SOBRE PONTOS FIXOS DE APLICAÇÕES ENTRE FIBRADOS COM FIBRA SUPERFICIE

DIRCEU PENTEADO

ORIENTADOR: PROF. DR. DACIBERG LIMA GONÇALVES

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática)

São Carlos - SP

JUNHO 1988

Este trabalho dependeu parcialmente de auxílios das seguintes entidades:

CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP - através de auxílios concedidos ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP para bibliografia e contratação de docentes de cursos de Pós-Graduação.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com a colaboração e sugestões de muitos colegas. Registro aqui meus sinceros agradecimentos:

Ao Prof. Dr. Daciberg L. Gonçalves pela dedicada e paciente orientação.

A Profa. Dra. Alice K. M. Libardi pela prontidão em ajudar e a ouvir.

Ao Prof. Dr. Pedro L. Q. Pergher pelo estímulo e sugestões.

Ao Prof. Dr. Edson de Oliveira, companheiro de viagens e esperanças.

Aos colegas do ICMSC-USP, professores Drs. Carlos Biasi, Janey A. Daccach, Oziride Manzoli Neto, pelas significativas sugestões.

Aos colegas e à direção do DM da UFSCar pelo incentivo e apoio .

À Profa. Dra Yolanda S. Furuya que gentilmente cedeu a impressora.

À Rosângela, companheira de todas as horas, agradeço a Deus por colacá-la em meu caminho.

Ao Eduardo por um sorriso de criança que dá vida e por às vezes um chorinho que me diz: "pai, tese não é tudo!".

E a tantas outras pessoas que trabalharam nos bastidores.

Meu muito obrigado.

ABSTRACT

Let $p:E \longrightarrow B$ be locally trivial fibre space with fibre F, where F, E, B are connected compact manifolds (without boundary). Let $f:E \longrightarrow E$ be a fibre preserving map inducing $1_B:B \longrightarrow B$.

E. Fadell and S. Husseini in [FaBO] studied the question of deform a map f to fixed point free map (f.p.f.) by fiberwise homotopy. They show that the problem is equivalent to lift the map $(1,f):E \longrightarrow E \times_B E$ through the inclusion $i:E \times_B E-\Delta \longrightarrow E \times_B E$. There they consider the homotopy fibre $\mathcal{F}_B$ of the inclusion i. They assume that $\dim F = n \geq 3$ so they can use obstruction theory with local coefficient $\Pi_{n-1}(\mathcal{F}_B)$ which is abelian. In this work we study the case where F is a torus. We consider the local coefficient system on E determined by $H_1(\mathcal{F}_B)$ and we can defined the obstruction abelianized $\mathcal{D}(1,f) \in H^2(E;\{H_1(\mathcal{F}_B)\})$. We compute $\mathcal{D}(1,f)$ in some examples when $p:E \longrightarrow B$ is principal torus fibered bundle. In this case, we defined a number $i(f) \in \mathbb{N}$. Geometrically $i(f)$ is minimun number of the connected componnent of $fix(g)$, where $g \simeq f$ by fiberwise homotopy.

In case that F is torus and $B = S^1$, we also estabelish necessary and sufficient conditions to deform f to f.p.f. map by fiberwise homotopy.

ÍNDICE

INTRODUCAO

Seja $p: E \longrightarrow B$ um fibrado com fibra F, onde F, E e B são variedades compactas, conexas e sem bordo.

Dada uma função $f: E \longrightarrow E$, induzindo na base B a identidade, consideremos o seguinte problema:

P: Deformar f a uma função g livre de pontos fixos, por homotopias que a todo instante preservam a fibra (notação $f \underset{B}{\simeq} g$ e $fix_B g = \emptyset$) .

E. Fadell e S. Husseini em [Fa80] mostraram que o problema é equivalente à existência do levantamento Γ em I.

I
$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X}_B(E) \arrow[d, "q"] \\ E \arrow[ur, "\Gamma"] \arrow[r, "(1,f)"'] & E \times_B E \end{tikzcd}$$

onde a função $q: \mathcal{X}_B(E) \longrightarrow E \times_B E$ é obtida quando substituimos a inclusão $i:(E \times_B E) - \Delta \longrightarrow E \times_B E$ por uma fibração, e $E \times_B E$ é o fibrado induzido de p por p .

Quando a dimensão da fibra F é $n \geq 3$, a fibra $q^{-1}(*) = \mathcal{F}_B$ é simplesmente conexa. Na verdade, $\Pi_{i-1}(\mathcal{F}_B) \simeq \Pi_i(F, F\text{-ponto})$, portanto, a obstrução primária ao levantamento Γ é uma classe de cohomologia:

$\mathcal{O}(1,f) \in H^n(E;\{\Pi_{n-1}(\mathcal{F}\ )\})$, onde $\{\Pi_{n-1}(\mathcal{F}_B)\}$ denota o sistema local de coeficientes.

Neste trabalho, estudamos o caso em que a fibra F é o toro $S^1 \times S^1$. Nessa situação ,a única obstrução à existência do levantamento Γ, localiza-se no 2-esqueleto de E, porém a teoria de obstrução não se aplica, pois $\Pi_1(\mathcal{F}) \simeq \Pi_2(T,T-e)$ é não abeliano.

Este trabalho é composto de três capítulos.

No capítulo 1 apresentamos os teoremas 1.1.1 e 1.1.2, os quais fornecem condições para extensão de uma secção ao 2-esqueleto de uma fibração. No parágrafo seguinte explicitamos a equivalência entre o problema P e a existência de Γ em I. No último parágrafo estudamos o levantamento Γ_1 em II:

II
$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "q_1"] \\ X \arrow[ur, "\Gamma_1"] \arrow[r, "\varphi"'] & T \end{tikzcd}$$

onde q_1 é a fibração correspondente à inclusão $i: T-e \longrightarrow T$.

A fibra $\mathcal{F} = q_1^{-1}(*)$ é tal que $\Pi_{i-1}(\mathcal{F}) \simeq \Pi_i(T,T-e)$.

Portanto $\Pi_1(\mathcal{F}) \simeq \Pi_2(T,T-e)$.

Ao considerarmos o sistema local $\{H_1(\mathcal{F})\}$ podemos determinar uma classe de cohomologia $\mathcal{D}(\varphi) \in H^2(X;\{H_1(X)\})$, chamada a obstrução abelianizada de φ. Apresentamos, neste parágrafo, meios de como calcular $\mathcal{D}(\varphi)$, usando o cálculo diferencial livre .

No capítulo 2 estudamos o problema P para o caso em que E é um toro fibrado principal sobre B . Neste caso, a função $f: E \longrightarrow E$ define, através da equação $f(x) = \theta_f(x).x$, uma função $\theta_f: E \longrightarrow T$.

A função f é deformável sobre B a uma função l.p.f. se, e somente se, existe o levantamento Γ_1 em II para $\varphi = \theta_f$.

Provamos o seguinte:

Se o posto de $(\theta_f)_\# \Pi_1(E)$ em $\Pi_1(T)$ for 0 ou 1, então o levantamento Γ_1 sempre existe.

Se o homomorfismo de $(\theta_f)_2 : H_2(E;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(T;\mathbb{Z})$ é não nulo, então não existe o levantamento Γ_1 , assim : qualquer que seja $g \underset{B}{\simeq} f$, $fix_B g \neq \emptyset$ e além disso, $fix_B g$ tem pelo menos $i(f)$ componentes conexas, onde $i(f) = [\Pi_1(T) : (\theta_f)_\# \Pi_1(E)]$.

No parágrafo seguinte, usando o teorema 1.4.16 , calculamos a obstrução abelianizada $\mathcal{D}(\theta_f)$ em alguns exemplos. O exemplo 2.3.6 deixa claro que a nulidade de $(\theta_f)_2$ e de $\mathcal{D}(\theta_f)$ são apenas condições necessárias para o levantamento Γ_1 .

No capítulo 3 estudamos o problema P nos fibrados M(A). Esses fibrados são obtidos a partir de um isomorfismo linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que deixa invariante $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. O espaço M(A) é obtido do TxI identificando os pontos $\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, o\right)$ com $\left(\left[A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right], 1\right)$, onde $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ denota o elemento de $\frac{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \simeq T$. Na primeira parte, fizemos uma redução das matrizes do isomorfismo linear A e das matrizes de $(f_/)_\# : \Pi_1 T \longrightarrow \Pi_1 T$. Na segunda parte, estudamos o diagrama I a nível de Π_1 . No último parágrafo, usando 1.1.2 , discutimos o levantamento geométrico Γ a nível de Π_1 . As contas indicam que nos fibrados M(A), a obstrução abelianizada $\mathcal{D}(1,f)$ é zero se, e somente se, existe o levantamento Γ.

CAPITULO 1

PRÉ-REQUISITOS GERAIS

§1 LEVANTAMENTO AO 2-ESQUELETO E PRESENTAÇÃO DE GRUPOS

A seguir um critério para estender uma secção numa fibração ao 2-esqueleto.

1.1.1 Teorema: Sejam (X,L) um complexo celular relativo e $q: E \longrightarrow X$ uma fibração com fibra F. Suponha que os espaços X, L e F são conexos por caminho.

Uma secção $s: L \longrightarrow q^{-1}(L)$ pode ser estendida a uma secção s' definida sobre o 2-esqueleto $X_2 = L \cup X^2$ se, e somente se, $i_*: \Pi_1(F) \longrightarrow \Pi_1(E)$ é injetiva e existe o homormofismo θ tornando o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Pi_1 q^{-1}(L) \arrow[r] & \Pi_1(E) \arrow[dr, "q_\#"] & \\
\Pi_1(L) \arrow[u, "s_\#"] \arrow[r] & \Pi_1(X) \arrow[u, "\theta"] \arrow[ur, "1"'] & \Pi_1(X)
\end{tikzcd}$$

Além disso, a secção s' pode ser escolhida de tal forma que $s'_\# = \theta$.

Demonstração: Ver [Ba77], Teorema 4.3.1, página 265.

■

Usaremos o teorema 1.1.1 na situação da proposição 1.1.2, onde os espaços em questão são todos conexos por caminhos.

1.1.2 Proposição: Seja $q:E \longrightarrow X$ uma fibração com fibra F, tal que $i_{\#}: \Pi_1(F) \longrightarrow \Pi_1(E)$ seja injetiva.

Seja $\varphi : Y \longrightarrow X$.

Então: a) a fibração induzida $q(\varphi):E(\varphi) \longrightarrow Y$ é tal que $j_{\#}: \Pi_1(F) \longrightarrow \Pi_1(E(\varphi))$ é injetiva.

b) $(q(\varphi))_{\#}$ admite uma inversa à direita se, e somente se, $\varphi_{\#}$ se fatora através de $q_{\#}$.

c) existe o levantamento de φ ao 2-esqueleto se, e somente se, $\varphi_{\#}$ se fatora através de $q_{\#}$.

Demonstração: parte a)

Segue da seqüência exata dos grupos de homotopia que $\Delta:\Pi_2(Y) \longrightarrow \Pi_1(F)$ é nula, portanto, $j_{\#}$ é injetiva.

parte b)

Num sentido é óbvio, e no outro basta observar que $\Pi_1(E(\varphi))$ é isomorfo ao grupo induzido de $q_{\#}$ por $\varphi_{\#}$.

parte c)

Conseqüência imediata de a) , b) e do teorema 1.1.1.

■

1.1.3 Sejam G e A grupos com as seguintes presentações: $G = \langle X;R\rangle$ e $A = \langle Y;S\rangle$.

Consideremos a seqüência exata curta de grupos:

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{G} \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1 .$$

Sejam $\tilde{Y} = \{\tilde{y} = i(y), y \in Y\}$ e $\tilde{S} = \{\tilde{s}, s \in S\}$, onde $\tilde{s}$ é a palavra obtida de $s \in S$, substituindo-se as letras y por $\tilde{y}$.

Seja $\tilde{X} = \{\tilde{x}, x \in X\}$, onde $p(\tilde{x}) = x$ e as classes laterais $i(A)\tilde{x}$ são todas disjuntas para $\tilde{x} \in \tilde{X}$.

Para cada palavra r, consideremos a palavra $\tilde{r}$ em $\tilde{X}$, obtida de r, substituindo-se x por $\tilde{x}$.

O homomorfismo p anula cada palavra r, portanto $\tilde{r} \in$ núcleo de p = imagem de i. Assim cada palavra $\tilde{r} = v_r$, onde v_r é uma palavra em $\tilde{Y}$.

Seja $\tilde{R} = \{\tilde{r}v_r^{-1}, r \in R\}$.

Notemos que i(A) é um subgrupo normal de $\tilde{G}$, portanto, cada conjugado $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{x}^{-1} = w_{xy}$, onde w_{xy} é uma palavra em $\tilde{Y}$.

Seja $\tilde{T} = \left\{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{x}^{-1} w_{xy}^{-1}, x \in X \text{ e } y \in Y\right\}$.

1.1.4 Teorema: O grupo G tem a seguinte presentação $\langle \tilde{X},\tilde{Y};\tilde{R},\tilde{S},\tilde{T}\rangle$.

Demonstração: Ver [Jo76] Teorema 1, página 149.

■

§2 PAR FIBRADO E DEFORMAÇÃO DE FUNÇÕES FIBRADAS SOBRE A BASE

Todas as fibrações consideradas são no sentido de Hurewicz.

1.2.1 Definição: Sejam $\mathfrak{F} = (E,p,B)$ e $\mathfrak{F}_o = (E_o,p_o,B)$ fibrações. Diz-se que $\mathfrak{F}_o$ é uma subfibração de $\mathfrak{F}$ se:

i) $E_o \subset E$ e $p_o = p_{/E_o}$.

ii) Seja $\lambda(e,w) \in E^I$ o levantamento do caminho $w \in B^I$ com ponto inicial $e \in E$. Então, $\lambda(e,w) \in E_o^I$ sempre que $e \in E_o$.

1.2.2 Definição: Diz-se que (E,E_o,p,B) é um par fibrado se $\mathfrak{F}_o = (E_o,p_o,B)$ é uma subfibração de $\mathfrak{F} = (E,p,B)$, onde $E_o \subset E$ e $p_o = p_{/E_o}$.

1.2.3 Definição: Sejam $\mathfrak{F}_o = (E_o, p_o, B)$ e $\mathfrak{F} = (E, p, B)$ fibrações localmente triviais, onde $E_o \subset E$ e $p_o = p_{/E_o}$.

Diz-se que $\mathfrak{F}_o$ é uma subfibração localmente trivial de $\mathfrak{F}$, se para cada $x \in B$ existe um aberto U contendo x e um homeomorfismo de pares:

$$\Phi_U : (U \times F, U \times F_o) \longrightarrow (p^{-1}(U), p_o^{-1}(U)) \text{ tal que}$$

$$p\Phi_U(b,z) = b \ , \ (b,z) \in U \times F \quad ,$$

$$\text{onde } F = p^{-1}(x) \text{ e } F_o = p_o^{-1}(x) = F \cap E_o.$$

1.2.4 Proposição: Se $\mathfrak{F}_o = (E_o, p_o, B)$ é uma subfibração localmente trivial de $\mathfrak{F} = (E, p, B)$ sobre uma base B paracompacta, então (E, E_o, p, B) é um par fibrado.

Demonstração: Ver [Fa65] proposição 2.7 .

■

EXEMPLOS DE PAR FIBRADO

1.2.5 Sejam M uma variedade de dimensão n e Δ a diagonal de $M \times M$. Então $(M \times M, M \times M - \Delta, p_1, M)$ é um par fibrado, onde p_1 é a projeção no primeiro fator (Ver [Fa65] proposição 3.5) .

1.2.6 Seja $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ um fibrado, onde F,E,B são variedades conexas compactas e sem bordo.

Sejam $E \times_B E$ o fibrado induzido de p por p e Δ a diagonal de $E \times_B E$.

Então $(E \times_B E,\ E \times_B E - \Delta,\ p_1,\ E)$ é um par fibrado, onde p_1 é a projeção no primeiro fator. (Ver [Fa80] proposição 2.1).

1.2.7 Proposição: Se (E,E_0,p,B) é um par fibrado, então para todo par (X,A) existe a propriedade do levantamento de homotopia na categoria dos pares de espaços topológicos, ou seja, a seta pontilhada no diagrama seguinte existe:

1.2.8

$$\begin{tikzcd}
(X\times 0,\ A\times 0) \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail] & (E\ ,\ E_0) \arrow[d] \\
(X\times I,\ A\times I) \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed] & B
\end{tikzcd}$$

Demonstração: Sejam W,W_0 as fibrações induzidas:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d] & B^I \arrow[d, "\rho_0"] \\
E \arrow[r, "p"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W_0 \arrow[r] \arrow[d] & B^I \arrow[d, "\rho_0"] \\
E_0 \arrow[r, "p_1"'] & B
\end{tikzcd}$$

onde $\rho_0(u) = u(0)$.

Pelo fato de (E,E_0,ρ,B) ser um par fibrado, existe

$\lambda:(W,W_o) \longrightarrow (E^I,E^I_o)$ tal que $\lambda(e, u)(0) = e$ e

$p\lambda(e, u) = u$.

A adjunta $\tilde{\lambda}$ de λ torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(W\times 0,W_o\times 0) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, tail] & (E,E_o) \arrow[d, "p"] \\
(W\times I,W_o\times I) \arrow[r, "h"] \arrow[ur, "\tilde{\lambda}"] & B
\end{tikzcd}$$

onde $p_1(e,u,0) = e$ e $h(e,u,t) = u(t)$.

As funções G e f, dadas em 1.2.8, definem $\theta:(X\times 0,A\times 0) \longrightarrow (W\times 0,W_o\times 0)$, dada por $\theta(x) = (f(x),\tilde{G}(x),0)$, onde $\tilde{G}$ é a adjunta de G.

Notemos que $p_1'\circ\theta = f$ e $h\circ(\theta\times 1) = G$. Segue do diagrama 1.2.9 que $\tilde{\lambda}\circ(\theta\times I)$ é o levantamento da homotopia de 1.2.8 :

1.2.9
$$\begin{tikzcd}
(Y\times 0,A\times 0) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, tail] & (W\times 0,W_o\times 0) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, tail] & (E,E_o) \arrow[d] \\
(Y\times I,A\times I) \arrow[r, "\theta\times 1"] & (W\times I,W_o\times I) \arrow[r, "h"] \arrow[ur, "\tilde{\lambda}"] & B
\end{tikzcd}$$

■

1.2.10 Consideremos o exemplo 1.2.6.

Ao substituirmos a inclusão $i:(E\times_B E-\Delta) \hookrightarrow (E\times_B E)$ por uma fibração $q:\mathcal{X}_B(E) \longrightarrow (E\times_B E)$, o espaço $\mathcal{X}_B(E)$ pode ser identificado com o seguinte conjunto:

$$\mathcal{X}_B(E) = \left\{(\alpha,\beta) \in E^I\times E^I,\ p(\alpha(t)) = p(\beta(t))\ ,\ \alpha(0) \neq \beta(0)\right\}.$$

Com essa identificação $q:\mathcal{X}_B(E) \longrightarrow (E\times_B E)$ é dada por $q(\alpha,\beta) = (\alpha(1),\beta(1))$.

1.2.11 Sejam $f,\ g:E \longrightarrow E$ funções que preservam a fibra do fibrado $F \hookrightarrow E \longrightarrow B$ e que cobrem a identidade da base.

1.2.12 Proposição: Se existir o levantamento Γ em 1.2.13, então é possível deformar g sobre B a uma função g_o, tal que f e g_o são livres de coincidência.

1.2.13

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X}_B(E) \arrow[d, "q"] \\ (f,g):E \arrow[ur, "\Gamma"] \arrow[r] & E\times_B E \end{tikzcd}$$

Demonstração: A existência do levantamento Γ, dado por $\Gamma(x) = (\alpha_x,\beta_x) \in E^I\times E^I$, acarreta a função $\tilde{\Gamma}(x,t) = \Gamma(x)(t) = (\alpha_x(t),\beta_x(t))$.

Consideremos o diagrama:

1.2.14
$$\begin{tikzcd}
(E\times I\times 0, E\times 0\times 0) \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "J"'] & (E\times_B E, E\times_B E-\Delta) \arrow[d, "p_1"] \\
(E\times I\times I, E\times 0\times I) \arrow[r, "\Psi"'] \arrow[ur, "H"] & E
\end{tikzcd}$$

onde $\overline{\Psi}(x,t,0) = \tilde{\Gamma}(x,t)$ e $\Psi(x,t,s) = \alpha_x(h(t,s))$ e $h: I\times I \longrightarrow I$ satisfaz:

t	s	h(t,s)	consequência da exigência
$\forall$	0	t	comutatividade de 1.2.14
$\forall$	1	1	$\alpha_x(h(t,1)) = f(x)$
1	$\forall$	1	$\alpha_x(h(1,s)) = f(x)$

A existência de H é garantida por 1.2.6 e 1.2.7 .

Notemos que H restrita a $E\times I\times\{1\}$ é da forma $(\alpha_x(h(t,1)),L(x,t)) = (f(x),L(x,t))$ e H restrita a $E\times\{1\}\times I$ é da forma:

$$(\alpha_x h(1,s),M(x,s)) = (f(x),M(x,s)).$$

A função M realiza uma homotopia sobre B entre g e M_1 , pois: $p(x) = p(f(x)) = pM(x,s)$ e quando s=0 $H(x,1,0) = \overline{\Psi}(x,1,0) = \tilde{\Gamma}(x,1) = (f(x),g(x))$.

A função L realiza uma homotopia sobre B entre $g_o = L_o$ e M_1, pois: $p(x) = p(f(x)) = p(L(x,t))$ e $H(x,1,1) = (f(x),L(x,1)) = (f(x),M(x,1))$.

Por sua vez, as funções f e g_o são livres de coincidência:

$$H(x,0,1) = (f(x),L(x,0)) = (f(x),g_o(x)) \in E\times_B E-\Delta \quad .$$

■

§3 O CALCULO DIFERENCIAL LIVRE

Os resultados desse parágrafo são encontrados em [Fo53].

1.3.1 Seja F(X) o grupo livre com geradores $X = \{x_1 \ldots x_n\}$. Um elemento u de F(X) é representado de modo único por uma palavra reduzida, ou seja:

$$u = \prod_{i=1}^{l} X_{j_i}^{\varepsilon_i}, \quad \varepsilon_i = \pm 1 \quad e \quad \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} \neq 0 \text{ se } j_i = j_{i+1} \quad .$$

Um elemento do anel de grupo $\mathbb{Z}F(X)$ é um polinômio livre $f(x) = \sum a_u u$, onde $u \in F(X)$, $a_u \in \mathbb{Z}$ e $a_u = 0$ exceto um número finito.

A cada homomorfismo de grupo $\phi: F(X) \longrightarrow G$ induz um homomorfismo de anel $\phi: \mathbb{Z}F(X) \longrightarrow \mathbb{Z}G$ dado por:

$$\phi(f(x)) = f(x^{\phi}) = \sum a_u u^{\phi} = \sum a_u \phi(u).$$

Em particular o homomorfismo de grupo trivial:

$o: F(X) \longrightarrow \{1\}$, induz o homomorfismo $o: \mathbb{Z}F(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$

dado por:

$f(x)^o = f(1) = \sum a_u u^o = \sum a_u$ (soma dos coeficientes de $f(x)$).

1.3.2 Uma derivação D no anel $\mathbb{Z}F(X)$ significa uma função $D: \mathbb{Z}F(X) \longrightarrow \mathbb{Z}F(X)$ satisfazendo:

1.3.3 $$D(f(x)+g(x)) = D(f(x)) + D(g(x))$$

1.3.4 $$D(f(x).g(x)) = D(f(x)).g(1) + f(x)D(g(x))$$

Quaisquer que sejam a, $a_u \in Z$ e $u,v \in F(X)$, decorrem de 1.3.3.e 1.3.4 as seguintes propriedades:

1.3.5 $$D(u.v) = D(u) + uDv$$

1.3.6 $$D(a) = 0$$

1.3.7 $$D(\sum a_u u) = \sum a_u D(u)$$

1.3.8 $$D(u^{-1}) = -u^{-1}D(u)$$

1.3.9 Teorema: a) Para cada gerador $x_j \in X$, existe uma derivação chamada a derivação em relação a x_j, que associa a cada $f(x)$ o elemento $D_j f(x) = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$, com a seguinte propriedade :

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \delta_{j,k} \quad \text{(índice de Kronecker)}$$

b) Para cada $j=1,2,\ldots,n$, seja $h_j(x) \in \mathbb{Z}F(X)$. Então existe uma, e somente uma derivação D tal que:

$$D(x_j) = h_j(x) \quad \text{e} \quad Df(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}.h_j(x).$$

Demonstração: Ver [Fo53] Teorema, página 550.

■

1.3.10 Observemos que $D:\mathbb{Z}F(X) \longrightarrow \mathbb{Z}F(X)$, dada por:

$D(f(x)) = f(x) - f(1)$, é uma derivação e $D(x_j) = x_j - 1$.

