I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

SOBRE ALGUNS INVARIANTES DIFERENCIÁVEIS DE GERMES DE FUNÇÕES C^{∞}

Wilson Mauricio Tadini

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

SOBRE ALGUNS INVARIANTES DIFERENCIÁVEIS

DE GERMES DE FUNÇÕES C^{∞}

Wilson Mauricio Tadini

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do Título de Doutor em Ciências (Matemática)

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel

SÃO CARLOS - SP

1980

Aos meus pais.

À minha esposa Nilce e,

aos meus filhos Renan e

Graziela.

ON SOME DIFFERENTIABLE INVARIANTS OF GERMS OF SMOOTH FUNCTIONS

Wilson Mauricio Tadini

Adviser: Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel

ABSTRACT

The relation between the determinacy order of a given germ and the length of its Boardman sequence was one of the main problems which was considered in [14]. We have concluded later that better results can be obtained if a stronger formulation for finite determinacy is used.

This suggested us the definition of (r,k)-determination and its further characterization, in Chapter II. We have also studied in the same Chapter, the stability under small perturbations of this new concept and we registered several mistakes which were found in the related literature.

The central problem in Chapter III is the following: "Given a germ $f : K^n,0 \to K,0$ when is it possible to find coordinate systems in such a way that f has the form:

$$f(x,y) = g(x) + h(y)\ ,\quad x = (x_1,\ldots,x_r)$$

and $\qquad y = (x_{r+1},\ldots,x_n)$?"

Several differentiable invariants are also suggested and by using them, it is possible to give necessary and sufficient conditions to some classes of germs. These same invariants are used in Chapter IV to prove that: "Given a germ $f : K^n,0 \to K,0$,

with $f \in m_n^2$ and $m_n^\alpha \subset m_n^\beta \langle \partial f \rangle$, which satisfies condition D_p, then the $(\alpha-\beta+1)$-th index of the Boardman sequence of f vanishes."

It is also given a conjecture which easily implies that for a (r,k)-determined germ f, the $(k-r+1)$-th index of its Boardman sequence is zero.

In Chapter V, it is given a class of polynomium in two variables, whose Boardman sequence-length is lower than the given degree. It is also given a class of polynomium in n-variables and a function $h : N \to N$ such that each polynomium f in that class satisfies the following inequality:

$$|B_f| \leq h\ (\deg\ f).$$

Meus sinceros agradecimentos,

- ao Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel, pela orientação;

- aos meus familiares, pelo apoio humano e moral;

- aos colegas do ICMSC-USP pelo incentivo;

- a Maria Helena Derigi, pelo excelente trabalho de datilografia e,

- a Deus, por tudo.

Este trabalho foi patrocinado parcialmente pelas Instituições: CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Em Loibel e Tadini ([14]) um dos problemas atacados foi a relação entre o grau de determinação de um germe, e o comprimento do seu símbolo de Boardman.

Posteriormente, constatamos que uma formulação mais forte de determinação finita, permitia obter resultados melhores. Isto nos levou ao conceito e à caracterização da (r,k)-determinação, através do Capítulo II. Neste mesmo capítulo, nos preocupamos também com a estabilidade do referido conceito em relação a pequenas perturbações, registrando vários erros da literatura, relacionados com o tipo de problema atacado.

No Capítulo III, nos preocupamos com o problema de quando para um dado germe $f : K^n,0 \to K,0$ $(K = R$ ou $C)$, é possível encontrar um sistema de coordenadas no qual f se expressa na forma

$$f(x,y) = g(x) + h(y), \quad x = (x_1,\ldots,x_r), \ y = (x_{r+1},\ldots,x_n)$$

Vários invariantes diferenciáveis se sugeriram, através dos quais foi possível dar condições necessárias e suficientes para certas classes de germes.

No Capítulo IV, provamos utilizando alguns dos invariantes diferenciáveis do Capítulo III, que dado um germe $f:K^n,0\to K,0$ que satisfaz a condição D_p, $f \in m_n^2$, e $m_n^\alpha \subset m_n^\beta\langle\partial f\rangle$, o índice de Boardman de f de posição $\alpha-\beta+1$ é nulo. Registramos também uma conjectura, da qual segue que um germe f (r,k)-determinado, com $r \geq 1$, tem o índice de Boardman de posição $k-r+1$ nulo.

No Capítulo V, exibimos uma classe de polinômios em duas variáveis, para a qual o símbolo de Boardman é menor que o grau do polinômio dado. Exibimos também uma classe de polinômios em n variáveis e uma função $h : N \to N$, tal que, para cada polinômio f da mesma, vale a desigualdade $|B_f| \leq h$ (grau f).

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

§ 1. *Germes e Equivalências*

Sejam $C_o(R^n)$ a R-álgebra dos germes de aplicações C^∞ $f : R^n,0 \to R$ e $C_o(C^n)$ a C-álgebra dos germes de aplicações holomorfas $f : C^n,0 \to C$. Para ambos os casos, denotaremos por m_n o único ideal maximal e $m_n^\alpha = m_n \ldots m_n$ (α-vezes).

Considerando $K = R$ ou C, $x_1, \ldots, x_n$ um sistema de coordenadas nas vizinhanças de $0 \in K^n$ e $f \in C_o(K^n)$, denotaremos por $<\partial f>$, o ideal gerado por $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f$, com coeficientes em $C_o(K^n)$, onde $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Dado $f \in C_o(K^n)$, a sua *álgebra local* é definida como sendo o quociente $Q(f) = \frac{C_o(K^n)}{<\partial f>}$, onde denotaremos por $\mu(f)$ a sua dimensão como K-espaço vetorial.

Seja R (resp. $\tilde{R}$) o grupo dos germes de difeomorfismos C^∞ $\varphi : R^n,0 \to R^n,0$ (resp. o grupo dos germes de aplicações bi-holomorfas $\varphi : C^n,0 \to C^n,0$).

Dois germes $f,g \in C_o(R^n)$ (resp. $C_o(C^n)$), são ditos *equivalentes*, se existir $\varphi \in R$ (resp. $\psi \in \tilde{R}$) tal que $f \circ \varphi = g$ (resp. $f \circ \psi = g$).

Dados I e J, ideais de $C_o(K^n)$, diremos que eles são *equivalentes*, se existir um isomorfismo de K-álgebras $\lambda : C_o(K^n) \to C_o(K^n)$, tal que, $\lambda(I) = J$.

§ 2. *Determinação Finita*

Um germe $f \in C_o(R^n)$ é dito *k-determinado*, onde k é um inteiro positivo, se para todo $g \in C_o(R^n)$ com $j^k f(0)=j^k g(0)$, existir $\varphi \in R$, tal que, $f \circ \varphi = g$. Diremos também que f é *finitamente determinado*, se para algum inteiro positivo k, for k-determinado. Análogos conceitos são dados para o caso C.

Se f for k-determinado, diremos que k é um grau de determinação de f.

Em Mather, ([17]), temos o:

2.1. <u>TEOREMA</u>: Seja $f \in C_o(K^n)$.

Então, f é finitamente determinado, se e somente se, $\mu(f) < \infty$.

Salientamos que tal teorema em si, não determina um grau de determinação para f. Nesta linha, temos o:

2.2. <u>TEOREMA</u> ([17]): Seja $f \in C_o(K^n)$.

Se f é k-determinado, então

$m_n^{k+1} \subset m_n<\partial f>$.

A recíproca deste teorema é falsa, como podemos observar através do exemplo $f = x^3 + y^3$ em $C_o(K^2)$. Neste caso temos $m_2^3 \subset m_2<x^2,y^2>$, com f 3-determinado mas não 2-determinado.

Para uma recíproca, temos o:

2.3. <u>TEOREMA</u> ([2]): Seja $f \in C_o(K^n)$.

Se $m_n^{k+1} \subset m_n^2<\partial f>$, então f é k-determinado.

Ainda para uma recíproca, Wasserman [25] provou o

2.4. TEOREMA: Seja $f \in C_o(R^n)$.

Se $m_n^k \subset m_n\langle\partial f\rangle$, então f é k-determinado.

Como podemos observar, as hipóteses de (2.4) implicam nas hipóteses de (2.3). Por outro lado, podemos ter $m_n^{k+1} \subset$ $\subset m_n^2\langle\partial f\rangle$, sem termos $m_n^k \subset m_n\langle\partial f\rangle$, como mostra o exemplo $f = x^4 + y^5$. Neste caso temos $m_2^6 \subset m_2^2\langle x^3, y^4\rangle$, com $m_2^5 \not\subset$ $\not\subset m_2\langle x^3, y^4\rangle$ pois, $x^2y^3 \not\in \langle x^3, y^4\rangle$.

Para encerrar o parágrafo, registremos o bonito resultado demonstrado por P. Stefan ([21]), dado pelo

2.5. TEOREMA: Seja $f \in C_o(R^n)$.

Então, f é k-determinado, se e somente se, $m_n^{k+1} \subset m_n\langle\partial(f+g)\rangle$, para todo $g \in m_n^{k+1}$.

§ 3. *Determinação Forte*

Conforme ([23]), Zeeman conjecturou numa conferência para o I.H.E.S. (Bûres - sur - Yvette) que:

"Dado $f \in C_o(R^n)$, temos:

f é k-determinado $\Longleftrightarrow$ $m_n^{k+1} \subset m_n^2\langle\partial f\rangle$."

Acontece que tal conjectura é falsa conforme mostrou Siersma ([23]) através do exemplo $f(x,y) = x^3 + xy^3$, que é 4-determinado. Neste caso temos $m_2^5 \subset m_2\langle\partial f\rangle$ com $m_2^5 \not\subset m_2^2\langle\partial f\rangle$.

Aproveitando a conjectura de Zeeman, Siersma ([23]) introduziu a seguinte

3.1. <u>DEFINIÇÃO</u>: Um germe $f \in C_o(R^n)$ é dito *fortemente k-determinado*, onde k é um inteiro positivo, se para todo $g \in C_o(R^n)$ com $j^k f(0) = j^k g(0)$, existir $\psi \in R$, com $j^1\psi(0) = j^1 I_d(0)$ e $f\circ\psi = g$ (I_d é o germe da identidade). E, $f \in C_o(R^n)$ é dito *fortemente determinado*, se para algum inteiro positivo k, for fortemente k-determinado.

Com tal conceito, ele provou o

3.2. <u>TEOREMA</u>: Seja $f \in C_o(R^n)$.
Então, f é fortemente k-determinado, se e somente se, $m_n^{k+1} \subset m_n^2 <\partial f>$.

§ 4. Símbolo de Boardman ([6], [18])

Dado um ideal $I \subset m_n$ de $C_o(K^n)$, definimos $\Delta_r I$ como sendo o ideal $I + I'$ de $C_o(K^n)$, onde I' é o ideal gerado pelos menores $(r+1) \times (r+1)$ da matriz $(\frac{\partial h_i}{\partial x_j})$, com $h_i \in I$.

Como podemos verificar facilmente, para a construção de I' é suficiente tomarmos apenas um conjunto de geradores de I. Também é fácil de se verifioar que a construção de I' independe do sistema de coordenadas fixado nas vizinhanças de $0 \in K^n$.

Pondo $\Delta^i I = \Delta_{n-i+1} I$, segue que $I = \Delta^o I \subset \Delta^1 I \subset \ldots \subset$ $\subset \Delta^s I \subset \ldots \subset m_n \subset C_o(K^n)$.

Seja k o maior inteiro positivo tal que $\Delta^k I \subset m_n$. Nestas condições, diremos que $\Delta^k I$ é a *extensão crítica de I* e denotaremos por δI.

Como podemos observar, se $\delta I = \Delta^k I$, então o posto de I é $n-k$, onde definimos o *posto de um ideal* $J \subset m_n$ de $C_o(K^n)$ como sendo a dimensão de $\dfrac{J + m_n^2}{m_n^2}$ como K-espaço vetorial.

Sejam $\delta^\ell I = \delta(\delta^{\ell-1} I)$ $(\ell = 1,2,\ldots)$ as extensões críticas sucessivas do ideal I, onde $\delta^o I = I$. Definindo $i_{\ell+1} = n - \text{posto } \delta^\ell I$, diremos que *I tem símbolo de Boardman* $\Sigma_{i_1 i_2 \ldots}$, o qual denotaremos por $B(I)$. No caso de $I = \langle f \rangle$, com $f \in m_n$, denotaremos $B(\langle f \rangle) = B_f$.

Se $B_f = \Sigma_{i_1 \ldots i_k 0}$ com $i_k \neq 0$, definimos o *comprimento do símbolo de Boardman de f* como sendo o inteiro k e denotaremos $|B_f| = k$.

Dado $f \in m_n^2$, k-determinado, uma pergunta natural que surge, é a relação entre k e $|B_f|$.

Por Loibel e Tadini ([14]), temos que $|B_f| \leq k+1$.

§ 5. Escada de um Ideal ([7])

Seja $x_1, \ldots, x_n$ um sistema de coordenadas nas vizinhanças de $0 \in K^n$.

Dados $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n) \in N^n$, diremos que $(a_1, \ldots, a_n) < (b_1, \ldots, b_n)$, se existir um inteiro $k \in \{1,\ldots,n\}$

tal que, $a_n = b_n, \ldots, a_{k+1} = b_{k+1}$ e $a_k < b_k$ (ordem Lexicográfica reversa).

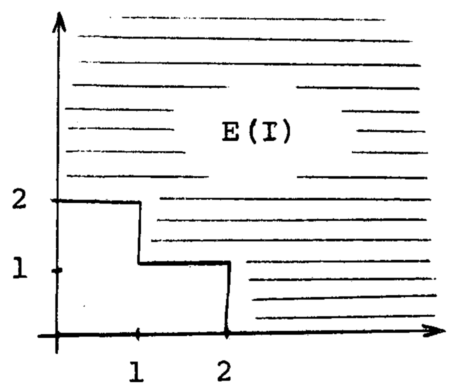
Fixado um monômio $h = ax_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$ com $a \neq 0$, definimos a sua ordem como sendo a n-upla $(a_1, \ldots, a_n)$. Se $f \in C_o(K^n)$, com $f \notin m_n^{\infty}$, então definimos a *ordem de f* como sendo o mínimo das ordens dos monômios de sua série de Taylor em $0 \in K^n$.

Seja $I \subset m_n$ um ideal de $C_o(K^n)$. Definimos a *escada de I*, como sendo o conjunto $E(I) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in N^n$, tal que, existe $h \in I$, cuja ordem é $(a_1, \ldots, a_n)\}$.

Observemos que a escada de um ideal, não é um invariante diferenciável, como podemos constatar através do exemplo:

$I = \langle xy, x^2+y \rangle \subset m_2$.

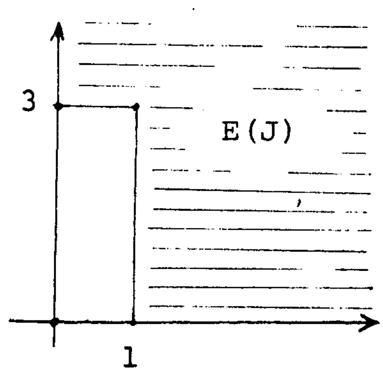
A escada de I é dada por:



Tomando a mudança de coordenadas dada por:

$$\psi : \begin{cases} X = x^2+y \\ Y = x \end{cases},$$

temos que neste sistema, I é dado por $\langle X, Y^3 \rangle = J$, cuja escada é:



Uma questão que surge naturalmente, é a existência ou não de algum invariante diferenciável obtido através da escada de um ideal.

Para esta questão, temos respostas surpreendentes em ([7]), dadas através dos dois teoremas abaixo:

5.1. <u>TEOREMA</u>: Seja $I \subset m_n$ um ideal de $C_o(K^n)$. Então, I contém uma potência de m_n, se e somente se, a cardinalidade de $N^n - E(I)$ é finita, igual $\dim_K \dfrac{C_o(K^n)}{I}$.

5.2. <u>TEOREMA</u>: Seja $I \subset m_n$ um ideal de $C_o(K^n)$, com $\dim_K \dfrac{C_o(K^n)}{I} = \mu < \infty$. Então, considerando $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$ monômios em $x_1, \ldots, x_n$, tais que, $N^n - E(I) = \{\text{ordem de } \varphi_i,\ i = 1, \ldots, \mu\}$, temos que $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$ são representantes de uma base de $\dfrac{C_o(K^n)}{I}$ como K-espaço vetorial.

§ 6. Funções Quase-Homogêneas e Semi-Quase-Homogêneas

Uma função $f(x_1, \ldots, x_n)$ é dita *quase-homogênea* do tipo $(d;\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, se $f(t^{\alpha_1}x_1, \ldots, t^{\alpha_n}x_n) = t^d f(x_1, \ldots, x_n)$ identicamente para $t \in K - \{0\}$, onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são números racionais positivos.

Uma função $f(x_1, \ldots, x_n)$, é dita *semi-quase-homogênea* do tipo $(d;\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, se $f = f_o + f_1$, onde f_o é quase-homogênea do tipo $(d;\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, *não-degenerada* (isto é, $\mu(f_o) < \infty$), e todos os monômios de f_1 têm grau estritamente maior que d, com relação aos pesos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Para a função nula, atribuimos grau ∞, independentemente dos pesos considerados. Nestas condições, toda função quase-homogênea não-degenerada do tipo $(d;\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, é semi-quase-homogênea do tipo $(d;\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Com relação à estes tipos de funções, temos os seguintes resultados (conforme Arnol'd [1]), enunciados mantendo as notações acima.

6.1. <u>TEOREMA</u>: Seja $f = f_o + f_1$ uma função semi-quase-homogênea do tipo $(d;\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
Então, $\mu(f) = \mu(f_o)$.

6.2. <u>TEOREMA</u>: Sejam f e g duas funções semi-quase-homogêneas do tipo $(d;\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
Então, $\mu(f) = \mu(g)$.

Observemos que o resultado (6.2), sugere a existência de uma expressão de $\mu(f)$ em têrmos de $d;\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Realmente existe, e é dada pelo:

6.3. <u>TEOREMA</u>: Seja f uma função semi-quase-homogênea to tipo $(d;\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
Então, $\mu(f) = \left(\frac{d-\alpha_1}{\alpha_1}\right)\left(\frac{d-\alpha_2}{\alpha_2}\right) \ldots \left(\frac{d-\alpha_n}{\alpha_n}\right)$.

Registremos que Milnor e Orlik ([19]) provaram que $\left(\frac{d-\alpha_1}{\alpha_1}\right)\left(\frac{d-\alpha_2}{\alpha_2}\right) \ldots \left(\frac{d-\alpha_n}{\alpha_n}\right)$ é o posto de um certo grupo abeliano livre, e portanto, é um número inteiro positivo.

Sejam $f = f_o + f_1$ uma função semi-quase-homogênea do tipo $(d;\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$ representantes monomiais de uma C-base de $Q(f)$. Suponhamos que $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ sejam exatamente aqueles que têm grau estritamente maior que d, com relação aos pesos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Nestas condições, mantendo as notações, temos o:

6.4. <u>TEOREMA</u>: f admite uma forma normal dada por $f = f_o + c_1\varphi_1 + \ldots + c_r\varphi_r$, onde $c_1, \ldots, c_r \in C$.

§ 7. Modalidade

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão finita e G um grupo de Lie atuando sobre M. Diremos que um ponto $x \in M$, tem *modalidade* m (sob a dada ação), se m for o menor inteiro não negativo, com a seguinte propriedade:

"Existe uma vizinhança suficientemente pequena de x em M, coberta por um número finito de famílias contínuas de órbitas, dependendo de no máximo m-parâmetros, e, toda vizinhança de x em M, intercepta alguma família de órbitas com m-parâmetros."

Conforme Arnol'd ([2]), podemos ter uma vizinhança de um ponto $x \in M$, coberta por uma família enumerável infinita de órbitas. No caso algébrico, isto é, M uma variedade algébrica e G um grupo algébrico de transformações sobre M, tal fato não pode ocorrer.

Dois germes $f : K^n,0 \to K,0$ e $g : K^m,0 \to K,0$ são ditos *estavelmente equivalentes* se, a menos de adições de formas quadráticas não degeneradas em outras variáveis, forem equivalentes.

Por exemplo, temos que $f(x) = x^3$ e $g(x,y) = x^3 + y^2$ são estavelmente equivalentes.

Seja $\tilde{R}^k$, o grupo dos k-jatos de elementos de $\tilde{R}$. Dado $f \in m_n^2 \subset C_o(C^n)$, diremos que f tem modalidade m, se para k suficientemente grande, $j^k f(0)$ tem modalidade m, como elemento de $\tilde{J}^k(n,1)$, sob a ação de $\tilde{R}^k$. (Para o caso real, a definição é análoga).

Por Arnol'd, ([5]), temos que a modalidade é invariante por equivalência estável.

Em ([8]), Gabriélov diz que um germe $f \in m_n^2 \subset C_o(C^n)$ com $\mu(f) < \infty$ tem *modalidade própria* m, se, dada uma deformação versal $F(x,\lambda)$ de f, a dimensão no espaço de parâmetros λ, do germe de conjuntos definido por $\{\lambda : \mu(F(\cdot,\lambda)) = \mu(f)\}$, for m. Neste mesmo trabalho, Gabriélov provou a equivalência entre modalidade e modalidade própria.

Em ([2]), Arnol'd deu uma classificação das singularidades 0-modais, através do:

7.1. <u>TEOREMA</u>: A menos de equivalência estável, todo germe 0-modal $f : C^n,0 \to C,0$, com $f \in m_n^2$, é dado por:

$A_k : x^{k+1}, \quad k \geq 1$

$D_k : x^2y + y^{k-1}, \quad k \geq 4$

$E_6 : x^3 + y^4$

$$E_7 : x^3 + xy^3$$

$$E_8 : x^3 + y^5$$

Observemos que (7.1) também é verdadeiro para o caso real, desdobrando $D_k : x^2y \pm y^{k-1}$ se k ímpar e $E_6 : x^3 \pm y^4$.

Em ([3] e [4]), Arnol'd classifica as singularidades 1 e 2 modais de germes $f : C^n,0 \to C,0$, com $f \in m_n^2$. Segundo Arnol'd, as classificações são análogas para o caso real.

Sejam $f(x_1, \ldots, x_n)$ uma função semi-quase-homogênea do tipo $(d;\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$ representantes monomiais de uma C-base de $Q(f)$. Suponhamos que $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ são exatamente aqueles que têm pesos maior ou igual a d. Nestas condições, é dito que f tem *modalidade interna* -*r* (este número independe do conjunto de representantes monomias para uma C-base de $Q(f)$).

Em ([1]), Arnol'd provou que a modalidade é maior ou igual à modalidade interna, para o caso de uma função semi-quase-homogênea.

Em ([9]), Kushnirenko e Gabriélov, provaram que tais conceitos coincidem para o caso de f homogênea. Arnol'd ([5]), acha bastante provável que tal fato seja verdadeiro para o caso semi-quase-homogêneo.

Recentemente ([24]) foi dada uma classificação para as singularidades com modalidade interna 3 e 4. Lembremos que as singularidades com modalidade interna 0, 1, 2 estão contidas nas listas de Arnol'd das singularidades com modalidade 0,1,2.

CAPÍTULO II

(r,k)-DETERMINAÇÃO

§ 1. Caracterização da (r,k)-Determinação

Em (I - § 3), temos a definição de determinação forte, introduzida por Siersma. Vamos agora dar algumas definições, afim de podermos dar algumas respostas à questões surgidas, como veremos adiante.

1.1. <u>DEFINIÇÃO</u>: Dois germes $f,g \in C_o(R^n)$ são ditos r-equivalentes, onde r é um inteiro não negativo, se existir um germe de difeomorfismo C^∞ $\psi : R^n,0 \to R^n,0$, com $j^r\psi(0) = j^r I_d(0)$ e $f \circ \psi = g$.

1.2. <u>DEFINIÇÃO</u>: Dados $f \in C_o(R^n)$ e $(r,k) \in N^2$ com $0 \leq r \leq k$, diremos que f é (r,k)-determinado se, para todo $g \in C_o(R^n)$ com $j^k f(0) = j^k g(0)$, tivermos f e g r-equivalentes.

1.3. <u>OBSERVAÇÕES</u>: A (1,k)-determinação coincide com a determinação forte e a (0,k)-determinação, coincide com o conceito usual de determinação finita.

O Teorema (I - 3.2) dá uma condição necessária e suficiente para a (1,k)-determinação. Um dos nossos objetivos neste capítulo, é dar uma condição necessária e suficiente para a

(r,k)-determinação, $1 \leq r \leq k$. A demonstração, segue técnicas análogas às empregadas por Siersma quando da caracterização da $(1,k)$-determinação.

1.4. <u>TEOREMA</u>: Sejam $f \in m_n \subset C_o(R^n)$ e $1 \leq r \leq k$ inteiros. Se $m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}<\partial f> + m_n^{k+2}$, então f é (r,k)-determinado.

<u>Demonstração</u>: Seja $g \in m_n$, tal que, $j^k g(0) = j^k f(0)$. Isto equivale a $f-g \in m_n^{k+1}$. Definamos $F : R^n \times R, 0 \times R \to R$ por $F(x,t) = f(x) + t(g(x)-f(x))$ e $F_t(x) = F(x,t)$. Logo, $F_o = f$ e $F_1 = g$.

Seja $\partial_x F = (\partial_1 F, \ldots, \partial_n F)$ onde $\partial_i F = \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, e, $x_1, \ldots, x_n$ é um sistema de coordenadas nas vizinhanças de $0 \in R^n$.

Mostremos inicialmente que, fixado $t_o \in R$, existe $p : V \subset R^n \times R \to R^n$, onde V é um aberto do $R^n \times R$ contendo $(0,t_o)$, tal que:

(i) $p(0,t) = 0$, para todo $(0,t) \in V$;

(ii) $d_x^s p(0,t) = 0$, para todo $(0,t) \in V$ e $1 \leq s \leq r$, e,

(iii) $\partial_1 F(x,t)p_1(x,t) + \ldots + \partial_n F(x,t)p_n(x,t) = f(x) - g(x)$, para todo $(x,t) \in V$, onde $p = (p_1, \ldots, p_n)$.

Para tal, consideremos $C_{o\times t_o}(R^{n+1})$ o anel dos germes de aplicações C^∞ do $R^n \times R$ em R, com fonte $(0,t_o)$. Seja m_{n+1,t_o} seu único ideal maximal. Temos portanto as inclusões naturais $C_o(R^n) \subset C_{o\times t_o}(R^{n+1})$ e $m_n \subset m_{n+1,t_o}$.

De $F(x,t) = f(x) + t(g(x)-f(x))$, segue que $\partial_i F = \partial_i f + t(\partial_i g - \partial_i f)$, e então, $\partial_i f = \partial_i F + t\partial_i (f-g)$, $i=1,\dots,n$.

Seja $J_F = \langle \partial_1 F, \dots, \partial_n F \rangle . C_{o\times t_o}(R^{n+1})$. Como $f-g \in m_n^{k+1}$, então, $\partial_i(f-g) \in m_n^k$ e portanto, $t\partial_i(f-g) \in C_{o\times t_o}(R^{n+1})m_n^k$, $i = 1, \dots, n$.

Logo, $\langle \partial f \rangle = \langle \partial_1 f, \dots, \partial_n f \rangle \subset J_F + C_{o\times t_o}(R^{n+1})m_n^k$.

Como por hipótese temos $m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}\langle \partial f \rangle + m_n^{k+2}$, segue que $C_{o\times t_o}(R^{n+1})m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}\langle \partial f \rangle . C_{o\times t_o}(R^{n+1}) + m_n^{k+2}C_{o\times t_o}(R^{n+1})$.
Desde que $\langle \partial f \rangle \subset J_F + C_{o\times t_o}(R^{n+1})m_n^k$, temos $C_{o\times t_o}(R^{n+1})m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}J_F + m_n^{k+2}C_{o\times t_o}(R^{n+1}) + m_n^{k+r+1}C_{o\times t_o}(R^{n+1})$.

Sendo $r \geq 1$, segue que

$$C_{o\times t_o}(R^{n+1})m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}J_F + m_n^{k+2}C_{o\times t_o}(R^{n+1}).$$

Devido à inclusão natural $m_n \subset m_{n+1,t_o}$, segue que

$$C_{o\times t_o}(R^{n+1})m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}J_F + m_{n+1,t_o}(C_{o\times t_o}(R^{n+1})m_n^{k+1}).$$

Pelo Lema de Nakayama ([17]), segue que $C_{o\times t_o}(R^{n+1})m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}J_F$. De $m_n^{k+1} \subset C_{o\times t_o}(R^{n+1})m_n^{k+1}$, temos $m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}J_F$.

Como $f-g \in m_n^{k+1}$, segue que existem $p_1, \dots, p_n \in C_{o\times t_o}(R^{n+1})m_n^{r+1}$, tais que, $f-g = \partial_1 F p_1 + \dots + \partial_n F p_n$.

Logo, tomando $p = (p_1, \dots, p_n)$, segue que existe um aberto V do $R^n \times R$, com $(0,t_o) \in V$, tal que:

(i) $p(0,t) = 0$, para todo $(0,t) \in V$;

(ii) $d_x^s p(0,t) = 0$, para todo $(0,t) \in V$ e $1 \leq s \leq r$, e,

(iii) $\partial_1 F(x,t)p_1(x,t) + \ldots + \partial_n F(x,t)p_n(x,t) = f(x) - g(x)$, para todo $(x,t) \in V$.

