INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

I.C.M.S.C.

TEORIA ESPECTRAL PARA UM SISTEMA HIPERBÓLICO E BIFURCAÇÃO DE HOPF

Hermano de Souza Ribeiro

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO

BRASIL

TEORIA ESPECTRAL PARA UM SISTEMA HIPERBÓLICO E BIFURCAÇÃO DE HOPF

Hermano de Souza Ribeiro

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do Título de Doutor em Ciências (Matemática).

Orientador: Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes

SÃO CARLOS - SP
1980

Aos meus pais.

A minha esposa Neusa Maria
e as minhas filhas Claudia
Heloisa e Patricia Regina.

SPECTRAL THEORY FOR A HYPERBOLIC SYSTEM AND HOPF BIFURCATION

Hermano de Souza Ribeiro

Adviser: Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes

ABSTRACT

This thesis studies the spectrum of the solution operator of a hyperbolic system motivated by a problem in transmission lines and applies the results to get periodic solutions.

The two main results are the description of the asymptotic behavior of the semigroup (Theorem I.5.1.) and Hopf bifurcation theorem for not necessarily holomorphic semigroups (Theorem III.1.).

AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de expressar a nossa profunda gratidão ao amigo e orientador Professor Orlando Francisco Lopes pela oportunidade e pela honra de trabalharmos juntos. Sem a sua paciência, dedicação, estímulo e competência, este trabalho não estaria concluido.

Desejaríamos agradecer a todos os professores e funcionários do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo e do Departamento de Matemática da Fundação Universidade Federal de São Carlos pelo excelente ambiente de trabalho existente em São Carlos.

O agradecimento final a Senhorita Maria Helena Derigi pela ajuda, paciência, dedicação e capacidade profissional por fazer este bonito trabalho de datilografia em tempo recorde.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O primeiro objetivo do trabalho é o estudo de um sistema hiperbólico de duas equações diferenciais parciais de primeira ordem com uma variável de estado com condições de fronteira envolvendo derivadas proveniente de um problema em linhas de transmissão com perdas. O procedimento adotado é o de transformar o problema dado em uma equação diferencial ordinária $\dot{u}(t) = Au(t)$ $(t > 0)$ em um espaço de Hilbert, onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos sobre o espaço de Hilbert. Anteriormente, Brayton [2] e Lopes [12] entre outros haviam explorado o mesmo problema no caso sem perdas pela redução do sistema hiperbólico a uma única equação diferencial diferença não linear do tipo neutro. O resultado mais expressivo alcançado nessa direção é a prova da existência de uma dicotomia exponencial para o semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ gerado por A determinada pela divisão do espectro de A através de retas verticais no plano complexo. A motivação da dicotomia exponencial transparece em Godounov [5] quando obtém estimativas exponenciais para as soluções de sistemas hiperbólicos com condições de fronteira diferentes das nossas e para suas derivadas primeiras. A análise espectral de A feita no trabalho corresponde no Livro de Godounov a um sistema de duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira obtida pela aplicação da Transformada de Laplace ao sistema hiperbólico. Convém ressaltar que nos nossos cálculos relativos às estimativas exponenciais ocorrem mais termos além daqueles encontrados em [5].

Guardadas as devidas proporções, o nosso trabalho estende os resultados de Godounov assim como o trabalho de Henry [9] generaliza o de Hale e Meyer [8] para uma certa classe de equações diferenciais funcionais do tipo neutro.

O segundo objetivo do trabalho é uma nova versão do teorema da bifurcação de Hopf em espaços de dimensão infinita para equações da forma

$$\frac{dv}{ds} = Av(s) + f(r,v(s)) \qquad (s > 0)$$

com hipóteses de dicotomia exponencial sobre o semigrupo gerado por A e hipóteses de regularidade sobre f. Anteriormente, Crandall e Rabinowitz [3] haviam conseguido uma versão do teorema da bifurcação de Hopf em espaços de dimensão infinita com hipóteses de analiticidade sobre o semigrupo gerado por A e hipóteses de regularidade sobre f. O semigrupo originário do problema em linhas de transmissão com perdas é um exemplo a satisfazer as nossas condições e não aquelas dadas em [3]. A motivação do teorema da bifurcação de Hopf nasce talvez no trabalho de Brayton [1] quando este analisa bifurcação de soluções periódicas em uma equação diferencial diferença não linear do tipo neutro e reduz o sistema hiperbólico obtido em problemas de linhas de transmissão a uma equação deste tipo. A certeza da validade do resultado aparece no trabalho de Oliveira [4] quando este estabelece o teorema da bifurcação de Hopf para equações diferenciais funcionais do tipo neutro. O procedimento utilizado é o mesmo de [4], [6] e [11]. A semelhança entre o nosso trabalho e os de Oliveira [4] e Lima [11] é o desconhecimento a priori da diferenciabilidade da solução. O ponto crucial no teorema da bifurcação é a prova de que uma solução "mild" é de fato solução.

A estada do Professor Jack K. Hale no Brasil em 1979 e suas discussões com o Professor Orlando Francisco Lopes deram início a este trabalho. Resgistramos aqui o nosso reconhecimento a ambos.

Este trabalho foi patrocinado, parcialmente, pelas Instituições: CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP.

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES

0.1. ALGUNS RESULTADOS SOBRE A TEORIA DE SEMIGRUPOS FORTEMENTE CONTÍNUOS DEFINIDOS SOBRE UM ESPAÇO DE BANACH

DEFINIÇÃO 0.1.1.

Seja $(X, ||\cdot||_X)$ um espaço de Banach. Uma família a um parâmetro $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos sobre X com valores em X é chamada um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares contínuos sobre X se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

(i) $T(0) = I_X$

(ii) $T(t_1+t_2) = T(t_1)T(t_2) \quad \forall\ t_1, t_2 \geq 0$

(iii) $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x \quad \forall\ x \in X.$

TEOREMA 0.1.1.

Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares contínuos definidos sobre um espaço de Banach $(X, ||\cdot||_X)$. Então existem constantes reais $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tal que

$$||T(t)x||_X \leq Me^{\omega t}||x||_X \qquad \forall\ x \in X,\ \ t \geq 0$$

DEFINIÇÃO 0.1.2.

O gerador infinitesimal A' de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos sobre um espaço de Banach $(X, ||\cdot||_X)$ é definido por:

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$$

para os valores de $x \in X$ tais que o limite existe. O domínio de definição de A, $D(A)$, é o conjunto de todos os elementos $x \in X$ para os quais o limite existe.

É evidente que $D(A)$ é um subespaço vetorial de X e que A é um operador linear definido sobre $D(A)$ com valores em X.

TEOREMA 0.1.2. (Hille-Yosida):

Uma condição necessária e suficiente para que um operador linear A definido sobre um subespaço vetorial $D(A)$ de um espaço de Banach $(X, ||\cdot||_X)$ com valores em X seja o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos sobre X satisfazendo

$$||T(t)x||_X \leq Me^{\omega t}||x||_X \quad \forall\ x \in X, \quad t \geq 0$$

para algum par (M,ω) de constantes reais é que

(i) A é um operador fechado e $D(A)$ é denso em X.

(ii) O conjunto resolvente (A) de A contém $\{\lambda \in C : \mathrm{Re}\lambda > \omega\}$ e, para $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, o operador resolvente $R(\lambda;A)$ de A satisfaz

$$||R(\lambda;A)x||_X \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^n}||x||_X \quad \forall\ x \in X,\ n = 1,2,3,\ldots$$

TEOREMA 0.1.3. (Lumer-Phillips):

Sejam $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ um espaço de Hilbert e A um operador linear definido sobre um subespaço vetorial $D(A)$ de X com valores em X, que é dissipativo, isto é, que satisfaz

$$\mathrm{Re}\langle Ax,x\rangle_X \leq 0 \qquad \forall\, x \in X$$

Então, se existir $\lambda_o > 0$ tal que o operador linear $(\lambda_o I_X - A)$ definido sobre $D(A)$ é sobrejetivo, A será o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos sobre X tal que

$$||T(t)x||_X \leq ||x||_X \qquad \forall\, x \in X,\ t \geq 0$$

TEOREMA 0.1.4.

Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos sobre um espaço de Banach $(X, ||\cdot||_X)$ satisfazendo

$$||T(t)x||_X \leq Me^{\omega t}||x||_X \qquad \forall\, x \in X,\quad t \geq 0$$

para algum par (M,ω) de constantes reais. Então, se

$$b > \max\{0,\omega\}, \quad t > 0 \quad \text{e} \quad x \in D(A^2)$$

$$T(t)x = (2\pi i)^{-1}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda;A)x\,d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \lim_{r\to\infty} \int_{b-ir}^{b+ir} e^{\lambda t}R(\lambda;A)x\,d\lambda$$

e a convergência é uniforme em relação a t para $t \in [\delta,\frac{1}{\delta}]$, onde $\delta > 0$ é dado.

TEOREMA 0.1.5.

Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos sobre um espaço de Banach $(X, ||\cdot||_X)$. Então se $\lambda \in \sigma(A)$, o espectro de A, então $e^{\lambda t} \in \sigma(T(t))$, o espectro de $T(t)$, para cada $t \geq 0$.

O mesmo teorema é válido trocando-se o termo espectro respectivamente pelos termos espectro pontual, espectro residual e espectro contínuo.

TEOREMA 0.1.6.

Sejam A o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos sobre um espaço de Banach $(X, ||\cdot||_X)$ satisfazendo

$$||T(t)x||_X \leq Me^{\omega t}||x||_X \qquad \forall\ x \in X, \quad t \geq 0$$

para algum par (M,ω) de constantes reais e B um operador linear contínuo definido sobre X com valores em X. Então $A+B$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{S(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos sobre X satisfazendo

$$||S(t)x||_X \leq Me^{(\omega+Mb)t}||x||_X \qquad \forall\ x \in X, \quad t \geq 0$$

onde $$b = \sup_{x \neq 0} \frac{||Bx||_X}{||x||_X}.$$

0.2. ALGUNS RESULTADOS SOBRE EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO EM ESPAÇOS DE BANACH

DEFINIÇÃO 0.2.1.

Sejam $(X, ||\cdot||_X)$ um espaço de Banach e A um operador linear definido sobre um subespaço vetorial D(A) denso em X com valores em X. Dado $x_o \in X$, o problema de Cauchy abstrato para A com condição inicial x_o consiste em achar uma solução x(t) do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) & t > 0 \\ \\ x(0) = x_o \end{cases} \tag{0.1}$$

onde, por solução é entendida uma função x(t) definida para $t \geq 0$ com valores em X tal que x(t) é contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável para $t > 0$, $x(t) \in D(A)$ para $t > 0$ e (0.1) é satisfeita.

TEOREMA 0.2.1.

Seja A um operador linear definido sobre um subespaço vetorial D(A) denso em um espaço de Banach $(X, ||\cdot||_X)$ com valores em X e com conjunto resolvente $\rho(A)$ não vazio. O problema de valor inicial (0.1) tem uma única solução x(t) para cada condição inicial $x_o \in D(A)$ se e somente se A for o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos sobre X.

DEFINIÇÃO 0.2.2.

Seja o problema não homogêneo de valor inicial em um espaço de Banach $(X, ||\cdot||_X)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(t) & t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (0.2)$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos sobre X e f é uma função contínua em $[0,\infty)$ com valores em X. Uma função $x(t)$ definida em $[0,\infty)$ com valores em X é uma solução de (0.2) se e somente se $x(t)$ for contínua em $[0,\infty)$, continuamente diferenciável em $(0,\infty)$, $x(t) \in D(A)$ para $t > 0$ e (0.2) é satisfeita.

TEOREMA 0.2.2.

A solução $x(t)$ de (0.2), quando existe, é única e é dada por

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds\ , \quad t \geq 0$$

desde que A e f sejam como na definição anterior.

DEFINIÇÃO 0.2.3.

A função

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds\ , \quad t \geq 0$$

é chamada a solução "mild" de (0.2) desde que A e f sejam como na definição anterior.

TEOREMA 0.2.3.

Uma condição necessária e suficiente para que o problema de valor inicial (0.2) tenha uma solução $x(t)$ para cada condição inicial $x_o \in D(A)$ é que

$$t \to \int_o^t T(t-s)f(s)ds\,, \qquad t \geq 0$$

seja diferenciável em $(0,\infty)$ desde que A e f sejam como na definição (0.2.2).

TEOREMA 0.2.4.

Sejam A o gerador infinitesimal de um grupo fortemente contínuo de operadores lineares contínuos definidos sobre o espaço de Banach $(X, ||\cdot||_X)$ satisfazendo

$$||T(t)x||_X \leq Me^{-\omega t}||x||_X \qquad \forall\ x \in X, \quad t \geq 0$$

(respectivamente,

$$||T(t)x||_X \leq Me^{\omega t}||x||_X \qquad \forall\ x \in X, \quad t \leq 0)$$

para algum par (M,ω) de constantes reais estritamente positivas e h uma função T-periódica definida sobre R com valores em X. Então a equação diferencial ordinária em X

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + h(t) \qquad (t \in R)$$

tem uma única solução "mild" T-periódica dada por

$$t \to \int_{-\infty}^{o} T(-s)h(t+s)ds \qquad (t \in R)$$

(respectivamente,

$$t \to \int_{\infty}^{o} T(-s)h(t+s)ds \qquad (t \in R)$$

O mesmo teorema é válido trocando-se o termo T-periódica pelo termo limitada.

0.3. UM TEOREMA SOBRE DIFERENCIABILIDADE DE PONTOS FIXOS DEPENDENTE DE UM PARÂMETRO

TEOREMA 0.3.1.

