INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS DO TIPO NEUTRO, ASSINTOTICAMENTE AUTÔNOMAS, COM RETARDAMENTO DEPENDENDO DO TEMPO

NATALINO ADELMO DE MOLFETTA

Class. -
Cutt. - T
M 718 e
Tombo - e.3

TESE APRESENTADA AO INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE "DOUTOR".

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SÃO CARLOS
1972

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS DO TIPO NEUTRO, ASSINTÓTICAMENTE AUTÔNOMAS, COM RETARDAMENTO DEPENDENDO DO TEMPO

NATALINO ADELMO DE MOLFETTA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

TESE DE DOUTORAMENTO

ORIENTADOR: DR. ANTONIO FERNANDES IZÉ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Consideremos o sistema de equações diferenciais-diferença

$$(1.1) \qquad \dot{x}(t) = [A_0+A(t)]x(t) + [B_0+B(t)]x(t-r)$$

onde r é uma constante real não negativa, x vetor n-dimensional, A_0 e B_0 matrizes constantes n×n, A(t) e B(t) matrizes n×n, cujos elementos são funções contínuas de t para $t \geq 0$. Para $r = 0$, isto é, equações diferenciais ordinárias, as propriedades assintóticas do sistema (1.1), quando A(t) e B(t) são suficientemente "pequenas", foram bem estudadas. No caso $r > 0$, estudos semelhantes foram feitos por Bellman e Cooke em [1]. Parte da dificuldade que aparece, neste caso, deve-se ao fato que o sistema não perturbado

$$(1.2) \qquad \dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0x(t-r)$$

representa um problema em um espaço de dimensão infinita.

Em [8], Hale provou que se A(t) e B(t) são "pequenas", as soluções de (1.1) tem a forma $p(t)\, e^{\lambda t}$, onde $e^{\lambda t}$ é uma solução de (1.2) e p(t) é uma adequada função de t. Trabalhando num caso mais geral utilizando uma teoria de equações diferenciais funcionais autonômas, devida ao próprio Hale [7] e a Shimanov [15] conseguiu sistematizar a derivação correta de equações integrais. O método usado por Hale, partindo de uma fórmula da variação das constantes para equações funcionais, devida ao próprio Hale, foi obter uma equação integral e, então, empregar um teorema do ponto fixo para provar a existência de uma solução com o comportamento assintótico

desejado.

Usando método semelhante ao de Hale, enfraquecendo a hipótese básica sobre o termo perturbado, Cooke, em [2], provou um resultado que engloba certos problemas que não satisfazem a hipótese de Hale, como, por exemplo, equações funcionais com retardamento dependendo do tempo.

Recentemente, em [14], Izé fez uma generalização do trabalho de Hale, obtendo um resultado análogo para sistemas de equações funcionais do tipo neutro, como, por exemplo, a equação

$$\dot{x}(t) = [A_0+A(t)]x(t) + [B_0+ (t)]\dot{x}(t-r)+[C_0+C(t)]x(t-r) \tag{1.3}$$

onde r é real, $r \geq 0$, x vetor n-dimensional, A_0, B_0 e C_0 matrizes constantes $n\times n$ e $A(t)$, $B(t)$ e $C(t)$ matrizes $n\times n$, cujos elementos são funções contínuas de t para $t \geq 0$.

Em [8], Hale mostrou que o espaço de soluções do sistema (1.2), pode ser decomposto em dois sub-espaços complementares invariante P e Q, onde P é de dimensão finita e, em P, as soluções se comportam como soluções de equações diferenciais ordinárias. No caso de equações diferenciais funcionais do tipo neutro,o estudo das soluções da equação não perturbada é mais complicado, pelo fato de que a teoria básica está em processo de desenvolvimento. No estudo das propriedades assintóticas, em particular, uma dificuldade adicional aparece, devido ao fato que na decomposição do espaço de soluções da equação não perturbada, a equação que dá o comportamento das soluções no sub-espaço invariante P, não é uma equação diferencial ordinária, mas uma equação integral de Stieltjes.

Também para equações funcionais do tipo neutro, o operador $T(t)$, definido por (2.6), não é compacto, como no caso de equações retardadas. Assim, o espectro contínuo de $T(t)$, (que até o momento, ainda não foi bem determinado), não é $\{0\}$, como no caso das equações diferenciais funcionais retardadas.

O propósito deste trabalho, é de, como fez Cooke em [2], enfraquecer as hipóteses básicas sobre os termos perturbados. Obtivemos, assim, um resultado que engloba problemas de equações diferenciais funcionais do tipo neutro com retardamento dependendo do tempo, para os quais, as hipóteses de Izé em [14], não são verificadas.

Observamos que o resultado de Cooke em [2], não é mais geral do que o de Hale em [8], devido à hipótese sobre o termo perturbado. No resultado que obtivemos, conseguimos eliminar essa hipótese. Assim, nosso trabalho generaliza o de Hale em [8], o de Cooke em [2], e o de Izé em [14].

No capítulo II, damos definições e notações que serão usadas a seguir. Provamos a fórmula da variação das constantes para equações diferenciais funcionais devida a Hale, e fazemos um resumo de resultados conhecidos, que serão utilizados na prova do teorema principal.

No capítulo III, fazemos uma análise do espaço das funções Lipschitzianas,a decomposição desse espaço,e citamos resultados devidos a Henry em [13], que serão muito importantes na demonstração do teorema 4.1.

Finalmente, no capítulo IV, provamos o teorema central de nosso trabalho, sobre o comportamento assintótico de soluções de um sistema de equações diferenciais funcionais do tipo neutro.

CAPÍTULO II

NOTAÇÃO E RESULTADOS BÁSICOS CONHECIDOS

§1. *Notação e definições*

Sejam: $r \geq 0$ um número real, R o conjunto dos números reais e E^n o espaço vetorial linear dos vetores coluna, reais ou complexos, n dimensionais, com qualquer norma de vetores $|.|$. E^{n*} denotará o espaço vetorial dos vetores linhas. $C([a,b],E^n)$ é o espaço de Banach das funções contínuas, definidas em $[a,b]$, com valores no E^n, munido da topologia da convergência uniforme. Se $[a,b] = [-r,0]$, seja $C = C([-r,0],E^n)$ e para cada elemento $\phi \in C$, designamos a norma de ϕ por $||\phi|| = \sup_{-r\leq\theta\leq 0} |\phi(\theta)|$. De maneira análoga definimos $C^* = C([0,r],E^{n*})$.

Se $\sigma \in R$, $A \geq 0$ e $x \in C([\sigma-r,\sigma+A],E^n)$, para qualquer $t \in [\sigma,\sigma+A]$, seja $x_t \in D$ definido por $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$. Se Ω é um subconjunto aberto de RxC e f e D são funções contínuas definidas em Ω com vetores em E^n, dizemos que a relação

$$\frac{d}{dt} D(t,x_t) = f(t,x_t) \tag{2.1}$$

é uma equação diferencial funcional. Uma função x é chamada uma solução de (2.1) se existem $\sigma \in R$ e $A > 0$ tais que $x \in C([\sigma-r,\sigma+A],E^n)$, $(t,x_t) \in \Omega$, $t \in (\sigma,\sigma+A)$ e satisfaz (2.1) em $(\sigma,\sigma+A)$. Observemos que, da definição, resulta em que $D(t,x_t)$, e não $x(t)$, é continuamente diferenciável em $(\sigma,\sigma+A)$. Para um dado $\sigma \in R$ e $\phi \in C$, $(\sigma,\phi) \in \Omega$,

dizemosque $x(\sigma,\phi)$ (t) é uma solução de (2.1) com valor inicial ϕ em σ ou de modo mais simples, que é uma solução de (2.1)através de (σ,ϕ), se existe um $A > 0$ tal que $x(\sigma,\phi)$ (t) é uma solução de (2.1) em $(\sigma-r, \sigma+A)$ e $x_t(\sigma,\phi) = \phi$.

Vamos supôr, em (2.1), que $D(t,\phi) = \phi(0) - g(t,\phi)$, $g(t,\phi)$ é linear, $g(t,\phi) = \int_{-r}^{0} [d_\theta \mu(t,\theta)]\phi(\theta)$, onde $\mu(t,\theta)$, $0 \leq t < \infty$, $-r \leq \theta \leq 0$, é uma matriz nxn, cujos elementos são funções de variação limitada. Dizemos que $g(t,\phi)$ é não atomica em zero, se existir uma função escalar $\gamma(t,s)$, contínua e não negativa para $0 \leq t < \infty$, $0 \leq r < \infty$, $\gamma(t,0) = 0$, tal que

$$\left| \int_{-s}^{0} [d_\theta \mu(t,\theta)]\phi(\theta) \right| \leq \gamma(t,s) \sup_{-s \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$$

para todo $\phi \in C$, $0 \leq s \leq r$. O sistema (2.1) é chamado uma equação diferencial funcional do tipo neutro, se $g(t,\phi)$ fôr não atômica em zero. Suponhamos, ainda que $g(t,\phi)$, $f(t,\phi)$ satisfaça alguma hipótese adicional, para assegurar a existência, unicidade e dependência contínua em relação a condições iniciais, de soluções de (2.1).Ver, por exemplo, referência [5] ou [10].

Neste trabalho, estudaremos sistemas autônomos de equações diferenciais funcionais do tipo neutro, do tipo

$$\frac{d}{dt} D(x_t) = L(x_t) \tag{2.2}$$

e sistemas perturbados de (2.2), da forma

$$\frac{d}{dt}[D(x_t) - G(t,x_t)] = L(x_t) + F(t,x_t) \tag{2.3}$$

onde $D(\phi) = \phi(0) - g(\phi)$, $D(\phi)$ e $L(\phi)$ operadores lineares contínuos de C em E^n, com $g(\phi)$ e $G(t,\phi)$ não atômicos em zero e

$$g(\phi) = \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)]\, \phi(\theta) \qquad \phi \in C \tag{2.3}$$

$\mu(\theta)$ matriz nxn, cujos elementos são de variação limitada. Também existe uma matriz $\eta(\theta)$ $-r \leq \theta \leq 0$, nxn, cujos elementos são de variação limitada tal que

(2.5) $L(\phi) = \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\ \phi(\theta)$, $\phi \in C$

Se ϕ é qualquer função em C e $x(\phi)(t)$ é a única solução de (2.2) com função inicial ϕ em $\sigma = 0$, definimos o operador $T(t)$ $T:C \to C$, pela relação

(2.6) $x_t(\phi) = T(t)\phi$

O operador $T(t)$, $t \geq 0$, acima definido, satisfaz as seguintes propriedades (ver, por exemplo, referência [9] pg.97).

i) A família $\{T(t), t \geq 0\}$ é um semi-grupo de transformações lineares, isto é, $T(t+s) = T(t)\ T(s)$ para todo $s \geq 0$, $t \geq 0$.

ii) $T(t)$ é limitado para cada $t \geq 0$, $T(0) = I$, e $T(t)$ é fortemente contínuo em $[0,\infty]$, isto é,

$$\lim_{s \to t} \|T(t)\phi - T(s)\phi\| = 0$$

para todo $t \geq 0$, ϕ em C.

iii) Se $D(\phi) = \phi(0)$, então $T(t)$ é completamente contínuo (compacto) para $t \geq r$.

§2 - A Fórmula da Variação das Constantes

Se $H \in C([0,\infty], E^n)$, $H(0) = 0$, consideremos a equação diferencial funcional do tipo neutro, não homogênea.

(2.7) $\frac{d}{dt}\ [D(x_t) - H(t)] = L(x_t)$

Nosso objetivo é obter uma fórmula análoga à formula da variação das constantes para equações diferenciais ordinárias, para a

equação (2.7). É suposto que $H(t)$ e $L(x_t)$ satisfaçam alguma hipótese que assegure a existência e unicidade de soluções de (2.7).

Lembramos que D e L são operadores lineares contínuos e que $D(\phi) = \phi(0) - g(\phi)$, $g(\phi) = -\int_{-r}^{0} [d_\mu(\theta)]\phi(\theta)$, e existe função contínua $\gamma(t)$, $t \geq 0$, $\gamma(0) = 0$ tal que

$$\left| \int_{-r}^{-0} [du(\theta)]\phi(\theta) \right| \leq \gamma(t)\, ||\phi||$$

Vamos denotar por $x(\phi,H)(t)$ a única solução da (2.7), com função inicial ϕ em $\sigma = 0$.

A demonstração que daremos aqui é devida a Hale, como aparece em [10].

Lema 2.1 - Existem constantes $a > 0$, $c > 0$, tais que a solução $x(\phi,H)$ de (2.7) satisfaz:

$$||x_t(\phi,H)|| \leq \{a||\phi|| + \sup_{0\leq\mu\leq t} |H(\mu)|\}\, e^{ct}$$

para todo $t \geq 0$, para o qual a solução existe.

Prova: Suponhamos que $|L(\phi)| \leq l||\phi||$, $|D(\phi)| \leq M||\phi||$ para toda $\phi \in C$.

Seja A uma constante positiva tal que $1 - \gamma(A) > 0$. Definimos $b = [1 - \gamma(A)]^{-1}$ e $a = [\gamma(r) + M].b$ e escolhemos $\gamma(r) + M > 1$. Então, para qualquer $t \in [0,A]$, se $x(\phi,H)(t)$, temos:

$$x(t) = D(\phi) + \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)]x_t(\theta) + \int_0^t L(x_s)ds + H(t) =$$

$$= D(\phi) + \int_{-r}^{-A} [d\mu(\theta)]x_t(\theta) + \int_{-A}^{0} [d\mu(\theta)]x_t(\theta) + \int_0^t L(x_s)ds + H(t).$$

Para $t \in [0,A]$, temos que $||x_t|| = ||\phi||$, visto que $-r \leq \theta \leq -A$, implica que $t + \theta \leq t - A \leq 0$, pois $t \leq A$. Logo, $x_t(\theta) = x(t+\theta) = \phi(\theta)$. Assim temos que:

$$|x(t)| \leq [M + \gamma(r)]\, ||\phi|| + \gamma(A)\, ||x_t|| + l \int_0^t ||x_s||\, ds + \sup_{0\leq u\leq t} |H(u)|.$$

Desde que $\gamma(r) + M > 1$ e $x_0 = \phi$ o termo do lado direito da desigualdade acima é um limitante superior de $\|x_t\|$, $t \geq 0$. Isto resulta em que:

$$\|x_t\| \leq [M+\gamma(r)]\,\|\phi\| + \gamma(A)\|x_t\| + l\int_0^t \|x_s\|\,ds +$$

$$+ \sup_{0\leq\mu\leq t} |H(u)|$$

ou seja

$$[1 - \gamma(A)]\,\|x_t\| \leq [M + \gamma(r)]\,\|\phi\| + l\int_0^t \|x_s\|\,ds +$$

$$+ \sup_{0<u<t} |H(\mu)|$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por $[1 - \gamma(A)]^{-1}$, temos que:

$$\|x_t\| \leq [M+\gamma(r)]\,[1-\gamma(A)]^{-1}\,\|\phi\| + [1-\gamma(A)]^{-1} \sup_{0\leq u\leq t} |H(u)| +$$

$$+ [1-\gamma(A)]^{-1}\, l\int_0^t \|x_s\|\,ds = [M+\gamma(r)]\,b\,\|\phi\| + b \sup_{0\leq u\leq t} |H(u)| +$$

$$+ b\, l\int_0^t \|x_s\|\,ds$$

Usando a desigualdade de Gronwall concluimos que:

$$(2.8) \qquad \|x_t\| \leq \{a\,\|\phi\| + b \sup_{0\leq u\leq t} |H(u)|\}c^{blt}\,,\ t \in [0,A]$$

Por indução vamos provar que a desigualdade acima é valida para todo $t \geq 0$, para o qual a solução é definida, desde que $b.l$ seja substituída por uma constante c, suficientemente grande. Seja constante c, tal que $c > b.l$, $a.e^{(bl-c)A} \leq 1$. Então temos que

$$(2.9) \qquad \|x_t\| < \{a\,\|\phi\| + b \sup_{0\leq u\leq t} |H(u)|\}\, e^{ct}\,,\quad t \in [0,kA]$$

De (2.8), concluimos que (2.9) vale para $k = 1$, desde que $b.l < c$. Se $t \in [kA,(k+1)A]$ usando a estimativa (2.8) para a solu

ção de (2.7), com valor inicial ϕ em $\sigma = t-A$, temos que:

$$\|x_t\| \leq \{a\|x_{t-A}\| + b \sup_{t-A\leq u\leq t} |H(u)|\}e^{b.\ell.A}$$

Da hipótese de indução, temos que:

$$\|x_{t-A}\| \leq \{a\|\phi\| + b \sup_{0\leq u\leq t-A} |H(u)|\}e^{c(t-A)}|$$

Assim, resulta em que:

$$\|x_t\| \leq \{a[a\|\phi\| + b \sup_{0\leq u\leq t-A} |H(u)|]\}e^{c(t-A)} +$$

$$+ b \sup_{t-A\leq u\leq t} |H(u)|\}e^{b.\ell.A} = \{a[a\|\phi\| + b \sup_{0\leq u\leq t-A} |H(u)|]\}e^{c(t-A)+b\ell A} +$$

$$+ b \sup_{t-A\leq u\leq t} |H(u)|e^{b\ell A} = [a\|\phi\| + b \sup_{0\leq u\leq t-A} |H(u)]ae^{(b\ell-c)A+ct} +$$

$$+ b \sup_{t-A\leq u\leq t} |H(u)|e^{b.\ell.A} \leq [a\|\phi\| + b \sup_{0\leq u\leq t-A} |H(u)|]e^{ct} +$$

$$+ b \sup_{t-A\leq u\leq t} |H(u)|e^{b.\ell.A} \leq [a\|\phi\| + b \sup_{0\leq u\leq t-A} |H(u)|]e^{ct} +$$

$$+ b \sup_{t-A\leq u\leq t} |H(u)|\frac{1}{a} e^{cA} \leq [a\|\phi\| + b \sup_{0\leq u\leq t} |H(u)|]e^{ct}$$

desde que $a = [M + \gamma(r)]b > b$, isto é, $\frac{b}{a} < 0$.