Antes de prosseguirmos com a demonstração, usaremos $t \sim t_o$, para simbolizar "t suficientemente próximo de t_o".

Consideremos agora a seguinte equação diferencial:

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = p(h(x,t),t) \\ h(x,t_o) = x \end{cases}$$

Pondo $h_t(x) = h(x,t)$, temos que h_{t_o} = identidade. Logo, h_t é germe de difeomorfismo C^∞ em $0 \in R^n$, para $t \sim t_o$.

Observemos que para $x = 0$, $h(0,t) \equiv 0$ é solução do sistema $(*)$, uma vez que, $p_1, \ldots, p_n \in C_{0\times t_o}(R^{n+1})m_n^{r+1}$. Logo, $h_t(0) = 0$, para $t \sim t_o$.

Tomemos $\gamma(t) = F_t \circ h_t$. Então, $\gamma(t)(x) = F(h(x,t),t)$.

Portanto,

$$\frac{d}{dt}(\gamma(t)(x)) = \frac{d}{dt}(F_t(h_t(x))) = \partial_1 F(h(x,t),t)\frac{\partial h_1}{\partial t}(x,t) +$$

$$+ \ldots + \partial_n F(h(x,t),t)\frac{\partial h_n}{\partial t}(x,t) + g(h(x,t)) - f(h(x,t)),$$

onde $h = (h_1, \ldots, h_n)$.

Por $(*)$ temos que:

$$\frac{d}{dt}F_t(h_t(x)) = \partial_1 F(h_t(x),t)p_1(h_t(x),t) + \ldots +$$

$$+ \ldots + \partial_n F(h_t(x),t)p_n(h_t(x),t) + g(h_t(x)) - f(h_t(x)).$$

Sendo h_t germes de difeomorfismos C^∞ em $0 \in R^n$, com $h_t(0) = 0$, para $t \sim t_o$, segue por (iii) que $\frac{d}{dt}F_t(h_t(x)) \equiv 0$ como germes em $(0,t_o) \in R^n \times R$.

Pela conexão da reta, segue $\gamma(t)$ é constante para $t \sim t_o$. Logo, $F_{t_o} = F_{t_o}\circ h_{t_o} = F_t \circ h_t$, para $t \sim t_o$.

Mostremos agora que $j^r h_t(0) = j^r I_d(0)$, para $t \sim t_o$.

Como $h_t(x) = h(x,t)$ é solução do sistema (*), isto é, $\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = p(h(x,t),t)$ e $h(x,t_o) = x$, nas vizinhanças de $(0,t_o) \in R^n \times R$, segue que:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x_i}p(h(x,t),t) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p_1(h(x,t),t), \ldots,$$

$$\ldots, p_n(h(x,t),t)) = (\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_1}{\partial y_j}(h(x,t),t)\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x,t), \ldots,$$

$$\ldots, \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_n}{\partial y_j}(h(x,t),t)\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x,t)).$$

Seja $1 \le u \le n$.

Então, $\frac{\partial}{\partial x_i}p_u(h(x,t),t) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_u}{\partial y_j}(h(x,t),t)\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x,t)$.

Portanto, $\frac{\partial}{\partial x_i}p_u(h(x,t),t)\big|_{x=0} = 0$ pois, $p_u \in C_{o\times t_o}(R^{n+1})m_n^{r+1}$ e $h_t(0) = 0$ para $t \sim t_o$ $(r \ge 1)$.

Pela mesma razão, $\frac{\partial^s}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_s}}p_u(h(x,t),t)\big|_{x=0} = 0$ se $1 \le s \le r$ e $t \sim t_o$.

Logo, por (*) temos que,

$$0 = \frac{\partial^s}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}} p(h(x,t),t)\Big|_{x=0} =$$

$$= \frac{\partial^s}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} h(x,t)\Big|_{x=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial^s}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}} h(x,t)\Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^s}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}} h(x,t)\right)\Big|_{x=0}$$

se $1 \leq s \leq r$ e $t \sim t_o$.

Portanto, $\frac{\partial}{\partial t} d^s h_t(0) = 0$ se $1 \leq s \leq r$ e $t \sim t_o$. Disto segue que $d^s h_{t_o}(0) = d^s h_t(0)$ se $1 \leq s \leq r$ e $t \sim t_o$.

Se $s = 1$, como $h_{t_o} = I_d$, temos que $dh_t(0) = I_d$ para $t \sim t_o$.

Se $2 \leq s \leq r$, como $h_{t_o} = I_d$, segue que $d^s h_t(0) = 0$ para $t \sim t_o$.

Concluimos pois, que F_{t_o} é equivalente a F_t através da família de germes de difeomorfismos $\{h_t\}$, com a propriedade $j^r h_t(0) = j^r I_d(0)$, se $t \sim t_o$.

Pela conexão e compacidade de $[0,1]$, segue que $F_o = f$ e $F_1 = g$ são r-equivalentes.

Vale a recíproca.

1.5. <u>TEOREMA</u>: Se $f \in m_n \subset C_o(R^n)$ é (r,k)-determinado, então, $m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}<\partial f> + m_n^{k+2}$.

<u>Demonstração</u>: Consideremos os seguintes conjuntos:

$M = \{g \in C_o(R^n) : j^k g(0) = j^k f(0)\}$ e

$N = \{g \in C_o(R^n) : g$ é r-equivalente a $f\}$.

Tomemos a projeção natural $\pi_{k+1} : C_o(R^n) \to J^{k+1}(n,1)$.

Sejam $M_{k+1} = \pi_{k+1}M$ e $N_{k+1} = \pi_{k+1}N$. Consideremos R_r^{k+1} o grupo dos (k+1)-jatos de germes de difeomorfismos C^∞ $\psi : R^n,0 \to R^n,0$, com $j^r\psi(0) = j^rI_d(0)$.

Por Mather ([17]), temos que R_r^{k+1} é um grupo de Lie (R_r^{k+1} é um grupo algébrico), portanto, as R_r^{k+1}-órbitas em $J^{k+1}(n,1)$ são subvariedades imersas de $J^{k+1}(n,1)$ (sendo R_r^{k+1} algébrico, as R_r^{k+1}-órbitas em $J^k(n,1)$, são subvariedades mergulhadas de $J^{k+1}(n,1)$).

Pela definição de M, temos que $M_{k+1} = j^{k+1}f(0) + H_{k+1}(n,1)$, onde $H_{k+1}(n,1)$ é o R-espaço vetorial das (k+1)-formas homogêneas reais em n indeterminadas.

Como f é (r,k)-determinado, segue que $M \subset N$. Portanto, $M_{k+1} \subset N_{k+1}$. Sendo $M_{k+1} = j^{k+1}f(0) + H_{k+1}(n,1)$ e $N_{k+1} = R_r^{k+1}j^{k+1}f(0)$, segue que $H_{k+1}(n,1) = T_zM_{k+1} \subset T_zN_{k+1}$, onde $z = j^{k+1}f(0)$.

Mostremos que $T_zN_{k+1} = m_n^{r+1}<\partial f>$ módulo m_n^{k+2}.

Para tal, sejam $v \in T_zN_{k+1}$ e $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to N_{k+1}$, uma curva diferenciável, com $\gamma(0) = z$ e $\gamma'(0) = v$.

Sendo $N_{k+1} = R_r^{k+1}z$, existe $h_t \in R_r$ (grupo dos germes de difeomorfismos C^∞ $\psi : R^n,0 \to R^n,0$ com $j^r\psi(0)=j^rI_d(0)$, tal que, $\gamma(t) = \pi_{k+1}(f\circ h_t)$ (D. Rand [21]).

Portanto, $v = \gamma'(0) = \frac{d}{dt}\pi_{k+1}(f\circ h_t)\big|_{t=0} = \pi_{k+1}[\frac{d}{dt}(f\circ h_t)\big|_{t=0}]$.

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt}(f\circ h_t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}f(h(x,t))\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_j}(h(x,0))\frac{\partial h_j}{\partial t}(x,0),$$

onde $h_t(x) = h(x,t) = (h_1(x,t), \ldots, h_n(x,t))$.

Como $j^{k+1}f(0) = z = \gamma(0) = j^{k+1}(f\circ h_o)(0)$ e $h_t \in \mathcal{R}_r$, segue que $\frac{d}{dt}(f\circ h_t)\big|_{t=0} \in \langle\partial f\rangle.\mathcal{C}_o(R^n)$ módulo m_n^{k+2}.

Denotemos $\frac{\partial h_j}{\partial t}(x,0) = p_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$ e $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Logo, $\frac{\partial}{\partial t}h_t(x)\big|_{t=0} = p(x)$.

Tomando $1 \le s \le r$, temos

$$d_x^s p(x)\big|_{x=0} = d_x^s[\frac{\partial}{\partial t}h_t(x)\big|_{t=0}]\big|_{x=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}[d_x^s h_t(x)\big|_{x=0}]\big|_{t=0} = 0,$$

pois $h_t \in \mathcal{R}_r$.

Temos ainda $p(0) = \frac{\partial}{\partial t}h_t(0)\big|_{t=0} = 0$, pois $h_t \in \mathcal{R}_r$.

Nestas condições, $p_1, \ldots, p_n \in m_n^{r+1}$. Portanto,

$$\frac{d}{dt}(f\circ h_t)\big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_j}(h(x,0))p_j(x) \in m_n^{r+1}\langle\partial f\rangle \text{ módulo } m_n^{k+2}.$$

Como $v = \pi_{k+1}[\frac{d}{dt}(f\circ h_t)\big|_{t=0}]$, segue que $T_z N_{k+1} \subset$ $\subset m_n^{r+1}\langle\partial f\rangle$ módulo m_n^{k+2}.

Seja $\alpha(x) \in m_n^{r+1}\langle\partial f\rangle$ módulo m_n^{k+2}. Logo,

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n}\partial_i f(x)p_i(x) \quad \text{com} \quad p_1, \ldots, p_n \in m_n^{r+1}.$$

Tomemos $h_t(x) = x+tp(x)$ onde $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Sendo $h_o = I_d$, temos que h_t é germe de difeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$, $h_t : R^n,0 \to R^n,0$ para $t \sim 0$, pois $p(0) = 0$.

De $p_1, \ldots, p_n \in m_n^{r+1}$, segue que $j^r h_t(0) = j^r I_d(0)$ e portanto, $h_t \in \mathcal{R}_r$ se $t \sim 0$.

Definindo $\lambda(t) = \pi_{k+1}(f\circ h_t)$ para $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$ e suficientemente pequeno, segue que $\lambda(t) \in \mathcal{R}_r^{k+1}z = N_{k+1}$, com $\lambda(0) = z$ e $\lambda'(0) = \pi_{k+1}(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)p_j(x))$.

Logo, $\lambda'(0) = \pi_{k+1}(\alpha(x)) \in T_z N_{k+1}$. Disto segue que $m_n^{r+1}\langle\partial f\rangle$ módulo $m_n^{k+2} \subset T_z N_{k+1}$.

Portanto, $T_z N_{k+1} = m_n^{r+1}\langle\partial f\rangle$ módulo m_n^{k+2}.

Desde que, $H_{k+1}(n,1) = T_z M_{k+1} \subset T_z N_{k+1}$, segue que $m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}\langle\partial f\rangle + m_n^{k+2}$.

Vejamos agora alguns corolários de (1.4) e (1.5):

1.6. <u>COROLÁRIO</u>: Sejam $f \in m_n \subset C_o(R^n)$ e $s \in Z$, $s > 0$. Se f é (r,k)-determinado, então f é $(r+s,k+s)$-determinado.

<u>Demonstração</u>: Sendo f (r,k)-determinado, então, $m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}\langle\partial f\rangle$. Disto segue que $m_n^{k+s+1} \subset m_n^{r+s+1}\langle\partial f\rangle$. Sendo $r+s > 0$, temos que f é $(r+s,k+s)$-determinado.

1.7. <u>COROLÁRIO</u>: Sejam $f,g \in m_n \subset C_o(R^n)$ germes de funções de Morse.

Se para algum $k \in Z$, $k \geq 2$, $j^k f(0) = j^k g(0)$, então, f e g são $(k-1)$-equivalentes.

<u>Demonstração</u>: Sendo f um germe de função de Morse, então $\langle\partial f\rangle = m_n$. Portanto, $m_n^{k+1} = m_n^{(k-1)+1}\langle\partial f\rangle$. Como $k \geq 2$, segue que f é $(k-1,k)$-determinado. Pelo fato de termos $j^k f(0) = j^k g(0)$, segue a $(k-1)$-equivalência de f e g.

1.8. COROLÁRIO: Seja $h_a(x_1, \ldots, x_n)$ uma forma homogênea real do grau $a \geq 2$, com $\mu(h_a) < \infty$ e $n \geq 2$. Tem-se:

(i) se $a = 2$, f é (1,2)-determinado;

(ii) se $a = 3$, f é (n-1,n+1)-determinado;

(iii) se $a \geq 4$, f é (r,k)-determinado, onde $r = (n-1)(a-2)-1$ e $k = n(a-2)$. Além disso, h_a não é $[n(a-2)-1]$-determinado.

Demonstração:

(i): imediato.

Provemos (ii) e (iii).

Sendo h_a uma forma homogênea do grau $a \geq 3$, com $\mu(h_a) < \infty$, segue que h_a é semi-quase-homogênea do tipo $(1;\frac{1}{a}, \ldots, \frac{1}{a})$. Por Arnol'd ([1]), temos que em qualquer base monomial de $Q(h_a)$, existe exatamente um monômio básico com grau $d_{max} = n(1 - \frac{2}{a})$ e que, todo monômio com grau maior que d_{max} (com relação aos pesos $(\frac{1}{a}, \ldots, \frac{1}{a})$) está em $<\partial h_a>$.

Como $d_{max} = n(1 - \frac{2}{a}) = \frac{1}{a}[n(a-2)]$, segue que $m_n^{n(a-2)+1} \subset <\partial h_a>$. Pelo fato de serem $\partial_1 h_a, \ldots, \partial_n h_a$ homogêneos do grau $a-1$ (com relação aos pesos $(1, \ldots, 1)$), segue que $m_n^{n(a-2)+1} \subset m_n^{(n-1)(a-2)}<\partial h_a>$.

Se $a = 3$, então $m_n^{n+1} \subset m_n^{n-1}<\partial f_a>$. Disto segue que $m_n^{n+2} \subset m_n^{n}<\partial h_a>$. Como $n \geq 2$, temos que h_3 é (n-1,n+1)-determinado. Observemos que podemos melhorar o grau de determinação, dependendo de n, isto é, para $n \geq 3$, h_3 é (n-2,n)-determinado.

Se $a \geq 4$, então $m_n^{n(a-2)+1} \subset m_n^{(n-1)(a-2)}\langle\partial h_a\rangle$ implica que h_a é $((n-1)(a-2)-1, n(a-2))$-determinado.

Se $m_n^{n(a-2)} \subset \langle\partial h_a\rangle$, então por (I - 5.2) segue que existe uma base monomial de $Q(h_a)$, cujo grau de cada monômio com relação aos pesos $(\frac{1}{a}, \ldots, \frac{1}{a})$ é estritamente menor que $d_{max} = n(1 - \frac{2}{a})$, o que é um absurdo. Logo, $h_a (a \geq 4)$ não é $[n(a-2)-1]$-determinado.

1.9. <u>OBSERVAÇÕES</u>: Para $n = 2$, (iii) poderia ser provado por outras vias como segue: sendo $\mu(h_a) < \infty$, segue por Kuo ([11]) que $\partial_1 h_a$ e $\partial_2 h_a$ são primos entre si. Sendo $\partial_1 h_a$ e $\partial_2 h_a$ homogêneos do grau a-1, primos entre si, segue por Lu ([15]) que $m_2^{2a-3} \subset \langle\partial h_a\rangle$. Pela homogeneidade de $\partial_1 h_a$ e $\partial_2 h_a$, temos que $m_2^{2a-3} \subset m_2^{a-2}\langle\partial h_a\rangle$, acarretando a $(a-3, 2a-4)$-determinação de $h_a (a \geq 4)$. Como $\dim_R \pi_{2a-4}(m_2^{a-3}\langle\partial_1 h_a, \partial_2 h_a\rangle) \leq 2a-4 < 2a-3 = \dim_R H_{2a-4}(2,1)$, segue que h_a não é $(2a-5)$-determinado.

De uma maneira mais geral, temos o:

1.10. <u>COROLÁRIO</u>: Seja $f \in m_n \subset C_o(R^n)$ tal que, $f(x_1,\ldots,x_n) = f_{a_1}(x_1,\ldots,x_{r_1}) + f_{a_2}(x_{r_1+1},\ldots,x_{r_2}) + \ldots + \ldots + f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1},\ldots,x_n)$ com $\mu(f) < \infty$ e $3 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ inteiros e f_{a_i} é homogênea do grau a_i, $i = 1,\ldots,k$; $(n \geq 2)$. Então, f é (r,s)-determinado se $a_1 \geq 4$, e $(r+1,s+1)$-determinado se $a_1 = 3$, onde

$$s = r_1(a_1-2) + $$
$$+ (r_2-r_1) + \ldots + (n-r_{k-1})(a_k-2) \quad \text{e}$$
$$r = s-a_k+1.$$

<u>Demonstração</u>: Se f e g são dois germes semi-quase-homogêneos do mesmo tipo $(d;\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, então, considerando $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ duas bases monomiais de $Q(f)$ e $Q(g)$ respectivamente, e, $i \in Q$, então o número de monômios de $\mathcal{B}$ com grau i, é exatamente igual ao número de monômios de $\mathcal{B}'$ com grau i, com relação aos pesos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, conforme ([1]). Logo, considerando $g(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{a_1} + \ldots + x_{r_1}^{a_1} + x_{r_1+1}^{a_2} + \ldots + x_{r_1+r_2}^{a_2} + \ldots + x_{r_{k-1}+1}^{a_k} + \ldots + x_{r_{k-1}+r_k}^{a_k}$, com $r_{k-1}+r_k = n$, temos que f e g são semi-quase-homogêneos do mesmo tipo $(1;\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_k}, \ldots, \frac{1}{a_k})$.

Portanto, $d_{max} = \frac{1}{a_1}[r_1(a_1-2)] + \ldots + \frac{1}{a_k}[r_k(a_k-2)]$.

Combinando este fato, com (I - 5.2), temos o resultado, e além disso, segue que f não é $(s-1)$-determinado $(a_1 \geq 4)$.

J. Martinet ([16]) demonstra a seguinte proposição, que é uma conseqüência imediata de (I - 3.2):

"Sejam $f,g \in m_n \subset C_o(R^n)$ com $m_n^{k+1} \subset m_n^2\langle\partial f\rangle$. Se $f-g \in m_n^{k+1}$, então f e g são equivalentes."

Para uma resposta mais geral, temos o:

1.11. <u>COROLÁRIO</u>: Sejam $f,g \in m_n \subset C_o(R^n)$, com $m_n^{k+1} \subset$ $\subset m_n^{r+1}\langle\partial f\rangle$ e $r \geq 1$.
Se $f-g \in m_n^{k+1}$, então f e g são r-equivalentes.

§ 2. *Perturbações em m_n de Germes Finitamente Determinados*

Sejam $f,g \in m_2 \subset C_o(R^2)$, tais que, $f(x,y) = x^2y + y^3$ e $g(x,y) = y^2$. Consideremos $f_t(x,y) = x^2y + y^3 + ty^2$.

Temos que f_o é 3-determinado, pois, $m_2^4 \subset m_2^2\langle\partial f_o\rangle$.

Mostremos que f_t não é 3-determinado para $t \neq 0$.

Usando técnicas de ([2]), temos:

$$\frac{\partial}{\partial y}f_t = 0 \iff x^2+3y^2+2ty = 0 \implies y = y(x) = -\frac{1}{2t}x^2 + 0(x^4),$$

se $t \neq 0$.

Logo, $f_t(x,y(x)) = x^2(-\frac{1}{2t}x^2 + 0(x^4)) + t(\frac{1}{4t^2}x^4 + 0(x^6)) +$ $+ 0(x^6) = -\frac{1}{4t}x^4 + 0(x^6)$.

Portanto, f_t é equivalente a $x^2 \pm y^4$, conforme $t<0$ ou $t > 0$. Disto segue que f_t é 4-determinado mas não 3-determinado $(t \neq 0)$.

Em vista deste exemplo, vamos propor o seguinte problema:

"Seja $f \in m_n \subset C_o(R^n)$ k-determinado e seja $\psi \in m_n^\alpha$ com $\alpha \in Z$, $\alpha \geq 1$. Considerando $f_t = f+t\psi$, qual o menor α de um modo geral, tal que, f_t é k-determinado para $t \sim 0$?"

Para dar uma resposta a esta questão, demonstremos a seguinte:

2.1. PROPOSIÇÃO: Seja $f \in m_n \subset C_o(R^n)$ (r,k)-determinado, com $1 \leq r \leq k$.

Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in R^s$ e $\psi_\lambda \in C_o(R^n)$ uma família de germes a s-parâmetros, com $\psi_\lambda \in m_n^{k-r+1}$, $\lambda \in U$, onde U é um aberto de R^s contendo 0.

Então, definindo $f_\lambda = f+\psi_\lambda$, tem-se f_λ (r,k)-determinado se λ pertencer a uma bola de centro em $0 \in R^s$ e raio suficientemente pequeno.

Demonstração: Sendo f (r,k)-determinado, então temos $m_n^{k+1} \subset$ $\subset m_n^{r+1}\langle\partial f\rangle$. Sejam $p_1, \ldots, p_t$ R-geradores de $H_{k+1}(n,1)$ (R-espaço vetorial das formas homogêneas reais de grau $k+1$ em n indeterminadas). Denotemos $H_{k+1}(n,1) =$ $= \langle p_1, \ldots, p_t\rangle_R$.

Logo, para $1 \leq j \leq t$, temos $p_j = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\partial_i f$ módulo m_n^{k+2}, onde $\alpha_{ij} \in m_n^{r+1}$.

Tomemos $\bar{p}_j = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}(\partial_i f+\partial_i\psi_\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\partial_i f + \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\partial_i\psi_\lambda$, $j = 1, 2, \ldots, t$.

Como $\psi_\lambda \in m_n^{k-r+1}$ e $\alpha_{ij} \in m_n^{r+1}$, segue que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\partial_i\psi_\lambda \in m_n^{k+1}$, para todo $j = 1, \ldots, n$ e $\lambda \in U$.

Nestas condições, $j^{k+1}\bar{p}_j(0) = p_j + j^{k+1}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\partial_i\psi_\lambda)(0)$, $j = 1, \ldots, n$. Como $H_{k+1}(n,1) = \langle p_1, \ldots, p_t\rangle_R$, segue que existe uma bola aberta $B(0,\varepsilon) \subset U$, de centro $0 \in R^s$ e raio

$\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que,

$$H_{k+1}(n,1) = \langle j^{k+1}\bar{p}_1(0), \dots, j^{k+1}\bar{p}_t(0)\rangle_R.$$

Portanto, $H_{k+1}(n,1) \subset m_n^{r+1}\langle\partial f_\lambda\rangle$ módulo m_n^{k+2}, para $\lambda \in B(0,\varepsilon)$.

Logo, $m_n^{k+1} \subset m_n^{r+1}\langle\partial f\rangle + m_n^{k+2}$, se $\lambda \in B(0,\varepsilon)$.

Como $r \geq 1$, segue que f_λ é (r,k)-determinado para $\lambda \in B(0,\varepsilon)$.

2.2. OBSERVAÇÕES: Como podemos observar na demonstração da proposição acima, as condições impostas a λ em ψ_λ, só são importantes para a parte homogênea de grau $k-r+1$ de ψ_λ. Como caso particular disto temos o:

2.3. COROLÁRIO: Seja $f(x_1, \dots, x_n)$ uma forma homogênea real do grau $a \geq 4$, em $x_1, \dots, x_n$ com $n \geq 2$ e $\mu(f) < \infty$. Seja $\psi_\lambda = h_\lambda + \psi$ uma família de germes a s-parâmetros $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_s) \in R^s$, $\lambda \in U$ um aberto do R^s contendo 0, com $h_\lambda \in H_a(n,1)$ e $\psi \in m_n^{a+1}$.
Então, existe uma bola aberta $B(0,\varepsilon) \subset U$, com centro em $0 \in R^s$ e raio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $f+\psi_\lambda$ é $((n-1)(a-2)-1, n(a-2))$-determinado se $\lambda \in B(0,\varepsilon)$.

Demonstração: Por (1.8), temos que f é $((n-1)(a-2)-1, n(a-2))$-determinado e portanto, $m_n^{n(a-2)+1} \subset m_n^{(n-1)(a-2)}\langle\partial f\rangle$.
Como $[n(a-2)+1] - [(n-1)(a-2)] + 1 = a$, $h_\lambda \in H_a(n,1)$ e $\psi \in m_n^{a+1}$, então, o resultado segue para $f_\lambda = f + \psi_\lambda$, onde $\psi_\lambda = h_\lambda + \psi$.

De um modo mais geral, temos o:

2.4. <u>COROLÁRIO</u>: Seja $f(x_1,\dots,x_n) = f_{a_1}(x_1,\dots,x_{r_1}) + f_{a_2}(x_{r_1+1},\dots,x_{r_2}) + \dots + f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1},\dots,x_n)$ com $\mu(f) < \infty$, $4 \le a_1 < \dots < a_k$ inteiros e f_{a_i} homogênea do grau a_i $(i = 1,\dots,k)$. Consideremos $f_\lambda = f+\varphi_\lambda$, onde $\varphi_\lambda = h_\lambda+\varphi$, com $h_\lambda \in H_{a_k}(n,1)$ e $\varphi \in m_n^{a_k+1}$, uma família de germes a m-parâmetros $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_m) \in U \subset R^m$, U aberto contendo $0 \in R^m$.

Então, existe uma bola aberta $B(0,\varepsilon) \subset U$ com centro em $0 \in R^m$ e raio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que, para $\lambda \in B(0,\varepsilon)$ tem-se f_λ (r,s)-determinado, onde (r,s) são dados por (1.10).

2.5. <u>OBSERVAÇÕES</u>: Considerando o exemplo do início do parágrafo, isto é, $f(x,y) = x^2y + y^3$, $\varphi(x,y) = y^2$ e $f_t = f + t\varphi$, temos $f_o = f$ é (1,3)-determinado pois $m_2^4 \subset m_2^2 <\partial f_o>$ e f_t não é (1,3)-determinado se $t \neq 0$. Neste caso temos $k = 3$, $r = 1$ e $\varphi_t = ty^2 \in m_2^{k-r}$. Logo, a proposição (2.1) dá de um modo geral, a melhor estimativa para a perturbação, no sentido de preservar a (r,k)-determinação.

§ 3. *Alguns Equívocos da Literatura*

Encontramos na literatura, alguns equívocos relacionados com o tipo de questão abordada pela proposição (2.1).

3.1. J. Martinet, ([16]), propõe o seguinte problema:

"Sejam $|\,|$ uma norma fixada em $J^{k-1}(n,1)$ e $f \in m_n$, tal que, $m_n^k \subset m_n\langle\partial f\rangle$.
Mostrar que existe $\varepsilon > 0$, tal que, para todo $g \in m_n$ com $|j^{k-1}f(0)-j^{k-1}g(0)| < \varepsilon$, tem-se $m_n^k \subset m_n\langle\partial g\rangle$."

Para tal, seja $f(x,y) = x^3+y^4 \in m_2$. Logo, $m_2^4 \subset m_2\langle\partial f\rangle$. Tomando $g_t(x,y) = x^3+y^4 + t^2x^2 + 2txy^2$, temos que g_t é equivalente a $x^2 \pm y^6$, conforme $t > 0$ ou $t < 0$.

De fato: Fazendo $\frac{\partial}{\partial x}g_t = 0$, teremos $3x^2 + 2t(tx+y^2) = 0$.

Para $t \neq 0$, temos $x = x(y) = -\frac{y^2}{t} + 0(y^4)$. Logo, $g_t(x(y),y) = -\frac{y^6}{t^3} + 0(y^8)$.

Portanto, g_t é equivalente a $x^2 \pm y^6$, conforme $t > 0$ ou $t < 0$. Logo, $m_2^5 \subset \langle\partial g_t\rangle$, mas $m_2^4 \not\subset m_2\langle\partial g_t\rangle$, para $t \neq 0$.

3.2. D. Siersma, ([23]), registra a seguinte proposição:

"Sejam $f,\psi \in m_n$ e $f_t = f + t\psi$, com $t \in R$.
Se $m_n^{k+1} \subset m_n^2\langle\partial f\rangle + m_n^{k+2}$, então $m_n^{k+1} \subset m_n^2\langle\partial f_t\rangle + m_n^{k+2}$, para t suficientemente pequeno."

Um contra-exemplo para tal proposição, é o exemplo tratado no início do parágrafo anterior.

Como sabemos por (I - 7.1), trata-se de uma singularidade 0-modal.

Outro contra-exemplo, é dado pela singularidade 1-modal J_{10} : $x^3 + y^6 + tx^2y^2$, com $4t^3 + 27 \neq 0$. (Esta última condição é para garantir a determinação finita do germe).