Sejam F um subconjunto fechado de um espaço de Banach $(X, ||\cdot||_X)$ com $\text{int } F \neq \emptyset$, Λ um subconjunto aberto de um espaço de Banach $(Y, ||\cdot||_Y)$, onde $\text{int } F$ indica o interior de F, e $T : F \times \Lambda \to F$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $T(x,\cdot) : \Lambda \to F$ é contínua para cada $x \in F$.

(ii) $T(\cdot,\lambda) : F \to F$ é contínua para cada $\lambda \in \Lambda$ e, para cada $\lambda \in \Lambda$, tem único ponto fixo $x^*(\lambda)$ que depende continuamente de λ.

(iii) Se $F_1 = \{x^*(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \subset F$ então T é continuamente diferenciável em relação a λ para $(x,\lambda) \in F_1 \times \Lambda$.

(iv) Existe um subconjunto aberto U de X tal que $F \subset U$ e T é continuamente diferenciável em relação a x para $(x,\lambda) \in U \times \Lambda$. A derivada $D_1T(x,\lambda)$ de $T(x,\lambda)$ em relação a x satisfaz

$$||D_1T(x,\lambda)\overline{x}||_X \leq \delta||\overline{x}||_X \qquad \forall\ (x,\lambda) \in U \times \Lambda\,,\ \overline{x} \in X$$

para algum $0 \leq \delta < 1$.

Então, $\lambda \to x^*(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ é continuamente diferenciável em Λ.

0.4. O TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO DO ESPECTRO

TEOREMA 0.4.1.

Sejam A um operador linear fechado com domínio de definição $D(A)$ denso em um espaço de Banach $(X, ||\cdot||_X)$ com valores em X e R um retângulo no plano complexo que contém, em seu interior, um número finito de pontos do espectro $\sigma(A)$ de A e, em seu exterior, a outra parte de $\sigma(A)$. Então

(i) $X = N(P_R) \oplus R(P_R)$ onde P_R é a projeção linear contínua definida sobre X dada por

$$P_R(x) = (2\pi i)^{-1}\int_{(\partial R)} R(\lambda;A)x d\lambda \qquad \forall\ x \in X$$

e (∂R) é a fronteira de R no plano complexo descrita no sentido antihorário.

(ii) A é decomposto segundo a decomposição em soma direta de X dada em (i), isto é,

$$P_R D(A) \subset D(A)$$

$$AN(P_R) \subset N(P_R)$$

$$AR(P_R) \subset R(P_R)$$

de tal maneira que o espectro da restrição de A a $R(P_R)$, que é um operador linear contínuo definido sobre $R(P_R)$ com valores em $R(P_R)$, coincide com os pontos do espectro de A contidos no interior do retângulo R e o espectro da restrição A a $N(P_R)$, que é um operador linear definido sobre um subespaço vetorial denso de $N(P_R)$ com valores em $N(P_R)$, coincide com os pontos do espectro de A contidos no exterior do retângulo R.

0.5. UM TEOREMA CLÁSSICO DE FOURIER

TEOREMA 0.5.1.

A fórmula

$$\frac{\pi}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \lim_{r\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{\operatorname{sen}[r(x-y)]}{x-y}dy$$

é válida desde que f é uma função de variação limitada em um intervalo da reta real contendo x.

REFERÊNCIAS:

A referência básica para as seções 0.1 e 0.2 é [15] com exceção do teorema 0.2.4 que é encontrado em [7] na página 150.

O teorema 0.3.1 está em [6] na página 236.

O teorema 0.4.1 está em [10] na página 178.

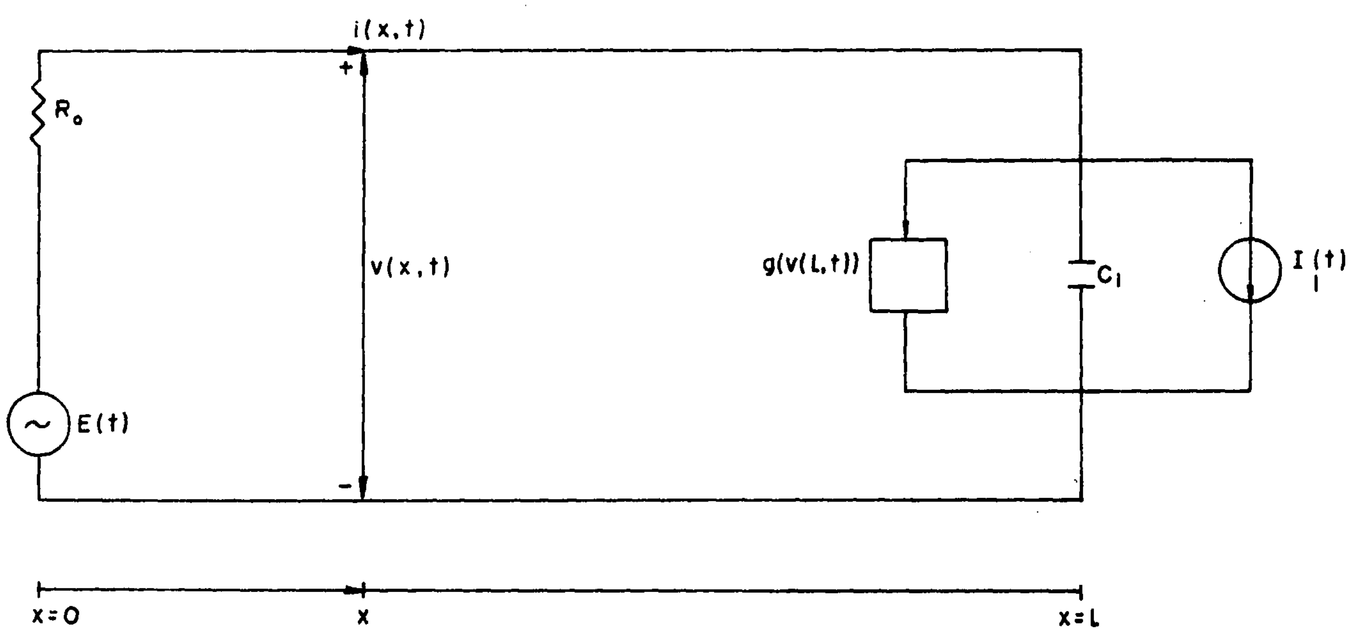
O teorema 0.5.1 está em [16] na página 25.

CAPÍTULO I

TEORIA ESPECTRAL PARA UM SISTEMA HIPERBÓLICO

I.1. UM PROBLEMA EM UMA LINHA DE TRANSMISSÃO COM PERDAS

Consideremos uma linha de transmissão com perdas como esquematizada na figura abaixo.



Na figura: $i(x,t)$ indica a corrente elétrica da linha de transmissão à distância x do início da linha no instante t;

$v(x,t)$ indica a tensão da linha de transmissão à distância x do início da linha no instante t;

R_o e $E(t)$ indicam, respectivamente, a resistência interna e a força eletromotriz variável com o tempo t da fonte geradora da linha de transmissão;

C_1 indica a capacitância do capacitor colocado no final da linha em paralelo com um dispositivo gerador de uma corrente elétrica $I_1(t)$ variável com o tempo t e com um outro dispositivo no qual a corrente elétrica, que o atravessa, é uma função g, em geral, não linear da tensão $v(\ell,t)$ e

ℓ indica o comprimento da linha de transmissão.

As equações diferenciais parciais de primeira ordem para a corrente elétrica $i(x,t)$ e tensão $v(x,t)$ são:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} i(x,t) = -\dfrac{1}{L}\dfrac{\partial}{\partial x} v(x,t) - \dfrac{R}{L} i(x,t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 < x < \ell, \quad t \in R \\ \dfrac{\partial}{\partial t} v(x,t) = -\dfrac{1}{C}\dfrac{\partial}{\partial x} i(x,t) - \dfrac{G}{C} v(x,t) \end{cases}$$

onde C, G, L e R são, respectivamente, a capacitância específica, a condutância específica, a indutância específica e a resistência específica da linha de transmissão.

As condições de fronteira são:

$$BC_o : E(t) = v(0,t) + R_o i(0,t), \quad \text{em} \quad x = 0$$

$$BC_\ell : i(\ell,t) = C_1 \frac{d}{dt} v(\ell,t) + g(v(\ell,t)) + I_1(t), \text{ em } x = \ell$$

Com a hipótese de que $E(t)$ é uma função diferenciável da variável t, definamos

$$I(x,t) = i(x,t)$$

$$V(x,t) = v(x,t) - E(t)$$

As equações diferenciais parciais de primeira ordem para $I(x,t)$ e $V(x,t)$ são:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} I(x,t) = -\dfrac{1}{L}\dfrac{\partial}{\partial x} V(x,t) - \dfrac{R}{L} I(x,t) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t} V(x,t) = -\dfrac{1}{C}\dfrac{\partial}{\partial x} I(x,t) - \dfrac{G}{C} V(x,t) - \dfrac{G}{C} E(t) - \dfrac{d}{dt} E(t) \end{cases}$$

e as condições de fronteira são:

$$V(0,t) + R_o I(0,t) = 0, \quad \text{em} \quad x = 0$$

$$I(\ell,t) = C_1 \frac{d}{dt} V(\ell, t) + g(V(\ell,t) + E(t)) + I_1(t) +$$

$$+ C_1 \frac{d}{dt} E(t), \qquad \text{em} \quad x = \ell$$

I.2. *UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA EM UM ESPAÇO DE HILBERT ORIGINÁRIO DE UM PROBLEMA EM UMA LINHA DE TRANSMISSÃO*

Consideremos o espaço de Hilbert $(H, ||\cdot||_H)$ onde

$$H = L^2[0,\ell] \times L^2[0,\ell] \times R$$

$$||(f,g,d)||_H =$$

$$= \left(\int_o^\ell |f(x)|^2 dx + \int_o^\ell |g(x)|^2 dx + d^2\right)^{1/2} \quad \forall\ (f,g,d) \in H$$

Definamos

$$A : D(A) \subset H \to H$$

onde

$$D(A) = \{(\phi,\psi,b) \in H : \phi,\psi \in AC[0,\ell];\ \phi',\psi' \in L^2[0,\ell];$$
$$\psi(0) + R_o\phi(0) = 0;\quad b = \psi(\ell)\}$$

por

$$A(\phi,\psi,b) = (-\tfrac{1}{L}\psi' - \tfrac{R}{L}\phi,\ -\tfrac{1}{C}\phi' - \tfrac{G}{C}\psi,\ \tfrac{1}{C_1}\phi(\ell) - \tfrac{k}{C_1}b)$$

sabendo-se que C, C_1, G, k, L, R_o e R são números reais com $C > 0$, $C_1 > 0$, $L > 0$, $G \geq 0$, $R \geq 0$, $R_o \geq 0$.

Então A é um operador linear fechado e $D(A)$ é um subespaço vetorial de H denso em H.

A equação diferencial ordinária em H

$$\dot{u}(t) = Au(t) \qquad (t > 0)$$

é originária de um problema em uma linha de transmissão.

1.3. A ANÁLISE ESPECTRAL DO OPERADOR LINEAR A

Para a determinação do conjunto resolvente $\rho(A)$ e do operador resolvente $R(\lambda;A)$ do operador linear A definido em $D(A) \subset H$ com valores no espaço de Hilbert H é preciso dar resposta a seguinte pergunta: "dado $(f,g,d) \in H$, para que valores complexos de λ existe $(\phi,\psi,b) \in D(A)$ tal que $\lambda(\phi,\psi,b) - A(\phi,\psi,b) = (f,g,d)$?". Equivalentemente, para que valores complexos de λ, existem $\phi,\psi \in AC[0,\ell]$ tal que $\phi',\psi' \in L^2[0,\ell]$ e satisfazendo:

$$\lambda\phi + \tfrac{1}{L}\psi' + \tfrac{R}{L}\phi = f$$

$$\lambda\psi + \tfrac{1}{C}\phi' + \tfrac{G}{C}\psi = g$$

$$\psi(0) + R_o\phi(0) = 0$$

$$\lambda\psi(\ell) - \frac{1}{C_1}\phi(\ell) + \frac{k}{C_1}\psi(\ell) = d$$

onde $f \in L^2[0,\ell]$, $g \in L^2[0,\ell]$ e $d \in R$ são dados ? De outro modo, para que valores complexos de λ, existem $\phi,\psi \in AC[0,\ell]$ tal que $\phi',\psi' \in L^2[0,\ell]$ e satisfazendo:

$$\begin{bmatrix} \psi' \\ \phi' \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & -R \\ -G & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & -L \\ -C & 0 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} \psi \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Lf \\ Cg \end{bmatrix}$$

$$(\lambda + \frac{k}{C_1})\psi(\ell) - \frac{1}{C_1}\phi(\ell) = d$$

$$\psi(0) + R_o\phi(0) = 0$$

onde $f \in L^2[0,\ell]$, $g \in L^2[0,\ell]$ e $d \in R$ são dados ?

O teorema seguinte auxilia na resposta desta questão.

TEOREMA I.3.1.