Segue da parte b) do teorema 1.3.9 a fórmula fundamental:

$$f(x) = f(1) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j - 1).$$

1.3.11 Seja $u = \prod_{i=1}^{l} X_{j_i}^{\varepsilon_i}$ um elemento de $F(X)$ escrito na forma reduzida.

O k-ésimo segmento inicial de u, denotado por $u_{(k)}$, é dado por $\prod_{i=1}^{k-1} X_{j_i}^{\varepsilon_i}$ se $\varepsilon_k = 1$ e $\prod_{i=1}^{k} X_{j}^{\varepsilon_i}$ se $\varepsilon_k = -1$, ou seja,

$$u_{(k)} = \prod_{i=1}^{k-1} X_{j_i}^{\varepsilon_i} X_{j_k}^{(\varepsilon_k - 1)/2} .$$

1.3.12 Vale a seguinte fórmula:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{\substack{k \\ j_k = j}} \varepsilon_k u_{(k)}$$

Demonstração: Ver [Fo53] fórmula 2.8.

§4. OBSTRUÇÃO ABELIANIZADA

1.4.1 Seja X um espaço topológico cujo grupo fundamental é finitamente presentável: $\Pi_1(X) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n ; \beta_1, \ldots, \beta_m \rangle$ e seja $\varphi : X \longrightarrow T$, tal que $\varphi_\#(\alpha_i) = a^{x_i} b^{y_i} \in \Pi_1(T)$, onde $i=1,2,\ldots,n$.

Consideremos $q : \mathcal{X} \longrightarrow T$ a fibração correspondente a inclusão $i : T-e \longrightarrow T$. Em [FaB1], prova-se que $\Pi_1(\mathcal{F}) \simeq \Pi_2(T, T-e)$ e $\Pi_i(\mathcal{F}) = 0$ para $i \neq 1$, onde $\mathcal{F}$ é fibra de q.

Problema: Achar um levantamento para φ.

Ao considerarmos o sistema local de coeficientes $H_1(\mathcal{F})$, podemos determinar uma classe de cohomologia $\mathcal{D}(\varphi) \in H^2(X, \{H_1(\mathcal{F})\})$, cuja nulidade fornece apenas condições necessárias para o levantamento de φ.

Nesse parágrafo, procuraremos desenvolver condições para verificar se $\mathcal{D}(\varphi)$ é zero em termos de $\varphi_\#$, usando para isto o cálculo diferencial livre.

O índice ab num grupo indicará o quociente do grupo pelo seu respectivo subgrupo comutador.

1.4.2 Proposição: a) $H_1(\mathcal{F}) \simeq \Pi_1^{ab}(\mathcal{F}) \simeq \mathbb{Z}\Pi_1(T)$.

b) Seja $p(x) \in \mathbb{Z}\Pi_1(T)$. O elemento $p(x)$ é visto como sendo um polinômio nas variáveis a, a^{-1}, b, b^{-1} com coeficientes inteiros.

Se $\alpha \in \Pi_1(T)$, então a ação de α em $H_1(\mathcal{F})$ é dada pela multiplicação por α, ou seja,

$$\begin{aligned} \Phi : \Pi_1(T) \times \mathbb{Z}\Pi_1(T) &\longrightarrow \mathbb{Z}\Pi_1(T) \\ (\alpha, p(x)) &\longmapsto \alpha . p(x) \end{aligned}$$

Demonstração: parte a)

Seja $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T$ o recobrimento universal do toro.

Sejam $\tilde{x}_0$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ pontos bases de $\mathbb{R}^2 - p^{-1}(e)$ e $T-e$.

Tomando $\alpha \in \Pi_1(T)$ e $\alpha' \in \Pi_1(T-e)$ tal que $i_{\#}(\alpha') = \alpha$, temos o seguinte diagrama :

1.4.3

$$\begin{tikzcd}
\Pi_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 - p^{-1}(e); \tilde{x}_0) \arrow[rr, "\partial", "\simeq"'] \arrow[dl, "\simeq"', "(h_\alpha)_\#"] \arrow[dd, "\simeq"] & & \Pi_1(\mathbb{R}^2 - p^{-1}(e); \tilde{x}_0) \arrow[dl, "(h_{\alpha'})_\#"', "\simeq"] \arrow[dd] \\
\Pi_2(\mathbb{R}^2 \mathbb{R}^2 - p^{-1}(e); h_\alpha(\tilde{x}_0)) \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dd, "\simeq"] & & \Pi_1(\mathbb{R}^2 - p^{-1}(e); h_\alpha(\tilde{x}_0)) \arrow[dd] \\
& \Pi_2(T, T-e; x_0) \arrow[rr, tail] \arrow[dl, "\simeq"', "\tau_{\alpha'}"] & & \Pi_1(T-e; x_0) \arrow[dl, "\simeq"', "\tau_{\alpha'} = \text{conjugação por } \alpha'"] \\
\Pi_2(T, T-e; x_0) \arrow[rr, tail, "\partial"] & & \Pi_1(T-e; x_0)
\end{tikzcd}$$

onde $\tau_{\alpha'}$ e $\tau'_{\alpha'}$ são os homomorfismos correspondentes à ação de α' em $\Pi_1(T-e)$ e em $\Pi_2(T,T-e)$ respectivamente e h_α é a transformação de recobrimento correspondente a $\alpha \in \Pi_1(T)$.

Geometricamente, se $\alpha = a^m b^n$, a função h_α corresponde à translação do $\mathbb{R}^2$ determinada pelo vetor (m,n).

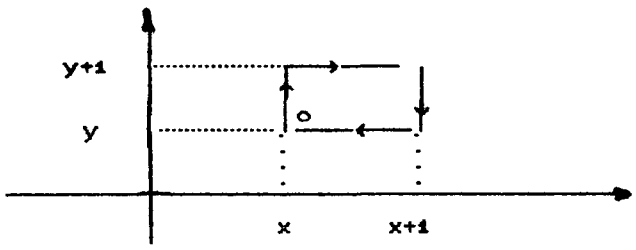
Notemos que apenas as faces laterais do cubo 1.4.3 não comutam.

Segue do isomorfismo $\Pi_2(T,T-e) \simeq \Pi_1(\mathbb{R}^2-p^{-1}(e),\tilde{x}_0)$ que $\Pi_2^{ab}(T,T-e) \simeq \Pi_1^{ab}(\mathcal{F}) \simeq H_1(\mathcal{F}) \simeq \Pi_2^{ab}(\mathbb{R}^2-p^{-1}(e)) \simeq$

$\simeq \bigoplus_{\beta\in\Pi_1 T} [B_\beta] \simeq \mathbb{Z}\Pi_1(T)$, onde cada B_β é o gerador de uma cópia de $\mathbb{Z}$.

Tomando $\underline{e}$ próximo do elemento neutro do toro e se $\beta = a^x b^y$, então $B_\beta \in H_1(\mathcal{F})$ pode ser representada pela 1-cadeia em $\mathbb{R}^2-p^{-1}(\underline{e})$ próxima da coordenada (x,y), conforme o seguinte esquema:

1.4.4



parte b)

Consideremos o diagrama 1.4.3 , onde todos os grupos envolvidos foram divididos pelos seus respectivos grupos comutadores; notemos que agora as faces laterais comutam. Interpretando a transformação $h^{ab}_{\alpha/}$ como sendo a translação correspondente ao vetor (m,n) $(\alpha = a^m b^n \in \Pi_1(T))$ então o gerador $B_{a^x b^y}$ é levado em $B_{a^{x+m}\ b^{y+n}}$, portanto se $p(x) \in \mathbb{Z}\Pi_1(T)$, então

$\Phi\ (\alpha, p(x)) = \alpha . p(x)$.

1.4.5 Caracterização global da cocadeia abelianizada determinada por um levantamento parcial g_1 definido no 1-esqueleto de X denotado por X_1 .

De acordo com o lema 5.3, capítulo VI, pág 293 de [Wh78] o levantamento parcial $g_1 : X_1 \longrightarrow \mathcal{X}$ tem uma extensão $\hat{g}_1 : (X_2, X_1) \longrightarrow (\hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X})$,onde $\hat{\mathcal{X}}$ é o cilindro da função $q : \mathcal{X} \longrightarrow T$; e a cocadeia obstrução abelianizada corresponde à composição $\underline{\Delta} \circ \underline{\hat{g}_1}$ conforme o seguinte diagrama:

1.4.6

$$\begin{tikzcd}
 & & & \Pi_2^{ab}(\hat{\mathcal{X}},\mathcal{X}) & \Pi_2^{ab}(\hat{\mathcal{F}},\mathcal{F}) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "\simeq"'] & H_1(\mathcal{F}) \\
H_2(\tilde{X}_2,\tilde{X}_1) & \Pi_2^{ab}(\tilde{X}_2,\tilde{X}_1) \arrow[l, "\rho"', "\simeq"] \arrow[r, "p", "\simeq"'] & \Pi_2^{ab}(X_2,X_1) \arrow[ur, "\hat{g}_1"] & \Pi_2(\hat{\mathcal{X}},\mathcal{X}) \arrow[u] & \Pi_2(\hat{\mathcal{F}},\mathcal{F}) \arrow[l, "j_\#"', "\simeq"] \arrow[u] & \Pi_1(\mathcal{F}) \arrow[l, "\partial", "\simeq"'] \arrow[u] \\
 & & & & & \Pi_1(\mathcal{X}) \simeq \Pi_1(T-e) \arrow[d, "q_\#"] \\
\Pi_2(\tilde{X}_2,\tilde{X}_1) \arrow[uur, "\rho"] \arrow[r, "p"'] & \Pi_2(X_2,X_1) \arrow[uu] \arrow[r, "\partial"'] & \Pi_1(X_1) \arrow[uur, "(g_1)_\#"] \arrow[r] & \Pi_1(X_2)=\Pi_1(X) \arrow[r] & \Pi_1(T) &
\end{tikzcd}$$

onde:

i) $p:\tilde{X}_2 \longrightarrow X_2$ é o recobrimento universal de X_2.

ii) $\tilde{X}_1$ é o 1-esqueleto de $\tilde{X}_2$

iii) ρ é o homomorfismo de Hurewicz

iv) $\Delta = \partial \circ j_\#^{-1}$ e $\underline{\Delta} = \underline{\partial} \circ \underline{j}^{-1}$

Notemos que $\underline{\Delta} \circ \hat{\underline{g}}_1 \in \hom^{\pi_1(X)}(\Pi_2^{ab}(X_2,X_1);H_1(\mathcal{F}))$

$\underline{\Delta} \circ \hat{\underline{g}}_1 \circ \underline{p} \circ \underline{\rho}^{-1} \in \hom^{\pi_1(X)}(H_2(\tilde{X}_2,\tilde{X}_1);H_1(\mathcal{F}))$, onde esse último grupo é interpretado como sendo o grupo das 2-cocadeias equivariantes. ($\Pi_1(X)$ atua em $\tilde{X}_2$ via transformações de recobrimento).

Visto que a cohomologia do complexo equivariante

$\hom^{\pi_1(X)}(\Gamma(\tilde{X});H_1(\mathcal{F}))$, onde $\Gamma(\tilde{X})$ é complexo celular, é isomorfa a $H^*(X;\{H_1(\mathcal{F})\})$ (corolário 4.10 , capítulo VI de [Wh78]); para mostrar que a cocadeia representada por $\underline{\Delta}\circ\hat{\underline{g}}_1\circ\underline{p}\circ\underline{\varrho}^{-1}$ é um cobordo, é suficiente verificar se existe um $\Pi_1(X)$-homomorfismo Ψ, tal que o seguinte diagrama comuta:

1.4.7

$$\begin{tikzcd}
H_2(\tilde{X}_2,\tilde{X}_1) \arrow[r, "\underline{\Delta}\circ\hat{\underline{g}}_1\circ\underline{p}\circ\underline{\varrho}^{-1}"] \arrow[d, "\partial"] & H_1(\mathcal{F}) \\
H_1(\tilde{X}_1) \arrow[d, "i_*"] & \\
H_1(\tilde{X}_1,\tilde{X}_0) \arrow[uur, "\Psi"] &
\end{tikzcd}$$

1.4.8 Os geradores de $H_2(\tilde{X}_2,\tilde{X}_1)$ como $\Pi_1(X)$-módulo são dados pelos levantamentos das funções de colagem das células de dimensão dois. Analogamente $H_1(\tilde{X}_1,\tilde{X}_0)$. Por sua vez, ao discutir a existência de Ψ ,não é necessário preocupar-se com as células cujo bordo em $H_1(\tilde{X}_1)$ sejam iguais a zero. Portanto é suficiente considerarmos as funções de colagem dadas pelos cones das relações $\beta_1,\ldots,\beta_m$.

1.4.9 Para cada relação β_j , consideremos a função:

$h_{\beta_j} : (\Delta_2, \Delta_2) \longrightarrow (X_2, X_1)$ tal que $(h_{\beta_j})_{\#}(i) = \beta_j$, onde i é o gerador de $\Pi_2(\Delta_2, \dot{\Delta}_2)$.

De acordo com o lema 5.3, capítulo VI, página 293 de [Wh78], a composição $\hat{g}_1 \circ h_{\beta_j} = \hat{g}_{\beta_j}$ é dada por:

$$\hat{g}_{\beta_j}[(1-t)b+tz] = \begin{cases} \varphi h_{\beta_j}((1-2t)b + 2tz) & \text{para } t \leq \frac{1}{2} \\ \langle 2(1-t), g_1 h_{\beta_j}(z)\rangle & \text{para } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

onde b é o baricentro de Δ_2 e $z \in \dot{\Delta}_2$.

Seja $\aleph_{\beta_j} \in \Pi_2^{ab}(X_2, X_1) \simeq H_2(\tilde{X}_2, \tilde{X}_1)$ o gerador correspondente à função de colagem h_{β_j} . Para se determinar $\underline{\Delta} \circ \hat{g}_1(\aleph_{\beta_j})$, considere o seguinte diagrama comutativo:

1.4.10

$$\begin{tikzcd}
 & \Pi_2^{ab}(X_2, X_1) \arrow[r, "\hat{g}_1"] & \Pi_2^{ab}(\hat{\aleph}, \aleph) \arrow[r, "\underline{\Delta}"] & H_1(\mathcal{F}) \\
\Pi_2(\Delta_2, \dot{\Delta}_2) \arrow[r, "(h_{\beta_j})_{\#}"] \arrow[d, "\partial_1"] & \Pi_2(X_2, X_1) \arrow[r, "\hat{g}_{1\#}"] \arrow[u, "p_1"] \arrow[d, "\partial"] & \Pi_2(\hat{\aleph}, \aleph) \simeq \Pi_2(T, T-e) \arrow[u, "p_2"] \arrow[d, "\partial_2"] & \\
\Pi_1(\dot{\Delta}_2) \arrow[r, "(h_{\beta_j/})_{\#}"] & \Pi_1(X_1) \arrow[r, "g_{1\#}"] & \Pi_1(\aleph) \simeq \Pi_1(T-e) &
\end{tikzcd}$$

Então $\underline{\Delta} \circ \hat{g}_1(\aleph_{\beta_j}) = \underline{\Delta} \circ \hat{g}_1 \circ p_1 \circ (h_{\beta_j})_{\#}(\hat{i}) =$

Então $\underline{\Delta} \circ \hat{g}_1(\gamma_{\beta_j}) = \underline{\Delta}\circ\hat{g}_1\circ p_1\circ(h_{\beta_j})_\#(\hat{i}) =$

$$= \underline{\Delta}\circ p_2\circ\partial_2^{-1}\circ g_{1\#}\circ (h_{\beta_j})_\#\circ\partial_1(\hat{i}) =$$

$$= \underline{\Delta}\circ p_2\circ\partial_2^{-1}\circ g_{1\#}(\beta_j)$$

onde $\hat{i}$ é o gerador de $\Pi_2(\Delta_2,\dot{\Delta}_2)$.

Notemos que $\varphi_\#(\alpha_i) = a^{x_i}b^{y_i} \in \Pi_1(T)$,e assim ao tomarmos $g_1 : X_1 \longrightarrow T-e$ tal que $(g_1)_\#(\alpha_i) = a^{x_i}b^{y_i} \in \Pi_1(T-e)$, o elemento $\partial_2^{-1}(g_{1\#})(\beta_j) \in \Pi_2(T,T-e)$. Portanto, o elemento $\underline{\Delta}\circ p_2\circ\partial_2^{-1}\circ g_{1\#}(\beta_j)$ pode ser visto como sendo o abelianizado de $\varphi(\beta_j)$ quando este é visto como sendo um elemento de $\Pi_2(T,T-e)$, através de ∂_2^{-1}. Denotaremos esse elemento por $\varphi^{ab}(\beta_j)$.

De agora em diante, denotaremos g_1 também por φ . No contexto ficará claro quando que φ se refere ao levantamento g_1, ou quando se refere a $\varphi:\Pi_1(x) \longrightarrow \Pi_1 T$.

Portanto $\underline{\Delta}\circ\hat{g}_1(\gamma_{\beta_1}) = \underline{\Delta}\circ p_2\partial_2^{-1}\varphi_\#(\beta_j) = \varphi^{ab}(\beta_j)$.

1.4.11 Seja $\gamma'_{\beta_j} = \underline{\rho}\circ\underline{p}^{-1}(\gamma_{\beta_j})$, onde $\gamma_{\beta_j} \in \Pi_2^{ab}(X_2,X_1)$.

Para se calcular $i\circ\partial(\gamma'_{\beta_j})$,em 1.4.7 ,calcularemos $i\circ p_1(\tilde{\beta}_j)$, onde $\tilde{\beta}_j$ é um levantamento do laço que representa $\beta_j \in \Pi_1(X_1)$. Isto segue a partir do diagrama 1.4.12.

1.4.12

$$\begin{tikzcd}
H_2(\tilde{X}_2,\tilde{X}_1) \arrow[dd, "\partial"'] & \Pi_2^{ab}(\tilde{X}_2,\tilde{X}_1) \arrow[l, "\theta", "\simeq"'] & \\
& \Pi_2(\tilde{X}_2,\tilde{X}_1) \arrow[ul, "\rho"'] \arrow[u] \arrow[dl, "\partial_3"'] \arrow[d, "p_\#", "\simeq"'] & \\
H_1(\tilde{X}_1) \arrow[d, "i_\#"'] & \Pi_1(\tilde{X}_1) \arrow[l, "p_1"'] \arrow[d, "(p/)_\#"'] & \Pi_2(X_2,X_1) \arrow[dl, "\partial_2"] & \Pi_2(\Delta_2,\dot{\Delta}_2) \arrow[l, "(h_{\beta_j})_\#"'] \arrow[dll, "\simeq", "\partial_1"'] \\
H_1(\tilde{X}_1,\tilde{X}_0) & \Pi_1(X_1) & & \\
& & \Pi_1(\dot{\Delta}_2) \arrow[ul, "(h_{\beta_j/})_\#"] &
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\tilde{\beta}_j$ é um laço em $\tilde{X}_1$ e :

$$\partial(\gamma_{\beta_j}) = \rho p_\#^{-1}(h_{\beta_j})_\#(\hat{i}) = p_1(p_/)_\#^{-1}(h_{\beta_j/})_\#\partial_1(\hat{i}) = p_1(\tilde{\beta}_j)$$

1.4.13 Seja $\tilde{x}_0$ o ponto base de $\tilde{X}_1$.

Para cada $\alpha \in \Pi_1(X_1)$, grupo livre gerado por $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, seja $x_\alpha \in \tilde{X}_1$, o ponto extremo correspondente ao levantamento do laço α começando em $\tilde{x}_0$.

Para cada $i = 1,2,\ldots,n$, seja c_i o caminho em $\tilde{X}_1$ ligando $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}_{\alpha_i}$ (Geradores de $H_1(\tilde{X}_1,\tilde{X}_0)$ como $\Pi_1(X)$-módulo) .

Seja k o comprimento da palavra reduzida $\beta_j = \prod_{r=1}^{k} \alpha_{i_r}^{\varepsilon_r}$ e

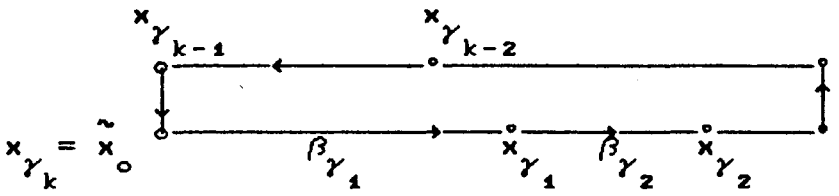
γ_l a l-palavra inicial de β_j , ou seja:

$$\gamma_l = \prod_{r=1}^{l} \alpha_{i_r}^{\varepsilon_r}$$

Notemos que $\gamma_{l+1} = \gamma_l \alpha_{i_{l+1}}^{\varepsilon_{l+1}}$.

Para $r = 1,2, \ldots , k$ seja β_{γ_r} o caminho em $\tilde{X}_1$ ligando $x_{\gamma_{r-1}}$ a x_{γ_r} .

O esquema seguinte revela os diversos pontos de $\tilde{X}_1$ em que o levantamento do laço que representa β_j deverá passar:



Portanto, $\tilde{\beta}_j = \beta_{\gamma_1} . \beta_{\gamma_2} . \ldots . \beta_{\gamma_k}$ e

$i_* \circ p_1(\tilde{\beta}_j) = \beta_{\gamma_1} + \beta_{\gamma_2} + \ldots + \beta_{\gamma_k} \in H_1(\tilde{X}_1, \tilde{X}_o)$

Por outro lado:

$$\beta_{\gamma_r} = \begin{cases} h_{\gamma_{r-1}}(c_{i_r}^{\varepsilon_r}) & \text{se } \varepsilon_r = 1 \\ h_{\gamma_r}(c_{i_r}^{\varepsilon_r}) & \text{se } \varepsilon_r = -1 \end{cases}$$

onde os c_{i_r} são os geradores de $H_1(\tilde{X}_1, \tilde{X}_o)$, definidos em 1.4.13, e h_{γ_r} as transformações de recobrimento correspondente a γ_r .

Considerando que a estrutura de $\Pi_1(X)$-módulo de $H_1(X_1,X_0)$ é dada através das transformações de recobrimento, podemos escrever:

$$\beta_{\gamma_r} = \varepsilon_r \beta_{(r)} c_{i_r}$$

onde $\beta_{(r)}$ é o r-segmento inicial da palavra β_j .

Portanto:

$$i_* \circ p_1(\tilde{\beta}_j) = \beta_{\gamma_1} + \beta_{\gamma_2} + \dots + \beta_{\gamma_k} = \sum_{r=1}^{k} \varepsilon_r \beta_{(r)} c_{i_r} =$$

$$= \Big(\sum_{\substack{r \text{ tq} \\ i_r=1}} \varepsilon_r \beta_{(r)}\Big) c_1 + \Big(\sum_{\substack{r \text{ tq} \\ i_r=2}} \varepsilon_r \beta_{(r)}\Big) c_2 + \dots + \Big(\sum_{\substack{r \text{ tq} \\ i_r=n}} \varepsilon_r \beta_{(r)}\Big) c_n =$$

$$= \left[\frac{\partial \beta_j}{\partial \alpha_1}\right] c_1 + \left[\frac{\partial \beta_j}{\partial \alpha_2}\right] c_2 + \dots + \left[\frac{\partial \beta_j}{\partial \alpha_n}\right] c_n$$

a última igualdade segue da fórmula 1.3.12.

1.4.15 Proposição: Se $\gamma'_{\beta_j} \in H_2(\tilde{X}_2,\tilde{X}_1)$ é o gerador correspondente a relação β_j .

Então:

$$i_* \circ \partial(\gamma'_{\beta_j}) = \left[\frac{\partial \beta_j}{\partial \alpha_1}\right] c_1 + \dots + \left[\frac{\partial \beta_j}{\partial \alpha_n}\right] c_n \in H_1(\tilde{X}_1,\tilde{X}_0)$$

onde c_i são os geradores de $H_1(\tilde{X}_1,\tilde{X}_0)$, definidos em 1.4.13.

Demonstração: Segue de 1.4.11 a 1.4.14 .

■

1.4.16 Teorema: A classe $\mathcal{D}(\varphi) \in H^1(X;(H_1(\mathcal{F}))),$ a qual corresponde ao cociclo representado por $\underline{\Delta}\circ\hat{\underline{g}}_1\circ\underline{p}\circ\underline{\rho}^{-1}$ é um cobordo se, e somente se, o sistema 1.4.17 tem solução $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ onde $x_i \in \mathbb{Z}\Pi_1(T)$.

1.4.17
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\beta_1}{\partial\alpha_1} & \frac{\partial\beta_1}{\partial\alpha_2} & \cdots & \frac{\partial\beta_1}{\partial\alpha_n} \\ \frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_1} & \frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_2} & \cdots & \frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\beta_m}{\partial\alpha_1} & \frac{\partial\beta_m}{\partial\alpha_2} & \cdots & \frac{\partial\beta_m}{\partial\alpha_n} \end{bmatrix}^{\varphi} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi^{ab}(\beta_1) \\ \varphi^{ab}(\beta_2) \\ \cdots \\ \varphi^{ab}(\beta_m) \end{bmatrix}$$

onde $A^{\varphi} = (a_{ij})^{\varphi} = (\varphi(a_{ij}))$, e $\varphi : \mathbb{Z}\Pi_1(X_1) \longrightarrow \mathbb{Z}\Pi_1(T)$ é o homomorfismo de anel induzido pelo homomorfismo de grupo $\varphi = (\varphi_/)_{\#} : \Pi_1(X_1) \longrightarrow \Pi_1(T)$.

