / \exists m \ w_1 \in \theta(f) \text{ e } w_2 \in \theta(\psi) \text{ tais que}$
 $w_1 = (df)u + v \circ (f, \psi) \text{ e } w_2 = (d\psi)u \text{ não tem solu}$
 $\text{ção em } u \text{ e } v, \text{ como germe em } p\}$.

Observe: (i) $\Sigma_1 \subset \Sigma$.

(ii) Maiores detalhes: vide páginas 89 e 91.

5. LEMA. Seja $Q \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$ com ψ infinitesimalmente es
tável e f ψ -infinitesimalmente estável. Se $\dim(N \times Q) = s$,
então $\Sigma \cap (f, \psi)^{-1}(y, q)$ tem um número de elementos $\leq s$.

Demonstração

Observemos que se ψ é infinitesimalmente estável e f
é ψ -infinitesimalmente estável em particular (f, ψ) é infinitesimalmente
estável e o resultado segue por [10], p. 115, Lema 1.9.

6. LEMA. Se (f, ψ) não admite pontos críticos e

$(F, \phi) : M \times R \rightarrow (N \times R) \times (Q \times R)$ é uma deformação de
 (f, ψ) , então dados $w_1 \in \theta(F)$ e $w_2 \in \theta(\phi)$ com $\Lambda(w_1) = \Lambda(w_2) = 0$,
existe $\xi \in \theta(M \times I_\delta)$ com $\Lambda(\xi) = 0$, tal que:

$$\begin{cases} w_1 = (dF)\xi \\ w_2 = (d\phi)\xi \end{cases}$$

Demonstração

$(f, \psi) : M \rightarrow N \times Q$ é uma submersão. Assim, para t suficientemente pequeno, (F_t, ϕ_t) é uma submersão. Sendo (F, ϕ) uma deformação de (f, ψ) , temos que $(\tilde{F}, \tilde{\phi})$ é uma submersão de $M \times I_\delta \rightarrow N \times Q$, onde $F(x, t) = (\tilde{F}(x, t), t)$ e $\phi(x, t) = (\tilde{\phi}(x, t), t)$.

Assim, $T(M \times I_\delta) = \text{Ker } d(\tilde{F}, \tilde{\phi}) \oplus G$ onde G é um subfibrado complementar. (Ver [10], Proposições 5.14 e 5.15, Capítulo I).

Ainda: $d(\tilde{F}, \tilde{\phi}) : G \rightarrow T(N \times Q)$ é um isomorfismo.

Dados $\bar{w}_1 \in \theta(\tilde{F})$, $\bar{w}_2 \in \theta(\tilde{\phi})$ temos garantida a existência de $\xi \in \theta(M \times I_\delta)$, com $\Lambda(\xi) = 0$, tal que $(\bar{w}_1, \bar{w}_2) = d(\tilde{F}, \tilde{\phi})\xi$. Considerando $w_i = (\bar{w}_i, 0)$, $i = 1, 2$, teremos

$$\begin{cases} w_1 = (dF)\xi \\ w_2 = (d\phi)\xi \end{cases}$$

7. PROPOSIÇÃO. Consideremos $Q \leftarrow \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$, onde ψ é infinitesimalmente estável e f é ψ -infinitesimalmente estável. Então Σ_1 é fechado e $\Sigma_1 \cap \psi^{-1}(q)$ é finito, $\forall q \in Q$.

Demonstração

(i) $\Sigma_1 \cap \psi^{-1}(q)$ é finito, $\forall q \in Q$.

Antes de passarmos à prova deste fato, registraremos aqui um resultado que consta em [3]:

Consideremos o diagrama $M \xrightarrow{(f, \psi)} M \times Q \xrightarrow{\pi} Q$ infinitesimalmente estável (das hipóteses da Proposição temos esta propriedade).

Seja $P_2^q = \{(y, q) \in N \times \{q\} / \exists m \ w_1 \text{ e } w_2 \text{ tais que } w_1 = d(f, \psi)\xi + \gamma_0(f, \psi) \text{ e } w_2 = (d\pi)\gamma \text{ não tem solução em } \xi \text{ e } \gamma, \text{ como germes em } (f, \psi)^{-1}(y, q) \text{ e em } (y, q)\}$.

Por [3] sabemos que P_2^q é finito.

Voltemos então à prova:

$$\begin{aligned} p \in \Sigma_1 \cap \psi^{-1}(q) &\implies (f, \psi)(p) = (y, q) \in P_2^q \\ &\implies p \in (f, \psi)^{-1}(P_2^q) \end{aligned}$$

Podemos fazer então:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 \cap \psi^{-1}(q) &= [\Sigma_1 \cap \psi^{-1}(q)] \cap (f, \psi)^{-1}(P_2^q) \\ &= \Sigma \cap (f, \psi)^{-1}(P_2^q) = \bigcup_{(y, q) \in P_2^q} \Sigma \cap (f, \psi)^{-1}(y, q) \end{aligned}$$

reunião finita de conjuntos finitos.

Logo, $\Sigma_1 \cap \psi^{-1}(q)$ é finito, $\forall q \in Q$.

(ii) Σ_1 é fechado.

Seja $x_0 \in M$ tal que $x_0 \in \Sigma_1$.

Tomemos $(f, \psi)(x_0) = (y_0, q_0) \in N \times Q$.

Então, dado $(w, \bar{w}) \in \theta(f, \psi)_{x_0}$, podemos escrever:

$$(w, \bar{w}) = d(f, \psi)u + (v(f, \psi), 0)$$

a nível de germe em x_0 .

Esta equação, em coordenadas locais, pode ser escrita co
mo

$$(I) \begin{cases} w_i(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) u_j(x) + v_i(f, \psi)(x) & i = 1, \dots, n \\ \bar{w}_i(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \psi_{i-n}}{\partial x_j}(x) u_j(x) & i = n+1, \dots, n+q \end{cases}$$

Afirmação: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Podemos resolver (I)} \iff \text{podemos resolver} \\ \text{(I) para ordem } k \text{ (onde } k = \dim Q). \end{array} \right.$

De fato:

$$\theta(f, \psi)_{x_0} = \bigoplus_{i=1}^{n+k} C_{x_0}^{\infty}(M),$$

e assim é finitamente gerado como $C_{x_0}^{\infty}(M)$ -módulo.

Consideremos $B = \{d(f, \psi)u / u \in \theta(M)_{x_0}\}$.

B é submódulo de $\theta(f, \psi)_{x_0}$.

Seja então

$$A = \frac{\theta(f, \psi)_{x_0}}{B}$$

finitamente gerado como $C_{x_0}^{\infty}(M)$ -módulo.

Tomemos $e_i = (f, \psi) * (\frac{\partial}{\partial y_i}, 0)$ em A , $i = 1, \dots$.

Podemos observar o seguinte fato:

(I) é resolúvel localmente em $x_0 \iff e_1, \dots, e_n$ geram A como $C_{(y_0, q_0)}^{\infty}(N \times Q)$ -módulo, via $(f, \psi) *$.

Consideremos agora $m_{x_0}^{k+1}(M)$, que consiste dos germes em x_0 cuja série de Taylor começa com termos de ordem $\geq k+1$.

Usando o Teorema 3, Capítulo I, § 2, temos:

e_1, \dots, e_n geram A como $C_{(y_0, q_0)}^{\infty}(N \times Q)$ -módulo \iff
 $\iff A \Big|_{m_{x_0}^{k+1}(M)} A$ é gerado, sobre $C_{(y_0, q_0)}^{\infty}(N \times Q)$, pelas
 projeções de e_1, \dots, e_n .

Assim:

(I) é resolúvel localmente em $x_0 \iff A \Big|_{m_{x_0}^{k+1}(M)} A$ é

gerado, sobre $C^\infty_{(y_0, q_0)}(N \times Q)$, pelas projeções de e_1, \dots, e_n .

A última afirmação é equivalente a resolver (I) para a ordem k .

De fato:

$$\begin{aligned} [(w, \bar{w})_{x_0} + B] + m_{x_0}^{k+1}(M)A &= [\sum_{i=1}^n (f, \psi) * [v_i]_{y_0, q_0} e_i] \\ + m_{x_0}^{k+1}(M)A &\iff (w, \bar{w})_{x_0} = \sum_{i=1}^n (v_i \circ (f, \psi))_{x_0} (f, \psi) * (\frac{\partial}{\partial y_i}, 0) \\ &+ [d(f, \psi)u]_{x_0} + [g]_{x_0}, \end{aligned}$$

onde

$$[g]_{x_0} \in m_{x_0}^{k+1}(M)\theta(f, \psi)_{x_0} [j^k(g)(x_0) = 0]$$

"Jetificando na ordem k ", temos então:

$$J^k \theta(f, \psi)_{x_0} = d(f, \psi)_{x_0} J^k \theta(M)_{x_0} + (f, \psi) * J^k(\theta(N) \times 0)_{y_0, q_0}$$

onde $d(f, \psi)_{x_0}$ e $(f, \psi) *$ são induzidas pela ação de $d(f, \psi)$ e $(f, \psi) *$ sobre os germes de campos vetoriais.

Podemos considerar então:

$$\widetilde{(f, \psi)} : J^k \theta(M)_{x_0} \oplus J^k(\theta(N) \times 0)_{y_0, q_0} \rightarrow J^k \theta(f, \psi)_{x_0}$$

dada por $[d(f, \psi) + (f, \psi) *]^k$.

Em coordenadas locais, $\widetilde{(f, \psi)}$ é uma aplicação linear sobre de $B_{m, m}^k \oplus B_{n+k, n}^k$ em $B_{m, n+k}^k$, onde $B_{r, s}^k$ é o espaço vetorial das aplicações polinomiais de R^r em R^s , de grau $\leq k$.

$\widetilde{(f, \psi)}$ depende continuamente de x e assim, existe uma vizinhança U_{x_0} de x_0 tal que se $x \in U_{x_0}$ então $\widetilde{(f, \psi)}$ é sobre, em x . Assim, $x \notin \Sigma_1$, $\forall x \in U_{x_0}$.

Logo, Σ_1 é fechado.

Observação: Poderíamos pensar em definir:

$$\tilde{\Sigma}_1 = \{p \in M / \exists w \in \theta(f) \text{ tal que } w = (df)u + \dot{v} \circ (f, \psi) \text{ e } 0 = (d\psi)u \text{ não tem solução em } u \text{ e } v, \text{ como germe em } p\}.$$

Temos: $\tilde{\Sigma}_1 \subset \Sigma_1$,

Se soubessemos que $\tilde{\Sigma}_1$ é fechado toda a construção feita neste parágrafo poderia ser realizada utilizando-se $\tilde{\Sigma}_1$ ao invés de Σ_1 . Em particular, poderíamos usar $\tilde{\Sigma}_1$.

Mostraremos agora a existência de uma vizinhança W de $\Sigma_1 \times \{0\}$, onde τ_F e τ_ϕ podem ser escritos da forma desejada.

8. PROPOSIÇÃO. Consideremos $Q \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$, onde ψ é infinitesimalmente estável e f é ψ -infinitesimalmente estável. Seja (F, ϕ) uma deformação de (f, ψ) . Então, existem $\xi \in \theta(M \times R)$, $\eta \in \theta(Q \times R)$, $\gamma \in \theta(\pi)$ ($\pi : (N \times R) \times (Q \times R) \rightarrow N \times R$, projeção usual) com $\Lambda(\xi) = \Lambda(\eta) = \Lambda(\gamma) = 0$, tais que:

$$\begin{cases} \tau_F = (dF)\xi + \gamma \circ (F, \phi) \\ \tau_\phi = (d\phi)\xi + \eta \circ \phi \end{cases}$$

sobre uma vizinhança W de $\Sigma_1 \times \{0\}$ em $M \times R$.

Demonstração

Sabemos que $\Sigma_1 \cap \psi^{-1}(q)$ é finito, e assim, o Corolário 3 se aplica a este conjunto. Usando o fato de que as projeções $\theta(M \times R) \rightarrow \theta(M \times R)_S$, $\theta(Q \times R) \rightarrow \theta(Q \times R)_q$, $\theta(\pi) \rightarrow \theta(\pi)_{y,q}$ são sobre, segue que existem $\xi^q \in \theta(M \times R)$, $\eta^q \in \theta(Q \times R)$ e $\gamma^q \in \theta(\pi)$ horizontais, tais que:

$$((dF)\xi^q + \gamma^q \circ (F, \Phi))|_{U_q} = \tau_F|_{U_q}$$

$$((d\phi)\xi^q + \eta^q \circ \phi)|_{U_q} = \tau_\phi|_{U_q}$$

para uma vizinhança aberta U_q de $(\Sigma_1 \cap \psi^{-1}(q)) \times \{0\}$.

Como ψ é fechada, temos que $\phi(\Sigma_1 \times \{0\} - U_q) \subset Q \times R$ como fechado, e assim, seja V_q o seu complementar.

Desde que $(\Sigma_1 \cap \psi^{-1}(q)) \times \{0\} \subset U_q$, temos que $(q, t) \in V_q$, $\forall (q, t) \in Q \times R$.