A matriz fundamental de soluções $X(x,\lambda)$ para o sistema linear de equações diferenciais ordinárias em C^2

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R - \lambda L \\ -G - \lambda C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

dependente de $\lambda \in C$, tal que $X(0,\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\forall \lambda \in C$ é dada por:

$$X(x,\lambda) = \begin{bmatrix} X_{11}(x,\lambda) & X_{12}(x,\lambda) \\ X_{21}(x,\lambda) & X_{22}(x,\lambda) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cosh[a(\lambda)x] & -\dfrac{a(\lambda)}{(G+\lambda C)}\operatorname{senh}[a(\lambda)x] \\ -\dfrac{(G+\lambda C)}{a(\lambda)}\operatorname{senh}[a(\lambda)x] & \cosh[a(\lambda)x] \end{bmatrix}$$

desde que $a(\lambda) = \sqrt{(CL)\lambda^2 + (CR + GL)\lambda + GR} \neq 0$;

$$\text{se} \quad \lambda = -\frac{G}{C}, \quad X(x, -\tfrac{G}{C}) = \lim_{\lambda \to -G/C} X(x,\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & (-R + \frac{G}{C}L)x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{se} \quad \lambda = -\frac{R}{L}, \quad X(x, -\tfrac{R}{L}) = \lim_{\lambda \to -R/L} X(x,\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (-G + \frac{R}{L}C)x & 1 \end{bmatrix}$$

Além disso, $X(x,\lambda)$ é analítica em λ e

$$X(x,\lambda) = X^{o}(x,\lambda) + \frac{1}{\lambda}X^{1}(x,\lambda) + \frac{1}{\lambda^2}X^{2}(x,\lambda), \quad \forall\, x \in R, \ \lambda \neq 0$$

onde $X^{o}(x,\lambda)$, $X^{1}(x,\lambda)$, $X^{2}(x,\lambda)$ são analíticas em λ e são dadas por:

$$X^{o}(x,\lambda) = \begin{bmatrix} X^{o}_{11}(x,\lambda) & X^{o}_{12}(x,\lambda) \\ X^{o}_{21}(x,\lambda) & X^{o}_{22}(x,\lambda) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cosh[a_o(\lambda)x] & -Z_o \operatorname{senh}[a_o(\lambda)x] \\ -Z_o^{-1}\operatorname{senh}[a_o(\lambda)x] & \cosh[a_o(\lambda)x] \end{bmatrix}$$

e

$$X^{1}(x,\lambda) = \begin{bmatrix} X^{1}_{11}(x,\lambda) & X^{1}_{12}(x,\lambda) \\ X^{1}_{21}(x,\lambda) & X^{1}_{22}(x,\lambda) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha x \operatorname{senh}[a_o(\lambda)x] & -Z_o(\alpha x \cosh[a_o(\lambda)x]-2\beta \operatorname{senh}[a_o(\lambda)x]) \\ -Z_o^{-1}(\alpha x \cosh[a_o(\lambda)x]+2\beta \operatorname{senh}[a_o(\lambda)x]) & \alpha x \cosh[a_o(\lambda)x] \end{bmatrix}$$

$$a_o(\lambda) = \lambda\sqrt{CL} + \gamma \quad ;$$

$$\alpha = -\frac{(CR - GL)^2}{8(CL)^{3/2}} \quad ; \quad \beta = -\frac{CR - GL}{4CL} \quad ;$$

$$\gamma = \frac{CR + GL}{2\sqrt{CL}} \quad ; \quad Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

e, para $0 \le x \le \ell$ e $|Re\lambda| \le \mu$, existe uma constante positiva $K(\ell,\mu)$, dependente de ℓ e de μ, tal que

$$|X_{ij}^2(x,\lambda)| \le K \qquad i,j = 1,\ 2$$

sendo que indicamos por $X_{ij}^2(x,\lambda)$, $i,j=1,2$ os elementos de $X^2(x,\lambda)$.

O conhecimento da matriz fundamental de soluções $X(x,\lambda)$ dada no teorema anterior e a condição $\psi(0) + R_o\phi(0) = 0$ garantem que:

$$\psi(x) = \phi(0)[-R_oX_{11}(x,\lambda) + X_{12}(x,\lambda)] +$$

$$+ \int_o^x [LX_{11}(x-y,\lambda)f(y) + CX_{12}(x-y,\lambda)g(y)]dy\ , \quad 0 \le x \le \ell$$

$$\phi(x) = \phi(0)[-R_oX_{21}(x,\lambda) + X_{22}(x,\lambda)] +$$

$$+ \int_o^x [LX_{21}(x-y,\lambda)f(y) + CX_{22}(x-y,\lambda)g(y)]dy\ , \quad 0 \le x \le \ell$$

A condição $(\lambda + \frac{k}{C_1})\psi(\ell) - \frac{1}{C_1}\phi(\ell) = d$ fornece a seguinte expressão para d:

$$d = (\lambda + \frac{k}{C_1})\phi(0)[-R_oX_{11}(\ell,\lambda) + X_{12}(\ell,\lambda)] +$$

$$+ (\lambda + \frac{k}{C_1})\int_o^{\ell}[LX_{11}(\ell-y,\lambda)f(y) + CX_{12}(\ell-y,\lambda)g(y)]dy$$

$$- \frac{1}{C_1}\phi(0)[-R_oX_{21}(\ell,\lambda) + X_{22}(\ell,\lambda)] -$$

$$- \frac{1}{C_1}\int_o^{\ell}[LX_{21}(\ell-y,\lambda)f(y) + CX_{22}(\ell-y,\lambda)g(y)]dy$$

Assim,

$$\phi(0)[(\lambda + \frac{k}{C_1})(-R_oX_{11}(\ell,\lambda) + X_{12}(\ell,\lambda)) +$$

$$+ \frac{R_o}{C_1}X_{21}(\ell,\lambda) - \frac{1}{C_1}X_{22}(\ell,\lambda)] =$$

$$= d - (\lambda + \frac{k}{C_1})\int_o^{\ell}[LX_{11}(\ell-y,\lambda)f(y) + CX_{12}(\ell-y,\lambda)g(y)]dy +$$

$$+ \frac{1}{C_1}\int_o^{\ell}[LX_{21}(\ell-y,\lambda)f(y) + CX_{22}(\ell-y,\lambda)g(y)]dy$$

O valor $\phi(0)$ fica determinado apenas para os valores complexos de λ tais que

$$h(\lambda) = (\lambda + \frac{k}{C_1})(-R_oX_{11}(\ell,\lambda) + X_{12}(\ell,\lambda)) +$$

$$+ \frac{R_o}{C_1}X_{21}(\ell,\lambda) - \frac{1}{C_1}X_{22}(\ell,\lambda) \neq 0$$

e, para os valores complexos de λ tais que $h(\lambda) \neq 0$,

$$\phi(0) = \frac{1}{h(\lambda)}\{d - (\lambda + \frac{k}{C_1})\int_0^{\ell}[LX_{11}(\ell-y,\lambda)f(y)+CX_{12}(\ell-y,\lambda)g(y)]dy +$$

$$+ \frac{1}{C_1}\int_0^{\ell}[LX_{21}(\ell-y,\lambda)f(y) + CX_{22}(\ell-y,\lambda)g(y)]dy\}$$

Para os valores complexos de λ tais que $h(\lambda) \neq 0$, ϕ e ψ são conhecidos pela substituição do valor $\phi(0)$ em suas respectivas expressões.

Em resumo, o conjunto resolvente $\rho(A)$ do operador linear A definido sobre $D(A)$ com valores no espaço de Hilbert H consiste dos valores complexos de λ para os quais $h(\lambda) \neq 0$ e o operador resolvente $R(\lambda;A)$ existe para $\lambda \in \rho(A)$, está definido sobre H com valores em $D(A)$, é linear e contínuo e é dado a seguir após as seguintes definições que tem a utilidade de compactar a expressão de $R(\lambda;A)$.

Definimos para $f,g \in L^2[0,\ell]$

$$J_1(f,g)(x,\lambda) = \int_0^x [LX_{11}(x-y,\lambda)f(y)+CX_{12}(x-y,\lambda)g(y)]dy ;$$

$$0 \leq x \leq \ell ; \quad \lambda \in C$$

$$J_1^i(f,g)(x,\lambda) = \int_0^x [LX_{11}^i(x-y,\lambda)f(y)+CX_{12}^i(x-y,\lambda)g(y)]dy ;$$

$$0 \leq x \leq \ell ; \quad \lambda \in C ; \quad i = 0,\ 1,\ 2$$

$$J_2(f,g)(x,\lambda) = \int_0^x [LX_{21}(x-y,\lambda)f(y)+CX_{22}(x-y,\lambda)g(y)]dy ;$$

$$0 \leq x \leq \ell ; \quad \lambda \in C$$

$$J_2^i(f,g)(x,\lambda) = \int_0^x [LX_{21}^i(x-y,\lambda)f(y)+CX_{22}^i(x-y,\lambda)g(y)]dy ;$$

$$0 \leq x \leq \ell ; \quad \lambda \in C ; \quad i = 0,\ 1,\ 2$$

Com estas definições,

$$J_1(f,g)(x,\lambda) = J_1^o(f,g)(x,\lambda) + \lambda^{-1}J_1^1(f,g)(x,\lambda) +$$

$$+ \lambda^{-2}J_1^2(f,g)(x,\lambda)\ , \quad 0 \le x \le \ell\ ; \quad \lambda \in C - \{0\}$$

$$J_2(f,g)(x,\lambda) = J_2^o(f,g)(x,\lambda) + \lambda^{-1}J_2^1(f,g)(x,\lambda) +$$

$$+ \lambda^{-2}J_2^2(f,g)(x,\lambda)\ , \quad 0 \le x \le \ell\ ; \quad \lambda \in C - \{0\}$$

Definimos também,

$$k_1(x,\lambda) = -R_oX_{11}(x,\lambda) + X_{12}(x,\lambda)\ , \quad 0 \le x \le \ell\ ; \quad \lambda \in C$$

$$k_2(x,\lambda) = -R_oX_{21}(x,\lambda) + X_{22}(x,\lambda)\ , \quad 0 \le x \le \ell\ ; \quad \lambda \in C$$

$$k_1^i(x,\lambda) = -R_oX_{11}^i(x,\lambda) + X_{21}^i(x,\lambda)\ ; \quad i=0,1,2\ ;\ 0\le x\le \ell\ ; \quad \lambda \in C$$

$$k_2^i(x,\lambda) = -R_oX_{21}^i(x,\lambda) + X_{22}^i(x,\lambda)\ ; \quad i=0,1,2\ ;\ 0\le x\le \ell\ ; \quad \lambda \in C$$

Analogamente,

$$k_1(x,\lambda) = k_1^o(x,\lambda) + \lambda^{-1}k_1^1(x,\lambda) +$$

$$+ \lambda^{-2}k_1^2(x,\lambda)\ , \quad 0 \le x \le \ell\ ; \quad \lambda \in C - \{0\}$$

$$k_2(x,\lambda) = k_2^o(x,\lambda) + \lambda^{-1}k_2^1(x,\lambda) +$$

$$+ \lambda^{-2}k_2^2(x,\lambda)\ , \quad 0 \le x \le \ell\ ; \quad \lambda \in C - \{0\}$$

Após estas definições,

$R(\lambda;A)(f,g,d) =$

$$= \Big(\frac{1}{h(\lambda)}\{d + \frac{1}{C_1}J_2(f,g)(\ell,\lambda)-(\lambda + \frac{k}{C_1})J_1(f,g)(\ell,\lambda)\}k_2(\cdot,\lambda) + J_2(f,g)(\cdot,\lambda),$$

$$\frac{1}{h(\lambda)}\{d + \frac{1}{C_1}J_2(f,g)(\ell,\lambda)-(\lambda + \frac{k}{C_1})J_1(f,g)(\ell,\lambda)\}k_1(\cdot,\lambda) + J_1(f,g)(\cdot,\lambda),$$

$$\frac{1}{h(\lambda)}\{d + \frac{1}{C_1}J_2(f,g)(\ell,\lambda)-(\lambda + \frac{k}{C_1})J_1(f,g)(\ell,\lambda)\}k_1(\ell,\lambda) + J_1(f,g)(\ell,\lambda)\Big),$$

$\forall\ (f,g,d) \in H$

A expansão de $h(\lambda)$, sob a forma

$$h(\lambda) = \lambda h_1(\lambda) + \lambda^0 h_o(\lambda) + \lambda^{-1}h_{-1}(\lambda) + \lambda^{-2}h_{-2}(\lambda),$$

onde:

$$h_1(\lambda) = -R_oX_{11}^o(\ell,\lambda) + X_{12}^o(\ell,\lambda)$$

$$h_o(\lambda) = -R_oX_{11}^1(\ell,\lambda) + X_{12}^1(\ell,\lambda) - \frac{k}{C_1}R_oX_{11}^o(\ell,\lambda) + \frac{k}{C_1}X_{12}^o(\ell,\lambda) + \frac{R_o}{C_1}X_{21}^o(\ell,\lambda) + \frac{1}{C_1}X_{22}^o(\ell,\lambda)$$

$$h_{-1}(\lambda) = -R_oX_{11}^2(\ell,\lambda) + X_{12}^2(\ell,\lambda) - \frac{k}{C_1}R_oX_{11}^1(\ell,\lambda) + \frac{k}{C_1}X_{12}^1(\ell,\lambda) + \frac{R_o}{C_1}X_{21}^1(\ell,\lambda) + \frac{1}{C_1}X_{22}^1(\ell,\lambda)$$

$$h_{-2}(\lambda) = -\frac{k}{C_1}R_oX_{11}^2(\ell,\lambda) + \frac{k}{C_1}X_{12}^2(\ell,\lambda) + \frac{R_o}{C_1}X_{21}^2(\ell,\lambda) + \frac{1}{C_1}X_{22}^2(\ell,\lambda)$$

é utilizada no próximo teorema.

TEOREMA I.3.2.