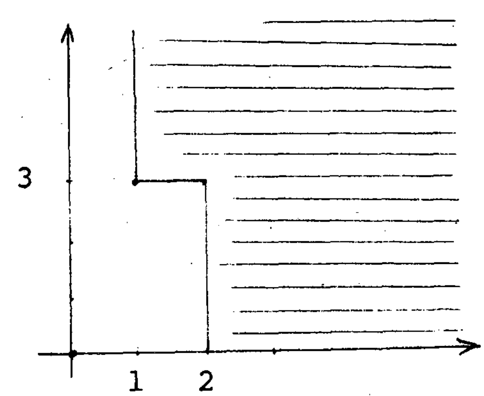
Para tal, consideremos $f(x,y) = x^3+y^6$ e $\psi(x,y)=x^2y^2$.

Temos $m_2^7 \subset m_2^2\langle x^2,y^5\rangle$. Logo, f é (1,6)-determinado.

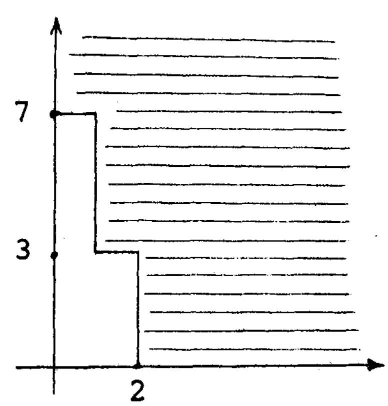
Seja $f_t = f + t\psi$. Logo, $\langle\partial f_t\rangle = \langle 3x^2+2txy^2,\ 3y^5+tx^2y\rangle$.

Para $t \neq 0$, $4t^3 + 27 \neq 0$, temos que $m_2^2\langle\partial f_t\rangle$ módulo $m_2^8 = \langle x^4,x^5,x^6,x^7,x^6y,x^5y^2,x^4y^3,x^3y^4,x^2y^5,xy^6,x^5y,x^4y^2,x^3y^3,x^2y^4,$ $x^4y,x^3y^2,3x^3y + 2tx^2y^3,3x^2y^2 + 2txy^4,3x^2y^3 + 2txy^5,3y^7 + tx^2y^3\rangle_R$.

A escada de $\langle\partial f_t\rangle$ contém a seguinte configuração:



Como f_t é quase-homogênea do tipo $(1;\frac{1}{3},\frac{1}{6})$, segue por (I - 6.3) que $\mu(f_t) = 10$. Por (I - 5.1) segue que a escada de $\langle\partial f_t\rangle$ é dada por:



Disto segue que $y^7 \in \langle \partial f_t \rangle$.

Por outro lado, $y^7 \notin m_2^2 \langle \partial f_t \rangle$, pois do contrário, teríamos $y^7 \in \langle 3y^7 + tx^2y^3, 3x^3y + 2tx^2y^3, 3x^2y^3 + 2txy^5 \rangle_R$, o R-espaço gerado por todos os geradores de $m_2^2 \langle \partial f_t \rangle$ módulo m_2^8, que estão ligados a y^7. Mas isto é um absurdo.

Logo, f_o é (1,6)-determinado e f_t é (0,6)-determinado, mas não (1,6)-determinado se $t \neq 0$ e $4t^3 + 27 \neq 0$.

3.3. No mesmo trabalho, ([23]), Siersma afirma que a proposição acima citada, continua verdadeira para perturbações com s--parâmetros, $s \geq 2$.

Tomando $f_{\lambda_1, \lambda_2}(x,y) = x^3+y^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 xy^2$, e considerando o caminho $\lambda_1 = (\frac{\lambda_2}{2})^2$, cairemos no exemplo visto em (3.1). Logo, tal afirmação é falsa.

3.4. Ainda Siersma, ([23]), como conseqüência da proposição citada em (3.2), registrou o seguinte resultado como corolário:

"Sejam $f, \psi \in m_n$, tais que:

(i) $m_n^{k+1} \subset m_n^2 \langle \partial f \rangle + m_n^{k+2}$;

(ii) $\psi \notin m_n \langle \partial f \rangle + m_n^{k+1}$

Então, f não é equivalente a $f + t\psi$, se t for suficientemente pequeno."

Tal corolário é verdadeiro, embora no referido trabalho, tenha sido "demonstrado" fazendo uso da proposição citada em (3.2). Passemos a demonstrá-lo:

Por (i), temos que f é k-determinado.

Seja $\gamma(t) = j^k f(0) + t j^k \psi(0)$, $t \in R$. Se existir $\varepsilon > 0$, tal que, para todo $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, $\gamma(t) \in R^k j^k f(0)$, então, $\gamma(t)$ é equivalente a $j^k f(0)$ que é equivalente a f, para todo $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

Logo, $\gamma'(0) = j^k \psi(0) \in T_z R^k z$, onde $z = j^k f(0)$. Como $T_z R^k z = m_n \langle \partial f \rangle$ módulo m_n^{k+1}, segue que $\psi \in m_n \langle \partial f \rangle + m_n^{k+1}$, contra (ii).

Como em $J^k(n,1)$, a intersecção de uma variedade linear 1-dimensional L com uma R^k-órbita é um conjunto finito de pontos ou uma reunião de intervalos abertos em L ([23]), segue que existe $\delta > 0$, tal que, $\gamma(t) \notin R^k z$, para todo $t \in (-\delta,\delta)$, $t \neq 0$.

Portanto, f não é equivalente a $f + t\psi$, para todo $t \in (-\delta,\delta)$, $t \neq 0$.

3.5. <u>OBSERVAÇÕES</u>: Quanto à proposição citada em (3.2), o erro na "demonstração", consiste no seguinte argumento usado:

O autor considerou $\psi : \dfrac{m_n}{m_n^{k+2}} \to \dfrac{m_n^{k+1}}{m_n^{k+2}}$ a projeção natural. Pelas hipóteses dadas, temos que

$$\psi\left(\frac{m_n^2 \langle \partial f_t \rangle + m_n^{k+2}}{m_n^{k+2}}\right) = \frac{m_n^{k+1}}{m_n^{k+2}} \qquad \text{se } t = 0.$$

Como a família $f_t = f + t\psi$ é contínua em t, segue que

$$\psi\left(\frac{m_n^2\langle\partial f_t\rangle + m_n^{k+2}}{m_n^{k+2}}\right) = \frac{m_n^{k+1}}{m_n^{k+2}},$$

para t suficientemente próximo de $0 \in R$.

Disto, ele concluiu erradamente que $m_n^{k+1} \subset m_n^2\langle\partial f_t\rangle + m_n^{k+2}$, para t suficientemente próximo de $0 \in R$.

CAPÍTULO III

SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

§ 1. *Decomposições*

Seja $K = R$ ou C.

1.1. <u>DEFINIÇÃO</u>: Seja $\Sigma = \Sigma_{i_1 i_2 \ldots}$ o símbolo de Boardman de um germe $f \in m_n \subset C_o(K^n)$. Por uma *decomposição* de Σ, entenderemos a soma $\Sigma_{j_1 \ldots} + + \Sigma_{\ell_1 \ldots}$, com $1 \leq j_1, \ell_1$, e por uma *decomposição completa* de Σ, entenderemos a soma $\Sigma = \Sigma_{1 \ldots} + \ldots + \Sigma_{1 \ldots}$ com i_1 parcelas, onde $\Sigma_{r_1 \ldots} + \Sigma_{s_1 \ldots} = \Sigma_{t_1 \ldots}$, com $t_i = r_i + s_i$, $i \geq 1$.

1.2. <u>DEFINIÇÃO</u>: Seja $f \in m_n \subset C_o(K^n)$, com $n \geq 2$.

(i) f se *decompõe*, se para algum $r \in Z$, $1 \leq r < n$, f for equivalente a um germe da forma $g(x_1, \ldots, x_r) + h(x_{r+1}, \ldots, x_n)$.

(ii) f se j-*decompõe*, onde $j \in Z$, $1 \leq j \leq n$, se f for equivalente a um germe da forma $\alpha_1 x_1^{a_1} + + \ldots + \alpha_j x_j^{a_j} + g(x_{j+1}, \ldots, x_n)$, onde $\alpha_i \in K$, $a_i \in Z$, $a_i \geq 1$, para $i = 1, \ldots, j$. Para o caso de $j = n$, diremos que f se *decompõe completamente*.

(iii) f admite uma *boa-decomposição*, se f for equivalente a um germe da forma $f_{a_1}(x_1, \ldots, x_{r_1}) + f_{a_2}(x_{r_1+1}, \ldots, x_{r_2}) + \ldots + f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \ldots, x_n)$, onde $a_i \in Z$, $a_i \geq 1$, f_{a_i} é uma K-forma homogênea não degenerada de grau a_i, $(i = 1, \ldots, k)$ e $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$.

(iv) f admite uma *semi-boa-decomposição*, se f for equivalente a um germe da forma $f_{a_1}(x_1, \ldots, x_{r_1}) + f_{a_2}(x_{r_1+1}, \ldots, x_{r_2}) + \ldots + f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \ldots, x_n) + h(x_1, \ldots, x_n)$, onde $f_{a_1}, \ldots, f_{a_k}$ são como em (iii) e $h \in m_n^{a_k+1}$ e $m \not\subset \langle \partial f, f \rangle$ (s conforme I - 1.10).

1.3. PROPOSIÇÃO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$, com $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_r) + h(x_{r+1}, \ldots, x_n)$ e $1 \leq r < n$. Então, $\mu(f) < \infty$, se e somente se, $\mu(g) < \infty$ e $\mu(h) < \infty$ como germes de $C_o(K^r)$ e $C_o(K^{n-r})$ respectivamente, e, $\mu(f) = \mu(g)\mu(h)$.

Demonstração: Podemos supor que f, g e h são polinomiais. Seja $K = R$. Denotemos por f_C, g_C e h_C as complexificações de f, g e h, respectivamente.

Temos por ([13]) que, $\dim_R Q(f) = \dim_C Q(f_C)$ (analogamente para g e h).

Logo,

$$\mu(f) = \dim_R \frac{C_o(R^n)}{\langle \partial g, \partial h \rangle} = \dim_C \frac{C_o(C^n)}{\langle \partial g_C, \partial h_C \rangle}$$

Como $f \in m_n^2$, segue que $g \in m_r^2$ e $h \in m_{n-r}^2$. Portanto, $g_C \in m_r^2$ e $h_C \in m_{n-r}^2$. Disto segue que $\mu(f) < \infty$ se e somente, $\mu(g) < \infty$ e $\mu(h) < \infty$.

Mostremos agora que $\mu(f) = \mu(g)\mu(h)$.

Para tal, sejam F, G e H, germes de aplicações holomorfas, definidos por:

$G : C^r,0 \to C^r,0$; $H : C^{n-r},0 \to C^{n-r},0$ e

$F : C^r \times C^{n-r},0 \to C^r \times C^{n-r},0$, tais que,

$G(x) = (\partial_1 g_C(x), \ldots, \partial_r g_C(x))$,

$H(y) = (\partial_1 h_C(y), \ldots, \partial_{n-r} h_C(y))$ e

$F(x,y) = (G(x),H(y))$, onde $x = (x_1, \ldots, x_r)$ e $y = (x_{r+1}, \ldots, x_n)$

Com tais notações, temos que,

$\mu(f) = \dim_C \dfrac{C_o(C^n)}{<G,H>}$, $\mu(g) = \dim_C \dfrac{C_o(C^r)}{<G>}$ e

$\mu(h) = \dim_C \dfrac{C_o(C^{n-r})}{<H>}$.

Por ([13]), podemos considerar $0 \in$ interior A_1, $A_1 \subset C^r$, $0 \in$ interior A_2, $A_2 \subset C^{n-r}$, onde A_1 e A_2 são retângulos fechados nos respectivos espaços, e, $(x_o,y_o) \in C^r \times C^{n-r}$, tais que:

(1) $\mu(g)$ = cardinalidade de $G^{-1}(x_o) \cap A_1$;

(2) $\mu(h)$ = cardinalidade de $H^{-1}(y_o) \cap A_2$ e,

(3) $\mu(f)$ = cardinalidade de $F^{-1}(x_o,y_o) \cap A_1 \times A_2$.

Portanto, $\mu(f)$ é o número de soluções da equação $F(x,y) = (x_o, y_o)$ em $A_1 \times A_2$. Como $F(x,y) = (G(x), H(y))$, segue por (1) e (2) que $\mu(f) = \mu(g)\mu(h)$.

Para o caso $K = C$, prova-se de maneira análoga.

1.4. <u>OBSERVAÇÕES</u>: A proposição é em geral, falsa para $f \notin m_n^2$.

Para tal, basta tomarmos $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1) + h(x_2, \ldots, x_n)$ com $g(x_1) = x_1$ e $h \in m_n^\infty$, $n \geq 2$. Portanto, $\mu(f) = 0$, $\mu(g) = 0$ e $\mu(h) = \infty$.

Como conseqüência imediata de (1.3), temos o:

1.5. <u>COROLÁRIO</u>: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$, $n \geq 2$.

Se f for equivalente a um germe da forma

$$f_{a_1}(x_1, \ldots, x_{r_1}) + f_{a_2}(x_{r_1+1}, \ldots, x_{r_2}) + \ldots + f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \ldots, x_n) + h(x_1, \ldots, x_n),$$

com $h \in m_n^{a_k+1}$ $(2 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k)$, então,

$$\mu(f) = (a_1-1)^{r_1}(a_2-1)^{r_2-r_1}(a_3-1)^{r_3-r_2} \ldots$$

$$\ldots (a_{k-1}-1)^{r_{k-1}-r_{k-2}}(a_k-1)^{n-r_{k-1}},$$ onde f_{a_i} é homogênea do grau a_i, não degenerada.

<u>Demonstração</u>: Seja $g_a(x_1, \ldots, x_n)$ uma K-forma homogênea do grau a em $x_1, \ldots, x_n$, não degenerada. Por (I - 6.3), temos que $\mu(g_a) = (a-1)^n$.

Logo, $\mu(f_{a_1}) = (a_1-1)^{r_1}$, $\mu(f_{a_k}) = (a_k-1)^{n-r_{k-1}}$ e $\mu(f_{a_i}) = (a_i-1)^{r_i-r_{i-1}}$, para $i = 2, 3, \ldots, k-1$.

Por (1.3) temos que $\mu(f_{a_1}+\ldots+f_{a_k}) = \mu(f_{a_1})\mu(f_{a_2}) \ldots \mu(f_{a_k})$.

Temos que, f é equivalente a um germe semi-quase-homogêneo do tipo

$$(\underbrace{\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_1}}_{r_1}, \underbrace{\frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_2}}_{r_2-r_1}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{a_{k-1}}, \ldots, \frac{1}{a_{k-1}}}_{r_{k-1}-r_{k-2}}, \underbrace{\frac{1}{a_k}, \ldots, \frac{1}{a_k}}_{n-r_{k-1}})$$

onde a parte quase-homogênea não degenerada (f_o : conforme I - § 6) é $f_{a_1} + f_{a_2} + \ldots + f_{a_k}$. De fato: seja g um monômio não nulo de $m_n^{a_k+1}$. Denotemos por c_i, a soma dos expoentes das variáveis de f_{a_i} que efetivamente comparecem em g. Portanto, $c_1, \ldots, c_k \geq 0$ e $c_1+c_2 + \ldots + c_k \geq a_k + 1$. Como $2 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ então, o grau de g com relação aos pesos

$$(\underbrace{\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_1}}_{r_1}, \underbrace{\frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_2}}_{r_2-r_1}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{a_{k-1}}, \ldots, \frac{1}{a_{k-1}}}_{r_{k-1}-r_{k-2}}, \underbrace{\frac{1}{a_k}, \ldots, \frac{1}{a_k}}_{n-r_{k-1}})$$

é $\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \ldots + \frac{c_k}{a_k} \geq \frac{c_1}{a_k} + \frac{c_2}{a_k} + \ldots + \frac{c_k}{a_k} \geq 1 + \frac{1}{a_k}$. Logo, a nossa afirmação está provada.

Por (I - 6.1) temos que

$$\mu(f) = (a_1-1)^{r_1}(a_k-1)^{n-r_{k-1}} \cdot \prod_{i=2}^{k-1}(a_i-1)^{r_i-r_{i-1}}$$

1.6. <u>COROLÁRIO</u>: Seja $f \in m_n^r - m_n^{r+1}$, com $\mu(f) < \infty$, $r \geq 3$ e $n \geq 2$.

Se f 1-decompõe, então existe $a \in \mathbb{Z}$, com $1 < a < \mu(f)$, tal que, $a \geq r-1$, a divide $\mu(f)$ e $\mu(f) \geq a(\Delta-n+1)$, onde

$\Delta = \binom{n+r-2}{r-1}$.

Demonstração: Por hipótese, f é equivalente a um germe da forma $\alpha_1 x_1^b + h(x_2, \ldots, x_n)$, com $b \geq r$, $\alpha_1 \in K$, $\alpha_1 \neq 0$ e $h \in m_{n-1}^r$. Por (1.3) segue que $\mu(f) = (b-1)\mu(h)$, onde $\mu(h) = \dim_K \dfrac{C_o(K^{n-1})}{<\partial h>}$.

Logo, $<\partial h> \subset m_{n-1}^{r-1}$, como ideais de $C_o(K^{n-1})$, e portanto,

$$\mu(h) \geq \sum_{\ell=0}^{r-1} \binom{n+\ell-2}{\ell} - n+1, \quad \text{onde} \quad \binom{m+k-1}{k} \text{ é}$$

o número de coeficientes de um polinômio homogêneo genérico do grau k em m indeterminadas. Seja

$$\Delta = \sum_{\ell=0}^{r-1} \binom{n+\ell-2}{\ell} = \binom{n+r-2}{r-1}$$

Tomando $a = b-1 \geq r-1 \geq 2$, segue o resultado.

1.7. OBSERVAÇÕES: (1.6) é falso para $n = 1$ ou $r = 2$. Para tal, basta observarmos os germes $f(x) = x^8$ e $g(x,y) = x^2 + y^6$. Por outro lado, a hipótese de 1-decomposição também é indispensável, como mostra o exemplo $h(x,y) = x^3 + xy^3$.

Seja $f : K^n,0 \to K,0$, com $f \in m_n^2$, $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_r) + h(x_{r+1}, \ldots, x_n)$, $1 \leq r < n$ e $g,h \in m_n$.

1.8. DEFINIÇÃO: $B_f^n = B_f$, B_g^r = símbolo de Boardman do germe $g : K^r,0 \to K,0$ e B_h^{n-r} = símbolo de Boardman do germe $h : K^{n-r},0 \to K,0$.

Com tais notações, temos a:

1.9. <u>PROPOSIÇÃO</u>: $B_f^n = B_g^r + B_h^{n-r}$.

<u>Demonstração</u>: Sejam $B_f = \Sigma_{i_1 i_2} \ldots$, $B_g^r = \Sigma_{j_1} \ldots$ e

$B_h^{n-r} = \Sigma_{\ell_1} \ldots$

Como $f \in m_n^2$, $g \in m_r^2$ e $h \in m_{n-r}^2$, segue que $i_1 = n$, $j_1 = r$, $\ell_1 = n-r$, e portanto, $i_1 = j_1 + \ell_1$.

Temos também que

$\delta\langle f\rangle = \langle g+h, \partial_1 g, \ldots, \partial_r g, \partial_{r+1} h, \ldots, \partial_n h\rangle$

como ideal de $C_o(K^n)$, $\delta\langle g\rangle = \langle g, \partial_1 g, \ldots, \partial_r g\rangle$ como ideal de $C_o(K^r)$ e, $\delta\langle h\rangle = \langle h, \partial_{r+1} h, \ldots, \partial_n h\rangle$ como ideal de $C_o(K^{n-r})$.

Como $g = g(x_1, \ldots, x_r) \in m_r^2$, $h = h(x_{r+1}, \ldots, x_n) \in m_{n-r}^2$, segue que $i_2 = j_2 + \ell_2$.

Suponhamos que $f \in m_n^c - m_n^{c+1}$, com $c \geq 2$. Logo, $g \in m_r^c$ e $h \in m_{n-r}^c$, com $g \in m_r^c - m_r^{c+1}$ ou $h \in m_{n-r}^c - m_{n-r}^{c+1}$.

Nestas condições, com raciocínio análogo ao usado acima, segue que $i_\alpha = j_\alpha + \ell_\alpha$, para $1 \leq \alpha \leq c$.

Como $f \in m_n^c - m_n^{c+1}$, com $c \geq 2$, seja posto $\delta^{c-1}\langle f\rangle = a \neq 0$.

Se $a = n$, então a proposição está demonstrada, pois $g = g(x_1, \ldots, x_r)$ e $h = h(x_{r+1}, \ldots, x_n)$.

Seja $1 \leq a < n$. Como $g \in m_r^c$ e $h \in m_{n-r}^c$, existem s elementos de $\delta^{c-1}\langle g\rangle$ e t elementos de $\delta^{c-1}\langle h\rangle$ (com $t+s = a$) cujas partes lineares são K-linearmente independentes.

Aproveitando estes elementos, fazemos uma mudança de coordenadas da forma:

$$\psi : \begin{cases} X_i = X_i(x_1, \dots, x_r), & i = 1, \dots, r \\ \\ X_j = X_j(x_{r+1}, \dots, x_n), & j = r+1, \dots, n \end{cases}$$

tal que: $\delta^{c-1}\langle f\rangle$ é equivalente a um ideal da forma

$$\langle G(x_{s+1}, \dots, x_r) + H(x_{r+t+1}, \dots, x_n), x_1, \dots, x_s,$$

$$p_1(x_{s+1}, \dots, x_r), \dots, p_u(x_{s+1}, \dots, x_r), x_{r+1}, \dots, x_{r+t},$$

$$q_1(x_{r+t+1}, \dots, x_n), \dots, q_v(x_{r+t+1}, \dots, x_n)\rangle$$

como ideal de $C_o(K^n)$;

$\delta^{c-1}\langle g\rangle$ é equivalente a

$$\langle G(x_{s+1}, \dots, x_r), x_1, \dots, x_s, p_1(x_{s+1}, \dots, x_r), \dots,$$

$$\dots, p_u(x_{s+1}, \dots, x_r)\rangle$$

como ideal de $C_o(K^r)$, e, $\delta^{c-1}\langle h\rangle$ é equivalente a

$$\langle H(x_{r+t+1}, \dots, x_n), x_{r+1}, \dots, x_{r+t},$$

$$q_1(x_{r+t+1}, \dots, x_n), \dots, q_v(x_{r+t+1}, \dots, x_n)\rangle$$

como ideal de $C_o(K^{n-r})$, onde $H, q_1, \dots q_v \in m^2_{n-r}$ e $G, p_1, \dots, p_u \in m^2_r$.

Considerando a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\partial_i p_j) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\partial_\omega q_m) \\ 0 & (\partial_i G) & 0 & (\partial_\omega H) \end{bmatrix},$$

onde $i = s+1, \ldots, r$; $j = 1, \ldots, u$; $\omega = r+t+1, \ldots, n$ e $m = 1, \ldots, v$, segue que

$$\delta^c\langle f\rangle = \delta^{c-1}\langle f\rangle + \langle \partial_i p_j, \partial_\omega q_m, \partial_i G, \partial_\omega H\rangle C_o(K^n),$$

$$\delta^c\langle g\rangle = \delta^{c-1}\langle g\rangle + \langle \partial_i p_j, \partial_i G\rangle C_o(K^r)$$

e
$$\delta^c\langle h\rangle = \delta^{c-1}\langle h\rangle + \langle \partial_\omega q_m, \partial_\omega H\rangle C_o(K^{n-r}).$$

Como $p_j = p_j(x_{s+1}, \ldots, x_r)$, $q_m = q_m(x_{r+t+1}, \ldots, x_n)$, $G = G(x_{s+1}, \ldots, x_r)$ e $H = H(x_{r+t+1}, \ldots, x_n)$, segue que posto $\delta^c\langle f\rangle$ = posto $\delta^c\langle g\rangle$ + posto $\delta^c\langle h\rangle$, donde concluimos que $i_{c+1} = j_{c+1} + \ell_{c+1}$.

Seguindo raciocínio análogo, aproveitando em cada estágio as funções cujas partes lineares são K-linearmente independentes, mantendo as variáveis separadas, teremos $i_k = j_k + \ell_k$, $k \geq 1$.

1.10. <u>OBSERVAÇÕES</u>: Tomando $f(x,y) = g(x) + h(y)$, com $g(x) = x$ e $h(y) = y$, tem-se $i_1 = 1$, $j_1 = 0$ e $\ell_1 = 0$. Portanto, (1.9) em geral é falsa para $f \in m_n - m_n^2$.

1.11. <u>COROLÁRIO</u>: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$, equivalente a $f_{a_1}(x_1, \ldots, x_{r_1}) + f_{a_2}(x_{r_1+1}, \ldots, x_{r_2}) + \ldots + \ldots + f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \ldots, x_n) + h(x_1, \ldots, x_n)$, onde f_{a_i} é homogênea do grau a_i, não degenerada, $(i = 1, \ldots, k)$, $2 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ e $h \in m_n^{a_k+1}$.

Então, $B_f = B_{f_{a_1}}^{r_1} + B_{f_{a_2}}^{r_2-r_1} + \ldots + B_{f_{a_{k-1}}}^{r_{k-1}-r_{k-2}} + B_{f_{a_k}}^{n-r_{k-1}}$.

Demonstração: Sendo $2 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, segue que posto $\delta^{a_1-2}\langle f\rangle = 0$ e posto $\delta^{a_1-1}\langle f\rangle = r_1$. Logo existe mudança de coordenadas da forma:

$$\varphi : \begin{cases} X_i = X_i(x_1, \ldots, x_{r_1}), & i = 1, \ldots, r_1 \\ X_j = x_j, & j \geq r_1+1, \end{cases}$$

tal que, $\delta^{a_1-1}\langle f\rangle$, é equivalente a um ideal da forma $\langle x_1, \ldots, x_{r_1}\rangle + \delta^{a_1-1}\langle f_{a_2}\rangle + \ldots + \delta^{a_1-1}\langle f_{a_k}\rangle$ módulo $m_n^{a_k-a_1+2}$.

Como $2 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, segue que posto $\delta^{a_2-2}\langle f\rangle = r_1$ e posto $\delta^{a_2-1}\langle f\rangle = r_2$, pois f_{a_2} é não degenerada em $x_{r_1+1}, \ldots, x_{r_2}$. Do mesmo modo como acima, existe uma mudança de coordenadas da forma:

$$\psi : \begin{cases} X_i = x_i, & i = 1, \ldots, r_1 \\ X_j = X_j(x_{r_1+1}, \ldots, x_{r_2}), & j = r_1+1, \ldots, r_2 \\ X_\ell = x_\ell, & \ell \geq r_2+1 \end{cases}$$

tal que, $\delta^{a_2-1}\langle f\rangle$ é equivalente a um ideal da forma

$$\langle x_1, \ldots, x_{r_2}\rangle + \delta^{a_2-1}\langle f_{a_3}\rangle + \ldots +$$

$$+ \ldots + \delta^{a_2-1}\langle f_{a_k}\rangle \text{ módulo } m_n^{a_k-a_2+2}$$

Seguindo com o mesmo raciocínio, teremos o resultado.

Nosso objetivo neste capítulo é dar para algumas classes de germes, condições necessárias e, para outras classes, condições necessárias e suficientes para a decomposição do germe, conforme (1.2).

Neste contexto, temos o conhecido Lema, que em nossas notações, pode ser enunciado da seguinte forma:

1.12. Splitting Lemma: Sejam $f \in m_n^2 - m_n^3$ e j a característica da matriz Hessiana de f em $0 \in K^n$. Então, f j-decompõe.

Ainda neste contexto, temos o seguinte Teorema devido a Oka ([20]):

1.13. TEOREMA: Seja f um polinômio em $C^n \times C^m$ tal que $f(z,\omega) = g(z) + h(\omega)$, onde $g(z)$ e $h(\omega)$ são polinômios quase-homogêneos em C^n e C^m respectivamente. Sejam $F_f = f^{-1}(1) \subset C^n \times C^m$, $F_g = g^{-1}(1) \subset C^n$ e $F_h = h^{-1}(1) \subset C^m$. Então, existe uma equivalência natural de homotopia entre F_f e $F_g * F_h$, onde $F_g * F_h$ é o *join* de F_g e F_h com a topologia forte.

O Teorema de Oka (1.13), foi enunciado apenas por ter um conteúdo próximo do que estamos estudando, mas não o utilizaremos em momento algum neste trabalho.