Seja $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma partição da unidade sobre $Q \times R$ subordinada ao recobrimento formado pelos V_q 's. Em outras palavras, $\{\rho_\alpha\}$ é uma partição da unidade C^∞ tal que para cada $\alpha \in A$ existe $q = q(\alpha) \in Q$, tal que $\text{supp } \rho_\alpha \subset V_{q(\alpha)}$.

Tomemos

$$\xi = \sum_{\alpha \in A} (\rho_\alpha \circ \phi) \xi^{q(\alpha)}$$

$$\eta = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha \eta^{q(\alpha)}$$

Consideremos $\tilde{\rho}_\alpha : (M \times R) \times (Q \times R) \rightarrow R$ definida por $\tilde{\rho}_\alpha(u, v) = \rho_\alpha(v)$ e tomemos então

$$\gamma = \sum_{\alpha \in A} \tilde{\rho}_\alpha \gamma^{q(\alpha)}$$

Como

$$(\rho_{\alpha} \circ \phi) \tau_F = (dF)(\rho_{\alpha} \circ \phi) \xi^{q(\alpha)} + [\tilde{\rho}_{\alpha} \gamma^{q(\alpha)}] \circ (F, \phi)$$

$$(\rho_{\alpha} \circ \phi) \tau_{\phi} = (d\phi)(\rho_{\alpha} \circ \phi) \xi^{q(\alpha)} + (\rho_{\alpha} \eta^{q(\alpha)}) \circ \phi$$

em $W_{\alpha} = U_{q(\alpha)} \cup \phi^{-1}[(Q \times R) - \text{supp } \rho_{\alpha}]$.

Segue que

$$\tau_F|_W = ((dF)\xi + \gamma \circ (F, \phi))|_W$$

$$\tau_{\phi}|_W = ((d\phi)\xi + \eta \circ \phi)|_W$$

sobre $W = \bigcap_{\alpha \in A} W_{\alpha}$.

Observamos que $\Sigma_1 \times \{0\} \subset W$.

Para isto é preciso mostrar que $\Sigma_1 \times \{0\} \subset W_{\alpha}$ para cada $\alpha \in A$. Suponhamos $(x, 0) \in \Sigma_1 \times \{0\}$ e $(x, 0) \notin U_{q(\alpha)}$. Logo, $(\psi(x), 0) = \phi(x, 0) \in \phi(\Sigma_1 \times \{0\} - U_{q(\alpha)}) \implies \phi(x, 0) \notin V_{q(\alpha)} \supset \text{supp } \rho_{\alpha}$

$$\implies (x, 0) \in \phi^{-1}[(Q \times R) - \text{supp } \rho_{\alpha}] \implies (x, 0) \in W_{\alpha}.$$

Ainda: W é aberto.

De fato:

Seja $(x, t) \in W$. Como $\{\text{supp } \rho_{\alpha}\}$ é localmente finita, existe uma vizinhança U de $\phi(x, t)$ e um número finito

$\rho_{\alpha_1}, \dots, \rho_{\alpha_r}$, tais que $U \cap \text{supp } \rho_{\alpha_i} \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, r$.

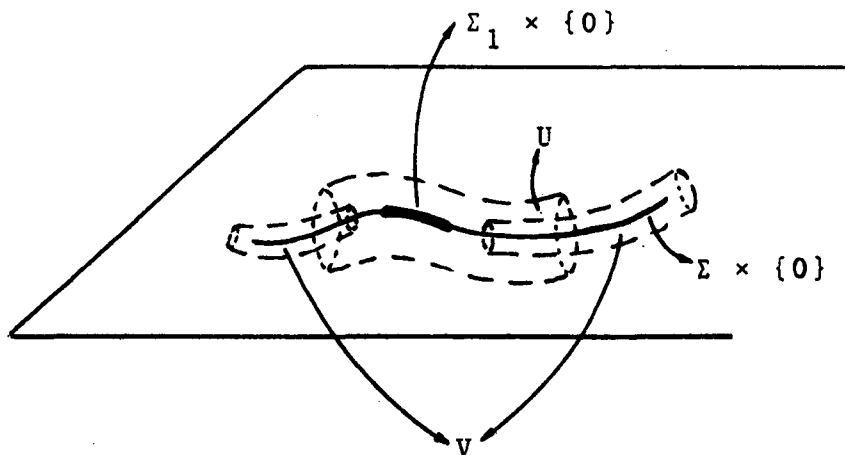
Tomemos $U' = \phi^{-1}(U) \cap W_{\alpha_1} \cap \dots \cap W_{\alpha_r}$, aberto de $M \times I_{\delta}$, contendo (x, t) .

Se $U \cap \text{supp } \rho_{\alpha} = \emptyset \implies U' \subset \phi^{-1}[(Q \times R) - \text{supp } \rho_{\alpha}] \subset W_{\alpha}$

Se $U \cap \text{supp } \rho_{\alpha} \neq \emptyset$, então $\alpha = \alpha_i$ para algum $i = 1, \dots, r$, e assim, $U' \subset W_{\alpha}$.

Portanto, $U' = \bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha = W$ e assim, W é aberto.

Mostraremos agora que τ_F e τ_ϕ podem ser escritos da forma desejada sobre uma vizinhança de $(\Sigma \times \{0\}) - U$, onde U é uma vizinhança de $\Sigma_1 \times \{0\}$.



9. PROPOSIÇÃO. Consideremos $Q \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$, onde ψ é infinitesimalmente estável, f é ψ -infinitesimalmente estável e U é uma vizinhança de $\Sigma_1 \times \{0\}$. Seja ainda (F, ϕ) uma deformação de (f, ψ) . Dados $\tau \in \theta(F)$ e $\mu \in \theta(\phi)$ com $\Lambda(\tau) = \Lambda(\mu) = 0$, existem $\xi \in \theta(M \times \mathbb{R})$ e $\gamma \in \theta(\pi)$, com $\Lambda(\xi) = \Lambda(\gamma) = 0$, tais que:

$$\begin{cases} \tau = (dF)\xi + \gamma \circ (F, \phi) \\ \mu = (d\phi)\xi \end{cases}$$

sobre uma vizinhança V de $(\Sigma \times \{0\}) - U$.

Demonstração

Observamos que se $(p, 0) \in (\Sigma \times \{0\}) - U$, então as e quações:

$$\begin{cases} w_1 = (df)\xi + \gamma \circ (f, \psi) \\ w_2 = (d\psi)\xi \end{cases}$$

têm solução, como germe em p , $\forall w_1$ e w_2 .

Se tomarmos:

$Z = \{\text{germes em } (p,0) \text{ de campos vetoriais}$

$w : M \times R \rightarrow T((N \times R) \times (Q \times R)), \text{ ao longo de}$
 $(F, \phi) \text{ com } R\text{-componentes nulas}\}$

$K = \{d(F, \phi)[\xi]_{(p,0)} / \xi \in \theta(M \times R), \text{ com } R\text{-componente}$
 $\text{nula}\}$

teremos que Z é um $C_{(p,0)}^\infty(M \times R)$ -módulo finitamente gerado e $K \subset Z$ como submódulo. Assim, $A = Z|_K$ pode ser visto como um $C_{(p,0)}^\infty(M \times R)$ -módulo finitamente gerado. Via $(F, \phi)^*$, A pode ser considerado como um $C_{(f(p),0; \psi(p),0)}^\infty(N \times R \times Q \times R)$ -módulo.

Por argumentos análogos aos usados na demonstração da Proposição 2, podemos concluir que

$$\begin{cases} \tau = (dF)\xi + \gamma \circ (F, \phi) \\ \mu = (d\phi)\xi \end{cases}$$

a nível de germe em $(p,0)$.

Temos que $[(\Sigma \times \{0\}) - U] \cap (f, \psi)^{-1}(y, q)$ é finito, uma vez que $\Sigma \cap (f, \psi)^{-1}(y, q)$ o é (Lema 5).

Usando argumentos análogos aos do Corolário 3, consegu

mos escrever

$$\begin{cases} \tau|_{U_q^y} = ((dF)\xi_q^y + \gamma_q^y \circ (F, \phi))|_{U_q^y} \\ \mu|_{U_q^y} = (d\phi)\xi_q^y|_{U_q^y} \end{cases},$$

onde U_q^y é uma vizinhança aberta de

$$[(\Sigma \times \{0\}) - U] \cap (f, \psi)^{-1}(y, q).$$

Como (f, ψ) é fechada, $(M$ é compacta) e Σ é fechado, temos que $(F, \phi)[(\Sigma \times \{0\}) - (U \cup U_q^y)] \subset (N \times R) \times (Q \times R)$ como fechado e assim, seja Z_q^y o seu complementar.

Como $[(\Sigma - \Sigma_1) \cap (f, \psi)^{-1}(y, q)] \times \{0\} \subset U_q^y$, temos que $(y, t; q, t') \in Z_q^y$.

Seja $\{\psi_i\}_{i \in I}$ uma partição da unidade sobre $(N \times R) \times (Q \times R)$, subordinada ao recobrimento formado pelos Z_q^y 's. Logo, $\text{supp } \psi_i \subset Z_{q_i}^{y_i}$.

Tomemos

$$\xi = \sum_i \psi_i \circ (F, \phi) \xi_{q_i}^{y_i}$$

$$\gamma = \sum_i \psi_i \circ (F, \phi) \gamma_{q_i}^{y_i}$$

Como

$$\begin{cases} \psi_i \circ (F, \phi) \tau = (dF) \psi_i \circ (F, \phi) \xi_{q_i}^{y_i} + (\psi_i \gamma_{q_i}^{y_i}) \circ (F, \phi) \\ \psi_i \circ (F, \phi) \mu = (d\phi) \psi_i \circ (F, \phi) \xi_{q_i}^{y_i} \end{cases}$$

em $V_i = U_{q_i}^{y_i} \cup (F, \phi)^{-1}[(N \times R) \times (Q \times R) - \text{supp } \psi_i]$, segue que

$$\begin{cases} \tau = (dF)\xi + \gamma \circ (F, \phi) \\ \mu = (d\phi)\xi \end{cases}$$

sobre $V = \bigcap_{i \in I} V_i$

Temos que $(\Sigma \times \{0\}) - U \subset V$.

Para tanto, é suficiente mostrar que $(\Sigma \times \{0\}) - U \subset V_i$, para cada $i \in I$. Suponhamos $(x,0) \in (\Sigma \times \{0\}) - U$ e $(x,0) \notin U_{q_i}^{y_i}$. Logo, $(F,\phi)(x,0) \in (F,\phi)[(\Sigma \times \{0\}) - (U \cup U_{q_i}^{y_i})]$. Assim, $(F,\phi)(x,0) \notin Z_{q_i}^{y_i} \supset \text{supp } \psi_i$ e então $(x,0) \in (F,\phi)^{-1}[(N \times R) \times (Q \times R) - \text{supp } \psi_i]$. Deste modo, $(x,0) \in V_i$.

Ainda, V é um aberto, por argumento semelhante ao usado na Proposição 8.

10. TEOREMA. Consideremos $Q \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$, onde ψ é infinitesimalmente estável, f é ψ -infinitesimalmente estável e $(f,\psi)(\Sigma - \Sigma_1) \cap (f,\psi)(\Sigma_1) = \emptyset$. Seja (F,ϕ) uma deformação de (f,ψ) . Então, existem $\xi \in \theta(M \times I_\delta)$, $\eta \in \theta(Q \times I_\delta)$ e $\gamma \in \theta(\pi)$ ($\pi : (N \times I_\delta) \times (Q \times I_\delta) \rightarrow N \times I_\delta$, projeção usual) com $\Lambda(\xi) = \Lambda(\eta) = \Lambda(\gamma) = 0$, tais que:

$$\begin{cases} \tau_F = (dF)\xi + \gamma \circ (F,\phi) \\ \tau_\phi = (d\phi)\xi + \eta \circ \phi \end{cases} \quad \text{sobre } M \times I_\delta$$

Demonstração

Sabemos que existem ξ' , η' e γ' satisfazendo

$$(i) \quad \Lambda(\xi') = \Lambda(\eta') = \Lambda(\gamma') = 0$$

$$(ii) \quad \tau_F = (dF)\xi' + \gamma' \circ (F,\phi)$$

$$(iii) \quad \tau_\phi = (d\phi)\xi' + \eta' \circ \phi$$

sobre uma vizinhança W de $\Sigma_1 \times \{0\}$. (Pela Proposição 8).

Logo,

$$\begin{cases} \tau_F - (dF)\xi' - \gamma' \circ (F, \phi) = (dF)\xi_0 + \gamma_0 \circ (F, \phi) \\ \tau_\phi - (d\phi)\xi' - \eta' \circ \phi = (d\phi)\xi_0 \end{cases}$$

sobre a vizinhança W de $\Sigma_1 \times \{0\}$.

Podemos considerar uma coleção enumerável de abertos U_i , satisfazendo:

$$\text{Para } \forall i \in \mathbb{N}, \bar{U}_i \subset W, U_i \text{ vizinhança de } \Sigma_1 \times \{0\}, \\ U_{i+1} \subset U_i \text{ e } \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bar{U}_i = \Sigma_1 \times \{0\}.$$

Ainda:

$$\begin{cases} \tau_F - (dF)\xi' - \gamma' \circ (F, \phi) = (dF)\xi_i + \gamma_i \circ (F, \phi) \\ \tau_\phi - (d\phi)\xi' - \eta' \circ \phi = (d\phi)\xi_i \end{cases}$$

numa vizinhança V_i de $(\Sigma \times \{0\}) - U_i$ (aplicando sequencialmente a Proposição 9).