Suponhamos que (λ_j) $j = 1, 2, 3, \ldots$ seja uma seqüência no plano complexo de zeros de $h(\lambda)$ tal que:

(a) $(\mathrm{Re}\lambda_j)$ $j = 1, 2, 3, \ldots$ é uma seqüência limitada

(b) $\lim\limits_{j\to\infty} |\lambda_j| = +\infty$

Então, se $Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} \neq R_o$, para toda subseqüência (λ_{j_m}) $m = 1,2,3,\ldots$ de (λ_j) $j = 1,2,3,\ldots$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{Re}\lambda_{j_m}$ existe,

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{Re}\lambda_{j_m} = \sigma_o = -\frac{1}{2\sqrt{CL}\,\ell}[2\gamma\ell + \ell n|\frac{Z_o+R_o}{Z_o-R_o}|] < 0$$

Prova:

Suponhamos sem perda de generalidade, que para cada $j = 1, 2, 3, \ldots$ $\lambda_j \neq 0$ e $|\mathrm{Re}\lambda_j| \leq \mu$ para alguma constante positiva μ. Assim, para cada $j = 1, 2, 3, \ldots$

$$h_1(\lambda_j) = -\lambda_j^{-1}h_o(\lambda_j) - \lambda_j^{-2}h_{-1}(\lambda_j) - \lambda_j^{-3}h_{-2}(\lambda_j)$$

$$|h_1(\lambda_j)| \leq |\lambda_j^{-1}||h_o(\lambda_j)| + |\lambda_j^{-2}||h_{-1}(\lambda_j)| + |\lambda_j^{-3}||h_{-2}(\lambda_j)|$$

Como $h_o(\lambda)$, $h_{-1}(\lambda)$ e $h_{-2}(\lambda)$ são dadas em termos de $X_{ij}^m(\ell,\lambda)$ $i,j = 1,2$, $m = 0,1,2,$ que são funções limitadas de λ para $|\mathrm{Re}\lambda| \leq \mu$,

$$\lim_{j\to\infty} |h_1(\lambda_j)| = 0$$

Lembrando que

$$h_1(\lambda) = -R_oX_{11}^o(\ell,\lambda) + X_{12}^o(\ell,\lambda) = -\frac{R_o}{2}[e^{\lambda\sqrt{CL}\,\ell+\gamma\ell} + e^{-\lambda\sqrt{CL}\,\ell-\gamma\ell}] - \frac{Z_o}{2}[e^{\lambda\sqrt{CL}\,\ell+\gamma\ell} - e^{-\lambda\sqrt{CL}\,\ell-\gamma\ell}]$$

$$h_1(\lambda) = -e^{\lambda\sqrt{CL}\,\ell+\gamma\ell}\left(\frac{R_o+Z_o}{2}\right)\left[1 - \left(\frac{Z_o-R_o}{Z_o+R_o}\right)e^{-2\lambda\sqrt{CL}\,\ell-2\gamma\ell}\right]$$

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{R_o+Z_o}{2}\right)e^{\mathrm{Re}\lambda_j\sqrt{CL}\,\ell+\gamma\ell}\left|1 - \left(\frac{Z_o-R_o}{Z_o+R_o}\right)e^{-2\lambda_j\sqrt{CL}\,\ell-2\gamma\ell}\right| = 0$$

Se (λ_{j_m}) $m = 1,2,3,\ldots$ for uma subseqüência de (λ_j) $j = 1,2,3,\ldots$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty}\mathrm{Re}\lambda_{j_m} = \sigma_1$ então

$$\left(\frac{R_o+Z_o}{2}\right)e^{\sigma_1\sqrt{CL}\,\ell+\gamma\ell}\left|1 - \left(\frac{Z_o-R_o}{Z_o+R_o}\right)e^{-2\sigma_1\sqrt{CL}\,\ell-2\gamma\ell}\right| = 0$$

Como $\left(\frac{R_o+Z_o}{2}\right)e^{\sigma_1\sqrt{CL}\,\ell+\gamma\ell} \neq 0$,

$$\left|1 - \left(\frac{Z_o-R_o}{Z_o+R_o}\right)e^{-2\sigma_1\sqrt{CL}\,\ell-2\gamma\ell}\right| = 0$$

$$|1| - \left|\frac{Z_o-R_o}{Z_o+R_o}\right|e^{-2\sigma_1\sqrt{CL}\,\ell-2\gamma\ell} \leq \left|1 - \left(\frac{Z_o-R_o}{Z_o+R_o}\right)e^{-2\sigma_1\sqrt{CL}\,\ell-2\gamma\ell}\right| = 0$$

$$e^{-2\sigma_1\sqrt{CL}\,\ell-2\gamma\ell} = \left|\frac{Z_o+R_o}{Z_o-R_o}\right|$$

$$-2\sigma_1\sqrt{CL}\,\ell-2\gamma\ell = \ell n\left|\frac{Z_o+R_o}{Z_o-R_o}\right|$$

$$\sigma_1 = \frac{-1}{2\sqrt{CL}\,\ell}\left[2\gamma\ell + \ell n\left|\frac{Z_o+R_o}{Z_o-R_o}\right|\right]$$

Isto encerra a prova do teorema.

I.4. O SEMIGRUPO FORTEMENTE CONTÍNUO DE OPERADORES LINEARES CONTÍNUOS DEFINIDOS SOBRE O ESPAÇO DE HILBERT H GERADO PELO OPERADOR LINEAR A

TEOREMA I.4.1.

O operador linear A definido sobre $D(A)$ com valores no espaço de Hilbert H é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos sobre H. Além disso, para $u \in D(A^2)$

$$T(t)u = (2\pi i)^{-1}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda;A)u\,d\lambda = \lim_{r\to\infty} (2\pi i)^{-1}\int_{b-ir}^{b+ir} e^{\lambda t}R(\lambda;A)u\,d\lambda \qquad (t > 0)$$

onde $b > \max\{0,\omega\}$ e $\omega \in R$ é tal que $||T(t)u||_H \leq Me^{\omega t}||u||_H$; $u \in H$; $t \geq 0$ para algum $M > 0$.

Prova:

Pelo teorema de Lumer Phillips, basta provarmos que

$$\tilde{A} : D(A) \subset H \to H$$

dado por

$$\tilde{A}(\phi,\psi,b) = (-\frac{1}{L}\psi' , -\frac{1}{C}\phi' , \frac{1}{C_1}\phi(\ell))$$

satisfaz

$$p(\tilde{A}(\phi,\psi,b), (\phi,\psi,b) \leq 0 \quad \forall (\phi,\psi,b) \in D(A)$$

onde p é o produto interno sobre H dado por:

$$p((f_1,g_1,d_1),(f_2,g_2,d_2)) = \frac{1}{C}\int_o^{\ell} f_1(x)f_2(x)dx + \frac{1}{L}\int_o^{\ell} g_1(x)g_2(x)dx + \frac{C_1}{CL}d_1d_2\,, \quad \forall\ (f_i,g_i,d_i) \in H,\ i = 1,\ 2,$$

que é equivalente ao produto interno original de H.

COROLÁRIO I.4.1.

Os zeros de $h(\lambda)$ no plano complexo tem parte real menor ou igual a ω, onde $\omega \in R$ é considerado como no teorema I.4.1. Além disso, para

$$\sigma > \sigma_o = \frac{-1}{2\sqrt{CL}\,\ell}[2\gamma\ell + \ell n|\frac{Z_o+R_o}{Z_o-R_o}|]$$

o número de zeros de $h(\lambda)$ com parte real superior a ω é finito.

Prova:

Os zeros de $h(\lambda)$ constituem o espectro do operador linear A que, pelo teorema I.4.1., é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos sobre o espaço de Hilbert H. Se $\omega \in R$ for, como no teorema I.4.1., o teorema de Hille-Yosida garante que todo zero de $h(\lambda)$ tem parte real menor ou igual a ω.

Como $h(\lambda)$ é uma função não identicamente nula e analítica na variável λ, os zeros de $h(\lambda)$ são pontos isolados do plano complexo e, assim, todo subconjunto compacto do plano complexo contém um número finito de zeros de $h(\lambda)$. O que queremos mostrar é que: dado $\sigma > \sigma_o$ existe em correspondência um número n_σ, dependente de σ, de tal maneira que o retângulo $R_\sigma = [\sigma,b] \times [-n_\sigma,n_\sigma]$ contenha todos os zeros de $h(\lambda)$ com parte real maior do que σ, que são em número finito. Suponhamos o contrário, isto é, que dado $\sigma > \sigma_o$ para cada $n=1,2,3,\ldots$ exista $\lambda_n \in C$ com a propriedade de que $h(\lambda_n) = 0$, $\mathrm{Re}\lambda_n \in [\sigma,b]$ e $|\mathrm{Im}\,\lambda_n| > n$. Com esta hipótese, existe uma subseqüência (λ_{n_j}) $j = 1,2,3,\ldots$ da seqüência (λ_n) $n = 1,2,3,\ldots$ satisfazendo:

(a) $\lim\limits_{j\to\infty} |\lambda_{n_j}| = +\infty$

(b) $\lim\limits_{j\to\infty} \mathrm{Re}\lambda_{n_j} = \sigma_o'$ onde $\sigma_o < \sigma \le \sigma_o' \le b$

o que contradiz o teorema I.3.1.

TEOREMA I.4.2.

Consideremos

$$\sigma > \sigma_o = \frac{-1}{2\sqrt{CL}\,\ell}\left[2\gamma\ell + \ell n\left|\frac{Z_o+R_o}{Z_o-R_o}\right|\right]$$

de tal modo que todo zero de $h(\lambda)$ tem parte real diferente de σ e $\omega \in R$ como no teorema I.4.1. Escolhemos $n_\sigma \in N$, dependente de σ, tal que o retângulo $R_\sigma = [\sigma,\omega] \times [-n_\sigma,n_\sigma]$ contenha, no seu interior, todos os zeros de $h(\lambda)$ com parte real superior a σ. Definimos o operador linear P_σ, associado ao retângulo R_σ, definido sobre o espaço de Hilbert H por:

$$P_\sigma u = (2\pi i)^{-1}\int_{(\partial R_\sigma)} R(\lambda;A)u\,d\lambda, \quad u \in H$$

onde ∂R_σ é a fronteira de R_σ descrita no sentido antihorário. Então:

(i) P_σ é uma projeção linear contínua definida sobre H.

(ii) A imagem de P_σ é um subespaço vetorial H_σ do espaço de Hilbert H invariante em relação ao operador linear A e o espectro do operador $A|H_\sigma$, restrição de A a H_σ, consiste dos pontos do espectro de A, que são os zeros de $h(\lambda)$, contidos em R_σ.

(iii) Se $u_o \in H$ for tal que $P_\sigma u_o = 0$, então:

$$(2\pi i)^{-1}\int_{(\partial R_\sigma)} e^{\lambda t}R(\lambda;A)u_o\,d\lambda = 0 \quad \text{para cada} \quad t \geq 0.$$

Prova:

Os fatos mencionados nas partes (i) e (ii) da tese estão contidos no teorema 0.4.1. A prova da parte (iii) é a seguinte: considere $u_o \in H$ com $P_\sigma u_o = 0$

$$\frac{d}{dt}\left[(2\pi i)^{-1}\int_{(\partial R_\sigma)} e^{\lambda t}R(\lambda;A)u_o\,d\lambda\right] =$$

$$= (2\pi i)^{-1}\int_{(\partial R_\sigma)} e^{\lambda t}\lambda R(\lambda;A)u_o\,d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-1}\int_{(\partial R_\sigma)} e^{\lambda t}[I_H + AR(\lambda;A)]u_o\,d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-1}\int_{(\partial R_\sigma)} e^{\lambda t}I_H u_o\,d\lambda + (2\pi i)^{-1}\int_{(\partial R_\sigma)} e^{\lambda t}AR(\lambda;A)u_o\,d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-1}\int_{(\partial R_\sigma)} e^{\lambda t} AR(\lambda;A)u_o d\lambda =$$

$$= A[(2\pi i)^{-1}\int_{(\partial R_\sigma)} e^{\lambda t} R(\lambda;A)u_o d\lambda] ,$$

pois A é um operador linear fechado.

Assim,

$$u(t) = (2\pi i)^{-1}\int_{(\partial R_\sigma)} e^{\lambda t} R(\lambda;A)u_o d\lambda , \quad t \geq 0$$

é uma solução do problema de valor inicial em H:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

o qual tem solução única. Como a função identicamente nula também é solução do mesmo problema, segue o resultado.

TEOREMA I.4.3. (Da Translação):

Consideremos

$$\sigma > \sigma_o = \frac{-1}{2\sqrt{CL}\,\ell}(2\gamma\ell + \ell n|\frac{Z_o+R_o}{Z_o-R_o}|)$$

de tal modo que todo zero de $h(\lambda)$ tenha parte real diferente de σ e $b > \omega$ onde ω é como no teorema I.4.1. Escolhemos um retângulo $R_\sigma = [\sigma,b] \times [-r_o,r_o]$ no plano complexo com a propriedade de conter, em seu interior, todos os zeros de $h(\lambda)$ com parte real superior a σ. Se P_σ for a projeção associada ao retângulo R_σ como dada no teorema I.4.2.,

$$T(t)u = (2\pi i)^{-1}\int_{\sigma+i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda;A)u d\lambda, \qquad u \in D(A^2) \cap N(P_\sigma);$$

$$t > 0$$

onde $\{T(t) : t \geq 0\}$ é o semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares contínuos definidos sobre o espaço de Hilbert H gerado pelo operador linear A.