Demonstração: $\mathcal{D}(\varphi) = 0$ se, e somente se, existe Ψ em 1.4.7. Por outro lado, Ψ existe se, e somente se, o sistema 1.4.17 tem solução, basta definir $\Psi(c_i) = x_i$.

■

CAPÍTULO 2

TORO FIBRADO PRINCIPAL

§1. PRELIMINARES

Neste capítulo usaremos as seguintes convenções:

1. O espaço E denota o espaço total de um T-fibrado principal sobre a base B, onde E e B são variedades compactas sem bordo, e T é o toro $S^1 \times S^1$.

2. Consideraremos funções f de E em E, que cobrem a identidade da base.

3. Todas as homotopias de funções de E em E serão consideradas sobre B, ou seja, para cada $t \in [0,1]$, $f_t : E \longrightarrow E$ cobre a função 1_B.

4. Dada uma função f de E em E, denotaremos por θ_f a função de E no toro, definida pela equação: $f(x) = \theta_f(x).x$, onde o ponto . significa a ação do toro em E.

2.1.1 Proposição: Seja $[E,E]_B$ o conjunto das classes de homotopias das funções de E em E sobre B.

A função $\varphi : [E,E]_B \longrightarrow [E,T]$ definida por $\varphi\,[f] = [\theta_f]$ é uma bijeção.

Demonstração: Se $H: I \times E \longrightarrow E$ é uma homotopia sobre B entre f e g ,então a equação $H(t,x) = \theta_t(x).x$ define a homotopia entre θ_f e θ_g. Reciprocamente, uma homotopia θ_t define a homotopia sobre B entre f e g por : $H(t,x) = \theta_t(x).x$.

■

2.1.2 Observação: O conjunto dos pontos fixos de f é a imagem inversa do elemento neutro e do toro pela função θ_f .

2.1.3 Proposição : Seja $f: E \longrightarrow E$.

A função f é deformável sobre B a uma função $g: E \longrightarrow E$ tal que g é livre de pontos fixos se, e somente se, $(\theta_f)_\#: \Pi_1(E) \longrightarrow \Pi_1(T)$ se fatora através da induzida da inclusão:

$i_\# : \Pi_1(T-e) \longrightarrow \Pi_1(T)$.

Demonstração: Se $g \simeq f$ sobre B e g é livre de pontos fixos, então $\theta_g \simeq \theta_f$ e a imagem de θ_g está contida em $T-e$ e portanto $(\theta_f)_\# = (i.\theta_g)_\#$.

Reciprocamente, substituindo a inclusão $i: T-e \longrightarrow T$ por uma fibração $q: \mathcal{E} \longrightarrow T$, obtemos como fibra $\mathcal{F}$ um espaço tal que $\Pi_i(\mathcal{F}) \simeq \Pi_{i+1}(T, T-e)$. Assim $\Pi_i(\mathcal{F}) \neq 0$ somente

quando $i = 1$. Portanto a única obstrução ao levantamento se localiza no 2-esqueleto de E.

Por outro lado, as hipóteses da proposição 1.1.2 se aplicam e assim , a existência do homomorfismo

$$\underline{h}:\Pi_1(E) \longrightarrow \Pi_1(\mathcal{X}) \simeq \Pi_1(T-e) ,$$

tal que , $$(\theta_f)_\# = q_\# \circ \underline{h}$$

acarreta a existência de um levantamento geométrico definido no 2-esqueleto de E . Como as demais obstruções são nulas, segue que existe um levantamento geométrico $\tilde{h} : E \longrightarrow \mathcal{X}$ tal que $\tilde{h}_\# = \underline{h}$.

Como os espaços $\mathcal{X}$ e $T-e$ tem o mesmo tipo de homotopia, podemos construir $h : E \longrightarrow T-e$ tal que

$$(\theta_f)_\# = (i \circ h)_\# \in \hom(\Pi_1(E),\Pi_1(T))$$

Seja θ_t a homotopia entre θ_f e $i \circ h$.

Então, $H(t,x) = \theta_t(x).x$ é uma homotopia sobre B entre f e $i \circ h$. A função $g(x) = H(1,x) = \theta_1(x).x$ é l.p.f., pois: $\mathrm{fix}_B g = \theta_1^{-1}(e) = (i \circ h)^{-1}(e) = \emptyset$.

■

§2 UM INDICE ASSOCIADO A f

2.2.1 Proposição: Se o posto de $(\theta_f)_\#(\Pi_1(E))$ em $\Pi_1(T)$ for zero ou um, então a aplicação $(\theta_f)_\#$ se fatora através da $i_\# : \Pi_1(T-e) \longrightarrow \Pi_1(T)$.

Demonstração: Se o posto de $(\theta_f)_\#\Pi_1(E)$ for zero, então é porque $(\theta_f)_\#$ é nula. Portanto o homomorfismo nulo $\bar{0}:\Pi_1 E \longrightarrow \Pi_1(T-e)$ é tal que $(\theta_f)_\# = \bar{0} = i\circ\bar{0}$.

Se o posto de $(\theta_f)_\#\Pi_1(E)$ for um, consideremos $r: \hat{T} \longrightarrow T$ o recobrimento correspondente ao subgrupo normal $(\theta_f)_\#\Pi_1(E)$.

O espaço $\hat{T}$ é asférico e $\Pi_1(\hat{T}) \simeq \mathbb{Z}$, portanto $\hat{T}$ tem o mesmo tipo de homotopia da esfera S^1.

Seja $\hat{\theta}_f : E \longrightarrow \hat{T}$ um levantamento de θ_f.

Seja $\hat{i}$ o gerador de $\Pi_1(\hat{T})$ e seja

$$r_\#(\hat{i}) = a^n b^m \in \Pi_1(T).$$

Definindo $\underline{j}:\Pi_1(\hat{T}) \longrightarrow \Pi_1(T-e)$ por

$$\underline{j}(\hat{i}) = a^n b^m \in \Pi_1(T-e),$$

temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \Pi_1(T) \arrow[dr, "\underline{j}"] \arrow[dd, "r_\#"] & \\
\Pi_1(E) \arrow[ur, "(\hat{\theta}_f)_\#"] \arrow[dr, "(\theta_f)_\#"'] & & \Pi_1(T-e) \arrow[dl, "i_\#"] \\
 & \Pi_1(T) &
\end{tikzcd}$$

Portanto $\underline{j}\circ(\hat{\theta}_f)_\#$ é tal que

$$i\circ\underline{j}\circ(\hat{\theta}_f)_\# = (\theta_f)_\#$$

■

A proposição anterior revela que se o posto de $(\theta_f)_\#\Pi_1(E)$ é zero ou um , então f é deformável sobre B a uma g l.p.f.

Denotaremos por $(\theta_f)_2$ a induzida de θ_f no segundo grupo de homologia.

2.2.2.Proposição: Se $(\theta_f)_2 \neq 0$, então o índice $i(f) = [\Pi_1(T):(\theta_f)_\#\Pi_1(E)]$ é finito.

Demonstração: Se $i(f) = \infty$, então o posto da imagem $(\theta_f)_\#\Pi_1(E)$ em $\Pi_1(T)$ é 0 ou 1. Pela proposição 2.2.1, θ_f se fatora através da inclusão $i:T-e \longrightarrow T$, portanto, $(\theta_f)_2 = 0$.

■

O próximo teorema revela que $(\theta_f)_2$ é uma obstrução para se deformar f sobre B a uma g l.p.f. .

2.2.3 Teorema: Se $(\theta_f)_2 \neq 0$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$, então qualquer que seja $g \simeq f$ sobre B temos:

i) $\mathrm{fix}_B g \neq \emptyset$

ii) existem pelo menos $i(f)$ componentes conexas de $\mathrm{fix}_B g$: $C_1, \ldots, C_{i(f)}$ tais que $\check{H}^{n-2}(C_j;K) \neq 0$, para $j=1,2,\ldots,i(f)$; onde $K = \mathbb{Z}$ se E é orientável ou $\mathbb{Z}_2$ se E é não orientável.

Demonstração: Como $(\theta_f)_2 \neq 0$, então o posto de $(\theta_f)_{\#}\Pi_1(E)$ é dois.

Seja $\Psi: T \longrightarrow T$ o recobrimento de $i(f)$-folhas correspondente ao subgrupo $(\theta_f)_{\#}\Pi_1(E)$.

Para qualquer $g \simeq f$ sobre B, seja $\tilde{\theta}_g : E \longrightarrow T$ tal que $\Psi \circ \tilde{\theta}_g = \theta_g$.

Consideremos o seguinte diagrama, onde os grupos de homologia são com coeficientes no anel K.

$$\begin{tikzcd}
H_2(E) \arrow[r] \arrow[d, "(\tilde{\theta}_g)_2"] & H_2(E, E-\tilde{\theta}_g^{-1}\Psi^{-1}(e)) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(E-\tilde{\theta}_g^{-1}\Psi^{-1}(e)) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(E) \arrow[d] \\
H_2(T) \arrow[r] \arrow[d, "(\Psi)_2"] & H_2(T, T-\Psi^{-1}(e)) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(T-\Psi^{-1}(e)) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(T) \arrow[d] \\
H_2(T) \arrow[r] & H_2(T, T-e) \arrow[r] & H_1(T-e) \arrow[r] & H_1(T)
\end{tikzcd}$$

Como $g \simeq f$ sobre B, a composição das setas verticais é a induzida de θ_f em homologia.

Por hipótese $(\theta_f)_2 \neq 0$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$, logo, $H_2(E,E-\tilde{\theta}_g^{-1}\Psi^{-1}(e))$ com coeficientes em $\mathbb{Q}$ é não trivial. Logo , $H_2(E,E-\tilde{\theta}_g^{-1}\Psi^{-1}(e))$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ tem parte livre, acarretando pelo teorema dos coeficientes universais, que

$$H_2(E,E-\tilde{\theta}_g^{-1}\Psi^{-1}(e);\mathbb{Z}_2) \neq 0$$

Usando coeficientes $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$ conforme E seja orientável ou não, segue da dualidade de Poincaré:

$$H_2(E,E-\tilde{\theta}_g^{-1}\Psi^{-1}(e)) \simeq \check{H}^{n-2}(\tilde{\theta}_g^{-1}\Psi^{-1}(e)) = \check{H}^{n-2}(\theta_g^{-1}(e)) = \check{H}^{n-2}(\mathrm{fix}_B g) \simeq$$

$$\simeq \check{H}^{n-2}(\tilde{\theta}_g^{-1}(e_1) \cup \tilde{\theta}_g^{-1}(e_2) \cup \ldots \cup \tilde{\theta}_g^{-1}(e_{i(f)})) \simeq$$

$$\simeq \bigoplus_{i=1}^{i(f)} \check{H}^{n-2}(\tilde{\theta}_g^{-1}(e_i)).$$

Por sua vez, $\check{H}^{n-2}(\tilde{\theta}_g^{-1}(e_i)) \simeq H_2(E,E-\tilde{\theta}_g^{-1}(e_i)) \neq 0$, isto segue observando que $(\theta_f)_2 \neq 0$ implica que $(\tilde{\theta}_g)_2 \neq 0$ e considerando-se o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
H_2(E) \arrow[r] \arrow[d, "(\tilde{\theta}_g)_2"] & H_2(E,E-\tilde{\theta}_g^{-1}(e_i)) \arrow[d] \\
H_2(T) \arrow[r, "\simeq"'] & H_2(T,T-e_i)
\end{tikzcd}$$

Escrevendo $\tilde{\theta}_g^{-1}(e_i)$ como reunião disjunta de suas componentes conexas, então existe pelo menos uma C_i tal que $\check{H}^{n-2}(C_i) \neq 0$. Fazendo $i = 1,2, \ldots , i(f)$ temos o resultado.

■

2.2.4 Esse resultado sugere, no caso $(\theta_f)_2 \neq 0$, (ver [Go87]) que definamos uma espécie de índice para f dado por:

$i(f) = 0$ se o posto de $(\theta_f)_{\#}\Pi_1(E)$ é 0 ou 1 e

$i(f) = [(\theta_f)_{\#}\Pi_1(E) : \Pi_1(T)]$ se o posto de $(\theta_f)_{\#}\Pi_1(E)$ é dois.

Convém ressaltar que $(\theta_f)_2$ pode ser nula, mas $(\theta_f)_{\#}$ não se fatora através de $i_{\#}$,como veremos no §3.

2.2.5 Observação: Se a dimensão de E é maior ou igual a 4; acreditamos que dado $f:E \longrightarrow E$, existe $g \simeq f$ sobre B, tal que $fix_B g$ é uma subvariedade de E de dimensão n-2 com exatamente i(f) componentes conexas. Este resultado depende essencialmente de um resultado em cirurgia que parece ser bem conhecido dos especialistas, mas não encontramos na literatura.

§3. ALGUNS EXEMPLOS

2.3.1 Este exemplo sugerido por W.C. Hsiang revela que $(\theta_f)_2 = 0$, mas não é suficiente para mostrar que f é deformável sobre B a uma função l.p.f.. Na verdade , a obstrução abelianizada de θ_f, notação:$\mathcal{D}(\theta_f)$, não o é.

Consideremos $q:S^3 \longrightarrow S^2$ o fibrado de Hopf e $g:T \longrightarrow S^2$ de grau 1.

Seja M o espaço total de fibração induzida pela aplicação g .

2.3.2 O espaço M é um espaço $K(\Pi,1)$ e pode-se mostrar que o grupo fundamental tem a seguinte presentação:

$$\Pi_1(M) = \langle \alpha_1,\alpha_2 \ ; \ [\alpha_1,[\alpha_1,\alpha_2]] = \beta_1 \ , \ [\alpha_2,[\alpha_1,\alpha_2]] = \beta_2 \rangle$$

A induzida nos grupos fundamentais da projeção $\varphi : M \longrightarrow T$, faz o seguinte:

$$\varphi_\#(\alpha_1) = a \text{ e } \varphi_\#(\alpha_2) = b \ ,$$

onde a e b são os geradores do $\Pi_1(T)$.

Tomemos E o toro fibrado principal trivial $M \times T$.

Seja $f:E \longrightarrow E$ dada por $f(x,y) = (x,\varphi(x).y)$, segue que $\theta_f : M \times T \longrightarrow T$ é dada por: $\theta_f(x,y) = \varphi(x) = \varphi \circ p_1(x,y)$, onde p_1é a projeçãode $M \times T$ em M.

Considerando o diagrama 2.3.3 ,segue da naturalidade da obstrução abelianizada que $\mathcal{D}(\theta_f) = p_1^* \mathcal{D}(\varphi)$. Como p_1^* é injetora, é suficiente mostrar que $\mathcal{D}(\varphi) \neq 0$.

2.3.3

$$\begin{tikzcd} & & \mathfrak{X} \simeq T-e \arrow[d, "p"] \\ M\times T \arrow[r, "p_1"] & M \arrow[r, "\varphi"] & T \end{tikzcd}$$

Usando o teorema 1.4.16 do capítulo 1, temos que $\mathcal{D}(\varphi) = 0$ se, e somente se, o sistema 2.3.4 tem solução para x e $y \in \mathbb{Z}\Pi_1(T)$.

2.3.4

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} \\[2ex] \dfrac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} \end{bmatrix}^{\varphi} \begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi^{ab}(\beta_1) \\ \\ \varphi^{ab}(\beta_2) \end{bmatrix}$$

Notemos que:

$\varphi(\beta_1) = \varphi([\alpha_1,[\alpha_1,\alpha_2]) = a[a,b]a^{-1}[b,a]$

$\varphi(\beta_2) = \varphi([\alpha_2,[\alpha_1,\alpha_2]) = b[a,b]b^{-1}[b,a]$

Portanto em $\Pi_2^{ab}(T,T-e) \simeq \mathbb{Z}\Pi_1(T)$, temos:

$\varphi^{ab}(\beta_1) = B_a B^{-1} = a - 1$

$\varphi^{ab}(\beta_2) = B_b B^{-1} = b - 1$

chamando de $z = [\alpha_1, \alpha_2]$, $w_1 = [\alpha_1, z]$, $w_2 = [\alpha_2, z]$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1+\alpha_1 \dfrac{\partial z}{\partial \alpha_1} - \alpha_1 z \alpha_1^{-1} - w_1 \dfrac{\partial z}{\partial \alpha_1} & \alpha_1 \dfrac{\partial z}{\partial \alpha_2} - w_1 \dfrac{\partial z}{\partial \alpha_2} \\ \alpha_2 \dfrac{\partial z}{\partial \alpha_1} - w_2 \dfrac{\partial z}{\partial \alpha_1} & 1+\alpha_2 \dfrac{\partial z}{\partial \alpha_2} \quad \alpha_2 z \alpha_2^{-1} - w_2 \dfrac{\partial z}{\partial \alpha_2} \end{bmatrix}^{\varphi} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-1 \\ b-1 \end{bmatrix}$$

onde $\dfrac{\partial z}{\alpha_1} = 1 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial \alpha_2} = \alpha_1 - [\alpha_1, \alpha_2]$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} 1+a(1-b)-1-1(1-b) & a(a-1)-1(a-1) \\ b(1-b)-1(1-b) & 1+b(a-1)-1-1(a-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-1 \\ b-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (a-1)(1-b) & (a-1)(a-1) \\ (b-1)(1-b) & (b-1)(a-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-1 \\ b-1 \end{bmatrix}$$

Observando que $\mathbb{Z}\Pi_1(T)$ é um anel de integridade e os elementos inversíveis são somente as unidades triviais, segue que o sistema anterior é equivalente a:

$$(1-b)x + (a-1)y = 1$$

Aplicando a função aumentação segue que o sistema não tem solução.

2.3.5 Para justificar que $(\theta_f)_2 = 0$, notemos que $\theta_f = \varphi \circ p_1$; lembrando que φ é a projeção no fibrado induzido por: $g: T \longrightarrow S^2$ de grau 1, segue que $(\varphi)_2 = 0$ e, portanto , $(\theta_f)_2 = 0$.

2.3.6 Este outro exemplo mostra que $(\theta_f)_2 = 0$, $\mathcal{D}(\theta_f) = 0$, mas θ_f não se fatora através da inclusão $i: T-e \longrightarrow T$.

Seja M_1 uma variedade compacta orientável e sem bordo cujo grupo fundamental tem a seguinte presentação:

$$\Pi_1(M_1) = \langle \gamma_1, \gamma_2 ; [[\gamma_1, \gamma_2], \gamma_2[\gamma_1, \gamma_2]\gamma_2^{-1}] = \delta \rangle$$

Seja $\varphi_1: M_1 \longrightarrow T$ tal que $(\varphi_1)_\#(\gamma_1)=a$ e $(\varphi_1)_\#(\gamma_2)=b$.

Tomemos o toro fibrado principal $M_1 \times T$ e seja $f_1: M_1 \times T \longrightarrow M_1 \times T$, dada por $f_1(x,y) = (x, \varphi_1(x).y)$.

Notemos que $\theta_{f_1}(x,y) = \varphi_1(x) = \varphi_1 \circ p_1(x,y)$, onde p_1 é a projeção de $M_1 \times T$ em M_1 .

De modo análogo ao 2.3.2 , $\mathcal{D}(\theta_{f_1}) = 0$ se, e somente se, $\mathcal{D}(\varphi_1) = 0$, ou ainda, se, e somente se, o sistema 2.3.7 tem solução em $\mathbb{Z}\Pi_1(T)$.

2.3.7 $$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\delta}{\partial\gamma_1} & \dfrac{\partial\delta}{\partial\gamma_2} \end{bmatrix}^{\varphi_1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \varphi_1^{ab}(\delta)$$

Notemos que:

$$\varphi^{ab}(\delta) = [[a,b],b[a,b]b^{-1}]^{ab} = BB_bB^{-1}B_b^{-1} = 0 \quad \in \Pi_2^{ab}(T,T-e).$$

Portanto o sistema 2.3.7 admite a solução trivial e assim: $\mathcal{D}\,(\theta_{f_1}) = 0.$

2.3.8 Para provar que $(\theta_{f_1})_2 = 0$, consideremos $\Psi_1 : M_1 \longrightarrow M$, onde M é a variedade do exemplo 2.3.2, definida no grupo fundamental por: $(\Psi_1)_\#(\gamma_1) = \alpha_1$ e $(\Psi_1)_\#(\gamma_2) = \alpha_2$. Em 2.3.9 , verificamos que a relação δ é preservada .

Observemos que $\varphi\circ\Psi_1 \simeq \varphi_1$, onde φ é definida em 2.3.2, segue que:

$$(\theta_{f_1})_2 = (\varphi)_2\circ(\Psi_1)_2(p_1)_2 = 0.$$

2.3.9 Verificando que a relação δ é preservada por Ψ_1:

$$(\Psi_1)_\#(\delta) = [[\alpha_1,\alpha_2],\ \alpha_2[\alpha_1,\alpha_2]\alpha_2^{-1}] = x\alpha_2x\alpha_2^{-1}x^{-1}\alpha_2x^{-1}\alpha_2^{-1} =$$

$$= x(\alpha_2x\alpha_2^{-1}x^{-1})x^{-1}x\alpha_2x^{-1}\alpha_2^{-1} =$$

$$= x\beta_2x^{-1}\beta_2^{-1} = 1$$

onde $x = [\alpha_1,\alpha_2]$ e $\beta_2 = [\alpha_2,x]$.

2.3.10 Por outro lado, θ_{f_1} não se fatora através da inclusão $i:T-e \longrightarrow T$, pois se existisse $\tilde{\theta}_{f_1}$ tal que $i\circ\tilde{\theta}_{f_1} = \theta_{f_1}$ então $i\circ\tilde{\theta}_{f_1}\circ i_1 = \theta_{f_1}\circ i_1 = \varphi_1$, onde $i_1:M_1 \longrightarrow M_1 x T$, $i_1(x) = (x,e)$, ou seja, a função $(\varphi_1)_\#$ se fatora através da inclusão $i:T-e \longrightarrow T$. Mas isto é impossível, pois, para que δ seja preservado por $(\tilde{\theta}_{f_1}\circ i_1)_\#$ em $\Pi_1(T-e)$ é necessário que o posto de $(\tilde{\theta}_{f_1}\circ i_1)_\#(\Pi_1(M_1))$ seja zero ou um, por outro lado, o posto de $(\varphi_1)_\#$ é dois e portanto, $i\circ\theta_{f_1}\circ i_1 \neq \varphi_1$.

2.3.11 No caso de T fibrado principal E sobre B, o problema de deformar $f: E \longrightarrow E$ a uma função l.p.f. pode ser tratado, discutindo-se a existência do levantamento Γ visto em 1.2.13:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X}_B(E) \arrow[d, "q_1"] \\ E \arrow[ur, "\Gamma"] \arrow[r, "\langle 1,f\rangle"] & E x_B E \end{tikzcd}$$

2.3.12 Por outro lado, segue da proposição 2.1.3 que a existência de $g \simeq f$ sobre B tal que $fix_B g = \emptyset$ é equivalente a existência de Γ_1 no diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X} \arrow[d, "q"] \\ E \arrow[ur, "\Gamma_1"] \arrow[r, "\theta_f"'] & T \end{tikzcd}$$

onde $q:\mathcal{X} \longrightarrow T$ é a substituição da inclusão $i:T-e \hookrightarrow T$ por uma fibração.

Se $\mathcal{F}_B$ é a fibra de $q_1:\mathcal{X}_B(E) \longrightarrow E\times_B E$ e $\mathcal{F}$ é a fibra de $q:\mathcal{X} \longrightarrow T$, então $\Pi_i(\mathcal{F}_B) \simeq \Pi_i(\mathcal{F}) \simeq \Pi_{i+1}(T,T-e)$. Portanto $\Pi_i(\mathcal{F}_B)$ ou $\Pi_i(\mathcal{F})$ é diferente de zero somente quando $i=1$ e,nesse caso é isomorfo a $\Pi_2(T,T-e)$. Assim as discussões de levantamento Γ e Γ_1 se resumem ao 2-esqueleto de E .

2.3.13 Em ambos os casos ,via 2.3.11 ou 2.3.12 , tomando-se o sistema local de coeficiente determinado pelo primeiro grupo de homologia da fibra, temos as seguintes classes de obstruções primárias abelhanizadas:

$$\mathcal{D}(1,f) \in H^2(E;\{H_1(\mathcal{F}_B)\}) \text{ e } \mathcal{D}(\theta_f) \in H^2(E;\{H_1(\mathcal{F})\})$$

2.3.14 Teorema: Se E é um toro fibrado principal sobre B, então $\mathcal{D}(1,f) = \mathcal{D}(\theta_f)$.

Demonstração: Denotando $\mathcal{X}_B(E)$ por $\mathcal{X}_B$ consideremos o seguinte diagrama :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X}_B \arrow[d, "q_1"] & \mathcal{X} \arrow[d, "q"] \\ E \arrow[r, "(1,f)"] & E\times_B E \arrow[r, "\theta"] & T \end{tikzcd}$$

onde $\theta(x,y)$ é definida a partir da equação

$$y = \theta(x,y).x$$

Notemos que $f(x) = \theta(x,f(x)).x = \theta_f(x).x$ portanto,

$$\theta_f = \theta \circ (1,f).$$

Os espaços $\mathcal{X}_B$ e $\mathcal{X}$ são dados por:

$\mathcal{X}_B = \{(\alpha,\beta) \in E^I \times E^I$,tal que $p\circ\alpha = p\circ\beta$ e $\alpha(0)\neq\beta(0)\}$

$\mathcal{X} = \{\gamma \in T^I$ tal que $\gamma(0) \neq e\}$

As aplicações q_1 e q são dadas por

$q_1(\alpha,\beta) = (\alpha(1),\beta(1))$ e $q(\gamma) = \gamma(1)$

Seja $\mathcal{X}(\theta)$ a fibração induzida de q por θ.