Consideremos

$$W' = (N \times R) \times (Q \times R) - (F, \phi)((\Sigma \times \{0\}) - W)$$

$$V'_i = (N \times R) \times (Q \times R) - (F, \phi)((\Sigma \times \{0\}) - V_i)$$

Sabendo que (f, ψ) é uma aplicação fechada (M é compacta), temos que W' e V'_i , $i \in \mathbb{N}$ são abertos.

$\{W', V'_1, V'_2, \dots\}$ forma uma cobertura aberta de $(N \times R) \times (Q \times R)$.

De fato:

$$\text{Seja } (y, t; q, t') \in (N \times R) \times (Q \times R) - W'.$$

$$\text{Logo, } (y, t; q, t') = (f(x_0), 0; \psi(x_0), 0) \text{ onde } x_0 \in \Sigma - \Sigma_1.$$

Pela nossa hipótese, $(y, q) \notin (f, \psi)(\Sigma_1)$. (*)

Suponhamos, por absurdo, que $\forall i, \exists x_i \in \Sigma$ e $(x_i, 0) \notin V_i$, tal que $(y, q) = (f, \psi)(x_i)$. Como $(x_i, 0) \notin V_i$, temos que $(x_i, 0) \notin (\Sigma \times \{0\}) - U_i$. Assim, $(x_i, 0) \in U_i$.

Como M é compacta, podemos assumir que $(x_i) \rightarrow x$. Do fato de $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bar{U}_i = \Sigma_1 \times \{0\}$, temos que $x \in \Sigma_1$.

Por continuidade, $((f, \psi)(x_i)) = ((y, q)) \rightarrow (f, \psi)(x)$.

Logo, $(f, \psi)(x) = (y, q)$, com $x \in \Sigma_1$ (contra (*)).

Assim, $\exists i / \forall (x, 0) \in ((\Sigma \times \{0\}) - V_i)$, $(y, q) \neq (f, \psi)(x)$,

ou seja:

$\exists i$ tal que $(y, t; q, t') \notin (F, \phi)(\Sigma \times \{0\} - V_i)$

ou ainda:

$\exists i$ tal que $(y, t; q, t') \in V'_i$

Consideremos $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots$ partição da unidade sobre $(N \times R) \times (Q \times R)$, subordinada ao recobrimento formado por W', V'_1, V'_2, \dots

Como

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \circ (F, \phi) [\tau_F - (dF)\xi' - \gamma' \circ (F, \phi)] = (dF)\rho_0 \circ (F, \phi)\xi_0 + (\rho_0 \gamma_0) \circ (F, \phi) \\ \rho_0 \circ (F, \phi) [\tau_\phi - (d\phi)\xi' - \eta' \circ \phi] = (d\phi)\rho_0 \circ (F, \phi)\xi_0 \end{array} \right.$$

em $W_0 = W \cup (F, \phi)^{-1}[(N \times R) \times (Q \times R) - \text{supp } \rho_0]$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i \circ (F, \phi) [\tau_F - (dF)\xi' - \gamma' \circ (F, \phi)] = (dF)\rho_i \circ (F, \phi)\xi_i + (\rho_i \gamma_i) \circ (F, \phi) \\ \rho_i \circ (F, \phi) [\tau_\phi - (d\phi)\xi' - \eta' \circ \phi] = (d\phi)\rho_i \circ (F, \phi)\xi_i \end{array} \right.$$

em $\tilde{V}_i = V_i \cup (F, \phi)^{-1}[(N \times R) \times (Q \times R) - \text{supp } \rho_i]$ $i=1, 2, \dots$,

segue então que:

$$\begin{cases} \tau_F - (dF)\xi' - \gamma' \circ (F, \phi) = (dF)\tilde{\xi} + \tilde{\gamma} \circ (F, \phi) \\ \tau_\phi - (d\phi)\xi' - \eta' \circ \phi = (d\phi)\tilde{\xi} \end{cases}$$

sobre $\tilde{W} = W_0 \cap [\bigcap_{i \in N} \tilde{V}_i]$,

onde $\begin{cases} \tilde{\xi} = \sum \rho_i \circ (F, \phi) \xi_i \\ \tilde{\gamma} = \sum \rho_i \gamma_i \end{cases}$

Assim,

$$\begin{cases} \tau_F = (dF)\xi_1 + \gamma \circ (F, \phi) \\ \tau_\phi = (d\phi)\xi_1 + \eta \circ \phi \end{cases}$$

sobre \tilde{W} , onde $\Lambda(\xi) = \Lambda(\eta) = \Lambda(\gamma) = 0$.

Temos que $\Sigma \times \{0\} \subset \tilde{W}$ e que \tilde{W} é aberto (por ser intersecção localmente finita de abertos).

Se $\dim M < \dim(N \times Q)$ então $M = \Sigma$ e o Teorema está provado.

Se $\dim M \leq \dim(N \times Q)$, aplicando o Lema 6 para

$(f, \psi)|_{M - \Sigma}$, teremos que:

$$\begin{cases} \tau_F - (dF)\xi_1 - \gamma \circ (F, \phi) = (dF)\bar{\xi} \\ \tau_\phi - (d\phi)\xi_1 - \eta \circ \phi = (d\phi)\bar{\xi} \end{cases}$$

em $(M - \Sigma) \times I_\delta$.

Tomemos agora $p : M \times I_\delta \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, tal que $p \equiv 0$ em $\Sigma \times \{0\}$ e $p \equiv 1$ fora de \tilde{W} . Assim, $p\bar{\xi}$ pode ser definido globalmente, e teremos:

$$\begin{cases} \tau_F = dF(\xi_1 + p\bar{\xi}) + \gamma \circ (F, \phi) \\ \tau_\phi = (d\phi)(\xi_1 + p\bar{\xi}) + \eta \circ \phi \end{cases}$$

em $M \times I_\delta$.

Finalmente, estamos em condições de enunciarmos a recíproca da Proposição 1.

11. TEOREMA. Seja $Q \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} N$. Se ψ é infinitesimalmente estável, f é ψ -infinitesimalmente estável e $(f, \psi)(\Sigma - \Sigma_1) \cap (f, \psi)(\Sigma_1) = \emptyset$, então f é ψ -homotopicamente estável.

Demonstração

Basta observar que se $\phi = \psi \times \text{Id} = \Psi$ então $\tau_\phi = 0$. Assim, aplicando o Teorema 10, temos que

$$\begin{cases} \tau_F = (dF)\xi + \gamma \circ (F, \Psi) \\ 0 = (d\Psi)\xi + \eta \circ \Psi \end{cases} \quad \text{em } M \times I_\delta$$

com ξ , η e γ horizontais.

Pelo Teorema 3, Capítulo II, § 2, temos que f é ψ -homotopicamente estável.

CAPÍTULO IV

FORMAS LOCAIS

§ 1. Neste parágrafo estudaremos a ψ -estabilidade homotópica de germes f , no caso de

$$\begin{array}{ccc}
 & & R,0 \\
 & \nearrow f & \\
 R^n,0 & & \\
 & \searrow \psi & \\
 & & R,0
 \end{array}$$

onde ψ é germe de uma aplicação estável

Uma observação que se faz presente é que se ψ é homotopicamente estável e se f é ψ -homotopicamente estável então (f, ψ) é homotopicamente estável.

I. $n = 1$

Suponhamos $(f, \psi) : R,0 \rightarrow R^2,0$ germe de uma aplicação estável. Logo, (f, ψ) é uma imersão local.

Duas possibilidades:

A. ψ é um difeomorfismo local

Neste caso, temos a comutatividade do esquema abaixo:

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\quad} & (f(x), \psi(x)) \\
 \uparrow h & & \downarrow k \\
 x & \xrightarrow{\quad} & (0, x)
 \end{array}$$

$$\text{onde } \begin{cases} h(x) = \psi^{-1}(x) \\ k(u,v) = ((f \circ h)(v) - u, v) \end{cases}$$

são difeomorfismos permitidos pela definição da ψ -estabilidade de f .

B. f é um difeomorfismo local e ψ é estável, não regular

Obtemos o modelo

$$x \rightarrow (f(x), x^2),$$

fazendo atuar difeomorfismos do tipo produto.

Então, o esquema abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & (f(x), x^2) \\ \uparrow h & & \downarrow k \\ x & \xrightarrow{\quad} & (x, x^2) \end{array}$$

$$\text{onde } \begin{cases} h(x) = x \\ k(u,v) = (f^{-1}(u), v) \end{cases}$$

são difeomorfismos permitidos.

Assim, os modelos são:

$$x \rightarrow (0, x)$$

ou

$$x \rightarrow (x, x^2)$$

que são ψ -infinitesimalmente estáveis (um cálculo direto mostra isto), e portanto ψ -homotopicamente estáveis.

II. $n \geq 2$

A. (f, ψ) tem rank 2 em 0

Um modelo \tilde{e}

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (x, y)$$

(com mudanças na fonte, somente)

B. (f, ψ) tem rank 1 em 0

B_1 . ψ tem rank 1 em 0

B_{11} . (f, ψ) \tilde{e} do tipo dobra em 0

Por [16] temos o modelo (fazendo troca de coordenadas na fonte, somente)

$$(x_1, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (\lambda(y) + \sum_{i \neq 2} x_i^2, y)$$

onde λ \tilde{e} uma função diferenciável.

Observamos que o esquema abaixo \tilde{e} comutativo:

$$\begin{array}{ccc} (x_1, y, x_3, \dots, x_n) & \xrightarrow{\quad} & (\lambda(y) + \sum_{i \neq 2} x_i^2, y) \\ \uparrow h & & \downarrow k \\ (x_1, y, x_3, \dots, x_n) & \xrightarrow{\quad} & (\sum_{i \neq 2} x_i^2, y) \end{array}$$

$$\text{onde } \begin{cases} h = \text{Id} \\ k(u, v) = (u - \lambda(v), v) \end{cases}$$

são difeomorfismos permitidos.

B_{12} . (f, ψ) é do tipo cuspide em 0

Por [16] temos o modelo (fazendo troca de coordenadas na fonte, somente)

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow \left(\frac{x^3}{3} + xy + \lambda(y) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, \beta(y) \right)$$

onde λ é diferenciável e β é um difeomorfismo.

Observamos que o esquema a seguir é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} (x, y, x_3, \dots, x_n) & \longrightarrow & \left(\frac{x^3}{3} + xy + \lambda(y) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, \beta(y) \right) \\ \uparrow h & & \downarrow k \\ (x, y, x_3, \dots, x_n) & \longrightarrow & \left(\frac{x^3}{3} + xy + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, y \right) \end{array}$$

$$\text{onde } \begin{cases} h = \text{Id} \\ k(u, v) = (u - \lambda(\beta^{-1}(v)), \beta^{-1}(v)) \end{cases}$$

B_2 . ψ é de rank 0 em 0

B_{21} . (f, ψ) é do tipo dobra em 0

Neste caso, necessariamente, f terá rank 1 em 0.

Por [16], temos o modelo (fazendo atuar difeomorfismos na fonte, somente)

$$(x, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \left(x, \lambda(x) + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2 \right).$$

Lembramos que enfocamos nosso interesse para o caso de ψ ser estável. Temos então o modelo:

$$(x, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x, x^2 + \sum_{i=2}^n x_i^2)$$

B_{22} . (f, ψ) é do tipo cuspide em 0

Ainda neste caso, necessariamente, f terá rank 1 em 0. Com mudanças na fonte, somente, temos o modelo (usando [16]):

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (\beta(x), \frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x) + \sum_{i=2}^n x_i^2)$$

onde λ é diferenciável e β é um difeomorfismo.

Fazendo atuar difeomorfismo do tipo produto na meta, podemos chegar ao modelo

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (x, \frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x) + \sum_{i=2}^n x_i^2)$$

Como ψ é de rank 0 em 0, temos, necessariamente, que $\lambda'(0) = 0$.

Assim, a lista de modelos a estudar se restringe à seguinte:

1. $(x, y, x_3, \dots, x_n) \xrightarrow{F_1} (x, y)$
2. $(x_1, y, x_3, \dots, x_n) \xrightarrow{F_2} (\sum_{i=2}^n x_i^2, y)$
3. $(x, y, x_3, \dots, x_n) \xrightarrow{F_3} (\frac{x^3}{3} + xy + \sum_{i=3}^n x_i^2, y)$
4. $(x, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{F_4} (x, x^2 + \sum_{i=2}^n x_i^2)$
5. $(x, y, x_3, \dots, x_n) \xrightarrow{F_5} (x, \frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x) + \sum_{i=2}^n x_i^2),$

com $\lambda'(0) = 0$

Caso 1.

Verifica-se facilmente que \tilde{e} ψ -infinitesimalmente es
tável.

Caso 2.