O lema está provado.

Corolário 2.1. Seja $x(\phi,H)(t)$ a única solução de (2.7) em $[-r,\infty]$, através de ϕ. Então

$$x(.,.) : C \times C([0,\infty] \to E^n) \to E^n$$

é contínua.

Prova: O corolário é consequência imediata do lema 2.1, desde que $g(\phi)$ e $L(\phi)$ satisfaçam as limitações requeridas pelo lema, visto que então $x(.,.)$ é limitado.

Teorema 2.1. (Fórmula da Variação das Constantes). Seja $\{T(t),t\geq 0\}$, o semi grupo fortemente contínuo, definido no parágra

fo anterior. Seja $B(t)$ matriz de funções, nxn, de variação limitada em cada intervalo finito de $(0,\infty)$, $B(t)$ contínua à esquerda em t, $B(t) = 0$ para $-r \leq t \leq 0$. Então, a solução $x(\phi,H)$ de (2.7), satisfaz, para todo $t \geq 0$

$$(2.10)\quad x(\phi,H)(t) = (T(t)\phi)(0) + \int_0^t [d_s B(t-s)]H(s)$$

ou

$$(2.11)\quad x_t(\phi,H) = T(t)\phi + \int_0^t [d_x\ B_{t-s}]H_s$$

Prova: Do corolário 2.1, resulta que $x(.,0) : C \to E^n$ é contínua. Da unicidade concluímos que é linear.

Também resulta do corolário 2.1, que $x(0,H):C([0,\infty],E^n)\to E^n$ é contínua e, da unicidade, que é linear. Pelo teorema da representação de Riez, existe uma matriz de funções nxn, $\bar{B}(t,s)$, de variação limitada em s, para $s \in [0,t]$, tal que

$$(2.2)\quad x(0,H)(t) = \int_0^t [d_s\bar{B}(t,s)]\ H(s)$$

Além disso, a função $\bar{B}(t,s)$ pode ser escolhida de modo que seja contínua à direita em s e é univocamente determinada especificando-se seu valor para algum valor particular de s. Escolhemos $\bar{B}(t,t) = 0$ e definimos $\bar{B}(t,r) = 0$ para $t \leq s \leq t + r$. Vamos mostrar que $\bar{B}(t,r) = \bar{B}(t-r,0)$. Suponhamos que $H(t) \in C((-\infty,\infty),E^n)$ e $H(t) = 0$ para $t \leq 0$. Seja $H_\sigma(t) = H(\sigma+t)$, $-\infty < t < \infty$, para qualquer σ real e consideremos a $x(0,H)(t)$ de (2.7) tal que $x(0,h)(t)=0$ para $t \leq 0$. Da equação (2.7) resulta em que $x(0,H_\sigma)(t)=x(0,H)(t+\sigma)$ e, portanto, de (2.12) temos que:

$$x(0,H)(t+\sigma) = \int_0^{t+\sigma} [d_s\bar{B}(t+\sigma,s)]H(s)$$

e $$x(0,H_\sigma)(t) = \int_0^t [d_s\ \bar{B}(t,s)H_\sigma(s) = \int_0^t [d_s\ \bar{B}(t,s)]H(s+\sigma)$$

e assim $\int_0^t [d_s\ \bar{B}(t+\sigma,s)]H(s) = \int_0^{t+\sigma} [d_s\ \bar{B}(t+\sigma,s)]H(s)$ para cada H pertencente à classe acima. Para cada $\sigma \leq 0$ e desde que $H(t)=0$ para todo $t \leq 0$, isto implica que:

$$\int_\sigma^{\sigma+t} [d_s\ \bar{B}(t+\sigma,s)]H(s) = \int_\sigma^0 [d_s\ \bar{B}(t+\sigma)]H(s) +$$

$$+ \int_0^{\sigma+t} [d_s\ \bar{B}(t+\sigma,s)]H(s) = 0 + \int_0^{\sigma+t} [d_s\ \bar{B}(t+\sigma,s)]H(s)$$

Também se $u = s+\sigma$, temos que

$$\int_0^t [d_s\ \bar{B}(t+s)]H(s+\sigma) = \int_\sigma^{\sigma+t} [d_s\ \bar{B}(t,u-\sigma)]H(u)$$

Portanto concluimos que:

$$\int_\sigma^{\sigma+t} [d_s\ \bar{B}(t,u-\sigma)]H(u) = \int_\sigma^{\sigma+t} [d_s\ \bar{B}(t+\sigma,s)]H(s)$$

para cada H na classe acima definida. Assim, concluimos que $\bar{B}(t,u-\sigma) = \bar{B}(t+\sigma,u)$ para todo $t \geq 0$, $\sigma \leq 0$, $0 \leq u \leq t+r$. Em particular, para $u = 0$, $s = -\sigma$, temos que $\bar{B}(t,s) = \bar{B}(t-s,0), 0 \leq s \leq t+r$.

Definindo $B(t) = \bar{B}(t,0)$ e desde que $\{T(t)\ t \geq 0\}$, pelo lema 2.1, é um semi-grupo de operadores limitados, o teorema fica provado.

Corolário 2.2 - Seja B(t) a matriz de função definida no teorema 2.1. Seja H(t) absolutamente contínua em $[0,\nu]$, para cada $\nu \geq 0$. Se $\dot{H} = h$ em quase toda parte em $[0,\infty]$, então, definindo $x_t(\phi,H) = x_t(\phi,h)$, temos:

(2.13) $$x_t(\phi,H) = x_t(\phi,h) = T(t)\phi - \int_0^t B_{t-s}\ h(s)ds$$

para todo $t \geq 0$. Além disso, B(t) é es-

sencialmente limitada em cada intervalo finito e $B(t) = \frac{dW(t)}{dt}$ em quase toda parte, onde $W(t)$ é a única solução de

(2.14)
$$W_0 = 0$$
$$D(W_t) = \int_0^t L(W_s)ds + tI$$
$$t \in [0,\infty], \quad I = \text{identidade}$$

Prova: De (2.10), resulta que $x(0,h)(t) = \int_0^t [d_s B(t-s)]H(s)$. Usando integração por partes, temos que:

$$\int_0^t [d_s B(t-s)]H(s) = B(0)H(t) - B(t)H(0) - \int_0^t B(t-s)dH(s) =$$
$$= - \int_0^t B(t-s)\, h(s)ds.$$

desde que $B(t) = 0$ para $t \leq 0$ e $H(0) = 0$, o que prova (2.13):

Seja $W(t) = \int_0^t B(s)ds$. Então $W(t)$ corresponde a solução de (2.7) com $H(t) = -tI$. Assim, o corolário está provado.

Observação 1: Na prova da fórmula da variação das constantes, a normalização para a função $B(t)$ é arbitrária. Podemos mudar a normalização, escolhendo uma matriz de funções $X(t)$, definida para todo $t \geq -r$, contínua à direita, $X(t) = 0$, $-r \leq t < 0$, $X(0) = I$. Neste caso, a fórmula da variação das constantes, fica:

(2.15) $$x(t) = (T(t)\phi)(0) + H(t) - X(t)H(0) - \int_0^t [d_s X(t-s)]H(s)$$

ou

(2.16) $$x_t - X_0 H(t) = T(t)[\phi - X_0 H(0)] - \int_0^t [d_s T(t-s)X_0]H(s)$$

onde $T(t)X_0 = X_t$. Esta notação é justificável desde que pode-se mostrar que X_t satisfaz a equação

(2.17) $$D(X_t) = \int_0^t L(X_s)ds + I, \qquad t \geq 0$$

$$X_0(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } -r \leq \theta < 0 \\ I & \text{se } \theta = 0 \end{cases}$$

Também se $H(t) = \int_0^t h(s)ds$, temos que:

$$x_t = T(t)\phi + \int_0^t T(t-s)X_0\, h(s)ds \tag{2.18}$$

Observação 2: A forma (2.11) da fórmula da variação das constantes, tem algumas vantagens sobre a forma (2.10).

A primeira vantagem, é que na equação (2.10) a operação de introduzir uma nova variável $z_t = e^{-\alpha t}x_t$, não é válida. De fato para que essa operação fosse válida, teríamos que $z_t(\theta) = z(t+\theta)$ para todo $t \in (-\infty,\infty)$, $\theta \in [-r,0]$, o que, evidentemente, não é satisfeito. Na equação (2.11), a introdução da nova variável pode ser efetuada, discutindo-se o comportamento de z como uma solução da equação integral, mesmo sabendo-se que z não satisfaz a equação diferencial funcional e voltando-se a função x_t, para obtermos informação sobre a equação original.

A seguinte vantagem, que será muito importante no que faremos a seguir, e que se o espaço C é decomposto na soma direta de dois sub espaços, podemos fazer mudanças de variáveis em um subespaço e determinar as equações integrais para as novas variáveis no sub espaço. Em particular, para coeficientes constantes, isto é análogo ao que fazemos quando usamos a forma canônica de Jordan.

§3. Decomposição de C com a Equação Adjunta

Consideremos o sistema (2.2).

Seja $\{T(t), t \geq 0\}$ o semi grupo de operadores definido no parágrafo 1.

Desde que $T(t)$ é fortemente contínuo, podemos definir o operador infinitesimal de $T(t)$, como:

$$A\phi = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} [T(t)\phi - \phi] \qquad \phi \in C \tag{2.19}$$

se o limite existir. Esse limite nos dá convergência em norma em C. O operador infinitesimal de $T(t)$ é a menor extensão fechada de A. Como o operador infinitesimal A é fechado, o gerador infinitesimal coincide com A. O domínio de A, $\mathcal{D}(A)$, é denso em C e a imagem de A, $R(A)$ está em C. Podemos mostrar que o gerador infinitesimal da família de operadores $T(t)$, $t \geq 0$ é dado por

$$A\phi(\theta) = \begin{cases} \frac{d}{d\theta}\phi(\theta) & -r \leq \theta < 0 \\ g(\dot{\phi}) + L(\phi) & \theta = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

e, para qualquer ϕ em $\mathcal{D}(A)$,

$$\frac{d}{dt} T(t)\phi = T(t)A\phi = AT(t)\phi \tag{2.21}$$

Seja $\sigma(A)$ o espectro do gerador infinitesimal A.

O espectro $\sigma(A)$ consiste de três tipos diferentes de pontos: o espectro residual $R\sigma(A)$, o espectro contínuo $C\sigma(A)$ e o espectro pontual $P\sigma(A)$. Para o operador A temos que $\sigma(A) = P\sigma(A)$.

Os valores característicos ou auto valores de (2.2), são os pontos de $\sigma(A)$ pertencentes ao espectro pontual $P\sigma(A)$ e são as raízes da equação característica:

$$(2.22) \qquad \det \Delta(\lambda) = 0$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda\left[I - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta}\, d\mu(\theta)\right] - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta}\, d\eta(\theta)$$

O espaço nulo de A, $N(A)$, é o conjunto de todas as funções $\phi \in C$ tais que $A\phi = 0$. Para um dado $\lambda \in \sigma(A)$, o auto espaço generalizado de λ, $M_\lambda(A)$, é o menor sub-espaço de C que contém todos os elementos que pertencem a $N(\lambda I-A)^k$, $k = 1,2,\ldots$

As raízes de (2.22) possuem parte real limitada e para qualquer λ em $\sigma(A)$ o auto espaço generalizado $M_\lambda(A)$ é de dimensão finita. Também existe um inteiro k, tal que $M_\lambda(A) = N(A-\lambda I)^k$ e

$$C = N(A-\lambda I)^k \oplus R(A-\lambda I)^k$$

onde o símbolo $\oplus$ significa soma direta.

Seja C^* o espaço definido no parágrafo 1. A equação adjunta de (2.2) é

$$(2.23) \qquad \frac{d}{d\tau}\left[y(\tau) - \int_{-r}^{0} y(\tau-\theta)d\mu(\theta)\right] = -\int_{-r}^{0} y(\tau-\theta)\, d\eta(\theta)$$

onde y é um vetor linha ndimensional.

Se $\phi \in C$, $\alpha \in C^*$, $\dot\alpha \in C^*$, definimos:

$$(2.24) \qquad (\alpha,\phi) = \alpha(0)D(\phi) + \int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta} \dot\alpha(\xi-\theta)\left[d\mu(\theta)\right]\phi(\xi)d\xi -$$

$$-\int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta} \alpha(\xi-\theta)\left[d\eta(\theta)\right]\phi(\xi)d\xi$$

A equação (2.23) é do mesmo tipo que (2.2), com a diferença de que deve ser integrada na direção oposta. Para qualquer(σ,α) em $(-\infty,\infty)\times C^*$, existe uma única solução y de (2.23) em $(-\infty,\sigma+r)$ com $y(\sigma+\xi) = \alpha(\xi)$ para $0 \leq \xi \leq r$.

Se λ é um auto valor de (2.2), suponhamos que o auto espaço

generalizado $M_\lambda(A)$ tenha dimensão d. Seja $\{\phi_1^\lambda, \phi_2^\lambda, \ldots, \phi_d^\lambda\}$ uma base para $M_\lambda(A)$ e seja $\Phi = (\phi_1^\lambda, \phi_2^\lambda, \ldots, \phi_d^\lambda)$. Desde que $AM_\lambda(A) \subset M_\lambda(A)$, existe uma matriz constante d×d, que denotaremos por B_λ, tal que $A\,\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda$. O único auto valor de B_λ é λ e

$$\Phi_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda\theta} \qquad -r \leq \theta \leq 0 \tag{2.25}$$

e

$$[T(t)\phi_\lambda](\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda(t+\theta)} \tag{2.26}$$

Esta relação nos permite definir T(t) em $M_\lambda(A)$ para todo t em $(-\infty,\infty)$. Assim, no auto-espaço generalizado de um auto-valor de (2.2), a equação diferencial funcional (2.2) tem a mesma estrutura de uma equação diferencial ordinária.