Como decorrência imediata do corolário (1.11), temos o:

1.14. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$, com $\mu(f) < \infty$. Se f for equivalente a um germe da forma:

$f_{a_1}(x_1,\dots,x_{r_1}) + f_{a_2}(x_{r_1+1},\dots,x_{r_2}) + \dots +$

$f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1},\dots,x_n) + h(x_1,\dots,x_n)$ (conforme 1.2 - - iv), não necessariamente com $m^s \not\subset \langle \partial f, f\rangle$, segue que

$$B_f = \Sigma_{\underbrace{r_1 \dots r_1}_{a_1-1}\, 0} + \Sigma_{\underbrace{r_2-r_1 \dots r_2-r_1}_{a_2-1}\, 0} + \dots +$$

$$+ \Sigma_{\underbrace{r_{k-1}-r_{k-2} \dots r_{k-1}-r_{k-2}}_{a_{k-1}-1}\, 0} +$$

$$+ \Sigma_{\underbrace{n-r_{k-1} \dots n-r_{k-1}}_{a_k-1}\, 0} \quad \text{e}$$

$$\mu(f) = (a_1-1)^{r_1}(a_k-1)^{n-r_{k-1}} \cdot \prod_{i=2}^{k-1}(a_i-1)^{r_i-r_{i-1}}.$$

1.15. <u>OBSERVAÇÕES</u>: Seja $f \in m_2^2 \subset C_0(K^2)$, $f(x,y) = x^3+xy^4$. Sendo f quase-homogênea não degenerada do tipo $(6;2,1)$, segue por (I - 6.3) que $\mu(f) = 10$. Temos $B_f = = \Sigma_{2\,2\,1\,1\,0} = \Sigma_{1\,1\,1\,1\,0} + \Sigma_{1\,1\,0}$. Logo, f não admite uma semi--boa-decomposição, pois do contrário, por (1.14) teríamos $\mu(f)=8$, o que é uma contradição. Portanto, as hipóteses de (1.14) são indispensáveis.

1.16. <u>LEMA</u>: Seja $f \in m_n^3 \subset C_0(K^n)$, com $\mu(f) < \infty$ e $n \geq 2$. Sejam $\lambda(\mu(f))$ o número de fatores primos de $\mu(f)$, contadas as multiplicidades e $j \in Z$, com $1 \leq j < n$.

Se $\lambda(\mu(f)) \leq j$, então f não j-decompõe.

Demonstração: Como $\mu(f) < \infty$, então se f j-decompõe, segue que f é equivalente a um germe da forma $\alpha_1 x_1^{a_1} + \ldots + \alpha_j x_j^{a_j} + h(x_{j+1}, \ldots, x_n)$, com $\alpha_i \neq 0$ $(i=1,\ldots,j)$ e $3 \leq a_1, \ldots, a_j$, $h \in m_n^3$, pois $f \in m_n^3$ $(\alpha_i \in K)$.

Por (1.3) segue que $\mu(f) = (a_1-1)(a_2-1) \ldots (a_j-1)\mu(h)$,

onde $\mu(h) = \dim_K \dfrac{C_o(K^{n-j})}{\langle \partial h \rangle} \geq 2$, pois $h \in m_{n-j}^3$.

Sendo $a_1, \ldots, a_j \geq 3$, segue que $\lambda(\mu(f)) \geq j+1$, que é contra a hipótese.

1.17. <u>OBSERVAÇÕES</u>: Seja $f \in m_n \subset C_o(K^n)$, $n \geq 2$, com

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^{p_1+1} + \ldots + x_n^{p_{n-1}+1},$$

onde $3 \leq p_1 \leq \ldots \leq p_{n-1}$ e $p_1, \ldots, p_{n-1}$ são inteiros primos. Logo, $\lambda(\mu(f)) = n-1$ pois, $\mu(f) = p_1 p_2 \ldots p_{n-1}$. Portanto, (1.16) é falso em geral, para $f \in m_n^2 - m_n^3$.

1.18. <u>COROLÁRIO</u>: Seja $f \in m_n^3 \subset C_o(K^n)$, com $n \geq 2$ e $\mu(f)$ primo.

Então, f não se decompõe e nem admite uma semi-boa-decomposição.

1.19. <u>COROLÁRIO</u>: Sejam $f \in m_n^3 \subset C_o(K^n)$, $n \geq 2$, semi-quase-homogênea do tipo $(d; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e

$$\beta_s = \frac{d - d_s}{\alpha_s}, \quad \text{para } s = 1, \ldots, n.$$

Se $\lambda(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n) \leq j$, onde $j \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j < n$, então f não j-decompõe. Além disso, se $\beta_1 \ldots \beta_s$ for primo, então f não se decompõe e nem admite uma semi-boa-decomposição.

§ 2. *Invariante* λ_o

Sejam $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$ e α (se existir), o menor inteiro positivo tal que, $m_n^{\alpha} \subset \langle\partial f, f\rangle$. Tal α existe, se e somente se, f for finitamente determinado. Suponhamos então que $\mu(f) < \infty$.

Nas condições acima, seja β o maior inteiro tal que, $m_n^{\alpha} \subset m_n^{\beta}\langle\partial f, f\rangle$.

2.1. <u>DEFINIÇÃO</u>: $\alpha = \alpha(f)$, $\beta = \beta(f)$ e $\lambda_o = \lambda_o(f) = \alpha(f) - \beta(f)$.

2.2. <u>LEMA</u>: λ_o é um invariante da R-órbita ($\tilde{R}$-órbita).

<u>Demonstração</u>: Sejam $K = R$, $m_n^{\alpha} \subset m_n^{\beta}\langle\partial f, f\rangle$, com $\alpha = \alpha(f)$ e $\beta = \beta(f)$ e $g = f \circ \psi$, onde $\psi \in R$.

Logo, $\psi^* : C_o(R^n) \to C_o(R^n)$ é um isomorfismo de R-álgebras, onde $\psi^*(h) = h \circ \psi$. Temos que, $g'(x) = f'(\psi(x)) \circ \psi'(x)$.

Considerando $e_1, \ldots, e_n$ a base canônica do R^n, isto é, $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{\hat{1}}, 0, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, n$, segue que

$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = f'(\psi(x))\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(x) e_j\right)$, onde $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$. Portanto, $\frac{\partial g}{\partial x_i} = \left[\sum \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \circ \psi^{-1}\right) \frac{\partial f}{\partial y_j}\right] \circ \psi$, $i = 1, \ldots, n$.

Logo, $(\psi^{-1})^* \langle\partial g, g\rangle \subset \langle\partial f, f\rangle$ e portanto, $\psi^* \langle\partial f, f\rangle = \langle\partial g, g\rangle$.

Sendo ψ^* um isomorfismo de R-álgebras, segue que $\psi^* m_n = m_n$ e portanto, $m_n^{\alpha} \subset m_n^{\beta}\langle\partial g, g\rangle$, com $\alpha = \alpha(g)$ e $\beta = \beta(g)$. Disto segue que λ_o é um invariante da R-órbita.

Para o caso $K = C$, a demonstração é análoga.

2.3. PROPOSIÇÃO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$, com $n \geq 2$. Se f admitir uma semi-boa-decomposição, então $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$, onde

$$B_f = \Sigma_{i_1} \ldots i_{\lambda_o} \ldots$$

Demonstração: Suponhamos que f é equivalente a um germe da forma $f_{a_1}(x_1, \ldots, x_{r_1}) + f_{a_2}(x_{r_1+1}, \ldots, x_{r_2}) + \ldots + f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \ldots, x_n) + h(x_1, \ldots, x_n)$, com $a_1, \ldots, a_k \in Z$, $2 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, f_{a_i} homogênea do grau a_i não degenerada em suas variáveis $(i = 1, \ldots, k)$ e $h \in m_n^{a_k+1}$. Por (1.14), temos $B_f = \Sigma_n\, i_2\, i_3 \ldots i_{a_k-1}\, 0$, com $i_{a_k-1} = n - r_{k-1} \neq 0$.

Como f_{a_i} é homogênea do grau a_i não degenerada com

$$f_{a_i} = \begin{cases} f_{a_1}(x_1, \ldots, x_{r_1}) & \text{se } i = 1 \\ f_{a_k}(x_{r_{k-1}+1}, \ldots, x_n) & \text{se } i = k \\ f_{a_i}(x_{r_{i-1}+1}, \ldots, x_{r_i}) & \text{se } i \neq 1, k \end{cases}$$

e $h \in m_n^{a_k+1}$, $2 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, segue por hipótese que

$m_n^{\sigma} \not\subset \langle \partial f, f \rangle$, onde

$$\sigma = r_1(a_1-2) + (r_2-r_1)(a_2-2) + \ldots +$$
$$+ (r_{k-1}-r_{k-2})(a_{k-1}-2) + (n-r_{k-1})(a_k-2)$$

Logo, $m_n^{\sigma} \not\subset \langle \partial f, f \rangle + m_n^{\sigma+1}$.

Mostremos que $m_n^{\sigma+1} \subset \langle \partial f, f \rangle + m_n^{\sigma+2}$.

Com as hipóteses dadas, temos que

$$m_{r_1}^{r_1(a_1-2)+1} \subset m_{r_1}^{\gamma_1}<\partial f_{a_1}>,\ m_{n-r_{k-1}}^{(n-r_{k-1})(a_k-2)+1} \subset m_{n-r_{k-1}}^{\gamma_k}<\partial f_{a_k}>$$

e $$m_{r_i-r_{i-1}}^{(r_i-r_{i-1})(a_i-2)+1} \subset m_{r_i-r_{i-1}}^{\gamma_i}<\partial f_{a_i}> \quad (i \neq 1, k),$$

onde $$m_{n-r_{k-1}} = <x_{r_{k-1}+1}, \ldots, x_n>C_o(K^{n-r_{k-1}}),$$

$$m_{r_1} = <x_1, \ldots, x_{r_1}>C_o(K^{r_1}),$$

$$m_{r_i-r_{i-1}} = <x_{r_{i-1}+1}, \ldots, x_{r_i}>C_o(K^{r_i-r_{i-1}}), \quad (i \neq 1, k)$$

e, $$\gamma_1 = r_1(a_1-2) - a_1+2, \qquad \gamma_k = (n-r_{k-1})(a_k-2) - a_k+2,$$

$$\gamma_i = (r_i-r_{i-1})(a_i-2) - a_i+2 \quad (i \neq 1, k).$$

Seja $g \in m_{r_i-r_{i-1}}^{(r_i-r_{i-1})(a_i-2)+1}$ $(i \neq 1, k)$. Então, existem $g_1, \ldots, g_{r_i-r_{i-1}} \in m_{r_i-r_{i-1}}^{\gamma_i}$, tal que,

$$g = g_1\partial_{r_{i-1}+1}(f_{a_i}) + \ldots + g_{r_i-r_{i-1}}\partial_{r_i}(f_{a_i}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r_i-r_{i-1}} g_j\partial_{r_{i-1}+j}(f_{a_i}) = \sum_{j=1}^{r_i-r_{i-1}} g_j\partial_{r_{i-1}+j}(f_{a_i}+h) -$$

$$- \sum_{j=1}^{r_i-r_{i-1}} g_j\partial_{r_{i-1}+j}(h)$$

Como $h \in m_n^{a_k+1}$ e $g_j \in m_{r_i-r_{i-1}}^{\gamma_i}$, segue que

$$\sum_{j=1}^{r_i-r_{i-1}} g_j \partial_{r_{i-1}+j}(h) \in m_n^{\gamma_i+a_k}$$

Por outro lado, $\gamma_i+a_k > \gamma_i+a_i = (r_i-r_{i-1})(a_i-2)+2$ $(i \neq k)$.

Portanto,

$$m_{r_i-r_{i-1}}^{(r_i-r_{i-1})(a_i-2)+1} \subset m_{r_i-r_{i-1}}^{\gamma_i} <\partial(f_{a_i}+h)> +$$

$$+ m_n^{(r_i-r_{i-1})(a_i-2)+2} \qquad \text{se} \quad i \neq 1, k.$$

Analogamente, temos

$$m_{r_1}^{r_1(a_1-2)+1} \subset m_{r_1}^{\gamma_1} <\partial(f_{a_1}+h)> + m_n^{r_1(a_1-2)+2}$$

e

$$m_{n-r_{k-1}}^{(n-r_{k-1})(a_k-2)+1} \subset m_{n-r_{k-1}}^{\gamma_k} <\partial(f_{a_k}+h)> +$$

$$+ m_n^{(n-r_{k-1})(a_k-2)+2}.$$

Seja $p \in m_n^{\sigma+1} - m_n^{\sigma+2}$ um monômio dado por:

$$p = x_1^{s_1} \ldots x_{r_1}^{s_{r_1}} x_{r_1+1}^{s_{r_1+1}} \ldots x_{r_2}^{s_{r_2}} \ldots x_{r_{k-1}+1}^{s_{r_{k-1}+1}} \ldots x_n^{s_n}$$

$(\therefore \sum_{j=1}^{n} s_j = \sigma + 1)$.

Então, temos:

$$s_1 + \ldots + s_{r_1} \geq r_1(a_1-2)+1$$

ou $$s_{r_{k-1}+1} + \ldots + s_n \geq (n-r_{k-1})(a_k-2)+1 ,$$

ou $$s_{r_{i-1}+1} + \ldots + s_{r_i} \geq (r_i-r_{i-1})(a_i-2)+1 ,$$ para algum

$i = 2, \ldots, k-1$

Suponhamos que exista $j \in \{2, 3, \ldots, k-1\}$, tal que

$$s_{r_{j-1}+1} + \ldots + s_{r_j} \geq (r_j-r_{j-1})(a_j-2)+1$$

Então,

$$x_{r_{j-1}+1}^{s_{r_{j-1}+1}} \ldots x_{r_j}^{s_{r_j}} \in m_{r_j-r_{j-1}}^{\gamma_j+b} <\partial(f_{a_j}+h)> + \\ + m_n^{(r_j-r_{j-1})(a_j-2)+2+b} ,$$

onde $$b = (s_{r_{j-1}+1} + \ldots + s_{r_j}) - [(r_j-r_{j-1})(a_j-2)+1]$$

Portanto, $p \in m_n^{\gamma_j+b+a} <\partial(f_{a_j}+h)> + m_n^{\sigma+2}$, onde

$a = (\sigma+1) - (s_{r_{j-1}+1} + \ldots + s_{r_j})$

e $$\gamma_j = (r_j-r_{j-1})(a_j-2)-a_j+2.$$

Daí concluimos que $p \in m_n^{(\sigma+1)-(a_j-1)} <\partial(f_{a_j}+h)> + + m_n^{\sigma+2}$.

Portanto,

$$m_n^{\sigma+1} \subset m_n^{(\sigma+1)-(a_k-1)} <\partial f,f> + m_n^{\sigma+2} ,$$

pois $2 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Pela semi-boa-decomposição de f, segue que $\alpha(f) = \sigma+1$, $\beta(f) = (\sigma+1)-(a_k-1)$ e $\lambda_o = a_k-1$.

Segue por (1.14) que $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$.

2.4. <u>OBSERVAÇÕES</u>: λ_o é um invariante para equivalência estável.

2.5. <u>COROLÁRIO</u>: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$. Se f admitir uma semi-boa-decomposição, então, λ_o divide $\mu(f)$.

2.6. <u>OBSERVAÇÕES</u>: Seja $f \in C_o(K^2)$, $f(x,y) = x^3 + xy^3$. Neste caso temos $\mu(f) = 7$ e $\lambda_o = 4$. Portanto, a hipótese de semi-boa-decomposição de f, é indispensável para (2.5).

§ 3. Alguns Invariantes Diferenciáveis

Vamos introduzir mais alguns invariantes diferenciáveis, com os quais, para certas classes de germes, podemos dar condições necessárias e suficientes para a decomposição completa.

Antes porém, lembremos que se $\varphi \in R$ (ou $\tilde{R}$), então φ induz um R-isomorfismo (C-isomorfismo) de álgebras

$$\varphi_* : C_o(R^n) \to C_o(R^n) \quad (C_o(C^n) \to C_o(C^n)),$$

definido por $\varphi_*(f) = f \circ \varphi$. Reciprocamente, dado

$$\psi : C_o(R^n) \to C_o(R^n) \quad (C_o(C^n) \to C_o(C^n))$$

um R-isomorfismo (C-isomorfismo) de álgebras, então existe $\psi \in \mathcal{R}$ ($\psi \in \tilde{\mathcal{R}}$), tal que, $\psi_* = \psi$.

Seja $I \subset m_n \subset C_o(K^n)$ um ideal de K-codimensão finita.

3.1. <u>DEFINIÇÃO</u>: $\alpha(I) = \min\{\alpha \in N : m_n^\alpha \subset I\}$;

$$\beta(I) = \max\{\beta \in N : m_n^{\alpha(I)} \subset m_n^\beta I\} \quad \text{e,}$$

$$\lambda_o(I) = \alpha(I) - \beta(I).$$

3.2. <u>OBSERVAÇÕES</u>: (1) Se $I = <\partial f, f>$, segue de (2.1) que

$$\lambda_o(f) = \lambda_o(I).$$

(2) Da mesma forma como em (2.2), demonstra-se que $\alpha(I)$, $\beta(I)$ e portanto $\lambda_o(I)$, são invariantes diferenciáveis. Lembremos apenas que para simplificar tais demonstrações, podemos tomar I finitamente gerado pois, $\text{cod}_K I < \infty$ (Mather [17]).

Demonstremos agora um Lema, o qual para o caso formal, encontra-se em ([18]).

3.3. <u>LEMA</u>: Sejam $I \subset m_n \subset C_o(K^n)$ um ideal, com $I = <f_1, \ldots, f_p>$, e $\psi \in \mathcal{R}$ (ou $\tilde{\mathcal{R}}$). Então, $\psi_* \delta I = \delta \psi_* I$.

<u>Demonstração</u>: Sendo $I = <f_1, \ldots, f_p>$, segue que

$$\psi_* I = <f_1 \circ \psi, \ldots, f_p \circ \psi>.$$

Logo, posto I = posto $\psi_* I = r$. Então, $\delta I = I + I_{r+1}$ e $\delta \psi_* I = \psi_* I + (\psi_* I)_{r+1}$, onde I_{r+1} e $(\psi_* I)_{r+1}$ são os ideais gerados pelos menores $(r+1) \times (r+1)$ das matrizes $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ e $\left(\frac{\partial (f_i \circ \psi)}{\partial x_j}\right)$, respectivamente.

Se $r = n$ ou $r = p$, segue que $I_{r+1} = (\psi_* I)_{r+1} = 0$, e portanto, $\psi_* \delta I = \delta \psi_* I$.

Suponhamos $r < n,p$.

Consideremos o seguinte menor $(r+1) \times (r+1)$ de $\left(\frac{\partial(f_i \circ \psi)}{\partial x_j}\right)$:

$$A = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial(f_1 \circ \psi)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial(f_1 \circ \psi)}{\partial x_{r+1}} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial(f_{r+1} \circ \psi)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial(f_{r+1} \circ \psi)}{\partial x_{r+1}} \end{bmatrix}$$

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de K^n. Então,

$$\frac{\partial(f_j \circ \psi)}{\partial x_i}(x) = (f_j \circ \psi)'(x) e_i = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial y_k}\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \circ \psi^{-1}\right)\right] \circ \psi(x),$$

onde $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$. Logo,

$$\frac{\partial(f_j \circ \psi)}{\partial x_i} = \psi_* \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \frac{\partial f_j}{\partial y_k}\right),$$

onde $\alpha_{ki} = \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \circ \psi^{-1}$.

Sendo ψ_* um K-isomorfismo de álgebras, segue que:

$$A = \psi_* \det \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k1} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,r+1} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k1} \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,r+1} \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_k} \end{bmatrix} =$$

$$= \psi_*\alpha \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{r+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{r+1}} \end{bmatrix}, \text{ onde } \quad \alpha \in C_o(K^n).$$

Portanto, $\psi_* I_{r+1} = (\psi_* I)_{r+1}$, e então, $\psi_*\delta I = \delta\psi_* I$.

3.4. <u>OBSERVAÇÕES</u>: O Lema (3.3) continua verdadeiro mesmo que $I \subset m_n$ não seja finitamente gerado.

3.5. <u>DEFINIÇÃO</u>: Para $I \subset m_n \subset C_o(K^n)$, um ideal de K-codimensão finita, definimos as seqüências:

$\tilde{\alpha}(I) = (\alpha(I), \alpha(\delta I), \ldots, \alpha(\delta^k I), \ldots)$;

$\tilde{\beta}(I) = (\beta(I), \beta(\delta I), \ldots, \beta(\delta^k I), \ldots)$ e

$\tilde{\lambda}(I) = (\lambda_o(I), \lambda_o(\delta I), \ldots, \lambda_o(\delta^k I), \ldots)$,

e os números:

$\rho(I) = \min\{k \in N : \delta^k I = m_n^\theta$, para algum $\theta \in N\}$,

e,

$\eta(I) = \min\{k \in N : \delta^k I = m_n\}$.

No caso de $I = \langle\partial f, f\rangle$, $f \in m_n^2$, denotaremos tais elementos por $\tilde{\alpha}(f)$, $\tilde{\beta}(f)$, $\tilde{\lambda}(f)$, $\rho(f)$ e $\eta(f)$, respectivamente.

3.6. <u>OBSERVAÇÕES</u>: Como conseqüência de (3.2) e (3.3), temos que os elementos introduzidos em (3.5), são invariantes diferenciáveis.

3.7. PROPOSIÇÃO: Seja $I \subsetneq m_2 \subset C_o(K^2)$, um ideal de K-codimensão finita. Sejam $\alpha(I) = a$ e $\beta(I) = b$, tais que, $m_2^{a-i} \subset m_2^b \delta^i I$ e $m_2^{a-i} \not\subset m_2^{b+1}\delta^i I$, para cada $i = 0, 1, \dots, \eta(I)$.
Então, $i_{\lambda_o - 1} \neq 0$ e $i_{\lambda_o} = 0$, onde
$B(I) = \Sigma_{i_1\, i_2\, \dots}$

Demonstração: Sendo I um ideal de $C_o(K^2)$, $I \subsetneq m_2$, com K-codimensão finita, segue de ([14]) que $B(I)$ tem uma das seguintes formas: $\Sigma_{1 \dots 1\, 0}$, $\Sigma_{2 \dots 2\, 0}$ ou $\Sigma_{2 \dots 2 1 \dots 1 0}$.

Seja $B(I) = \Sigma_{\underbrace{1 \dots 1}_{d} 0}$. Então, I é equivalente ao ideal $<x,y^{d+1}>$. Portanto, $\alpha(I) = d+1$, $\beta(I) = 0$, $\lambda_o(I) = d+1$, e então, $i_{\lambda_o - 1} \neq 0$ e $i_{\lambda_o} = 0$.

Seja $B(I) = \Sigma_{\underbrace{2 \dots 2}_{d} 0}$. Então, $\eta(I) = d$. Por hipótese, temos que $m_2^{a-d} \subset m_2^b \delta^d I$ $(\delta^d I = m_2)$ e $m_2^{a-d} \not\subset m_2^{b+1} m_2$. Portanto, $a-d = b+1$, e então, $\lambda_o = a-b = d+1$. Disto segue que, $i_{\lambda_o - 1} \neq 0$ e $i_{\lambda_o} = 0$.

Seja $B(I) = \Sigma_{\underbrace{2 \dots 2}_{r} \underbrace{1 \dots 1}_{s} 0}$. Logo, $r < \eta(I)$.

Por hipótese temos $m_2^{a-r} \subset m_2^b \delta^r I$ e $m_2^{a-r} \not\subset m_2^{b+1}\delta^r I$. Temos também que $\delta^r I$ é equivalente ao ideal $<x,y^{s+1}>$. Então, $m_2^{a-r} \subset m_2^b <x,y^{s+1}>$ e $m_2^{a-r} \not\subset m_2^{b+1}<x,y^{s+1}>$. Disto segue que $a-r = b+s+1$, e então, $\lambda_o = a-b = r+s+1$.

Portanto, $i_{\lambda_o-1} \neq 0$ e $i_{\lambda_o} = 0$.

3.8. <u>COROLÁRIO</u>: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$ com $\mu(f) < \infty$, cuja característica da matriz Hessiana em $0 \in K^n$ é $n-1$ ou $n-2$. Se para cada $i = 1, 2, \ldots, \eta(<\partial f,f>)$, tivermos $m_n^{\alpha(f)-i} \subset m_n^{\beta(f)}\delta^i < \partial f,f>$ e $m_n^{\alpha(f)-i} \not\subset m_n^{\beta(f)+1}\delta^i<\partial f,f>$, então, $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$.

3.9. <u>COROLÁRIO</u>: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$, com $\mu(f) < \infty$. Se para algum $i_o = 1, 2, \ldots, \eta(<\partial f,f>)$, tivermos $m_n^{\alpha(f)-i_o} \subset m_n^{\beta(f)+1}\delta^{i_o}<\partial f,f>$, então, f não se decompõe completamente.

3.10. <u>DEFINIÇÃO</u>: Seja $I \subset m_n \subset C_o(K^n)$ um ideal. Definimos a seqüência $g(I) = (g_1, g_2, \ldots)$ onde g_i é o número minimal de geradores de $\delta^{i-1}I$. No caso $I = <\partial f,f>$, denotaremos $g(I) = g(f)$.

3.11. <u>OBSERVAÇÕES</u>: Por (3.3) temos que $g(I)$ é um invariante diferenciável.

3.12. <u>LEMA</u>: Seja $f \in m_n^2$, com $\mu(f) < \infty$ e $n \geq 2$. Então, $\rho(f) = \eta(f)$ e $g(f)$ constante, são condições necessárias para a decomposição completa de f.

3.13. <u>EXEMPLOS</u>: Seja $f \in C_o(K^2)$, $f(x,y) = x^4+y^4+x^2y^2$. Logo, $<\partial f,f> = <2x^3+xy^2, 2y^3+x^2y>$, $\delta<\partial f,f> = <x^2,y^2,xy> = m_2^2$. Portanto, $\rho(f) = 1$, $\eta(f) = 2$ e $g(f) = (2,3,2,2,\ldots)$.

Como $\mu(f) = 9$, segue que as hipóteses de (3.12) não são condições necessárias para a semi-boa-decomposição de f. Tomando $h \in C_o(K^2)$, $h(x,y) = x^3+xy^3$, temos $\rho(h) = \eta(h) = 2$, $g(h) = (2, 2, \ldots)$ e $\mu(h) = 7$. Portanto, as condições de (3.12) não são suficientes para a decomposição completa de h.

§ 4. *Uma Condição Necessária para a Decomposição de um Germe em Duas Variáveis*

Sejam $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$, com $\mu(f) < \infty$ e as seqüências $\tilde{\alpha}(f) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, 1, 1, \ldots)$ e $\tilde{\beta}(f) = (\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, 0, \ldots)$, com $\alpha_{k-1} \geq 2$.

Consideremos

$$S(f) = \{(\alpha_1,\beta_1), (\alpha_2,\beta_2), \ldots, (\alpha_{k-1},\beta_{k-1}), (1,0)\} \subset N^2.$$

Então, $\eta(f) =$ cardinalidade de $S(f) - 1$.

4.1. <u>DEFINIÇÃO</u>: $R(f)$ é o menor convexo do R^2, contendo $S(f)$ e $\{(0,0), (0,\beta_1), \ldots, (0,\beta_{k-1})\}$. Denotemos por $A(f)$ a área da região $R(f)$.

4.2. <u>OBSERVAÇÕES</u>: $S(f)$ e portanto $A(f)$, são invariantes diferenciáveis.

4.3. <u>PROPOSIÇÃO</u>: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$, com $\mu(f) < \infty$, e característica da matriz Hessiana em $0 \in K^n$, maior ou igual a $n-2$.
Então, se f se decompor completamente, teremos $A(f) + \eta(f) = \mu(f) - 1$.

<u>Demonstração</u>: Seja $K = \mathbb{C}$.

Se a característica da matriz Hessiana em $0 \in \mathbb{C}^n$ for n, então f é um germe de Morse. Portanto, $S(f)=\{(1,0)\}$, e então, $A(f) = 0$, $\eta(f) = 0$ e $\mu(f) = 1$.

Se a característica for $n-1$, segue que f é equivalente a um germe da forma $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^k$, com $k \geq 3$. Sendo $<\partial f, f>$ equivalente a $<x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{k-1}>$, tem-se $\tilde{\alpha}(f) = \{k-1, k-2, \ldots, 1, 1, \ldots\}$ e $\tilde{\beta}(f) = (0, \ldots)$. Logo, $A(f) = 0$, $\eta(f) = k-2$ e $\mu(f) = k-1$.

Suponhamos que a característica da matriz Hessiana de f em $0 \in K^n$ é $n-2$. Do fato de f se decompor completamente, segue que f é equivalente a um germe da forma $x_1^2 + \ldots + \ldots + x_{n-2}^2 + x_{n-1}^a + x_n^b$, com $3 \leq a \leq b$.

Para computarmos $\tilde{\alpha}(f)$ e $\tilde{\beta}(f)$, é suficiente computarmos $\tilde{\alpha}(g)$ e $\tilde{\beta}(g)$, onde $g = g(x,y) = x^a + y^b$.

Nestas condições, considerando $I = <\partial g, g>$, tem-se:

$m_2^{a+b-3} \subset m_2^{a-2}<x^{a-1}, y^{b-1}>$, onde $\alpha(I) = a+b-3$ e $\beta(I) = a-2$

$m_2^{a+b-5} \subset m_2^{a-3}<x^{a-2}, y^{b-2}>$, onde $\alpha(\delta I) = a+b-5$ e $\beta(\delta I) = a-3$

....

$m_2^{b-a+3} \subset m_2<x^2, y^{b-a+2}>$, onde $\alpha(\delta^{a-3}I) = b-a+3$ e $\beta(\delta^{a-3}I) = 1$

$m_2^{b-a+1} \subset <x, y^{b-a+1}>$, onde $\alpha(\delta^{a-2}I) = b-a+1$ e $\beta(\delta^{a-2}I) = 0$

....