A ψ -estabilidade infinitesimal se traduz por:

Para todo germe de função θ de R^n em R , existem
germes X_i , Y , U e V ; $i = 1, \dots, n$, $i \neq 2$ tais que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(x_1, y, x_3, \dots, x_n) = \sum_{i \neq 2} 2x_i X_i(x_1, y, x_3, \dots, x_n) \\ \quad + U(\sum_{i \neq 2} x_i^2, y) \\ 0 \quad = Y(x_1, y, x_3, \dots, x_n) + V(y) \end{array} \right.$$

Para resolvermos a segunda equação, basta que tomemos
 $Y \equiv 0$ e $V \equiv 0$.

Pela fórmula de Morse, temos que

$$\theta(x_1, y, x_3, \dots, x_n) = Z(y) + \sum_{i \neq 2} x_i G_i(x_1, y, x_3, \dots, x_n).$$

Logo, a primeira equação também pode ser resolvida.

Caso 3.

A ψ -estabilidade infinitesimal se traduz por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(x, y, x_3, \dots, x_n) = (x^2 + y)X(x, y, x_3, \dots, x_n) \\ \quad + xY(x, y, x_3, \dots, x_n) \\ \quad + \sum_{i=3}^n 2x_i X_i(x, y, \dots, x_n) \\ \quad + U\left(\frac{x}{3} + xy + \sum_{i=3}^n x_i^2, y\right) \\ 0 \quad = Y(x, y, x_3, \dots, x_n) + V(y) \end{array} \right.$$

A resolução deste sistema é equivalente à resolução da equação:

$$\begin{aligned}
 (*) \quad \theta(x, y, x_3, \dots, x_n) &= (x^2 + y)X(x, y, \dots, x_n) - xV(y) \\
 &+ \sum_{i=3}^n \pm 2x_i X_i(x, y, \dots, x_n) \\
 &+ U\left(\frac{x^3}{3} + xy + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, y\right)
 \end{aligned}$$

A resolução desta equação é equivalente à resolução da equação:

$$(**) \quad \theta(x, y) = (x^2 + y)X(x, y) - xV(y) + U\left(\frac{x^3}{3} + xy, y\right)$$

De fato:

Passamos de (*) para (**), fazendo as seguintes restrições:

$$x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0.$$

Passamos de (**) para (*) fazendo:

$$\begin{aligned}
 \theta(x, y, x_3, \dots, x_n) &= \theta(x, y, 0, \dots, 0) \\
 + \sum_{i=3}^n \pm 2x_i \bar{X}_i(x, y, x_3, \dots, x_n) &= (x^2 + y)X(x, y) - xV(y) \\
 + U\left(\frac{x^3}{3} + xy, y\right) + \sum_{i=3}^n \pm 2x_i \bar{X}_i(x, y, x_3, \dots, x_n) &.
 \end{aligned}$$

Tomando $h(u) = U\left(\frac{x^3}{3} + xy + u, y\right) - U\left(\frac{x^3}{3} + xy, y\right)$, teremos $h(0) = 0$ e assim $h(u) = uk(u)$.

Colocando $u = \sum_{i=3}^n \pm x_i^2$, teremos

$$\begin{aligned}
 \theta(x, y, x_3, \dots, x_n) &= (x^2 + y)X(x, y) - xV(y) \\
 + \sum_{i=3}^n \pm 2x_i X_i(x, y, \dots, x_n) &+ U\left(\frac{x^3}{3} + xy + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, y\right).
 \end{aligned}$$

A resolução da equação (**) é equivalente a resolução da equação

$$(***) \quad \mu(x) = -\alpha(-x^2) + \beta\left(-\frac{2}{3}x^3, -x^2\right).$$

Com efeito, passamos de (**) para (***) colocando $y = -x^2$ dentro de (**).

Reciprocamente, dado $\theta(x,y)$, escrevemos, usando (***):

$$\theta(x, -x^2) = -xV(-x^2) + U\left(-\frac{2}{3}x^3, -x^2\right)$$

Dentro destas condições, a expressão

$$(\Delta) \quad \gamma(x,y) = \theta(x,y) + xV(y) - U\left(\frac{x^3}{3} + xy, y\right)$$

é nula para $y = -x^2$. Pelo Teorema da Divisão (Teorema 5, Capítulo I, § 2), temos:

$$\gamma(x,y) = (x^2+y)Z(x,y) + T(x)$$

onde $\gamma(x, -x^2) = T(x) = 0.$

$$\therefore \gamma(x,y) = (x^2+y)Z(x,y).$$

Combinando com (Δ), vem:

$$\theta(x,y) = (x^2+y)Z(x,y) - xV(y) + U\left(\frac{x^3}{3} + xy, y\right),$$

que é precisamente a equação (**).

Logo, a ψ -estabilidade infinitesimal é equivalente a resolver a equação (***).

Sabemos que toda função pode ser vista como soma de outras duas: uma par e outra ímpar. Ainda, toda função par pode ser colocada na forma $\alpha(-x^2)$ e toda ímpar na forma $-x\lambda(-x^2)$.

$$\therefore \mu(x) = -x\lambda(-x^2) + \alpha(-x^2)$$

e temos assim a ψ -estabilidade infinitesimal.

Caso 4.

A ψ -estabilidade infinitesimal se traduz por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(x, x_2, \dots, x_n) = X(x, x_2, \dots, x_n) + U(x, x^2 + \sum_{i=2}^n x_i^2) \\ 0 = 2xX(x, \dots, x_n) + \sum_{i=2}^n 2x_i X_i(x, \dots, x_n) \\ \quad + V(x^2 + \sum_{i=2}^n x_i^2) \end{array} \right.$$

Na realidade, podemos resolver um sistema mais simples:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(x, x_2, \dots, x_n) = X(x, x_2, \dots, x_n) + U(x) \\ 0 = 2xX(x, \dots, x_n) + \sum_{i=2}^n 2x_i X_i(x, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

Com efeito, dado θ , podemos escrever (Fórmula de Morse):

$$-2x\theta(x, x_2, \dots, x_n) = -2xU(x) + \sum_{i=2}^n 2x_i X_i(x, x_2, \dots, x_n).$$

Colocando $X = \theta - U$, temos que o modelo é ψ -infinitesimalmente estável.

Caso 5.

A ψ -estabilidade infinitesimal se traduz por:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \theta(x, y, x_3, \dots, x_n) = X(x, y, \dots, x_n) \\ \quad + U(x, \frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x) + \sum_{i=3}^n x_i^2) \\ 0 = (y + \lambda'(x))X(x, y, \dots, x_n) + (x+y^2)Y(x, y, \dots, x_n) \\ \quad + \sum_{i=3}^n 2x_i X_i(x, y, \dots, x_n) + V(\frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x) + \sum_{i=3}^n x_i^2) \end{array} \right.$$

A resolução deste sistema é equivalente à resolução da equação:

$$\begin{aligned}
 (**) \quad & -(y+\lambda'(x))W(x,y,\dots,x_n) = -(y+\lambda'(x))U(x,\frac{y^3}{3}+xy+\lambda(x)+\sum_{i=3}^n x_i^2 \pm x_i^2) \\
 & + (x+y^2)Y(x,y,\dots,x_n) + \sum_{i=3}^n \pm 2x_i X_i(x,y,\dots,x_n) \\
 & + V(\frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2)
 \end{aligned}$$

De fato:

Passamos de (*) para (**) fazendo:

Dado w , consideramos $\theta = w$ em (*). Multiplicando a primeira equação de (*) por $-(y+\lambda'(x))$ obtemos:

$$-(y+\lambda'(x))w = -(y+\lambda'(x))X - (y+\lambda'(x))U$$

Somando membro a membro com a segunda equação de (*) obtemos a equação (**).

Passamos de (**) para (*) fazendo:

Dado θ , consideramos $w = \theta$ em (**).

Temos então

$$\begin{aligned}
 0 = & (y+\lambda'(x))[\theta(x,\dots,x_n) - U(x,\dots)] + (x+y^2)Y(\dots) \\
 & + \sum_{i=3}^n \pm 2x_i X_i(\dots) + V(\dots)
 \end{aligned}$$

Fazendo $X = \theta - U$ teremos resolvido o sistema (*).

A resolução da equação (**) é equivalente à resolução da equação:

$$\begin{aligned}
 (***) \quad & -(y+\lambda'(x))W(x,y) = -(y+\lambda'(x))U(x, \frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x)) \\
 & + (x+y^2)Y(x,y) + V(\frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x))
 \end{aligned}$$

De fato:

Passamos de (**) para (***) fazendo as restrições
 $x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0$.

Passamos de (***) para (**) fazendo

$$\begin{aligned}
 & -(y+\lambda'(x))W(x,y,\dots,x_n) = -(y+\lambda'(x))W(x,y,0,\dots,0) \\
 & + \sum_{i=3}^n \pm 2x_i X_i(x,y,\dots,x_n) = -(y+\lambda'(x))U(x, \frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x)) \\
 & + (x+y^2)Y(x,y) + V(\frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x)) \\
 & + \sum_{i=3}^n \pm 2x_i X_i(x,y,\dots,x_n)
 \end{aligned}$$

Com argumento semelhante aquele utilizado na p. 63 chegamos a (**).

A resolução da equação (***) é equivalente à resolução da equação

$$\begin{aligned}
 (\Delta) \quad & -(y+\lambda'(-y^2))\mu(y) = -(y+\lambda'(-y^2))U(-y^2, -\frac{2}{3}y^3 + \lambda(-y^2)) \\
 & + V(-\frac{2}{3}y^3 + \lambda(-y^2))
 \end{aligned}$$

Com efeito, passamos de (***) para (Δ) colocando $x=-y^2$ dentro de (***) .

Reciprocamente, dado $W(x,y)$, escrevemos, usando (Δ):

$$\begin{aligned}
 & -(y+\lambda'(-y^2))W(-y^2,y) = -(y+\lambda'(-y^2))U(-y^2, -\frac{2}{3}y^3 + \lambda(-y^2)) \\
 & + V(-\frac{2}{3}y^3 + \lambda(-y^2))
 \end{aligned}$$

Dentro destas condições, a expressão:

$$\begin{aligned}
 (+) \quad \gamma(x,y) &= -(y+\lambda'(x))W(x,y) + (y+\lambda'(x))U(x, \frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x)) \\
 &\quad - V(\frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x))
 \end{aligned}$$

é nula para $x = -y^2$.

Pelo Teorema da Divisão (Teorema 5, Capítulo I, § 2), te-
mos:

$$\gamma(x,y) = (x+y^2)Y(x,y) + Z(y)$$

onde $\gamma(-y^2, y) = Z(y) = 0$.

$$\therefore \gamma(x,y) = (x+y^2)Y(x,y).$$

Combinando com (+) vem:

$$\begin{aligned}
 -(y+\lambda'(x))W(x,y) &= -(y+\lambda'(x))U(x, \frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x)) \\
 + (x+y^2)Y(x,y) &+ V(\frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x))
 \end{aligned}$$

Logo a ψ -estabilidade infinitesimal é equivalente a re-
solver a equação (Δ) para qualquer função μ de variável real.

Se tomarmos $\mu(y) = y$, estaremos impossibilitados de
escrever (Δ), uma vez que $\lambda'(0) = 0$.

Resumindo os cálculos precedentes, podemos enunciar:

1. TEOREMA. Se $(f, \psi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($n \geq 2$) é uma aplicação ψ -es-
tável, então (f, ψ) é localmente ψ -equivalente a

um dos modelos abaixo:

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) + (x, y)$$

$$(x_1, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (i \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, y)$$

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (x, \frac{x^3}{3} + xy + i \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, y)$$

$$(x, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x, x^2 + i \sum_{i=2}^n \pm x_i^2)$$

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (x, \frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x) + i \sum_{i=2}^n \pm x_i^2)$$

$$\text{com } \lambda'(0) = 0$$

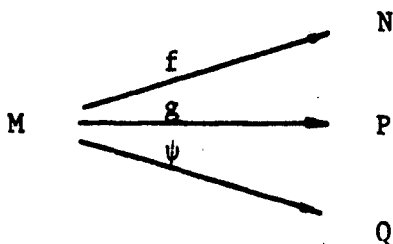
Além do mais, os quatro primeiros modelos são ψ -homotopicamente estáveis e o quinto modelo não o é. (Capítulo III, Proposição 2).

2. NOTA. Observemos que os germes $(x, y) \rightarrow (\frac{x^3}{3} + xy, y)$ e $(x, y) \rightarrow (\frac{x^3}{3} + xy + y, y)$ não são equivalentes, como diagramas divergentes, mas são ψ -equivalentes.

Ainda mais: os germes $(x, y) \rightarrow (x^2, y)$ e $(x, y) \rightarrow (x, x^2 \pm y^2)$ são equivalentes segundo a definição usual, mas não são ψ -equivalentes.

Temos então, que as classes de ψ -equivalência estão situadas estritamente entre as de diagramas divergentes e as da definição usual.

§ 2. Uma primeira generalização interessante é estudar diagramas do tipo:

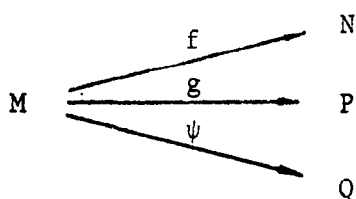


onde ψ é estável.

1. DEFINIÇÃO. Seja $(f_1, f_2, \dots, f_r, \psi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{p_r} \times \mathbb{R}^q$.