Suponhamos agora que $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$ é um conjunto finito de valores característicos de (2.2) e sejam $\Phi_\Lambda = (\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}, \ldots, \Phi_{\lambda_n})$, $B_\Lambda = \mathrm{diag}(B_{\lambda_1}, \ldots, B_{\lambda_p})$ onde Φ_{λ_j} é uma base para o auto-espaço generalizado $M_{\lambda_j}(A)$ e B_{λ_j} é a matriz definida por $A\Phi_{\lambda_j} = \Phi_{\lambda_j} B_{\lambda_j}$, $j = 1,2,\ldots,p$. Então o único auto-valor de B_{λ_j} é λ_j e, para qualquer vetor a, de mesma dimensão de Φ_λ, a solução $T(t)\,\Phi_\Lambda.a$, com valor inicial $\Phi_\Lambda.a$ em $t = 0$, é definida em $(-\infty,\infty)$ por:

$$T(t).\Phi_\Lambda.a = \Phi_\Lambda.e^{B_\lambda.t}$$

$$\Phi_\Lambda(\theta) = \Phi_\Lambda(0)e^{B_\lambda\theta} \qquad -r \leq \theta \leq 0 \tag{2.27}$$

Portanto, existe um sub-espaço Q_Λ de C, tal que $T(t)Q_\Lambda \subset Q_\Lambda$ e $C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$

$P_\Lambda = \{\phi \in C : \phi = \Phi_\Lambda.a$, para algum vetor a$\}$.

A equação característica para a equação adjunta (2.23) é, também, definida como (2.22) e, para qualquer valor característico λ, corresponde uma solução de (2.23) da forma $b.e^{-\lambda\tau}$, para algum $b \in E^{n*}$, não nulo, e τ em $(-\infty,\infty)$. Se λ tem multiplicidade d e $q_j(\lambda,\tau)e^{-\lambda\tau}$, $j = 1,2,\ldots,d$ é uma base para as soluções de (2.23), da forma $q(\tau)e^{-\lambda\tau}$, $q(\tau)$ polinômio em τ, definimos funções ψ_j^λ em C^* por $\psi_j^\lambda(\theta) = q_j(\lambda,\theta)e^{-\lambda\theta}$, $0 \leq \theta \leq r$.

Se $\Psi_\lambda = \mathrm{col}(\psi_1^\lambda,\ldots,\psi_d^\lambda)$, então a matriz $(\Psi_\lambda,\Phi_\lambda)=(\Psi_j^\lambda,\phi_k^\lambda)$ $j,k = 1,2,\ldots,d$ é não singular, e portanto, sem perda de generalidade, pode ser tomada como a matriz identidade por uma mudança da base Ψ_λ.

Se $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_p\}$, $\Phi_\lambda = (\Phi_{\lambda_1},\ldots, \Phi_{\lambda p})$, $\Psi_\lambda = \mathrm{col}(\Psi_{\lambda_1},\ldots,\Psi_{\lambda_p})$, então a matriz $(\Psi_\lambda,\Phi_\lambda)$ pode ser escolhida como a identidade. A decomposição de C pode ser escrita como:

$$C = P_\lambda \oplus Q_\lambda$$

$$P_\lambda = M_\lambda(A) = \{\phi \in C : \phi = \Phi_\lambda.b, \text{ b vetor constante}\}$$

$$Q_\lambda = \{\phi \in C : (\Psi_\lambda,\phi) = 0\}$$

$$\phi = \phi^{P_\lambda} + \phi^{Q_\lambda}$$

$$\phi^{P_\lambda} = \Phi_\lambda \cdot a \quad a = (\psi_\lambda,\phi)$$

$$\phi^{Q_\lambda} = \phi - \phi^{P\lambda}$$

Dizemos que C é decomposto por Λ.

Consideremos, agora, um caso especial de (2.2), a equação diferença

(2.28) $$D^0(y_t) = D^0(\phi) \qquad t \geq 0$$

$$D^0(\phi) = \phi(0) - g^0(\phi) = \phi(0) - \int_{-r}^{0} [d\mu^0(\theta)]\phi(\theta)$$

onde μ^0 é matriz n×n, cujos elementos são funções de variação limitada, $g^0(\phi)$ não atomica em zero, isto é, existe função contínua $\gamma^0(s)$, contínua para $s \geq 0$, $\gamma^0(0) = 0$, tal que

$$\left|\int_{-r}^{0} [d\mu^0(\theta)]\phi(\theta)\right] \leq \gamma^0(s) \sup_{-s\leq\theta\leq 0} |\phi(\theta)|, \quad 0 \leq s \leq r$$

Denotaremos por $\{T^0(t), t>0\}$ o semi grupo fortemente contínuo, correspondente ao semi grupo $\{T(t), t\geq 0\}$ e por A^0, o gerador infinitesimal.

A equação característica de (2.28) é dada por:

$$\det\Delta^0(\lambda) = 0 \qquad \Delta^0(\lambda) = \lambda\, I - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} d\mu^0(\theta)$$

Seja a equação homogênea

(2.29) $$D^0(y_t) = 0 \qquad t \geq 0$$

$$y_0 = \phi, \qquad D^0(\phi) = 0$$

Se $D^0(\phi) = \phi(0) - g^0(\phi)$ é dado em (2.28), definimos a ordem a_{D^0} de D^0, por:

(2.30) a_{D^0}= inf {a real: existe uma constante k(a) tal que $\|T^0(t)\phi\| \leq K(a)\, e^{at} \|\phi\|$, $t \geq 0$ e para todo ϕ com $D^0(\phi) = 0$}.

Observamos que a_{D^0} é determinado pelo comportamento das soluções da equação homogênea (2.29) e não da equação completa (2.28).

Se $D^0(\phi) = \phi(0) - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \phi(-\tau_k)$, $\quad 0 \leq \tau_k \leq r$, $\phi \in C$, então,

se $h(\lambda) = \det(I - \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda\tau_k})$, temos que:

(2.31) $$a_{D^0} = \sup \{\mathrm{Re}\ \lambda : h(\lambda) = 0\}$$

Também, temos que $\sigma(A^0) = P\sigma(A^0) = \{\lambda | h(\lambda) = 0\}$

No caso da equação (2.2), $\Delta(\lambda)$ dado em (2.22), para qualquer $a > a_{D^0}$, existe apenas um número finito de raízes λ de $\det\Delta(\lambda) = 0$, com $\mathrm{Re}\ \lambda \geq a$.

Seja $\Lambda_a = \{\lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}\ \lambda \geq a\}$. Então, o espaço C pode ser decomposto por Λ_a como $C = P_a \oplus Q_a$ onde P_a e Q_a são sub-espaços invariantes sob $T(t)$ e A, o espaço P_a é de dimensão finita e corresponde aos valores iniciais de todas as soluções de (2.2) as quais são da forma $p(t).e^{\lambda t}$ onde $p(t)$ é um polinômio em t e $\lambda \in \Lambda_a$.

Suponhamos que $x(\sigma,\phi)(t)$ é a solução de (2.2) com valor inicial ϕ em σ, C decomposto por Λ. Então $x_t = x_t^P + x_t^Q$. Vamos calcular x_t^P, diretamente, da definição acima. Da fórmula da variação das constantes, se $X(t)$ é matriz de funções $n\times n$ definida para todo $t \in [0,\infty)$, de variação limitada em t, e contínua à direita em t, tal que

$$D(x_t) = \int_0^t L(x_s)ds + I \qquad t \geq 0$$

e $$X_0(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -r \leq \theta < 0 \\ I & \text{se} \quad \partial = 0 \end{cases}$$

Desde que $X(t)$ é uma solução de (2.2) é justificável tomarmos

$$X_t = T(t)X_0$$

A solução de (2.3), com função inicial ϕ,satisfaz a equação.

$$(2.32)\qquad x_t - X_0G(t,x_t) = T(t)[\phi - X_0G(0,\phi)] + \int_0^t \{d_s[-T(t-s)X_0]\}G(s,x_s) + \int_0^t T(t-s)X_0F(s,x_s)ds$$

para todo $t \geq 0$. Inversamente, qualquer solução de (2.32), satisfaz (2.3). As integrais em (2.32) são calculadas em cada θ, $\theta \in [-r,0]$, como integrais em E^n. Se C é decomposto por Λ como $C = P \oplus Q$, então a equação (2.32) é equivalente a:

$$(2.33)\qquad x_t^P - X_0^P\, G(t,x_t) = T(t)[\phi^P - X_0G(0,\phi)] + \int_0^t \{d_s[-T(t-s)X_0^P]\}G(s,x_s) + \int_0^t T(t-s)X_0^P\, F(s,x_s)ds$$

$$x_t^Q - X_0^QG(t,x_t) = T(t)[\phi^Q - X_0^QG(0,\phi)] + \int_0^t \{d_s[-T(t-s)X_0^Q]\}G(s,x_s) + \int_0^t T(t-s)X_0^Q\, F(s,x_s)ds$$

onde x_t^P, x_t^Q, X_0^P, X_0^Q, ϕ^P, ϕ^Q denotam as projeções das funções correspondentes, sobre os sub-espaços P e Q, respectivamente. Em (2.33), apenas o significado das projeções X_0^P e X_0^Q, não é bem esclarecido, visto que X_0 não é contínua em $[-r,0]$. Estes termos serão definidos depois de darmos uma maneira explicita de calcular as projeções de C sobre P e Q.

Os operadores projeção de C sobre P e Q são facilmente determinados usando-se a equação adjunta (2.23) e a forma bilinear (2.24). Se Φ é uma base para os valores iniciais das soluções de (2.2) da forma $p(t)e^{\lambda t}$, p(t) polinômio em t, $\lambda \in \Lambda$ e Ψ é uma base para os valores iniciais das soluções de (2.23), da forma $p(t)e^{-\lambda t}$, p(t) polinômio em t, $\lambda \in \Lambda$, então, como foi visto (Ψ,Φ) é não sin

gular e pode ser considerada como a identidade. Se $\phi = \phi^P + \phi^Q$, $\phi^P = \phi(\Psi,\phi)$, pode-se mostrar que (Ψ,X_0) é bem definido e $(\Psi,X_0) = \Psi(0)$. Portanto, podemos considerar

$$(2.34) \qquad X_0^P = \phi\Psi(0) \qquad\qquad X_0^Q = X_0 - X_0^P$$

e,agora, as quantidades em (2.33) são bem definidas. É mostrado em [3], que se $\gamma > a_{D^0}$ e $\Lambda = \{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \geq \gamma, \det\Delta(\lambda) = 0\}$, então existe $\beta_0 > 0$ tal que para todo β, $0 \leq \beta_0$ existe uma constante $k = k(\beta)$, de modo que:

$$(2.35) \qquad \|T(\phi)\phi\| \leq k\, e^{(\gamma-\beta)t}\|\phi\|, \quad t \geq 0,\ \phi \in Q$$

$$\|T(t)X_0^Q\| + \int_0^1 \|d_s T(t-s)X_0^Q\| \leq ke^{(\gamma-\beta)t}, \quad t \geq 0$$

Henry, em [13], obtém um resultado mais geral que o de Cruz em [3]. Supondo que $\alpha \notin \overline{\mathrm{Re}\sigma(A)}$, isto é, $\det\Delta(\lambda) \neq 0$ em algum intervalo $|\mathrm{Re}\,\lambda-\alpha| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, provou que C pode ser decomposto como $C = P \oplus Q$, pelo conjunto $\Lambda = \{\lambda \mid \mathrm{Re}\,\lambda \geq \alpha\}$, P e Q sub-conjuntos fechados invariantes sob $T(t)$. Mostrou também que existem constantes k_1, k_2 e $\delta > 0$, tais que

$$(2.36) \qquad \|T(t)X_0^Q\| \leq k_1\, e^{(\alpha-\delta)t}$$

e

$$(2.37) \qquad \int_0^\infty |dT(s)X_0^Q|\, e^{-(\alpha-\delta)s} \leq k_2$$

Observação: É conhecido que $\sup\{\mathrm{Re}\lambda : \det\Delta(\lambda) = 0,\ \Delta(\lambda)$ dado em (2.22)$\} \leq \inf\{a$: existe $K = K(a)$ tal que $\|T(t)\phi\| \leq Ke^{at}\|\phi\|, t\geq 0$, $\phi \in C\} = a_D$, D dado em (2.3).

Se $\alpha > a_D \Rightarrow \alpha > \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \det\Delta(\lambda) = 0\}$. Logo, existe $\delta>0$

tal que $\alpha + \delta > \alpha > \alpha - \delta > \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \det\Delta(\lambda) = 0\}$ isto é, $|\mathrm{Re}\lambda - \alpha| < \delta$ com $\det\Delta(\lambda) \neq 0$, e portanto $\alpha \notin \overline{\mathrm{Re}\sigma(A)}$.

De (2.33), somos levados a considerar a possibilidade de introduzir uma nova variável para a expressão do lado esquerdo. Entretanto, devemos tomar certo cuidado, pois a nova variável não é função contínua em $[-r,0]$. Por isso, consideremos PC o conjunto das funções $\phi : [-r,0] \to E^n$, que são contínuas em $[-r,0)$ e $\lim_{\theta\to 0^-} \phi(\theta)$ existe. Definimos, agora, $\|\phi\| = |\phi(0)| + \sup_{-r\leq\theta<0} |\phi(\theta)|$. Com esta norma o espaço PC é um espaço de Banach. Seja PC_G o conjunto fechado em PC definido por

$$PC_G = \{\phi \in PC : \phi(0) = \phi(0^-) - X_0G(t,\phi)\} \text{ onde } \phi(0^-) = \lim_{\theta\to 0^-} \phi(\theta).$$

Desde que $G(t,\phi)$ é não atômica em zero, e assim, não depende de $\phi(0)$, as transformações

$$\begin{aligned} &h : C \to PC_G \ , \ h(\Psi) = \Psi - X_0G(t,\Psi) \\ (2.38) \qquad & \\ &H : PC_G \to C \ , \ H(\phi) = \phi + X_0G(t,\phi) \end{aligned}$$

são homeomorfismos e $h.H = H.h$ é a identidade. De fato, temos:

$$H.h(\Psi) = \Psi - X_0G(t,\Psi) + X_0G[t,\Psi - X_0G(t,\Psi)] =$$

$$= \Psi - X_0G(t,\Psi) + X_0G(t,\Psi) - X_0G[t,X_0G(t,\Psi)] = \Psi$$

pois $X_0 = 0$ em $[-r,0)$, $X_0(0) = I$ e $G(t,\Psi)$ não atômica em zero.

Analogamente, temos que $h.H(\Psi) = \Psi$, o que prova $h.H = H.h$ é a identidade.

Para cada ϕ em PC_G existe uma única função $\Psi \in C$ tal que

$$\phi = \Psi - X_0G(t,\Psi)$$

e reciprocamente. Portanto, o semi-grupo $T(t)$ é bem definido em PC_G, desde que é bem definido em C e X_0. Por outro lado, $T(t)\phi$ pode não pertencer a PC_G para $\phi \in PC_G$. No que segue, $||T(t)\phi|| = \sup_{-r\leq\theta\leq 0} |T(t)\phi(\theta)|$, para $\phi \in PC_G$.

O domínio do gerador infinitesimal A do semi-grupo $T(t)$, pode ser estendido a PC, fazendo $\mathcal{D}(A) = \{\phi \in PC : \dot{\phi} \in PC\}$ e

$$(2.39) \qquad A\phi(\theta) = \begin{cases} \dot{\phi}(\theta) & -r \leq \theta < 0 \\ g(\dot{\phi}) + L(\phi) & \theta = 0 \end{cases}$$

A fórmula da variação das constantes (2.32) para as soluções de (2.3), sugere a mudança de variáveis $x_t - X_0G(t,x_t) = z_t$ e obtemos assim uma nova equação para z_t em PC. Esta transformação de C para PC é bem definida e $G(t,x_t)$ depende somente dos valores de $x_t(\theta)$ para $-r \leq \theta < 0$. Portanto $G(t,x_t) = G(t,z_t)$, pois só não vale a igualdade no ponto $\theta = 0$. Assim, se

$$z_t = x_t - X_0G(t,x_t)$$

ou

$$x_t = z_t + X_0G(t,x_t) = z_t + X_0G(t,z_t) \overset{def}{=} H(t,z_t)$$

a equação (2.32) fica

$$(2.40) \qquad z_t = T(t)z_0 + \int_0^t \{-d_s[T(t-s)x_0]\}G(s,z_s) + \int_0^t T(t-s)X_0\, F[s,H(s,z_s)]ds$$

Sejam Φ e Ψ as matrizes definidas para a decomposição de $C = P + Q$, $(\Psi,\Phi) = I$ e seja E a matriz $q \times q$ tal que $T(t)\phi = \Phi e^{Et}$, $t \in (-\infty,\infty)$. O espectro de E é Λ. Para qualquer $\phi \in P.C$, podemos definir (Ψ,Φ) e assim, tem significado fazermos

$$\phi^P = \Phi(\Psi,\phi)\ , \qquad \phi^Q = \phi - \phi^P\ , \qquad \phi \in PC$$

Também, a equação (2.40) pode ser escrita como (2.33) com

apropriada substituição de $z_t = x_t - X_0G(t,x_t)$. Além disso se $z_t^P = \Phi u(t)$, então da primeira equação em (2.33), resulta em que:

$$\Phi u(t) = \Phi e^{Et}u(0) + \Phi \int_0^t \{-d_s[e^{E(t-s)}\Psi(0)]\}\, G(r,z_s) +$$

$$+ \Phi \int_0^t e^{E(t-s)}\Psi(0)\, F[s,H(s,z_s)]ds$$

Portanto, vemos que a equação (2.40) é equivalente a:

$$(2.41)\qquad \begin{cases} z_t = \Phi u(t) + v_t & v_t \in a \\ \dfrac{du}{dt} = Eu(t) + F_1[u(t),v_t,t] \\ v_t = T(t)v_0 + \displaystyle\int_0^t [-d_sT(t-s)X_0^Q]G_0[u(s),v_s,s] + \\ + \displaystyle\int_0^t T(t-s)X_0^QF[u(s),v_s,s]ds \end{cases}$$

onde $F_1(u,\phi,\sigma) = \Psi(0)F[H(\Phi u+\phi,\sigma)] + E\Psi(0)G(\Phi u+\phi,\sigma)$

$$F_0(u,\phi,\sigma) = F[H(\Phi u+\phi,\sigma)],$$

$$G_0(u,\phi,\sigma) = G(\Phi u+\phi,\sigma)$$

$u \in E^q$, $\phi \in Q$.