$m_2^2 \subset <x, y^2>$, onde $\alpha(\delta^{b-3}I) = 2$ e $\beta(\delta^{b-3}I) = 0$

Disto concluimos que:

$$S(g) = \begin{cases} \{(1,0),(3,1),\ldots,(2k-1,k-1),\ldots,(2a-3,a-2)\}, & \text{se } a=b\geq 3 \\ \{(1,0),(2,0),\ldots,(b-a+1,0),(b-a+3,1),\ldots, \\ \ldots,(b-a+2k-1,k-1),\ldots,(a+b-3,a-2)\}, & \text{se } 3 \leq a < b \end{cases}$$

Então, temos:

(i) Caso $a = b \geq 3$.

$$\eta(g) = a-2, \quad A(g) = \frac{(2a-3)+1}{2}(a-2) = (a-1)(a-2)$$

Logo, $A(g) + \eta(g) = (a-2)a = (a-1)^2 - 1 = \mu(g) - 1$

(ii) Caso $3 \leq a < b$.

$$\eta(g) = (b-a+1) + (a-3) = b-2,$$

$$A(g) = \frac{(b-a+1) + (a+b-3)}{2}(a-2) = (b-1)(a-2)$$

Portanto, $A(g) + \eta(g) = (a-1)(b-1) - 1 = \mu(g) - 1$.

Para o caso $K = R$, a demonstração é análoga.

4.4. <u>OBSERVAÇÕES</u>: Seja $f \in C_o(K^3)$, com $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$. Neste caso temos $\tilde{\alpha}(f) = (4,1,1,\ldots)$ e $\tilde{\beta}(f) = (2,0,\ldots)$. Portanto, $A(f) = 5$, $\eta(f) = 1$ e $\mu(f) = 8$, donde $A(f) + \eta(f) \neq \mu(f) - 1$. Daí, concluimos que a proposição (4.3) é falsa se a característica da matriz Hessiana em $0 \in K^n$ for $\leq n-3$.

§ 5. Apêndice

Conforme Arnol'd ([5], pg. 8), até o presente estágio, a teoria das singularidades é uma *ciência experimental.*

Lembramos este registro de Arnol'd porque, neste parágrafo, apresentaremos alguns resultados parciais obtidos através de verificação direta.

Nossa expectativa é a de num futuro bem próximo, obtermos resultados mais completos para os tipos de problemas abordados.

Registremos também que os cálculos feitos, envolvem técnicas de vários autores ([1], [7], [12]).

Vamos agora apresentar os nossos resultados do parágrafo, um dos quais através do:

5.1. <u>TEOREMA</u>: Seja $f : C^n,0 \to C,0$ 0-modal.

Então, f se decompõe completamente, se e somente se, $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$.

<u>Demonstração</u>: Conforme observamos em (2.4), λ_o é um invariante para equivalência estável. Sendo f 0-modal, então, f é estavelmente equivalente a um dos seguintes germes:

(i) x^2+y^{k+1}, $k \geq 1$, em $C_o(C^2)$;

(ii) x^3+y^4, em $C_o(C^2)$;

(iii) x^3+y^5, em $C_o(C^2)$;

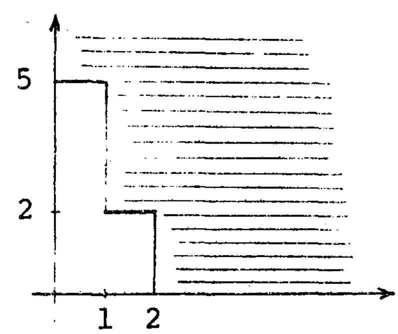
(iv) x^3+xy^3, em $C_o(C^2)$, ou,

(v) x^2y+y^{k-1}, $k \geq 4$, em $C_o(C^2)$

Para o caso (i), tem-se $\alpha(f) = k$, $\beta(f) = 0$ e portanto, $\lambda_o = k$. Como $B_f = \Sigma_{n\,\underbrace{1\ldots 1}_{k-1}\,0}$, segue que $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$.

No caso (ii), tem-se $\alpha(f) = 4$, $\beta(f) = 1$, $\lambda_o = 3$ e $B_f = \Sigma_{n\,2\,1\,0}$. Logo, $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$. Para o caso (iii), tem-se $\alpha(f) = 5$, $\beta(f) = 1$, $\lambda_o = 4$, $B_f = \Sigma_{n\,2\,1\,1\,0}$ e portanto, $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$.

Para o caso (iv), como o ideal $J = \langle 3x^2+y^3, xy^2\rangle C_o(C^2)$, tem escada dada por:



segue que $\alpha(f) \geq 5$, uma vez que, $\alpha(f)$ (e também $\beta(f)$) é um invariante para equivalência estável. Como x^3+xy^3 é quase--homogênea não degenerada do tipo $(1;\frac{1}{3},\frac{2}{9})$, segue que $d_{max} = (1 - \frac{2}{3}) + (1 - \frac{4}{9}) = \frac{8}{9}$.

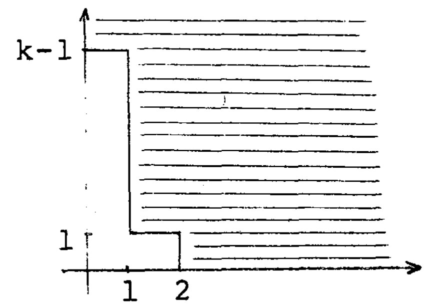
Seja $x^a y^b$, com $a+b \geq 5$. Então, $\frac{a}{3} + \frac{2b}{9} \geq \frac{2}{9}(a+b) \geq \frac{10}{9} > \frac{8}{9}$, donde se conclui que $m_2^5 \subset \langle f_1, f_1\rangle$, onde $f_1(x,y) = x^3+xy^3$. Portanto, $\alpha(f) = 5$. Por outro lado, a ordem de qualquer elemento de $m_2^3\langle 3x^2+y^3, xy^2\rangle$ com relação aos pesos $(\frac{1}{3},\frac{2}{9})$ é maior ou igual a $\frac{4}{3}$. De fato: seja $x^a y^b$, com $a+b\geq 3$. Então, $\frac{a}{3} + \frac{2b}{9} \geq \frac{6}{9}$. Como a ordem de $3x^2+y^3$ é $\frac{2}{3}$, e o grau de xy^2 é $\frac{7}{9}$, a nossa afirmação fica provada.

Sendo o grau de y^5, igual a $\frac{10}{9} < \frac{12}{9}$, concluímos que $\beta(f) \leq 2$. Por verificação direta, segue que:

$$m_2^5 \not\subset m_2^2\langle\partial f_1, f_1\rangle \quad \text{e} \quad m_2^5 \subset m_2\langle\partial f_1, f_1\rangle.$$

Portanto, $\alpha(f) = 5$, $\beta(f) = 1$, $\lambda_o = 4$ e $B_f = \Sigma_{n\,2\,1\,0}$, donde $i_{\lambda_o} = 0$.

Para o caso (v), como $I = \langle xy, x^2+(k-1)y^{k-2}\rangle C_o(C^2)$ tem escada dada por:



segue que $\alpha(f) \geq k-1$. Mas, $y^{k-2} \notin I$ e $m_2^{k-1} \subset I$, donde se conclui que $\alpha(f) = k-1$.

Como $y^{k-1} \notin m_2^2 I$, segue que $\beta(f) \leq 1$. Por outro lado, tem-se $m_2^{k-1} \subset m_2 I$, donde segue que, $\alpha(f) = k-1$, $\beta(f) = 1$, $\lambda_o = k-2$ e $B_f = \Sigma_{n\,2\,0}$.

Se $k = 4$, tem-se $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$, e neste caso, sabemos que f se decompõe completamente $(K = C)$.

Se $k \geq 5$, tem-se $i_{\lambda_o} = 0$

5.2. <u>OBSERVAÇÕES</u>: (1) Na demonstração de (5.1), caso (iv), poderíamos ter calculado $\beta(f)$ diretamente como em (v). Registremos porém, que o que foi feito não foi uma ingenuidade, mas sim, o registro de uma técnica para uma limitação superior de $\beta(f)$;

(2) o Teorema (5.1), continua verdadeiro para o caso $K = R$, excluindo o caso de f ser equivalente a $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2 + x_{n-1}^2 x_n - x_n^3$, $\varepsilon_i = \pm 1$.

5.3. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(R^n)$, 0-modal.

Então, f admite uma semi-boa-decomposição, se e somente se, $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$.

Uma Análise das Singularidades 1-Modais:

Afim de facilitar nossos cálculos, demonstremos um lema técnico:

5.4. LEMA: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$, tal que, $f(x) = \psi_1(x) + \ldots + \ldots + \psi_r(x) + \psi_{r+1}(x)$, onde $\psi_1, \ldots, \psi_{r+1}$ são monômios em $x_1, \ldots, x_n$, e, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Suponhamos que $\psi_1 + \ldots + \psi_r$ é quase-homogêneo do tipo $(d; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Se grau de ψ_{r+1} for diferente de d, com relação aos pesos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, então, $\langle\partial f, f\rangle = \langle\partial f, \psi_{r+1}\rangle$.

Demonstração: Temos $\partial_i f = \partial_i(\psi_1 + \ldots + \psi_r) + \partial_i\psi_{r+1}$, $i = 1, \ldots, n$. Sendo $\psi_1 + \ldots + \psi_r$ quase-homogêneo do tipo $(d; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, segue por (I - § 6) que

$$\alpha_1 x_1 \partial_1(\psi_1 + \ldots + \psi_r) + \ldots + \alpha_n x_n \partial_n(\psi_1 + \ldots + \psi_r) =$$
$$= d(\psi_1 + \ldots + \psi_r).$$

Seja $\psi_{r+1} = a x_1^{s_1} \ldots x_n^{s_n}$, onde $a \in K$ e $s_1, \ldots, s_n$ são inteiros não negativos. Logo,

$$\alpha_1 x_1 \partial_1 \psi_{r+1} + \ldots + \alpha_n x_n \partial_n \psi_{r+1} =$$
$$= (\alpha_1 s_1 + \ldots + \alpha_n s_n)\psi_{r+1}$$

onde grau $\varphi_{r+1} = \alpha_1 s_1 + \ldots + \alpha_n s_n$ (com relação aos pesos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$).

Portanto, $\alpha_1 x_1 \partial_1 f + \ldots + \alpha_n x_n \partial_n f = d(\varphi_1 + \ldots + \varphi_r) + (\alpha_1 s_1 + \ldots + \alpha_n s_n)\varphi_{r+1}$, e então,

$$\alpha_1 x_1 \partial_1 f + \ldots + \alpha_n x_n \partial_n f - df =$$

$$= (\alpha_1 s_1 + \ldots + \alpha_n s_n - d)\varphi_{r+1}$$

Como por hipótese $\alpha_1 s_1 + \ldots + \alpha_n s_n \neq d$, segue que $\varphi_{r+1} \in \in \langle \partial f, f\rangle$, donde, $\langle \partial f, \varphi_{r+1}\rangle \subset \langle \partial f, f\rangle$.

Sendo $d \neq 0$, segue que $\langle \partial f, f\rangle \subset \langle \partial f, \varphi_{r+1}\rangle$ e portanto, $\langle \partial f, f\rangle = \langle \partial f, \varphi_{r+1}\rangle$.

Com as notações acima, temos o:

5.5. <u>COROLÁRIO</u>: Se para cada $i = 1, \ldots, r+1$, $\varphi_1 + \ldots + \varphi_{i-1} + \varphi_{i+1} + \ldots + \varphi_{r+1}$ for quase-homogêneo do tipo $(d_i; \alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$, com grau $\varphi_i \neq d_i$ (com relação aos pesos $\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i$), então, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r+1} \in \langle \partial f, f\rangle$. Além disso, $\langle \partial f, f\rangle = \langle \partial f, \varphi_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n+1$.

Seja $f : C^n, 0 \to C, 0$ uma singularidade 1-modal. Então, por Arnol'd ([3], [5]), $f \in m_n^2$ e a característica da matriz Hessiana em $0 \in C^n$, é $n-2$ ou $n-3$.

De acordo com os referidos artigos, com excessão da singularidade $T_{p,q,r}$ (a qual descreveremos abaixo), todas são equivalentes a singularidades semi-quase-homogêneas, e são denotadas por certas letras latinas maiúsculas munidas de um índice, o qual representa a multiplicidade algébrica do germe, (isto é, μ).

Na tabela abaixo, apresentamos tais singularidades na forma $f_o + f_1$ com os respectivos tipos (conforme I - § 6).

TABELA

Singularidade	$(d;\alpha)$	f_o	f_1	grau (f_1)
K_{12}	$(21;7,3)$	x^3+y^7	axy^5	22 se $a\neq 0$
K_{13}	$(15;5,2)$	x^3+xy^5	ay^8	16 se $a\neq 0$
K_{14}	$(24;8,3)$	x^3+y^8	axy^6	26 se $a\neq 0$
Z_{11}	$(15;4,3)$	x^3y+y^5	axy^4	16 se $a\neq 0$
Z_{12}	$(11;3,2)$	x^3y+xy^4	ax^2y^3	12 se $a\neq 0$
Z_{13}	$(18;5,3)$	x^3y+y^6	axy^5	20 se $a\neq 0$
W_{12}	$(20;5,4)$	x^4+y^5	ax^2y^3	22 se $a\neq 0$
W_{13}	$(16;4,3)$	x^4+xy^4	ay^6	18 se $a\neq 0$
$J_{10}(4a^3+27\neq 0)$	$(6;2,1)$	$x^3+y^6+ax^2y^2$	0	∞
$X_9(a^2\neq 4)$	$(4;1,1)$	$x^4+y^4+ax^2y^2$	0	∞
$P_8(a^3+27\neq 0)$	$(3;1,1,1)$	$x^3+y^3+z^3+axyz$	0	∞
Q_{10}	$(24;8,6,9)$	$x^3+y^4+yz^2$	axy^3	26 se $a\neq 0$
Q_{11}	$(18;6,7,4)$	$x^3+y^2z+xz^3$	az^5	20 se $a\neq 0$
Q_{12}	$(15;5,3,6)$	$x^3+y^5+yz^2$	axy^4	17 se $a\neq 0$
S_{11}	$(16;4,5,6)$	$x^4+y^2z+xz^2$	ax^3z	18 se $a\neq 0$
S_{12}	$(13;4,5,3)$	$x^2y+y^2z+xz^3$	az^5	15 se $a\neq 0$
U_{12}	$(12;4,4,3)$	$x^3+y^3+z^4$	$axyz^2$	14 se $a\neq 0$

E, finalmente, temos $T_{p,q,r}$: $x^p + y^q + z^r + axyz$, $a \neq 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. Com exceção de $T_{p,q,r}$, segue facilmente de (I - 6.3) que $\mu(M_j) = j$.

Nossos resultados para singularidades 1-modais, são dados pelos seguintes teoremas:

5.6. TEOREMA: Seja $f \in \mathcal{m}_n \subset \mathcal{C}_o(\mathbb{C}^n)$ 1-modal.
Então, f admite uma boa-decomposição, se e somente se, $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$.

5.7. TEOREMA: Seja $f \in \mathcal{m}_n \subset \mathcal{C}_o(\mathbb{C}^n)$ 1-modal, não estavelmente equivalente a uma singularidade homogênea.
Então, f se decompõe completamente, se e somente se, $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$.

Demonstração: Inicialmente, computemos λ_o e μ para a família $T_{p,q,r}$. Para tal, seja $f_a = x^p+y^q+z^r+axyz$, com $a \neq 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$.

(i) Caso $p = 2$, $q = 3$, $r \geq 7$

Temos

$$\langle \partial f_a \rangle = \langle 2x+ayz,\ 3y^2+axz,\ rz^{r-1}+axy \rangle$$

Tomando a mudança de coordenadas dada por:

$$\begin{cases} X = 2x+ayz \\ Y = y \\ Z = z \end{cases}$$

segue que $\langle \partial f_a \rangle$ é equivalente ao ideal

$$\langle x,\ 6y^2-a^2yz^2,\ 2rz^{r-1}-a^2y^2z \rangle$$

Por Krushinirenko ([12]), segue que

$$\mu(f_a) = \mathrm{cod}_C <x,y,z^{r-1}> + \mathrm{cod}_C <x,y,z> +$$

$$+ \mathrm{cod}_C <x,6y-a^2z^2, 2rz^{r-2}-a^2y^2> = r +$$

$$+ \mathrm{cod}_C <x, 6y-a^2z^2, 2rz^{r-2}-a^2y^2>$$

Tomando a mudança de coordenadas dada por

$$\psi : \begin{cases} X = x \\ Y = 6y-a^2z^2 \\ Z = z \end{cases}$$

teremos $<x, 6y-a^2z^2, 2rz^{r-2}-a^2y^2>$ equivalente ao ideal $<x,y,z^4>$ pois $a \neq 0$ e $r-2 \geq 5$. Logo, $\mu(f_a) = r+4$.

Por outro lado temos $B_{f_a} = \Sigma_{3\,2\,1\,1\,0}$.

Por (5.4), segue que $<\partial f_a, f_a> = <\partial f_a, xyz>$. Via ψ, $<\partial f_a, f_a>$ é equivalente ao ideal

$$I = <x, 6y^2-a^2yz^2, 2rz^{r-1}-a^2y^2z, y^2z^2>$$

Como

$$yz^{r-1} = \frac{1}{2r}y(2rz^{r-1}-a^2y^2z) + \frac{a^2}{12r}yz(6y^2-a^2yz^2) +$$

$$+ \frac{a^4}{12r}z(y^2z^2)$$

$$z^r = \frac{1}{2r}z(2rz^{r-1}-a^2y^2z) + \frac{a^2}{2r}y^2z^2$$

e $\quad z^{r-1} \notin I$

segue que $m_3^{r-1} \not\subset <\partial f_a, f_a>$ e $m_3^r \subset <\partial f_a, f_a>$, donde $\alpha(f_a) = r$. Facilmente se verifica que $m_3^r \not\subset m_3 I$, e então,

$\beta(f_a) = 0$. Logo, $\lambda_o = r \geq 7$, donde $i_{\lambda_o} = 0$. Disto segue que $T_{2,3,r}$ $(r \geq 7)$ não admite uma semi-boa-decomposição, e em particular, não se decompõe completamente (a não decomposição completa, pode também ser comprovada pelo fato de termos $B_f = \Sigma_{1\,1\,1\,1\,0} + \Sigma_{1\,1\,0} + \Sigma_{1\,0}$. Logo, se ela decompuzesse completamente, teríamos $\mu = 8 < r+4$ pois $r \geq 7$, o que é um absurdo).

(ii) Caso $p = 2$, $q = 4$ e $r \geq 5$.

Com técnicas análogas, temos $\mu(f_a) = r+5$, $\alpha(f_a) = r$, $\beta(f_a) = 0$ e portanto, $\lambda_o = r$. Como $B_{f_a} = \Sigma_{3\,2\,2\,0}$, segue que $i_{\lambda_o} = 0$ pois $r \geq 5$.

Temos portanto que f_a não admite uma semi-boa-decomposição. (Neste caso, o método da decomposição do símbolo de Boardman é eficiente, uma vez que, $B_{f_a} = \Sigma_{1\,1\,1\,0} + \Sigma_{1\,1\,1\,0} + \Sigma_{1\,0}$. Portanto, se f_a se decompor completamente, tem-se $\mu(f_a) = 9 < r+5$ pois $r \geq 5$, o que é uma contradição).

(iii) Caso $p = 2$, $q \geq 5$, $r \geq 5$.

De maneira análoga, mostra-se que $\mu(f_a) = r + q + 1$, $\alpha(f_a) = r$, $\beta(f_a) = 0$ e portanto, $\lambda_o = r$. Como $B_{f_a} = \Sigma_{3\,2\,2\,0}$, segue que $i_{\lambda_o} = 0$ $(r \geq 5)$. Então, f_a não admite uma semi-boa-decomposição.

(iv) Caso $3 \leq p \leq q \leq r$, $r \geq 4$.

Por ([5]) temos que $\mu(f_a) = p + q + r - 1$. Com técnicas análogas às anteriores, mostra-se que $\alpha(f_a) = r$, $\beta(f_a)=0$ e portanto, $\lambda_o = r$. Como $B_{f_a} = \Sigma_{3\,3\,0}$ segue que $i_{\lambda_o} = 0$ e portanto, que f_a não admite uma semi-boa-decomposição. (Tanto neste caso como em (iii), o método da decomposição do símbolo de Boardman é eficiente para detectar a não decomposição completa de f_a).

Façamos agora o cálculo de λ_o e i_{λ_o} para as demais singularidades:

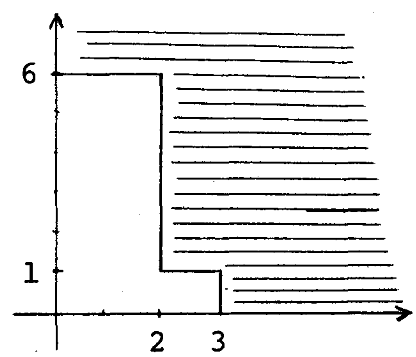
(1) Z_{13} : $f_a = x^3y + y^6 + axy^5$, $a \in C$.

Como $\mu(Z_{13}) = 13$ (primo), segue que f_a não admite uma semi-boa-decomposição, para todo $a \in C$.

Para $a = 0$, tem-se

$<\partial f_o, f_o> = <\partial f_o> = <x^2y, x^3+6y^5>$

A escada de $<\partial f_o>$ é dada por:



Portanto, $xy^5 \notin <\partial f_o>$, e então, $\alpha(f_o) \geq 7$. Facilmente se mostra que $m_2^7 \subset <\partial f_o>$, donde, $\alpha(f_o) = 7$.

Computemos agora $\beta(f_o)$:

Fixemos 2 como peso para x e 1 como peso para y. Com relação a tais pesos temos que, ordem $(x^2y) = 5$ e ordem $(x^3+6y^5) = 5$. Portanto, se $h \in <x^2y, x^3+6y^5>$, segue que ordem $(h) \geq 5$.

Por outro lado, se $g \in m_2^3$, tem-se ordem $(g) \geq 3$. Logo, a ordem de um elemento qualquer de $m_2^3<x^2y, x^3+6y^5>$ é ≥ 8.

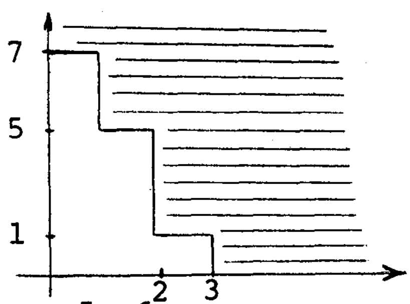
Como ordem $(y^7) = 7 < 8$, segue que $m_2^7 \not\subset m_2^3<x^2y, x^3+6y^5>$, donde, $\beta(f_o) \leq 2$. Facilmente se verifica que $m_2^7 \subset m_2^2 <\partial f_o>$.

Então, $\alpha(f_o) = 7$, $\beta(f_o) = 2$ e $\lambda_o = 5$. Como $B_{f_o} = \Sigma_{2\ 2\ 2\ 0}$, segue que $i_{\lambda_o} = 0$, e portanto, que f_o não admite uma semi-boa-decomposição.

Para $a \neq 0$, temos

$$<\partial f_a, f_a> = <3x^2y+ay^5, x^3+6y^5+5axy^4, xy^5>$$

conforme (5.4). Como $-x\partial_1 f_a + 3y\partial_2 f_a = 18y^6 + 14axy^5$, segue que a escada de $<\partial f_a>$ é dada por:



donde se conclui que $xy^5 \notin <\partial f_a>$. Como $xy^5, y^6 \in <\partial f_a, f_a>$, segue que $\alpha(f_a) = 6$, $\beta(f_a) = 0$ e portanto, $\lambda_o = 6$.

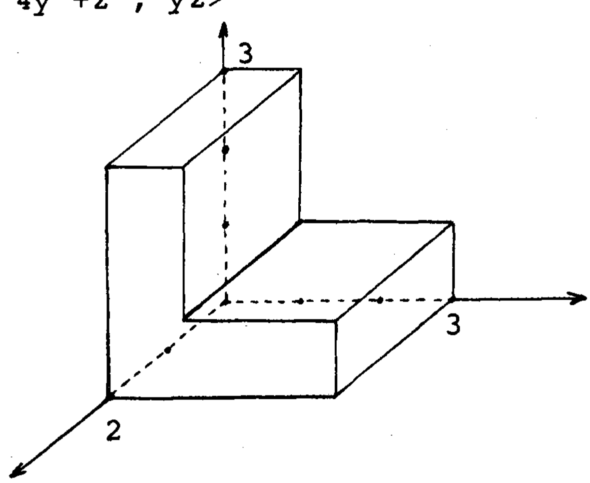
Como $B_{f_a} = \Sigma_{2\ 2\ 2\ 0}$, segue que $i_{\lambda_o} = 0$, e então, que f_a não admite uma semi-boa-decomposição.

(2) Q_{10} : $f_a = x^3 + y^4 + yz^2 + axy^3$, $a \in C$.

Para $a = 0$, tem-se

$$<\partial f_o, f_o> = <\partial f_o> = <x^2, 4y^3+z^2, yz>$$

A escada de $<\partial f_o>$ é dada por:



Portanto, $xz^2 \notin \langle\partial f_o\rangle$, e então, $xy^3 \notin \langle\partial f_o\rangle$. Logo, $\alpha(f_o) \geq 5$. Facilmente se verifica que $\alpha(f_o) = 5$.

Fixemos 2, 1 e 2 como pesos para x, y e z respectivamente. Com relação a eles temos: ordem $(x^2) = 4$, ordem $(4y^3+z^2) = 3$ e ordem $(yz) = 3$. Portanto, se $g \in \langle\partial f_o\rangle$, tem-se ordem $(g) \geq 3$. Logo, para $h \in m_3^3\langle\partial f_o\rangle$, tem-se ordem $(h) \geq$ ≥ 6.

Como ordem $(y^5) = 5$, segue que $m_3^5 \not\subset m_3^3\langle\partial f_o\rangle$, donde $\beta(f_o) \leq 2$. Verifica-se que $m_3^5 \subset m_3^2\langle\partial f_o\rangle$. Então, $\alpha(f_o) = 5$, $\beta(f_o) = 2$ e $\lambda_o = 4$. Como $B_{f_o} = \Sigma_{3\ 3\ 0}$, segue que $i_{\lambda_o} = 0$, e portanto, que f_o não admite uma semi-boa-decomposição.

Para $a \neq 0$, tem-se

$$\langle\partial f_a, f_a\rangle = \langle 3x^2+ay^3,\ 4y^3+z^2+3axy^2,\ yz,\ xy^3\rangle$$

conforme (5.4). Como $y^3 \notin \langle\partial f_a, f_a\rangle$, segue que $\alpha(f_a) \geq 4$.

Verifica-se que $m_3^4 \subset \langle\partial f_a, f_a\rangle$. Como $xy^3 \notin \langle\partial f_a\rangle$, tem-se $\alpha(f_a) = 4$, $\beta(f_a) = 0$ e portanto, $\lambda_o = 4$. Desde que, $B_{f_a} = \Sigma_{3\ 3\ 0}$, tem-se que $i_{\lambda_o} = 0$, e então, que f_a não admite uma semi-boa-decomposição.

Para as singularidades restantes, apenas registraremos os resultados:

(3) K_{12} : $f_a = x^3 + y^7 + axy^5$, $a \in C$.

Se $a = 0$, então $\alpha(f_o) = 7$, $\beta(f_o) = 1$ e $\lambda_o = 6$. Como $B_{f_o} = \Sigma_{2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0}$, segue que $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$. Neste caso, f_a se decompõe completamente.

Para $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 7$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_o = 7$. Como $B_{f_a} = \Sigma_{2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 0}$, segue que $i_{\lambda_o} = 0$.

(4) Q_{12} : $f_a = x^3 + y^5 + yz^2 + axy^4$, $a \in C$.

Para $a = 0$, tem-se $\alpha(f_o) = 6$, $\beta(f_o) = 2$ e $\lambda_o = 4$. Como $B_{f_o} = \Sigma_{3\ 3\ 0}$, segue que $i_{\lambda_o} = 0$.

Se $a \neq 0$, então, $\alpha(f_a) = 5$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_o = 5$. Sendo $B_{f_a} = \Sigma_{3\ 3\ 0}$, tem-se $i_{\lambda_o} = 0$.

(5) P_8 : $f_a = x^3 + y^3 + z^3 + axyz$, $a^3 + 27 \neq 0$, $a \in C$.

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_o) = 4$, $\beta(f_o) = 2$ e $\lambda_o = 2$. Desde que $B_{f_o} = \Sigma_{3\ 3\ 0}$, segue que $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$. Neste caso temos decomposição completa.

Se $a \neq 0$ $(a^3+27 \neq 0)$, tem-se os mesmos valores para os elementos referidos no caso $a = 0$. Neste caso, não temos decomposição completa, mas, temos boa-decomposição para f_a.

(6) X_9 : $f_a = x^4 + y^4 + ax^2y^2$; $a^2 \neq 4$, $a \in C$.