Então

$$\mathcal{X}(\theta) = \{(x,y,\gamma)\ ,\ \gamma \in T^I\ ,\ \gamma(1) = \theta(x,y)\ ,\ p(x)=p(y)\ ,\ \gamma(0)\neq 0\}$$

Sejam $\Psi:\mathcal{E}(\theta) \longrightarrow \mathcal{E}_B$ e $\Phi:\mathcal{E}_B \longrightarrow \mathcal{E}(\theta)$ dadas por:

$$\Psi(x,y,\gamma) = (\bar{x},\gamma.\bar{x}) \quad \text{e} \quad \Phi(\alpha,\beta) = (\alpha(1),\beta(1),\gamma_{\alpha\beta})$$

onde :

i) $\bar{x}$ representa o caminho constante e

$$(\gamma\ .\bar{x})(t) = \gamma(t).x$$

ii) $\gamma_{\alpha\beta}(t) = \theta(\alpha(t),\beta(t))$, ou seja, $\gamma_{\alpha\beta}(t)$ é tal que:

$\beta(t) = \gamma_{\alpha\beta}(t).\alpha(t)$ e portanto $\gamma_{\alpha\beta}(0) \neq e$.

Notemos que $q_1 \circ \Psi = q_2$ e $q_2 \circ \Phi = q_1$, onde

$$q_2:\mathcal{E}(\theta) \longrightarrow E \times_B E \ .$$

As funções Ψ e Φ realizam eqüivalência entre as fibrações $\mathcal{E}_B$ e $\mathcal{E}(\theta)$.

Justificando:

A composição $\Phi \circ \Psi = I_{\mathcal{E}}(\theta)$, pois:

$$\Phi \circ \Psi(x,y,\gamma) = \Phi\ (\bar{x},\gamma.\bar{x}) = (x\ ,\ \gamma(1).x\ ,\ \gamma_{\bar{x}\beta})$$

$$= (x\ ,\ y\ ,\ \gamma_{\bar{x}\beta}), \quad \text{onde } \beta = \gamma.\bar{x}.$$

Por sua vez, $\gamma_{\bar{x}\beta}(t)$ satisfaz:

$$\beta(t) = \gamma_{\bar{x}\beta}(t).\bar{x} = \gamma(t).\bar{x}$$

Portanto $\gamma_{\bar{x}\beta} = \gamma$.

Por outro lado,

$$\Psi\circ\Phi\ (\alpha,\beta) = \Psi\ (\alpha(1)\ ,\ \beta(1)\ ,\ \gamma_{\alpha\beta}) = (\overline{\alpha(1)}\ ,\ \gamma_{\alpha\beta}.\overline{\alpha(1)})$$

A homotopia entre $I_{\mathcal{X}_B}$ e $\Phi\circ\Psi$ é dada por:

$H_s(\alpha,\beta) = (\alpha_s,\beta_s)$ onde

$$\alpha_s(t) = \alpha((1-s)t+s) \text{ e}$$

$$\beta_s(t) = \gamma_{\alpha\beta}(t).\alpha_s(t)$$

Claramente $p\circ\alpha_s = p\circ\beta_s$.

Para todo s, $q_1(\alpha_s\ ,\beta_s\ ) = (\alpha_s(1),\beta_s(1)) =$

$$= (\alpha(1),\beta(1) = q_1(\alpha,\beta)$$

Os α_s e β_s começam em pontos distindos, pois

$\gamma_{\alpha\beta}(0) \neq e$ e além disso $H_o = I_{\mathcal{X}_B}$ e $H_1 = \Psi\circ\Phi$.

A igualdade $\mathcal{D}(1,f) = \mathcal{D}(\theta_f)$ segue da naturalidade da teoria de obstrução abelianizada tendo em vista as equivaléncias $\mathcal{X}_B \simeq \mathcal{X}(\theta)$.

∎

CAPITULO 3

OS FIBRADOS M(A)

§1 OS ESPAÇOS M(A) E FUNÇÕES FIBRADAS $f:M(A) \longrightarrow M(A)$

Seja A uma matriz quadrada de ordem 2, com coeficientes inteiros cujo determinante é +1 ou -1. O isomorfismo $L:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, leva coordenadas de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, induzindo um homormofismo $\bar{A}$ (ou simplesmente A, quando não houver confusão) do toro no toro, dado por: $\bar{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left[A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$. O elemento $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ representa a classe de eqüivalência determinada por $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ em $\mathbb{R}^2$ módulo $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

O espaço M(A) é obtido do $T\times[0,1]$ identificando os pontos $(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},0)$ com $(A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},1)$. Um elemento de M(A) será denotado por $\langle\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},t\rangle$. O espaço M(A) fibra-se sobre S^1, através da projeção $p:M(A) \longrightarrow S^1$, $p\langle\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} t\rangle = t \in \frac{[0,1]}{0\sim 1} \simeq S^1$, com fibra toro.

Seja $\langle\begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix},0\rangle$ o ponto base de M(A).

Consideremos a , b , c as classes de homotopias dos seguintes laços:

$a , b , c:(\frac{I}{0\sim 1}, \{0,1\}) \longrightarrow (M(A), \langle\begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix},o\rangle)$, dados por:

$a(t) = \langle \begin{bmatrix} t \\ o \end{bmatrix}, o \rangle$, $b(t) = \langle \begin{bmatrix} o \\ t \end{bmatrix}, o \rangle$ e $c(t) = \langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, t \rangle$.

Provaremos que $\Pi_1 M(A)$ tem a seguinte presentação (ver 3.2.6) :

$\langle a,b,c;\ [a,b] = 1,\ cac^{-1} = a^{\alpha_1} b^{\alpha_2},\ cbc^{-1} = a^{\alpha_3} b^{\alpha_4} \rangle$, onde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_4 \end{pmatrix} .$$

O espaço $M(A)$ é um espaço $K(\pi,1)$ e , portanto , o homomorfismo $f_{\#}:\Pi_1 M(A) \longrightarrow \Pi_1(A)$ determina a classe de homotopia da função $f:(M(A),\langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o \rangle) \longrightarrow (M(A),\langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o \rangle)$.

3.1.1 Proposição: Uma função $f:(M(A),\langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o \rangle) \longrightarrow (M(A),\langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o \rangle)$ é homotópica (homotopia relativa ao ponto base) a uma função $g:(M(A),\langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o \rangle) \longrightarrow (M(A),\langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o \rangle)$ tal que g cobre a função identidade da base S^1 se, e somente se, $f_{\#}:\Pi_1 M(A) \longrightarrow \Pi_1 M(A)$ tem a seguinte forma:

$f_{\#}(a) = a^{b_1} b^{b_2}$, $f_{\#}(b) = a^{b_3} b^{b_4}$ e

$f_{\#}(c) = a^{c_1} b^{c_2} c$, onde c_1 , c_2 são inteiros

e a matriz inteira $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix}$ comuta com

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_4 \end{pmatrix} .$$

Demonstração: Notemos que os geradores a , b correspondem aos geradores da fibra e $p_{\#}(c)$,ao gerador da base de S^1.

Do fato de g cobrir a identidade de S^1 e $f \simeq g$ relativo ao ponto base, segue que :

$$f_{\#}(a) = g_{\#}(a) = a^{b_1} b^{b_2}$$

$$f_{\#}(b) = g_{\#}(b) = a^{b_3} b^{b_4}$$

$$f_{\#}(c) = g_{\#}(c) = a^{c_1} b^{c_2} c$$

A comutatividade de B com A decorre do fato que as relações $cac^{-1} = a^{\alpha_1} b^{\alpha_2}$ e $cbc^{-1} = a^{\alpha_3} b^{\alpha_4}$ precisam ser preservadas.

Reciprocamente,seja $g:(M(A),\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0\rangle) \longrightarrow (M(A),\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0\rangle)$ dada por $g\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t\rangle = \langle \left[B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \cdot t \\ c_2 \cdot t \end{pmatrix} \right], t\rangle$.

A função g cobre a identidade de S^1 e a composição de g com os caminhos

$a, b:(\frac{I}{0\sim 1}, \{0,1\}) \longrightarrow (M(A),\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0\rangle)$ determina as classes de homotopias dos caminhos $a^{b_1} b^{b_2}$ e $a^{b_3} b^{b_4}$ respectivamente. Por outro lado,

$g \circ \Gamma(t) :(\frac{I}{0\sim 1}, \{0,1\}) \longrightarrow (M(A),\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0\rangle)$ é o caminho

$$g \circ \Gamma(t) = \langle \begin{bmatrix} c_1 \cdot t \\ c_2 \cdot t \end{bmatrix}, t\rangle \simeq \Gamma_1(t).\Gamma_2(t)$$

onde:

$\Gamma_1(t) = \langle \begin{bmatrix} c_1 \cdot t \\ c_2 \cdot t \end{bmatrix}, 0 \rangle$ e $\Gamma_2(t) = \langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, t \rangle$, segue que

$g_{\#}(c) = a^{c_1} b^{c_2} c.$

Da bijeção entre $[M(A), \langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o \rangle \; ; \; M(A), \langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o \rangle]$ e $hom(\Pi_1 M(A) \; , \; \Pi_1 M(A))$ segue que $f \simeq g$ relativamente ao ponto base.

■

3.1.2 Proposição: Seja P uma matriz unimodular inteira de ordem 2.

Sejam M(A) e M(A') os fibrados sobre a S^1 construídos a partir das matrizes A e $A' = PAP^{-1}$.

Seja $f: M(A) \longrightarrow M(A)$ dada por:

$f\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t \rangle = \langle \left[B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \cdot t \\ c_2 \cdot t \end{bmatrix} \right] , t \rangle$, onde B comuta com A.

Então:

a) $\bar{P} \times 1 : T \times I \longrightarrow T \times I$ induz um homeomorfismo $\bar{\bar{P}} \times 1$ de M(A) em M(A') cobrindo a identidade da base S^1 .

Seja $f' = (\bar{\bar{P}} \times 1) \circ f \circ (\bar{\bar{P}} \times 1)^{-1}$.

b) f é l.p.f. se, e somente se, f' o é .

c) f é deformável sobre S^1 a uma função l.p.f. se, e somente se, f' o é.

Demosntração: parte a)

A função $\overset{=}{P}x1:(M(A),<\begin{bmatrix}o\\o\end{bmatrix},o>) \longrightarrow (M(A'),<\begin{bmatrix}o\\o\end{bmatrix},o>)$

dada por $(\overset{=}{P}x1)<\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, t> = <\left[P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right], t>$, está bem definida, cobre a identidade de S^1 e sua inversa é dada por $(\overset{=}{P}x1)^{-1}<\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, t> = <\left[P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right], t>$.

parte b)

$<\begin{bmatrix}x_o\\y_o\end{bmatrix}, t_o>$ é ponto fixo de f se, e somente se,

$<\left[P\begin{pmatrix}x_o\\y_o\end{pmatrix}\right], t_o>$ é ponto fixo de f'.

parte c)

Se $H_t: M(A) \longrightarrow M(A)$ é uma deformação de f sobre S^1 a uma função l.p.f., então $G_t:M(A') \longrightarrow M(A')$, definida por $G_t = (\overset{=}{P}x1)\circ H_t\circ(\overset{=}{P}x1)^{-1}$ é uma deformação de f' sobre S^1 a uma função l.p.f. . Reciprocamente, dada G_t definimos $H_t = (\overset{=}{P}x1)^{-1}\circ G_t\circ(\overset{=}{P}x1)$.

■

3.1.3 Observação: A função $(\overset{=}{P}\times 1)\circ f\circ(\overset{=}{P}\times 1)^{-1}$, dada em 3.1.2, quando restrita à fibra, induz uma aplicação de $\Pi_1(T)$ no $\Pi_1(T)$ cuja matriz em relação aos geradores a e b é PBP^{-1}.

3.1.4 Seja $f:(M(A), \langle\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},0\rangle) \longrightarrow (M(A), \langle\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},0\rangle)$ uma função cobrindo a identidade de S^1 e seja B a matriz de $(f/\text{fibra})_{\#}:\Pi_1(T) \longrightarrow \Pi_1(T)$ com relação aos geradores a e b.

Estando interessado em deformar f sobre S^1 a uma função l.p.f., devemos ter o número de Lefschetz da $f/\text{fibra} = 0$, ou seja, $\det(B-I) = 0$.

Seja $v \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ um autovetor de B correspondente ao autovalor 1. Da comutatividade $AB = BA$, segue que $A(v)$ também é um autovetor associado ao autovalor 1.

Se v e $A(v)$ geram $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, tomemos o isomorfismo linear que leva $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tal que $P(v) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $P(Av) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

O isomorfismo P induz o homeomorfismo $\overset{=}{P}\times 1$ entre $M(A)$ e $M(A')$, onde $A' = PAP^{-1}$. Segue da observação 3.1.3 que a matriz de $\left[(\overset{=}{P}\times 1)\circ f\circ(\overset{=}{P}\times 1)^{-1}/\text{fibra}\right]_{\#}$ é a identidade.

Por outro lado, se v e $A(v)$ são L.D., seja $w \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tal que v e w geram $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Tomemos $P:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $P(v) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $P(w) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, induzindo o homeomorfismo $\overset{=}{P}\times 1:M(A) \longrightarrow M(A')$, onde $A'=PAP^{-1}$.

Seja $B' = PBP^{-1}$ a matriz $\left[(\bar{\bar{P}}\times 1)\circ f\circ(\bar{\bar{P}}\times 1)^{-1}/\text{fibra}\right]_{\#}$ com relação aos geradores a e b .

Então A' e B' são da forma: $A' = \begin{pmatrix} \varepsilon & a_9 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$ e $B' = \begin{pmatrix} 1 & b_9 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, os inteiros a_9, b_9, b_4 na matrizes A' e B' não são os da matriz A e B.

3.1.5 Proposição: Com as notações de 3.1.4, então as possíveis matrizes A' e B' são dadas no seguinte quadro:

	A'	B'
I	$\begin{pmatrix} a_1 & a_9 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
II	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_9 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$
III	$\begin{pmatrix} 1 & a_9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
IV	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_9 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$
V	$\begin{pmatrix} -1 & a_9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
VI	$\begin{pmatrix} 1 & a_9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_9 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$ $a_9(b_4-1) = -2b_9$
VII	$\begin{pmatrix} -1 & a_9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_9 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$ $a_9(b_4-1) = 2b_9$

Demonstração: Segue de 3.1.4 , considerando que $\det A' = \pm 1$ e $A'B' = B'A'$.

■

§2. FORMULAÇÃO ALGÉBRICA DO PROBLEMA E CÁLCULOS DE Π_1

Segue da proposição 3.1.2 que para deformar f de M(A) em M(A) sobre S^1 a uma função l.p.f., é suficiente tomar A e B como sendo um dos casos descritos na proposição 3.1.5 .

3.2.1 Seja $h: M(A) \times_{S^1} M(A) \longrightarrow M(A) \times_{S^1} M(A)$ dada por:

$$h\left(\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t\right\rangle, \left\langle \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, t\right\rangle\right) = \left(\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t\right\rangle, \left\langle \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t\right\rangle\right)$$

O espaço $M(A) \times_{S^1} M(A)$ é um fibrado sobre a S^1 com fibra $T \times T$. Sob esse ponto de vista, h cobre a função identidade de S^1 e induz um isomorfismo de fibrado sobre S^1, cujo isomorfismo inverso é dado por:

$$h^{-1}\left(\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t\right\rangle, \left\langle \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, t\right\rangle\right) = \left(\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t\right\rangle, \left\langle \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, t\right\rangle\right)$$

A restrição da função h ao espaço $(M(A) \times_{S^1} M(A)) - \Delta$ leva esse espaço homeomorficamente sobre o espaço $M(A) \times_{S^1} (MA - \underline{S}^1)$

onde $\underline{S}^1$ é a imagem do mergulho $m: S^1 = I/o\sim 1 \longmapsto M(A)$

dado por: $m(t) = \langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, t \rangle$.

O espaço $M(A)-\underline{S}^1$ é um fibrado sobre S^1 cuja fibra é

$T-\begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}$.

O espaço $M(A)\times_{S^1}(MA-\underline{S}^1)$ pode ser visto como sendo o fibrado induzido do quadrado abaixo:

$$\begin{tikzcd}
M(A)\times_{S^1}(M(A)-\underline{S}^1) \arrow[r] \arrow[d] & M(A)-\underline{S}^1 \arrow[d, "p/"] \\
M(A) \arrow[r, "p"'] & S^1
\end{tikzcd}$$

3.2.2 Dada uma função $f: M(A) \longrightarrow M(A)$ sobre a S^1, podemos supor $f\langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o \rangle = \langle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, o \rangle$, onde $\begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$. Do contrário, se $f\langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o \rangle = \langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o \rangle$, tomemos um caminho $c: I \longrightarrow p^{-1}(*)$, onde $*$ é o ponto base de S^1 , ligando $\langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o \rangle$ a $\langle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, o \rangle$ com $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}$.

Com relação ao seguinte diagrama temos que $L_1 \simeq f$ sobre S^1 e $L_1 \langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o \rangle \neq \langle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, o \rangle$.

$$\begin{tikzcd}
M(A) \times \{0\} \cup (\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0\rangle \times I) \arrow[r, "\ell"] \arrow[d] & M(A) \arrow[d, "p_1"] \\
M(A)\times I \arrow[ur, "L"] \arrow[r, "p\circ p_1"'] & S^1
\end{tikzcd}$$

onde $p_1 : M(A)\times I \longrightarrow M(A)$ é a projeção , ℓ restrita a $M(A)\times\{0\}$ é a própria f e restrita a $\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0\rangle \times I$ é o caminho C(t).

3.2.3

$$\begin{tikzcd}
 & & (T\times T-\Delta) \arrow[rr, "h_{///}"] \arrow[dl, "j_4"'] \arrow[dd, "j_2"] & & T\times(T-e) \arrow[dl, "j_3"'] \arrow[dd] \\
T \arrow[urr, dashed, "\delta"] \arrow[r, "(1,f)_{/}"] \arrow[dd] & T\times T \arrow[rr, "h_{//}"] \arrow[dd, "j_1"] & & T\times T \arrow[dd] & \\
 & & (M(A)\times_{S^1} M(A)-\Delta) \arrow[rr, "h_{/}"] \arrow[dl, "j_4"'] & & M(A)\times_{S^1} (M(A)-\underline{S}^1) \arrow[dl, "j_4"] \\
M(A) \arrow[urr, dashed, "1"] \arrow[r, "(1,f)"'] \arrow[urrr, dashed, bend left, "2"] & M(A)\times_{S^1} M(A) \arrow[rr, "h"] & & M(A)\times_{S^1} M(A) &
\end{tikzcd}$$

Com relação ao diagrama 3.2.3 temos:

3.2.4 Proposição: a) A função h e suas restrições induzem isomorfismos nos grupos fundamentais

b) O levantamento 1 existe se, e somente se, o levantamento 2 existe

c) Sejam a,b,e,d, c as classes de homotopias dos seguintes laços em $M(A) \times_{S^1} M(A)$

$$a(t) = (\langle \begin{bmatrix} t \\ o \end{bmatrix}, o\rangle, \langle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, o\rangle)$$

$$b(t) = (\langle \begin{bmatrix} o \\ t \end{bmatrix}, o\rangle, \langle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, o\rangle)$$

$$e(t) = (\langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o\rangle, \langle \begin{bmatrix} p_1 + t \\ p_2 \end{bmatrix}, o\rangle)$$

$$d(t) = (\langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o\rangle, \langle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 + t \end{bmatrix}, o\rangle)$$

$$c(t) = (\langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, t\rangle \ , \ \langle (1-t).\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + t\left[A\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\right], \ t\rangle)$$

Então $h_\#(a) = a.e^{-1}$, $h_\#(b) = bd^{-1}$, $h_\#(e) = e$, $h_\#(d) = d$, $h_\#(c) = c$.

Demonstração: parte a):

decorre do lema dos cinco aplicado à seqüência exata dos fibrados considerados e levando em conta que: as restrições de h induzem isomorfismos na fibra e, é a identidade na base S^1.

parte b):

consequência imediata de a).

parte c):

observemos que $h(a(t)) = h(\langle \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, 0\rangle, \langle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, 0\rangle) =$

$$= (\langle \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, 0\rangle, \langle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, 0\rangle) \simeq a.e^{-1}(t)$$

Analogamente, $h(b(t)) \simeq bd^{-1}(t)$; as demais seguem sem dificuldade.

■

Com o objetivo de exibir uma presentação de $\Pi_1(M(A)\times_{S^1} M(A)-\underline{S}^1)$ e $\Pi_1(M(A)\times_{S^1} M(A))$, em termos dos geradores a, b, e, d, c, apresentados em 3.2.4, provaremos os próximos lemas.

3.2.5 Lema: Seja $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha_9 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$, uma matriz unimodular inteira.

Sejam e,d,c, classes de homotopias dos seguintes laços em $\Pi_1(MA-\underline{S}^1 , \langle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, 0\rangle)$:

$$e(t) = \langle \begin{bmatrix} p_1+t \\ p_2 \end{bmatrix}, 0\rangle \qquad d(t) = \langle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2+t \end{bmatrix}, 0\rangle,$$

$$c(t) = \langle (1-t)\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + t\left[A\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\right], t \rangle.$$

Então, é possível escolher um ponto $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \in T$ tal que

$cec^{-1} = e^{\varepsilon}$, $cdc^{-1} = e^{\alpha}g^{\eta}d$ (nessa ordem).

Demonstração: Notemos que o espaço $M(A) - \underline{S}^1$ pode ser obtido de

$(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \times I$ identificando o par $(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, 0)$ com

$(\left[A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right], 1)$.

Seja $\Psi : (T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \times I \longrightarrow M(A) - \underline{S}^1$ a aplicação quociente.

Sejam c_1, e_0 , $A(e_0)$ os seguintes caminhos em

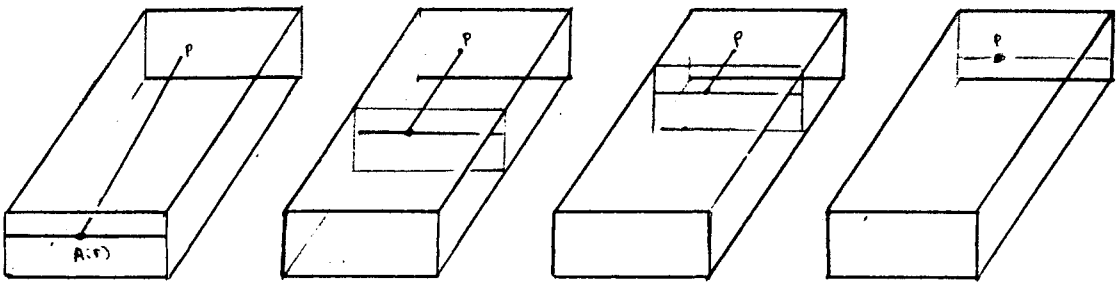
$(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \times I$:

$$c_1(t) = ((1-t)\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + t\left[A\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\right] , t)$$

$$e_0(t) = (\begin{bmatrix} p_1 + \gamma t \\ p_2 \end{bmatrix}, 0)$$

$$A(e_0)(t) = (\left[A\begin{pmatrix} p_1 + t \\ p_2 \end{pmatrix}\right], 1) = (\left[A\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\right] + \begin{bmatrix} \gamma t \\ 0 \end{bmatrix}, 1)$$

A seguinte seqüência de figuras descreve uma homotopia em $(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \times I$ entre $c_1 . A(e_0) . c_1^{-1}$ e e_0^{γ} .



Segue que $cec^{-1} = \Psi_{\#}(c_1.A(e_o).c_1^{-1}) = \Psi_{\#}(e_o^{\gamma}) = e^{\gamma}$.