Prova:

Sejam $\{T(t) : t \geq 0\}$, $b \in R$ e P_σ como no enunciado. O teorema é trivial para $\sigma \geq b$. Para estabelecermos o resultado no caso $\sigma < b$ basta observarmos que

$$\lim_{r\to\infty}\int_{(\partial R_{\sigma,r})^{\pm}} e^{\lambda t}R(\lambda;A)u\,d\lambda = 0\ ;\quad u \in D(A^2) \cap N(P_\sigma);\ t > 0$$

onde indicamos por $(\partial R_{\sigma,r})^{+}$ e $(\partial R_{\sigma,r})^{-}$ os segmentos de reta no plano complexo com extremos $\sigma+ir$ e $b+ir$ e $\sigma-ir$ e $b-ir$ respectivamente para $r \geq r_o$.

I.5. UMA ESTIMATIVA DE DECAIMENTO EXPONENCIAL PARA O SEMIGRUPO FORTEMENTE CONTÍNUO $\{T(t) : t \geq 0\}$ DE OPERADORES LINEARES CONTÍNUOS DEFINIDO SOBRE O ESPAÇO DE HILBERT H GERADO PELO OPERADOR LINEAR A

LEMA I.5.1.

Para $\lambda \in C - \{0\}$, $x \in R$, com a notação do parágrafo I.4.,

$$\frac{1}{h(\lambda)}\{d + \frac{1}{C_1}J_2(f,g)(\ell,\lambda) - (\lambda + \frac{k}{C_1})J_1(f,g)(\ell,\lambda)\}k_2(x,\lambda) =$$

$$= -\frac{J_1^o(f,g)(\ell,\lambda)k_2^o(x,\lambda)}{h_1(\lambda)} + \frac{\lambda^{-1}}{(h_1(\lambda))^2}\{h_1(\lambda)[dk_2^o(x,\lambda) +$$

$$+ \frac{1}{C_1}J_2^o(f,g)(\ell,\lambda)k_2^o(x,\lambda) - \frac{k}{C_1}J_1^o(f,g)(\ell,\lambda)k_2^o(x,\lambda) -$$

$$- J_1^o(f,g)(\ell,\lambda)k_2^1(x,\lambda) - J_1^1(f,g)(\ell,\lambda)k_2^o(x,\lambda)] +$$

$$+ h_o(\lambda)J_1^o(f,g)(\ell,\lambda)k_2^o(x,\lambda)\} + \text{termos em } \lambda^{-2}$$

TEOREMA I.5.1. (Do Decaimento Exponencial):

Consideremos $\sigma \in (-\frac{\gamma}{\sqrt{CL}}, 0)$ de tal modo que todo zero de $h(\lambda)$ tenha parte real diferente de σ e escolhemos $r_o > 0$ e $b > 0$ tais que o retângulo $R_\sigma = [\sigma,b] \times [-r_o,r_o]$ contenha, em seu interior, todos os zeros de $h(\lambda)$ com parte real superior a σ. Então, para cada $u \in D(A^2) \cap N(P_\sigma)$, onde P_σ é a projeção associada a R_σ, existe $M_- > 0$, dependendo de σ, com a propriedade de que

$$||T(t)u||_H \le M_- e^{\sigma t}||u||_H \qquad (t \ge 0)$$

Prova:

Pelo teorema I.4.3., se σ e u forem como no enunciado,

$$T(t)u = (2\pi i)^{-1}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{-\lambda t}R(\lambda;A)ud\lambda \qquad (t > 0)$$

Provaremos uma estimativa de decaimento exponencial, como colocada no teorema, para a primeira coordenada de $T(t)u$ utilizando a expansão dada no lema anterior e a expansão análoga de $J_2(f,g)(x,\lambda)$ dada no parágrafo anterior. A obtenção da estimativa de decaimento exponencial para o termo em λ^{-2} é imediata e para o termo em λ^{-1} é análoga à estimativa feita em [5]. Faremos, a seguir, a estimativa de decaimento exponencial para o termo em λ^o da primeira componente de $T(t)u$.

Seja $u = (f,g,d) \in D(A^2) \cap N(P_\sigma)$. O termo em λ^o da primeira componente de $T(t)u$ é a função da variável x perten cente a $L^2[0,\ell]$ dada por:

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\{-\frac{1}{h_1(\lambda)}(-R_o X_{21}^o(x,\lambda) + X_{22}^o(x,\lambda)) \; .$$

$$. \int_o^{\ell} [LX_{11}^o(\ell-y,\lambda)f(y) + CX_{12}^o(\ell-y,\lambda)g(y)]dy\}d\lambda \; +$$

$$+ \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\{\int_o^x [LX_{21}^o(x-y,\lambda)f(y) + CX_{22}^o(x-y,\lambda)g(y)]dy\}d\lambda \; ;$$

$$0 \leq x \leq \ell$$

ou por

$$(\frac{R_o+Z_o}{2Z_o})\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\lambda t}}{h_1(\lambda)}[\int_o^{\ell}(\frac{L}{2}f(y) - \frac{Z_oC}{2}g(y)e^{(\lambda\sqrt{CL}+\gamma)(x+\ell-y)}dy\}d\lambda \; +$$

$$+ (\frac{R_o+Z_o}{2Z_o})\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\lambda t}}{h_1(\lambda)}[\int_o^{\ell}(\frac{L}{2}f(y) + \frac{Z_oC}{2}g(y))e^{(\lambda\sqrt{CL}+\gamma)(x+y-\ell)}dy]d\lambda \; +$$

$$+ (\frac{Z_o-R_o}{2Z_o})\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\lambda t}}{h_1(\lambda)}[\int_o^{\ell}(\frac{L}{2}f(y) - \frac{Z_oC}{2}g(y))e^{(\lambda\sqrt{CL}+\gamma)(\ell-y-x)}dy]d\lambda \; +$$

$$+ (\frac{Z_o-R_o}{2Z_o})\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\lambda t}}{h_1(\lambda)}[\int_o^{\ell}(\frac{L}{2}f(y) + \frac{Z_oC}{2}g(y))e^{(\lambda\sqrt{CL}+\gamma)(y-x-\ell)}dy]d\lambda \; +$$

$$+ \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}[\int_o^x(-\frac{L}{2Z_o}f(y) + \frac{C}{2}g(y))e^{(\lambda\sqrt{CL}+\gamma)(x-y)}dy]d\lambda \; +$$

$$+ \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}[\int_o^x(\frac{L}{2Z_o}f(y) + \frac{C}{2}g(y))e^{-(\lambda\sqrt{CL}+\gamma)(x-y)}dy]d\lambda$$

Vejamos a estimativa de decaimento exponencial para a primeira parcela da expressão anterior. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $f,g \in C^1[0,\ell]$. Se $q = \dfrac{Z_o - R_o}{Z_o + R_o}$

$$\left(\frac{R_o+Z_o}{2Z_o}\right)\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{h_1(\lambda)}\left[\int_o^{\ell}\left(\frac{L}{2}f(y) - \frac{Z_oC}{2}g(y)\right)\ e^{(\lambda\sqrt{CL}+\gamma)(x+\ell-y)}dy\right]d\lambda =$$

$$= -(Z_o)^{-1}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{-2n\ell(\lambda\sqrt{CL}+\gamma)}\left[\int_o^{\ell}\left(\frac{L}{2}f(y) - \frac{Z_oC}{2}g(y)\right)e^{(\lambda\sqrt{CL}+\gamma)(x-y)}dy\right]\right\}d\lambda =$$

$$= -i(Z_o)^{-1}\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} e^{(\sigma+is)t}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{-2n\ell(\gamma+\sqrt{CL}\sigma+i\sqrt{CL}s)}\left[\int_o^{\ell}\left(\frac{L}{2}f(y) - \frac{Z_oC}{2}g(y)\right).\right.\right.$$

$$\left.\left. .\ e^{(\sigma+is)\sqrt{CL}(x-y)+\gamma(x-y)}dy\right]\right\}ds =$$

$$= -i(Z_o)^{-1}e^{\sigma t+(\sigma\sqrt{CL}+\gamma)x}\lim_{r\to\infty}\left\{\int_o^{\ell}\left(\frac{L}{2}f(y) - \frac{Z_oC}{2}g(y)\right)e^{-y(\sigma\sqrt{CL}+\gamma)}\ .\right.$$

$$\left. .\ \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{-2n\ell(\sigma\sqrt{CL}+\gamma)}\int_{-r}^{r} e^{is(t-2n\ell\sqrt{CL}+\sqrt{CL}x-\sqrt{CL}y)}ds\right]dy\right\} =$$

$$= -i(Z_o)^{-1}e^{\sigma t+(\sigma\sqrt{CL}+\gamma)x}\lim_{r\to\infty}\left\{\int_o^{\ell}\left(\frac{L}{2}f(y) - \frac{Z_oC}{2}g(y)\right)e^{-y(\sigma\sqrt{CL}+\gamma)}\ .\right.$$

$$\left. .\ \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{-2n\ell(\sigma\sqrt{CL}+\gamma)}\ .\ \frac{2\operatorname{sen} r(t-2n\ell\sqrt{CL}+\sqrt{CL}x-\sqrt{CL}y)}{t-2n\ell\sqrt{CL}+\sqrt{CL}x-\sqrt{CL}y}\right]dy\right\} =$$

$$= -i(\sqrt{CL}Z_o)^{-1}e^{\sigma t+(\sigma\sqrt{CL}+\gamma)x}\lim_{r\to\infty}\left\{\int_o^{\sqrt{CL}\ell}\left(Lf\left(\frac{y}{\sqrt{CL}}\right) - Z_oCg\left(\frac{y}{\sqrt{CL}}\right)\right)e^{-\frac{y}{\sqrt{CL}}(\sigma\sqrt{CL}+\gamma)}\ .\right.$$

$$\left. .\ \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{-2n\ell(\sigma\sqrt{CL}+\gamma)}\frac{\operatorname{sen} r(t-2n\ell\sqrt{CL}+\sqrt{CL}x-y)}{t-2n\ell\sqrt{CL}+\sqrt{CL}x-y}\right]dy\right\} =$$

$$= -i(\sqrt{CL}Z_o)^{-1}e^{\sigma t+(\sigma\sqrt{CL}+\gamma)x}\lim_{r\to\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(Lf\left(\frac{y}{\sqrt{CL}}\right) - Z_oCg\left(\frac{y}{\sqrt{CL}}\right)\right)e^{-\frac{y}{\sqrt{CL}}(\sigma\sqrt{CL}+\gamma)}\ .\right.$$

$$\cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{-2n\ell(\sigma\sqrt{CL}+\gamma)} \frac{\operatorname{sen} r(t-2n\ell\sqrt{CL}+\sqrt{CL}x-y)}{t-2n\ell\sqrt{CL}+\sqrt{CL}x-y}\right]dy\} =$$

$$= -\frac{\pi i}{2\sqrt{CL}\,Z_o} e^{\sigma t+(\sigma\sqrt{CL}+\gamma)x}\{\sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{-2n\ell(\sigma\sqrt{CL}+\gamma)}[L(f(\frac{t}{\sqrt{CL}} - 2n\ell + x + 0) +$$

$$+ f(\frac{t}{\sqrt{CL}} - 2n\ell + x - 0)) - Z_o C(g(\frac{t}{\sqrt{CL}} - 2n\ell + x + 0) +$$

$$+ g(\frac{t}{\sqrt{CL}} - 2n\ell + x - 0))]e^{-(\sigma\sqrt{CL}+\gamma)(\frac{t}{\sqrt{CL}} - 2n\ell + x)}\}$$

pelo teorema de Fourier. Observamos que, na penúltima igualdade, consideramos f e g identicamente nulas fora do intervalo $[0,\ell]$. Este fato acarreta que

$$(\frac{R_o+Z_o}{2Z_o})\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{h_1(\lambda)}[\int_o^{\ell} (\frac{L}{2}f(y) - \frac{Z_oC}{2}g(y))e^{(\lambda\sqrt{CL}+\gamma)(x+\ell-y)}dy]d\lambda =$$

é igual a 0, caso não exista $n \in N$ satisfazendo a desigualdade $0 \leq \frac{t}{\sqrt{CL}} - 2n\ell + x \leq \ell$ ou é igual a

$$-\frac{\pi i}{2\sqrt{CL}} q^{n_o} e^{-\frac{\gamma}{\sqrt{CL}}t} [L(f(\frac{t}{\sqrt{CL}} - 2n_o\ell + x + 0) + f(\frac{t}{\sqrt{CL}} - 2n_o\ell + x - 0)) -$$

$$+ \frac{\pi i}{2\sqrt{CL}} q^{n_o} Z_o C e^{-\frac{\gamma}{\sqrt{CL}}t} (g(\frac{t}{\sqrt{CL}} - 2n_o\ell + x + 0) + g(\frac{t}{\sqrt{CL}} - 2n_o\ell + x - 0))],$$

caso n_o seja o único número natural a satisfazer a desigualdade $0 \leq \frac{t}{\sqrt{CL}} - 2n\ell + x \leq \ell$.

Em ambos os casos,

$$\left\|\left(\frac{R_o+Z_o}{2Z_o}\right)\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\lambda t}}{h_1(\lambda)}\left[\int_o^{\ell}\left(\frac{L}{2}f(y)-\frac{Z_oC}{2}g(y)\right)e^{(\lambda\sqrt{CL}+\gamma)(\cdot+\ell-y)}dy\right]d\lambda\right\|_{L^2[0,\ell]}\le$$

$$\le\frac{\pi}{\sqrt{CL}}\left(L\|f\|_{L^2[0,\ell]}+Z_oC\|g\|_{L^2[0,\ell]}\right)e^{\sigma t}\ ,\qquad t>0\,.$$

COROLÁRIO I.5.1.