Para todo $a \in C$ tem-se $\alpha(f_a) = 5$, $\beta(f_a) = 2$ e portanto, $\lambda_o = 3$. Sendo $B_{f_a} = \Sigma_{2\ 2\ 2\ 0}$, tem-se $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$. No caso $a = 0$, temos decomposição completa. No caso $a \neq 0$ $(a^2 \neq 4)$, temos boa-decomposição mas não decomposição completa.

(7) K_{13} : $f_a = x^3 + xy^5 + ay^8$, $a \in C$.

Para $a = 0$, tem-se $\alpha(f_o) = 9$, $\beta(f_o) = 1$ e $\lambda_o = 8$. Para $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 8$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_o = 8$. Como $B_{f_a} = \Sigma_{2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 0}$ para todo $a \in C$, segue que $i_{\lambda_o} = 0$ e portanto, que f_a não admite uma semi-boa-decomposição.

(8) K_{14} : $f_a = x^3 + y^8 + axy^6$, $a \in C$.

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_o) = 8$, $\beta(f_o) = 1$ e $\lambda_o = 7$. Sendo $B_{f_o} = \Sigma_{2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0}$, segue que $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$. No caso, temos decomposição completa.

Se $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 8$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_o = 8$. Desde que $B_{f_a} = \Sigma_{2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0}$, segue que $i_{\lambda_o} = 0$.

(9) Z_{11} : $f_a = x^3y + y^5 + axy^4$, $a \in C$.

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_o) = 6$, $\beta(f_o) = 2$ e $\lambda_o = 4$.

Se $a \neq 0$, então, $\alpha(f_a) = 5$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_o = 5$. Como $B_{f_a} = \Sigma_{2\ 2\ 2\ 0}$, para todo $a \in C$, segue que $i_{\lambda_o} = 0$.

(10) Z_{12} : $f_a = x^3y + xy^4 + ax^2y^3$, $a \in C$.

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_o) = 7$, $\beta(f_o) = 2$ e $\lambda_o = 5$.

Se $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 6$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_o = 6$. Como $B_{f_a} = \Sigma_{2\ 2\ 2\ 0}$, para todo $a \in C$, segue que $i_{\lambda_o} = 0$.

(11) W_{12} : $f_a = x^4 + y^5 + ax^2y^3$, $a \in C$.

Para $a = 0$, tem-se $\alpha(f_o) = 6$, $\beta(f_o) = 2$ e $\lambda_o = 4$.

Se $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 5$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_o = 5$. Para todo $a \in C$, $B_{f_a} = \Sigma_{2\ 2\ 2\ 1\ 0}$. No caso $a = 0$, temos $i_{\lambda_o} \neq 0$, $i_{\lambda_o+1} = 0$ e decomposição completa. Nos demais casos temos $i_{\lambda_o} = 0$.

(12) W_{13} : $f_a = x^4 + xy^4 + ay^6$, $a \in C$.

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_o) = 7$, $\beta(f_o) = 2$ e $\lambda_o = 5$.

Para $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 6$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_o = 6$. Como $B_{f_a} = \Sigma_{2\,2\,2\,1\,0}$, para todo $a \in C$, segue que $i_{\lambda_o} = 0$.

(13) Q_{11} : $f_a = x^3 + y^2z + xz^3 + az^5$, $a \in C$.

Para $a = 0$, tem-se $\alpha(f_o) = 6$, $\beta(f_o) = 2$ e $\lambda_o = 4$. Se $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 5$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_o = 5$. Como $B_{f_a} = \Sigma_{3\,3\,0}$ para todo $a \in C$, segue que $i_{\lambda_o} = 0$.

(14) S_{11} : $f_a = x^4 + y^2z + xz^2 + ax^3z$, $a \in C$.

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_o) = 5$, $\beta(f_o) = 2$ e $\lambda_o = 3$. Se $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 4$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_o = 4$. Como $B_{f_a} = \Sigma_{3\,3\,0}$ para todo $a \in C$, segue que $i_{\lambda_o} = 0$.

(15) S_{12} : $f_a = x^2y + y^2z + xz^3 + az^5$, $a \in C$.

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_o) = 6$, $\beta(f_o) = 2$ e $\lambda_o = 4$. Se $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 5$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_o = 5$. Como $B_{f_a} = \Sigma_{3\,3\,0}$ para todo $a \in C$, então $i_{\lambda_o} = 0$.

(16) U_{12} : $f_a = x^3 + y^3 + z^4 + axyz^2$

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_o) = 5$, $\beta(f_o) = 2$ e $\lambda_o = 3$. Se $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 4$, $\beta(f_a) = 0$ e $\lambda_o = 4$. Como $B_{f_a} = \Sigma_{3\,3\,1\,0}$ para todo $a \in C$, segue que $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$ se $a = 0$, caso em que f_a se decompõe completamente, e, $i_{\lambda_o} = 0$ se $a \neq 0$.

(17) J_{10} : $f_a = x^3 + y^6 + ax^2y^2$, $a \in C$, $4a^3+27 \neq 0$.

Se $a = 0$, tem-se $\alpha(f_o) = 6$, $\beta(f_o) = 1$ e $\lambda_o = 5$. Como $B_{f_o} = \Sigma_{2\,2\,1\,1\,1\,0}$, segue que $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$, caso em que f_a se decompõe completamente.

Se $a \neq 0$, tem-se $\alpha(f_a) = 7$, $\beta(f_a) = 1$ e $\lambda_o = 6$. Sendo $B_{f_a} = \Sigma_{2\,2\,1\,1\,0}$, segue que $i_{\lambda_o} = 0$.

5.8. <u>OBSERVAÇÕES</u>: (1) (5.6) e (5.7) continuam verdadeiros para o caso real, excluindo também para o caso de (5.7), as singularidades estavelmente equivalentes à singularidades homogêneas.

(2) Por ([26]), sabemos que X_9 $(a\neq 0,\ a^2\neq 4)$, não se decompõe completamente.

Uma Análise das Singularidades 2-Modais, Estavelmente Equivalentes à Singularidades em Duas Variáveis:

O resultado desta análise se resume no:

5.9. <u>TEOREMA</u>: Seja $f : C^n,0 \to C,0$ 2-modal, estavelmente equivalente a uma singularidade em duas variáveis. Então, f se decompõe completamente, se e somente se, $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$.

<u>Demonstração</u>: Limitaremos apenas em registrar os elementos calculados em cada caso.

(1) E_{18} : $f_{a,b} = x^3 + y^{10} + axy^7 + bxy^8$; $a,b \in C$.

$a = b = 0$: $\alpha = 10$, $\beta = 1$, $\lambda_o = 9$, $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$

$a \neq 0$ ou
$b \neq 0$: $\alpha = 10$, $\beta = 0$, $\lambda_o = 10$ e $i_{\lambda_o} = 0$

(2) E_{19} : $f_{a,b} = x^3 + xy^7 + ay^{11} + by^{12}$; $a,b \in C$.

$a = b = 0$: $\alpha = 13$, $\beta = 1$, $\lambda_o = 12$ e $i_{\lambda_o} = 0$

$a = 0$, $b \neq 0$: $\alpha = 12$, $\beta = 0$, $\lambda_o = 12$ e $i_{\lambda_o} = 0$

$a \neq 0$: $\alpha = 11$, $\beta = 0$, $\lambda_o = 11$ e $i_{\lambda_o} = 0$

(3) E_{20} : $f_{a,b} = x^3 + y^{11} + axy^8 + bxy^9$; $a,b \in C$.

$a = b = 0$: $\alpha = 11$, $\beta = 1$, $\lambda_o = 10$, $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$

$a \neq 0$ ou
$b \neq 0$: $\alpha = 11$, $\beta = 0$, $\lambda_o = 10$ e $i_{\lambda_o} = 0$

(4) Z_{17} : $f_{a,b} = x^3y + y^8 + axy^6 + bxy^7$; $a,b \in C$.

$a = b = 0$: $\alpha = 9$, $\beta = 2$, $\lambda_o = 7$ e $i_{\lambda_o} = 0$

$a \neq 0$ ou
$b \neq 0$: $\alpha = 8$, $\beta = 0$, $\lambda_o = 8$ e $i_{\lambda_o} = 0$

(5) Z_{18} : $f_{a,b} = x^3y + xy^6 + ay^9 + by^{10}$; $a,b \in C$.

$a = b = 0$: $\alpha = 11$, $\beta = 2$, $\lambda_o = 9$ e $i_{\lambda_o} = 0$

$a = 0$, $b \neq 0$: $\alpha = 10$, $\beta = 0$, $\lambda_o = 10$ e $i_{\lambda_o} = 0$

$a \neq 0$: $\alpha = 9$, $\beta = 0$, $\lambda_o = 9$ e $i_{\lambda_o} = 0$

(6) $Z_{19} : f_{a,b} = x^3y + y^9 + axy^7 + bxy^8; \quad a,b \in C.$

$a = b = 0 : \alpha = 10, \ \beta = 2, \ \lambda_o = 8$ e $i_{\lambda_o} = 0$

$a \neq 0$ ou $b \neq 0$: $\alpha = 9, \ \beta = 0, \ \lambda_o = 9$ e $i_{\lambda_o} = 0$

(7) $W_{17} : f_{a,b} = x^4 + xy^5 + ay^7 + by^8; \quad a,b \in C.$

$a = b = 0 \quad : \alpha = 9, \ \beta = 2, \ \lambda_o = 7$ e $i_{\lambda_o} = 0$

$a = 0, \ b \neq 0 : \alpha = 8, \ \beta = 0, \ \lambda_o = 8$ e $i_{\lambda_o} = 0$

$a \neq 0 \quad : \alpha = 7, \ \beta = 0, \ \lambda_o = 7$ e $i_{\lambda_o} = 0$

(8) $W_{18} : f_{a,b} = x^4 + y^7 + ax^2y^4 + bx^2y^5; \quad a,b \in C.$

$a = b = 0 : \alpha = 8, \ \beta = 2, \ \lambda_o = 6, \ i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$

$a \neq 0$ ou $b \neq 0$: $\alpha = 7, \ \beta = 0, \ \lambda_o = 7$ e $i_{\lambda_o} = 0$

(9) $K_{16} : f_{a,b} = x^3 + ax^2y^3 + y^9 + bxy^7 \quad (4a^3+27 \neq 0; \ a,b \in C).$

$a = b = 0 \quad : \alpha = 9, \ \beta = 1, \ \lambda_o = 8, \ i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$

$a = 0, \ b \neq 0 \quad : \alpha = 9, \ \beta = 0, \ \lambda_o = 9$ e $i_{\lambda_o} = 0$

$a \neq 0$ e $b \neq 0$: $\alpha = 10, \ \beta = 0, \ \lambda_o = 10$ e $i_{\lambda_o} = 0$

$a \neq 0, \ b = 0 \quad : \alpha = 11, \ \beta = 1, \ \lambda_o = 10$ e $i_{\lambda_o} = 0$

(10) $J_{3,p} : f_{a,b} = x^3 + x^2y^3 + ay^{9+p} + by^{10+p} \quad (p > 0,$
$a \neq 0; \ a,b \in C, \ \mu = 16+p).$

$\alpha = 9+p, \quad \beta = 0, \quad \lambda_o = 9+p$ e $i_{\lambda_o} = 0$

(11) $Z_{1,0}$: $f_{a,b} = x^3y+ax^2y^3+bxy^6+y^7$ $(4a^3+27\neq 0; a,b\in C, \mu=15)$

$a = b = 0$: $\alpha = 8$, $\beta = 2$, $\lambda_o = 6$ e $i_{\lambda_o} = 0$

$a = 0, b \neq 0$: $\alpha = 7$, $\beta = 0$, $\lambda_o = 7$ e $i_{\lambda_o} = 0$

$a \neq 0, b = 0$: $\alpha = 9$, $\beta = 2$, $\lambda_o = 7$ e $i_{\lambda_o} = 0$

$a \neq 0, b \neq 0$: $\alpha = 8$, $\beta = 0$, $\lambda_o = 8$ e $i_{\lambda_o} = 0$

(12) $Z_{1,p}$: $f_{a,b} = x^3y+x^2y^3+ay^{7+p}+by^{8+p}$ $(p>0, a\neq 0; a,b\in C, \mu=15+p)$

$\alpha = 7+p$, $\beta = 0$, $\lambda_o = 7+p$ e $i_{\lambda_o} = 0$

(13) $W_{1,0}$: $f_{a,b} = x^4+ax^2y^3+bx^2y^4+y^6$ $(a^2\neq 4; a,b\in C, \mu=15)$

$a = b = 0$: $\alpha = 7$, $\beta = 2$, $\lambda_o = 5$, $i_{\lambda_o} \neq 0$ e $i_{\lambda_o+1} = 0$

$a = 0, b \neq 0$: $\alpha = 6$, $\beta = 0$, $\lambda_o = 6$ e $i_{\lambda_o} = 0$

$a \neq 0, b = 0$: $\alpha = 8$, $\beta = 2$, $\lambda_o = 6$ e $i_{\lambda_o} = 0$

$a \neq 0, b \neq 0$: $\alpha = 7$, $\beta = 0$, $\lambda_o = 7$ e $i_{\lambda_o} = 0$

(14) $W_{1,p}$: $f_{a,b} = x^4+x^2y^3+ay^{6+p}+by^{7+p}$ $(p>0, a\neq 0; a,b\in C, \mu=15+p)$

$\alpha = 6+p$, $\beta = 0$, $\lambda_o = 6+p$ e $i_{\lambda_o} = 0$

(15) $W^{\#}_{1,2q-1}$: $f_{a,b} = (x^2+y^3)^2 + axy^{4+q} + bxy^{5+q}$ $(q > 0,$
$a \neq 0;\ a,b \in C,\ \mu = 15+2q)$

$\alpha = 6 + q$, $\beta = 1$, $\lambda_o = 5 + q$ e $i_{\lambda_o} = 0$

(16) $W^{\#}_{1,2q}$: $f_{a,b} = (x^2+y^3)^2 + ax^2y^{3+q} + bx^2y^{4+q}$ $(q > 0,$
$a \neq 0;\ a,b \in C,\ \mu = 15+2q)$

$\alpha = 6 + q$, $\beta = 0$, $\lambda_o = 6 + q$ e $i_{\lambda_o} = 0$

5.10. <u>OBSERVAÇÕES</u>: (1) As famílias acima, são dadas em ([5]).

(2) Para as demais singularidades 2-modais, aquelas que analisamos, comprovam o mesmo resultado dado por (5.9).

Decomposição de uma Singularidade f m-Modal ($m \leq 2$), em Termos da Região $R(f)$

Analisando as singularidades m-modais ($m \leq 2$) estavelmente equivalentes à singularidades em duas variáveis, em termos da região descrita por (4.1), obtivemos os seguintes resultados:

5.11. <u>TEOREMA</u>: Seja $f : C^n, 0 \to C, 0$ m-modal ($m \leq 2$), estavelmente equivalente a uma singularidade em duas variáveis, com f diferente de X_9.
Então, f admite uma semi-boa-decomposição, se e somente se, $(f) + \eta(f) = \mu(f) - 1$.

5.12. <u>COROLÁRIO</u>: Nas condições acima, seja f m-modal, com $m = 0, 2$.
Então, f se decompõe completamente, se somente se, $A(f) + \eta(f) = \mu(f) - 1$.

5.13. <u>COROLÁRIO</u>: Nas condições de (5.11), seja f 1-modal, não estavelmente equivalente a $X^4+Y^4 \pm 6X^2Y^2$.
Então, f se decompõe completamente, se e somente, $A(f) + \eta(f) = \mu(f) - 1$.

<u>Demonstração (do Teorema)</u>:

(i) $m = 0$.

Se f for estavelmente equivalente a $g(x,y) = x^2y + y^{k-1}$ $(k \geq 4)$, então temos:

$$\tilde{\alpha}(f) = (k-1, 1, 1, 1, \ldots), \qquad \tilde{\beta}(f) = (1, 0, \ldots)$$

e portanto, $A(f) = \frac{k}{2}$, $\eta(f) = 1$. Logo, $A(f) + \eta(f) = \frac{k+2}{2}$ e $\mu(f) = k$.

Se $k = 4$, tem-se $A(f) + \eta(f) = \mu(f) - 1$. Neste caso, sabemos que f se decompõe completamente $(K = C)$. Se $k \geq 5$, tem-se $A(f) + \eta(f) < \mu(f) - 1$.

Se f for estavelmente equivalente a $g(x,y) = x^3 + xy^3$, teremos $\tilde{\alpha}(f) = (5, 2, 1, \ldots)$ e $\tilde{\beta} = (1, 0, \ldots)$ e portanto, $A(f) = \frac{7}{2}$ e $\eta(f) = 2$. Logo, $A(f) + \eta(f) \neq \mu(f) - 1$.

Para os demais casos, o resultado segue de (4.3).

(ii) $m = 1$.

Para este caso, apresentemos a seguinte tabela:

<u>*TABELA A*</u>

Singularidade		$A(f)$	$\eta(f)$	$A(f) + \eta(f)$	$\mu(f)-1$
K_{12} :	$a = 0$	6	5	11	11
	$a \neq 0$	0	4	4	11
K_{13} :	$a = 0$	13/2	4	21/2	12
	$a \neq 0$	0	4	4	12

K_{14} :	$a = 0$	7	6	13	13
	$a \neq 0$	0	5	5	13
Z_{11} :	$a = 0$	9	2	11	10
	$a \neq 0$	0	2	2	10
Z_{12} :	$a = 0$	8	2	10	11
	$a \neq 0$	0	2	2	11
Z_{13} :	$a = 0$	11	2	13	12
	$a \neq 0$	0	2	2	12
W_{12} :	$a = 0$	8	3	11	11
	$a \neq 0$	0	3	3	11
W_{13} :	$a = 0$	10	3	13	12
	$a \neq 0$	0	3	3	12
J_{10} :	$a = 0$	5	4	9	9
	$a \neq 0$	5	3	8	9
X_9 :	$a = 0$	6	2	8	8
	$a = \pm 6$	6	2	8	8
	$a \neq \pm 6; 0$	7	2	9	8

(iii) $m = 2$.

Também neste caso, apresentemos a tabela:

TABELA B

Singularidade		A(f)	$\eta(f)$	A(f) + $\eta(f)$	$\mu(f)-1$
E_{18}	a=b=0	9	8	17	17
	a=0, b≠0	0	7	7	17
	a≠0	0	6	6	17
E_{19}	a=b=0	19/2	6	31/2	18
	a=0, b≠0	0	6	6	18
	a≠0	0	6	6	18
E_{20}	a=b=0	10	9	19	19
	a=0, b≠0	0	8	8	19
	a≠0	0	7	7	19
W_{17}	a=b=0	13	4	17	16
	a=0, b≠0	0	4	4	16
	a≠0	0	4	4	16
W_{18}	a=b=0	12	5	17	17
	a=0, b≠0	0	5	5	17
	a≠0	0	4	4	17
Z_{17}	a=b=0	15	2	17	16
	a=0, b≠0	0	2	2	16
	a≠0	0	2	2	16
Z_{18}	a=b=0	12	2	14	17
	a=0, b≠0	8	2	10	17
	a≠0	15/2	2	19/2	17

Z_{19} :	$a=b=0$	17	2	19	18
	$a=0, b\neq 0$	0	2	2	18
	$a\neq 0$	8	2	10	18
K_{16} :	$a=b=0$	8	7	15	15
	$a=0, b\neq 0$	0	6	6	15
	$a\neq 0, b=0$	8	5	13	15
	$a\neq 0, b\neq 0$	0	5	5	15
$J_{3,p}$:		0	5	5	15+p
$Z_{1,0}$:	$a=b=0$	13	5	18	14
	$a=0, b\neq 0$	0	2	2	14
	$a\neq 0, b=0$	10	2	12	14
	$a\neq 0, b\neq 0$	13/2	2	17/2	14
$Z_{1,p}$:		0	2	2	14+p
$W_{1,0}$:	$a=b=0$	10	4	14	14
	$a, b\neq 0, a^2\neq 30$	0	3	3	14
	$a^2=30, b\neq 0$	6	3	9	14
	$a\neq 0, a^2\neq 30, b=0$	12	3	15	14
	$a^2=30, b=0$	10	3	13	14
	$a=0, b\neq 0$	0	4	4	14
$W_{1,p}$:		0	3	3	14+p
$W^{\#}_{1,2q-1}$:		$5+\frac{q}{2}$	3	$8+\frac{q}{2}$	13+2q
$W^{\#}_{1,2q}$:		0	3	3	14+2q

Uplas de Invariantes para Singularidades m-Modais ($m \leq 2$), em Duas Variáveis

Aproveitando os cálculos feitos, vamos dar *uplas* de invariantes diferenciáveis que caracterizam os tipos $M_j^!s$, para singularidades m-modais ($m \leq 2$), estavelmente equivalentes à singularidades em duas variáveis.

(i) $m = 0$

Singularidade	$u(f) = (\mu(f), \lambda_o(f))$
A_k ; $k \geq 1$	(k,k)
D_k ; $k \geq 4$	$(k,k-2)$
E_6	$(6,3)$
E_7	$(7,4)$
E_8	$(8,4)$

(ii) $m = 1$

Singularidade	$u(f) = (\mu(f), \alpha(f), \eta(f))$
X_9	$(9,5,2)$
J_{10}	$(10,6,4)$ ou $(10,7,3)$
Z_{11}	$(11,6,2)$ ou $(11,5,2)$
K_{12}	$(12,7,5)$ ou $(12,7,4)$
Z_{12}	$(12,7,2)$ ou $(12,6,2)$
W_{12}	$(12,6,3)$ ou $(12,5,3)$
K_{13}	$(13,9,4)$ ou $(13,8,4)$
Z_{13}	$(13,7,2)$ ou $(13,6,2)$
W_{13}	$(13,7,3)$ ou $(13,6,3)$
K_{14}	$(14,8,6)$ ou $(14,8,5)$

(iii) $m = 2$

Singularidade	$u(f) = (\mu(f),\ \alpha(f),\ \alpha(\delta^2\langle f\rangle),\ \beta(f),\ \eta(f))$
E_{18}	(18,10,8,1,8), (18,10,6,0,6) ou (18,10,7,0,7)
Z_{18}	(18,11,6,2,2), (18,9,6,0,2) ou (18,10,6,0,2)
W_{18}	(18,8,6,2,5), (18,7,5,0,4) ou (18,7,5,0,5)
E_{20}	(20,11,9,1,9), (20,11,7,0,7) ou (20,11,8,0,8)
E_{19}	(19,13,6,1,6), (19,11,6,0,6) ou (19,12,6,0,6)
W_{17}	(17,9,4,2,4), (17,7,4,0,4) ou (17,8,4,0,4)
Z_{17}	(17,9,6,2,2) ou (17,8,6,0,2)
Z_{19}	(19,10,7,2,2) ou (19,9,7,0,2)
$J_{3,p}$ $(p > 0)$	(16+p,p+9,5,0,5)
$Z_{1,p}$ $(p > 0)$	(15+p,7+p,5,0,2)
$W_{1,p}$ $(p > 0)$	(15+p,6+p,4,0,3)
$W^{\#}_{1,2q-1}$ $(q > 0)$	(14+2q,6+q,4,1,3)
$W^{\#}_{1,2q}$ $(q > 0)$	(15+2q,6+q,4,0,3)
K_{16}	(16,9,7,1,7), (16,9,6,0,6), (16,11,5,1,5) ou (16,10,5,0,5)
$W_{1,0}$	(15,7,5,2,4), (15,7,4,0,3), (15,8,4,2,3), (15,6,4,0,4) ou (15,8,5,2,3)
$Z_{1,0}$	(15,8,5,2,2), (15,7,5,0,2), (15,9,5,2,2), (15,8,5,0,2) ou (15,7,5,0,3)

5.14. <u>OBSERVAÇÕES</u>: (1) Como podemos constatar através da singularidade X_9, o estudo da decomposição completa de um germe estavelmente equivalente a um germe em duas variáveis, *parece* ser mais eficiente usando a identidade algébrica $A(f) + \eta(f) = \mu(f) - 1$, ao invés do invariante λ_o.

(2) Resultados análogos ao (5.11), também temos obtido para singularidades com modalidade interna 3, classificadas recentemente por ([24]). Lembremos que as com modalidade interna ≤ 2, estão contidas nas com modalidade ≤ 2.

(3) Como podemos constatar pelas uplas de invariantes dadas para $m = 1, 2$, $\alpha(f)$, $\beta(f)$ e $\eta(f)$, não são *invariantes topológicos* (conforme Lê Dũng Trãng, Ramanujam e Teissier).

CAPÍTULO IV

SÍMBOLO DE BOARDMAN E (r,k)-DETERMINAÇÃO

Neste capítulo, mostraremos para uma classe bastante ampla de germes, que o comprimento do símbolo de Boardman, está mais relacionado com a (r,k)-determinação do que com a determinação usual, isto é, $(0,k)$-determinação.

Para justificar certos conceitos que introduziremos, consideremos o seguinte exemplo:

1.1. EXEMPLO:

Seja $f : K^2,0 \to K,0$ definido por $f(x,y)=x^8+y^9+x^3y^4$. Mostremos que $m_2^4<f> \subset m_2^5<\partial_1 f,\partial_2 f,f>$, onde

$\partial_1 f = 8x^7 + 3x^2y^4$ e $\partial_2 f = 9y^8 + 4x^3y^3$

Como:

$$x^4 f = x^{12}+x^4y^9+x^7y^4 = \frac{1}{8}x^5\partial_1 f + \frac{5}{32}x^4y\partial_2 f - \frac{13}{32}xy^5(x^3y^4);$$

$$x^3yf = x^{11}y+x^3y^{10}+x^6y^5 = \frac{1}{8}x^4y\partial_1 f +$$
$$+ \frac{5}{32}x^3y^2\partial_2 f - \frac{13}{32}y^6(x^3y^4);$$

$$x^2y^2f = x^{10}y^2+x^2y^{11}+x^5y^6 = (\frac{1}{8}x^3y^2 - \frac{13}{96}y^7)\partial_1 f +$$
$$+ \frac{5}{32}x^2y^3\partial_2 f + \frac{13}{12}x^4y^3(x^3y^4);$$

$$xy^3f = x^9y^3+xy^{12}+x^4y^7 = \frac{5}{27}x^2y^3\partial_1 f + (\frac{1}{9}xy^4 - \frac{13}{108}x^6)\partial_2 f +$$
$$+ \frac{117}{108}x^3y^4(x^3y^4), \text{ e}$$

$$y^4f = x^8y^4+y^{13}+x^3y^8 = \frac{5}{27}xy^4\partial_1 f + \frac{1}{9}y^5\partial_2 f - \frac{13}{27}x^5(x^3y^4),$$

e lembrando que $<\partial_1 f,\partial_2 f,f> = <\partial_1 f,\partial_2 f,x^3y^4>$, segue que, $m_2^4<f> \subset m_2^5<\partial_1 f,\partial_2 f,f>$.

Por outro lado, $m_2^3<f> \not\subset m_2^4<\partial_1 f,\partial_2 f,f>$.

De fato: mostrar que $m_2^3<f> \not\subset m_2^4<\partial_1 f,\partial_2 f,f>$ é equivalente mostrar que $m_2^3<f> \not\subset m_2^4<\partial_1 f,\partial_2 f>$.

Temos que $xy^2f = x^9y^2 + xy^{11} + x^4y^6$.

Como $\pi_{12}\ (m_2^4<\partial_1 f,\partial_2 f>)$ é o K-espaço vetorial dado por:

$$<x^{12},x^{11}y,x^{10}y^2,x^9y^3,x^8y^4,x^7y^5,x^6y^6,x^5y^7,x^4y^8,x^3y^9,$$
$$x^2y^{10},x^{11},x^{10}y,x^8y^3,x^7y^4,x^6y^5,x^5y^6,x^4y^7,x^3y^8,x^2y^9,$$
$$x^7y^3,x^6y^4,x^5y^5,x^3y^7,x^2y^8,8x^9y^2+3x^4y^6,9xy^{11}+4x^4y^6>_R$$

e, $\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 4 \end{bmatrix} \neq 0$, segue que $xy^2f \not\in m_2^4<\partial_1 f,\partial_2 f>$.

Seja $\partial_{i_1 \ldots i_k} f = \dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}$, $1 \le i_1,\ldots,i_k \le 2$,

onde $x_{i_1} = x$ e $x_{i_2} = y$.

Consideramos os seguintes ideais:

$I = <f>$

$\delta I = I_1 = <\partial_1 f,\partial_2 f,x^3y^4> = <\partial_1 f,\partial_2 f,f>$

$$\delta^2 I = I_2 = \langle \partial_{11}f, \partial_{12}f, \partial_{22}f, x^2y^4, x^3y^3 \rangle =$$

$$= \langle 28x^6+3xy^4, 6y^7+x^3y^2, x^2y^3 \rangle$$

$$\delta^3 I = I_3 = \langle \partial_{111}f, \partial_{112}f, \partial_{122}f, \partial_{222}f, xy^4, x^2y^3, x^3y^2 \rangle =$$

$$= \langle 56x^5+y^4, 21y^6+x^3y, xy^3, x^2y^2 \rangle$$

$$\delta^4 I = I_4 = m_2^3, \quad I_5 = m_2^2 \quad \text{e} \quad I_6 = m_2$$

Logo, temos que $I_i \subset m_2 I_{i+1}$, $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ e, $m_2^4 I \subset \subset m_2^5 I_1$.