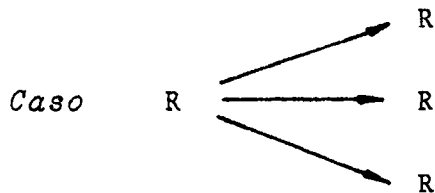
(f_1, \dots, f_r) é ψ -estável se $\forall (g_1, \dots, g_r)$ suficientemente próxima de (f_1, \dots, f_r) existem difeomorfismos $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $k : \mathbb{R}^{p_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{p_r} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{p_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{p_r} \times \mathbb{R}^q$ com $k(u_1, \dots, u_r, v) = (k_1(u_1, v), k_2(u_2, v), \dots, k_r(u_r, v), \tilde{k}(v))$, tais que $(g_1, \dots, g_r, \psi) = k \circ (f_1, \dots, f_r, \psi) \circ h$.

2. DEFINIÇÃO. Consideremos



A aplicação (f, g) é ψ -infinitesimalmente estável, se dados $w_1 \in \theta(f)$ e $w_2 \in \theta(g)$, existirem $u \in \theta(M)$, $v \in \theta(Q)$, $\eta \in \theta(\pi_N)$ ($\pi_N : N \times Q \rightarrow N$) e $\gamma \in \theta(\pi_P)$ ($\pi_P : P \times Q \rightarrow P$), tais que:

$$\begin{cases} w_1 = (df)u + \eta \circ (f, \psi) \\ w_2 = (dg)u + \gamma \circ (g, \psi) \\ 0 = (d\psi)u + v \circ \psi \end{cases}$$

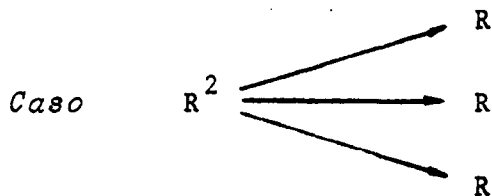


Sabemos que os modelos ψ -infinitesimalmente estáveis de $R \begin{matrix} \nearrow R \\ \searrow R \end{matrix}$ são $x \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow x \end{matrix}$ e $x \begin{matrix} \nearrow x \\ \searrow x^2 \end{matrix}$ e assim,

devemos restringir nossa atenção para os modelos



Montando as equações da ψ -estabilidade infinitesimal, vemos que elas são facilmente satisfeitas.



Observando os modelos ψ -infinitesimalmente estáveis de

$R^2 \begin{matrix} \nearrow R \\ \searrow R \end{matrix}$, temos que possíveis modelos ψ -infinitesimalmente estáveis são:

1. $(x, y) \rightarrow (x, x, y)$
2. $(x, y) \rightarrow (x, x^2, y)$
3. $(x, y) \rightarrow (x, \frac{x^3}{3} + xy, y)$
4. $(x, y) \rightarrow (x^2, x^2, y)$
5. $(x, y) \rightarrow (\frac{x^3}{3} + xy, \frac{x^3}{3} + xy, y)$
6. $(x, y) \rightarrow (x^2, \frac{x^3}{3} + xy, y)$
7. $(x, y) \rightarrow (x, x, x^2 \pm y^2)$

Modelo 1

A ψ -estabilidade infinitesimal $\bar{\epsilon}$ é equivalente a resolver o sistema:

$$\begin{cases} \theta_1(x,y) = X(x,y) + U(x,y) \\ \theta_2(x,y) = X(x,y) + V(x,y) \\ 0 = Y(x,y) + T(y) \end{cases}$$

que é resolúvel tomando $X(x,y) = Y(x,y) = T(y) = 0$ e $U = \theta_1$, $V = \theta_2$.

Modelo 2

A ψ -estabilidade infinitesimal $\bar{\epsilon}$ é equivalente a resolver o sistema:

$$\begin{cases} \theta_1(x,y) = X(x,y) + U(x,y) \\ \theta_2(x,y) = 2xX(x,y) + V(x^2,y) \\ 0 = Y(x,y) + T(y) \end{cases}$$

Observamos que toda função $\mu(x,y)$ se decompõe em $\mu(x,y) = x\mu_1(x^2,y) + \mu_2(x^2,y)$. Então, fazemos $Y(x,y) = T(y) = 0$, resolvemos a segunda equação e então colocamos $\theta_1 - X = U$.

Modelo 3

A ψ -estabilidade infinitesimalmente $\bar{\epsilon}$ é equivalente a re solver o sistema:

$$\begin{cases} \theta_1(x,y) = X(x,y) + U(x,y) \\ \theta_2(x,y) = (x^2+y)X(x,y) + xY(x,y) + V\left(\frac{x^3}{3} + xy, y\right) \\ 0 = Y(x,y) + T(y) \end{cases}$$

Observamos que a resolução do sistema formado pelas equações 2 e 3 já foi estudada no Caso 3 de $R^2 \rightarrow R \times R$. (Capítulo IV, § 1).

Uma vez resolvidas as equações 2 e 3, colocamos $\theta_1 - X = U$ e teremos resolvido o sistema.

Modelo 4

Sabemos que se $\lambda : R^2 \rightarrow R^3$ é uma aplicação estável, então ela admite somente pontos singulares do tipo S_1 . Ainda, $S_1(\lambda)$ é uma subvariedade C^∞ de codimensão $1 + 1.1 = 2$, dentro de R^2 . (Capítulo I, p. 8).

Se o Modelo 4 fosse ψ -infinitesimalmente estável, seria estável como uma aplicação de $V \subset R^2 \rightarrow R^3$.

Analisando, temos:

$$S_1(f, g, \psi) = S_1(x^2, x^2, y) = \{(0, y) / y \in R\}$$

cuja codimensão é 1.

Logo, o Modelo 4 não é ψ -infinitesimalmente estável.

Modelos 5 e 7

Usando o mesmo argumento do caso do Modelo 4, vemos que estes também não são ψ -infinitesimalmente estáveis.

Modelo 6

Observe que o argumento usado nos Modelos 4 - 5 - 7 não se aplica neste caso.

A ψ -estabilidade infinitesimal é equivalente a resolver o sistema:

$$\begin{cases} \theta_1(x,y) = 2xX(x,y) + U(x^2,y) \\ \theta_2(x,y) = (x^2+y)X(x,y) + xY(x,y) + V\left(\frac{x^3}{3} + xy,y\right) \\ 0 = Y(x,y) + T(y) \end{cases}$$

A resolução deste sistema é equivalente à resolução do sistema:

$$\begin{cases} \theta_1(x,y) = 2xX(x,y) + U(x^2,y) \\ \theta_2(x,y) = (x^2+y)X(x,y) - xT(y) + V\left(\frac{x^3}{3} + xy,y\right) \end{cases}$$

Tentemos resolver este sistema para as funções

$$\theta_1(x,y) = x \quad \text{e} \quad \theta_2(x,y) \equiv 0.$$

Pela primeira equação, temos necessariamente que

$$X(x,y) = a + \bar{X}(x,y), \quad \text{onde } a \neq 0 \text{ e } \bar{X} \in m, \text{ isto é, } \bar{X}(0,0) = 0.$$

Restringimos a segunda equação fazendo $y = 0$ e obtemos:

$$0 = x^2(a + \bar{X}(x,0)) - xT(0) + V\left(\frac{x^3}{3}, 0\right)$$

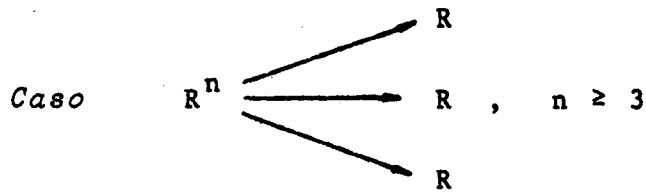
ou seja,

$$-ax^2 = x^2\bar{X}(x) - xT(0) + \bar{V}\left(\frac{x^3}{3}\right),$$

onde $-ax^2 \in m^2$, $x^2\bar{X}(x)$ e $\bar{V}(x^3) \in m^3$.

Temos, assim, um absurdo.

Logo, o sistema não é resolúvel, e assim o modelo não é ψ -infinitesimalmente estável.



Observando os modelos ψ -infinitesimalmente estáveis de $\mathbb{R}^n \begin{matrix} \nearrow \mathbb{R} \\ \searrow \mathbb{R} \end{matrix}$, temos que possíveis modelos ψ -infinitesimalmente estáveis são:

1. $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, x_2, x_3)$
2. $(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (x, x, y)$
3. $(x_1, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \sum_{i=2}^n \pm x_i^2, y)$
4. $(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (x, \frac{x^3}{3} + xy + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, y)$
5. $(x, y, z, x_4, \dots, x_n) \rightarrow (x, \frac{z^3}{3} + zy \pm x^2 + \sum_{i=4}^n \pm x_i^2, y)$
6. $(x_1, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (\sum_{i=2}^n \pm x_i^2, \sum_{i=2}^n \pm x_i^2, y)$
7. $(x_1, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (\sum_{i=2}^n \pm x_i^2, \frac{x_1^3}{3} + x_1 y + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, y)$
8. $(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (\frac{x^3}{3} + xy + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, \frac{x^3}{3} + xy + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, y)$
9. $(x, y, z, x_4, \dots, x_n) \rightarrow (\frac{x^3}{3} + xy \pm z^2 + \sum_{i=4}^n \pm x_i^2, \frac{z^3}{3} + zy \pm x^2 + \sum_{i=4}^n \pm x_i^2, y)$
10. $(x, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x, x, x^2 + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2)$
11. $(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (x, y, x^2 \pm y^2 + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2)$

Modelo 1

Verifica-se facilmente que \bar{e} ψ -infinitesimalmente estável.

Modelo 2

A ψ -estabilidade infinitesimal \bar{e} é equivalente a resolver o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(x, y, x_3, \dots, x_n) = X(x, y, \dots, x_n) + U(x, y) \\ \theta_2(x, y, x_3, \dots, x_n) = X(x, y, \dots, x_n) + V(x, y) \\ 0 = Y(x, y, \dots, x_n) + T(y) \end{array} \right.$$

Restringindo a $x = y = 0$, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(0, 0, x_3, \dots, x_n) = X(0, 0, x_3, \dots, x_n) + U(0, 0) \\ \theta_2(0, 0, x_3, \dots, x_n) = X(0, 0, x_3, \dots, x_n) + V(0, 0) \\ 0 = Y(0, 0, x_3, \dots, x_n) + T(0) \end{array} \right.$$

A arbitrariedade de θ_1 e θ_2 torna então o sistema impossível de ser resolvido.

Modelo 3

A ψ -estabilidade infinitesimal \bar{e} é equivalente a resolver:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(x_1, y, \dots, x_n) = X_1(x_1, y, \dots, x_n) + U(x_1, y) \\ \theta_2(x_1, y, \dots, x_n) = \mp 2x_1 X_1(x_1, y, \dots, x_n) \\ \quad + \sum_{i=3}^n \mp 2x_i X_i(x_1, y, \dots, x_n) \\ \quad + V(\sum_{i=2}^n \mp x_i^2, y) \\ 0 = Y(x_1, y, \dots, x_n) + T(y) \end{array} \right.$$

Dados θ_1 e θ_2 , podemos escrever:

$$\begin{aligned} (\theta_2 \mp 2x_1 \theta_1)(x_1, y, \dots, x_n) &= (\theta_2 \mp 2x_1 \theta_1)(x_1, y, 0, \dots, 0) \\ + \sum_{i=3}^n \mp 2x_i X_i(x_1, y, x_3, \dots, x_n) &= \theta_2(x_1, y, 0, \dots, 0) \\ \mp 2x_1 \theta_1(x_1, y, 0, \dots, 0) + \sum_{i=3}^n \mp 2x_i X_i(x_1, y, \dots, x_n) \\ &= \theta_2(0, y, 0, \dots, 0) + x_1 \bar{\theta}_2(x_1, y, 0, \dots, 0) \\ \mp 2x_1 \theta_1(x_1, y, 0, \dots, 0) + \sum_{i=3}^n \mp 2x_i X_i(x_1, y, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Temos então:

$$\begin{aligned} (\theta_2 \mp 2x_1 \theta_1)(x_1, y, \dots, x_n) &= \mp 2x_1 U(x_1, y) \\ + \sum_{i=3}^n \mp 2x_i X_i(x_1, y, \dots, x_n) + V(y) \end{aligned}$$

Colocando $X_1 = \theta_1 - U$, $Y \equiv 0$ e $T \equiv 0$, teremos re
solvido o sistema.