Consideremos os seguintes caminhos em $(T - \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}) \times I$:

$$e_o(t) = \left(\begin{bmatrix} p_1+t \\ p_2 \end{bmatrix}, 0 \right) \qquad d_o(t) = \left(\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2+t \end{bmatrix}, 0 \right)$$

$$e_1(t) = \left(\begin{bmatrix} p_1+t \\ p_2 \end{bmatrix}, 1 \right) \qquad d_1(t) = \left(\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2+t \end{bmatrix}, 1 \right)$$

$$A(d_1)(t) = \left(\left[A\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \right] , 1 \right)$$

$$c_1(t) = \left((1-t)\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + t\left[A\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right] , t \right)$$

Provaremos, mediante conveniente escolha de $\left[A\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right]$, que em $(T - \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}) \times I$ os seguintes laços são homotópicos:

$$c_1.A(d_1).c_1^{-1} \simeq c_1.e_1^{\alpha_s}.d_1^{\eta}.c_1^{-1} \simeq e_o^{\alpha_s}.d_o^{\eta} \quad \text{e, portanto,}$$

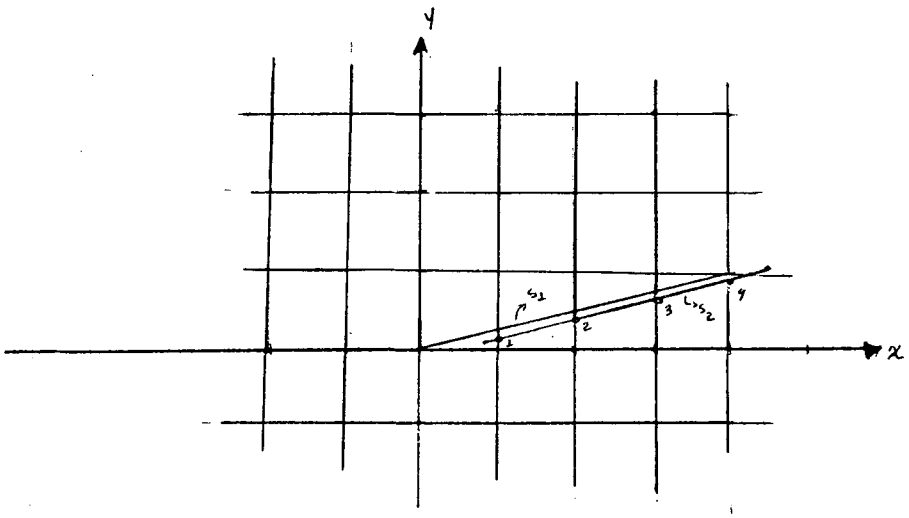
$$cdc^{-1} = \Psi_{\#}(c_1 A(d_1) c_1^{-1}) = \Psi_{\#}(c_1 e_1^{\alpha_s}\, d_1^{\eta}\, c_1^{-1}) =$$

$$= \Psi_{\#}(e_o^{\alpha_s}\, d_o^{\eta}) = e^{\alpha_s}\, d^{\eta}$$

Consideremos os seguintes segmentos em $\mathbb{R}^2$

$$s_1(t) = A\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_s t \\ \eta\, t \end{bmatrix} \text{ e } s_2(t) = A\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_s t \\ \eta t \end{bmatrix} ,$$

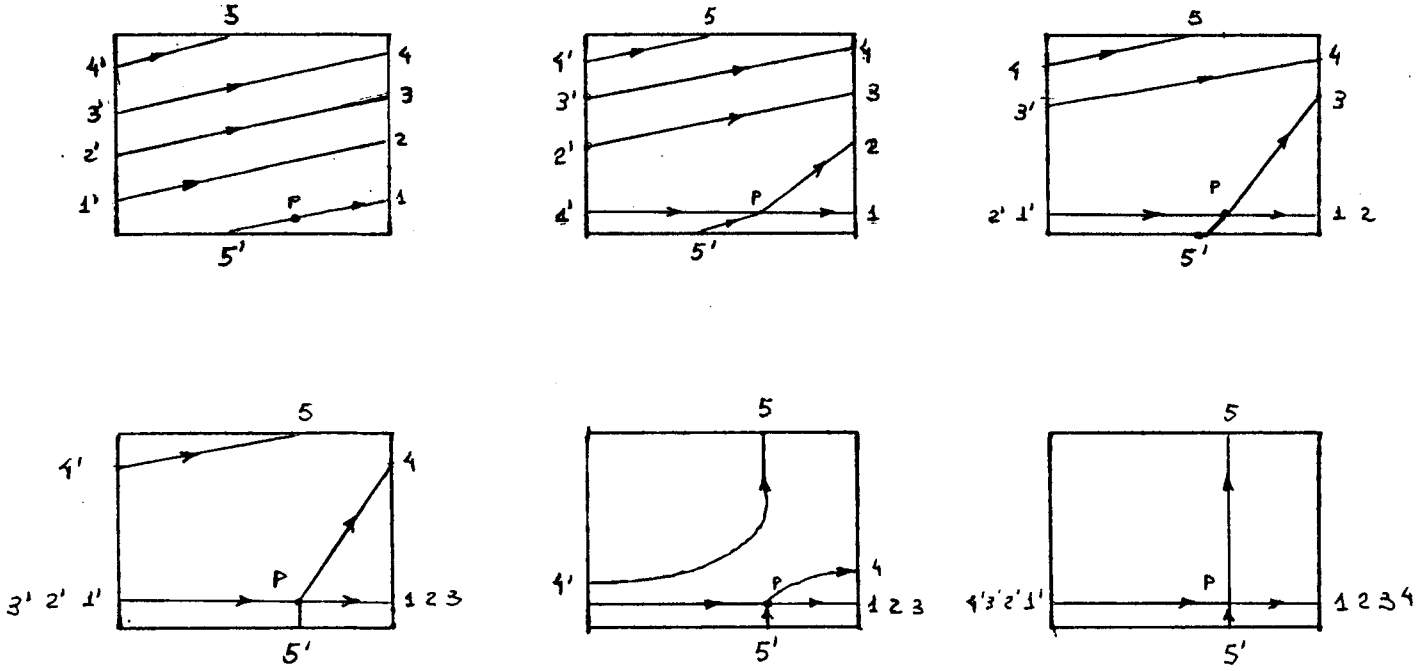
onde $A\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$ é escolhido de modo que o último ponto do segmento s_2 ,interceptando o quadriculado, esteja sobre uma reta horizontal (ver figura):



A projeção do segmento s_2 em $(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \times \{1\}$ é o caminho $A(d_1)$ (esquematizado no primeiro quadrado, ver figura).

A seguinte seqüência de figuras descreve uma homo-

pia em $(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \times \{1\}$ entre $A(d_1)$ e $e_1^{\alpha_9} d_1^{\eta}$.



Usando a homotpia descrita na primeira parte segue que:

$$c_1 \, e_1^{\alpha_9} \, d_1^{\eta} \, c_1^{-1} \simeq e_0^{\alpha_9} \, d_0^{\eta}$$

■

3.2.6 Lema: Seja $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_9 \\ \alpha_2 & \alpha_4 \end{bmatrix}$ uma matriz unimodular inteira.

Sejam a, b , c as classes de homotopia dos seguintes laços em $(M(A), \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \rangle)$ dados por:

$$a(t) = \langle \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \rangle \ , \ b(t) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}, 0 \rangle \ \text{ e } \ c(t) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \rangle$$

Então, $cac^{-1} = a^{\alpha_1} b^{\alpha_2}$ e $cbc^{-1} = a^{\alpha_9} b^{\alpha_4}$.

Demonstração: Análoga ao lema 3.2.5.

■

3.2.7 Observação: Com as notações anteriores, seguem as seguintes presentações dos grupos fundamentais:

$$\Pi_1(MA - \underline{S}^1, \langle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, 0 \rangle) = \langle e,d,c;\ cec^{-1} = e^{\varepsilon} \quad cdc^{-1} = e^{\alpha_9} d^{\eta} \rangle$$

$$\Pi_1(MA, \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \rangle) = \langle a,b,c;\ cac^{-1} = a^{\gamma} \quad cbc^{-1} = a^{\alpha_9} b^{\eta} \rangle, \text{ onde}$$

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & \alpha_9 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \text{ é a matriz unimodular inteira.}$$

Seja G o grupo induzido de $(p_/)_\#$ por $p_\#$:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[d, "q_1"'] & \Pi_1(M(A)-\underline{S}^1;\ \langle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, 0 \rangle) \arrow[d, "(p_/)_\#"] \\
\Pi_1(M(A), \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \rangle) \arrow[r, "p_\#"] & \Pi_1(S^1)
\end{tikzcd}$$

3.2.8 Lema: Seja $\phi : \Pi_1(M(A) \times_{S^1} M(A) - \underline{S}^1)) \longrightarrow G$, dado por $\phi(\alpha) = (p_1(\alpha), p_2(\alpha))$, onde p_i são as induzidas em Π_1 das projeções de $M(A) \times_{S^1} (MA - \underline{S}^1)$ em $M(A)$ e em $M(A) - \underline{S}^1$ respectivamente. Então ϕ é um isomorfismo.

Demonstração: Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \Pi_1(T-e) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i_1"'] & \Pi_1(T-e) \arrow[dd, "i_2"] \\
\Pi_1(MA \times_{S^1} MA-\underline{S}^1) \arrow[dr, "p_1"'] & G \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"] \arrow[ur, "p_2"] & \Pi_1(MA - \underline{S}^1) \arrow[d, "(p_/)_\#"] \\
 & \Pi_1 M(A) \arrow[r, "p_\#"'] & \Pi_1(S^1)
\end{tikzcd}$$

Se $\phi(\alpha) = (1,1) = (p_1(\alpha), p_2(\alpha))$, então existe $\alpha' \in \Pi_1(T-e)$ tal que $\alpha = i_1(\alpha')$. Da igualdade $p_2(\alpha)=1$ segue:

$p_2(\alpha) = 1 = p_2 i_1(\alpha') = i_2 \circ j(\alpha')$, ou seja, $\alpha' = 1$, pois $i_2 \circ j$ é injetora. Portanto ϕ é injetora.

Por outro lado, dado $(\alpha,\beta) \in G$, seja $\alpha' \in \Pi_1(MA \times_{S^1} MA-\underline{S}^1)$ tal que $p_1(\alpha') = \alpha$. Da igualdade

$$(p)_\# \circ p_1(\alpha') = (p_/)_\# \circ p_2(\alpha') = (p_/)_\#(\beta) \quad ,$$

segue que :

$$(p_/)_\#(p_2(\alpha')\beta^{-1}) = 1$$

ou seja, existe $\beta' \in \Pi_1(T-e)$, tal que $i_2(\beta') = p_2(\alpha')\beta^{-1}$.

Tomando $(i_1 \circ j^{-1} (\beta'^{-1})).\alpha' \in \Pi_1(MA \times_{S^1} MA-\underline{S}^1)$,

então :

$$\phi((\ i_1 o j^{-1}\ (\beta'^{-1})\ ).\alpha') \ =$$

$$= (p_1(i_1 o j^{-1}(\beta'^{-1})).p_1(\alpha')\ ,\ p_2(i_1 o j^{-1}(\beta'^{-1})p_2(\alpha')) =$$

$$= (p_1(\alpha')\ ,\ i_2(\beta'^{-1})p_2(\alpha') = (\alpha\ ,\ \beta p_2(\alpha')^{-1}p_2(\alpha')) =$$

$$= (\alpha,\beta)$$

Portanto ϕ é um isomorfismo.

■

Seja D o grupo com a seguinte presentação:

$$D = \langle a,b,e,d,c\ ;\ [a,b] = 1\ ,\ [a,e] = 1\ ,\ [a,d] = 1,$$
$$[b,e] = 1\ ,\ [b,d] = 1,\ cac^{-1} = a^{\varepsilon},\ \ cbc^{-1} = a^{\alpha}b^{\eta}\ ,$$
$$cec^{-1} = e^{\varepsilon},\ cdc^{-1} = e^{\alpha}d^{\eta}\ \rangle$$

onde $A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \alpha \\ 0 & \eta \end{bmatrix}$ é uma matriz unimodular inteira.

Consideremos as presentações de $\Pi_1(MA-\underline{S}^1)$ e $\Pi_1(MA)$ dadas em 3.3.7 .

Sejam Ψ_1 e Ψ_2 homomorfismos de D em $\Pi_1(MA)$ e em $\Pi_1(MA-\underline{S}^1)$, respectivamente, dados por:

$$\Psi_1 : \begin{cases} a \longmapsto a \\ b \longmapsto b \\ e \longmapsto 1 \\ d \longmapsto 1 \\ c \longmapsto c \end{cases} \qquad \Psi_2 : \begin{cases} a \longmapsto 1 \\ b \longmapsto 1 \\ e \longmapsto e \\ d \longmapsto d \\ c \longmapsto c \end{cases}$$

3.2.9 Lema: Os homomorfismos Ψ_1 e Ψ_2 definem, pela propriedade de grupo induzido, um isomorfismo $\Psi: D \longrightarrow G$, onde G é dado do lema 3.2.8 .

Demonstração: Observemos que, em termos das presentações de $\Pi_1(MA)$ e $\Pi_1(MA-\underline{S}^1)$, $p_\#$ e $(p_/)_\#$ são dadas por:

$$p_\#: \begin{cases} a \longmapsto 1 \\ b \longmapsto 1 \\ c \longmapsto c_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad (p_/)_\# \begin{cases} e \longrightarrow 1 \\ d \longrightarrow 1 \\ c \longrightarrow c_1 \end{cases}, \text{ onde } c_1 \text{ é}$$

o gerador de $\Pi_1(S^1)$. Portanto, $p_\# \circ \Psi_1 = (p_/)_\# \circ \Psi_2$.

A partir da observação anterior, claramente $\Psi: D \longrightarrow G$, dada por $\Psi(\alpha) = (\Psi_1(\alpha), \Psi_2(\alpha))$ define um homomorfismo.

Notemos que se $\alpha \in D$, então as relações em D nos permitem escrever $\alpha = a^{m_1} b^{m_2} q(e,d).c^{m_3}$, onde $q(e,d)$ é uma palavra em e e d.

Se $\Psi(\alpha) = (\Psi_1(\alpha), \Psi_2(\alpha)) = (1,1)$, então os expoentes m_1 , m_2 e m_3 , que aparecem em $\alpha = a^{m_1} b^{m_2} q(e,d) c^{m_3}$, são todos nulos, pois do contrário $\Psi_1(\alpha) \neq 1$. Por sua vez, $q(e,d)$ representa o elemento neutro, pois senão $\Psi_2(\alpha) \neq 1$. Portanto Ψ é injetora .

Por outro lado, dado $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in G$, existe $\alpha \in D$ tal que $\Psi_1(\alpha) = \beta_1$. Da condição $p_\#(\beta_1) = (p_/)_\#(\beta_2)$, segue que :

$(p)_\# \circ \Psi_1(\alpha) = (p_/)_\#(\beta_2) = (p_/)_\# \Psi_2(\alpha)$, ou seja,

$\Psi_2(\alpha)^{-1} \beta_2 \in$ núcleo de $(p_/)_\#$.

Seja γ a palavra em e e d tal que $\Psi_2(\alpha)^{-1}\beta_2 = \gamma$.

Tomando $\alpha.\tilde{\gamma} \in D$, onde $\tilde{\gamma}$ é a palavra γ em D.

Notemos que $\Psi_1(\tilde{\gamma}) = 1$ e $\Psi_2(\tilde{\gamma}) = \gamma$ e portanto:

$$\Psi(\alpha\tilde{\gamma}) = (\Psi_1(\alpha\tilde{\gamma}) \ , \ \Psi_2(\alpha\tilde{\gamma})) = (\Psi_1(\alpha), \ \Psi_2(\alpha)\gamma) = (\beta_1,\beta_2)$$

Portanto, Ψ é sobre.

■

3.2.10 Lema: a) O homomorfismo $\phi' : \Pi_1(MA \times_{S^1} MA) \longrightarrow G_1$ dado por $\phi'(\alpha) = (p_1(\alpha) \ , \ p_2(\alpha))$ é um isomorfismo, onde G_1 é o grupo induzido de $p_\#$ por $p_\#$; e p_1 , p_2 são as induzidas em Π_1 das projeções de $M(A) \times_{S^1} M(A)$ em $M(A)$.

b) Seja D_1 o grupo com a seguinte presentação:

$$D_1 = \langle a,b,e,d,c; \ [a,b]=1, \ [a,e]=1, \ [a,d]=1, \ [b,e]=1,$$

$$[b,d]=1, \ [e,d]=1, \ cac^{-1} = a^{\varepsilon}, \ cec^{-1} = e^{\varepsilon} \ ,$$

$$cbc^{-1} = a^{\alpha_9}b^{\eta} \ , \ cdc^{-1} = e^{\alpha_9}d^{\eta} \ \rangle \ .$$

Sejam: $\Psi_1' : D_1 \longrightarrow \Pi_1(MA; \langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o \rangle)$ e

$\Psi_2' : D_1 \longrightarrow \Pi_1(MA; \langle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, o \rangle)$ dadas por:

$$\Psi_1' : \begin{cases} a \longmapsto a \\ b \longmapsto b \\ e \longmapsto 1 \\ d \longmapsto 1 \\ c \longmapsto c \end{cases} \qquad \Psi_2' : \begin{cases} a \longrightarrow 1 \\ b \longrightarrow 1 \\ e \longrightarrow e \\ d \longrightarrow d \\ c \longrightarrow c \end{cases}$$

Então os homomorfismos Ψ'_1 e Ψ_2' definem, pela propriedade de grupo induzido um isomorfismo $\Psi' : D_1 \longrightarrow G_1$.

Demosntração: Análoga ao que foi feito nos lemas 3.2.8 e 3.2.9.

■

A proposição seguinte descreve o homomorfismo

$$(1,f)_{\#} : \Pi_1(MA;\langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o\rangle) \longrightarrow \Pi_1(MA \times_{S^1} MA \quad ;(\langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o\rangle, \langle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, o\rangle))$$

em termos das presentações:

3.2.11 Proposição: Seja $f_{\#} : \Pi_1(MA \ ; \ \langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o\rangle) \longrightarrow \Pi_1(MA \quad ; \quad \langle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, o\rangle)$

dada em termos dos geradores na forma:

$$f(a) = e^{b_1} d^{b_2}, \ f(b) = e^{b_3} d^{b_4} \quad , \quad f(c) = e^{c_1} d^{c_2} c,$$

Então, $(1,f)_{\#} : \Pi_1(MA) \longrightarrow \Pi_1(MA \times_{S^1} MA)$ é dada por :

$$(1,f)_{\#} : \begin{cases} a \longmapsto ae^{b_1} d^{b_2} \\ b \longmapsto be^{b_3} d^{b_4} \\ c \longmapsto e^{c_1} d^{c_2} c \end{cases}$$

Demonstração: Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\Pi_1(MA;\langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o\rangle) \arrow[rr, "f_{\#}"] \arrow[dr, "(1,f_{\#})"'] \arrow[ddr, "1"'] & & \Pi_1(MA;\langle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, o\rangle) \arrow[dd, "p_{\#}"] \\
& G_1 \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& \Pi_1(MA;\langle \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}, o\rangle) \arrow[r, "p_{\#}"'] & \Pi_1(S^1)
\end{tikzcd}$$

onde G_1 é o grupo induzido de $p_{\#}$ por p.

O homomorfismo $(1,f_{\#})$ em termos dos geradores é dado por:

$$\begin{cases} a \longmapsto (a\ ,\ e^{b_1}d^{b_2}) \\ b \longmapsto (b\ ,e^{b_3}d^{b_4}) \\ c \longmapsto (c\ ,\ e^{c_1}d^{c_2}c) \end{cases}$$

Seja $\Psi\,':D_1 \longrightarrow G_1$ o isomorfismo do lema 3.2.10.

Notemos que

$$\Psi\,'(a\ e^{b_1}d^{b_2}) = (a\ ,\ e^{b_1}d^{b_2})$$

$$\Psi\,'(b\ e^{b_3}d^{b_4}) = (b\ ,\ e^{b_3}d^{b_4})$$

$$\Psi\,'(e^{c_1}d^{c_2}c) = (c\ ,\ e^{c_1}d^{c_2}c)$$

O resultado segue considerando o isomorfismo dado em 3.2.10.

■

3.2.12 Proposição: a) O homomorfismo

$h_{\#}\circ(1,f)_{\#}:\Pi_1(MA) \longrightarrow \Pi_1(MA\times_{S^1}MA)$, onde h é a função definida na proposição 3.2.4, em termos dos geradores tem a seguinte forma:

$$h_{\#}\circ(1,f)_{\#}:\begin{cases} a \longmapsto a\ e^{b_1-1}d^{b_2} \\ b \longmapsto b\ e^{b_3}d^{b_4-1} \\ c \longmapsto e^{c_1}d^{c_2}c \end{cases}$$

b) A inclusão $(i_4)_\#$ do diagrama que precede 3.2.4 é dada por:

$$(i_4)_\# \begin{cases} a \longmapsto a \\ b \longmapsto b \\ e \longmapsto e \\ d \longmapsto d \\ c \longmapsto c \end{cases}$$

Demonstração: parte a)

Segue da descrição de $h_\#$ dada em 3.2.4 e, de $(1,f)_\#$ em 3.2.11.

parte b)

Os laços que definem os geradores a, b, e, d, c de $\Pi_1(MA \times_{S^1} MA)$, são os mesmos que definem os geradores de $\Pi_1(MA \times_{S^1} MA - \underline{S}^1)$.

■

§3 DISCUTINDO O LEVANTAMENTO DE $h\circ(1,f)$

Dada $f:M(A) \longrightarrow M(A)$ sobre S^1, então f é deformável sobre S^1 a uma função l.p.f. se, e somente se, o levantamento Γ dado em 1.2.13, o qual pode ser visto como um problema de levantamento nos grupos fundamentais, já que as hipóteses da proposição 1.1.2 se aplicam . Levando em conta a proposição 3.2.4 é suficiente discutir o levantamento 2,dado em 3.2.3, nos grupos fundamentais.

3.3.1 Proposição: Seja $f:M(A) \longrightarrow M(A)$, onde A é qualquer e, seja $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz de $(f_/)_\#:\Pi_1(T) \longrightarrow \Pi_1(T)$

Em termos dos geradores de Π_1, $f_\#$ é dada por:

$$f_\#: \begin{cases} a \longmapsto e \\ b \longmapsto d \\ c \longmapsto e^{c_1}d^{c_2}c \end{cases}$$

Então , nesse caso, sempre existe o levantamento de $h_\#\circ(1,f)_\#$ e ,portanto, f é l.p.f. sobre S^1.

Demonstração: Segue da proposição 3.2.12 a) que:

$$h_\#\circ(1,f)_\# \begin{cases} a \longmapsto a \\ b \longmapsto b \\ c \longmapsto e^{c_1}d^{c_2}c \end{cases}$$

Definindo o levantamento $\tilde{H}$ por:

$$\tilde{H}: \begin{cases} a \longmapsto a \\ b \longmapsto b \\ c \longmapsto e^{c_1} d^{c_2} c \end{cases}$$

as relações são preservadas e $(i_4)_{\#} o \tilde{H} = h o (1,f)$.

■

3.3.2 Observação: Nos demais casos, sejam E e D palavras em e e d tais que: $\begin{cases} |D|_e = b_3 \\ |D|_d = b_4 - 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} |E|_e = c_1 \\ |E|_d = c_2 \end{cases}$,

onde $|X|_e$ é a soma dos expoentes da letra e que aparece na palavra X. Analogamente $|X|_d$.

Procuraremos z_1, z_2, z_3, pertencentes ao núcleo de $(i_4)_{\#}$ (dado em 3.2.3) tal que, ao se definir $\tilde{H}$ nos geradores por:

$$\tilde{H}: \begin{cases} a \longmapsto z_1 a \\ b \longmapsto z_2 bD \\ c \longmapsto z_3 Ec \end{cases}$$

as relações em $\Pi_1(MA)$ sejam preservadas constituindo assim um levantamento de $(h o (1,f))_{\#}$.

O núcleo de $(i_4)_{\#}$ é o núcleo de $(i_3)_{\#}: \Pi_1(T \times T - e) \longrightarrow \Pi_1(T \times T)$ que é o subgrupo dos comutadores do grupo livre gerado por e e d.

Podemos supor $(i_3)_{\#}(D) \neq 0$, o caso $(i_3)_{\#}(D) = 0$ é o caso considerado na proposição 3.3.1 .

3.3.3 Proposição: Se $(i_g)_{\#}(D) \neq 0$, então para que a relação $[a,b]$, em $\Pi_1(MA)$, seja preservada por $\tilde{H}$ é necessário que $z_1 = 1$.

Se $z_1 = 1$, a relação $cac^{-1} = a^{\varepsilon}$, onde $\varepsilon = \pm 1$, é preservada qualquer que seja z_g .

Demonstração: A relação $[a,b] = 1$ é preservada se a seguinte equação em $\Pi_1(MA \times_{S^1} MA-\underline{S}^1)$ tiver solução:

$$[z_1 a,\ z_2 bD] = 1$$

Levando em conta as relações em $\Pi_1(MA \times_{S^1} MA-\underline{S}^1)$ e o fato que z_1 e z_2 são palavras em e *e* d, a equação é equivalente à:

$$[z_1,\ z_2 D] = 1$$

A equação anterior é uma equação no grupo livre gerado por e *e* d.

Segue que :

$$z_1 = t_o^r \quad e \quad z_2 D = t_o^s$$

onde t_o é uma palavra em e *e* d .

Se $z_1 \neq 1$, então $r \neq 0$.

Por sua vez, z_1 e z_2 pertencem ao subgrupo comutador do grupo livre gerado por e *e* d, assim:

$$(i_3)_\#(z_1) = 0 = (i_3)_\#(t_0^r) = ((i_3)_\#(t_0))^r \ , \quad \therefore \quad (i_3)_\#(t_0) = 0.$$

Então $(i_3)_\#(z_1 D) = (i_3)_\#(t_0^s) = 0 = i_3(D)$. Logo $z_1 = 1$.

