I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

# SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES INTEGRO-DIFERENCIAIS

Marielza Jorge Favaro

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO

BRASIL

# SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES INTEGRO-DIFERENCIAIS

Marielza Jorge Favaro

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

Orientador: Dr. Odelar Leite Linhares

São Carlos
1977

Ao Luiz

## Agradecimentos

Ao Prof. Dr. James T. Day por ter sugerido os problemas estudados neste trabalho, pela amizade e dedicada orientação durante meu estágio junto ao Departamento de Computação da Pennsylvania State University.

Ao Prof. Dr. Odelar Leite Linhares pela orientação dispensada desde o início de meus estudos na área de Análise Numérica, pelas valiosas sugestões, colaboração e empenho decisivos à conclusão deste trabalho.

Aos Professores D. Lourdes De La Rosa Onuchic e Dr. Nelson Onuchic meus especiais agradecimentos pela confiança, incentivo e pelo muito que me ensinaram.

Aos colegas do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, pela amizade.

A D. Hilda Bruno, pelo excelente trabalho de datilografia.

## INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é desenvolver e analisar métodos para determinar a solução numérica da equação íntegro-diferencial

$$\begin{cases} y^{(v)}(x) = F(x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(v-1)}(x), z(x)) \\ y^{(i)}(a) = y_0^{(i)} \quad ; i = 0, 1, \dots, v-1 \end{cases} \tag{1}$$

onde

$$z(x) = \int_a^x K(x, y(x), \dots, y^{(v-1)}(x), t, y(t), \dots, y^{(v)}(t))\, dt$$

Os algoritmos a serem discutidos para calcular numericamente a solução $y(x)$ de (1) são métodos de discretização, isto é, determinam uma solução aproximada não sobre o intervalo contínuo $a \le x \le b$, mas sobre um conjunto discreto de pontos $\{x_n | n=0,1,\dots,N\}$.

Em anos recentes tem havido muito interesse neste tipo de problema. A seguir destacaremos alguns resultados importantes nesta direção.

Pouzet [16] considera a equação

$$\begin{cases} y^{(v)}(x) = F(x, y(x), \dots, y^{(v-1)}(x)) + \int_a^x K(x, s, y(s), \dots, y^{(v)}(s))\, ds \\ y^{(i)}(a) = y_0^{(i)} \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, v-1 \quad ; \quad x \ge a \end{cases} \tag{2}$$

e desenvolve fórmulas do tipo Runge-Kutta para resolver numericamente (2) e obtém algoritmos especiais para o caso $v=1$.

A equação (2) onde o integrando agora é da forma $K(x, y(x), \dots, y^{(v-1)}(x), s, y(s), \dots, y^{(v)}(s))$, tem sido estudada por A. Goldfine [7], [8] Integrando v vezes a equação considerada e empregando regras de integração numérica, constrói diferentes algoritmos. Para o caso $v=0$, ou seja

$$y(x) = F(x) + \int_a^x K(x,s,y(s))\, ds \tag{3}$$

define um método de um passo para o qual consegue a fórmula assintótica do erro de truncamento.

A equação

$$y^{(1)}(x) = F(x,y(x), \int_a^x K(x,t,y(t))\, dt) \tag{4}$$

tem sido discutida em vários trabalhos. Linz [15] considera a equação (4) e generaliza a clássica teoria da convergência de métodos de passo múltiplo para equações diferenciais ordinárias, a qual tem sido estudada em grande detalhe em [9] e [14]. P. Linz prova que um método de passo múltiplo consistente e estável é convergente. Os autores H. Brunner e J.D.Lambert em [1] examinam a ordem dos algoritmos propostos em [15], incluindo uma discussão de métodos para fornecer valores iniciais.

Em uma série de trabalhos, J.T.Day desenvolve métodos que fornecem valores iniciais para equações do tipo (3) e que são úteis em diversas circunstâncias. Usando as fórmulas de Newton -Cotes de um modo conveniente, o autor em [4] determina um algoritmo da $O(h^5)$ que funciona como um predictor para o método Gregory-Newton [10]. Em continuação a este estudo G.Campbell e J.T.Day em [2] conseguem construir um método de $O(h^7)$ no papel de predictor com vantagem sobre o de [4].

J.T.Day em [6] dá um método da $O(h^4)$ que fornece valores iniciais para algoritmos de passo múltiplo aplicáveis a equações do tipo

$$y^{(1)}(x) = F(x,y(x)) + \int_{x_0}^x K(x,t,y(t))\, dt \tag{5}$$

No trabalho [3] os autores S.H.Chang e J.T.Day provam um teorema de existência e unicidade para a equação íntegro-diferencial não linear

$$\begin{cases} y^{(1)}(x) + a(x)\, y(x) + \int_0^x K(x,t)\; y(x-t)\; y(t)\; dt = f(x) \\ y(0) = c \end{cases} \tag{6}$$

e para resolvê-la dão um algoritmo numérico da $O(h^4)$.

Faremos a seguir, um resumo do material apresentado em nosso trabalho.