Modelo 4

A ψ -estabilidade infinitesimal \bar{e} equivalente a resolver o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(x, y, x_3, \dots, x_n) = X(x, y, x_3, \dots, x_n) + U(x, y) \\ \theta_2(x, y, x_3, \dots, x_n) = (x^2 + y)X(x, y, x_3, \dots, x_n) - xT(y) \\ \quad + \sum_{i=3}^n 2x_i X_i(x, y, \dots, x_n) \\ \quad + V\left(\frac{x^3}{3} + xy + \sum_{i=3}^n x_i^2, y\right) \end{array} \right.$$

Pelo estudo de diagramas $R^2 \begin{array}{l} \nearrow R \\ \searrow R \end{array}$ feito no Caso

3 (Capítulo IV, § 1), sabemos que a segunda equação pode ser resolvida como

$$\begin{aligned} \theta_2(x, y, x_3, \dots, x_n) &= (x^2 + y)\bar{X}(x, y) - xT(y) \\ &+ \sum_{i=3}^n 2x_i \bar{X}_i(x, y, \dots, x_n) \\ &+ V\left(\frac{x^3}{3} + xy + \sum_{i=3}^n x_i^2, y\right) \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \theta_1(x, y, x_3, \dots, x_n) &= \theta_1(x, y, 0, \dots, 0) \\ + \sum_{i=3}^n 2x_i \bar{X}_i(x, y, \dots, x_n) &= \sum_{i=3}^n 2x_i \bar{X}_i(x, y, \dots, x_n) \\ + \bar{X}(x, y) + \theta_1(x, y, 0, \dots, 0) - \bar{X}(x, y) \end{aligned}$$

$$\therefore \theta_1(x, y, x_3, \dots, x_n) = X(x, y, x_3, \dots, x_n) + U(x, y),$$

onde $X(x, y, \dots, x_n) = \sum_{i=3}^n \pm 2x_i \bar{X}_i(x, y, \dots, x_n) + \bar{X}(x, y)$ e

$$U(x, y) = \theta_1(x, y, 0, \dots, 0) - \bar{X}(x, y).$$

Ainda:

$$\begin{aligned} \theta_2(x, y, x_3, \dots, x_n) &= (x^2 + y) [\bar{X}(x, y) + \sum_{i=3}^n \pm 2x_i \bar{X}_i(x, y, \dots, x_n)] \\ &- xT(y) + \sum_{i=3}^n \pm 2x_i \bar{X}_i(x, y, \dots, x_n) \\ &+ V\left(\frac{x^3}{3} + xy + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, y\right) - (x^2 + y) \sum_{i=3}^n \pm 2x_i \bar{X}_i(x, y, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \theta_2(x, y, x_3, \dots, x_n) &= (x^2 + y)X(x, y, \dots, x_n) - xT(y) \\ &+ \sum_{i=3}^n \pm 2x_i X_i(x, y, \dots, x_n) \\ &+ V\left(\frac{x^3}{3} + xy + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, y\right), \end{aligned}$$

onde

$$X_i(x, y, \dots, x_n) = \bar{X}_i(x, y, \dots, x_n) - (x^2 + y)\bar{X}_i(x, y, \dots, x_n).$$

Temos assim, a ψ -estabilidade infinitesimal do modelo.

Modelo 5

A ψ -estabilidade infinitesimal é equivalente a resolver o sistema:

$$(*) \left\{ \begin{aligned} \theta_1(x, y, z, x_4, \dots, x_n) &= X(x, y, z, \dots, x_n) + U(x, y) \\ \theta_2(x, y, z, x_4, \dots, x_n) &= \pm 2xX(x, \dots, x_n) - zT(y) \\ &+ (z^2 + y)Z(x, \dots, x_n) \\ &+ \sum_{i=4}^n \pm 2x_i X_i(x, \dots, x_n) \\ &+ V\left(\frac{z^3}{3} + zy \pm x^2 + \sum_{i=4}^n \pm x_i^2, y\right) \end{aligned} \right.$$

A resolução deste sistema é equivalente à resolução da equação

$$(**) \theta(x, y, z, x_4, \dots, x_n) = \mp 2xU(x, y) - zT(y) \\ + (z^2 + y)Z(x, \dots, x_n) + \sum_{i=4}^n \pm 2x_i X_i(x, \dots, x_n) \\ + V\left(\frac{z^3}{3} + zy \pm x^2 + \sum_{i=4}^n \pm x_i^2, y\right)$$

De fato:

Passamos de (*) para (**) fazendo:

Dado $\theta(x, y, z, \dots, x_n)$ consideramos $\theta_1 \equiv 0$ e $\theta_2 = \theta$ em (*).

Teremos então a equação (**).

Passamos de (**) para (*) fazendo:

Dados θ_1, θ_2 , tomamos $\theta = \theta_2 \mp 2x\theta_1$.

$$(\theta_2 \mp 2x\theta_1)(x, \dots, x_n) = \mp 2xU(x, y) - zT(y) \\ + (z^2 + y)Z(x, \dots, x_n) + \sum_{i=4}^n \pm 2x_i X_i(x, \dots, x_n) \\ + V\left(\frac{z^3}{3} + zy \pm x^2 + \sum_{i=4}^n \pm x_i^2, y\right)$$

Colocamos $X = \theta_1 - U$ e teremos resolvido o sistema (*).

A resolução da equação (**) é equivalente à resolução de:

$$\begin{aligned}
 (***) \quad \theta(x, y, z) &= \mp 2xU(x, y) - zT(y) + (z^2 + y)Z(x, y, z) \\
 &+ V\left(\frac{z^3}{3} + zy \pm x^2, y\right).
 \end{aligned}$$

Com efeito, passamos de (**) para (***) restringindo:

$$x_4 = \dots = x_n = 0.$$

Passamos de (***) para (**) fazendo:

$$\begin{aligned}
 \theta(x, y, z, \dots, x_n) &= \theta(x, y, z, 0, \dots, 0) \\
 &+ \sum_{i=4}^n \pm 2x_i X_i(x, y, z, \dots, x_n) \\
 &= \mp 2xU(x, y) - zT(y) + (z^2 + y)Z(x, y, z) + V\left(\frac{z^3}{3} + zy \pm x^2, y\right) \\
 &+ \sum_{i=4}^n \pm 2x_i X_i(x, y, z, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$

Com argumento semelhante àquele utilizado na p. 63 chegamos a (***) .

A resolução da equação (***) é equivalente à resolução de

$$(***) \quad \eta(x, z) = \mp 2x\alpha(x, -z^2) - z\beta(-z^2) + \gamma\left(-\frac{2}{3}z^3 \pm x^2, -z^2\right)$$

De fato:

Passamos de (***) para (****) colocando $y = -z^2$ em (***) .

Reciprocamente, dado $\theta(x, y, z)$, escrevemos, usando

(****):

$$\theta(x, -z^2, z) = \mp 2x\alpha(x, -z^2) - z\beta(-z^2) + \gamma\left(-\frac{2}{3}z^3 \pm x^2, -z^2\right).$$

Dentro destas condições, a expressão

$$\begin{aligned}
 (+) \quad \lambda(x,y,z) &= \theta(x,y,z) \pm 2x\alpha(x,y) + z\beta(y) \\
 &- \gamma\left(\frac{z^3}{3} + zy \pm x^2, y\right)
 \end{aligned}$$

é nula para $y = -z^2$.

Pelo Teorema da Divisão [Teorema 5, Capítulo I, § 2],
temos

$$\lambda(x,y,z) = (z^2+y)Z(x,y,z) + Y(x,z).$$

Mas $0 = \lambda(x, -z^2, z) = Y(x, z).$

$$\therefore \lambda(x,y,z) = (z^2+y)Z(x,y,z).$$

Combinando com (+), vem:

$$\begin{aligned}
 \theta(x,y,z) &= \mp 2x\alpha(x,y) - z\beta(y) + (z^2+y)Z(x,y,z) \\
 &+ \gamma\left(\frac{z^3}{3} + zy \pm x^2, y\right)
 \end{aligned}$$

que é precisamente (***).

Tentemos resolver a equação (****) para $\eta(x,z) = xz$.

Suponhamos a existência de α , β e γ , satisfazendo:

$$xz = \mp 2x\alpha(x, -z^2) - z\beta(-z^2) + \gamma\left(-\frac{2}{3}z^3 \pm x^2, -z^2\right).$$

Derivando em relação a x nos pontos $(0, z)$, temos:

$$z = \mp 2\alpha(0, -z^2), \quad \text{o que não é possível.}$$

Logo, o modelo não é ψ -infinitesimalmente estável.

Modelo 6

Sabemos que se $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação estável, então é, pelo menos de rank 2.

Se o Modelo 6 fosse ψ -infinitesimalmente estável, seria estável como uma aplicação de $V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$ e como tal deveria ter pelo menos rank 2, o que não ocorre.

Logo, não é ψ -infinitesimalmente estável.

Modelos 7 - 8 - 9 - 10

Usando o mesmo argumento usado no caso do Modelo 6, vemos que estes também não são ψ -infinitesimalmente estáveis.

Modelo 11

Observemos que o argumento usado nos modelos anteriores não se aplica a este caso.

A ψ -estabilidade infinitesimal é equivalente a resolver o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(x, y, \dots, x_n) = X(x, y, \dots, x_n) + U(x, x^2 \pm y^2 + \sum_{i=3}^n x_i^2) \\ \theta_2(x, y, \dots, x_n) = Y(x, y, \dots, x_n) + V(y, x^2 \pm y^2 + \sum_{i=3}^n x_i^2) \\ 0 = 2xX(x, y, \dots, x_n) \pm 2yY(x, y, \dots, x_n) \\ \quad + \sum_{i=3}^n 2x_i X_i(x, y, \dots, x_n) \\ \quad + W(x^2 \pm y^2 + \sum_{i=3}^n x_i^2) \end{array} \right.$$

Tentemos resolver este sistema para as funções

$$\theta_1(x, y, \dots, x_n) = y/2$$

$$\theta_2(x, y, \dots, x_n) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y/2 = X(x, y, \dots, x_n) + U(x, x^2 \pm y^2 + \sum_{i=3}^n x_i^2) \\ 0 = Y(x, y, \dots, x_n) + V(y, \text{---}) \\ 0 = 2xX(x, y, \dots, x_n) \pm 2yY(x, y, \dots, x_n) \\ \quad + \sum_{i=3}^n 2x_i X_i(x, \dots, x_n) + W(\text{---}) \end{array} \right.$$

$$(2x\theta_1 \pm 2y\theta_2)(x, y, \dots, x_n) = xy = 2xU(x, \text{---})$$

$$\pm 2yV(y, \text{---}) - \sum_{i=3}^n 2x_i X_i(x, \dots, x_n) - W(\text{---}).$$

Restringindo a $x_3 = \dots = x_n = 0$, temos:

$$xy = 2xU(x, x^2 \pm y^2) \pm 2yV(y, x^2 \pm y^2) - W(x^2 \pm y^2)$$

Derivando em relação a y , nos pontos $(x, 0)$, temos:

$$x = 2V(0, x^2), \text{ que é impossível.}$$

Logo, o modelo não é ψ -infinitesimalmente estável.

CAPÍTULO V

TEOREMAS DE CARACTERIZAÇÃO

Neste capítulo caracterizaremos as aplicações $f : M \rightarrow R$ que são ψ -estáveis (onde M é variedade compacta e $\psi : M \rightarrow R$ é estável).

Em [6], Dufour caracteriza aplicações $(f, \psi) : M \rightarrow R^2$ que são estáveis, por difeomorfismos do tipo produto. Uma grande parte de [6] é dedicada à demonstração da estabilidade homotópica local. Então, a colagem é feita via partição da unidade. Estamos convencidos que esta colagem está imperfeita.

Nosso trabalho é facilitado, em parte, porque sabemos que estabilidade infinitesimal local é equivalente a estabilidade homotópica local. A globalização pode ser completamente demonstrada, usando técnicas semelhantes às usadas no Capítulo III.

Nas condições descritas no início, tendo em vista o Lema 7, § 1, Capítulo II, a noção de ψ -estabilidade pode ser entendida como:

DEFINIÇÃO. Dizemos que $(f, \psi) : M \rightarrow R^2$ é ψ -estável se para toda aplicação diferenciável $(g, \psi) : M \rightarrow R^2$, próxima de (f, ψ) , dentro da topologia C^∞ de Whitney, existir um esquema comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{(f, \psi)} & R^2 & \xrightarrow{\pi_2} & R \\
 \downarrow h & & \downarrow k & & \downarrow \ell \\
 M & \xrightarrow{(g, \psi)} & R^2 & \xrightarrow{\pi_2} & R
 \end{array}$$

onde h, k e ℓ são difeomorfismos.

Quando existe um tal esquema, dizemos que (f, ψ) é ψ -equivalente a (g, ϑ) .

Observemos que $k(x, y) = (k_1(x, y), \ell(y))$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

§ 1. $(f, \psi) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\dim M \geq 2$

1. DEFINIÇÃO. Seja p um ponto de dobra (respectivamente um ponto de cúspide) de $(f, \psi) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$. Diremos que p é uma *dobra transversa* (respectivamente uma *cúspide transversa*) se ψ for regular em p . Diremos que p é uma *dobra tangente* se ψ admitir p como ponto singular não degenerado.

Do estudo feito no Capítulo IV, temos o seguinte resultado:

2. LEMA. Seja $(f, \psi) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$. Se (f, ψ) admite em p uma do
bra transversa, então (f, ψ) é localmente ψ -equiva
lente, em p , à aplicação:

$$(x_1, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (x_1^2 \pm x_2^2, y) \text{ em } 0.$$

Se (f, ψ) admite em p uma *dobra tangente*, então (f, ψ) é localmente ψ -equivalente, em p , à aplicação:

$$(x, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x, x^2 + \sum_{i=2}^n x_i^2) \text{ em } 0.$$

Se (f, ψ) admite em p um ponto de cúspide transversa, então (f, ψ) é localmente ψ -equivalente, em p , à aplicação:

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow \left(\frac{x^3}{3} + xy + \sum_{i=3}^n x_i^2, y\right) \text{ em } 0.$$

Enunciaremos agora uma propriedade genérica:

3. PROPOSIÇÃO. O conjunto Ω das aplicações $(f, \psi) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ que apresentam somente dobras tangentes ou transversas e cúspides transversas como pontos singulares, é um aberto e denso de $C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$, com a topologia de Whitney.