Por outro lado, se $z_1 = 1$, a relação $cac^{-1} = a^{\varepsilon}$, é preservada, pois:

$z_3 Ecac^{-1}E^{-1}z_3^{-1} = z_3 Ea^{\varepsilon}E^{-1}z_3^{-1}$, como z_3 e E são palavras em e *e* d as quais comutam com a, segue que:

$$z_3 Ecac^{-1}E^{-1}z_3^{-1} = a^{\varepsilon}$$

é satisfeita para qualquer z_3 .

■

Tendo em vista a proposição 3.3.3, restringiremos a estudar em que condições é possível encontrar z_2 e z_3 de modo que a conjugação: cbc^{-1} em $\Pi_1(MA)$, seja preservada por $\tilde{H}$ nos seguintes casos:

caso	A	B	equação a ser resolvida
3.3.5	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & b_9\\ 0 & b_4\end{pmatrix}$	$z_9Ecz_2c^{-1}E^{-1}E(cDc^{-1}D^{-1})E^{-1}[E,D]Dz_9^{-1}D^{-1}z_2^{-1} = 1$
3.3.6	$\begin{pmatrix}1 & a_9\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & b_9\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$z_9Ecz_2c^{-1}E^{-1}E(cDc^{-1}D^{-1})E^{-1}[E,D]Dz_9^{-1}D^{-1}z_2^{-1} = 1$
3.3.7	$\begin{pmatrix}1 & a_9\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & b_9\\ 0 & b_4\end{pmatrix}$	$z_9Ecz_2c^{-1}E^{-1}E(cDc^{-1}D)E^{-1}[E,D^{-1}]D^{-1}z_9^{-1}z_2D = 1$
	$a_9(b_4-1) = -2b_9$		
3.3.9	$\begin{pmatrix}-1 & a_9\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & b_9\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$z_9Ecz_2c^{-1}E^{-1}E(cDc^{-1}D)E^{-1}[E,D^{-1}]D^{-1}z_9^{-1}z_2D = 1$
3.3.10	$\begin{pmatrix}-1 & a_9\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & b_9\\ 0 & b_4\end{pmatrix}$	$z_9Ecz_2c^{-1}E^{-1}E(cDc^{-1}D^{-1})E^{-1}[E,D]Dz_9^{-1}D^{-1}z_2^{-1} = 1$
	$a_9(b_4-1) = 2b_9$		
3.3.11	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & b_9\\ 0 & b_4\end{pmatrix}$	$z_9Ecz_2c^{-1}E^{-1}E(cDc^{-1}D)E^{-1}[E,D^{-1}]D^{-1}z_9^{-1}z_2D = 1$

Notamos, pela última coluna da tabela anterior ,que as equações a serem resolvidas são equações no subgrupo comutador do grupo livre gerado por e e d, os quais são identificados com o $\Pi_2(T,T-e)$ e $\Pi_1(T-e)$, respectivamente.

Como foi visto em 1.4.2 , o abelianizado de $\Pi_2(T,T-e)$, é isomorfo a :

$$\mathbb{Z}\Pi_1(T) \simeq \bigoplus_{\substack{x\in\mathbb{Z}\\ y\in\mathbb{Z}}} [B_{e^x d^y}] \quad ,$$

onde cada $B_{e^x d^y}$ é o gerador de uma cópia de $\mathbb{Z}$.

Seja : $$\aleph : \bigoplus_{\substack{x\in\mathbb{Z}\\ y\in\mathbb{Z}}} [B_{e^x d^y}] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

definida em cada gerador por : $\aleph(B_{e^x d^y}) = 1.$

A composição da projeção $p:\Pi_2(T,T-e) \longrightarrow \mathbb{Z}\Pi_1(T)$ com a função $\aleph$ será denotada por $|\ \ |$, a qual tem as seguintes propriedades:

3.3.4 Lema: a) Se $\alpha \in \Pi_1(T-e)$ e $z \in \Pi_2(T,T-e)$,então

$$|\alpha z \alpha^{-1}| = |z|$$

b) $$|[e^{x_1}d^{y_1}, e^{x_2}d^{y_2}]| = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

c) Seja $c \in \Pi_1(MA \times_{S^1} (MA-\underline{S}^1))$, definido em 3.2.5, para $z \in \Pi_2(T,T-e)$, então

$$|czc^{-1}| = \text{sinal do det } A.|z|$$

Demonstração: parte a)

Por definição:

$$|\alpha z \alpha^{-1}| = \gamma p(\alpha z \alpha^{-1}) = \gamma(i_{\#}(\alpha).p(z)),$$

onde $i_{\#}:\Pi_1(T-e) \longrightarrow \Pi_1(T)$.

Assim se: $i_{\#}(\alpha) = e^m d^n$ e $B^{t_1}_{e^{x_1}d^{y_1}}$

aparece em $p(z)$, então:

$$i_{\#}(\alpha).B^{t_1}_{e^{x_1}d^{y_1}} = B^{t_1}_{e^{x_1+m}d^{y_1+n}}$$

Portanto, $|\alpha z \alpha^{-1}| = \gamma(i_{\#}(\alpha)p(z)) = \gamma p(z) = |z|$

parte b)

Observemos:

i) $|[e^{x_1}d^{y_1},e^{x_2}d^{y_2}]| = |e^{x_1}[d^{y_1},e^{x_2}]e^{-x_1}e^{x_2}[e^{x_1},d^{y_2}]e^{-x_2}|$

$$= |[d^{y_1},e^{x_2}]| + |[e^{x_1},d^{y_2}]|$$

ii) Da fórmula $[d^{y_1}.e^{x_2}][e^{x_2},d^{y_1}] = 1$, segue que

$$|[d^{y_1},e^{x_2}]| = -|[e^{x_2},d^{y_1}]|$$

iii) Da fórmula $|[e^x,d^{-y}]d^{-y}[e^x,d^y]d^y = 1$, temos :

$$|[e^x,d^{-y}]| = - |[e^x,d^y]|$$

portanto, é suficiente provar $|[e^x,d^y]| = xy$,

quando y é maior ou igual a zero.

O resultado segue por indução sobre y.

parte c)

Seja $z = B = [e,d] \in \Pi_2(T,T-e)$ então,

$$cBc^{-1} = e^{\varepsilon}e^{\alpha}d^{n}e^{-\varepsilon}d^{-n}e^{-\alpha} = e^{\alpha}[e^{\varepsilon},d^{n}]e^{-\alpha}$$

onde: $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha \\ 0 & n \end{pmatrix}$ e $\varepsilon.n = \pm 1$.

Portanto $|cBc^{-1}| = \varepsilon.n =$ sinal do det A.

No caso geral, z pode ser escrito na forma:

$$z = \prod_{i=1}^{r} \alpha_i B^{t_i} \alpha_i^{-1}$$

Assim, $$czc^{-1} = \prod_{i=1}^{r} c\alpha_i c^{-1}(cBc^{-1})^{t_i} c\alpha_i^{-1}c^{-1}$$

portanto:

$$|czc^{-1}| = \aleph p(czc^{-1}) = \aleph\left(\prod_{i=1}^{r} B_{i_{\#}(c\alpha_i c^{-1})}^{|cBc^{-1}|t_i} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} |cBc^{-1}|\ t_i = |cBc^{-1}| \sum_{i=1}^{r} t_i = |cBc^{-1}|\ |z|$$

3.3.5. Analisando o caso: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$.

A equação correspondente a ser resolvida é:

$$z_3 E c z_2 c^{-1} E^{-1} E (c D c^{-1} D^{-1}) E^{-1} [E,D] D z_3^{-1} D^{-1} z_2^{-1} = 1$$

Aplicando a função $|\ |$ na equação, obtemos:

$$|cDc^{-1}D^{-1}| + |[E,D]| = 0.$$

Nesse caso, qualquer que seja D, $cDcD^{-1} = 1$

e portanto temos a condição A :

$$[E,D]| = \det \begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} = 0.$$

Sejam l = m.d.c (b_3, b_4-1) e (k_1, k_2) primos entre si tais que $(b_3, b_4-1) = l(k_1, k_2)$ (multiplicação coordenada a coordenada) .

Se a condição A está satisfeita então existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $(c_1, c_2) = t(k_1, k_2)$.

Tomando $E = v^l$ e $D = v^l$, onde $v = e^{k_1} d^{k_2}$, então $[E,D] = 1$ e, assim , a equação 3.3.5 para o par (E,D) admite solução trivial .

3.3.5.1 Quadro resumo

caso $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$

equação: $z_3 E c z_2 c^{-1} E^{-1} E (c D c^{-1} D^{-1}) E^{-1} [E,D] D z_3^{-1} D^{-1} z_2^{-1} = 1$

condição necessária e suficiente: $|[E,D]| = 0 = \det \begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4 - 1 \end{pmatrix}$

solução trivial para $E = v^l$ e $D = v^l$, $v = e^{k_1} d^{k_2}$

l = m.d.c.$(b_3, b_4 - 1)$.

3.3.6 Analisando o caso $A = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A equação correspondente a ser resolvida é :

$$z_3 E c z_2 c^{-1} E^{-1} E (c D c^{-1} D^{-1}) E^{-1} [E,D] D z_3^{-1} D^{-1} z_2^{-1} = 1$$

Aplicando a função | | na equação obtemos :

$$|[E\ D]| + |c D c^{-1} D^{-1}| = 0$$

Tomando $D = e^{b_3}$, temos : $c D c^{-1} D^{-1} = 1$.

Portanto a condição A :

$$[E,D]| = 0 = \det \begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = -c_2 b_3$$

Por outro lado, se $c_2 = 0$, tomando $E = e^{c_1}$ e $D = e^{b_3}$, temos: $[E,D] = 1$. Se $b_3 = 0$, tomando $E = e^{c_1}d^{c_2}$ e $D = e^{0}$, temos: $[E,D] = 1$. Assim se $c_2 = 0$ ou $b_3 = 0$ é possível escolher E e D tal que a equação 3.3.6 para o par (E,D) admite solução trivial.

3.3.6.1 Quadro resumo

caso $A = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

equação: $z_3 E c z_2 c^{-1} E^{-1} E (c D c^{-1} D^{-1}) E^{-1} [E,D] D z_3^{-1} D^{-1} z_2^{-1} = 1$

condição necessária e suficiente : $\det \begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = 0$

solução trivial para $E = e^{c_1}$, $D = e^{b_3}$ se $c_2 = 0$

ou $E = e^{c_1}d^{c_2}$, $D = e^{0}$ se $b_3 = 0$

3.3.7 Analisando o caso $A = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$

onde, $a_3(b_4-1) = -2b_3$.

A equação correspondente a ser resolvida é

$$z_3 E c z_2 c^{-1} E^{-1} E (c D c^{-1} D) E^{-1} [E, D^{-1}] D^{-1} z_3^{-1} z_2 D = 1$$

Aplicando a função | | na equação obtemos a condição A:

$$|cDc^{-1}D| + |[E, D^{-1}]| = 0$$

Sejam l = m.d.c(b_3, b_4-1) e (k_1, k_2) primos entre si tais que

$$(b_3, b_4-1) = l(k_1, k_2)$$

Da condição $a_3(b_4-1) = -2b_3$, segue que $k_2 = 1, -1, 2$ ou -2

A tabela seguinte revela as possíveis matrizes A quando k_2 assume os valores anteriores. Em cada caso, para se calcular $|cDc^{-1}D|$, tomamos $D = v^l$, onde v é especificado na terceira coluna.

k_2	A	v	cvc^{-1}	$cDc^{-1}D$ $D=v^l$	$\lvert cDc^{-1}D\rvert$
1	$\begin{pmatrix} 1 & -2k_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$e^{k_1}d$	$dv^{-1}d^{-1}$	$[d, v^{-l}]$	lk_1
-1	$\begin{pmatrix} 1 & 2k_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$d^{-1}e^{k_1}$	$dv^{-1}d^{-1}$	$[d, v^{-l}]$	lk_1
2	$\begin{pmatrix} 1 & -k_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$de^{k_1}d$	$dv^{-1}d^{-1}$	$[d, v^{-l}]$	lk_1
-2	$\begin{pmatrix} 1 & k_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$d^{-1}e^{k_1}d^{-1}$	$dv^{-1}d^{-1}$	$[d, v^{-l}]$	lk_1

3.3.7.1 Assim a condição A pode ser expressa na forma:

$$|cDc^{-1}D| + |[E,D^{-1}]| = 0 = k_1 - k_2c_1 + k_1c_2 = 0$$

ou ainda : $k_1(1+c_2) = k_2c_1$

onde: $\iota(k_1,k_2) = (b_3,b_4-1)$ e (k_1,k_2) são primos entre si.

a) Se $k_2 = 1$, fazendo $c_2 = t$, temos: $\begin{cases} c_1 = k_1 + k_1t \\ c_2 = t \end{cases}$

Tomando $E = v^t e^{k_1}$ e $D = v^l$, onde $v = e^{k_1}d$, então :

$$EcDc^{-1}DE^{-1}[E,D^{-1}] = EcDc^{-1}E^{-1}D = v^t e^{k_1} c v^l c^{-1} e^{-k} v^{-t} v^l =$$

$$= v^t v v^{-l} v^{-1} v^{-t} v^l = 1$$

b) Se $k_2 = -1$, então $\begin{cases} c_1 = -k_1 + k_1t \\ c_2 = -t \end{cases}$, tomando $E = v^t e^{-k_1}$ e

$D = v^l$, onde $v = d^{-1} e^{k_1}$, então :

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

c) Se $k_2 = 2$, então $c_2 = 2t-1$ (segue de $k_1(1+c_2) = k_2c_1$) e

$c_1 = k_1t$. Tomando $E = v^t d^{-1}$, $D = v^l$, onde $v = de^{k_1}d$, então

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

d) Se $k_2=-2$, então $c_2=-2t-1$ e $c_1= k_1t$, tomando $E = v^t d^{-1}$ e $D = v^l$, onde $v = d^{-1}e^{k_1}d^{-1}$, então :

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = 1.$$

Portanto, se $k_2=1$, -1, 2 ou -2 e se a condição A está satisfeita, então é possível escolher E e D tal que a equação 3.3.7 , para o par E e D , admite solução trivial.

3.3.7.2 Quadro resumo:

caso $A = \begin{bmatrix} 1 & a_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}$, onde $a_3(b_4-1) = 2b_3$

equação: $z_3Ecz_2c^{-1}E^{-1}E(cDc^{-1}D^{-1})E^{-1}[E,D^{-1}]D^{-1}z_3^{-1}z_2D = 1$

condição necessária e suficiente

$|cDc^{-1}D| + |[E,D^{-1}]| = 0 = k_1 - k_2c_1 - k_1c_2$, onde

$l(k_1,k_2) = (b_3,b_4-1)$, onde $l = m.d.c(b_3,b_4-1)$

Solução trivial para o par E e D, abaixo especificado.

k_2	v	E		D
1	$e^{k_1}d$	$v^t e^{k_1}$	$c_1 = k_1 + k_1 t$ $c_2 = t$	v^l
-1	$d^{-1}e^{k_1}$	$v^t e^{-k_1}$	$c_1 = -k_1 + k_2 t$ $c_2 = -t$	v^l
2	$de^{k_1}d$	$v^t d^{-1}$	$c_1 = k_1 t$ $c_2 = 2t - 1$	v^l
-2	$d^{-1}e^{k_1}d^{-1}$	$v^t d^{-1}$	$c_1 = k_1 t$ $c_2 = -2t - 1$	v^l

Para os demais casos; utilizaremos o lema 3.3.8.

Observemos antes, que as equações a serem resolvidas são de dois tipos:

TIPO 1: $$z_9 E c z_2 c^{-1} E^{-1} E (c D c^{-1} D^{-1}) E^{-1} [E, D] D z_9^{-1} D^{-1} z_2^{-1} = 1$$

TIPO 2: $$z_9 E c z_2 c^{-1} E^{-1} E (c D c^{-1} D) E^{-1} [E, D^{-1}] D^{-1} z_9^{-1} z_2 D = 1$$

3.3.8 Lema: Seja w uma palavra qualquer em e *e* d .

Consideremos uma das equações tipo 1 ou tipo 2.

Se existir um par (E_1, D_1) tal que a equação tenha solução $(\bar{z}_2, \bar{z}_3)$, então :

a) para todo par (E,D) onde

$$E = wE_1cw^{-1}c^{-1}$$

$$D = wD_1w^{-1}$$

a equação correspondente ao par (E,D) tem solução.

b) o par (E,D) é tal que:

$$\begin{cases} |E|_e = |E_1|_e + |wcw^{-1}c^{-1}|_e \\ |E|_d = |E_1|_d + |wcw^{-1}c^{-1}|_d \end{cases} \qquad \begin{cases} |D|_e = |D_1|_e \\ |D|_d = |D_1|_d \end{cases}$$

Demonstração: parte a)

O par $(w\bar{z}_2w^{-1}, w\bar{z}_3w^{-1})$ é solução para equação correspondente ao par (E,D) .

parte b)

Imediata.

■

Dizemos que o par (E,D) é obtido de (E_1,D_1) via w se:

$$E = wE_1cw^{-1}c^{-1}$$

$$D = wD_1w^{-1}$$

3.3.9 Analisando o caso $A = \begin{pmatrix} -1 & a_9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & b_9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A equação correspondente a ser resolvida é:

$$z_9Ecz_2c^{-1}E^{-1}E(cDc^{-1}D)E^{-1}[E,D^{-1}]D^{-1}z_9^{-1}z_2D = 1$$

Neste caso, $D = e^{b_9}$ e portanto $cDc^{-1}D = 1$, aplicando a função $|\ |$, obtemos como condição A:

$$2|z_2| + |[E,D^{-1}]| = 0 = 2|z_2| + \det\begin{pmatrix} c_1 & -b_9 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix}$$

ou seja, ou c_2 é par ou b_9 é par .

3.3.9.1 Alguns exemplos de (E_1,D_1) tal que a equação 3.3.9 tem solução.

a) $E_1 = e^t$ onde t é inteiro qualquer

$D_1 = e^{b_9}$

Notemos que o termo constante da equação 3.3.9 é :

$$E_1 c D_1 c^{-1} E_1^{-1} D_1 = e^{t} e^{-b_3} e^{-t} e^{b_3} = 1$$

Portanto a equação 3.3.9 para (E_1, D_1) admite solução trivial.

b) $$E_1 = e^{a_3} d$$

$$D_1 = e^{2k}$$

Chamando de $w_3^{-1} = z_3^{-1} z_2$ na equação 3.3.9, obtemos

$$z_2 w_3 E_1 c z_2 c^{-1} E^{-1} E_1 c D_1 c^{-1} E_1^{-1} D_1 D_1^{-1} w_3^{-1} D_1 = 1$$

O termo $$E_1 c D_1 c^{-1} E_1^{-1} D_1 = E_1 e^{-2k} E_1^{-1} e^{2k} =$$

$$= [E_1, e^{-k}] e^{-k} [E_1, e^{-k}] e^{k} .$$

Fazendo $$E_1 c z_2 c^{-1} E_1^{-1} = [e^{-k}, E_1] \quad \text{e}$$

$$D_1^{-1} w_3^{-1} D_1 = e^{-k} [e^{-k}, E_1] e^{k}$$

é suficiente verificar se $z_2 w_3 = 1$.

Notemos que

$$w_3 = D_1 e^{-k} [E_1, e^{-k}] e^{k} D_1^{-1} = e^{k} [E_1, e^{-k}] e^{-k} = = e^{a_3} [e^{k}, d] e^{-a_3}$$

Por sua vez, $z_2 = c^{-1}E_1^{-1}[e^{-k},E_1]E_1c =$

$$= c^{-1}[E_1^{-1},e^{-k}]c =$$

$$= c^{-1}[d^{-1}e^{-k}]c =$$

$$= [e^{a_9}d,e^k] = e^{a_9}[d,e^k]e^{-a_9}$$

Portanto, $z_2w_9 = 1.$

3.3.9.2 Seja $w = e^xd^y$.

Os exemplos anteriores geram pares (E,D) , obtidos de (E_1,D_1) via w, para os quais a equação 3.3.9 tem solução, onde $(c_1,c_2) = (|E|_e,|E|_d)$ satisfaz:

$$\text{I} \quad \begin{cases} c_1 = t + 2x + a_9y \\ c_2 = 2y \end{cases} \quad \text{se } c_2 \text{ é par}$$

ou

$$\text{II} \quad \begin{cases} c_1 = a_9 + 2x + a_9y \\ c_2 = 1 + 2y \end{cases} \quad \text{se } b_9 \text{ é par.}$$

onde t, x, y são inteiros.

Notemos que o sistema II só terá solução se c_2 é ímpar e $c_1 - a_3\frac{(c_2+1)}{2}$ é par.

Mostremos que somente nesses casos a equação 3.3.9 tem solução, ou seja:

3.3.9.3 A equação 3.3.9 tem solução se e somente se c_2 é par ou c_2 é ímpar, $b_3 = 2k$ e $c_1 - a_3\frac{(c_2+1)}{2}$ é par.

Tendo em vista 3.3.9.2 é suficiente mostrar que se $b_3 = 2k$, c_2 ímpar e $c_1 - a_3\frac{(c_2+1)}{2}$ ímpar, a equação 3.3.9 não tem solução.

É suficiente ainda, mostrar que a equação 3.3.9 não tem solução para $E_1 = e^{a_3-1}d$ e $D_1 = e^{2k}$. (Se existisse para esse, existiria para todo tal que $b_3 = 2k$, c_2 é ímpar e $c_1 - a_3\frac{(c_2+1)}{2}$ ímpar, argumento semelhante usado em 3.3.9.2).

Mostrando que a equação 3.3.9 para o par $E_1 = e^{a_3-1}d$ e $D_1 = e^{2k}$ não tem solução no abelianizado de $\Pi_2(T,T-e)$.

Sejam $B = [e,d]$ e $C = c[e,d]c^{-1} = e^{\alpha_9}e^{-1}d^{-1}[e,d]dee^{-\alpha_9}$.

Provaremos que a equação 3.3.9 correspondente ao par $E_1 = e^{\alpha_9 - 1}d$ e $D_1 = e^{2k}$ não tem solução em $\Pi_2^{ab}(T,T-e)$.

Escrevendo o termo constante da equação 3.3.9

$$E_1cD_1c^{-1}E_1^{-1}D_1 = e^{\alpha_9 - 1}[d,e^{-2k}]e^{-\alpha_9+1}$$

agora visto em $\Pi_2^{ab}(T,T-e)$, em termos dos geradores

$$C = B_{e^{\alpha_9-1}d^{-1}}.$$

Supondo $k = 1$, então $D_1 = e^2$ e:

$$E_1cD_1c^{-1}E_1^{-1}D_1 = e^{\alpha_9-1}[d,e^{-2}]e^{-\alpha_9+1} =$$

$$= e^{\alpha_9-1}d^{-1}d([d,e^{-1}]e^{-1}[d,e^{-1}]e)d^{-1}de^{-\alpha_9+1}$$

$$= e^{\alpha_9-1}d^{-1}(B_{e^{-1}d}B_{e^{-2}d})de^{-\alpha_9+1}$$

$$= C_{e^{-1}d}C_{e^{-2}d}$$

Supondo $k = 2$, então $D_1 = e^4$ e

$$E_1cD_1c^{-1}E_1^{-1}D_1 = e^{\alpha_9-1}[d,e^{-4}]e^{-\alpha_9+1}$$

$$= e^{\alpha_9-1}d^{-1}d([d,e^{-2}]e^{-2}[d,e^{-2}]e^{2})d^{-1}de^{-\alpha_9+1}$$

$$= e^{\alpha_9-1}d^{-1}(B_{e^{-1}d}B_{e^{-2}d}B_{e^{-9}d}B_{e^{-4}d})de^{-\alpha_9+1}$$

$$= C_{e^{-1}d}C_{e^{-2}d}C_{e^{-9}d}C_{e^{-4}d}$$

De um modo geral se k é positivo:

$$E_1cD_1c^{-1}E_1^{-1}D_1 = C_{e^{-1}d}\, C_{e^{-2}d} \ldots C_{e^{-2k}d}$$

Supondo $k_1 = -1$, então $D_1 = e^{-2}$ e

$$E_1cD_1c^{-1}E_1^{-1}D_1 = e^{a_9-1}[d,e^2]e^{-a_9+1} =$$

$$= e^{a_9-1}d^{-1}d([d,e]e[d,e]e^{-1})d^{-1}de^{-a_9+1}$$

$$= e^{a_9-1}d^{-1}(B_d^{-1}\, B_{ed}^{-1})de^{-a_9+1}$$

$$= C_d^{-1}\, C_{ed}^{-1}$$

Supondo $k_1 = -2$, então $D_1 = e^{-4}$ e

$$E_1cD_1c^{-1}E_1^{-1}D_1 = e^{a_9-1}d^{-1}d([d,e^4])d^{-1}de^{-a_9+1}$$

$$= e^{a_9-1}d^{-1}d([d,e^2]e^2[d,e^2]e^{-2})d^{-1}de^{-a_9+1}$$

$$= e^{a_9-1}d^{-1}(B_d^{-1}\, B_{ed}^{-1}\, B_{e^2d}^{-1}\, B_{e^3d}^{-1})de^{-a_9+1}$$

$$= C_d^{-1}\, C_{ed}^{-1}\, C_{e^2d}^{-1}\, C_{e^3d}^{-1}$$

De um modo geral se $K < 0$, então:

$$E_1cD_1c^{-1}E_1^{-1}D_1 = C_d^{-1}\, C_{ed}^{-1} \ldots C_{e^{-2k-1}d}^{-1}$$

Na equação 3.3.9 façamos a substituição $w_9^{-1} = z_9^{-1}z_2$. Analisaremos agora as conjugações que aparecem nas incógnitas z_2 e w_9 quando vistas no abelianizado.