CAPÍTULO III

DECOMPOSIÇÃO E ESTIMATIVAS PARA FUNÇÕES LIPSCHITZIANAS

Em [13], Henry considera o espaço $W_\infty^{(1)}$, das funções Lipschitzianas contínuas $\phi : [-r,0] \to E^n$ com norma

$$(3.1) \qquad \|\phi\|_\infty = \max\{|\phi(0)|, \sup_{\theta_1 \neq \theta_2} \frac{|\phi(\theta_1)-\phi(\theta_2)|}{|\theta_1-\theta_2|}\} =$$

$$= \max\{|\phi(0)|, \text{sup-ess } |\dot{\phi}|\}$$

Consideremos a equação funcional (2.2) e seja $\{T(t), t \geq 0\}$, o semi-grupo de operadores lineares limitados em $W_\infty^{(1)}$. Este semi-grupo não é fortemente contínuo, mas é contínuo na topologia do operador fraco, considerando-se $W_\infty^{(1)}$ como o espaço conjugado de $W_1^{(1)}(E^{n*})$. Assim, para qualquer função absolutamente contínua $\Psi: [-r,0] \to E^{n*}$, e qualquer função $\phi \in W_\infty^{(1)}$, $\langle\Psi, T(t)\phi\rangle$ é contínuo em $t \geq 0$, onde

$$\langle\Psi,\phi\rangle = \Psi(0)\phi(0) + \int_{-r}^{0} \dot{\Psi}(\theta)\dot{\phi}(\theta)d\theta$$

Os resultados obtidos acima, para semi-grupos fortemente contínuos, podem ser estendidos a semi-grupos fracamente contínuos, com pequenas alterações. Em particular, definimos o gerador infinitesimal "fraco", por:

$$A = w^* - \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} [T(t)\phi - \phi] \qquad w^* \in \mathcal{D}(W_1^{(1)}(E^{n*}))$$

quando o limite existir. Também, $\phi = w^* - \lim_{n\to\infty} \phi_n$ se e somente se $\|\phi_n\|_\infty$ é limitado e $\phi_n(\theta) \to \phi(\theta)$ uniformemente em $-r \leq \theta \leq 0$. As-

sim, resulta em que

$$\mathcal{D}(A) = \{\phi \in W_\infty^{(1)} \mid \dot{\phi} \in W_\infty^{(1)} \text{ e } D(\dot{\phi}) = L(\phi)\}$$

$$A\phi = \dot{\phi} \quad \text{para } \phi \in \mathcal{D}(A)$$

e $\mathcal{D}(A)$ é invariante sob $T(t)$. Se $\phi \in \mathcal{D}(A)$, $\Psi \in W_1^{(1)}$,

$$\frac{d}{dt} \langle\Psi,T(t)\phi\rangle = \langle\Psi,T(t)A\phi\rangle = \langle\Psi,AT(t)\phi\rangle$$

$$P\sigma(T(t)) - \{0\} = e^{P\sigma(A)} \text{ e } \sigma(A) = P\sigma(A) =$$

$$= \{\lambda : \det\Delta(\lambda)=0\}.$$

Com isso, Henry provou que se $\Lambda = \{\lambda \in \sigma(A): \mathrm{Re}\lambda \geq \alpha\}$ é um conjunto finito, então $W_\infty^{(1)} = P \oplus Q$, onde P e Q são invariantes sob $T(t)$, P de dimensão finita e existem constantes $M \geq 1$ e $\delta > 0$ tais que:

$$(3.2) \qquad ||T(t)\phi^Q||_\infty < M\, e^{(\alpha-\delta)t}\, ||\phi^Q||_\infty \qquad t \geq 0\ , \quad \phi^Q \in Q.$$

Com esse resultado, podemos provar, usando o mesmo raciocínio para a norma em C, que existe constante k_2 e $\varepsilon > 0$ tais que:

$$(3.3) \qquad \int_0^\infty ||dT(t)X_0^2||_\infty\, e^{-(\alpha-\varepsilon)t} \leq k_2.$$

Izé, em [14], estudou o comportamento assintótico das soluções de (2.3), admitindo que $F(t,\phi)$ e $G(t,\phi)$, para todo $t \geq 0$ e para qualquer $\phi \in C$, satisfazem:

$$(3.4) \qquad |F(t,\phi)| \leq \gamma(t)\, ||\phi|| \qquad |G(t,\phi)| \leq \pi(t)\ ||\phi||$$

onde $\int^\infty \gamma(t)dt < \infty$, $\int^\infty \pi(t)dt < \infty$, $\gamma(t)$ e $\pi(t)$ contínuas.

Consideremos a equação funcional do tipo neutro com retardamento dependendo do tempo:

(3.5) $\dot{u}(t) = a\dot{u}[t-r(t)] - b\,u[t-r(t)]$

onde a e b são constantes, r(t) satisfaz

i) $\int^{\infty} r(t) \geq 0,\ r(t) \to 0$ quando $t \to \infty$

ii) $\int^{\infty} r(t)dt < \infty$

iii) $0 \leq t(t) \leq r$ para algum $r \geq 0$.

A equação (3.5) pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt}[D(u_t) + G(t,u_t)] = L(u_t) + F(t,u_t).$$

onde $L(\phi) = -b\phi(0)$

$D(\phi) = \phi(0) - a\phi[-r(t)]$

$F(t,\phi) = b\{\phi(0) - \phi[-r(t)]\}$

$G(t,\phi) = 0$

Vemos, assim, que $F(t,\phi)$ não satisfaz a hipótese (3.4) e consequentemente, a teoria em [14], não pode ser aplicada. Entretanto se $\phi \in C$ é Lipschitziana em $[-r,0]$, temos que

$$|F(t,\phi)| \leq |b|\ |\phi(0) - \phi[-r(t)]| \leq |b|\ k|r(t)|$$

para alguma constante $h = k(\phi)$. Isto sugere que as hipóteses sobre $F(t,\phi)$ e $G(t,\phi)$ podem ser enfraquecidas, se admitirmos que (3.4) vale para uma adequada sub-classe de C.

Consideremos, então, o sub-conjunto C' de C, constituído das funções ϕ, satisfazendo:

(3.6) $|\phi(\theta_1)-\phi(\theta_2)| \leq k\ |\theta_1-\theta_2|\ ,\qquad -r \leq \theta_1,\ \theta_2 \leq 0.$

onde $k = k(\phi)$. Para $\phi \in C'$, seja $k_\phi = \inf\{k:(3.6)$ é verificado$\}$. Em C', definimos a norma

$$||\phi||_1 = \max(\,||\phi||\,,\ k_\phi)$$

De maneira análoga ao que foi feito no capítulo anterior, definimos PC' e a norma $||\cdot||$ em PC'.

Agora, vamos supor que $F(t,\phi)$ e $G(t,\phi)$ são tais que para qualquer $\phi \in C'$ e para qualquer $t \geq \sigma$, existem funções contínuas $\pi(t)$ e $\gamma(t)$, tais que:

(3.7) $$|F(t,\phi)| \leq \gamma(t)\,||\phi||_1 \;,\; |G(t,\phi)| \leq \pi(t)\,||\phi||_1$$

É evidente que se $F(t,\phi)$ e $G(t,\phi)$ satisfazem (3.4), também satisfazem (3.7). Logo, os resultados de Izé em [14], são casos especiais dos resultados que obteremos a seguir.

CAPÍTULO IV

SOBRE O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SOLUÇÕES DO SISTEMA

$$\frac{d}{dt}[D(x_t) - G(t,x_t)] = L(x_t) + F(t,x_t).$$

Seja μ tal que Re $\mu > a_D$, uma raiz característica simples de (2.2). Portanto, μ é uma raiz simples de $\det \Delta(\lambda) = 0$. Então, existem um vetor coluna n-dimensional c, e um vetor linha n-dimensional d, não nulos, tais que $c.e^{\mu t}$ é uma solução de (2.2) e $d.e^{-\mu\tau}$ é uma solução da equação adjunta (2.23), definidas para $-\infty < t < \infty$, $-\infty < \tau < \infty$.

Sejam

$$(4.1) \qquad \phi_\mu(\theta) = ce^{\mu\theta} \qquad -r \leq \theta \leq 0$$

$$\Psi_\mu(\theta) = de^{-\mu\tau} \qquad 0 \leq \tau \leq r$$

$$\alpha^{-1} = (\Psi_\mu, \phi_\mu)$$

onde (Ψ_μ, ϕ_μ) é a forma bilinear definida por (2.24). O número α é bem definido, pois μ é uma raiz característica simples.

Teorema 4.1 - Suponhamos que Re $\mu > a_D$, onde μ é uma raiz característica simples de (2.2) e que todas as outras raízes características com partes reais iguais à parte real de μ são, também, raízes simples. Sejam ϕ_μ e α definidos em (4.1).

Seja $\delta(t) = \alpha.d\{F(t,\phi_\mu) + \mu G(t,\phi_\mu) + F[t,X_0G(t,\phi_\mu)]\}$

onde $F(t,\phi)$ e $G(t,\phi)$ são lineares em ϕ, e existem funções contínuas $\gamma(t)$ e $\pi(t)$ tais que $F(t,\phi)$ e $G(t,\phi)$ satisfazem (3.7). isto é:

$$|F(t,\phi)| \leq \gamma(t)\,||\phi||_1\,,\quad |G(t,\phi)| \leq \pi(t)\,||\phi||_1 \qquad t \geq \sigma.$$

Seja $s(t,\sigma) = \int_\sigma^t \delta(\xi)d\xi$

Suponhamos que $\gamma(t)$ e $\pi(t)$ satisfaçam uma das seguintes hipóteses:

I) $\int^\infty \gamma(t)dt < \infty,\ \int^\infty \pi(t)dt < \infty\ ,\ \lim_{t\to\infty} \pi(t) = 0.$

II) Para qualquer $\beta > 0$, existe uma função $\gamma_2(t)$, definida para $t \geq 0$, tal que

$$\lim_{t\to\infty} \pi(t) = 0 \qquad\qquad \lim_{t\to\infty} \gamma_2(t) = 0$$

$$\int^\infty \gamma(t)\gamma_2(t)dt < \infty\ ,\quad \int^\infty \pi(t)\gamma_2(t)dt < \infty$$

$$\int_\sigma^t e^{-\beta(t-\tau)-\mathrm{Re}\,s(t,\tau)}[\gamma(\tau)+\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau<\gamma_2(t),t\geq\sigma\geq 0$$

$$\int_t^\infty e^{\beta(t-\tau)-\mathrm{Re}\,s(t,\tau)}[\gamma(\tau)+\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau\leq\gamma_2(t),t \geq 0$$

$$\int_{t+\theta_2}^{t+\theta_1} e^{-\beta(t-\tau)-\mathrm{Re}\,s(t,\tau)}[\gamma(\tau)+\pi(\tau)+\gamma(\tau)\ \pi(\tau)]d\tau \leq \gamma_2(t)|\theta_1-\theta_2|$$

onde $-r \leq \theta_1,\ \theta_2 \leq 0,\quad t + \theta_1 > t+ \theta_2 \geq \sigma$

Além disso, para qualquer número real ν e quaisquer vetores colunas η, λ n-dimensionais, e para toda função contínua W_t definida para $t \geq \sigma$, com valores em C', tal que $||W_t||_1$ é limitada quando $t \to \infty$, temos que:

$$\left| \int_t^\infty e^{i\nu(t-\tau)-s(t,\tau)}\{\eta[F(\tau,W_\tau)+F(\tau,X_0G(\tau,W_\tau)]-\lambda G(\tau,W_\tau)\}d\tau \right| \leq$$

$$\leq [\,|\eta| + |\lambda|\,]\ \gamma_2(t) \sup_{\tau\geq\sigma} \|W_\tau\|_1 \ , \ t \geq \sigma$$

Sob estas hipóteses, existem um $\sigma \geq 0$, suficientemente grande, e um vetor a, não nulo, tais que o sistema (2.3), tem uma solução $x(t)$ definida para $t \geq 0$, satisfazendo

$$x(t) = e^{\mu(t-\sigma)+s(t,\sigma)}\ [a+o(\lambda)] \text{ quando } t \to \infty$$

Observação: Se não existem raízes características de (2.2) com partes reais iguais a Re μ, a não ser o próprio μ, então a última desigualdade na hipótese II não é necessária, pois, neste caso, μ é automaticamente real. Também, se a equação considerada é uma equação escalar, então o vetor η, na hipótese II, não é necessário.

Prova do Teorema: Sejam os conjuntos

$$\Lambda = \{\lambda : \text{Re } \lambda \geq \text{Re } \mu \quad \det\Delta(\lambda) = 0\}$$

$$\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda : \text{Re } \lambda = \text{Re } \mu,\ \lambda \neq \mu\}$$

$$\Lambda_1 = \Lambda - \Lambda_0 - \{\mu\}$$

Definimos os auto espaços generalizados P e Q como:

$$\phi = \phi^P + \phi^Q$$

$$\phi^P \in P = P(\lambda) = \{\phi \in C' : \phi = \Phi_\Lambda b \quad b \text{ vetor constante}\}$$

$$\phi^Q \in Q = Q(\lambda) = \{\phi \in C' : (\Psi_\Lambda,\phi) = 0\}$$

Então pela fórmula da variação das constantes temos, para a solução de (2.3)

$$\text{a)}\quad x_t^P - X_0^P G(t,x_t) = T(t)[\phi^P - X_0^P G(0,\phi)] +$$

$$+ \int_0^t [-d_s T(t-s)\ X_0^P] G(s,x_s) + \int_0^t T(t-s) X_0^P\ F(s,x_s)ds$$

b) $x_t^Q - X_0^Q\, G(t,x_t) = T(t)[\phi^Q - X_0^Q G(0,\phi)] +$

$$+ \int_0^t [-d_s T(t-s) X_0^Q] G(s,x_s) + \int_0^t T(t-s) X_0^Q\, F(s,x_s)ds$$

onde x_t^P e x_t^Q denotam as projeções da função x_t sobre os sub-espaços P e Q, respectivamente.