Demonstração

A demonstração apresentada abaixo é uma adaptação das construções feitas por Dufour em [6].

Consideremos

$\Omega' = \{(f, \psi) : M \rightarrow \mathbb{R}^2 / (f, \psi) \text{ apresenta como pontos singulares somente dobras transversas, tangentes ou cúspides quaisquer}\}$

Ω' é a intersecção do conjunto das (f, ψ) que apresentam dobras e cúspides como pontos singulares, com o conjunto das (f, ψ) , cuja segunda componente ψ é de Morse. Portanto, Ω' é aberto e denso.

Seja $S_{11} \subset J^2(M, \mathbb{R}^2)$ -variedade de Thom-Boardman.

Consideremos:

$S_{11}^2 = \{j^2(g, \psi)(x) \in S_{11} / x \text{ é ponto crítico de } \psi\}$.

S_{11}^2 é subvariedade de $J^2(M, \mathbb{R}^2)$, de codimensão $m+1$.

O conjunto Ω é a intersecção de Ω' com o conjunto Ω'' das $(f, \psi) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujo $j^2(f, \psi)$ é transversal a S_{11}^2 [Observe que $(f, \psi) \in \Omega'' \iff j^2(f, \psi)(M) \cap S_{11}^2 = \emptyset$].

Pelo Teorema de Transversalidade de Thom (Capítulo I, § 4), Ω'' é denso em $C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$. Assim, $\Omega = \Omega' \cap \Omega''$ é denso em $C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$. (Observe que Ω' é aberto e denso).

Provemos agora que Ω'' é aberto. Para tanto, consideremos $(f, \psi) \in \Omega''$. (f, ψ) admite um número finito de pontos de cúspides transversas c_1, \dots, c_p . Escolhemos uma vizinhança compacta U de $\{c_1, \dots, c_p\}$, sobre a qual ψ é regular.

Resulta, das propriedades de transversalidade ([10], Capítulo II, § 4, Exemplo 1, p. 59), que para toda (g, ψ) em uma vizinhança de (f, ψ) , (g, ψ) admite somente cúspides dentro de U . Como ψ é regular dentro de U (para toda (g, ψ) numa vizinhança de (f, ψ)), deduzimos que as cúspides de (g, ψ) são do tipo transversas.

Logo, Ω'' é aberto.

Assim, $\Omega = \Omega' \cap \Omega''$ é aberto.

4. LEMA. Os conjuntos Σ e Σ_1 , definidos no Capítulo III, p. 40, são invariantes pelos difeomorfismos permitidos na definição de ψ -equivalência.

Demonstração

Observemos que Σ é invariante, por difeomorfismos quaisquer. Assim, se mostrarmos que o fato de $x \in (\Sigma - \Sigma_1)(f, \psi)$ implica em $h(x) \in (\Sigma - \Sigma_1)(g, \psi)$ (na situação descrita abaixo), estaremos provando que Σ_1 é invariante.

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{(f, \psi)} & \cdot \\
 \downarrow h & & \downarrow k = (k_1, k_2) \\
 \bar{x} & \xrightarrow{(g, \psi)} & \cdot
 \end{array}$$

onde $k(u, v) = (k_1(u, v), k_2(v))$.

Suponhamos então $x \in (\Sigma - \Sigma_1)(f, \psi)$.

Seja dado $(w_1, w_2) \in \theta(g, \psi)_{\bar{x}}$.

Temos:

$$\begin{aligned} (w_1, w_2) &= d(k_1, k_2)(\bar{w}_1, \bar{w}_2)h^{-1} = d(k_1, k_2)[d(f, \psi)u \\ &+ (v(f, \psi), 0)]h^{-1} = d(k_1, k_2)d(f, \psi)(uh^{-1}) \\ &+ d(k_1, k_2)((v(f, \psi), 0)h^{-1}) = d[(k_1, k_2) \circ (f, \psi)](uh^{-1}) \\ &+ (\bar{v}((k_1, k_2) \circ (f, \psi) \circ h^{-1}), 0) \\ &= d[(g, \psi) \circ h](uh^{-1}) + (\bar{v}(g, \psi), 0) \\ &= d(g, \psi)((dh)uh^{-1}) + (\bar{v}(g, \psi), 0) \end{aligned}$$

$$\therefore (w_1, w_2)(\tilde{x}) = d(g, \psi)\bar{u}(\tilde{x}) + (\bar{v}(g, \psi)(\tilde{x}), 0)$$

numa vizinhança de \bar{x} , onde $\bar{u}(\tilde{x}) = (dh)(u \circ h^{-1})(\tilde{x})$.

Logo, $\bar{x} = h(x) \in (\Sigma - \Sigma_1)(g, \psi)$.

5. LEMA. Consideremos $M \xrightarrow{(f, \psi)} \mathbb{R}^2$, tal que $p \in M$ seja um ponto de cuspide transversa. Então, $p \in \Sigma_1$.

Demonstração

Consideremos a forma normal nos pontos de cúspides transversas

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R}, 0 \\ & \nearrow & \\ \mathbb{R}^n, 0 & & \\ & \searrow & \\ & & \mathbb{R}, 0 \end{array}$$

dada por $(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (\frac{x^3}{3} + xy + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, y)$.

Suponhamos que $0 \in \mathbb{R}^n$ seja tal que $0 \notin \Sigma_1$.

Então, em particular, para qualquer θ , seria possível resolver o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(x, y, x_3, \dots, x_n) = (x^2 + y)X(x, y, x_3, \dots, x_n) + xY(x, y, \dots, x_n) \\ \quad + \sum_{i=3}^n 2x_i X_i(x, y, \dots, x_n) \\ \quad + U\left(\frac{x^3}{3} + xy + \sum_{i=3}^n x_i^2, y\right) \\ 0 = Y(x, y, x_3, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

A resolução deste sistema é equivalente à resolução da equação:

$$(*) \quad \theta(x, y) = (x^2 + y)X(x, y) + U\left(\frac{x^3}{3} + xy, y\right)$$

(Veja Capítulo IV, § 1, Caso 3).

A resolução da equação (*) é equivalente à resolução da equação:

$$(**) \quad \mu(x) = \beta\left(-\frac{2}{3}x^3, -x^2\right)$$

De fato:

Passamos de (*) para (**) colocando $y = -x^2$ dentro de (*).

Reciprocamente, dado $\theta(x, y)$, escrevemos, usando (**):

$$\theta(x, -x^2) = \beta\left(-\frac{2}{3}x^3, -x^2\right).$$

Dentro destas condições, a expressão

$$(***) \quad \gamma(x, y) = \theta(x, y) - \beta\left(\frac{x^3}{3} + xy, y\right)$$

é nula para $y = -x^2$. Pelo Teorema da Divisão (Capítulo I, § 2, Teorema 5), temos:

$$\gamma(x,y) = (x^2+y)Z(x,y) + T(x),$$

onde $\gamma(x, -x^2) = T(x) = 0$

$$\therefore \gamma(x,y) = (x^2+y)Z(x,y).$$

Combinando com (**), vem:

$$\theta(x,y) = (x^2+y)Z(x,y) + \beta\left(\frac{x^3}{3} + xy, y\right),$$

que é precisamente a equação (*).

Agora, podemos perceber que a equação (**) nem sempre pode ser resolvida (basta tomar μ tal que $\mu'(0) \neq 0$). Contradição. Assim, $0 \in \Sigma_1$.

6. LEMA. Consideremos $M \xrightarrow{(f,\psi)} \mathbb{R}^2$, tal que $p \in M$ seja um ponto de dobra transversa ou tangente. Então:

$$p \in \Sigma - \Sigma_1, \quad \text{se } p \text{ é uma dobra transversa}$$

$$p \in \Sigma_1, \quad \text{se } p \text{ é uma dobra tangente}$$

Demonstração

Se p é ponto de dobra transversa observando o Caso 2, Capítulo IV, § 1, concluímos que $p \in \Sigma - \Sigma_1$.

Se p é ponto de dobra tangente observando o Caso 4, Capítulo IV, § 1, concluímos que $p \in \Sigma_1$ (basta tomar $w_2(0, \dots, 0) \neq 0$).

7. TEOREMA. Seja $\psi : M \rightarrow R$ estável. $(f, \psi) : M \rightarrow R^2$ é ψ -estável se, e somente se:

- (i) (f, ψ) admite como pontos singulares somente dobras transversas ou tangentes e cúspides transversas.
- (ii) $(f, \psi)^{-1}(x_0, y_0) \cap \Sigma(f, \psi)$ é vazio, um ponto ou duas dobras transversas.
- (iii) imagem da curva de dobras intercepta-se transversalmente.

Demonstração

Observação: Se p e \bar{p} são dois pontos de dobras transversas tais que $(f, \psi)(p) = (f, \psi)(\bar{p})$ e se D denota a variedade 1-dimensional de todos os pontos de dobra com a expressão "imagem da curva de dobras intercepta-se transversalmente", queremos dizer que $T(f, \psi)(T_p D) \oplus T(f, \psi)(T_{\bar{p}} D) = R^2$.

—> Suponhamos (f, ψ) . ψ -estável.

Observemos primeiramente que a propriedade que define Ω (da Proposição 3, p. 87) é invariante por ψ -equivalência.

De fato:

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{(g, \phi)} & R \times R & \xrightarrow{\pi_2} & R \\
 \downarrow h & & \downarrow k & & \downarrow \ell \\
 M & \xrightarrow{(f, \psi)} & R \times R & \xrightarrow{\pi_2} & R
 \end{array}$$

e assim, $\psi = \ell^{-1} \circ \psi \circ h$.

Como Ω é denso, temos que se (f, ψ) é ψ -estável então, $(f, \psi) \in \Omega$.

Provemos agora a afirmação com respeito a $\Sigma(f, \psi)$.

Observemos que se (f, ψ) é ψ -estável, então, em particular, $\psi : M \rightarrow R$ é estável. Logo, ψ é uma função de Morse,

tal que se p e \bar{p} são pontos críticos de ψ , então $\psi(p) \neq \psi(\bar{p})$. Assim, duas dobras tangentes não podem ser levadas em um mesmo ponto $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

Ainda:

Como (f, ψ) é estável (em particular de Boardman), temos que $\dim S_{11}(f, \psi) = 0$ e $\dim S_{10}(f, \psi) = 1$.

Como toda aplicação estável satisfaz a condição (N.C.) ([10], p. 157), temos que duas cúspides não podem ser levadas num mesmo ponto. Pelo mesmo motivo, uma dobra e uma cúspide não podem ser levadas num mesmo ponto.

Consideremos agora:

$$S_{10}^2 = \{j^2(g, \psi)(x) \in S_{10} / x \text{ é ponto crítico de } \psi\}.$$

S_{10}^2 é subvariedade de $J^2(M, \mathbb{R}^2)$, de codimensão m .

$S_{10}^2(f, \psi) = \{x \in M / x \text{ é ponto de dobra tangente}\}$ e $\dim S_{10}^2(f, \psi) = 0$. Como toda aplicação estável satisfaz a condição (N.C.) ([10], p. 158), temos que uma dobra tangente e uma dobra transversa não podem ser levadas num mesmo ponto $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

Assim, somente duas dobras transversas podem ser levadas em um mesmo ponto, com transversalidade das imagens.

← De acordo com a Proposição 3, p. 87, o conjunto das aplicações $(f, \psi) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, satisfazendo as hipóteses do Teorema, é um aberto. Então, para mostrar que uma tal aplicação (f, ψ) é ψ -estável, é suficiente provar que ela é ψ -homotopicamente estável ([10], p. 119).

Usando o Teorema 3, Capítulo II, § 2, é suficiente construir para cada deformação (F, ϕ) de (f, ψ) , campos veto

riais ξ , η e γ com R -componentes nulas, tais que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_F = (dF)\xi + \gamma \circ (F, \phi) \\ \tau_\phi = (d\phi)\xi + \eta \circ \phi \end{array} \right.$$

Observemos que este não é exatamente o enunciado do Teorema citado. Quando ψ também é deformada é este o resultado que permanece.

Pelo Capítulo IV, § 1, Teorema 1, estas equações estão satisfeitas, a nível de germe, em qualquer ponto $(p, 0) \in M \times R$.

Tendo-se em vista os Lemas 5 e 6 do presente capítulo, temos que uma aplicação $(f, \psi) : M \rightarrow R^2$, satisfazendo as hipóteses do teorema, é tal que:

$$(f, \psi)(\Sigma_1) \cap (f, \psi)(\Sigma - \Sigma_1) = \emptyset.$$

Usando agora argumentos semelhantes aos usados no Teorema 10, Capítulo III, teremos que (f, ψ) é ψ -homotopicamente estável.