Seja $I \subset m_n \subset C_o(K^n)$ um ideal, $\theta_1, \ldots, \theta_n$ números racionais positivos e $x_1, \ldots, x_n$ um sistema de coordenadas nas vizinhanças de $0 \in K^n$. Seja $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$.

1.2. <u>DEFINIÇÃO</u>: I é dito um ideal do *tipo quase-homogêneo com relação a* θ, se existir um K-isomorfismo de álgebras $\varphi : C_o(K^n) \to C_o(K^n)$, tal que:

(i) $\varphi(I) = \langle g_1, \ldots, g_\ell \rangle$, e,

(ii) $g_1, \ldots, g_\ell$ são quase-homogêneos com relação a θ.

<u>NOTAÇÃO</u>: I é do tipo T.I.Q.H.-θ.

1.3. <u>DEFINIÇÃO</u>: I é dito um ideal do *tipo* D_p, onde $p \in Z$, $p > 0$, se, sendo posto $\delta^k I = r$ $(k \geq 0)$, existir um K-isomorfismo de álgebras $\varphi_k : C_o(K^n) \to C_o(K^n)$, tal que,

$\varphi_k \delta^k I = \langle x_1, \ldots, x_r, h_{r+1}(x_{r+1}, \ldots, x_n), \ldots,$

$h_t(x_{r+1}, \ldots, x_n)\rangle$ e $m_n^p\langle h_{r+1}, \ldots, h_t\rangle \subset$

$\subset m_n^{p+1}\langle \partial h_{r+1}, \ldots, \partial h_t\rangle$.

NOTAÇÕES: I é do tipo $T.D_p$ ou, I satisfaz a condição D_p.

1.4. DEFINIÇÃO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$.
Se $I = \langle f\rangle$ for um ideal do tipo T.I.Q.H.-θ ou $T.D_p$, então diremos que f é do tipo T.I.Q.H.-θ ou $T.D_p$, respectivamente.

1.5. LEMA: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$.
Então, $B(\langle\partial f\rangle) = B(\langle\partial f, f\rangle)$.

Demonstração: Como $f \in m_n^2$, segue que posto $\langle\partial f\rangle$ = posto $\langle\partial f, f\rangle$.

Suponhamos que posto $\delta^k\langle\partial f\rangle$ = posto $\delta^k\langle\partial f, f\rangle = 0$, $k = 0, 1, \ldots, k_o$. Logo, $\delta^{k_o+1}\langle\partial f\rangle = \langle\frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}}\rangle$ e $\delta^{k_o+1}\langle\partial f, f\rangle = \langle f, \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}}\rangle$, onde $s = 1, \ldots, k_o+2$; $1 \leq i_1, \ldots, i_s \leq n$ e $x_1, \ldots, x_n$ é um sistema de coordenadas nas vizinhanças de $0 \in K^n$.

Segue então que posto $\delta^{k_o+1}\langle\partial f\rangle$ = posto $\delta^{k_o+1}\langle\partial f, f\rangle$.

Suponhamos que posto $\delta^{k_o+1}\langle\partial f\rangle = r$.

Logo, $\delta^{k_o+2}\langle\partial f\rangle = \delta^{k_o+1}\langle\partial f\rangle + I_1$ e $\delta^{k_o+2}\langle\partial f, f\rangle = \delta^{k_o+1}\langle\partial f, f\rangle + I_2$, onde I_1 e I_2 são gerados pelos menores $(r+1) \times (r+1)$ das matrizes M_1 e M_2 respectivamente, onde:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}\right) \\ \left(\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3}}\right) \\ \vdots \\ \left(\dfrac{\partial^{k_o+3} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k_o+3}}}\right) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_2 = \begin{bmatrix} M_1 \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right) \end{bmatrix}.$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in \delta^{k_o+2} \langle \partial f \rangle$, $(i = 1, \ldots, n)$, segue que posto $\delta^{k_o+2} \langle \partial f \rangle$ = posto $\delta^{k_o+2} \langle \partial f, f \rangle$.

Seguindo com o mesmo raciocínio, teremos provado que $B(\langle \partial f \rangle) = B(\langle \partial f, f \rangle)$.

1.6. <u>TEOREMA</u>: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$, do tipo T.I.Q.H.-$\theta$. Se $m_n^\alpha \subset m_n^\beta \langle \partial f \rangle$, então B_f é da forma $\Sigma_{i_1} \ldots \ldots i_{\alpha-\beta}\, 0$.

<u>Demonstração</u>: Suponhamos que $f \in m_n^c - m_n^{c+1}$, com $c \geq 2$.

Sendo f to tipo T.I.Q.H.-θ, segue que existe um ideal $\langle g_1, \ldots, g_k \rangle$ de $C_o(K^n)$, equivalente ao ideal $\langle \partial f \rangle$, onde g_i é quase-homogêneo do tipo $(d_i;\theta)$, $i = 1, \ldots, k$. Portanto, como $m_n^\alpha \subset m_n^\beta \langle \partial f \rangle$, segue que $m_n^\alpha \subset m_n^\beta \langle g_1, \ldots, g_k \rangle$.

Logo, considerando $x_1^{\ell_1} \ldots x_n^{\ell_n}$ com $0 \leq \ell_1, \ldots, \ell_n$ e $\ell_1 + \ldots + \ell_n = \alpha$, segue que existem $h_1, \ldots, h_k \in m_n^\beta$, tais que, $x_1^{\ell_1} \ldots x_n^{\ell_n} = \sum_{i=1}^{k} h_i g_i$. Derivando em relação a x_j, teremos:

$$\ell_j x_1^{\ell_1} \cdots x_{j-1}^{\ell_{j-1}} x_j^{\ell_j - 1} x_{j+1}^{\ell_{j+1}} \cdots x_n^{\ell_n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} h_i \partial_j g_i + \sum_{i=1}^{k} \partial_j h_i g_i$$

supondo $\ell_j \geq 1$.

Como cada g_i é quase-homogêneo do tipo $(d;\theta)$, onde $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, segue que $g_i = \sum_{s=1}^{n} \theta_s x_s \partial_s g_i$ $(i = 1,\ldots,k)$.

Portanto, $\ell_j x_1^{\ell_1} \cdots x_j^{\ell_j - 1} \cdots x_n^{\ell_n} = \sum_{i=1}^{k} h_i \partial_j g_i +$
$+ \sum_{s=1}^{n} [\sum_{i=1}^{k} (\theta_s x_s \partial_j h_i \partial_s g_i)]$.

Como $h_1, \ldots, h_k \in m_n^{\beta}$, segue que $x_s \partial_j h_i \in m_n^{\beta}$, e então, tem-se $m_n^{\alpha-1} \subset m_n^{\beta} \langle \partial_j g_i \rangle$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq k$. Disto segue que $m_n^{\alpha-1} \subset m_n^{\beta} \langle g_i, \partial_j g_i \rangle$ $(1 \leq j \leq n;\ 1 \leq i \leq k)$.

Suponhamos $c \geq 3$.

Então posto $\langle \partial f \rangle = 0$, posto $\langle g_1, \ldots, g_k \rangle = 0$ e $m_n^{\alpha-1} \subset m_n^{\beta} \delta \langle g_1, \ldots, g_k \rangle$. Desde que $f \in m_n^{c} - m_n^{c+1}$, seguindo com raciocínio análogo, teremos $m_n^{\alpha-c+2} \subset m_n^{\beta} \delta^{c-2} \langle g_1, \ldots, g_k \rangle$, pelo fato de podermos em cada estágio, trabalhar com geradores quase-homogêneos com relação a θ. Temos ainda que posto $\delta^{c-3} \langle g_1, \ldots, g_k \rangle = 0$ e posto $\delta^{c-2} \langle g_1, \ldots, g_k \rangle = r \geq 1$.

(i) Se $r = n$, então tem-se $m_n^{\alpha-c+2} \subset m_n^{\beta+1}$, o que acarreta que $\alpha-c+2 \geq \beta+1$, e portanto, $\alpha-\beta \geq c-1$. Logo, $B(\langle g_1, \ldots, g_k \rangle) = \Sigma_{\underbrace{n \ldots n}_{c-2}\, 0}$.

Pelo fato de ser $\langle g_1, \ldots, g_k \rangle$ equivalente a $\langle \partial f \rangle$, e por (1.5), segue que $B_f = \Sigma_{\underbrace{n \dots n}_{c-1} 0}$, com $\alpha-\beta\geq c-1$.

(ii) Suponhamos $1 \leq r < n$.

Consideremos $\delta^{c-2}\langle g_1, \dots, g_k\rangle = \langle L_1+\Delta_1,\dots,L_q+\Delta_q\rangle$, onde $\Delta_1, \dots, \Delta_q \in m_n^2$ e cada L_i é uma K-forma linear nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ (obviamente existem exatamente r linearmente independentes sobre K). Como combinações lineares sobre K, de germes quase-homogêneos com relação a θ, são germes quase-homogêneos com relação a θ, então podemos supor que:

$$\delta^{c-2}\langle g_1, \dots, g_k\rangle = \langle L_1+\Delta_1,\dots,L_r+\Delta_r,p_1,\dots,p_t\rangle,$$

onde $L_1, \dots, L_r$ são K-formas lineares K-linearmente independentes e $\Delta_1, \dots, \Delta_r, p_1, \dots, p_t \in m_n^2$, com $L_1+\Delta_1, \dots, L_r+\Delta_r, p_1, \dots, p_t$ quase-homogêneos com relação a θ.

Seja ω_i o grau de quase-homogeneidade de $L_i + \Delta_i$ $(i = 1, \dots, r)$ com relação a θ. Podemos supor que $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_r$.

Suponhamos que $\frac{\partial L_1}{\partial x_{j_1}} \neq 0$.

Se $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_s < \omega_{s+1}$, então podemos escolher s variáveis $x_{j_1}, \dots, x_{j_s}$, tal que:

$$\det \frac{\partial(L_1, \dots, L_s)}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_s})} \neq 0$$

Como $\omega_s < \omega_{s+1}$ e $L_{s+1} + \Delta_{r+1}$ é quase-homogêneo com relação a θ, então L_{s+1} independe de $x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}$.

Tomemos $x_{j_{s+1}}$ tal que $\dfrac{\partial L_{s+1}}{\partial x_{j_{s+1}}} \neq 0$. Logo,

$$\det \frac{\partial (L_1, \ldots, L_{s+1})}{\partial (x_{j_1}, \ldots, x_{j_{s+1}})} \neq 0$$

Prosseguindo com o mesmo raciocínio, podemos supor a menos de combinações lineares sobre K, que:

$$\begin{cases} L_1 + \Delta_1 = x_{j_1} + L'_1 + \Delta'_1 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ L_r + \Delta_r = x_{j_r} + L'_r + \Delta'_r \end{cases}$$

onde $L'_q + \Delta'_q$ não depende de $x_1, \ldots, x_{j_q}$, L'_q K-forma linear e $\Delta'_q \in m_n^2$ $(q = 1, \ldots, r)$, devido à quase-homogeneidade.

Considerando agora o germe de difeomorfismo definido por:

$$\psi : \begin{cases} X_{j_s} = x_{j_s} + L'_s + \Delta'_s \ , & s = 1, \ldots, r \\ X_b = x_b \ , & b \neq j_1, \ldots, j_r \end{cases}$$

tem-se que ψ é quase-homogêneo com relação a θ. Tomando uma permutação $\sigma \in S_n$, com $\sigma(j_s) = s$, $s = 1, \ldots, r$, e definindo $\sigma^*\psi$ por $\sigma^*\psi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$, tem-se que $\sigma^*\psi$ é um germe de difeomorfismo quase-homogêneo com relação a $\sigma^*\theta = (\theta_{\sigma(1)}, \ldots, \theta_{\sigma(n)})$ e, $\delta^{c-2}\langle g_1, \ldots, g_k\rangle$ é equivalente a $\langle x_1, \ldots, x_r, h_1, \ldots, h_m\rangle$ com $h_j = h_j(x_{r+1}, \ldots, x_n) \in m_n^2$ quase-homogêneo com relação a $\sigma^*\theta$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Portanto, $m_n^{\alpha-c+2} \subset m_n^{\beta}\langle x_1, \ldots, x_r, h_1, \ldots, h_m\rangle$, com $h_j = h_j(x_{r+1}, \ldots, x_n) \in m_n^2$, $j = 1, \ldots, m$.

Nestas condições temos:

$$m_n^{\alpha-c+2} \subset m_n^{\beta}\langle x_1, \ldots, x_r\rangle + m_n^{\beta}\langle h_1, \ldots, h_m\rangle ;$$

$$m_{n-r}^{\alpha-c+2} \simeq \frac{m_n^{\alpha-c+2} + m_n^{\beta}\langle x_1, \ldots, x_r\rangle}{m_n^{\beta}\langle x_1, \ldots, x_r\rangle} \quad \text{(pois, } \alpha-c+2 \geq \beta+2\text{);}$$

$$\frac{m_n^{\alpha-c+2} + m_n^{\beta}\langle x_1, \ldots, x_r\rangle}{m_n^{\beta}\langle x_1, \ldots, x_r\rangle} \subset$$

$$\subset \frac{m_n^{\beta}\langle x_1, \ldots, x_r\rangle + m_n^{\beta}\langle h_1, \ldots, h_m\rangle}{m_n^{\beta}\langle x_1, \ldots, x_r\rangle}, \quad \text{e,}$$

$$\frac{m_n^{\beta}\langle x_1, \ldots, x_r\rangle + m_n^{\beta}\langle h_1, \ldots, h_m\rangle}{m_n^{\beta}\langle x_1, \ldots, x_r\rangle} \simeq$$

$$\simeq m_{n-r}^{\beta}\langle h_1, \ldots, h_m\rangle \quad \text{(pois, } h_j = h_j(x_{r+1},\ldots,x_n) \in m_n^2,\ j = 1, \ldots, m\text{),}$$

onde "$\simeq$" denota o K-isomorfismo natural e,

$$m_{n-r} = \langle x_{r+1}, \ldots, x_n\rangle C_o(K^{n-r})$$

Logo, $m_{n-r}^{\alpha-c+2} \subset m_{n-r}^{\beta}\langle h_1, \ldots, h_m\rangle$. Sendo $h_1, \ldots, h_m$

quase-homogêneo, segue que,

$$m_{n-r}^{\alpha-c+1} \subset m_{n-r}^{\beta}<\partial_j h_i>$$

$(j = r+1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, m)$ e portanto, que $m_n^{\alpha-c+1} \subset$ $\subset m_n^{\beta}<x_1, \ldots, x_r, \partial_j h_i> \subset m_n^{\beta}<x_1, \ldots, x_r, h_i, \partial_j h_i>$, $(j=r+1,\ldots,n;$ $i = 1, \ldots, m)$, uma vez que $\alpha-c+1 \geq \beta+1$, pois $1 \leq r < n$.

Como $h_1, \ldots, h_m \in m_n^2$ são germes em $x_{r+1}, \ldots, x_n$, segue que $<x_1, \ldots, x_r, h_i, \partial_j h_i> = \delta<x_1, \ldots, x_r, h_i>$, $(j =$ $= r+1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, m)$.

Pelo fato de ser $\delta^{c-2}<g_1, \ldots, g_k>$ equivalente a $<x_1, \ldots, x_r, h_1, \ldots, h_m>$, segue que $m_n^{\alpha-c+1} \subset m_n^{\beta}\delta^{c-1}<g_1,\ldots,g_k>$.

Sendo $h_i, \partial_j h_i$ quase-homogêneos com relação a $\sigma*\theta$, então podemos repetir o raciocínio usado quando da construção do germe de difeomorfismo ψ.

Então, supondo $\delta^{d-1}<g_1, \ldots, g_k> \neq m_n$ e $\delta^{d}<g_1, \ldots, g_m> = m_n$, teremos

$$m_n^{\alpha-d} \subset m_n^{\beta}\delta^{d}<g_1, \ldots, g_k> = m_n^{\beta+1}$$

Logo, $\alpha-d \geq \beta+1$, e então, $\alpha-\beta \geq d+1$.

Por $\delta^{d}<g_1, \ldots, g_k> = m_n$, tem-se que $B(<g_1, \ldots, g_k>)$ é da forma $\Sigma_{t_1 t_2 \ldots t_d\, 0}$. Pela equivalência de ideais entre $<\partial f>$ e $<g_1, \ldots, g_k>$, e por (1.5), segue que B_f é da forma $\Sigma_{i_1 \ldots i_{d+1}\, 0}$, com $\alpha-\beta \geq d+1$.

Portanto, B_f é da forma $\Sigma_{i_1 \ldots i_{\alpha-\beta}\, 0}$.

1.7. EXEMPLO: Seja $f : K^2,0 \to K,0$ definido por $f(x,y)=x^5+y^6$. Então, $m_2^8 \subset m_2^3<x^4,y^5>$ e $B_f = \Sigma_{2\,2\,2\,2\,1\,0}$, com $i_5 \neq 0$ e $i_6 = 0$.

1.8. OBSERVAÇÕES: (1) Todo ideal $I \subset m_n \subset C_o(K^n)$, do tipo T.I.Q.H.-$\theta$, é do tipo $T.D_1$. A recíproca é falsa, como mostra o exemplo (1.1), considerando $I = <f>$.

(2) Conforme constatamos, todas as singularidades m-modais $(m \leq 2)$, satisfazem a condição D_p, para algum $p \in Z$, $p > 0$.

(3) Temos também (conforme [4]), que todo $f \in m_n \subset C_o(K^n)$, com $\mu \leq 13$, é do tipo $T.D_p$, para algum $p \in Z$, $p > 0$.

Como conseqüência da técnica de demonstração de (1.6), temos um resultado mais geral, dado pela:

1.9. PROPOSIÇÃO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$, do tipo $T.D_p$. Se $m_n^\alpha \subset m_n^\beta<\partial f>$, então B_f é da forma $\Sigma_{i_1 \ldots i_{\alpha-\beta}\, 0}$.

Demonstração: De $m_n^\alpha \subset m_n^\beta<\partial f>$, segue que, $m_n^{\alpha+p+1} \subset m_n^{\beta+p+1}<\partial f>$. Suponhamos que posto $<\partial f> =$ $=$ posto $\delta<\partial f> = \ldots =$ posto $\delta^k<\partial f> = 0$ e posto $\delta^{k+1}<\partial f> = r \geq 1$.

Seja $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in N \times \ldots \times N$, com $\gamma_1 + \ldots +$ $+ \ldots + \gamma_n = \alpha+p+1$.

Denotemos $x_1^{\gamma_1} \ldots x_n^{\gamma_n}$ por x^γ. Então, temos que $x^\gamma = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f$, com $h_1, \ldots, h_n \in m_n^{\beta+p+1}$. Supondo $\gamma_j \geq 1$, tem-se $\frac{\partial}{\partial x_j} x^\gamma = \sum_{i=1}^{n} \partial_j h_i \partial_i f + \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_{ij}^2 f$. Como $\partial_j h_i \in m_n^{\beta+p}$ e f é do tipo $T.D_p$, segue $\frac{\partial}{\partial x_j} x^\gamma \in m_n^{\beta+p+1} <\partial_{it}^2 f>$ com $i,t=1,\ldots,n$. Portanto, $m_n^{\alpha+p} \subset m_n^{\beta+p+1} \delta <\partial f>$.

De modo análogo, teremos $m_n^{\alpha+p-k} \subset m_n^{\beta+p+1} \delta^{k+1} <\partial f>$.

(i) Se $r = n$, então, $\alpha+p-k \geq \beta+p+2$, o que equivale a $\alpha-\beta \geq k+2$. Portanto, B_f é da forma $\Sigma_{i_1 \ldots i_{\alpha-\beta}} 0$.

(ii) Se $1 \leq r < n$, por hipótese, $\delta^{k+1} <\partial f>$ é equivalente a um ideal da forma $<x_1, \ldots, x_r, h_{r+1}, \ldots, h_t>$, com $h_j = h_j(x_{r+1}, \ldots, x_n)$ $(j = r+1, \ldots, t)$ e $m_n^p <h_{r+1}, \ldots, h_t> \subset m_n^{p+1} <\partial h_{r+1}, \ldots, \partial h_t>$.

Portanto, $m_n^{\alpha+p-k-1} \subset m_n^{\beta+p+1} \delta <x_1, \ldots, x_r, h_{r+1}, \ldots, h_t>$.

Seguindo com o raciocínio, teremos o resultado.

Com relação à (r,k)-determinação, temos o:

1.10. COROLÁRIO: Seja $f : R^n, 0 \to R, 0$ do tipo $T.D_p$.
Se f for (r,k)-determinado, então, B_f é da forma $\Sigma_{i_1 \ldots i_{k-r}} 0$.

1.11. COROLÁRIO: Seja $f : R^n, 0 \to R, 0$, com $\operatorname{cod} Rf = \operatorname{cod} Af < \infty$ (conforme [17]).
Se $m_n^\alpha \subset m_n^\beta <\partial f>$, então B_f é da forma $\Sigma_{i_1 \ldots i_{\alpha-\beta}} 0$.

Demonstração: Temos que $\operatorname{cod} \mathcal{R}f = \dim_R \dfrac{\mathcal{C}_o(R^n)}{<\partial f>} = \operatorname{cod} \mathcal{A}f =$

$= \dim_R \dfrac{\mathcal{C}_{o}(R^n)}{<\partial f> + <f,f^2, \ldots>_R} < \infty$. Disto segue que $f \in <\partial f>$. Logo, por Saito ([22]), temos que f é equivalente a um germe g quase-homogêneo com relação a algum θ. Portanto, f é do tipo T.I.Q.H.-θ, donde segue o resultado.

Utilizando ainda as técnicas de demonstração de (1.6), temos os seguintes corolários:

1.12. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^2 \subset \mathcal{C}_o(K^n)$, do tipo T.I.Q.H.-$\theta$ (ou do tipo T.D_p).
Suponhamos que $m_n^{\alpha-k} \subset m_n^{\beta_{k+1}}\delta^k<\partial f>$, onde $\delta^{k_o}<\partial f> = m_n$ e $\delta^{k_o-1}<\partial f> \neq m_n$.
Então, B_f é da forma $\Sigma_{i_1 \ldots i_{\alpha-\beta_{k+1}}} 0$ $(k = 0, \ldots, k_o)$.

Demonstração: Seja $\ell \in \{0, 1, \ldots, k_o\}$. Por hipótese temos que $m_n^{\alpha-\ell} \subset m_n^{\beta_{\ell+1}}\delta^\ell<\partial f>$, onde podemos supor $\delta^\ell<\partial f> = <p_1, \ldots, p_t>$, com $p_1, \ldots, p_t$ quase-homogêneos com relação a θ.

Se $\ell = k_o$, então $\delta^\ell<\partial f> = m_n$ e portanto, $\alpha-\beta_{k_o+1} \geq k_o+1$, donde segue que B_f é da forma $\Sigma_{i_1 \ldots i_{\alpha-\beta_{k_o+1}}} 0$.

Seja $\ell < k_o$. Então temos $\delta^\ell<\partial f> \neq m_n$.

A partir da inclusão $m_n^{\alpha-\ell} \subset m_n^{\beta_{\ell+1}}\delta^\ell<\partial f>$, seguindo $k_o-\ell$ passos como na demonstração de (1.6), teremos $m_n^{\alpha-k_o} \subset$ $\subset m_n^{\beta_{\ell+1}}\delta^{k_o}<\partial f> = m_n^{\beta_{\ell+1}+1}$, donde, $\alpha-\beta_{\ell+1} \geq k_o+1$.

Sendo $\delta^{k_o}<\partial f> = m_n$, o resultado segue.

No caso de f ser do tipo $T.D_p$, a demonstração é análoga, tomando $m_n^{\alpha-k+p+1} \subset m_n^{\beta_{k+1}+p+1}<\partial f>$, $k = 0, 1, \ldots, k_o$.

1.13. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$, estavelmente equivalente a $g : K^2,0 \to K,0$, com $\partial_1 g$ e $\partial_2 g$ quase-homogêneos.
Se $m_n^{\alpha} \subset m_n^{\beta}<\partial f>$, então B_f é da forma $\Sigma_{i_1 \ldots i_{\alpha-\beta}}0$.

Demonstração: Por hipótese temos que $m_2^{\alpha} \subset m_2^{\beta}<\partial g>$.

Seja posto $\delta^k<\partial g> = 0$ e posto $\delta^{k+1}<\partial g> = r \neq 0$. Como $\partial_1 g$ e $\partial_2 g$ são quase-homogêneos, segue que

$m_2^{\alpha-k-1} \subset m_2^{\beta}\delta^{k+1}<\partial g>$

Se $r = 2$, então, $\alpha-k-1 \geq \beta+1$, e portanto, $\alpha-\beta\geq k+2$.

Sendo $\delta^{k+1}<\partial g> = m_n$, segue que B_f é da forma $\Sigma_{i_1 \ldots i_{\alpha-\beta}}0$.

Se $r = 1$, então $\delta^{k+1}<\partial g>$ é um ideal equivalente ao ideal $<x,y^t>$, para algum $t \geq 2$, pois, $\operatorname{cod}_K \delta^{k+1}<\partial g> < \infty$.

Nestas condições, temos que $m_2^{\alpha-k-1} \subset m_2^{\beta}<x,y^t>$, e, portanto, $\alpha-k-1 \geq \beta+t$, isto é, $\alpha-\beta \geq k+t+1$.

Como $\delta^{k+t}<\partial g> = m_2$, o resultado segue.

1.14. COROLÁRIO: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$ (não necessariamente com $\mu(f) < \infty$).
Se existir $k \in Z$, $k \geq 1$, tal que, $\delta^k<f>$ é do tipo $T.D_p$ e $m_n^{\alpha} \subset m_n^{\beta}\delta^k<f>$, então B_f é da

forma $\Sigma_{i_1 \ldots i_{\alpha-\beta+k}\, 0}$.

1.15. <u>COROLÁRIO</u>: Sejam $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$ do tipo $T.D_p$, e $k_o \in Z$, $k_o \geq 0$, com $\delta^{k_o+1}\langle f\rangle = m_n$ e $\delta^{t_o}\langle f\rangle \neq m_n$. Para cada $k = 0, 1, \ldots, k_o$, seja $m_n^{\alpha-k} \subset m_n^{\beta_k}\delta^{k+1}\langle f\rangle$ com $m_n^{\alpha-k} \not\subset m_n^{\beta_k+1}\delta^{k+1}\langle f\rangle$.
Então, $i_{\alpha-\beta_{k_o}} \neq 0$ e $i_{\alpha-\beta_{k_o}+1} = 0$, onde $B_f = \Sigma_{i_1 \ldots}$.
(Compare com III - 3.7).

1.16. <u>COROLÁRIO</u>: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(K^n)$, tal que $\langle\partial f\rangle$ é equivalente a um ideal $J = \langle g_1, \ldots, g_k\rangle$, onde $g_1, g_2, \ldots, g_k$ são quase-homogêneos.
Se B_f for da forma $\Sigma_{n\, n \ldots n\, 0}$ ou $\Sigma_{n \ldots n\, 1 \ldots 1\, 0}$, e $m_n^\alpha \subset m_n^\beta\langle\partial f\rangle$, então, $|B_f| \leq \alpha-\beta$.

1.17. <u>OBSERVAÇÕES</u>:

Sejam $f_1, \ldots, f_r \in m_n^2 \subset C_o(R^n)$ com $\dim_R \dfrac{C_o(R^n)}{\langle f_1,\ldots,f_n\rangle} < \infty$.
Logo, por ([12]), segue que $\dim_R \dfrac{C_o(R^n)}{\langle f_1^r, \ldots, f_n^r\rangle} < \infty$, para todo inteiro $r \geq 1$. Nestas condições, seja $k = k(n)$, tal que, $m_n^k \subset \langle f_1^n, \ldots, f_n^n\rangle$.

Por ([10]), temos que $f_i^n \in \langle\partial_1 f_i, \ldots, \partial_n f_i\rangle$, $(i = 1, \ldots, n)$.

Portanto,

$$m_n^k\langle f_1, \ldots, f_n\rangle \subset \langle f_1, \ldots, f_n\rangle\langle f_1^n, \ldots, f_n^n\rangle \subset$$

$$\subset m_n^2\langle f_1^n, \ldots, f_n^n\rangle \subset m_n^2\langle \partial f_1, \ldots, \partial f_n\rangle.$$

Em resumo, temos $m_n^k\langle f_1, \ldots, f_n\rangle \subset m_n^2\langle \partial f_1, \ldots, \partial f_n\rangle$.

Baseado neste fato, e nas singularidades que observamos, apresentamos a seguinte:

<u>CONJECTURA</u>: Seja $f \in m_n^2 \subset C_o(R^n)$, com $\mu(f) < \infty$. Então, f satisfaz a condição D_p, para algum $p \in Z$, $p > 0$.

CAPÍTULO V

COMPRIMENTO DO SÍMBOLO DE BOARDMAN E O GRAU DE UM POLINÔMIO

No capítulo anterior, a nossa preocupação foi dar um limite para o comprimento do Símbolo de Boardman de um germe, em termos da (r,k)-determinação.