Se Re $\mu > a_D$, vimos que existe um $\beta_0 > 0$, tal que para qualquer β, $0 < \beta \leq \beta_0$, existe um $k = k(\beta)$ tal que

$$||T(t)\phi^Q|| \leq k\, e^{(\mathrm{Re}\,\mu-\beta)t}\, ||\phi^Q||$$

$$||T(t)X_0^Q|| + \int_0^1 ||d_s T(t-s) X_0^Q|| \leq k\, e^{(\mathrm{Re}\,\mu-\beta)t} \qquad t \geq 0.$$

O espaço P pode ser decomposto na soma algébrica do auto-espaço generalizado P_0 associado com Λ_0, o auto-espaço generalizado P_1 associado com Λ_1, e um sub-espaço unidimensional gerado por ϕ_μ. Portanto, em vez de considerar as equações integrais que resultam de (2.40), consideremos o seguinte conjunto de equações:

$$(4.3)\quad \begin{cases} z_t = z_t^{P_0} + z_t^{P_1} + \phi_\mu\, y(t) + z_t^Q \qquad x_t = z_t + X_0 G(t,z_t) \\ y(t) = \alpha(\Psi_\mu,\phi_\mu) \\ z_t^{P_0} = \int_\infty^t [-d_\tau T(t-\tau) X_0^{P_0}] G(\tau,z_\tau) + \int_\infty^t T(t-\tau) X_0^{P_0} F[\tau,z_\tau + \\ + X_0 G(\tau,z_\tau)]d\tau \\ z_t^{P_1} = \int_\infty^t [-d_\tau T(t-\tau) X_0^{P_1}] G(\tau,z_\tau) + \int_\infty^t T(t-\tau) X_0^{P_1} F[\tau,z_\tau + X_0 G(\tau,z_\tau)]d\tau \\ \dot{y}(t) = \mu\, y(t) + \alpha d\{F[t,z_t + X_0 G(t,z_t)] + \mu\, G(t,z_t)\} \\ z_t^Q = \int_\sigma^t [-d_\tau T(t-\tau) X_0^Q] G(\tau,z_\tau) + \int_\sigma^t T(t-\tau) X_0^Q\, F[\tau,z_\tau + X_0 G(\tau,W_\tau)]d\tau \end{cases}$$

Desde que P_1 corresponde aos valores característicos λ de (2.2), tais que Re λ > Re μ, existem constantes $\beta > 0$ e $k = k(\beta)$ (que podemos considerar as mesmas de (4.2)),tais que:

$$(4.4) \qquad \|T(t)X_0^{P_1}\| \leq k\, e^{(\mathrm{Re}\,\mu+\beta)t} \qquad t \leq 0.$$

Também como estamos supondo que os valores característicos de (2.2), com partes reais iguais à parte real de μ, são todos simples, o operador $T(t)$, agindo sobre P_0, tem a forma

$$T(t)\phi^{P_0} = \Phi\, e^{Bt}\, a.$$

onde Φ é uma base para P_0 e B é uma matriz diagonal cujos elementos são da forma Re $\mu + i\nu$,ν número real. Se Ψ é uma base para o auto-espaço generalizado da equação adjunta, associado com Λ_0,a segunda equação em (4.3) é equivalente a

$$z_t^{P_0} = \Phi\eta(t)$$

$$\eta(t) = \int_{\infty}^{t} -B\, e^{B(t-\tau)}\, \Psi(0)G(\tau,z_\tau) +$$

$$+ \int_{\infty}^{t} e^{B(t-\tau)}\, \Psi(0)\, F[\tau,z_\tau + X_0G(\tau,z_\tau)]d\tau$$

De fato, $X_0^{P_0} = \Phi\, \Psi(0)$, onde $\Psi(0)$ é uma matriz constante.Logo, temos:

$$T(t-\tau)X_0^{P_0} = [T(t-\tau)\Phi]\, \Psi(0) = \Phi\, e^{B(t-\tau)}\Psi(0), \qquad \text{pois}$$

$T(t)\phi^{P_0} = \Phi\, e^{Bt}\, a$, a vetor constante.

Temos também, que:

$$d_\tau T(t-\tau)X_0^{P_0} = d_\tau[\Phi\, e^{B(t-\tau)}\, \Psi(0)] = -B\, e^{B(t-\tau)}\, \Phi\, \Psi(0).$$

Seja $z_t = W_t\, e^{\mu(t-\sigma)+s(t,\sigma)}$. Então,temos que:

$$\int_{\infty}^{t} -B\, e^{B(t-\tau)}\Psi(0)G(\tau,W_\tau)d\tau = \int_{\infty}^{t} -B\, e^{B(t-\tau)}\Psi(0)G(\tau,W_\tau e^{\mu(\tau-\sigma)+s(\tau,\sigma)})d\tau =$$

$$= \int_{\infty}^{t} -B\, e^{B(t-\tau)}\, e^{\mu(\tau-\sigma)+s(\tau,\sigma)}\Psi(0)\, G(\tau,W_\tau)d\tau\,.$$

Analogamente, temos que:

$$\int_{\infty}^{t} e^{B(t-\tau)}\Psi(0)\ F[\tau,z_\tau + X_0G(\tau,z_\tau)]d\tau =$$

$$= \int_{\infty}^{t} e^{B(t-\tau)}\ e^{\mu(\tau-\sigma)+s(\tau,\sigma)}\ \Psi(0)F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau$$

Assim, chamando $\nu(t) = e^{-\mu(t-\sigma)-s(t,\sigma)}\ \eta(t)$, resulta que:

$$\nu(t) = e^{-\mu(t-\sigma)-s(t,\sigma)}\{\int_{\infty}^{t} -B\ e^{B(t-\tau)}\ e^{\mu(\tau-\sigma)+s(\tau,\sigma)}\Psi(0)G(\tau,W_\tau)d\tau +$$

$$+ \int_{\infty}^{t} e^{B(t-\tau)}\ e^{\mu(\tau-\sigma)+s(\tau,\sigma)}\Psi(0)\ F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau\}=$$

$$= \int_{\infty}^{t} -B\ e^{(B-\mu I)(t-\tau)-s(t,\tau)}\ \Psi(0)\ G(\tau,W_\tau)d\tau +$$

$$+ \int_{\infty}^{t} e^{(B-\mu I)(t-\tau)-s(t,\tau)}\ \Psi(0)\ F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau$$

Temos, também que $W_t^{P_1} = z_t^{P_1}\ e^{-\mu(t-\sigma)-s(t,\sigma)}$. Disto resulta que:

$$W_t^{P_1} = e^{-\mu(t-\sigma)-s(t,\sigma)}\ \{\int_{\infty}^{t}[-d_\tau T(t-\tau)X_0^{P_1}]G(\tau,W_\tau\ e^{\mu(\tau-\sigma)+s(\tau,\sigma)})$$

$$+ \int_{\infty}^{t} T(t-\tau)X_0^{P_1}\ F[\tau,W_\tau\ e^{\mu(\tau-\sigma)+s(\tau,\sigma)}+X_0\ G(\tau,W_\tau\ e^{\mu(\tau-\sigma)+s(\tau,\sigma)}]d\tau=$$

$$= \int_{\infty}^{t} e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}[-d_\tau T(t-\tau)X_0^{P_1}]G(\tau,W_\tau) +$$

$$+ \int_{\infty}^{t} e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}T(t-\tau)X_0^{P_1}\ F[\tau,W_\tau+X_0\ G(\tau,W_\tau)]d\tau.$$

De maneira análoga, obtemos que:

$$W_t^{Q} = \int_{\sigma}^{t} e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}\ [-d_\tau T(t-\tau)X_0^{Q}]\ G(\tau,W_\tau) +$$

$$+ \int_{\sigma}^{t} e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}T(t-\tau)X_0^{Q}F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau.$$

Dos resultados acima, concluimos que $W_t = \Phi\nu(t) + W_t^{P_1} + \phi_\mu\, u(t) + W_t^Q$, onde $u(t)$ é obtido como segue.

Tinhamos que:

$$\dot{y}(t) = \mu\, y(t) + \alpha d\{F[t,z_t+X_0G(t,z_t)] + \mu G(t,z_t)\}$$

Fazendo $y(t) = u(t)e^{\mu(t-\sigma)+s(t,\sigma)}$, resulta que

$$\dot{y}(t) = \dot{u}(t)e^{\mu(t-\sigma)+s(t,\sigma)} + u(t)[\mu+\delta(t)]e^{\mu(t-\sigma)+s(t,\sigma)} =$$

$$= \{\dot{u}(t) + \mu\, u(t) + u(t)\alpha d\, [F(t,\phi_\mu) + \mu\, G(t,\phi_\mu) +$$

$$+ F(t,X_0G(t,\phi_\mu))]\}\, e^{\mu(t-\sigma)+s(t,\sigma)}$$

Por outro lado, temos:

$$\dot{y}(t) = \mu\, y(t) + \alpha d\{F[t,z_t+X_0G(t,z_t)] + \mu\, G(t,z_t)\} =$$

$$= \mu\, u(t)\, e^{\mu(t-\sigma)+s(t,\sigma)} + \alpha d\{F[t,W_t+X_0G(t,W_t)] +$$

$$+ \mu\, G(t,W_t)\}\, e^{\mu(t-\sigma)+s(t,\sigma)}$$

Comparando as duas expressões para $\dot{y}(t)$, temos:

$$\dot{u}(t) = \alpha d\{F[t,(\Phi\, \nu(t)+W_t^{P_1}+W_t^Q)+X_0G(t,\Phi\nu(t)+W_t^{P_1}+W_t^Q)] +$$

$$+ \mu\, G(t,\, \Phi\, \nu(t) + W_t^{P_1} + W_t^Q)\}$$

Integrando de σ até t obtemos que:

$$u(t) = u(\sigma) + \alpha d \int_\sigma^t \{F(\tau,\Phi\, \nu(\tau) + W_\tau^{P_1} + W_\tau^Q) +$$

$$+ F[\tau,X_0\, G(\tau,\, \Phi\, \nu(\tau) + W_\tau^{P_1} + W_\tau^Q)] + \mu\, G(\tau,\Phi\, \nu(\tau) + W_\tau^{P_1} + W_\tau^Q)\}d\tau$$

Assim, concluimos que:

$$(4.5)\quad \begin{cases} W_t = \Phi\, \nu(t) + W_t^{P_1} + \phi_\mu\, u(t) + W_t^Q \\ \nu(t) = \int_\infty^t -B\, e^{(B-\mu I)(t-\tau)-s(t,\tau)}\psi(0)\, G(\tau,W_\tau)d\tau + \\ + \int_\infty^t e^{(B-\mu I)(t-\tau)-s(t,\tau)}\, \psi(0)\, F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau \end{cases}$$

INSTITUTO DE CIÊNC... S. Carlos-SP

$$
(4.5)\quad \begin{cases}
W_t^{P_1} = \int_{\infty}^{t} e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)} \left[-d_\tau T(t-\tau)X_0^{P_1}\right] G(\tau,W_\tau) + \\
+ \int_{\infty}^{t} e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)} T(t-\tau)X_0^{P_1} F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau \\
W_t^{Q} = \int_{\sigma}^{t} e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)} \left[-d_\tau T(t-\tau)X_0^{Q}\right] G(\tau,W_\tau) + \\
+ \int_{\sigma}^{t} e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)} T(t-\tau)X_0^{Q} F[\tau,W_\tau+X_0\ G(\tau,W_\tau)]d\tau \\
u(t) = u(\sigma) + \alpha d \int_{\sigma}^{t} \{F[\tau,\ \Phi\ \nu(\tau)+W_\tau^{P_1}+W_\tau^{Q}] + \\
+ F[\tau,X_0\ G(\tau,\Phi\ \nu(\tau) + W_\tau^{P_1} + W_\tau^{Q})] + \mu\ G(\tau,\Phi\ \nu(\tau)+W_\tau^{P_1}+W_\tau^{Q})\}d\tau
\end{cases}
$$

Se para alguma constante $u(\sigma)$, conseguirmos achar uma solução W_t de (4.5), então x_t dada por:

$$
x_t = W_t\ e^{\mu(t-\sigma)+s(t,\sigma)} + X_0G(t,\ W_t\ e^{\mu(t-\sigma)+s(t,\sigma)}) =
$$

$$
= [W_t + X_0\ G(t,W_t)]e^{\mu(t-\sigma)+s(t,\sigma)}
$$

é a solução com o comportamento assintótico estabelecido no teorema.

Antes de prosseguir na prova do teorema, demonstraremos dois lemas.

Lema 4.1 - Sejam ϕ_μ definida em (4.1), Φ_{Λ_1} uma base para o sub-espaço P_1 e Φ uma base para o sub-espaço P_0. Seja X_0 como foi definida anteriormente. Então existe um número positivo k, tal que:

(4.6) $\quad ||\phi_\mu||_1 \leq k$

(4.7) $\quad ||T(t)X_0^Q|| \leq k\ e^{(\mathrm{Re}\ \mu-\beta)t} \qquad t \geq 0$

$\quad |T(t)X_0^Q(\theta_1) - T(t)X_0^Q(\theta_2)\ | \leq k\ e^{(\mathrm{Re}\ \mu-\beta)t}\ |\theta_1-\theta_2|$

$\quad -r \leq \theta_1,\ \theta_2 \leq 0. \qquad t \geq 0$

$$(4.8) \qquad ||T(t)X_0^{P_1}||_1 \leq k\, e^{(\mathrm{Re}\,\mu+\beta)t} \qquad t \leq 0$$

Prova: $||\phi_\mu|| = \sup_{-r\leq\theta\leq 0} |\phi_\mu(\theta)| = \sup_{-r\leq\theta\leq 0} |c\, e^{\mu\theta}| = c_1$

$$|\phi_\mu(\theta_1)-\phi_\mu(\theta_2)| = |c\, e^{\mu\theta_1}-c\, e^{\mu\theta_2}| = |c|\ |e^{\mu\theta_1}-e^{\mu\theta_2}| \leq$$

$$\leq |c|\ |\mu\, e^{\mu\xi}|\ |\theta_1-\theta_2| = c_2|\theta_1-\theta_2|$$

Assim, $||\phi_\mu||_1 \leq k$, $k = \max\{c_1,c_2\}$, o que prova (4.6).

De (4.4), vemos que (4.8) vale para a norma em C. Desde que cada elemento da base Φ_{Λ_1} para o sub-espaço P_1, é uma exponencial vezes um polinômio em θ, do teorema do valor médio resulta que:

$$||\Phi_{\Lambda_1}(\theta_1) - \Phi_{\Lambda_1}(\theta_2)|| \leq m_1\ |\theta_1-\theta_2|\ ,\ m_1 = \text{constante}.$$

Como $X_0^{P_1}$ é uma matriz cujos elementos estão em P_1, cada elemento é da forma $\Phi_{\Lambda_1}\, a$, para algum vetor constante a. Assim, cada elemento de $T(t)X_0^{P_1}$ tem a forma $\Phi_{\Lambda_1}\, e^{B_1 t}\, a$, onde B_1 é matriz cujos auto-valores compreendem o conjunto Λ_1. Consequentemente, cada elemento de $T(t)X_0^{P_1}(\theta_1) - T(t)X_0^{P_1}(\theta_2)$, tem a forma $[\Phi_{\Lambda_1}(\theta_1)-\Phi_{\Lambda_1}(\theta_2)]e^{B.t}\, a$. Logo existe $\beta > 0$, tal que se $t \leq 0$, temos:

$$|T(t)X_0^{P_1}(\theta_1)-T(t)X_0^{P_1}(\theta_2)| \leq ||\Phi_{\Lambda_1}(\theta_1)-\Phi_{\Lambda_2}(\theta_2)||\ |e^{B_1 t}|\cdot|a| \leq$$

$$\leq k_2\, e^{(\mathrm{Re}\,\mu+\beta)t}|\theta_1-\theta_2|$$

Concluimos, então, que $||T(t)X_0^{P_1}||_1 \leq k\, e^{(\mathrm{Re}\,\mu+\beta)t}$, $t \leq 0$, o que prova (4.8).

A primeira desigualdade em (4.7), decorre de (4.2). A segunda desigualdade em (4.7), é consequência de (3.2), tomando-se $\alpha = \mathrm{Re}\,\mu$ e $\delta = \beta > 0$. Então, existe constante $M \geq 1$ tal que

$$|T(t)X_0^Q(\theta_1) - T(t)X_0^Q(\theta_2)| \leq M\, e^{(\mathrm{Re}\,\mu-\beta)t}|\theta_1-\theta_2|,\ t\geq 0.$$

Portanto, o lema está provado, tomando-se k suficientemente grande.