Com as mesmas hipóteses do teorema I.5.1., existem constantes reais estritamente positivas M_- e α tais que:

$$\|T(t)u\|_H\le M_-e^{-\alpha t}\|u\|_H\qquad\forall\ u\in N(P_\sigma),\quad t\ge 0$$

Tendo em vista a prova do teorema I.5.1., temos uma observação fundamental a ser feita: a cada $\sigma>\frac{-\gamma}{\sqrt{CL}}$ com a propriedade de que todo zero de $h(\lambda)$ tem parte real distinta de σ corresponde uma decomposição em soma direta do espaço de Hilbert H por subespaços vetoriais fechados $N(P_\sigma)$ e $R(P_\sigma)$ de H invariantes em relação ao operador linear A onde P é a projeção associada a σ dada no teorema I.4.2., de modo a implicar uma estimativa de decaimento exponencial sobre $N(P_\sigma)$ como dada no corolário anterior, para o semigrupo fortemente contínuo $\{T(t)\ :\ t\ge 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos sobre H gerado por A. Com a hipótese de que $R(P_\sigma)$ é um subespaço vetorial de dimensão finita de H, temos a seguinte estimativa exponencial sobre $R(P_\sigma)$. A restrição $A\mid R(P_\sigma)$ de A a $R(P_\sigma)$ é o gerador infinitesimal do grupo fortemente contínuo $\{\exp(tA\mid R(P_\sigma))\ :\ t\in R\}$ de operadores lineares contínuos definidos sobre $R(P_\sigma)$ que satisfaz

$$\|e^{tA\mid R(P_\sigma)}v\|_H\le M_+e^{\beta t}\|v\|_H\qquad\forall\ v\in R(P_\sigma),\ t\le 0$$

para algum par (M_+,β) de constantes reais estritamente positivas.

CAPÍTULO II

BIFURCAÇÃO DE HOPF

Suponhamos que $(W, ||\cdot||_W)$ seja um espaço de Banach real. Consideremos um operador linear A definido sobre um subespaço vetorial $D(A)$ de W com valores em W satisfazendo as seguintes hipóteses:

(HA1) $A : D(A) \subset W \to W$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos sobre o espaço de Banach W.

(HA2) $W = X \oplus Y$, onde X e Y são subespaços fechados de W invariantes em relação a A, e

(i) $||T(t)x||_W \leq M_- e^{-\alpha t}||x||_W \quad \forall\, x \in X,\ t \geq 0$ para algum par (M_-,α) de constantes reais estritamente positivas.

(ii) Y é um subespaço vetorial de dimensão dois de W com uma base $\{e_1,e_2\}$ em relação a qual a matriz da restrição de A a Y é

$$\begin{bmatrix} 0 & v_o \\ -v_o & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad v_o > 0 .$$

Definamos $f : (-r_o,r_o) \times W \to W$, onde $r_o > 0$, por

$$f(r,w) = f_X(r,w) + f_Y(r,w) \qquad \forall\ |r| < r_o,\ w \in W$$

sendo que f_X e f_Y são as funções componentes da função f em relação a decomposição em soma direta de W citada em HA2. As hipóteses sobre f são as seguintes:

(Hf1) f tem derivadas de segunda ordem contínuas em relação a r e a w.

(Hf2) $f(r,0) = 0$, $|r| < r_o$.

(Hf3) $D_2f(0,0) = 0$.

(Hf4) Existem $L > 0$ e $\varepsilon_o > 0$ tal que

$$||D_2f(r,w_2)w - D_2f(r,w_1)w||_W \leq$$

$$\leq L||w_2-w_1||_W||w||_W \quad \forall\, w \in W$$

desde que $|r| < r_o$, $||w_j||_W < 2\varepsilon_o$ $j = 1,2$.

(Hf5) Para cada $\varepsilon > 0$ existe em correspondência $\delta > 0$, dependente apenas de ε , tal que

$$||f(r,w+\bar{w})-f(r,w) - D_2f(r,w)\bar{w}||_W < \varepsilon||\bar{w}||_W$$

sempre que $|r| < r_o$ e $||\bar{w}||_W < \delta$.

A notação $D_2f(r,w)$ indica a derivada parcial de f em relação ao segundo argumento.

Sob estas hipóteses, consideremos a família de equações diferenciais ordinárias perturbadas em W

$$v'(s) = Av(s) + f(r,v(s)) \qquad (s > 0) \qquad \text{(II.1)}$$

para $|r| < r_o$ onde $'$ indica derivação em relação a s. Pelo fato da equação ser autônoma, não é conhecido a priori o período de suas possíveis soluções periódicas. Isto acarreta a introdução de um novo parâmetro na equação relativo ao período. Suponhamos, para $p > -1$, a mudança de variável $s = (1+p)t$ em (II.1) para obtermos

$$\dot{w}(t) = (1+p)Aw(t) + (1+p)f(r,w(t)) \qquad (t > 0) \qquad \text{(II.2)}$$

onde $w(t) = v((1+p)t)$ e o ponto indica derivação em relação a t. Se $w(t)$ for solução ω-periódica de (II.2) então $v(s) = w(\frac{s}{1+p})$ será solução $(1+p)\omega$-periódica de (II.1) e se $v(s)$ for solução $(1+p)\omega$-periódica de (II.1) $w(t) = v((1+p)t)$ será solução ω-periódica de (II.2). A equação (II.2) é equivalente as equações abaixo em X e Y respectivamente

$$\dot{x}(t) = (1+p)Ax(t) + (1+p)f_X(r,x(t)+y(t)) \qquad \text{(II.3)}$$

$$\dot{y}(t) = (1+p)Ay(t) + (1+p)f_Y(r,x(t)+y(t)) \qquad \text{(II.4)}$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ indicam as componentes de $w(t)$ em relação a decomposição em soma direta de W da hipótese HA2.

A equação (II.4) é expressa sob a forma

$$\dot{y}(t) = (1+p)A(r)y(t) + (1+p)D_2f_Y(r,0)x(t) + $$
$$+ (1+p)g(r,x(t)+y(t)) \qquad \text{(II.5)}$$

desde que definamos

$$A(r) = A + D_2f_Y(r,0)\ , \quad |r| < r_o$$

$$g(r,w) = g_1(r,w)e_1 + g_2(r,w)e_2 = f_Y(r,w) - D_2f_Y(r,0)w \quad |r| < r_o\,;\ w \in W.$$

Escrevamos, para maior simplicidade das expressões futuras,

$$D_2F_Y(r,0)w = L_1(r)we_1 + L_2(r)we_2\,, \qquad |r| < r_o\,;\ w \in W$$

A matriz da restrição de $A(r)$ a Y em relação a base $\{e_1,e_2\}$ de Y, mencionada em HA2, é

$$[A(r)] = \begin{bmatrix} a_{11}(r) & a_{12}(r) \\ a_{21}(r) & a_{22}(r) \end{bmatrix}$$

para $|r| < r_o$. Pela hipótese Hf5, as funções $r \to a_{ij}(r)$ $i,j = 1,\ 2$ são continuamente diferenciáveis em $(-r_o,r_o)$ e

$$a_{11}(0) = a_{22}(0) = 0$$

$$a_{12}(0) = -a_{21}(0) = v_o$$

onde v_o é o mesmo da hipótese HA2. Suponhamos, sem perda de generalidade, que

$$a_{12}(r) \neq 0 \qquad |r| < r_o$$

$$a_{21}(r) \neq 0 \qquad |r| < r_o$$

A função discriminante

$$r \to \Delta(r) = (a_{11}(r) - a_{22}(r))^2 + 4a_{12}(r)a_{21}(r)$$

é continuamente diferenciável em $(-r_o,r_o)$ e, desde que, $\Delta(0) = -4v_o^2 < 0$ suponhamos, sem perda de generalidade, a existência de $c_o > 0$ com a propriedade de que $\Delta(r) \leq -c_o$, $|r| < r_o$.

A função raiz

$$r \to \lambda(r) = \mathrm{Re}\lambda(r) + i\mathrm{Im}\lambda(r) =$$

$$= \frac{1}{2}(a_{11}(r) + a_{22}(r) + i\sqrt{-\Delta(r)})$$

é continuamente diferenciável em $(-r_o,r_o)$ pelo fato de que $\Delta(r) \leq -c_o$, $|r| < r_o$. Este mesmo fato implica que $\mathrm{Im}\lambda(r) \neq 0$ para $|r| < r_o$.

O nome função raiz segue de que $\lambda(r)$ para $|r| < r_o$, satisfaz a equação do segundo grau em t

$$\det \begin{bmatrix} t - a_{11}(r) & -a_{12}(r) \\ -a_{21}(r) & t - a_{22}(r) \end{bmatrix} =$$

$$= t^2 - (a_{11}(r) + a_{22}(r))t + a_{11}(r)a_{22}(r) - a_{12}(r)a_{21}(r) = 0$$

e o nome função discriminante vem de que $\Delta(r)$, para $|r| < r_o$, é o discriminante da equação do segundo grau em t acima.

As funções $r \to m_j(r)$ $j = 1, 2$ respectivamente dadas por

$$m_1(r) = \frac{\mathrm{Re}\lambda(r) - a_{11}(r)}{\mathrm{Im}\lambda(r)} \qquad |r| < r_o$$

$$m_2(r) = -\frac{a_{21}(r)}{\mathrm{Im}\lambda(r)} \qquad |r| < r_o$$

também são continuamente diferenciáveis em $(-r_o, r_o)$ com a propriedade de que a matriz da restrição de $A(r)$ a Y em relação a base $\{b_1(r), b_2(r)\}$ de Y para $|r| < r_o$, onde

$$b_1(r) = e_1 \qquad , \qquad |r| < r_o$$

$$b_2(r) = m_1(r)e_1 + m_2(r)e_2 , \qquad |r| < r_o ,$$

é

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Re}\lambda(r) & \mathrm{Im}\lambda(r) \\ -\mathrm{Im}\lambda(r) & \mathrm{Re}\lambda(r) \end{bmatrix}$$

O fato de que $\{b_1(r), b_2(r)\}$ é base de Y para cada $|r| < r_o$ segue de que $a_{21}(r) \neq 0$, $|r| < r_o$.

A última hipótese a ser colocada é

(Hβ) $\mathrm{Re}\,\lambda'(0) \neq 0$.

Muitos autores denominam esta hipótese pelo nome de hipótese de Hopf.

Agora, estamos prontos para estabelecermos a seguinte generalização do teorema da bifurcação de Hopf

TEOREMA III.1. (Da Bifurcação de Hopf):

Consideremos a família de equações diferenciais ordinárias perturbadas em um espaço de Banach $(W, ||\cdot||_W)$

$$v'(s) = Av(s) + f(r,v(s)) \qquad (s > 0)$$

para $|r| < r_o$ onde

(i) A é um operador linear definido sobre um subespaço vetorial $D(A)$ de W com valores em W satisfazendo as hipóteses HA1 e HA2.

(ii) $f : (-r_o, r_o) \times W \to W$, onde $r_o > 0$, satisfaz as hipóteses Hf1 a Hf5

e seja $\omega_o = \dfrac{2\pi}{v_o}$.

Se, com a notação deste capítulo, for válida a hipótese de Hopf $H\beta$, então existem constantes reais $\alpha_o > 0$, $\beta_o > 0$, $\gamma_o > 0$ e uma família $\{v^*(a) : |a| < \alpha_o\}$ de soluções periódicas de

$$v'(s) = Av(s) + f(r^*(a),v(s)) \qquad (s > 0)$$

com período $\omega^*(a)$; $|\omega^*(a)-\omega_o| < \gamma_o$, $|a| < \alpha_o$; $\omega(0) = \omega_o$; $||v^*(a)||_{P_{\omega(a)}(W)} < \beta_o$, $|a| < \alpha_o$; $v^*(0) = 0$; $v^*(a) \neq 0$ $0 < |a| < \alpha_o$; $r^*(0) = 0$, as funções $a \to v^*(a)$, $a \to \omega^*(a)$, $a \to r^*(a)$ são continuamente diferenciáveis em $(-\alpha_o,\alpha_o)$, $\dfrac{dr^*}{da}(0) = 0$ e $\dfrac{d}{da}v_X^*(0) = 0$ onde $v_X^*(a)$ é a componente de v^* segundo X da decomposição em soma direta de W. Além disso, exceto para translações no tempo, para $|a| < \alpha_o$, $|\omega-\omega_o| < \gamma_o$ toda solução v ω-periódica de $v'(s) = Av(s) + f(r,v(s))$ com $||v||_{P_\omega(W)} < \beta_o$ é pertencente a família acima.

Prova:

O procedimento a ser seguido é o mesmo de [4]. A idéia é considerarmos

$$\dot{x}(t) = (1+p)[Ax(t) + f_X(r,x(t)+y(t))]$$

e

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = (1+p)[A(0)] \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + (1+p) \begin{bmatrix} L_1(r)(x(t)+y(t)) \\ L_2(r)(x(t)+y(t)) \end{bmatrix}$$

$$+ (1+p) \begin{bmatrix} g_1(r,x(t)+y(t)) \\ g_2(r,x(t)+y(t)) \end{bmatrix}$$

$$- \frac{p}{\omega_o}\int_o^{\omega_o} e^{[A(0)](t-s)}[A(0)] \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} ds$$

$$- \frac{(1+p)}{\omega_o}\int_o^{\omega_o} e^{[A(0)](t-s)} \begin{bmatrix} L_1(r)(x(s)+y(s)) \\ L_2(r)(x(s)+y(s)) \end{bmatrix} ds$$

$$- \frac{(1+p)}{\omega_o}\int_o^{\omega_o} e^{[A(0)](t-s)} \begin{bmatrix} g_1(r,x(s)+y(s)) \\ g_2(r,x(s)+y(s)) \end{bmatrix} ds$$

com condição inicial $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$, sem perda de generalidade desde que o sistema em consideração é autônomo.