Assim se $w_9 = B^t_{e^x d^y}$, então $D_1^{-1} w_9^{-1} D_1 = B^{-t}_{e^{x-2k} d^y}$, em termos dos geradores C, temos :

$$w_9 = e^{\alpha_9 - 1} d^{-1} B^t_{e^{x-\alpha_9+1} d^{y+1}} d e^{-\alpha_9+1} = C^t_{e^{x'} d^{y'}}$$

onde $x' = x - \alpha_9 + 1$ e $y' = y+1$ e

$$D_1^{-1} w_9^{-1} D_1 = e^{-2k} (e^{\alpha_9 - 1} d^{-1} B^t_{e^{x-\alpha_9+1} d^{y+1}} d e^{-\alpha_9+1}) e^{2k} =$$

$$= D_1^{-1} w_9^{-1} D_1 = C^{-t}_{e^{x'-2k} d^{y'}}$$

Por outro lado se $z_2 = B^t_{e^x d^y} = C^t_{e^{x-\alpha_9+1} d^{y+1}}$, então

$$E_1 c z_2 c^{-1} E_1^{-1} = e^{\alpha_9 - 1} d c e^x d^y c^{-1} c B^t c^{-1} c d^{-y} e^{-x} c^{-1} d^{-1} e^{-\alpha_9+1} =$$

$$= e^{\alpha_9 - 1} d^{-1} e^{-x} (e^{\alpha_9} d^{-1})^y C^t (e^{\alpha_9} d^{-1})^{-y} e^x d^{-1} e^{-\alpha_9+1} =$$

$$= C^t_{e^{\alpha_9 - 1 - x + \alpha_9 y} d^{-y+1}}$$

Assim w_9 ou $z_2 = C^t_{e^{2k\varepsilon} d}$, onde $\varepsilon \in \mathbb{Z}$, então

$$D_1 w_9^{-1} D_1 = C^{-t}_{e^{2k\varepsilon - 2k} d} \quad \text{e} \quad E_1 c z_2 c^{-1} E_1^{-1} = C^t_{e^{-2k\varepsilon} d}.$$

Seja $\phi \oplus_{\substack{x\in\mathbb{Z} \\ y\in\mathbb{Z}}} [C_{e^x d^y}] = \Pi_2^{ab}(T, T-e) \longrightarrow \oplus_{\varepsilon\in\mathbb{Z}} [C_{e^{2k\varepsilon} d}]$

o homomorfismo dado por :

$$\phi\,(C_{e^x d^y}) = \begin{cases} 0 \text{ se ou } y \neq 1 \text{ ou } x \not\equiv 0 \text{ módulo } 2k \\ C_{e^x d^y} \text{ se } (x,y) = (2k\varepsilon, 1) \text{ para algum } \varepsilon \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Aplicando | | na imagem da equação definida em 3.3.9 através da ϕ segue que no termo constante vale 1 ou -1, enquanto que nas incógnitas é sempre par.

Portanto se c_2 é ímpar e $c_1 - a_9 \frac{(c_2+1)}{2}$ for ímpar, a equação 3.3.9 não tem solução.

3.3.9.4 Quadro resumo:

Caso $A = \begin{pmatrix} -1 & a_9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & b_9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

equação: $z_9 E c z_2 c^{-1} E^{-1} (E c D c^{-1} D) E^{-1} [E, D^{-1}] D^{-1} z_9^{-1} z_2 D = 1$

condição necessária e suficiente:

i) $c_1 - a_9 \frac{(c_2+1)}{2}$ par e b_9 par

ou

ii) c_2 par

3.3.10 Analisando o caso $A = \begin{pmatrix} -1 & a_9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & b_9 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, onde $a_9(b_4-1) = 2b_9$.

A equação correspondente a ser resolvida é:

$$z_9 E c z_2 c^{-1} E^{-1} E (c D c^{-1} D^{-1}) E^{-1} [E,D] D z_9^{-1} D^{-1} z_2^{-1} = 1$$

Aplicando a função $|\ |$ na equação obtemos a condição A:

$$-2|z_2| + |cDc^{-1}D^{-1}| + |[E,D]| = 0$$

Sejam ι = m.d.c.(b_9, b_4-1) e (k_1, k_2) primos entre si tais que $(b_9, b_4-1) = \iota(k_1, k_2)$.

Da condição $a_9(b_4-1) = 2b_9$, segue que $k_2 = 1, -1, 2$ ou -2.

A tabela seguinte revela as possíveis matrizes A quando k_2 assume os valores anteriores . Em cada caso, para se calcular $|cDc^{-1}D^{-1}|$, tomamos $D = v^{\iota}$, onde v é especificado na terceira coluna:

k_2	A	v	cvc^{-1}	$\lvert cDc^{-1}D^{-1}\rvert$	condição A
1	$\begin{pmatrix} -1 & 2k_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$e^{k_1}d$	v	0	$-2\lvert z_2\rvert+\det\begin{pmatrix} c_1 & lk_1 \\ c_2 & l \end{pmatrix}=0$
-1	$\begin{pmatrix} -1 & -2k_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$d^{-1}e^{k_1}$	v	0	$-2\lvert z_2\rvert+\det\begin{pmatrix} c_1 & lk_1 \\ c_2 & -l \end{pmatrix}=0$
2	$\begin{pmatrix} -1 & k_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$e^{k_1}d^2$	dvd^{-1}	$\lvert[d,v^l]\rvert=-lk_1$	$-2\lvert z_2\rvert-lk_1+\det\begin{pmatrix} c_1 & lk_1 \\ c_2 & 2l \end{pmatrix}=0$
-2	$\begin{pmatrix} -1 & -k_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$d^{-2}e^{k_1}$	dvd^{-1}	$\lvert[d,v^l]\rvert=-lk_1$	$-2\lvert z_2\rvert-lk+\det\begin{pmatrix} c_1 & lk_1 \\ c_2 & -2l \end{pmatrix}=0$

3.3.10.1 Supondo $k_2 = 1$, então a condição A

$$-2|z_2|+l(c_1-k_1c_2) = 0 \text{ é equivalente a}$$

$$\begin{cases} c_1=2\dfrac{|z_2|}{l}+k_1t \\ c_2= t \end{cases}$$

Consideremos as seguintes condições sobre c_1, c_2, b_3, b_4-1

B_1: $c_1 - k_1c_2$ é par

B_2: $c_1 - k_1c_2$ é ímpar e se $x = m.d.c(l,c_2)$

então: $\dfrac{l}{x}$ é par.

Onde , $l = m.d.c.(b_3,b_4-1)$ e $l(k_1,1) = (b_3,b_4-1)$

A equação 3.3.10 para o caso $k_2 = 1$ só tem solução se os números $(c_1, c_2, b_3, b_4 - 1)$ satisfazem:

I condição A e condição B_1 , ou ,

II condição A e condição B_2.

Suponhamos que os números $c_1, c_2, b_3, b_4 - 1$, satisfazem a condiçãoo A e a condição B_1.

Consideremos

$$E_1 = (e^{k_1} d)^{c_2} \qquad e \qquad D_1 = (e^{k_1} d)^{l},$$

$$l = m.d.c.(b_3, b_4 - 1)$$

Para esse par (E_1, D_1) a equação 3.3.10 admite solução trivial, pois o termo constante:

$$E_1 c D_1 c^{-1} E_1^{-1} D_1^{-1} = (e^{k_1} d)^{c_2} (e^{k_1} d)^{l} (e^{k_1} d)^{-c_2} (e^{k_1} d)^{-l} = 1$$

Da condição A e da condição B_1 segue que:

$$\frac{2|z_2|}{l} = (c_1 - k_1 c_2) \text{ é par.}$$

Seja $w = e^{u_1} d^{u_2}$ tal que

$$- 2(k_1 u_2 - u_1) = \frac{2|z_2|}{l}$$

Então a equação 3.3.10 para o par (E,D) obtido de (E_1, D_1) via w admite solução trivial e

$$\begin{cases} |E|_e = |E_1|_e + |wcw^{-1}c^{-1}|_e = k_1 c_2 - 2(k_1 u_2 - u_1) = c_1 \\ |E|_d = |E_1|_d + |wcw^{-1}c^{-1}|_d = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |D|_e = b_3 \\ |D|_d = b_4 - 1 \end{cases}$$

Suponhamos que os números $(c_1, c_2, b_3, b_4 - 1)$ satisfazem a condição A e a condição B_2.

Segue da condição B_2 que $\frac{l}{x}$ é da forma:

$$\frac{l}{x} = 2r \qquad e \qquad \frac{c_2}{x} = 2s + 1$$

Sejam $w_1 = e^{-1} v^x$ e $w_2 = e v^x$, onde $v = e^{k_1} d$.

Consideremos $E_1 = (w_2 w_1)^s w_2$ e $D_1 = (w_2 w_1)^r$

Notemos que:

i) $cw_1c^{-1} = w_2$ e $cw_2c^{-1} = w_1$

ii) $\begin{cases} |E_1|_e = 1 + k_1(2sx + x) = 1 + k_1c_2 \\ |E_1|_d = 2xs + x = c_2 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} |D_1|_e = 2rx.k_1 = \iota k_1 = b_9 \\ |D_1|_d = 2rx\ .1 = \iota.1 = b_4 - 1 \end{cases}$

A equação 3.3.10 admite solução trivial para o par (E_1,D_1), pois nesse caso o termo constante se anula:

$$E_1cD_1c^{-1}E_1^{-1}D_1^{-1} = (w_2w_1)^s w_2c(w_2w_1)^r c^{-1}w_2^{-1}(w_2w_1)^{-s}(w_2w_1)^{-r} =$$

$$= (w_2w_1)^s w_2(w_1w_2)^r w_2^{-1}(w_2w_1)^{-s}(w_2w_1)^{-r} =$$

$$= (w_2w_1)^s(w_2w_1)^r(w_2w_1)^{-s}(w_2w_1)^{-r} = 1$$

Da condição A e B_2 segue que é possível encontrar $w = e^{u_1}d^{u_2}$ onde u_1 e u_2 são solução da equação

$$c_1 = 1 + k_1c_2 + 2u_1 - 2k_1u_2$$

Então a equação 3.3.10 para o par (E,D) obtido de (E_1,D_1) via w admite solução trivial e

$$\begin{cases} |E|_e = |E_1|_e + |wcw^{-1}c^{-1}|_e = 1 + k_1c_2 + 2u_1 - 2k_1u_2 = c_1 \\ |E|_d = |E_1|_d + |wcw^{-1}c^{-1}|_d = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |D|_e = b_3 \\ |D|_d = b_4 - 1 \end{cases}$$

Se (c_1, c_2, b_3, b_4-1) não satisfazem a condição I ou II, então satisfazem a condição III.

III $\quad c_1 - k_1c_2$ é ímpar $\quad$ e $\frac{l}{x}$ é ímpar

Onde $x = m.d.c.(l, c_2)$.

É suficiente provar para os pares (E_1, D_1) que são da forma $E_1 = ev^t$ e $D_1 = v^l$, onde $v = e^{k_1}d$.

Os valores (c_1, c_2, b_3, b_4-1) para o par (E_1, D_1) são:

$$(c_1, c_2, b_3, b_4-1) = (1 + tk_1, t, lk_1, l)$$

e satisfazem a condição III se $\frac{l}{x}$ é ímpar, onde $x = m.d.c.(l, t)$.

Se a equação 3.3.10 tiver solução para o par (E_1,D_1) então qualquer que seja (c_1,c_2,b_3,b_4-1) satisfazendo III, a equação 3.3.10 terá solução para o par (E,D),obtido de (E_1,D_1) via w , onde $w = e^{u_1}d^{u_2}$ tal que u_1 e u_2 são solução do sistema.

$$\begin{cases} c_1-k_1c_2 = 2u_1-2k_1u_2+1 \\ c_2 = t \end{cases}$$

Mostraremos agora que a equação 3.3.10 para o par (E_1,D_1) não tem solução.

A equação 3.3.10 para o par (E_1,D_1) tem a forma:

$$z_3ev^lcz_2c^{-1}v^{-l}e^{-1}[e,v^l]v^lz_3^{-1}v^{-l}z_2^{-1}$$

Seja $C = [e,v]$, e assim escrevmos $[e,v^l]$ na forma

$$[e,v^l] = CC_v\ldots C_{v^{l-1}} \text{ , onde } C_{v^i} = v^iCv^{-i}$$

Notemos que na expressão anterior aparece apenas um número ímpar de $C_{v^{\varepsilon x}}$, onde $\varepsilon \in \mathbb{Z}$ e $x = m.d.c.(l,c_2)$; isto porque $\frac{l}{x} = 2r+1$.

Por outro lado se z_2 ou z_3 são da forma $v^{\varepsilon x}C^t v^{-\varepsilon x}$

então no abelianizado, temos:

$$\text{i) } E_1 c z_2 c^{-1} E_1^{-1} = e v^{x(\frac{c_2}{x})} c v^{\varepsilon x} C^t v^{-\varepsilon x} c^{-1} v^{-x(\frac{c_2}{x})} e^{-1} =$$

$$= e v^{x(\frac{c_2}{x})} v^{\varepsilon x} e^{-1} C^{-t} e v^{-\varepsilon x} v^{-x(\frac{c_2}{x})} e^{-1} =$$

$$= C^{-t}_{v^{x(\frac{c_2}{x} + \varepsilon)}}$$

$$\text{ii) } D_1 z_3^{-1} D_1^{-1} = C^{-t}_{v^{t+\varepsilon x}} = C^{-t}_{v^{x(2r+1+\varepsilon)}}$$

Seja $\phi : \Pi_2^{ab}(T, T-e) \simeq \bigoplus_{\substack{v\in\mathbb{Z} \\ y\in\mathbb{Z}}} [C_{e^v v^y}] \longrightarrow \bigoplus_{\varepsilon\in\mathbb{Z}} [C_{v^{\varepsilon x}}]$, o

homomorfismo definido nos geradores por:

$$\phi(C_{e^v v^y}) = \begin{cases} 0 \text{ se } w\neq 0 \text{ ou } y\neq 0 \text{ módulo } x \\ C_{e^v v^y} \text{ se } w=0 \text{ e } y=0 \text{ módulo } x \end{cases}$$

Se existesse solução no abelianizado, existiria na imagem de ϕ. Mas na imagem de ϕ a soma dos expoentes $C_{v^{\varepsilon x}}$ nas variáveis é par, enquanto que na constante, $[e, v^t]$ é ímpar.

3.3.10.2 Supondo $k_2 = -1$, então a condição A

$$-2|z_2| - l(c_1 + k_1 c_2) = 0 \text{ é equivalente a}$$

$$\begin{cases} c_1 = -2\dfrac{|z_2|}{l} - k_1 t \\ c_2 = t \end{cases}$$

Consideremos as seguintes condições sobre $c_1, c_2, b_3, b_4 - 1$

B_1: $c_1 + k_1 c_2$ é par

B_2: $c_1 + k_1 c_2$ é ímpar e se $x = m.d.c(l, c_2)$

então: $\dfrac{l}{x}$ é par.

Onde , $l = m.d.c.(b_3, b_4 - 1)$ e $l(k_1, -1) = (b_3, b_4 - 1)$

A equação 3.3.10 para o caso $k_2 = -1$ só tem solução se os números $(c_1, c_2, b_3, b_4 - 1)$ satisfazem:

I condição A e condição B_1 , ou ,

II condição A e condição B_2.

Suponhamos que os números $c_1, c_2, b_3, b_4 - 1$, satisfazem a condiçãoo A e a condição B_1.

Consideremos

$$E_1 = (d^{-1} e^{k_1})^{-c_2} \qquad e \qquad D_1 = (d^{-1} e^{k_1})^{l},$$

onde $l = m.d.c.(b_3, b_4 - 1)$

Para esse par (E_1,D_1) a equação 3.3.10 admite solução trivial, pois o termo constante:

$$E_1cD_1c^{-1}E_1^{-1}D_1^{-1}= (d^{-1}e^{k_1})^{-c_2}(d^{-1}e^{k_1})^{l}(d^{-1}e^{k_1})^{c_2}(d^{-1}e^{k_1})^{-l}= 1$$

Da condição A e da condição B_1 segue que:

$$-\frac{2|z_2|}{l} = (c_1+k_1c_2) \text{ é par.}$$

Seja $w = e^{u_1}d^{u_2}$ onde u_1 e u_2 são solucção da equação:

$$c_1 = -k_1c_2 + 2(u_1+ k_1u_2)$$

Então a equação 3.3.10 para o par (E,D) obtido de (E_1,D_1) via w admite solução trivial e

$$\begin{cases} |E|_e = |E_1|_e+|wcw^{-1}c^{-1}|_e= -k_1c_2 + 2(k_1u_2+u_1) = c_1 \\ |E|_d = |E_1|_d+|wcw^{-1}c^{-1}|_d= c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |D|_e= b_3 \\ |D|_d= b_4-1 \end{cases}$$

Suponhamos que os números (c_1, c_2, b_3, b_4-1) satisfazem a condição A e a condição B_2.

Segue da condição B_2 que $\frac{l}{x}$ é da forma:

$$\frac{l}{x} = 2r \qquad e \qquad \frac{c_2}{x} = 2s + 1$$

Sejam $w_1 = e^{-1}v^{-x}$ e $w_2 = ev^{-x}$, onde $v = d^{-1}e^{k_1}$.

Consideremos $E_1 = (w_2w_1)^s w_2$ e $D_1 = (w_2w_1)^r$

Notemos que:

i) $cw_1c^{-1} = w_2$ e $cw_2c^{-1} = w_1$

ii) $\begin{cases} |E_1|_e = 1 - k_1(2sx + x) = 1 - k_1c_2 \\ |E_1|_d = 2xs + x = c_2 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} |D_1|_e = 2rx.k_1 = lk_1 = b_3 \\ |D_1|_d = 2rx\ .1 = l.1 = b_4-1 \end{cases}$

A equação 3.3.10 admite solução trivial para o par (E_1, D_1), pois nesse caso o termo constante se anula:

$E_1cD_1c^{-1}E_1^{-1}D_1^{-1} = 1$ (análogo ao caso $k_2 = 1$)

Da condição A e B_2 segue que é possível encontrar

$w = e^{u_1}d^{u_2}$, onde u_1 e u_2 são solução da equação

$$c_1 = 1 - k_1c_2 + 2u_1 + 2k_1u_2$$

Então a equação 3.3.10 para o par (E,D) obtido de (E_1,D_1) via w admite solução trivial e

$$\begin{cases} |E|_e = |E_1|_e + |wcw^{-1}c^{-1}|_e = 1 - k_1c_2 + 2u_1 + 2k_1u_2 = c_1 \\ |E|_d = |E_1|_d + |wcw^{-1}c^{-1}|_d = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |D|_e = b_3 \\ |D|_d = b_4 - 1 \end{cases}$$

Suponhamos que (c_1,c_2,b_3,b_4-1) não satisfazem a condição I ou a condição II

Então $c_1+k_1c_2$ é ímpar e $\frac{l}{x} = 2r+1$, onde

$x = m.d.c.(l,c_2)$.

Fazendo considerações análogas ao caso $k_2 = 1$ é suficiente mostrar que a equação 3.3.10 não admite solução para o par (E_1,D_1), onde $E_1 = ev^{-c_2}$ e $D_1 = v^l$,

$v = d^{-1}e^{k_1}$.

A equação para o par (E_1,D_1) é:

$$z_3 e v^{-c_2} c z_2 c^{-1} v^{c_2} e^{-1} [e,v^l] v^l z_3^{-1} v^{-l} z_2^{-1} = 1$$

Chamando de $C - [e,v]$ e construindo

$\phi: \bigoplus_{\substack{v\in\mathbb{Z}\\ y\in\mathbb{Z}}} [C_{e^v v^y}] \longrightarrow \bigoplus_{\varepsilon\in\mathbb{Z}} [C_{v^{\varepsilon x}}]$, de modo análogo a 3.3.10.1

segue que na imagem de ϕ a soma dos expoentes dos $C_{v^{\varepsilon x}}$

nas variáveis é par enquanto que na constante, $[e,v^l]$, é

ímpar.

3.3.10.3 Supondo $k_2 = 2$.

Da condição A : $-2|z_2| + l[2c_1 - k_1(c_2+1)] = 0$ segue que

se $c_2+1 = 2t$, então

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{|z_2|}{l} + k_1 t \\ c_2 = -1 + 2t \end{cases}$$

e se $c_2 = 2t$, então

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2|z_2|}{l} + k_1\right) + k_1 t \\ c_2 = 2t \end{cases}$$

Se a condição A é satisfeita para (c_1, c_2, b_3, b_4-1) e se c_2+1 é par, então, é possível encontrar um par (E,D) tal que a equação 3.3.10 tem solução e

$$\begin{cases} |E|_e = c_1 \\ |E|_d = c_2 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} |D|_e = b_3 \\ |D|_d = b_4-1 \end{cases}$$

Fazendo $c_2+1 = 2t$ e tomando $E_1 = v^t d^{-1}$, $D_1 = v^l$

onde $v = e^{k_1} d^2$, temos :

$$E_1 c D_1 c^{-1} E_1^{-1} D_1^{-1} = v^t d^{-1} c v^l c^{-1} d v^{-t} v^{-l}$$

$$= v^t d^{-1} (d v^l d^{-1}) d v^{-t} v^{-l} = 1$$

Seja (E,D), obtido de (E_1, D_1) através de $w = e^{u_1} d^{u_2}$, onde u_1 e u_2 é solução do sistema:

$$\begin{cases} c_1 = k_1 t + 2u_1 - k_1 u_2 \\ c_2 = 2t - 1 \end{cases}$$

O par (E,D) é tal que a equação 3.3.10 tem solução trivial e

$$\begin{cases} |E|_e = c_1 \\ |E|_d = c_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} |D|_e = b_3 \\ |D|_d = b_4-1 \end{cases}$$

Sejam (c_1, c_2, b_3, b_4-1) tal que a condição A é satisfeita e c_2, $\frac{l}{x}$ são pares $(x = m.d.c.(l, \frac{c_2}{2}))$.

Nessas condições é possível encontar um par (E,D) tal que a equação 3.3.10 tem solução e

$$\begin{cases} |E|_e = c_1 \\ |E|_d = c_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} |D|_e = b_3 \\ |D|_d = b_4-1 \end{cases}$$

Sejam $w_1 = (e^{k_1}d^2)^x$ e $w_2 = (de^{k_1}d)^x$.

Notemos que $cw_1c^{-1} = w_2$ e $cw_2c^{-1} = w_1$.

Fazendo $c_2 = 2t$, $\frac{l}{x} = 2r$, $\frac{t}{x} = \frac{c_2}{2x} = 2s + 1$ e

tomando $E_1 = (w_2w_1)^s w_2$ e $D_1 = (w_2w_1)^r$, temos

$$E_1cD_1c^{-1}E_1^{-1}D_1^{-1} = 1$$

$$\begin{cases} |E_1|_e = k_1x(2s+1) = k_1t \\ |E_1|_d = 2x(2s+1) = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |D_1|_e = b_3 \\ |D_1|_d = b_4-1 \end{cases}$$

Seja (E,D) obtido de (E_1,D_1) via $w = e^{u_1}d^{u_2}$,

onde $2u_1-k_1u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2|z_2|}{l}+k_1\right)$.

Então a equação 3.3.10 para o par (E,D) admite solução trivial e

$$\begin{cases} |E|_e = |E_1|_e + |wcw^{-1}c^{-1}|_e = |E_1|_e + 2u_1-k_1u_2 = c_1 \\ |E|_d = |E_1|_d + |wcw^{-1}c^{-1}|_d = c_2 \end{cases}$$

Se a condição A está satisfeita ,

$c_2 = 2t$ e $\frac{l}{x} = 2r+1$, onde $x = m.d.c.(l,\frac{c_2}{2})$

então a equação 3.3.10 não tem solução.

É suficiente mostrar que para $E_1 = dv^ld^{-1}$ e $D_1 = v^l$, onde $v = e^{k_1}d^2$, a equação 3.3.10 não tem solução.

Nesse caso a equação 3.3.10 é:

$$z_3dv^ld^{-1}cz_2c^{-1}dv^{-l}d^{-1}[d,v^l]v^lz_3^{-1}v^{-l}z_2^{-1} = 1$$

O termo constante pode ser escrito na forma:

$$[d,v^l] = CC_{v^1}C_{v^2}\ldots C_{v^{l-1}} \text{ ,onde } C = [d,v] = [d,e^{k_1}]$$

Por outro lado:

$$C = [d,e^{k_1}] = B^{-1}B^{-1}_{e^1}\ldots B^{-1}_{e^{k_1-1}} \quad \text{se } k_1>0 \quad \text{e}$$

$$C = [d,e^{k_1}] = B_{e^{-1}}B_{e^{-2}}\ldots B_{e^{k_1}} \quad \text{se } k_1<0, \text{ onde}$$

$$B = [e,d]$$

Assim, ao expressar o termo $[d,v^l]$ em termos de $B_{e^xd^y}$ notamos que o expoente y será sempre par.