Lema 4.2: Seja $W_t \in C'$ para $t \geq \sigma$. Se as hipóteses (I) ou (II) do teorema 4.1 forem satisfeitas, então existem uma função $\gamma_3(t)$, contínua para $t \geq 0$, $\lim_{t\to\infty} \gamma_3(t) = 0$, e uma constante K, tais que:

$$\int_\sigma^t e^{-\beta(t-\tau)-\mathrm{Re}\, s(t,\tau)}[\gamma(\tau)+\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau \leq \gamma_3(t),\ t\geq\sigma\geq 0.$$

$$(4.9)\quad \int_t^\infty e^{\beta(t-\tau)-\mathrm{Re}\, s(t,\tau)}[\gamma(\tau)+\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau \leq \gamma_3(t),\ t\geq 0.$$

$$\int_{t+\theta_2}^{t+\theta_1} e^{-\beta(t-\tau)-\mathrm{Re}\, s(t,\tau)}[\gamma(\tau)+\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau \leq \gamma_3(t)|\theta_1-\theta_2|$$

$$-r \leq \theta_1,\ \theta_2 \leq 0\ ,\qquad t+\theta_1 \geq t+\theta_2 \geq \sigma.$$

Se $W_t \in C'$ e $||W_t||_1$ é limitada, para todo $t \geq \sigma$, temos:

$$(4.10)\qquad \Big|\int_t^\infty e^{(B-\mu I)(t-\tau)-s(t,\tau)}\,\Psi(0)\,F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau+$$

$$+\int_t^\infty -B\, e^{(B-\mu I)(t-\tau)-s(t-\tau)}\,\Psi(0)\,G(\tau,W_\tau)d\tau\Big| \leq K\,\gamma_3(t)\sup_{\tau\geq\sigma}||W_\tau||_1$$

Prova: Sejam F e G satisfazendo a hipótese (3.7) e suponhamos que vale a hipótese (I) do teorema. Desde que $||\phi_\mu||_1 \leq k$, $\delta(t)=\alpha d\{F(t,\phi_\mu)+ + \mu\, G(t,\phi_\mu) + F[t,X_0G(t,\phi_\mu)]\}$, e $s(t,\sigma) = \int_\sigma^t \delta(\xi)d\xi$, temos que:

$$|e^{-s(t,\sigma)}| = e^{-\mathrm{Re}\, s(t,\sigma)} = e^{-\mathrm{Re}\int_\sigma^t \alpha d\{F(\xi,\phi_\mu)+\mu\, G(\xi,\phi_\mu)+F[\xi,X_0G(\xi,\phi_\mu)]\}d\xi} \leq$$

$$\leq e^{|\alpha d|c_1}\int_\sigma^t \{|F(\xi,\phi_\mu)|+|\mu|\ |G(\xi,\phi_\mu)| + |F[\xi,X_0G(\xi,\phi_\mu)]|\}d\xi \leq$$

$$\leq e^{|\alpha d|c_1}\int_\sigma^t [\gamma(\xi)+\pi(\xi)+\gamma(\xi)\pi(\xi)]\ ||\phi_\mu||_1\, d\xi < \infty\ .$$

Portanto, concluimos que $e^{-s(t,\sigma)}$ é limitada quando $t \to \infty$.

$$\int_\sigma^t e^{-\beta(t-\tau)-\mathrm{Re}\ s(t,\tau)}[\gamma(\tau)+\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau =$$

$$= e^{-\beta t-\mathrm{Re}\ s(t,\sigma)} \int_\sigma^t e^{\beta\tau+\mathrm{Re}\ s(\tau,\sigma)}[\gamma(\tau)+\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau$$

Pelo Lema 2 de [1], temos que:

$$\int_\sigma^t e^{\beta\tau+\mathrm{Re}\ s(\tau,\sigma)}[\gamma(\tau)+\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau = e^{\beta t+\mathrm{Re}\ s(t,\sigma)}\ o(1).$$

Assim, resulta que:

$$\int_\sigma^t e^{-\beta(t-\tau)-\mathrm{Re}\ s(t,\tau)}[\gamma(\tau)+\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau = o(1).$$

Por raciocínio análogo, usando o Lema 4 de [1], temos que:

$$\int_t^\infty e^{\beta(t-\tau)-\mathrm{Re}\ s(t,\tau)}[\gamma(\tau)+\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]\lambda\tau = o(1).$$

Agora, desde que B é matriz diagonal cujos elementos são da forma Re μ + i p, p real, temos que:

$$||e^{(B-\mu I)(t-\tau)}|| = 1$$

$$\left|\int_t^\infty -B\ e^{(B-\mu I)(t-\tau)-s(t,\tau)}\psi(0)\ G(\tau,W_\tau)d\tau\right| \leq$$

$$\leq m_2\int_t^\infty |G(\tau,W_\tau)|d_\tau \leq m_2 \sup_{\tau\geq\sigma} ||W_\tau||_1 \int_t^\infty \pi(\tau)d\tau$$

Analogamente

$$\left|\int_t^\infty e^{(B-\mu I)(t-\tau)-s(t,\tau)}\ \psi(0)\ F[\tau,W_\tau + X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau\right| \leq$$

$$\leq m_3 \sup_{\tau\geq\sigma} ||W_\tau||_1 \int_t^\infty [\gamma(\tau) + \gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau.$$

Como $\int_t^\infty [\gamma(\tau) + \pi(\tau) + \gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau < \infty$, resulta que

$\int_t^\infty [\gamma(\tau) + \pi(\tau) + \gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau \to 0$ quando $t \to \infty$ e, assim, conclui

mos que:

$$\left|\int_t^\infty -B\, e^{(B-\mu I)(t-\tau)-s(t,\tau)}\, \Psi(0)\, G(\tau,W_\tau)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_t^\infty e^{(B-\mu I)(t-\mu)-s(t,\mu)}\, \Psi(0)\, F[\tau,X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau\right| \leq K_1 \sup_{\tau\geq\sigma} ||W_\tau||_i .o(1)$$

Seja $g(t) = \gamma(t) + \pi(t) + \gamma(t)\pi(t)$ e seja $H(t)=\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}g(\tau)d\tau$,

$H(t)$ convergente para $t \geq \tau$.

$$H(t+\theta_1) - H(t+\theta_2) = \int_0^{t+\theta_1} e^{-\beta(t-\tau)}g(\tau)d\tau - \int_0^{t+\theta_1} e^{-\beta(t-\tau)}g(\tau)d\tau =$$

$$= \int_{t+\theta_2}^{t+\theta_1} e^{-\beta(t-\tau)}\, g(\tau)d\tau. \quad .$$

onde $-r \leq \theta_2,\ \theta_1 \leq 0,\quad \theta_1 \neq \theta_2,\quad t + \theta_1 \geq \sigma$

Pelo teorema da média, temos que:

$$H(t+\theta_1) - H(t+\theta_2) = e^{-\beta(t+\theta)}\ (\theta_1-\theta_2) \quad \text{onde} \quad \theta_1\leq\theta\leq\theta_2.$$

Assim obtemos que:

$$\int_{t+\theta_1}^{t+\theta_2} e^{-\beta(t-\tau)-\mathrm{Re}\ s(t,\tau)}[\gamma(\tau)\ \pi(\tau)\gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau \leq o(1).(\theta_1-\theta_2)$$

Dos resultados acima, vemos que existe uma função contínua $\gamma_1(t)$, $\gamma_1(t) \to 0$, quando $t \to \infty$, tal que:

$$(4.11)\quad \begin{cases} \int_\sigma^t e^{-\beta(t-\tau)-\mathrm{Re}\ s(t,\tau)}[\gamma(\tau)+\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau \leq \gamma_1(t) \quad t\geq\sigma\geq 0. \\ \int_t^\infty e^{\beta(t-\tau)-\mathrm{Re}\ s(t,\tau)}[\gamma(\tau)+\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau \leq \gamma_1(t) \quad t \geq 0. \\ \int_{t+\theta_2}^{t+\theta_1} e^{-\beta(t-\tau)-\mathrm{Re}\ s(t,\tau)}[\gamma(\tau)+\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau \leq \gamma_1(t)\ (\theta_1-\theta_2) \\ -r \leq \theta_1,\ \theta_2 \leq 0, \qquad t + \theta_1 \geq t+\theta_2 \geq \sigma \end{cases}$$

$$(4.11)\quad \begin{cases} \left|\int_t^\infty -B\, e^{(B-\mu I)(t-\tau)-s(t,\tau)}\, \Psi(0)\, G(\tau,W_\tau)d\tau + \right. \\ \left. + \int_t^\infty e^{(B-\mu I)(t-\tau)-s(t,\tau)}\, \Psi(0)\, F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau\right| \leq \\ \leq K_1\gamma_1(t) \sup_{\tau>\sigma} ||W_\tau||_1 \quad , \qquad t \geq \sigma \end{cases}$$

se $W_t \in C'$, $||W_t||_1$ limitada para $t \geq \sigma$.

Se a hipótese (II) é valida, as três primeiras desigualdades em (4.11) são satisfeitas, com $\gamma_2(t)$ em lugar de $\gamma_1(t)$.

Também, cada componente da quarta integral em (4.11), é da forma

$$\int_t^\infty e^{i\nu(t-\tau)-s(t,\tau)}\{\eta[F(\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau))] + \lambda\, G(\tau,W_\tau)\}d\tau$$

para algum vetor η e algum vetor λ e portanto, pela hipótese (II), a quarta desigualdade em (4.11) vale para $K_1 = k\{|\eta|+|\lambda|\}$ e $\gamma_2(t)$ em lugar de $\gamma_1(t)$.

Portanto se (I) ou (II) é satisfeita, as desigualdades (4.9) e (4.10) do lema,valem para uma conveniente escolha das funções $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$,que denotaremos por $\gamma_3(t)$,e para uma constante K, suficientemente grande.

Portanto,o lema 4.2 está provado.

Consideremos agora, o espaço de Banach V das transformações limitadas W de $[\sigma,\infty)$ em C', com valores W_t e com norma N(.) definida por:

$$N(W_t) = \sup_{t\geq\sigma} ||W_t||_1$$

Seja S o sub-conjunto de V tal que:

$$||W_t-\phi_\mu b||_1 \leq ||\phi_\mu b||_1 \{N_1[\gamma_3(t) + \frac{1}{2}\pi(t)] +$$

$$+ N_2 \int_t^\infty [\gamma(\tau)+|\mu|\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)] \; [\gamma_3(\tau) + \frac{1}{2}\pi(\tau)]d\tau \quad \tau \geq \sigma.$$

onde b é um número real qualquer.

Em S, consideremos a topologia uniforme. Para qualquer ε, $0 < \varepsilon < 1$, escolhemos σ suficientemente grande, tal que, para todo $t \geq \sigma$:

$$N_1[\gamma_3(\tau)+ \frac{1}{2}\pi(\tau)]+N_2 \int_\sigma^\infty [\gamma(\tau)+|\mu|\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)] [\gamma_3(\tau)+ \frac{1}{2}\pi(\tau)]d\tau<1-\varepsilon$$

Para $W_t \in S$ e para σ suficientemente grande, temos que:

$$||W_t||_1 - ||\phi_\mu b||_1 \leq ||W_t-\phi_\mu b||_1 < (1-\varepsilon) \; ||\phi_\mu b||_1$$

Assim, temos que:

$$||W_t||_1 <(1-\varepsilon) \; ||\phi_\mu b||_1+||\phi_\mu b||_1 =2 \; ||\phi_\mu b||_1 \; -\varepsilon \; ||\phi_\mu b||_1$$

e portanto,

$$||W_t||_1 < 2 \; ||\phi_\mu b||_1$$

Também, temos que $W_t \to \phi_\mu b$ quando $t \to \infty$.

Em S, definimos o operador U por:

$$(4.12) \quad \begin{cases} \omega_t = (U\,W)_t = \Phi\,\nu(t) + \omega_t^{P_1} + \phi_\mu u(t) + \omega_t^{Q} \\ \nu(t) = \int_\infty^t -B\; e^{(B-\mu I)(t-\tau)-s(t,\tau)}\psi(0)\; G(\tau,W_\tau)d\tau + \\ + \int_\infty^t e^{(B-\mu I)(t-\tau)-s(t,\tau)}\psi(0)\; F[\tau,W_\tau+X_0F(\tau,W_\tau)]d\tau. \\ \omega_t^{P_1} = \int_\infty^t e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}[-d_\tau T(t-\tau)X_0^{P_1}]G(\tau,W_\tau)d\tau + \\ + \int_\infty^t e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}T(t-\tau)X_0^{P_1}\; F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau. \end{cases}$$

$$(4.12)\quad \begin{cases} u(t) = b + \int_{\infty}^{t} \alpha d\, F[\tau, \Phi\nu(\tau)+\omega_{\tau}^{P_1}+\omega_{\tau}^{Q}]d\tau + \\ + \int_{\infty}^{t} \alpha d\{F[\tau, X_0 G(\tau,\Phi\ \nu(\tau)+\omega_{\tau}^{P_1}+\omega_{\tau}^{Q})]+\mu G(\tau,\Phi\nu(\tau)+\omega_{\tau}^{P_1}+\omega_{\tau}^{Q})\}d\tau \\ \omega_t^Q = \int_{\sigma}^{t} e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}[-d_{\tau}T(t-\tau)X_0^Q]G(\tau,W_{\tau}) + \\ + \int_{\sigma}^{t} e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}\ T(t-\tau)X_0^Q\ F[\tau, W_{\tau}+X_0 G(\tau,W_{\tau})]d\tau. \end{cases}$$

Desde que $X_0^{P_1}$ é matriz cujos elementos estão em P_1 e cada elemento de P_1 é da forma Φ_{Λ_1} a, cada elemento de $T(t-\tau)X_0^{P_1}$ é da forma $\Phi_{\Lambda_1}\ e^{B_1(t-\tau)}a$, onde B_1 é matriz cujos auto-valores compreendem os elementos de Λ_1. De (4.4) temos que:

$$||T(t-\tau)X_0^{P_1}|| \leq k.e^{(Re\mu+\beta)(t-\tau)}$$

Também $||-d_{\tau}T(t-\tau)X_0^{P_1}|| = ||-\Phi_{\Lambda_1}B_1\ e^{B_1(t-\tau)}a|| \leq k_3 e^{(Re\ \mu+\beta)(t-\tau)}$

Disto resulta que:

$$||W_t^{P_1}|| \leq \int_{\infty}^{t} k_3\ e^{-Re\ \mu(t-\tau)-Re\ s(t,\tau)}\ e^{(Re\ \mu+\beta)(t-\tau)}\pi(\tau)\ ||W_{\tau}||_1\ d\tau +$$

$$+ \int_{\infty}^{t} k\ e^{-Re\ \mu(t-\tau)-Re\ s(t,\tau)}e^{(Re\ \mu+\beta)(t-\tau)}[\gamma(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]\ \ ||W_{\tau}||_1 d\tau \leq$$

$$\leq k\{\int_{\infty}^{t} e^{\beta(t-\tau)-Re\ s(t,\tau)}[\gamma(\tau)+\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau\}\ \sup_{\tau\geq\sigma}||W_{\tau}||_1$$

para k suficientemente grande. Do Lema 4.2, resulta que:

$$||W_t^{P_1}|| \leq K\ \gamma_3(t)\ \sup_{\tau>\sigma}\ ||W_{\tau}||_1 \quad , \qquad t \geq \sigma$$

Devemos provar, também que $\omega_t^{P_1}$ está na classe C'. Temos que:

$$|\omega_t^{P_1}(\theta_1)-\omega_t^{P_1}(\theta_2)| = |\int_\infty^t e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}\{-d_\tau[T(t-\tau)X_0^{P_1}(\theta_1) -$$

$$- T(t-\tau)X_0^{P_1}(\theta_2)]\}G(\tau,W_\tau) + \int_\infty^t e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}\{T(t-\tau)X_0^{P_1}(\theta_1) -$$

$$- T(t-\tau)X_0^{P_1}(\theta_2)\}\ F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau|$$

Do lema 4.1, obtemos que:

$$|T(t-\tau)X_0^{P_1}(\theta_1)-T(t-\tau)X_0^{P_1}(\theta_2)| \leq k_2\ e^{(\mathrm{Re}\ \mu+\beta)(t-\tau)}|\theta_1-\theta_2|$$

Também, como os elementos de $T(t-\tau)X_0^{P_1}$ são da forma $\Phi_{\Lambda_1}\ e^{B_1(t-\tau)}.a$, do lema 4.1, temos que:

$$|d_\tau[T(t-\tau)X_0^{P_1}(\theta_1)-T(t-\tau)X_0^{P_1}(\theta_2)]| \leq k_4\ e^{(\mathrm{Re}\ \mu+\beta)(t-\tau)}|\theta_1-\theta_2|$$