Seja a equação

$$w(t) = (1+p)\int_{-\infty}^{0} T(-(1+p)s)f_X(r,w(t+s))ds + \\ + F_1(a,p,r,w)(t)e_1 + F_2(a,p,r,w)(t)e_2 \qquad (II.6)$$

em $P_{\omega_0}(W)$ onde

$$w(t) = x(t) + y_1(t)e_1 + y_2(t)e_2$$

e

$$\begin{bmatrix} F_1(a,p,r,w)(t) \\ F_2(a,p,r,w)(t) \end{bmatrix} = e^{[A(0)]t}\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + pv_0\int_0^t e^{[A(0)](t-s)}\begin{bmatrix} y_2(s) \\ -y_1(s) \end{bmatrix}ds$$

$$+ (1+p)\int_0^t e^{[A(0)](t-s)}\begin{bmatrix} L_1(r)w(s) \\ L_2(r)w(s) \end{bmatrix}ds$$

$$+ (1+p)\int_0^t e^{[A(0)](t-s)}\begin{bmatrix} g_1(r,w(s)) \\ g_2(r,w(s)) \end{bmatrix}ds$$

a expressão continua

$$- \frac{pv_o}{\omega_o} t \int_0^{\omega_o} e^{[A(0)](t-s)} \begin{bmatrix} y_2(s) \\ \\ -y_1(s) \end{bmatrix} ds$$

$$- \frac{(1+p)}{\omega_o} t \int_0^{\omega_o} e^{[A(0)](t-s)} \begin{bmatrix} L_1(r)w(s) \\ \\ L_2(r)w(s) \end{bmatrix} ds$$

$$- \frac{(1+p)}{\omega_o} t \int_0^{\omega_o} e^{[A(0)](t-s)} \begin{bmatrix} g_1(r,w(s)) \\ \\ g_2(r,w(s)) \end{bmatrix} ds$$

Provaremos que podemos resolver (II.6) para w como função de a, p e r. Em seguida, resolveremos

$$\frac{p}{\omega_o} \int_0^{\omega_o} e^{[A(0)](t-s)} [A(0)] \begin{bmatrix} y_1(a,p,r)(s) \\ \\ y_2(a,p,r)(s) \end{bmatrix} ds$$

$$+ \frac{(1+p)}{\omega_o} \int_0^{\omega_o} e^{[A(0)](t-s)} \begin{bmatrix} L_1(r)w(a,p,r)(s) \\ \\ L_2(r)w(a,p,r)(s) \end{bmatrix} ds$$

a expressão continua

$$+ \frac{(1+p)}{\omega_o}\int_0^{\omega_o} e^{[A(0)](t-s)} \begin{bmatrix} g_1(r,w(a,p,r)(s)) \\ g_2(r,w(a,p,r)(s)) \end{bmatrix} ds = 0 \quad \text{(II.7)}$$

para $p \in r$ como função de a, se

$$w(a,p,r)(t) = x(a,p,r)(t) +$$
$$+ y_1(a,p,r)(t)e_1 + y_2(a,p,r)(t)e_2$$

Com a notação estabelecida, definamos

$$F : R \times (-1,\infty) \times (-r_o,r_o) \times P_{\omega_o}(W) \to P_{\omega_o}(W)$$

por

$$F(a,p,r,w)(t) = w(t) - (1+p)\int_{-\infty}^{0} T(-(1+p)s)f_X(r,w(t+s))ds$$
$$- F_1(a,p,r,w)(t)e_1 - F_2(a,p,r,w)(t)e_2$$

Então F é contínua em todas as variáveis e continuamente diferenciável nas variáveis a e w para $a \in R$, $p > -1$, $|r| < r_o$ e $||w||_{P_{\omega_o}(W)} < 2\varepsilon_o$. Além disso,

$$F(0,0,0,0) = 0$$

$$D_4F(0,0,0,0) = I_{P_{\omega_o}(W)}$$

O teorema das funções implícitas garante a existência de $a_1>0$, $p_1 > 0$, $r_1 > 0$ e de uma função $w^*(a,p,r)$ definida para $|a| < a_1$, $|p| < p_1$, $|r| < r_1$, com valores em $P_{\omega_o}(W)$ tal que

(i) $F(a,p,r,w^*(a,p,r)) = 0 \quad |a| < a_1; \quad |p| < p_1;$
$|r| < r_1$

(ii) $w^*(0,0,0) = 0$

(iii) $w^*(a,p,r)$ é continuamente diferenciável na variável a em $(-a_1,a_1)$ para cada $|p| < p_1$ e $|r| < r_1$

(iv) $w^*(0,p,r) = 0 \quad |p| < p_1; \quad |r| < r_1$

O fato (iv) baseia-se em que $F(0,p,r,0) = 0$ e na unicidade da da pelo teorema das funções implícitas.

Se $w^*(a,p,r)(t) = x^*(a,p,r)(t) + y^*(a,p,r)(t)$ $|a| < a_1$; $|p| < p_1$; $|r| < r_1$; $t \geq 0$, onde para cada $|a|<a_1$; $|p| < p_1$, $|r| < r_1$, $t \geq 0$, $x^*(a,p,r)(t) \in X$ e $y^*(a,p,r)(t) \in Y$ e se

$$y^*(a,p,r)(t) = y_1^*(a,p,r)(t)e_1 + y^*(a,p,r)(t)e_2,$$
$$|a| < a_1; \ |p| < p_1; \ |r| < r_1; \ t \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} y_1^*(a,p,r)(t) \\ \\ y_2^*(a,p,r)(t) \end{bmatrix} =$$

a expressão continua

$$= e^{(1+p)[A(r)]t}\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + (1+p)\int_0^t e^{(1+p)[A(r)](t-s)}\begin{bmatrix} L_1(r)x^*(a,p,r)(s) \\ L_2(r)x^*(a,p,r)(s) \end{bmatrix}ds$$

$$+ (1+p)\int_0^t e^{(1+p)[A(r)](t-s)}\begin{bmatrix} g_1(r,w^*(a,p,r)(s) \\ g_2(r,w^*(a,p,r)(s) \end{bmatrix}ds$$

$$- \frac{p}{\omega_o}v_o\int_0^t e^{(1+p)[A(r)](t-s)}[\int_0^{\omega_o} e^{(s-\tau)[A(0)]}\begin{bmatrix} y_2^*(a,p,r)(\tau) \\ -y_1^*(a,p,r)(\tau) \end{bmatrix}d\tau]ds$$

$$- \frac{(1+p)}{\omega_o}\int_0^t e^{(1+p)[A(r)](t-s)}[\int_0^{\omega_o} e^{(s-\tau)[A(0\ )]}\begin{bmatrix} L_1(r)w^*(a,p,r)(\tau) \\ L_2(r)w^*(a,p,r)(\tau) \end{bmatrix}d\tau]ds$$

$$- \frac{(1+p)}{\omega_o}\int_0^t e^{(1+p)[A(r)](t-s)}[\int_0^{\omega_o} e^{(s-\tau)[A(0)]}\begin{bmatrix} g_1(r,w^*(a,p,r)(\tau) \\ g_2(r,w^*(a,p,r)(\tau) \end{bmatrix}d\tau]ds$$

e

$$x^*(a,p,r)(t) = (1+p)\int_{-\infty}^{0} T(-(1+p)s)f_X(r,w^*(a,p,r)(t+s))ds$$

Além disso,

$$\begin{bmatrix} D_1y_1^*(0,p,r)(t) \\ D_1y_2^*(0,p,r)(t) \end{bmatrix} = e^{(1+p)[A(r)]t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$- \frac{pv_0}{\omega_0}\int_0^t e^{(1+p)[A(r)](t-s)}[\int_0^{\omega_0} e^{(s-\tau)[A(0)]}\begin{bmatrix} D_1y_2^*(0,p,r)(\tau) \\ -D_1y_1^*(0,p,r)(\tau) \end{bmatrix}d\tau]ds$$

$$- \frac{(1+p)}{\omega_0}\int_0^t e^{(1+p)[A(r)](t-s)}[\int_0^{\omega_0} e^{(s-\tau)[A(0)]}\begin{bmatrix} L_1(r)D_1w^*(0,p,r)(\tau) \\ L_2(r)D_1w^*(0,p,r)(\tau) \end{bmatrix}d\tau]ds$$

$$+ (1+p)\int_0^t e^{(1+p)[A(r)](t-s)}\begin{bmatrix} L_1(r)D_1x^*(0,p,r)(s) \\ L_2(r)D_1x^*(0,0,r)(s) \end{bmatrix}ds$$

Consideremos, agora, a equação

$$pv_o \int_o^{\omega_o} e^{-s[A(0)]} \begin{bmatrix} y_2^*(a,p,r)(s) \\ \\ -y_1^*(a,p,r)(s) \end{bmatrix} ds +$$

$$+ (1+p) \int_o^{\omega_o} e^{-s[A(0)]} \begin{bmatrix} L_1(r)w^*(a,p,r)(s) \\ \\ L_2(r)w^*(a,p,r)(s) \end{bmatrix} ds + \qquad \text{(II.8)}$$

$$+ (1+p) \int_o^{\omega_o} e^{-s[A(0)]} \begin{bmatrix} g_1(r,w^*(a,p,r)(s) \\ \\ g_2(r,w^*(a,p,r)(s) \end{bmatrix} ds = 0$$

Desde que, para $a = 0$, a última expressão anula-se identicamente em p e em r para $|p| < p_1$ e $|r| < r_1$, definimos

$$G(a,p,r) = \int_o^{\omega_o} e^{-s[A(0)]} [pv_o \begin{bmatrix} \frac{1}{a} y_2^*(a,p,r)(s) \\ \\ - \frac{1}{a} y_1^*(a,p,r)(s) \end{bmatrix} +$$

a expressão continua

$$+ (1+p)\begin{bmatrix} L_1(r)\frac{1}{a}w^*(a,p,r)(s) \\ \\ L_2(r)\frac{1}{a}w^*(a,p,r)(s) \end{bmatrix} + (1+p)\begin{bmatrix} \frac{1}{a}g_1(r,w^*(a,p,r)(s) \\ \\ \frac{1}{a}g_2(r,w^*(a,p,r)(s) \end{bmatrix}]ds$$

para $0 \neq |a| < a_1$; $|p| < p_1$ e $|r| < r_1$ e definimos

$$G(0,p,r) = \int_0^{\omega_0} e^{-s[A(0)]}[pv_0\begin{bmatrix} D_1y_2^*(0,p,r)(s) \\ \\ -D_1y_1^*(0,p,r)(s) \end{bmatrix} + (1+p)\begin{bmatrix} L_1(r)D_1w^*(0,p,r)(s) \\ \\ L_2(r)D_1w^*(0,p,r)(s) \end{bmatrix}]ds$$

para $|p| < p_1$ e $|r| < r_1$. Então G é uma função contínua em todas as variáveis para $|a| < a_1$, $|p| < p_1$ e $|r| < r_1$.

Estamos interessados em resolver a equação

$$G(a,p,r) = 0 \quad |a| < a_1, \quad |p| < p_1, \quad |r| < r_1$$

para p e r como função de a. Feito isso, o propósito inicial de resolver (II.7) da mesma maneira é concretizado. Admitida a existência de constantes a_2, p_2 e r_2, satisfazendo $0 < a_2 < a_1$; $0 < p_2 < p_1$; $0 < r_2 < r_1$ e tal que G é continuamente diferenciável nas variáveis p e r para $|a| < a_2$; $|p| < p_2$ e $|r| < r_2$, calculamos:

$$G(0,p,0) = pv_o \int_o^{\omega_o} e^{-s[A(0)]} \begin{bmatrix} D_1 y_2^*(0,p,0)(s) \\ -D_1 y_1^*(0,p,0)(s) \end{bmatrix} ds$$

$$D_2 G(0,p,0) = v_o \int_o^{\omega_o} e^{-s[A(0)]} \begin{bmatrix} D_1 y_2^*(0,p,0)(s) \\ -D_1 y_1^*(0,p,0)(s) \end{bmatrix} ds +$$

$$+ pv_o \int_o^{\omega_o} e^{-s[A(0)]} \begin{bmatrix} D_{21} y_2^*(0,p,0)(s) \\ -D_{21} y_1^*(0,p,0)(s) \end{bmatrix} ds$$

$$D_2 G(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\pi \end{bmatrix}$$

$$G(0,0,r) = \int_o^{\omega_o} e^{-s[A(0)]} \begin{bmatrix} L_1(r) D_1 w^*(0,0,r)(s) \\ L_2(r) D_1 w^*(0,0,r)(s) \end{bmatrix} ds$$

$$D_3G(0,0,r) = \int_0^{\omega_0} e^{-s[A(0)]} \begin{bmatrix} L_1'(r)D_1w^*(0,0,r)(s) \\ \\ L_2'(r)D_1w^*(0,0,r)(s) \end{bmatrix} ds \; +$$

$$+ \int_0^{\omega_0} e^{-s[A(0)]} \begin{bmatrix} L_1(r)D_{31}w^*(0,0,r)(s) \\ \\ L_2(r)D_{31}w^*(0,0,r)(s) \end{bmatrix} ds$$

$$D_3G(0,0,0) = \begin{bmatrix} \omega_0 \mathrm{Re}\lambda'(0) \\ \\ \frac{\omega_0}{2}(a_{21}'(0) - a_{12}'(0)) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial G(0,0,0)}{\partial(p,r)} = \begin{vmatrix} 0 & \omega_0 \mathrm{Re}\lambda'(0) \\ \\ -2\pi & \frac{\omega_0}{2}(a_{21}'(0)-a_{12}'(0)) \end{vmatrix} = 2\pi\omega_0 \mathrm{Re}\lambda'(0) \neq 0$$

O teorema das funções implícitas garante a existência de

$$a \to (p^*(a), r^*(a))$$

que consideraremos, sem perda de generalidade, definida e continuamente diferenciável para $|a| < a_2$, de tal modo que

$$G(a, p^*(a), r^*(a)) = 0 \qquad |a| < a_2$$

$$(p(0), r(0)) = (0,0)$$

Para provarmos a existência de constantes a_2, p_2 e r_2 satisfazendo $0 < a_2 < a_1$; $0 < p_2 < p_1$; $0 < r_2 < r_1$ e tal que G é continuamente diferenciável nas variáveis p e r para $|a| < a_2$; $|p| < p_2$ e $|r| < r_2$ basta mostrarmos a existência dessas constantes com a propriedade de que $w^*(a,p,r)$ é continuamente diferenciável nas variáveis p e r para $|a|<a_2$; $|p| < p_2$ e $|r| < r_2$. É o que será feito a seguir.