Durante a manipulação de exemplos, que nos levaram a intuir a referida relação, observamos que para "grande" número de polinômios, existia uma "boa" relação entre o comprimento de seu Símbolo de Boardman, e de seu grau, como por exemplo, $|B_f \leq$ $\leq$ grau(f).

Diante destes fatos, nos propusemos a dar uma classe de polinômios, para a qual, vale a desigualdade $|B_f| \leq$ grau(f) - 1. Existem porém polinômios com $\mu < \infty$, que não verificam esta relação (ver (1.3)).

Para tal, seja $\mathcal{F} = \{f \in K[x,y] : f(0) = 0,\ f'(0) = 0$ e $\mu(f) < \infty\}$.

1.1. <u>DEFINIÇÃO</u>: Dados $f,g \in \mathcal{F}$, diremos que f se *reduz regularmente a* g, se:

(i) grau(g) $\leq$ grau(f), e,

(ii) f é equivalente a g (equivalência via $\mathcal{R}$ ou $\tilde{\mathcal{R}}$).

1.2. <u>OBSERVAÇÕES</u>: A propriedade de se *reduzir regularmente*, não determina em $K[x,y]$ uma relação de equivalência. Para tal, basta observarmos que $f(x,y) = x^3+y^4 + x^2y^3$ se reduz regularmente a $g(x,y) = x^3+y^4$, sem que a recíproca valha.

Seja $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{F}$: se f se reduzir regularmente a um germe da forma $x^a + h(x,y)$, com $h \in m_2^{a+1}$, então f se reduz regularmente a um germe da forma $x^a + x^{a-2}A_{a-2}(y) + \ldots +$ $+ \ldots + xA_1(y) + A_o(y)$, onde $A_i(y) \in K[y]$, $i = 0,1,\ldots,a-2\}$.

Antes de enunciarmos o resultado do capítulo, vejamos um exemplo.

1.3. <u>EXEMPLO</u>: Seja $f(x,y) = x^3+3x^2y^p + 3xy^{2p}$, com $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 1$.

Como f é equivalente a $g(x,y) = x^3-y^{3p}$, segue que $|B_f| = 3p-1$, com grau $(f) = 2p+1$.

1.4. <u>TEOREMA</u>: Seja $f \in \mathcal{C}$, com grau $(f) = r$.

Então, $|B_f| \leq r-1$.

<u>Demonstração</u>:

(I) Consideremos

$$f(x,y) = x^a+y^b + \sum_{\substack{i+j=c \\ i,j\geq 1}} \alpha_{ij} x^i y^j + \sum_{\substack{i+j>c \\ i,j\geq 1}} \beta_{ij} x^i y^j +$$

$$+ \sum_{i>a} d_i x^i + \sum_{i>b} e_i y^i$$

onde $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, d_i, e_i \in K$, $\mu(f) < \infty$ e $3 \leq a \leq b$.

Se não existirem termos mistos, então f se reduz regularmente a $x^a + y^b$, e portanto, $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \ldots 2}_{a-1} \underbrace{1 \ldots 1}_{b-a} 0}$.

Suponhamos que exista termo misto, e que,

$$D = \sum_{\substack{i+j=c \\ i,j\geq 1}} \alpha_{ij} x^i y^j$$

é a soma dos termos mistos de menor grau.

Caso (1): $3 \leq a = b$.

(i) Se $c < a$, então $f = D + h$, onde $h \in m_2^{c+1}$.

Seja i_o o maior índice tal que, $\alpha_{i_o, c-i_o} \neq 0$. Derivando i_o-vezes com relação a x e $(c-i_o-1)$-vezes com relação a y, teremos que $y \in \delta^{c-1}\langle f\rangle$. Derivando (i_o-1)-vezes com relação a x e $(c-i_o)$-vezes com relação a y, teremos em $\delta^{c-1}\langle f\rangle$ um elemento da forma $x + \theta y$, com $\theta \in K$. Logo, $\delta^{c-1}\langle f\rangle = m_2$. Como posto $\delta^{c-2}\langle f\rangle = 0$, segue que $B_f = \Sigma_{\underbrace{2\ldots2}_{c-1}0}$.

(ii) Se $a = b = c$, então, $f = x^a + y^a + D + h$, com $h \in m_2^{a+1}$. Segue então que $\delta^{a-1}\langle f\rangle$ é gerado por elementos da forma: $\ell_i + h_i$, $k_1, \ldots, k_t$ $(i = 1, \ldots, a)$, onde $\ell_1,\ldots,\ell_a$ são K-formas lineares em x,y e $h_1, \ldots, h_a, k_1, \ldots, k_t \in m_2^2$. Se existirem $i,j \in \{1, \ldots, a\}$, com $i \neq j$, tais que ℓ_i e ℓ_j são K-linearmente independentes, segue que $\delta^{a-1}\langle f\rangle = m_2$. Como posto $\delta^{a-2}\langle f\rangle = 0$, tem-se $B_f = \Sigma_{\underbrace{2\ldots2}_{a-1}0}$.

Suponhamos que $\ell_1, \ldots, \ell_a$ são 2 a 2 K-linearmente dependentes. Podemos supor ainda que $\ell_1, \ldots, \ell_a$ são dadas por:

$$\begin{cases} \ell_1 = ax + \alpha_{a-1\ 1}\, y \\ \ell_2 = (a-1)\alpha_{a-1\ 1}\, x + 2\alpha_{a-2\ 2}\, y \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \ell_{k+1} = (a-k)\alpha_{a-k\ k}\, x + (k+1)\alpha_{a-k-1\ k+1}\, y \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \ell_{a-1} = 2\alpha_{2\ a-2}\, x + (a-1)\alpha_{1\ a-1}\, y \\ \ell_a = \alpha_{1\ a-1}\, x + ay \end{cases}$$

Seja $\alpha_{a-1\ 1} = t = \binom{a}{1}\left(\frac{t}{a}\right)$. Portanto, $\frac{a}{t} = \frac{(a-1)t}{2\alpha_{a-2\ 2}}$, o que equivale a $\alpha_{a-2\ 2} = \binom{a}{2}\left(\frac{t}{a}\right)^2$.

Suponhamos que $\alpha_{a-k\ k} = \binom{a}{k}\left(\frac{t}{a}\right)^k$, para $k=1,\dots,k_o$. Logo,

$$\frac{(a-k+1)\alpha_{a-k+1\ k-1}}{k\alpha_{a-k\ k}} = \frac{(a-k)\alpha_{a-k\ k}}{(k+1)\alpha_{a-k-1\ k+1}} \iff$$

$$\iff \alpha_{a-k-1\ k+1} = \binom{a}{k+1}\left(\frac{t}{a}\right)^{k+1}$$

Analisando agora ℓ_{a-1} e ℓ_a , teremos:

$$\frac{2\alpha_{2\ a-2}}{(a-1)\alpha_{1\ a-1}} = \frac{\alpha_{1\ a-1}}{a} \iff (a-1)\alpha_{1\ a-1}^2 =$$

$$= 2a\alpha_{2\ a-2}$$

Como,

$$\alpha_{1\ a-1} = \binom{a}{a-1}\left(\frac{t}{a}\right)^{a-1} \quad \text{e} \quad \alpha_{2\ a-2} = \binom{a}{a-2}\left(\frac{t}{a}\right)^{a-2}$$

segue que $\left(\frac{t}{a}\right)^a = 1.$

Portanto, $t = \pm\ a$, conforme a paridade de a. Nestas condições, temos que $f = (x \pm y)^a + h$.

Efetuando a mudança linear de coordenadas, dada por:

$$\psi : \begin{cases} X = x \pm y \\ Y = y \end{cases}$$

teremos que f se reduz regularmente a um polinômio da forma $x^a + g$, com $g \in m_2^{a+1}$.

Como $f \in C$, segue que f se reduz regularmente a um polinômio da forma $\bar{f} = x^a + x^{a-2}A_{a-2}(y) + \ldots + xA_1(y) + A_o(y)$, com $A_o, A_1, \ldots, A_{a-2} \in K[y]$.

Temos que posto $\delta^{a-2}<\bar{f}> = 0$ e que, $x \in \delta^{a-1}<\bar{f}>$. Como $\mu(\bar{f}) < \infty$, segue que $A_1(y) \not\equiv 0$ ou $A_o(y) \not\equiv 0$, onde

$$A_1(y) = \beta^1_{a+1}y^a + \beta^1_{a+2}y^{a+1} + \ldots + \beta^1_k y^{k-1}$$

e

$$A_o(y) = \beta^o_{a+1}y^{a+1} + \ldots + \beta^o_k y^k$$

com $\beta^1_j, \beta^o_\ell \in K$.

Se $A_1 \not\equiv 0$, seja j o menor índice tal que, $\beta^1_{j+1} \neq 0$ $(j \geq a)$. Logo, derivando uma vez com relação a x e $(a-2)$-vezes com relação a y, teremos em $\delta^{a-1}<\bar{f}>$ um elemento da forma $\beta^1_{j+1}y^{j-a+2} + xk(x,y) + q(y)$, com $q \in m_2^{j-a+3}$. Como $x \in \delta^{a-1}<\bar{f}>$ e $\beta^1_{j+1} \neq 0$, segue que $y^{j-a+2} \in \delta^{a-1}<\bar{f}>$. Portanto, $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \ldots 2}_{a-1} \underbrace{1 \ldots 1}_{m} 0}$, onde $m \leq j-a+1$. $(m+a-1 \leq$ $\leq j \leq$ grau $(f)-1)$.

Se $A_o \not\equiv 0$, seja p o menor índice tal que, $\beta_p^o \neq 0$. $(a+1 \leq p)$. Derivando $(a-1)$-vezes com relação a y, como $\beta_p^o \neq 0$ $(p \geq a+1)$ e $x \in \delta^{a-1}\langle\bar{f}\rangle$, segue que $y^{p-a+1} \in \delta^{a-1}\langle\bar{f}\rangle$. Logo, $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \ldots 2}_{a-1} \underbrace{1 \ldots 1}_{s} 0}$, com $s \leq p-a$. $(s+a-1 \leq p-1 \leq$ $\leq$ grau $(f)-1)$.

Observemos que podemos calcular um limite para $|B_f|$, através de $\min\{p,j\}$ se $A_1 \not\equiv 0$ e $A_o \not\equiv 0$; através de j se $A_1 \not\equiv 0$ e $A_o \equiv 0$, e, através de p, se $A_1 \equiv 0$ e $A_o \not\equiv 0$.

(iii) Se $a = b < c$, é imediato que $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \ldots 2}_{a-1} 0}$.

Caso (2): $3 \leq a < b$.

(i) Se $c < a$, então, como [caso (1) - (i)], tem-se

$$B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \ldots 2}_{c-1} 0}$$

(ii) Se $c = a$, então $f = x^a + D + h$, com $h \in m_2^{a+1}$.

Seja j o maior índice tal que, $\alpha_{a-j\ j} \neq 0$. Derivando j-vezes em y e $(a-j-1)$-vezes com relação a x, teremos em $\delta^{a-1}\langle f\rangle$ um elemento da forma $x+g$, com $g \in m_2^2$.

Se $j = 1$, derivando $(a-1)$-vezes em x, teremos em $\delta^{a-1}\langle f\rangle$ um elemento da forma $ax + by + \ell$, com $\ell \in m_2^2$ e $b \neq 0$.

Se $j \geq 2$, derivando $(j-1)$-vezes em y e $(a-j)$-vezes em x, teremos em $\delta^{a-1}<f>$, um elemento da forma $\alpha_{a-j\ j}\, y + dx + q$, com $d \in K$, $q \in m_2^2$. Portanto, qualquer que seja a hipótese sobre j, como $\alpha_{a-j\ j} \neq 0$, segue que $\delta^{a-1}<f> = m_2$. Sendo posto $\delta^{a-2}<f> = 0$, segue que $B_f = \Sigma_{\underbrace{2\ \ldots\ 2}_{a-1}\ 0}$.

(iii) Se $a < c$, como $f \in C$, tem-se que B_f é da forma $\Sigma_{\underbrace{2\ \ldots\ 2}_{a-1}\ \underbrace{1\ \ldots\ 1}_{m}\ 0}$, com $a+m-1 \leq$ grau $(f)-1$, conforme [caso (1) - (ii)].

Aproveitemos para fazer uma análise extra-teorema, do caso $a < b \leq c$. Primeiramente, seja $a < b = c$. Derivando $(a-1)$-vezes com relação a x, teremos em $\delta^{a-1}<f>$, um elemento da forma:

$$h_1 = a!x + x^2k(x) + (a-1)!\alpha_{a-1\ b-a+1}\, y^{b-a+1} +$$

$$+ a!\alpha_{a\ b-a}\, xy^{b-a} + \ldots + \frac{(b-1)!}{(b-a)!}\alpha_{b-1\ 1}\, x^{b-a}y + p_1$$

com $p_1 \in m_2^{b-a+2}$.

Derivando $(a-1)$-vezes com relação a y, teremos em $\delta^{a-1}<f>$, um elemento da forma:

$$h_2 = \frac{b!}{(b-a+1)!}y^{b-a+1} + \frac{(b-1)!}{(b-a)!}\alpha_{1\ b-1}\, xy^{b-a} +$$

$$+ \frac{(b-2)!}{(b-a-1)!}\alpha_{2\ b-2}\, x^2y^{b-a-1} + \ldots + (a-1)!\alpha_{b-a+1\ a-1}\, x^{b-a+1} +$$

$$+ p_2$$

com $p_2 \in m_2^{b-a+2}$.

Considerando a mudança de coordenadas, dada por

$$\psi : \begin{cases} X = h_1 \\ Y = y \end{cases}$$

teremos que $\delta^{a-1}\langle f\rangle$ é equivalente ao ideal $\langle x,y^{b-a+1}\rangle$. Portanto, $B_f = \Sigma_{\underbrace{2\ \ldots\ 2}_{a-1}\ \underbrace{1\ \ldots\ 1}_{b-a}\ 0}$.

Se $a < b < c$, então, do mesmo modo tem-se

$$B_f = \Sigma_{\underbrace{2\ \ldots\ 2}_{a-1}\ \underbrace{1\ \ldots\ 1}_{b-a}\ 0}$$

Voltemos à demonstração do teorema.

(II) Consideremos

$$f(x,y) = x^a+xy^{b-1} + \sum_{\substack{i+j=c \\ i,j\geq 1}} \alpha_{ij}x^iy^j + \sum_{\substack{i+j>c \\ i,j\geq 1}} \beta_{ij}x^iy^j +$$

$$+ \sum_{i>a} d_ix^i + \sum_{i>b} e_iy^i$$

onde α_{ij}, β_{ij}, d_i, $e_i \in K$, $\mu(f) < \infty$ e $3 \leq a \leq b$.

Suponhamos que o único termo misto de f, é xy^{b-1}. Então, $f(x,y) = x^a + xy^{b-1} + \sum_{i>a} d_ix^i + \sum_{i>b} e_iy^i$.

Se $a < b$, então, posto $\delta^{a-2}\langle f\rangle = 0$ e $\delta^{a-1}\langle f\rangle = \langle x,y^{b-a+1}\rangle$, donde se conclui que $B_f = \Sigma_{\underbrace{2\ \ldots\ 2}_{a-1}\ \underbrace{1\ \ldots\ 1}_{b-a}\ 0}$

Se $a = b$, então, posto $\delta^{a-2}\langle f\rangle = 0$ e $\delta^{a-1}\langle f\rangle = m_2$, e então, $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \dots 2}_{a-1} 0}$.

Se $a > b$, então, $f(x,y) = xy^{b-1} + h$, com $h \in m_2^{b+1}$. Logo, $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \dots 2}_{b-1} 0}$, pois, $\delta^{b-1}\langle f\rangle = m_2$.

Suponhamos que exista termo misto além de xy^{b-1}, e que $D = \sum_{\substack{i+j=c \\ i,j\geq 1}} \alpha_{ij} x^i y^j$ é a soma dos termos mistos de menor grau.

Caso (1): $a = b \geq 3$.

(i) Se $c < a$, então, por [I - caso (1) - (i)], segue que $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \dots 2}_{c-1} 0}$.

(ii) Se $c = a$, então, $f(x,y) = x^a + xy^{a-1} + D + h$, com $h \in m_2^{a+1}$. Se $\alpha_{1\ a-1} \neq -1$, então por [I - caso (2) - (ii)], segue que $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \dots 2}_{a-1} 0}$. Suponhamos que $\alpha_{1\ a-1} = -1$. Se $D + xy^{a-1} \not\equiv 0$, então, também por [I - caso (2) - (ii)], tem-se $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \dots 2}_{a-1} 0}$. Por outro lado, se $D = -xy^{a-1}$, então $f = x^a + p$, com $p \in m_2^{a+1}$. Pelo fato de termos $f \in C$, então, por [I - caso (1) - (ii)], segue que $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \dots 2}_{a-1} \underbrace{1 \dots 1}_{m} 0}$, com $m+a-1 \leq$ grau $(f)-1$.

(iii) Se $a < c$, então $f = x^a + xy^{a+1} + h$, com $h \in m_2^{a+1}$.

Logo, por [I - caso (2) - (ii)], tem-se $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \ldots 2}_{a-1} 0}$.

Caso (2): $3 \leq a < b$

(i) Se $c < a$, então $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \ldots 2}_{c-1} 0}$.

(ii) Se $c = a$, então $f \doteq x^a + D + h$, com $h \in m_2^{a+1}$, e portanto, $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \ldots 2}_{a-1} 0}$.

(iii) Se $a < c$, como $f \in C$, então $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \ldots 2}_{a-1} \underbrace{1 \ldots 1}_{m} 0}$, com $a+m-1 \leq$ grau $(f)-1$.

Registremos apenas que no caso $a < b < c$, temos $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \ldots 2}_{a-1} \underbrace{1 \ldots 1}_{b-a} 0}$.

Caso (3): $3 \leq b < a$.

Como nos casos já vistos, tem-se $|B_f| \leq$ grau $(f)-1$.

(III) Consideremos

$$f(x,y) = xy^{a-1} + yx^{b-1} + \sum_{\substack{i+j=c \\ i,j\geq 1}} \alpha_{ij} x^i y^j +$$

$$+ \sum_{\substack{i+j>c \\ i,j\geq 1}} \beta_{ij} x^i y^j + \sum_{i>b} d_i x^i + \sum_{i>a} e_i y^i$$

onde $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, d_i, e_i \in K$, $\mu(f) < \infty$ e $3 \leq a \leq b$.

Se os únicos termos mistos de f forem xy^{a-1} e yx^{b-1}, então, $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \ldots 2}_{m-1} 0}$, onde $m = \min\{a,b\}$.

Suponhamos que além de xy^{a-1} e yx^{b-1}, exista termo misto, e seja $D = \sum_{\substack{i+j=c \\ i,j \geq 1}} \alpha_{ij} x^i y^j$, a soma dos de menor grau.

Caso (1): $a = b$.

(i) Se $c < a$, então $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \ldots 2}_{c-1} 0}$.

(ii) Se $a \leq c$, então $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \ldots 2}_{a-1} 0}$.

Caso (2): $a < b$.

(i) Se $c < a$, então $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \ldots 2}_{c-1} 0}$.

(ii) Se $a \leq c$, então $B_f = \Sigma_{\underbrace{2 \ldots 2}_{a-1} 0}$.

Para encerrar a demonstração do teorema, observemos que, se $a = 2$ nas três formas consideradas, então, ou f é um representante de um germe de Morse, e aí, nossa desigualdade é verdadeira, ou f é equivalente a um polinômio da forma $\pm x^2 \pm y^k$, com $k \geq 3$, para o qual, nossa desigualdade pode não valer. Como estamos considerando $f \in C$, então f se reduz regularmente a $\pm x^2 \pm y^k$, com $k \leq$ grau (f), e portanto, nossa desigualdade se verifica.

1.5. OBSERVAÇÕES:

(1) Observando a demonstração, constata-se que provamos a validade de nossa desigualdade para um grande número de polinômios não pertencentes a $\mathcal{C}$.

(2) Para f numa das formas $\pm x^a \pm y^b + \Delta$, $\pm x^a \pm xy^b + \Delta$ ou $\pm xy^b \pm x^a y + \Delta$, os cálculos são análogos aos registrados.

(3) Se $f(x,y) = x^a + h(x,y)$, onde $h(x,y)$ é um polinômio de grau $\geq a+1$, então por Lu ([15]), existe uma mudança de coordenadas, na qual f se expressa na forma $x^a + x^{a-2}A_{a-2}(y) + \ldots + xA_1(x) + A_0(y)$. Se $\mu(f) < \infty$, então podemos supor que a nova expressão de f é polinomial. Acontece, que nem sempre o seu grau é menor ou igual ao grau de f.

(4) O exemplo (1.3) mostra que a condição $f \in \mathcal{C}$, é uma condição indispensável para os nossos propósitos.

(5) Para n variáveis $(n \geq 3)$, encontrar uma boa classe de polinômios para a qual valha a referida desigualdade, é uma questão mais delicada, como mostra o seguinte exemplo:

$$f : K^3 \to K, \quad f(x,y,z) = x^2 + 2xy^3 + z^2$$

Temos grau $(f) = 4$ e $B_f = \Sigma_{3\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0}$, pois f é equivalente a $x^2 + z^2 - y^6$.

No que segue, vamos exibir uma classe P de polinômios de $K[x_1, \ldots, x_n]$ ($K = R$ ou C), e uma função $h:\{2,3,\ldots\} \to N$, tal que, $|B_f| \leq h$ (grau f), para todo $f \in P$.

Antes porém, vamos registrar alguns conceitos encontrados em [12].

1.6. <u>DEFINIÇÃO</u>: Um polinômio $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ diz-se *cômodo* se para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, existir na expressão de f um monômio da forma $x_i^{a_i}$, com coeficiente não nulo ($a_i \in Z$, $a_i \geq 1$).

Dado $m \in N^n$, $m = (m_1, \ldots, m_n)$, denotaremos $x^m = x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$.

1.7. <u>DEFINIÇÃO</u>: Dado $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, $f = \sum_{m \in N^n} a_m x^m$, denotaremos por supp$(f)$, o conjunto descrito por $\{m \in N^n : a_m \neq 0\}$.

1.8. <u>DEFINIÇÃO</u>: Dado $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, denotaremos por $\Gamma_+(f)$ ao menor convexo de R_+^n (n-uplas de números reais não negativos) que contém o conjunto $\cup(m + R_+^n)$ onde $m \in \text{supp}(f) - 0$. Pela *fronteira de Newton* de f, entenderemos o poliedro $\Gamma(f)$ dado pela reunião das faces compactas do poliedro $\Gamma_+(f)$. Pela *parte principal newtoniana* de f, entenderemos o polinômio

$$f_o = \sum_{m \in \Gamma(f)} a_m x^m .$$

Seja Δ uma face compacta de $\Gamma(f)$, onde

$f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, $f = \sum_{m \in N^n} a_m x^m$

Coloquemos $f_\Delta = \sum_{m \in \Delta \cap N^n} a_m x^m$

1.9. <u>DEFINIÇÃO</u>: Dado $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, $f = \sum_{m \in N^n} a_m x^m$, diremos que f é *não-degenerado* se para cada face compacta Δ de $\Gamma(f)$, $(x_1 \partial_1 f)_\Delta, \ldots, (x_n \partial_n f)_\Delta$ não se anulam ao mesmo tempo em $(C-0)^n$.

1.10. <u>OBSERVAÇÕES</u>:

(1) Se $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ for cômodo com parte principal newtoniana não degenerada, então $\mu(f) < \infty$ (consequência de [12], Teorema A.I.).

(2) Se $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ for cômodo, com $\mu(f) < \infty$, então, não necessariamente f é não-degenerado, como podemos constatar pelo polinômio $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Seja P o conjunto dos polinômios cômodos não-degenerados f de $K[x_1, \ldots, x_n]$, com $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$, $(n \geq 2)$.

Para esta classe de polinômios, temos o:

1.11. <u>TEOREMA</u>: Existe uma função $h : \{2,3, \ldots\} \to N$, tal que, $|B_f| \leq h$ (grau f), para todo $f \in P$.

Demonstração: Seja $\Gamma_-(f)$ a reunião dos segmentos com extremidades em $0 \in R^n$ e $\Gamma(f)$, conforme [12].

Pelo Teorema I de [12], temos que

$$\mu(f) = n!V_n - (n-1)!V_{n-1} + \ldots + 1!(-1)^{n-1}V_1 + (-1)^n$$

onde V_n é o volume de dimensão n do poliedro $\Gamma_-(f)$, e, para cada $1 \leq q \leq n-1$, V_q é a soma dos volumes de dimensão q das intersecções do poliedro $\Gamma_-(f)$ com os planos de coordenadas de dimensão q.

Logo,

$$\mu(f) \leq \begin{cases} n!V_n+(n-2)!V_{n-2} + \ldots + 2V_2+1 & \text{se } n \text{ par} \\ n!V_n+(n-2)!V_{n-2} + \ldots + 3!V_3+V_1 & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Seja grau $(f) = \delta$. Então, temos que:

$$\mu(f) < \begin{cases} \delta^n+\binom{n}{2}\delta^{n-2}+\binom{n}{4}\delta^{n-4} + \ldots + \binom{n}{n-2}\delta^2+1 & \text{se } n \text{ par,} \\ \delta^n+\binom{n}{2}\delta^{n-2}+\binom{n}{4}\delta^{n-4} + \ldots + \binom{n}{n-1}\delta & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Tomando $h : \{2,3,\ldots\} \to N$ definida por

$$h(\delta) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{r-2}\binom{n}{2i}\delta^{n-2i} + 2 & \text{se } n \text{ par, onde } r = \frac{n-2}{2} \\ \sum_{i=0}^{s-1}\binom{n}{2i}\delta^{n-2i} + 1 & \text{se } n \text{ ímpar, onde } s = \frac{n-1}{2} \end{cases}$$

teremos por [14] que $|B_f| \leq h$ (grau f) se $f \in P$.

BIBLIOGRAFIA

[1] - ARNOL'D, V.I. - Normal forms of functions in neighbourhoods of degenerate critical points - Russian Math. Surveys, 29 : 2 (1974).

[2] - ARNOL'D, V.I. - Normal forms for functions near degenerate critical points, the weyl groups of A_k, D_k, E_k and lagrangian singularities - Funct. Anal. Appl., 6 (1973).

[3] - ARNOL'D, V.I. - Classification of unimodal critical points of functions - Funct. Anal. Appl., 7 (1973).

[4] - ARNOL'D, V.I. - Classification of bimodal critical points of functions - Funct. Anal. Appl., 9 (1974).

[5] - ARNOL'D, V.I. - Critical points of smooth functions and their normal forms - Russian Math. Surveys, 30 : 5 (1975).

[6] - BOARDMAN, J.M. - Singularities of differentiable maps - IHES, n.º 33 (1967).

[7] - DAMON, J. e GALLIGO, A. - A topological invariant for stable map germs. (preprint).

[8] - GABRIÊLOV, A.M. - Bifurcations, Dynkin diagrams, and modality of isolated singularities - Funct. Anal. Appl., 8 (1974).

[9] - GABRIÊLOV, A.M. e KUSHNIRENKO, A.G. - Description of deformations with constant Milnor number for homogeneous functions - Funct. Anal. Appl., 9 (1974).

[10] - KRAMER, K. - An example in the singularities of mappings - Topology 13 (1974).

[11] - KUO, T.C. - A complete determination of C^0-sufficiency in $J^r(2,1)$ - Inv. Math., 8 (1969).

[12] - KUSHNIRENKO, A.G. - Polyèdres de Newton et nombres de Milnor - Inv. Math., 32 (1976).

[13] - LEVINE, H.I. e EISENBUD, D. - An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ - Annals of Math., 106 (1977).

[14] - LOIBEL, G.F. e TADINI, W.M. - Finite determinated germs and the Boardman's Symbol - Anais Acad. Brasil. Ci., 49 (1978).

[15] - LU, Y.C. - Sufficiency of Jets in $J^r(2,1)$ via decomposition - Inv. Math., 10 (1970).

[16] - MARTINET, J. - Singularités des Fonctions et Applications Différentiables - Monografias de Matemática da PUC/RJ, n.º 1.

[17] - MATHER, J.N. - Stability of C^∞ mappings, III: Finitely determined map-germs - IHES, 35 (1968).

[18] - MATHER, J.N. - On Thom-Boardman singularities - Dynamical Systems, M. M. Peixoto, Univ. Bahia, Brasil, (1973).

[19] - MILNOR, J. e ORLIK, P. - Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials - Topology 9 (1970).

[20] - ORLIK, P. - Singularities and group actions - Am. Math. Soc., (1979).

[21] - RAND, D. - Arnold's classification of simple singularities of smooth functions - Math. Inst. Univ. of Warwick, Coventry (1977).

[22] - SAITO, K. - Quasihomogene isolierte singularitaten von hyperflachen - Inv. Math., 14 (1971).

[23] - SIERSMA, D. - Classification and Deformation of Singularities - Amsterdam (1974).

[24] - YOSHINAGA, E. e SUZUKI, M. - Normal forms of non-degenerate quasihomogeneous functions with inner modality ≤ 4 - Inv. Math., 55 (1979).

[25] - WASSERMANN, G. - Stability of Unfoldings - Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 393, (1974).

[26] - POSTON, T. e STEWART, I.N. - Taylor Expansions and Catastrophes - Research Notes in Mathematics, Pitman Publishing (1977).