Portanto, para K suficientemente grande, temos que:

$$|W_t^{P_1}(\theta_1)- \omega_t^{P_1}(\theta_2)| \leq K\ \gamma_3(t) \sup_{\tau>\sigma} ||W_\tau||_1\ |\theta_1-\theta_2| \quad t\geq\sigma$$

Concluimos, portanto, que:

$$||W_t^{P_1}||_1 \leq K\ \gamma_3(t) \sup_{\tau>\sigma} ||W_\tau||_1 \qquad t \geq \sigma. \tag{4.13}$$

Sabemos que [16,pg.31] se $g(x)$ e $f(x)$ são funções contínuas em $[a,b]$, $\alpha(x)$ de variação limitada, então

$$\int_a^b g(x)\ f(x)d\alpha(x) = \int_a^b g(x)\ d\beta(x)$$

onde $\beta(x) = \int_a^x f(t)\ d\alpha(t) \qquad a \leq x \leq b.$

Usando esse resultado, se Vf é a variação de f, temos que:

$$|\int_\sigma^t e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}[-d_\tau T(t-\tau)X_0^Q]G(\tau,W_\tau)| =$$

$$= |\int_\sigma^t e^{-s(t,x)}\{d_x\int_\sigma^x e^{-\mu(t-\tau)}[-d_\tau T(t-\tau)X_0^Q]\}G(x,W_x)| \leq$$

$$\leq \int_\sigma^t |e^{-s(t,x)}|d_x\{V\int_\sigma^x e^{-\mu(t-\tau)}[-d_\tau T(t-\tau)X_0^Q]\}|G(x,W_x)|\leq$$

Carlos-SP

$$\leq k_3 \{V \int_\sigma^t e^{-\mu(t-\tau)} [-d_\tau T(t-\tau)X_0^Q]\} \; |G(\xi,W_\xi)| \leq$$

$$\leq k_3 \{ \int_\sigma^t |e^{-\mu(t-\tau)}| \; |-d_\tau T(t-\tau)X_0^Q|\} \; \pi(\xi) \sup_{\tau\geq\sigma} ||W_\tau||_1 =$$

$$= k_3 \{\int_\sigma^t e^{-\mathrm{Re}\,\mu(t-\tau)} |d_\tau T(t-\tau)X_0^Q|\}\pi(\xi) \sup_{\tau>\sigma} ||W_\tau||_1 =$$

$$= k_3 \{\int_0^{t-\sigma} e^{(-\mathrm{Re}\mu)u} \; |d_\mu T(u)X_0^Q|\} \; \pi(\xi) \sup_{\tau>\sigma} ||W_\tau||_1 =$$

$$= k_3\{\int_0^{t-\sigma} e^{-\beta\mu} \; |d_\mu T(u)X_0^Q| \; e^{-(\mathrm{Re}\,\mu-\beta)u}\}\pi(\xi) \sup_{\tau\geq\sigma} ||W_\tau||_1 \leq$$

$$\leq k_3\{\int_0^\infty e^{-\beta u} |d_\mu T(u)X_0^Q| e^{-(\mathrm{Re}\,\mu-\beta)u}\}\pi(\xi) \sup_{\tau>\sigma} ||W_\tau||_1 \leq$$

$$\leq k_3 \, M \, \pi(\xi) \sup_{\tau\geq\sigma} ||W_\tau||_1$$

onde ξ está em $[\sigma,t]$. Podemos mostrar que se $\pi(t)$ é limitada em $[0,\infty)$, com derivada $\pi'(t)$ contínua, $|\pi'(t)| > 0$ em $[0,\infty)$, se $\sigma\leq\xi_t\leq t$ para cada $t > 0$. então $\xi_t \to \infty$ quando $t \to \infty$. Assim, concluimos que:

$$|\int_\sigma^t e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)} [-d_\tau T(t-\tau)X_0^Q] G(\tau,W_\tau)| \leq K \, \pi(t) \sup_{\tau>\sigma} ||W_\tau||_1$$

Também, temos que:

$$|\int_\sigma^t e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)} \; T(t-\tau)X_0^Q \; F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau| \leq$$

$$\leq \int_\sigma^t e^{-\mathrm{Re}\,\mu(t-\tau)-\mathrm{Re}\,s(t,\tau)} \; ||T(t-\tau)X_0^Q|| \; |F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]|d\tau \leq$$

$$\leq k_4 \sup_{\tau\geq\sigma} ||W_\tau||_1 \int_\sigma^t e^{-\beta(t-\tau)-\mathrm{Re}\,s(t,\tau)} [\gamma(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau.$$

Do lema 4.2, temos que:

$$|\int_\sigma^t e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)} T(t-\tau)X_0^Q \; F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau| \leq K \; \gamma_3(t) \sup_{\tau>\sigma} ||W_\tau||_1 .$$

Portanto, concluimos que:

$$||\omega_t^Q|| \leq K\,\pi(t) \sup_{\tau>\sigma} ||W_\tau||_1 + K\,\gamma_3(t) \sup_{\tau>\sigma} ||W_\tau||_1 =$$

$$= K[\pi(t)+\gamma_3(t)] \sup_{\tau>\sigma} ||W_\tau||_1 \qquad t \geq \sigma.$$

Devemos mostrar que ω_t^Q também está na classe C'.

$$\omega_t^Q(\theta_1) - \omega_t^Q(\theta_2) = \int_\sigma^t e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}\{-d_\tau[T(t-\tau)X_0^Q(\theta_1) -$$

$$- T(t-\tau)X_0^Q(\theta_2)]\}G(\tau,W_\tau) + \int_\sigma^t e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}[T(t-\tau)X_0^Q(\theta_1) -$$

$$- T(t-\tau)X_0^Q(\theta_2)]\; F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau$$

Suponhamos que $\theta_2 < \theta_1$. Decompomos a segunda integral do segundo membro da igualdade acima na soma das três integrais I_1, I_2 e I_3, onde I_1 é a integral de $t+\theta_1$ a t, I_2 a integral de $t+\theta_2$ a $t+\theta_1$ e I_3 a integral de σ a $t+\theta_2$.

Observamos que se $t+\theta_1 < \sigma$ (portanto $t+\theta_2<t+\theta_1<\sigma$) tomamos I_1 como a integral de σ a t, $I_2 = I_3 = 0$. Se $t+\theta_2<\sigma<t+\theta_1$ tomamos I_2 como a integral de σ a $t+\theta_1$ e $I_3=0$. Nestes casos, o raciocínio que faremos a seguir, se aplica com pequenas modificações.

Desde que $X_0^Q(\theta) = 0$ para $-r \leq \theta < 0$ e $X_0^Q(\theta) = I$, e como $T(t-\tau)X_0^Q(\theta) = X_0^Q(t-\tau+\theta)$ em I_1 temos $t + \theta_1 < \tau < t$, o que implica $t - \tau + \theta_1 < 0$ e, portanto, $t - \tau + \theta_2 < t - \tau + \theta_1 < 0$. Logo $I_1 = 0$.

Em I_3, temos $\sigma \leq \tau \leq t + \theta_2$ e, portanto, $t-\tau+\theta_1 > t-\tau+\theta_2 \geq 0$. Dos lemas 4.1 e 4.2 resulta que:

$$|I_3| \leq \int_{\sigma}^{t+\theta_2} e^{-\mathrm{Re}\,\mu(t-\tau)-\mathrm{Re}\,s(t,\tau)} \; |T(t-\tau)X_0^Q(\theta_1) -$$

$$- T(t-\tau)X_0^Q(\theta_2)| \; |F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]|d\tau \leq$$

$$\leq k.\sup_{\tau>\sigma} ||W_\tau||_1 \, |\theta_1-\theta_2| \int_{\sigma}^{t+\theta_2} e^{\mathrm{Re}\,\mu(t-\tau)-\mathrm{Re}\,s(t,\tau)} e^{(\mathrm{Re}\mu-\beta)(t-\tau)} g(\tau)d\tau$$

$$\leq K_2 \sup_{\tau\geq\sigma} ||W_\tau||_1 \, |\theta_1-\theta_2| \int_{\sigma}^{t} e^{-\beta(t-\tau)-\mathrm{Re}\,s(t,\tau)} g(\tau)d\tau \leq$$

$$\leq K_2 \, \gamma_3(\tau) \sup_{\tau>\sigma} ||W_\tau||_1 \; |\theta_1-\theta_2|.$$

onde $g(t) = \gamma(t)+\gamma(t)\pi(t)$.

Em I_2, temos $t + \theta_2 < \tau \leq t + \theta_1$, o que implica $t-\tau+\theta_1>0$ e $t-\tau+\theta_2<0$. Logo, $T(t-\tau)X_0^Q(\theta_2)=0$. Dos lemas 4.1 e 4.2, resulta que:

$$|I_2| \leq \left|\int_{t+\theta_2}^{t+\theta_1} e^{-\mathrm{Re}\,\mu(t-\tau)-\mathrm{Re}\,s(t,\tau)} |T(t-\tau)X_0^Q(\theta_1)| \, |F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau\right| \leq$$

$$\leq k\left|\int_{t+\theta_2}^{t+\theta_1} e^{-\beta(t-\tau)-\mathrm{Re}\,s(t,\tau)} [\gamma(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]d\tau\right| \leq K_3 \, \gamma_3(t) \sup_{\tau>\sigma} ||W_\tau||_1 |\theta_1-\theta_2|.$$

Para K suficientemente grande, concluímos que:

$$\left|\int_{\sigma}^{t} e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)} [T(t-\tau)X^Q(\theta_1)-T(t-\tau)X_0^Q(\theta_2)] F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau\right| \leq$$

$$\leq 2K \, \gamma_3(t) \sup_{\tau\geq\sigma} ||W_\tau||_1 \; |\theta_1-\theta_2| \, .$$

Consideremos agora, a primeira integral do segundo membro de $\omega_t^Q(\theta_1) - \omega_t^Q(\theta_2)$.

$$\left|\int_{\sigma}^{t} e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)} \{-d_\tau [T(t-\tau)X_0^Q(\theta_1)-T(t-\tau)X_0^Q(\theta_2)]\} G(\tau,W_\tau)\right| =$$

$$= \left|\int_{\sigma}^{t} e^{-s(t,x)} \{d_x \int_{\sigma}^{x} e^{-\mu(t-\tau)} [-d_\tau (T(t-\tau)X_0^Q(\theta_1)-T(t-\tau)X_0^Q(\theta_2))]\} G(x,W_x)\right| \leq$$

$$\leq K_3 \{V\int_\sigma^t e^{-\mu(t-\tau)}[-d_\tau(T(t-\tau)X_0^Q(\theta_1)-T(t-\tau)X_0^Q(\theta_2))]\}|G(x,W_x)|\leq$$

$$\leq K_3 \{V\int_\sigma^t e^{-\mu(t-\tau)}[-d_\tau(T(t-\tau)X_0^Q(\theta_1)-T(t-\tau)X_0^Q(\theta_2))]\}|G(\xi,W_\xi)|\leq$$

$$\leq K_3\{\int_\sigma |e^{-\mu(t-\tau)}|\ |d_\tau[T(t-\tau)X_0^Q(\theta_1)-T(t-\tau)X_0^Q(\theta_2)]|\}\ \pi(\xi)\ ||W_\xi||_1 \leq$$

$$\leq K_3\{\int_\sigma^t e^{-Re\ \mu(t-\tau)}|d_\tau[T(t-\tau(X_0^Q(\theta_1)-T(t-\tau)X_0^Q(\theta_2)]|\}\ \pi(\xi)\ \sup_{\tau\geq\sigma}\ ||W_\xi||_1 =$$

$$= K_3\{\int_0^{t-\sigma} e^{(-Re\ \mu)u}|d_\mu[T(u)X_0^Q(\theta_1)-T(u)X_0^Q(\theta_2)|\}\ \pi(\xi)\ \sup_{\tau>\sigma}\ ||W_\tau||_1 \leq$$

$$\leq K_3\{\int_0^\infty e^{-\beta u}\ |d_\mu[T(u)X_0^Q(\theta_1)-T(u)X_0^Q(\theta_2)|e^{-(Re\ \mu-\beta)u}\}\pi(\xi)\ \sup_{\tau\geq\sigma}||W_\tau||_1 \leq$$

$$\leq k_3\ M\ \pi(\xi)\ \sup_{\tau\geq\sigma}||W_\tau||_1\ \ |\theta_1-\theta_2|\ .$$

Logo, temos que:

$$|\int_\sigma^t e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}\{-d_\tau[T(t-\tau)X_0^Q(\theta_1)-T(t-\tau)X_0^Q(\theta_2)]\}G(\tau,W_\tau)|\leq$$

$$\leq 2K\ \pi(t)\ \sup_{\tau\geq\sigma}\ ||W_\tau||_1\ \ |\theta_1-\theta_2|$$

Assim, concluimos que:

$$|\omega_t^Q(\theta_1)-\omega_t^Q(\theta_2)| \leq 2K\ \gamma_3(t)\ \sup_{\tau\geq\sigma}\ ||W_\tau||_1\ \ |\theta_1-\theta_2| +$$

$$+2K\ \pi(t)\ \sup_{\tau\geq\sigma}\ ||W_\tau||_1\ \ |\theta_1-\theta_2| = 2K[\gamma_3(t)+\pi(t)]\sup_{\tau>\sigma}||W_\tau||_1\ \ |\theta_1-\theta_2|$$

e portanto,

$$(4.14)\qquad ||\omega_\tau^Q||_1 \leq 2K[\pi(t)+\gamma_3(t)]\ \sup_{\tau>\sigma}\ ||W_\tau||_1\ ,\ t\geq\sigma.$$

De (4.12), temos que:

$$\nu(t) = \int_{\infty}^{t} -B\, e^{(B-\mu I)(t-\tau)-s(t,\tau)}\ \Psi(0)\ G(\tau,W_\tau)d\tau +$$

$$+ \int_{\infty}^{t} e^{(B-\mu I)(t-\tau)-s(t,\tau)}\ \Psi(0)\ F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]d\tau$$

Do lema 4.2, temos que:

$$|\nu(t)| \leq K_1\ \gamma_3(t) \sup_{\tau\geq\sigma} \|W_\tau\|_1 \qquad t \geq \sigma,\ W_t \in S.$$

Além disso, como Φ é uma base para P_0, existe k tal que $\|\Phi\|_1 \leq k$. Logo, para K suficientemente grande, temos que:

$$\|\Phi\ \nu(t)\|_1 \leq K\ \gamma_3(t) \sup_{\tau\geq\sigma} \|W_\tau\|_1 \qquad t \geq \sigma. \tag{4.15}$$

De (4.13), (4.14) e (4.15), concluimos que:

$$\|\omega_t^{P_1} + \omega_t^Q + \Phi\ \nu(t)\|_1 \leq K\ \gamma_3(t) \sup_{\tau\geq\sigma} \|W_\tau\|_1 +$$

$$+ 2K\ [\pi(t) + \gamma_3(t)] \sup_{\tau\geq\sigma} \|W_\tau\|_1 + K\ \gamma_3(t) \sup_{\tau\geq\sigma} \|W_\tau\|_1 =$$

$$= 4K\ [\gamma_3(t) + \tfrac{1}{2}\ \pi(t)] \sup_{\tau\geq\sigma} \|W_\tau\|_1 \qquad t \geq \sigma.$$

isto é, $\Phi\ \nu(\tau) + \omega_\tau^{P_1} + \omega_\tau^Q$ está na classe C', para cada τ.

Portanto, temos que

$$|\alpha d\int_{\infty}^{t} \{F[\tau,\Phi\nu(\tau)+\omega_\tau^{P_1}+\omega_\tau^Q]+\mu G(\tau,\Phi\nu(\tau)+\omega_\tau^{P_1}+\omega_\tau^Q)\}d\tau +$$

$$+ \int_{\infty}^{t} \alpha d\ F[\tau,X_0G(\tau,\Phi\nu(\tau)+\omega_\tau^{P_1}+\omega_\tau^Q)]d\tau| \leq$$

$$\leq |\alpha d| \int_{\infty}^{t} [\gamma(\tau)+|\mu|\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]\ \|\Phi v(\tau)\omega_\tau^Q+\omega_\tau^{P_1}\|_1\ d\tau \leq$$

$$\leq |\alpha d|\ 4K \sup_{\tau\geq\sigma} \|W_\tau\|_1 \int_{\infty}^{t} [\gamma(\tau)+|\mu|\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]\ [\gamma_3(\tau)+\tfrac{1}{2}\ \pi(\tau)]d\tau$$

para todo $t \geq \sigma$ e qualquer W_t em S.