Como

$$\begin{bmatrix} y_1^*(a,p,r)(t) \\ \\ y_2^*(a,p,r)(t) \end{bmatrix},$$

para $|a| < a_1$, $|p| < p_1$, $|r| < r_1$, é solução do seguinte sistema de equações em R^2:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = (1+p)[A(0)]\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \\ y_2(t) \end{bmatrix} + (1+p)\begin{bmatrix} L_1(r)w^*(a,p,r)(t) \\ \\ L_2(r)w^*(a,p,r)(t) \end{bmatrix}$$

$$+ (1+p)\begin{bmatrix} g_1(r,w^*(a,p,r)(t) \\ \\ g_2(r,w^*(a,p,r)(t) \end{bmatrix}$$

$$- \frac{pv_o}{\omega_o}\int_o^{\omega_o} e^{[A(0)](t-s)}\begin{bmatrix} y_2^*(a,p,r)(s) \\ \\ -y_1^*(a,p,r)(s) \end{bmatrix}$$

$$- \frac{(1+p)}{\omega_o}\int_o^{\omega_o} e^{[A(0)](t-s)}\begin{bmatrix} L_1(r)w^*(a,p,r)(s) \\ \\ L_2(r)w^*(a,p,r)(s) \end{bmatrix} ds$$

$$- \frac{(1+p)}{\omega_o}\int_o^{\omega_o} e^{[A(0)](t-s)}\begin{bmatrix} g_1(r,w^*(a,p,r)(s) \\ \\ g_2(r,w^*(a,p,r)(s) \end{bmatrix} ds$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1^*(a,p,r)(t) \\ \\ \dot{y}_2^*(a,p,r)(t) \\ \end{bmatrix}$$

é contínua para $|a| < a_1$, $|p| < p_1$, $|r| < r_1$ e $t \geq 0$ o que implica que $\dot{y}^*(a,p,r)(t)$ tem a mesma propriedade.

Consideremos

$$\dot{x}(t) = (1+p)Ax(t) + $$
$$+ (1+p)f_X(r,x(t)+y^*(a,p,r)(t)) \quad |a| < a_1,\ |p| < p_1,\ |r| < r_1.$$

Definamos para $|a| < a_1$, $|p| < p_1$ e $|r| < r_1$,

$$x_o(a,p,r)(t) = 0$$

$$x_1(a,p,r)(t) = (1+p)\int_{-\infty}^{0} T(-(1+p)s)f_X(r,y^*(a,p,r)(t+s)ds$$

e indutivamente para $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$$x_{n+1}(a,p,r)(t) = (1+p)\int_{-\infty}^{0} T(-(1+p)s)f_X(r,y^*(a,p,r)(t+s) +$$
$$+ x_n(a,p,r)(t+s))ds$$

Então, para cada $n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$

$$\dot{x}_{n+1}(a,p,r)(t) =$$

$$= (1+p)\int_{-\infty}^{0} T(-(1+p)s)D_2f_X(r,y^*(a,p,r)(t+s)+x_n(a,p,r)(t+s)) \ .$$

$$. \ (\dot{y}^*(a,p,r)(t+s)+\dot{x}_n(a,p,r)(t+s))ds$$

e é contínua em todos os argumentos para $|a| < a_1$, $|p| < p_1$, $|r| < r_1$ e $t \geq 0$.

Notemos a existência de constantes reais a_2, p_2 e r_2, satisfazendo

$$0 < a_2 < a_1$$

$$0 < p_2 < p_1$$

$$0 < r_2 < r_1$$

e

$$||y^*(a,p,r)||_{P_{\omega_o}(W)} \leq \varepsilon_2 \qquad |a| < a_2 ; \quad |p| < p_2 ; \quad |r| < r_2$$

onde $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon_o, \frac{\alpha}{2M\_L}\}$ é tal que,

$$||D_2 f_X(r,w)\bar{w}||_W \leq \frac{\alpha}{2M\_}||\bar{w}||_W \qquad \forall\ \bar{w} \in W$$

para $|r| \leq r_2$; $||w||_W \leq 2\varepsilon_2$.

Assim, para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$

$$||x_n(a,p,r)||_{P_{\omega_o}(W)} \leq \varepsilon_2$$

e para $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$$||x_{n+1}(a,p,r) - x_n(a,p,r)||_{P_{\omega_o}(W)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}||x_n(a,p,r) - x_{n-1}(a,p,r)||_{P_{\omega_o}(W)}$$

desde que $|a| < a_2$, $|p| < p_2$ e $|r| < r_2$.

Então para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$

$$||x_{n+1}(a,p,r)-x_n(a,p,r)||_{P_{\omega_o}(W)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^n}||x_1(a,p,r)||_{P_{\omega_o}(W)} \qquad \text{(II.9)}$$

desde que $|a| < a_2$; $|p| < p_2$ e $|r| < r_2$.

Analogamente, para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$

$$||\dot{x}_{n+1}(a,p,r)||_{P_{\omega_o}(W)} \leq \frac{1}{2}||\dot{x}_n(a,p,r)||_{P_{\omega_o}(W)} +$$

$$+ \frac{1}{2}||\dot{y}^*(a,p,r)||_{P_{\omega_o}(W)}$$

e para $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$$||\dot{x}_{n+1}(a,p,r)-\dot{x}_n(a,p,r)||_{P_{\omega_o}(W)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}||\dot{x}_n(a,p,r)-\dot{x}_{n-1}(a,p,r)||_{P_{\omega_o}(W)} +$$

$$+ K||x_n(a,p,r)-x_{n-1}(a,p,r)||_{P_{\omega_o}(W)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}||\dot{x}_n(a,p,r)-\dot{x}_{n-1}(a,p,r)||_{P_{\omega_o}(W)} +$$

$$+ \frac{K}{2^{n-1}}||x_1(a,p,r)||_{P_{\omega_o}(W)}$$

para alguma constante real $K > 0$, o que é devido a hipótese Hf4, desde que $|a| < a_2$; $|p| < p_2$ e $|r| < r_2$.

Então, para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$

$$||\dot{x}_{n+1}(a,p,r)-\dot{x}_n(a,p,r)||_{P_{\omega_o}(W)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^n}||\dot{x}_1(a,p,r)||_{P_{\omega_o}(W)} +$$

$$+ \frac{n}{2^{n-1}}K||x_1(a,p,r)||_{P_{\omega_o}(W)} \qquad \text{(II.10)}$$

As igualdades (II.9) e (II.10) implicam que

$$\lim_{n\to\infty} x_n(a,p,r) = x^*(a,p,r) \quad \text{em} \quad P_{\omega_o}(W)$$

$$\lim_{n\to\infty} \dot{x}_n(a,p,r) = \tilde{x}(a,p,r) \quad \text{em} \quad P_{\omega_o}(W)$$

para algum $\tilde{x}(a,p,r) \in P_{\omega_o}(W)$ e que os limites indicados são uniformes em relação a a, p, r, t para $|a| < a_2$; $|p| < p_2$; $|r| < r_2$, $t \geq 0$. Logo,

$$\dot{x}^*(a,p,r) = \tilde{x}(a,p,r) \qquad |a| < a_2;\ |p| < p_2 \ \text{ e } \ |r| < r_2$$

$\dot{x}^*(a,p,r)(t)$ é contínua em todos os argumentos para $|a| < a_2$; $|p| < p_2$; $|r| < r_2$ e $t \geq 0$.

Pela aplicação do teorema 0.3.1. a

$$T(a,p,r,w) = I_{P_{\omega_o}(W)} - F(a,p,r,w)$$

obtemos que $x^*(a,p,r)$ é continuamente diferenciável nas variáveis p e r para $|a| < a_2$; $|p| < p_2$ e $|r| < r_2$.

Definindo

$$v^*(a)(s) = w^*(a,p^*(a),r^*(a))\left(\frac{s}{1+p^*(a)}\right) \text{ , para } |a| < a_2$$

$$\omega^*(a) = (1+p^*(a))\omega_o \text{ , para } |a| < a_2$$

o teorema da bifurcação de Hopf fica provado.

O teorema da bifurcação de Hopf é válido trocando-se as hipóteses HA1 e HA2 respectivamente pelas seguintes hipóteses

(HA1') $A : D(A) \subset W \to W$ é o gerador infinitesimal de um grupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \in R\}$ de operadores lineares contínuos definidos sobre o espaço de Banach W.

(HA2') $W = X \oplus Y \oplus Z$ onde X, Y e Z são subespaços fechados de W invariantes em relação a A, e

(i) $||T(t)x||_X \leq M_- e^{-\alpha_1 t} ||x||_W \quad \forall\, x \in X$, $t \geq 0$ para algum par (M_-,α_1) de constantes reais estritamente positivas.

(ii) Idêntica a hipótese (ii) de HA2.

(iii) $||T(t)z||_X \leq M_+ e^{\alpha_2 t} ||z||_W \quad \forall\, z \in Z$, $t \leq 0$ para algum par (M_+,α_2) de constantes reais estritamente positivas.

A prova é feita do mesmo modo acrescentando-se na expressão II.6 mais uma integral imprópria com o mesmo integrando e com limites de integração ∞ e 0.

BIBLIOGRAFIA

[1] - BRAYTON, R.K., Bifurcation of periodic solutions in a nonlinear difference-differential equation of neutral type, Quart. J. Appl. Math., 24 (1966), 215-224.

[2] - BRAYTON, R.K., Nonlinear oscillations in a distributed network, Quart. J. Appl. Math., 24 (1967), 289-301.

[3] - CRANDALL, M.G. & RABINOWITZ, The Hopf bifurcation theorem in infinite dimensions, Arch. Rat. Mech. and An., (1977), 53-72.

[4] - DE OLIVEIRA, J.C.F., Hopf bifurcation for functional differential equations, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol. 4, n.º 2 (1980), 217-229.

[5] - GODOUNOV, S., Équations de la Physique Mathématique, Éditions Mir, Moscou (1973).

[6] - HALE, J.K., Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag (1977).

[7] - HALE, J.K., Ordinary Differential Equations, Wiley - Interscience (1969).

[8] - HALE, J.K. & MEYER, K.R., A class of functional equations of neutral type, Memoirs of the AMS 76.

[9] - HENRY, D., Linear autonomous neutral functional differential equations, J. Differential Eqns, 15 (1974), 106-128.

[10] - KATO, T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag (1966).

[11] - LIMA, P., Hopf Bifurcation in Equations with Infinite Delays, Ph.D. Thesis, Brown University (1977),

[12] - LOPES, O.F., Existência e Estabilidade de Oscilações Forçadas de Equações Diferenciais Funcionais, Tese de Livre-Docência, ICMSC-USP, São Carlos, SP, Brasil (1975).

[13] - LOPES, O.F., Stability and forced oscillations, J. Math. An. and Appl., 55 (1976), 686-698.

[14] - MARSDEN, J.E. & McCRACKEN, The Hopf Bifurcation and its Applications, Springer-Verlag (1976).

[15] - PAZY, A., Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, University of Maryland Lecture Notes, Vol. 10 (1974).

[16] - TITCHMARSH, E.C., Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Oxford University Press (1937).

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

R	corpo dos números reais
C	corpo dos números complexos
R^n	espaço euclidiano de dimensão n
C^n	espaço unitário de dimensão n
$\|\lambda\|$	norma do número complexo λ
$Re\lambda$	parte real do número complexo λ
$Im\ \lambda$	parte imaginária do número complexo λ
(a,b) ...	intervalo aberto de extremos a e b
$[a,b]$ ...	intervalo fechado de extremos a e b
I_X	operador identidade sobre o espaço vetorial X
$D(T)$	domínio de definição do operador linear T sobre o espaço vetorial X
$N(T)$	núcleo do operador linear T sobre o espaço vetorial X
$R(T)$	imagem do operador linear T sobre o espaço vetorial X
$AC[0,\ell]$.	espaço vetorial das funções absolutamente contínuas sobre $[0,\ell]$
$L^2[0,\ell]$.	espaço vetorial das funções Lebesgue mensuráveis e quadrado integráveis sobre $[0,\ell]$
$P_\omega(W)$ ...	espaço de Banach das funções ω-periódicas definidas sobre R com valores no espaço de Banach $(W,\|\|\cdot\|\|_W)$ equipado com a norma $\|\|\cdot\|\|_{P_\omega(W)}$ do supremo