§ 2. $(f, \psi) : M \rightarrow R^2$, $\dim M = 1$

1. **DEFINIÇÃO.** Seja $(f, \psi) : M \rightarrow R^2$. Diremos que $p \in M$ é um ponto do tipo *A* se ψ for regular em p . Diremos que $p \in M$ é um ponto do tipo *B* (ou do tipo ψ -singular) se ψ for singular em p .

Do estudo feito no Capítulo IV, temos o seguinte resultado:

2. LEMA. Seja $(f, \psi) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ com ψ estável. Se (f, ψ) admite em p um ponto do tipo A, então (f, ψ) é localmente ψ -equivalente, em p , à aplicação:

$$x \mapsto (0, x), \text{ em } 0.$$

Se (f, ψ) admite em p um ponto do tipo B, então (f, ψ) é localmente ψ -equivalente, em p , à aplicação:

$$x \mapsto (x, x^2), \text{ em } 0.$$

3. TEOREMA. Seja $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ estável. $(f, \psi) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ é ψ -estável se, e somente se, (f, ψ) é imersão com cruzamento normal e tal que se (x_0, y_0) é um valor ψ -singular então $(f, \psi)^{-1}(x_0, y_0)$ é constituído de um só ponto.

Demonstração

→ Suponhamos (f, ψ) ψ -estável.

(f, ψ) deverá ser imersão com cruzamento normal, uma vez que $(f, \psi) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ é, em particular, estável.

Dois pontos do tipo B não podem ser levados em um mesmo ponto, uma vez que $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ é estável.

Consideremos:

$$S_0^0 = \{j^1(g, \psi)(x) \in S_0 / x \text{ é ponto regular de } \psi\}$$

$$S_0^1 = \{j^1(g, \psi)(x) \in S_0 / x \text{ é ponto singular de } \psi\}$$

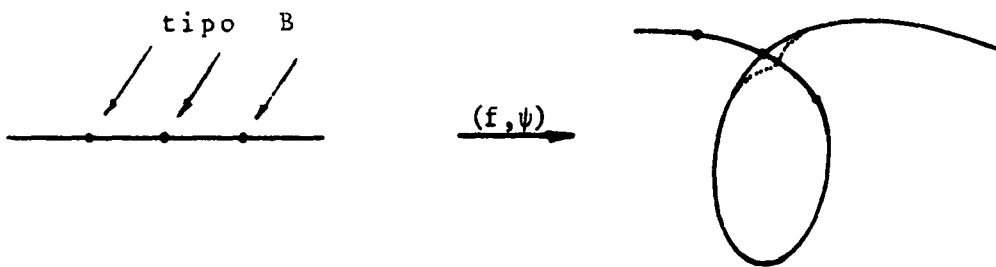
Temos que:

$$S_0^0(f, \psi) = \{x \in M / x \text{ é ponto do tipo A}\}$$

$$S_0^1(f, \psi) = \{x \in M / x \text{ é ponto do tipo B}\}$$

onde $\dim S_0^1(f, \psi) = 0$.

Como toda aplicação estável satisfaz a condição (N.C.) temos que um ponto do tipo A e um ponto do tipo B não podem ser levados em um mesmo ponto.



Assim, somente dois pontos do tipo A podem ser levados em um mesmo ponto.

← O conjunto das aplicações $(f, \psi) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo as hipóteses do Teorema é um aberto. Então, para provar que uma tal (f, ψ) é ψ -estável é suficiente provar que ela é ψ -homotopicamente estável.

Neste caso, temos

$$\Sigma = M$$

$$\Sigma_1 = \{x \in M / x \text{ é } \psi\text{-singular}\}$$

Assim uma aplicação (f, ψ) satisfazendo as hipóteses do Teorema é tal que

$$(f, \psi)(\Sigma - \Sigma_1) \cap (f, \psi)(\Sigma_1) = \emptyset$$

Usando argumentos semelhantes aos usados no Teorema 10, Capítulo III, teremos que (f, ψ) é ψ -homotopicamente estável.

§ 3. $(f, \psi) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\dim M = 2$

Neste parágrafo faremos alguns comentários para diagramas dos tipos:

$$\begin{array}{l} \text{I. } \mathbb{R}^2 \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ \text{II. } \mathbb{R} \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \\ \text{III. } \mathbb{R} \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ \quad \quad \quad \downarrow g \\ \quad \quad \quad \mathbb{R} \end{array}$$

M variedade compacta,
 $\dim M = 2$, ψ infinitesimalmente estável.

Caso I

Podem ocorrer os seguintes tipos com ψ -estabilidade:

$$(a) 0 \in S_0(\psi) \implies 0 \in S_0(f, \psi)$$

Assim podemos chegar ao modelo

$$(x, y) \rightarrow (0, x, y)$$

$$(b) 0 \in S_{10}(\psi) \cap S_0(f, \psi)$$

Utilizando-se mudanças de coordenadas permitidas, como em Dufour [7], Capítulo IV, § 3, teremos

$$(x, y) \rightarrow (y + g(x, y^2), x, y^2)$$

Considerando a mudança de coordenadas

$$k(u, v, w) = (u - g(v, w), v, w)$$

obtemos

$$(x, y) \rightarrow (y, x, y^2)$$

As equações da ψ -estabilidade infinitesimal são:

$$\begin{cases} \theta = Y + Z(y, x, y^2) \\ 0 = X + \eta_1(x, y^2) \\ 0 = 2yY + \eta_2(x, y^2) \end{cases}$$

que sempre tem solução.

$$(c) \quad 0 \in S_{10}(\psi) \cap S_{10}(f, \psi)$$

Analogamente podemos, por mudanças permitidas, chegar ao modelo

$$(x, y) \rightarrow (x + xy + \alpha y^2 + \beta(x, y^2), x, y^2)$$

Considerando a mudança de coordenadas

$$k(u, v, w) = (u - v - \alpha w - \beta(v, w), v, w)$$

obtemos

$$(x, y) \rightarrow (xy, x, y^2)$$

As equações da ψ -estabilidade infinitesimal são:

$$\begin{cases} \theta = yX + xY + Z(xy, x, y^2) \\ 0 = X + \eta_1(x, y^2) \\ 0 = 2yY + \eta_2(x, y^2) \end{cases}$$

A segunda equação estabelece que X é par em y e a terceira equação estabelece que Y é ímpar em y .

Assim a resolução do sistema é equivalente à resolução da equação

$$\theta(x,y) = y\bar{X}(x,y^2) + \bar{Z}(xy,x,y^2)$$

a qual é sempre possível.

$$(d) 0 \in S_{11}(\psi) \cap S_0(f,\psi)$$

Por mudanças na fonte obtemos

$$(x,y) \rightarrow (x,h(x,y),y), \quad h_x(0,0) = 0$$

As equações da ψ -estabilidade infinitesimal são:

$$\begin{cases} \theta = X + Z(x,h(x,y),y) \\ 0 = h_x X + h_y Y + \eta_1(h(x,y),y) \\ 0 = Y + \eta_2(h(x,y),y) \end{cases}$$

que sempre tem solução.

Observações:

- (1) O caso (d) não ocorre em diagramas divergentes estáveis, como observa Dufour [7], Capítulo IV. Enquanto pode ocorrer com ψ -estabilidade.
- (2) O modelo usual $(x,y) \rightarrow (xy,x,y^2)$ é ψ -estável, não o sendo como diagrama divergente.
- (3) Temos

$$\Sigma_1 = \{p \in M / \exists m \ w_1 \ e \ w_2 \ \text{tais que} \\ w_1 = (df)u + v(f,\psi) \ e \ w_2 = (d\psi)u \ \text{não tem so} \\ \text{lução em } u \ e \ v, \ \text{como germes em } p\}.$$

$\tilde{\Sigma}_1 = \{p \in M / \exists w_1 \text{ tal que } w_1 = (df)u + v(f, \psi) \text{ e } 0 = (d\psi)u \text{ não tem solução em } u \text{ e } v, \text{ como germes em } p\}$.

Observe: $\tilde{\Sigma}_1 \subset \Sigma_1$
 $\{p \in M / p \text{ é ponto singular de } \psi\} \subset \Sigma_1$.

No caso estudado temos:

$\Sigma_1 = \{p \in M / p \text{ é do tipo (b), (c) ou (d)}\}$.

$\tilde{\Sigma}_1 = \{p \in M / p \text{ é do tipo (c)}\}$ - pontos isolados.

Deste modo a hipótese do Teorema 10, Capítulo III, aplicada a $\tilde{\Sigma}_1$ mostra que ela está automaticamente satisfeita.

(4) As dimensões de $\Sigma = M$ e $\Sigma_1 \supset \{x \in M / x \text{ é ponto singular de } \psi\}$ permitem que

$(f, \psi)(\Sigma - \Sigma_1)$ e $(f, \psi)(\Sigma_1)$

interceptem-se transversalmente, em imagens de pontos dos tipos (a) com (b). Resta saber se isso pode ocorrer com ψ -estabilidade global.

Caso II

Podem ocorrer os seguintes tipos com ψ -estabilidade:

(a) $0 \in S_0(f, \psi) \cap S_0(\psi)$

Podemos chegar à forma:

$(x, y) \rightarrow (0, x, y)$

$$(b) \quad 0 \in S_0(f, \psi) \cap S_{10}(\psi)$$

Podemos chegar à forma:

$$(x, y) \rightarrow (x, y, h(x, y))$$

$$\text{com } h_x(0, 0) = h_y(0, 0) = 0.$$

Modelo ψ -infinitesimalmente estável.

$$(c) \quad 0 \in S_{10}(f, \psi) \cap S_0(\psi)$$

Neste caso, tendo em vista as indicações de Dufour [7] e Arnol'd [1], devemos obter:

$$(x, y) \rightarrow (x, y^2, x + xy + y^2)$$

que é o próprio modelo divergente.

Observemos que neste caso temos:

$$\tilde{\Sigma}_1 \subset \{p \in M / p \text{ é do tipo (c)}\} - \text{conjunto de pontos } \underline{i} \text{ solados}$$

Novamente a hipótese do Teorema 10, Capítulo III, aplicada a $\tilde{\Sigma}_1$ mostra que ela está automaticamente satisfeita.

Caso III

Pelo estudo já feito no Capítulo IV, § 2, temos que modelos ψ -infinitesimalmente estáveis são:

$$(a) \quad (x, y) \rightarrow (x, x, y)$$

$$(b) \quad (x, y) \rightarrow (x, x^2, y)$$

$$(c) \quad (x, y) \rightarrow (x, \frac{x^3}{3} + xy, y)$$

Desconhecemos se esta é uma lista completa de modelos.

Definindo de maneira análoga os conjuntos Σ_1 e $\tilde{\Sigma}_1$ teremos neste caso (levando em conta a resolução das equações feita no Capítulo IV)

$\Sigma_1 = \tilde{\Sigma}_1 = \{p \in M / p \text{ é do tipo (c)}\}$ - conjunto de pontos isolados.

BIBLIOGRAFIA

- [1] - ARNOL'D, V.I. - *Evolution of wave fronts and equivariant Morse Lemma*. Comm. Pure Appl. Math. 29 (1976), 557-582, (1976).
- [2] - BRÖCKER, T. and LANDER, L. - *Differentiable Germs and Catastrophes*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 17 (1975).
- [3] - DUFOUR, J.P. - *Deploiements de Cascades d'applications différentiables*. C. R. Acad. Sci., Paris 281 (1975), A 31-34.
- [4] - DUFOUR, J.P. - *Sur la stabilité des diagrammes d'applications différentiables*. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4 ème serie, 10 (1977), 153-174.
- [5] - DUFOUR, J.P. - *Bi-stabilité des fronces*. C. R. Acad. Sci. Paris, 285 (1977), 445-448.
- [6] - DUFOUR, J.P. - *Stabilité simultanée de deux fonctions*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, (1979), 263-282.
- [7] - DUFOUR, J.P. - *Diagrammes D'Applications Differentiables*. These - Université Des Sciences et Techniques Du Languedoc.
- [8] - FAVARO, L.A. - *Singularidades e Estabilidade de Aplicações Diferenciáveis em Variedades Folheadas*. Tese de Livre-
-Docência, ICMSC-USP, 1975.
- [9] - GIBSON, C.G. - *Singular points and smooth mappings*. Research Notes in Mathematics, Vol. 25, Pitman, 1979.
- [10] - GOLUBITSKY, M. and GUILLEMIN, V. - *Stable mappings and their singularities*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14, Springer-Verlag, 1973.
- [11] - LEME, B.T. - *Aplicações Diferenciáveis em Variedades com Estratificações do Tipo Finito*. Tese de Doutorado, ICMSC-USP, 1978.

- [12] - MATHER, J.N. - *Stability of C^∞ mappings I: The division Theorem.* Annals of Math., Vol. 87, n.º 1, 1968.
- [13] - MATHER, J.N. - *Stability of C^∞ mappings II: Infinitesimal stability implies stability.* Annals of Math., Vol. 89, n.º 2, 1969.
- [14] - MATHER, J.N. - *Stability of C^∞ mappings V: Transversality.* Advances in Math., 4, 301-336 (1970).
- [15] - MENDES, C.M. - *Estabilidade de Aplicações Diferenciáveis entre Variedades Folheadas.* Dissertação de Mestrado, ICMSC-USP, 1976.
- [16] - WAN, Y.H. - *Morse theory of two functions.* Topology, 14, n.º 3, 218-228 (1975).