Vamos, agora, obter uma limitação para $\|\omega_t-\phi_\mu\|_1$.

$$\|\omega_t-\phi_\mu b\|_1 = \|\Phi\ \nu(t)+\omega_t^{P_1}+\omega_t^Q+\phi_\mu u(t)-\phi_\mu b\|_1 =$$

$$= \|\Phi\ \nu(t)+\omega_t^{P_1}+\omega_t^Q+\phi_\mu\{b+\int_\infty^t \alpha d\ F[\tau,\Phi\ \nu(\tau)+\omega_\tau^{P_1}+\omega_\tau^Q]d\tau +$$

$$+ \int_\infty^t \alpha d\{\mu G(\tau,\Phi\ \nu(\tau)+\omega_\tau^{P_1}+\omega_\tau^Q)+F[\tau,X_0G(\tau,\Phi\ \nu(\tau)+\omega_\tau^{P_1}+\omega_\tau^Q]\}d\tau -$$

$$- \phi_\mu\ b\|_1 \leq \|\Phi\ \nu(t)+\omega_t^{P_1}+\omega_t^Q\|_1 + \|\phi_\mu\|_1\ |\alpha d|\ \int_\infty^t |F(\tau,\Phi\ \nu(\tau)+\omega_\tau^{P_1}+\omega_\tau^Q)|d\tau+$$

$$+ \|\phi_\mu\|_1\ |\alpha d|\ \int_\infty^t \{|\mu|\,|G(\tau,\Phi\ \nu(\tau)+\omega_\tau^{P_1}+\omega_\tau^Q)|+|F[\tau,X_0G(\tau,\Phi\ \nu(\tau)+\omega_\tau^{P_1}+\omega_\tau^Q)]|\}d\tau\leq$$

$$\leq 4K\ [\gamma_3(t)+\frac{1}{2}\pi(t)]\ \sup_{\tau\geq\sigma}\ \|W_\tau\|_1 +$$

$$+ 4K\ \|\phi_\mu\|_1\ |\alpha d|\ \sup_{\tau\geq\sigma}\ \|W_\tau\|_\tau\ \int_\infty^t [\gamma(\tau)+|\mu|\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]\ [\gamma_3(\tau)+\frac{1}{2}\pi(\tau)]d\tau.$$

Desde que $\sup_{\tau\geq\sigma}\ \|W_\tau\|_1 \leq\ 2\ \|\phi_\mu b\|_1$, temos que:

$$\|\omega_t-\phi_\mu b\|_1 \leq 8K[\gamma_3(t)+\frac{1}{2}\pi(t)]\ \ \|\phi_\mu b\|_1 +$$

$$+8K|\alpha d|\ \ \|\phi_\mu\|_1\ \ \|\phi_\mu b\|_1 \int_\infty^t [\gamma(\tau)+|\mu|\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]\,[\gamma_3(\tau)+\frac{1}{2}\pi(\tau)]d\tau$$

Portanto, para σ suficientemente grande, temos:

$$\|\omega_t-\phi_\mu b\|_1 \leq N_1\ \ \|\phi_\mu b\|_1\ [\gamma_3(t)+\frac{1}{2}\pi(t)] +$$

$$+ N_2\ \|\phi_\mu b\|_1 \int_\infty^t [\gamma(\tau)+|\mu|\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]\ [\gamma_3(\tau)+\frac{1}{2}\pi(\tau)]d\tau$$

onde $N_1 = 8K$, $N_2 = 8K|\alpha d|\ \ \|\phi_\mu\|_1$, o que prova que U leva S em S.

Também desde que U é linear e limitado resulta que U é contínuo.

Finalmente, vamos mostrar que U é uma contração. Suponhamos que W_t e V_t estão em S. Sejam:

$$\omega_t = U\ W_t = \Phi\ \nu(t) + \omega^{P_1} + \phi_\mu u(t) + \omega_t^Q \qquad t \geq \sigma$$

$$\Omega_t = U\ V_t = \Phi\ \rho(t) + \Omega_t^{P_1} + \phi_\mu\ v(t) + \Omega_t^Q \qquad t \geq \sigma$$

onde

$$\rho(t) = \int_\infty^t -B\ e^{(B-\mu I)(t-\tau)-s(t,\tau)}\psi(0)\ G(\tau,V_\tau)d\tau +$$

$$+ \int_\infty^t e^{(B-\mu I)(t-\tau)-s(t,\tau)}\ \psi(0)\ F[\tau,V_\tau+X_0G(\tau,V_\tau)]d\tau$$

$$\Omega_t^{P_1} = \int_\infty^t e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}[-d_\tau T(t-\tau)X_0^{P_1}]G(\tau,V_\tau) +$$

$$+ \int_\infty^t e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}\ T(t-\tau)X_0^{P_1}\ F[\tau,V_\tau+X_0G(\tau,V_\tau)]d\tau$$

$$\Omega_t^Q = \int_\sigma^t e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}[-d_\tau T(t-\tau)X_0^Q]\ G(\tau,V_\tau) +$$

$$+ \int_\sigma^t e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}T(t-\tau)X_0^Q\ F[\tau,V_\tau+X_0G(\tau,V_\tau)]d\tau$$

$$v(t) = b + \alpha d \int_\infty^t \{F[\tau,\Phi\ \rho(\tau)+\Omega_\tau^{P_1}+\Omega_\tau^Q]+\mu\ G(\tau,\Phi\ \rho(\tau)+\Omega_\tau^{P_1}+\Omega_\tau^Q)\}d\tau+$$

$$+ \alpha d \int_\infty^t F[\tau,X_0G(\tau,\Phi\rho(\tau)+\Omega_\tau^{P_1}+\Omega_\tau^Q)]d\tau.$$

Assim, temos que:

$$||\omega_t-\Omega_t||_1 \leq ||\Phi\ \nu(\tau) - \Phi\ \rho(t)||_1 + ||\omega_t^{P_1}-\Omega_t^Q||_1 +$$

$$+ ||\phi_\mu||_1\ |\mu(t)-v(t)| + ||\omega_t^Q-\Omega_t^Q||_1$$

$$||\omega_t^{P_1}-\Omega_t^{P_1}||_1 = |\int_\infty^t e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}[-d_\tau T(t-\tau)X_0^{P_1}]\ [G(\tau,W_\tau)-G(\tau,V_\tau)]+$$

$$+ \int_\infty^t e^{-\mu(t-\tau)-s(t,\tau)}T(t-\tau)X_0^{P_1}\ \{F[\tau,W_\tau+X_0G(\tau,W_\tau)]-$$

$$-F[\tau,V_\tau+X_0G(\tau,V_\tau)]\}d\tau|$$

Da linearidade de $F(t,\phi)$ e $G(t,\phi)$, temos que:

$$F(t,W_t) - F(t,V_t) = F(t,W_t-V_t)$$

$$G(t,W_t) - G(t,V_t) = G(t,W_t-V_t)$$

Assim, se W_t e V_t e C', então $W_t-V_t \in C'$.

Pela hipótese (3.7) temos que: para todo $t \geq \sigma$:

$$|F[\tau,(W_\tau-V_\tau) + X_0G(\tau,W_\tau-V_\tau)]| \leq [\gamma(\tau) + \gamma(\tau)\pi(\tau)] \quad ||W_\tau-V_\tau||_1$$

Também:

$$|G(\tau,W_\tau-V_\tau)| \leq \pi(\tau) \quad ||W_\tau-V_\tau||_1$$

Assim, concluimos que, para todo $t \geq \sigma$:

$$||\omega_t^{P_1}-\Omega_t^{P_1}||_1 \leq K\ \gamma_3(t) \sup_{\tau\geq\sigma} ||W_\tau-V_\tau||_1 = K\ \gamma_3(t)N(W_\tau-V_\tau)$$

Analogamente, obtemos que:

$$||\omega_t^{Q}-\Omega_t^{Q}||_1 \leq 2K[\gamma_3(t)+\pi(t)] \sup_{\tau\geq\sigma} ||W_\tau-V_\tau||_1 = 2K\ [\gamma_3(t)+\pi(t)]N(W_\tau-V_\tau).$$

e, também,

$$||\Phi\ \nu(t)-\Phi\ \rho(t)||_1 \leq K\ \gamma_3(t)\sup_{\tau\geq\sigma} ||W_\tau-V_\tau||_1 = K\ \gamma_3(t)\ N(W_\tau-V_\tau)$$

Portanto, concluimos que $\phi\ \nu(t) - \Phi\ \rho(t) + \omega_t^{P_1} - \Omega_t^{P_1} + \omega_t^{Q} - \Omega_t^{Q}$

está na classe C' e, assim:

$$|\mu(t)-v(t)| \leq 4K|\alpha d|\sup_{\tau\geq\sigma} ||W_\tau-V_\tau||_1 \int_\infty^t [\gamma(\tau)+|\mu|\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]\ [\gamma_3(\tau)+\tfrac{1}{2}\pi(\tau)]d\tau =$$

$$= 4K|\alpha d|N(W_\tau-V_\tau)\int_\infty^t [\gamma(\tau)+|\mu|\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]\ [\gamma_3(\tau)+\tfrac{1}{2}\pi(\tau)]d\tau$$

Dos resultados acima resulta que:

$$||\omega_t-\Omega_t||_1 \leq 2K\ \gamma_3(t)N(W_t-V_t) + 2K\ [\gamma_3(t)+\pi(t)]N(W_t-V_t) +$$

$$+ 4K\ |\alpha d|\ \ ||\phi_\mu||_1\ N(W_t-V_t) \int_\infty^t [\gamma(\tau)+|\mu|\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]\ [\gamma_3(\tau)+\tfrac{1}{2}\pi(\tau)]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\{N_2 \int_{\infty}^{t} [\gamma(\tau)+|\mu|\pi(\tau)+\gamma(\tau)\pi(\tau)]\ [\gamma_3(\tau)+\frac{1}{2}\pi(\tau)]d\tau +$$

$$+ N_1\ [\gamma_3(t)+\frac{1}{2}\pi(t)]\}\ N(W_t-V_t) \leq \frac{1}{2}(1-\varepsilon)N(W_t-V_t)$$

para quaisquer W, V em S. Desde que $0 < \varepsilon < 1$, concluimos que V é uma contração em S.

Consequentemente, existe um único ponto fixo W_t em S e essa função W_t nos dá uma solução de (4.11). A função x_t definida por:

$$(4.16) \qquad x_t = z_t + X_0G(t,z_t) = [W_t + X_0G(t,W_t)]\ e^{\mu(t-\sigma)+s(t,\sigma)}$$

é uma solução de $\frac{d}{dt}[D(x_t)-G(t,x_t)] = L(x_t) + F(t,x_t)$ e como $W_t \varepsilon S$, resulta que $W_t = \phi_\mu b + o(1)$. Façamos $W_t = \phi_\mu(0)b\ [1+o(1)] =$ $= c.b\ [1+o(1)]$. De(4.16) temos, que:

$$\frac{||x_t||_1}{|e^{u(t-\sigma)+s(t,\sigma)}|} \leq ||W_t||_1 + p.\pi(t)\ ||W_t||_1 = [1+p\pi(t)]\ ||W_t||_1 =$$

$$= [1+p\pi(t)]cb\ [1+o(1)] =$$

Como $\lim_{t\to\infty} \pi(t) = 0$, concluimos que:

$$x(t) = [cb+o(1)]\ e^{\mu(t-\sigma)-s(t,\sigma)}, \text{ quando } t \to \infty .$$

O teorema está provado.

Exemplo: Como aplicação do teorema 4.1, consideremos um caso particular de (2.3). Seja a equação

$$(4.17) \qquad \frac{d}{dt}\{x(t)-a_0x(t-r)-a(t)[x(t)-x(t-r(t))]\} = -b_0x(t) -$$

$$-c_0x(t-r) - b(t)[x(t)-x(t-r(t))]$$

onde a_0, b_0 e c_0 são constantes, a(t) e b(t) contínuas para $t \geq 0$, r(t) contínua, $0 \leq r(t) \leq r$, $r \geq 0$.

A equação autonoma associada a (4.17) é:

$$(4.18) \qquad \frac{d}{dt}\left[x(t)-a_0t(t-r)\right] = -b_0x(t) - c_0x(t-r).$$

Para a equação (4.17), temos que:

$L(\phi) = -b_0\phi(0) - c_0\phi(-r)$

$D(\phi) = \phi(0) - a_0\phi(-r)$

$F(t,\phi) = -b(t)\left[\phi(0)-\phi(-r(t))\right]$

$G(t,\phi) = a(t)\left[\phi(0)-\phi(-r(t))\right]$

$\Delta(\lambda) = \lambda-a_0\lambda e^{-\lambda r} + b_0 + c_0e^{-\lambda r}$

$\phi_\mu(\theta) = e^{\mu\theta} \quad -r \leq \theta \leq 0$

$\Psi_\mu(\tau) = e^{-\mu\tau} \quad 0 \leq \tau \leq r$

$\gamma(t) = |b(t)|$

$\pi(t) = |a(t)|$

Se $\int^{\infty} |a(t)|dt < \infty$, $\int^{\infty} |b(t)|dt < \infty$, $\lim_{t\to\infty} a(t) = 0$ e se μ é uma raiz simples de $\det\Delta(\lambda) = 0$ e todas as outras raízes com partes iguais à parte real de μ são raízes simples, então existe uma solução de (4.17) de forma

$$(4.19) \qquad x(t) = e^{\mu(t-\sigma)+s(t,\sigma)}\left[a+o(1)\right] \quad \text{quando } t \to \infty.$$

A conclusão (4.19) também é válida se $\gamma(t)$ e $\pi(t)$ satisfazem a hipótese (II) do teorema 4.1.

BIBLIOGRAFIA

1 - Bellman, R. and Cooke, K.L. - "Asymptotic behavior of Solutions of Differential - Difference Equations" - Mem.Amer. Math.Soc., Nº 35, (1959).

2 - Cooke, K.L. - "Linear Functional Differential Equations of Asymptotically Autonomous Type" - Jour. Dif. Eqs., 7, (1970), 154-174.

3 - Cruz, M.A. and Hale, J.K. - "Exponential Estimates and the Sadle point Theorem for Neutral Functional Equations" - Jour. Math. Anal. Appl., Vol. 34, nº 2, (1971).

4 - Hale, J.K. and Meyer, A. - "A Class of Functional Equations of Neutral Type" - Mem. Amer. Math. Soc., Nº 76, (1967).

5 - Hale, J.K. and Cruz, M.A. - "Existence, Uniqueness and Continuous Dependence for Hereditary Systems" - Annal. Mat. Pura Appl., Serie IX, Tomo LXXXV, (1970).

6 - Hale, J.K. - "Critical Cases for Neutral Functional Differential Equations", Jour. Dif. Eqs. 10, (1971).

7 - Hale, J.K. - "Linear Functional Differential Equations with Constant Coefficients" - Contr. Dif. Eqs., 2, (1963), 291-317.

8 - Hale, J.K. - "Linear Asymptotically Autonomous Functional Differential Equations" - Rend. Circ. Mat. Palermo, (2), 15, (1966), 331-351.

9 - Hale, J.K. - "Functional Differential Equations of Retarded Type" - Publicação do 7º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, (1969).

10 - Hale, J.K. - "Lectures Notes on Functional Differential Equations", Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, (1971).

11 - Hale, J.K. and Cruz, M.A. - "Asymptotic Behavior of Neutral Functional Differential Equations" - Arch. Rat. Mech.Ana.,Vol. 34, Nº 5, (1969), 331-353.

12 - Henry, D. - "Linear Autonomous Neutral Functional Differential Equations in the Sobolev Space $W_2^{(1)}$". A aparecer.

13 - Henry, D. - "Linear Autonomous Neutral Functional Differential Equations". A aparecer.

14 - Izé, A.F. - "Linear Functional Differential Equations of Neutral Type Asymptotically Autonomous". A aparecer.

15 - Shimanov, S.N. - "On the Theory of Linear Differential Equations with Hereditary Effects" - (Russian), Differentialnie Travneiya, 1 (1965), 106-116.

16 - Smirnov, V.I. - "A course of Higher Mathematics" - Vol.V, Pergamon Press, (1964).