No capítulo I daremos alguns resultados básicos das teorias envolvidas, que serão utilizados no decorrer do trabalho e facilitarão a leitura do mesmo.

O capítulo II trata dos algoritmos 1 e 2 baseados no desenvolvimento de Taylor. Foram inspirados pelos métodos de um passo para solução de equações diferenciais ordinárias. Expandimos as funções $y^{(r)}(x)$; $r = 0,1,\dots,u$ numa série de Taylor de ordem q e são dadas aproximações para as integrais de K e de suas derivadas sucessivas. Assim, definimos dois tipos de algoritmos de ordem q arbitrária. Fixados q e o comprimento de passo h, cada um dos algoritmos determina valores $y_n$ que aproximam $y(x_n)$. Estabelecemos também, limitações para os erros de truncamento e mostramos que os métodos apresentados são convergentes.

A seguir provamos que o erro de truncamento $e_n$ que ocorre na aplicação do algoritmo 1 à equação (4) satisfaz:

$$e_n = y_n - y(x_n) = h^q\, g(x_n) + O(h^{q+1})$$

onde $g(x)$ é uma função que não depende de h. Este último resultado, ou seja a expansão assintótica do erro, permite aplicação da extrapolação de Richardson muitas vezes usada em análise numérica para aumentar a precisão dos algoritmos.

No capítulo III será discutido inicialmente, o algoritmo 3. Empregando convenientes regras de integração numérica, algumas do tipo interpolatório, conseguimos uma classe de métodos do tipo passo múltiplo. Analisando o erro de truncamento provamos o teorema que garante a convergência do algoritmo 3. Este teorema estabelece que:

a) se os valores iniciais são calculados tal que seus erros são da $O(h^q)$;

b) se a regra de quadratura empregada para aproximar a integral da função K é da $O(h^q)$;

c) se os polinômios de interpolação para as funções $y^{(i+1)}(x)$ $i=0,1,\ldots,v-1$ são calculados sobre r-pontos;

então o algoritmo 3 é da $O(h^{\alpha})$, onde $\alpha = \min\{q,r\}$.

Quando $r > 2$ o algoritmo 3 requer valores iniciais para que possa ser aplicado. Assim os algorítmos 1 e 2 podem resolver esta questão.

No caso especial da equação (4) há algoritmos propostos para fornecer valores iniciais [1], [15]. Combinando regras de quadratura conseguimos um método simples e preciso que serve para calcular valores iniciais. Este algorítmo 4 é discutido no final do capítulo III e se aplica a equações do tipo (4).

No capítulo IV serão feitas comparações entre os algorítmos discutidos neste trabalho. Todos métodos serão aplicados para resolver numericamente dois problemas específicos, cujos resultados se encontram nas tabelas finais.

Agradeço ao Departamento de Ciências de Computação e Estatística do ICM-SC pelo estágio científico na Pennsylvania State University, que muito contribuiu para a realização deste trabalho.

## INDICE

pág.

# CAPÍTULO I
# PRÉ-REQUISITOS

Neste capítulo serão apresentadas algumas noções e fórmulas necessárias ao desenvolvimento do texto, as quais podem ser encontradas na bibliografia geral e são apresentadas aqui apenas para facilitar a leitura do trabalho.

1.1. Notações. Seja a equação íntegro-diferencial:

$$\begin{cases} y^{(v)}(x) = F(x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(v-1)}(x),\ z(x)) \\ y^{(i)}(a) = y_0^{(i)} \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, v-1 \end{cases} \tag{1.1}$$

onde

$$z(x) = \int_a^x K(x, y(x), \dots, y^{(v-1)}(x), t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(v)}(t))\, dt$$

Sejam $R(F)$ e $R(K)$ regiões definidas por:

$$R(F) = \left\{(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(v-1)}, z) \mid a \le x \le b;\ y, y^{(1)}, \dots, y^{(v-1)}, z \in R\right\}$$

e

$$R(K) = \left\{ (x, y, \dots, y^{(v-1)}, t, w, w^{(1)}, \dots, w^{(v)}) \middle| \begin{array}{l} a \le t \le x \le b \\ y, y^{(1)}, \dots, y^{(v-1)}, w, \dots, w^{(v)} \in R \end{array} \right\}$$

Então, fazemos as seguintes hipóteses:

a) A equação (1.1) tem uma única solução.

b) $F$ e $K$ são funções de classe $C^s$ de $R(F)$ e $R(K)$ em $R$, respectivamente.

c) $F$ e $K$ tem derivadas parciais de ordem $s$ limitadas.

Sejam $x \in [a, b]$, $N \ge 1$ inteiro e consideremos a seqüência de pontos $\{x_n\}$ definida por $x_n = a + nh$ para $n = 0, 1, \dots, N$ onde $h = \frac{b-a}{N}$ é chamado o comprimento de passo.

Representaremos por $y_n$ uma aproximação de $y(x)$ no ponto $x_n$; por $y_n^{(i)}$ uma aproximação para $y^{(i)}(x_n)$ e $e_n^{(i)} = y_n^{(i)} - y^{(i)}(x_n)$.