Portanto, existindo solução no abelianizado, os expoentes de d nos índices de B das incógnitas,serão par.

No abelianizado vale:

$$B_{e^xd^{2y}} = B_{e^{x-k_1y}(e^{k_1}d^2)^y} = B_{e^{x-k_1y}v^y} \quad ,$$

ou seja, $$\bigoplus_{\substack{x\in\mathbb{Z}\\ y\in\mathbb{Z}}} [B_{e^xd^{2y}}] \simeq \bigoplus_{\substack{t_1\in\mathbb{Z}\\ t_2\in\mathbb{Z}}} [B_{e^{t_1}v^{t_2}}]$$

Por outro lado, se z_2 ou z_9 são da forma $z_2 = B^{t_1}_{e^sv^{\varepsilon x}}$,

$x = \text{m.d.c.}(l,\frac{c_2}{2})$, então

i) $$dv^{\frac{t}{x}.x}d^{-1}cz_2c^{-1}dv^{-(\frac{t}{x})x}d^{-1} = B^{-t_1}_{e^{-s+k_1+1}v^{(\frac{t}{x}+\varepsilon)x}}$$

ii) $$z_2^{-1} = B^{-t_1}_{e^sv^{\varepsilon x}}$$

iii) $v^{l}z_{g}^{-1}v^{-l} = B^{-t_1}_{e^{s}v^{\varepsilon x+l}} = B^{-t}_{e^{s}v^{(\varepsilon+2r+1)x}}$

Seja $\phi: \bigoplus_{\substack{t_1\in\mathbb{Z}\\ t_2\in\mathbb{Z}}} [B_{e^{t_1}v^{t_2}}] \longrightarrow \bigoplus_{\substack{u_1\in\mathbb{Z}\\ \varepsilon\in\mathbb{Z}}} [B_{e^{u_1}v^{\varepsilon x}}]$, o homomorfismo definido nos geradores, por

$$\phi(B_{e^{t_1}v^{t_2}}) = \begin{cases} 0 & \text{se } t_2 \not\equiv 0 \text{ módulo } x \\ B_{e^{t_1}v^{t_2}} & \text{se } t_2 \equiv 0 \text{ módulo } x \end{cases}$$

Se existisse solução no abelianizado, existiria na imagem de ϕ. Mas na imagem de ϕ, a soma dos expoentes de B das incógnitas será par, enquanto que na constante será ímpar: na expressão

$[d,v^{l}] = CC_{v^{i}}\ldots C_{v^{l-1}}$, aparece apenas um número ímpar de v^{i}, onde $i \equiv 0$ módulo x.

3.3.10.4 Supondo $k_2 = -2$.

Da condição A : $-2|z_2| - l[2c_1+k_1(c_2+1)] = 0$ segue que se $c_2+1 = -2t$, então

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{-|z_2|}{l} + k_1 t \\ c_2 = -1 - 2t \end{cases}$$

e se $c_2 = -2t$, então

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{2|z_2|}{l} - k_1\right) + k_1 t \\ c_2 = -2t \end{cases}$$

Se a condição A é satisfeita para $(c_1, c_2, b_3, b_4 - 1)$ e se $c_2 + 1$ é par, então, é possível encontrar um par (E,D) tal que a equação 3.3.10 tem solução e

$$\begin{cases} |E|_e = c_1 \\ |E|_d = c_2 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} |D|_e = b_3 \\ |D|_d = b_4 - 1 \end{cases}$$

Fazendo $c_2 + 1 = -2t$ e tomando $E_1 = v^t d^{-1}$, $D_1 = v^l$

onde $v = d^{-2} e^{k_1}$, temos :

$$E_1 c D_1 c^{-1} E_1^{-1} D_1^{-1} = v^t d^{-1} c v^l c^{-1} d v^{-t} v^{-l}$$

$$= v^t d^{-1} (d v^l d^{-1}) d v^{-t} v^{-l} = 1$$

Seja (E,D), obtido de (E_1, D_1) através de $w = e^{u_1} d^{u_2}$, onde u_1 e u_2 é solução do sistema:

$$\begin{cases} c_1 = k_1 t + 2u_1 + k_1 u_2 \\ c_2 = -2t - 1 \end{cases}$$

O par (E,D) é tal que a equação 3.3.10 tem solução

trivial e $\begin{cases} |E|_e = c_1 \\ |E|_d = c_2 \end{cases}$ $\begin{cases} |D|_e = b_3 \\ |D|_d = b_4 - 1 \end{cases}$

Sejam $(c_1, c_2, b_3, b_4 - 1)$ tal que a condição A é satisfeita e c_2 , $\frac{l}{x}$ são pares $(x = \text{m.d.c.}(l, \frac{c_2}{2}))$.

Nessas condições é possível encontar um par (E,D) tal que a equação 3.3.10 tem solução e

$$\begin{cases} |E|_e = c_1 \\ |E|_d = c_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} |D|_e = b_3 \\ |D|_d = b_4 - 1 \end{cases}$$

Sejam $w_1 = (d^{-2} e^{k_1})^x$ e $w_2 = (d^{-1} e^{k_1} d^{-1})^x$.

Notemos que $c w_1 c^{-1} = w_2$ e $c w_2 c^{-1} = w_1$.

Fazendo $c_2 = -2t$, $\frac{l}{x} = 2r$, $\frac{-t}{x} = \frac{c_2}{2x} = 2s + 1$ e

tomando $E_1 = (w_2 w_1)^s w_2$ e $D_1 = (w_2 w_1)^r$, temos

$$E_1 c D_1 c^{-1} E_1^{-1} D_1^{-1} = 1$$

$$\begin{cases} |E_1|_e = k_1 x(2s+1) = k_1 t \\ |E_1|_d = 2x(2s+1) = c_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} |D_1|_e = b_3 \\ |D_1|_d = b_4 - 1 \end{cases}$$

Seja (E,D) obtido de (E_1,D_1) via $w = e^{u_1}d^{u_2}$,

onde $2u_1+k_1u_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{2|z_2|}{l}+k_1\right)$.

Então a equação 3.3.10 para o par (E,D) admite solução trivial e

$$\begin{cases} |E|_e = |E_1|_e + |wcw^{-1}c^{-1}|_e = |E_1|_e + 2u_1+k_1u_2 = c_1 \\ |E|_d = |E_1|_d + |wcw^{-1}c^{-1}|_d = c_2 \end{cases}$$

Se a condição A está satisfeita ,

$c_2 = -2t$ e $\frac{l}{x} = 2r+1$, onde $x = m.d.c.(l,\frac{c_2}{2})$

então a equação 3.3.10 não tem solução.

É suficiente considerar $E_1 = dv^td^{-1}$ e $D_1 = v^l$, onde $v = d^{-2}e^{k_1}$.

A equação 3.3.10 para o par (E_1,D_1) se reduz a

$$z_3dv^td^{-1}cz_2c^{-1}dv^{-t}d^{-1}[d,v^l]v^lz_3^{-1}v^{-l}z_2^{-1} = 1$$

O resultado segue de modo análogo ao caso $k_2 = 2$.

Quadro resumo:

caso: $A = \begin{pmatrix} -1 & a_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, onde

$a_3(b_4-1) = 2b_3$.

equação a ser resolvida:

$$z_3 Ecz_2c^{-1}E^{-1}E(cDc^{-1}D^{-1})E^{-1}[E,D]Dz_3^{-1}D^{-1}z_2^{-1} = 1$$

Seja $l = m.d.c.(b_3,b_4-1)$ e k_1, k_2 primos entre si, tais que: $l(k_1,k_2) = (b_3,b_4-1)$

possíveis valores de k_2	condição A	condição necessária e suficiente: a) ou b)
1	$-2\|z_2\|+l(c_1-k_1c_2)=0$	a) $c_1-k_1c_2$ par b) $c_1-k_1c_2$ ímpar e $\frac{l}{x} = 2r$, onde $x = m.d.c.(l,c_2)$
-1	$-2\|z_2\|-l(c_1+k_1c_2)=0$	a) $c_1+k_1c_2$ par b) $c_1+k_1c_2$ ímpar e $\frac{l}{x} = 2r$, onde $x = m.d.c.(l,c_2)$
2	$-2\|z_2\|+l[2c_1-k_1(c_2+1)]=0$	a) c_2+1 par b) $c_2 = 2t$ e $\frac{l}{x} = 2r$, onde $x = m.d.c.(l,t)$
-2	$-2\|z_2\|-l[2c_1+k_1(c_2+1)]=0$	a) c_2+1 par b) $c_2 = -2t$ e $\frac{l}{x} = 2r$, onde $x = m.d.c.(l,t)$

3.3.11 Analisando o caso $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$.

A equação a ser resolvida é:

$$z_3 E c z_2 c^{-1} E^{-1} E c D c^{-1} D E^{-1} [E, D^{-1}] D^{-1} z_3^{-1} z_2 D = 1$$

Aplicando a função $|\ |$, obtemos a condição A :

$$2|z_2| + |cDc^{-1}D| + |[E, D^{-1}]| = 0$$

Tomando $D = e^{b_3} d^{b_4 - 1}$, a condição A é :

$$2|z_2| + b_3(b_4 - 1) + c_2 b_3 - c_1(b_4 - 1) = 0$$

3.3.11.1 A seguir, alguns exemplos de pares (E_1, D_1) tal que o termo constante da equação se anula.

a) Se $|E_1|_e = 0$ e $|E_1|_d = 0$, substituindo esses valores na condição A , segue que ou b_3 é par ou $b_4 - 1$ é par

Tomando $E_1 = e^0 d^0$

$$D_1 = e^{b_3/2}\, d^{b_4 - 1}\, e^{b_3/2} \quad \text{se } b_3 \text{ é par}$$

ou

$$E_1 = e^0 d^0$$

$$D_1 = d^{(b_4 - 1)/2}\, e^{b_3}\, d^{(b_4 - 1)/2} \quad \text{se } b_4 - 1 \text{ é par}$$

Para esses pares temos:

$$E_1 c D_1 c^{-1} E_1^{-1} D_1 = 1.$$

b) Sejam l = m.d.c.$(b_3, b_4 - 1)$ e (k_1, k_2) primos entre si tais que $l(k_1, k_2) = (b_3, b_4 - 1)$.

Se $E_1 = e^{k_1}$ e $D_1 = (e^{k_1} d^{k_2})^l$, então

$$E_1 c D_1 c^{-1} E_1^{-1} D_1 = e^{k_1} (e^{-k_1} d^{-k_2})^l e^{-k_1} (e^{k_1} d^{k_2}) = 1$$

c) Com as notações de b),

se $E_1 = d^{k_2}$ e $D_1 = (d^{k_2} e^{k_1})^l$,

então $E_1 c D_1 c^{-1} E_1^{-1} D_1 = 1.$

d) Suponhamos que b_3, $b_4 - 1$ e k_1 sejam pares.

Se $E_1 = e$ e $D_1 = e w^r e^{-1} w^r$, onde

$w = e^{k_1/2} d^{k_2} e^{k_1/2}$ e $l = 2r$

Então:

$$E_1 c D_1 c^{-1} E^{-1} D_1 = e\ c\ e\ w^r e^{-1} w^r c^{-1} e^{-1} e\ w^r e^{-1} w^r = 1$$

e) Suponha que b_3, b_4-1 , k_2 sejam pares.

Se $E_1 = d$ e $D_1 = dw^r d^{-1} w^r$, onde

$w = d^{k_2/2} e^{k_1} d^{k_2/2}$ e $l = 2r$.

Então:

$$E_1 c D_1 c^{-1} E_1^{-1} D_1 = 1.$$

3.3.11.2 Se $w = e^x d^y$, então o par (E,D) obtido de (E_1,D_1) via w é tal que:

$$\begin{cases} |E|_e = |E_1|_e + |wcw^{-1}c^{-1}|_e = |E_1|_e + 2x \\ |E|_d = |E_1|_d + |wcw^{-1}c^{-1}|_d = |E_1|_d + 2y \end{cases}$$

A tabela seguinte revela os possíveis valores de b_3, b_4-1, c_1, c_2 módulo 2, para que a condição A seja satisfeita.

Como mostram as duas últimas colunas, os exemplos anteriores são suficientes para, a partir deles, obtermos a solução da equação 3.3.11 .

c_2	b_3	b_4-1	c_1	a partir do E_1 dado em 3.3.11.1	Seja (E,D) obtido de (E_1,D_1) via $w = e^x d^y$ onde x e y satisfazem:
0	0	0	0	a)	$\begin{cases} c_1 = 2x \\ c_2 = 2y \end{cases}$
0	0	0	1	d) se k_1 é par	$\begin{cases} c_1 = 1 + 2x \\ c_2 = 2y \end{cases}$
				b) se k_1 é ímpar	$\begin{cases} c_1 = k_1 + 2x \\ c_2 = 2y \end{cases}$
0	0	1	0	a)	$\begin{cases} c_1 = 2x \\ c_2 = 2y \end{cases}$
0	1	0	0	a)	$\begin{cases} c_1 = 2x \\ c_2 = 2y \end{cases}$
0	1	0	1	b)	$\begin{cases} c_1 = 2x+k_1 \\ c_2 = 2y \end{cases}$
0	1	1	1	b)	$\begin{cases} c_1 = 2x+k_1 \\ c_2 = 2y \end{cases}$
1	0	0	0	e) se k_2 par	$\begin{cases} c_1 = 2x \\ c_2 = 1 + 2y \end{cases}$
				c) se k_2 ímpar	$\begin{cases} c_1 = 2x \\ c_2 = k_2 + 2y \end{cases}$

c_2	b_3	b_4-1	c_1	a partir do E_1 dado em 3.3.11.1	Seja (E_1,D_1) obtido de (E_1,D_1) via $w = e^x d^y$ onde x e y satisfazem:
1	0	0	1	A equação 3.3.11 não tem solução ver 3.3.11.3	
1	0	1	0	c)	$\begin{cases} c_1 = 2x \\ c_2 = k_2 + 2y \end{cases}$
1	1	1	0	c)	$\begin{cases} c_1 = 2x \\ c_2 = k_2 + 2y \end{cases}$

3.3.11.3 a) Se $|E|_e \equiv |E|_d \equiv 1$ módulo 2 e $b_3 \equiv b_4-1 \equiv 0$ módulo 2 então a equação 3.3.11 não tem solução.

Supondo inicialmente k_1 impar.

Seja $v = e^{k_1}d^{k_2}$, então $cvc^{-1} = e^{-k_1}d^{-k_2} = e^{-k_1}v^{-1}e^{k_1}$

É suficiente mostrar que a equação 3.3.11 não tem solução para $D_1 = v^l$ e $E_1 = de^{k_1}$ no abelianizado.

O termo constante da equação 3.3.11 para o par (E_1,D_1)

é: $E_1cD_1c^{-1}E_1^{-1}D_1 = de^{k_1}(e^{-k_1}v^{-1}e^{k_1})^l\, e^{-k_1}d^{-1}v^l = [d,v^{-l}]$

Temos as seguintes relações:

I $\quad [d,v^{l}] = CC_{v^{-1}}C_{v^{-2}}\ldots C_{v^{-l+1}}$, onde $C = [d,v^{-1}]$

e $\quad C_{v^{-i}} = v^{-i}Cv^{i}$

II $\quad [d,v^{-1}] = d^{-k_2}[d,e^{-k_1}]d^{k_2}$

III $\quad$ Se $k_1>0$, então $[d,e^{-k_1}] = B_{e^{-1}}B_{e^{-2}}\ldots B_{e^{-k_1}}$ e

se $k_1<0$, então $[d,e^{-k_1}] = B^{-1}B^{-1}_{e^{1}}\ldots B^{-1}_{e^{-k_1-1}}$,

onde $B = [e,d]$.

Usando as relações II e III em I, no abelhanizado, obtemos :

Se $k_1>0$, então:

$$[d,v^{-l}] = (B_{e^{-1}d^{-k_2}}.B_{e^{-2}d^{-k_2}}\ldots B_{e^{-k_1}d^{-2k_2}})(B_{e^{-1-k_1}d^{-2k_2}}\ldots B_{e^{-2k_1}d^{-2k_2}})$$

$$\ldots (B_{e^{-1-(l-1)k_1}d^{-lk_2}}\ldots B_{e^{-k_1-(l-1)k_1}d^{-lk_2}})$$

Se $k_1<0$, então

$$[d,v^{-l}]=(B^{-1}_{e^{o}d^{-k_2}}.B^{-1}_{e^{-1}d^{-k_2}}\ldots B^{-1}_{e^{-k_1-1}d^{-k_2}}).(B^{-1}_{e^{-k_1}d^{-2k_2}}\ldots B^{-1}_{e^{-2k_1-1}d^{-2k_2}})$$

$$\ldots(B^{-1}_{e^{-(l-1)k_1}d^{-lk_2}}\ldots B^{-1}_{e^{-k_1-1-(l-1)k_1}d^{-lk_2}}).$$

Portanto o termo constante $[d,v^{-l}]$ contém k_1 geradores da forma $B^{\eta}_{e^y d^{\varepsilon l k_2}}$, onde $y,\varepsilon \in \mathbb{Z}$ e $\eta = 1$ ou -1 conforme o sinal de k_1.

Suponhamos que z_2 ou z_3 seja da forma $B^{t}_{e^y d^{\varepsilon l k_2}}$ então, no abelianizado:

$$E_1 c z_2 c^{-1} E_1^{-1} = d e^{k_1} c B^{t}_{e^y d^{\varepsilon l k_2}} c^{-1} e^{-k_1} d^{-1} = B^{t}_{e^{-y+1-k_1} d^{-\varepsilon l k_2}}$$

$$D_1^{-1} z_3^{-1} D_1 = v^{-l} B^{-t}_{e^y d^{\varepsilon l k_2}} v^{l} = B^{-t}_{e^{y-lk_1} d^{(\varepsilon-1)lk_2}}$$

$$D_1^{-1} z_2 D_1 = B^{t}_{e^{y-lk_1} d^{(\varepsilon-lk_1)lk_2}}$$

Seja $\phi: \bigoplus_{\substack{x\in\mathbb{Z}\\ y\in\mathbb{Z}}} [B_{e^x d^y}] \longrightarrow \bigoplus_{\substack{u\in\mathbb{Z}\\ \varepsilon\in\mathbb{Z}}} [B_{e^u d^{\varepsilon l k_2}}]$

o homomorfismo definido nos geradores por:

$$\phi(B_{e^x d^y}) = \begin{cases} 0 \text{ se } y \not\equiv 0 \text{ módulo } lk_2 \\ B_{e^x d^y} \text{ se } y \equiv 0 \text{ módulo } lk_2 \end{cases}$$

Se existisse solução no abelianizado, existiria solução na imagem de ϕ. Mas ma imagem de ϕ a soma dos expoentes de $B_{e^u d^{\varepsilon l k_2}}$ na constante é ímpar enquanto que nas incógnitas será par.

Por sua vez , se k_1 é par, então k_2 é ímpar. Neste caso consideremos , $E_1 = ed^{k_2}$ e $D_1 = v^l$, onde $v = d^{k_2}e^{k_1}$.

O termo constante $E_1 c D_1 c^{-1} E_1^{-1} D_1 = [e, v^{-l}]$.

Temos as seguintes relações:

I $\quad [e,v^{-l}] = C\, C_{v^{-1}} \ldots C_{v^{-l+1}}$, onde $c = [e,v^{-1}]$

II $\quad [e,v^{-l}] = e^{-k_1}[e,d^{-k_2}]e^{k_1}$

III $\quad$ Se $k_2>0$, então $[e,d^{-k_2}] = B^{-1}_{d^{-1}} B^{-1}_{d^{-2}} \ldots B^{-1}_{d^{-k_2}}$

Se $k_2<0$, então $[e,d^{-k_2}] = BB_{d^{1}} \ldots B_{d^{-k_2-1}}$

Usando as relações II e III em I , no abelianizado, obtemos :

se $k_2>0$

$$[e,v^l] = (B^{-1}_{e^{-k_1} d^{-1}} \ldots B^{-1}_{e^{-k_1} d^{-k_2}}).(B^{-1}_{e^{-2k_1} d^{-1-k_2}} \ldots B^{-1}_{e^{-2k_1} d^{-2k_2}}) \ldots$$

$$\ldots (B_{e^{-lk_1} d^{-1-(l-1)k_2}} \ldots B_{e^{-lk_1} d^{-k_2-(l-1)k_2}})$$

se $k_2<0$

$$[e,v^{-l}] = (B_{e^{-k_1}d^0} B_{e^{-k_1}d} \dots B_{e^{-k_1}d^{-k_2-1}}).(B_{e^{-2k_1}d^{-k_2}} \dots B_{e^{-2k_1}d^{-2k_2-1}})$$

$$\dots (B_{e^{-lk_1}d^{-(l-1)k_2}} \dots B_{e^{-lk_1}d^{-k_2-1-(l-1)k_2}})$$

Portanto o termo constante $[d,v^{-l}]$ contém k_2 geradores da forma $B^{\eta}_{e^{\varepsilon lk_1}d^y}$, onde $y,\varepsilon \in \mathbb{Z}$ e $\eta = 1$ ou -1 conforme o sinal de k_2.

Por outro lado, se z_2 ou z_9 for da forma $B^{t}_{e^{\varepsilon lk_1}d^y}$, então no abelianizado:

$$E_1 c z_2 c^{-1} E_1^{-1} = B^{t}_{e^{-\varepsilon lk_1}d^{-y-1-k_2}}$$

$$D^{-1} z_9^{-1} D = B^{t}_{e^{(\varepsilon-1)lk_1}d^{y-lk_2}}$$

$$D^{-1} z_2 D = B^{t}_{e^{(\varepsilon-1)lk_1}d^{y-lk_2}}$$

Considerando,

$$\phi : \bigoplus_{\substack{x\in\mathbb{Z}\\ y\in\mathbb{Z}}} [B_{e^x d^y}] \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\varepsilon\in\mathbb{Z}\\ y\in\mathbb{Z}}} [B_{e^{\varepsilon l k_1} d^y}]$$, definido nos geradores por:

$$\phi(B_{e^x d^y}) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \not\equiv 0 \text{ módulo } lk_1 \\ B_{e^x d^y} \text{ se } x \equiv 0 \text{ módulo } lk_1 \end{cases}$$

segue de modo análogo ao que foi feito no caso k_1 ímpar, que para o par (E_1,D_1) não existe solução da equação 3.3.11 no abelianizado .

3.3.11.4 Quadro Resumo

caso $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$

equação a ser resolvida :

$$z_3 E c z_2 c^{-1} E^{-1} E (c D c^{-1} D) E^{-1} [E, D^{-1}] D^{-1} z_3^{-1} z_2 D = 1$$

Condição necessária e suficiente:

condição A e c_1 ou c_2 par

Solução trivial para o par (E,D) obtido de $(E_1 D_1)$ conforme tabela 3.3.11.2.

BIBLIOGRAFIA

Ba77 - BAUES,H.J. - Obstruction Theory. Lecture Notes in Mathematics, nº 628, Springer Verlag, 1977.

Br71 - BROWN,R. - The Lefschetz Fixed Point Theorem . Scott Foresman, 1971.

Do80 - DOLD, A. - Lectures on Algebraic Topology. Springer Verlag 1980.

Fa65 - FADELL, E. - Generalized Normal Bundles For Locally-Flat Imbeddings. Trans. Amer. Math. Soc. 114, págs.488-513, 1965.

Fa80 - FADELL, E. ; HUSSEINI, S. - A Fixed Point Theory for Fiber- Preserving Maps. Lecture Notes in Mathematics , nº 886, págs. 49-72, Springer-Verlag, 1980.

Fa81 - FADELL, E. ; HUSSEINI, S. - Fixed Point Theory for non Simply Connected Manifolds . Topology vol 20, págs. 53-92, 1981.

Fo53 - FOX, R. H. - Free Differential Calculus I - Derivation in Free Group Ring . Annals of Mathematics, Vol. 57 (3), may 1953.

Go87 - GONÇALVES, D. L. - Fixed Point of S^1-Fibrations. Pacific Journal of Mathematics. Vol 129 (2), 1987.

Hi40 - HIGMAN, G. - The Units of Group Rings, Proc. London Mathematical Society. 2,46, 1940.

Jo76 - JOHNSON, D. L. - Presentations of Groups. London Mathematical Society, Lecture Notes Series 22. Cambridge University Press, 1976.

Hi40 - HIGMAN, G. - The Units of Group Rings . Proc. London Math. Soc. 2(46). 1940.

Hi71 - HILTON, P. J.; STAMMBACH, U.S. - A Course im Homological Algebra. Springer-Verlag, 1971.

Ly77 - LYNDON, C. R.; SCHUPP, P. E. - Combinatorial Group Theory. A Series of Modern Surveys in Mathematics 89. Springer-Verlag, 1977.

Ma67 - MASSEY, W.S. - Algebraic Topology: An Introduction Graduate Texts in Mathematics 56. Springer-Verlag, 1967.

Wh78 - WHITEHEAD, G. W. - Elements of Homotopy Theory, Graduate text in Mathematics, 61. Springer-Verlag, 1978.