## 1.2. Tipos de estimativas de erro

Ao se estudar um método numérico é interessante que se tenha alguma informação sobre o comportamento do erro $e_n$. Abaixo seguem algumas estimativas de erro.

a) O método é convergente se

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ hn = cte}} \max_{0 \leq j \leq n} |e_j| = 0$$

b) O método admite convergência de $O(h^p)$ se

$|e_n| \leq C h^p$, para alguma constante C positiva e $h \to 0$

c) O erro $e_n$ admite uma fórmula assintótica se $\frac{e_n}{O(h^p)} \longrightarrow 1$, ou de um modo equivalente $e_n = h^p g(x_n) + O(h^{p+1})$, onde $g(x)$ é uma função que não depende de h.

## 1.3. Lemas e Corolários auxiliares

Lema 1.1. Supomos que para alguma seqüência de números reais não negativos $\{z_j\}$ temos que:

$$z_{j+1} \leq A \sum_{u=0}^{j} z_u + \varepsilon_{j+1} \quad ; \quad j = \ell,\ \ell+1, \dots$$

então

$$z_{j+1} \leq A(A+1)^{j-\ell} \sum_{u=0}^{\ell} z_u + A \sum_{u=\ell+1}^{j} (A+1)^{j-u} \varepsilon_u + \varepsilon_{j+1} \quad ; \quad j=\ell, \ell+1, \dots$$

Corolário 1.1. Se $A = \beta h$, então

$$z_{j+1} \leq \beta h\ e^{\beta h(j-\ell)} \sum_{u=0}^{\ell} z_u + \beta h\ e^{\beta h(j-\ell)} \sum_{u=\ell+1}^{j} \varepsilon_u + \varepsilon_{j+1}$$

Lema 1.2. Se os números $\xi_n$ satisfazem $|\xi_{n+1}| \leq A|\xi_n| + B$ para $n=0,1,2,\dots,N-1$, então

$$|\xi_n| \le A^n |\xi_o| + \begin{cases} \frac{A^n-1}{A-1} B & ; A \neq 1 \\ n B & ; A = 1 \end{cases} \quad ; n = 1, 2, \dots, N$$

Corolário 1.2. Se A é da forma $1+\delta$, onde $\delta$ é um número positivo pequeno, então

$$|\xi_n| \le e^{n\delta} \; |\xi_o| + \frac{e^{n\delta}-1}{\delta} B$$

1.4. Polinômio de interpolação e método de passo múltiplo

Sejam $x_o, x_1, \dots, x_n$ pontos distintos em $[a,b]$ e $y_o, y_1, \dots, y_n$ valores de uma função $f(x)$ sobre os pontos dados.

Teorema 1.1. Existe um único polinômio $P_n(x)$ de grau n tal que $P_n(x_i) = y_i \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, n.$

Definição. O polinômio $P_n(x)$ é chamado polinômio de interpolação da função $f(x)$ sobre os pontos $x_o, x_1, \dots, x_n$.

Teorema 1.2. Sejam $x_o, x_1, \dots, x_n$ pontos distintos em $[a,b]$ e $f(x)$ uma função contínua e com derivadas de ordem $n+1$ contínua em $[a,b]$.

Seja $P_n(x) = L(x) \sum\limits_{v=0}^{n} \frac{f(x_v)}{L'(x_v)\,(x-x_v)}$ o polinômio de interpolação da $f(x)$ sobre os pontos $x_o, x_1, \dots, x_n$, onde $L(x) = (x-x_o)\,(x-x_1) \dots (x-x_n)$.

Então, em qualquer ponto $x \in [a,b]$, vale o seguinte:

$$r(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_o)\,(x-x_1)\dots(x-x_n)\, f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \text{para algum } \xi \text{ em } [a,b].$$

Entre os métodos de discretização podemos citar os do tipo de um passo e de passo múltiplo. Num método de um passo o valor de $y_{n+1}$ pode ser calculado se $y_n$ é conhecido, não há necessidade dos valores $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots$ Num método de passo múltiplo o cálculo de $y_{n+1}$ exige que se conheça não apenas $y_n$ mas, também um certo número de valores $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots$. Um método é chamado um método de k-passos se os valores $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n+1-k}$ são exigidos para o cálculo de $y_{n+1}$.

## CAPÍTULO II

## ALGORITMOS DE TAYLOR DE ORDEM q

Neste capítulo são apresentados dois algoritmos para resolver equação íntegro-diferencial do tipo:

$$\begin{cases} y^{(v)}(x) = F(x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(v-1)}(x), z(x)) \\ y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)} \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, v-1 \end{cases} \tag{2.1}$$

onde

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(v-1)}(x), t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(v)}(t))\, dt$$

baseados em desenvolvimento de Taylor da função $y^{(r)}(x)$.

Estuda-se, também, o problema da convergência dos citados algoritmos e faz expansão assintótica do erro de truncamento para a equação

$$\begin{cases} y^{(1)}(x) = F(x, y(x), z(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

onde

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, t, y(t))\, dt$$

caso particular de (2.1), quando se emprega o primeiro dos algoritmos (Algorítmo 1).

### 2.1. Definição dos Algoritmo 1 e Algoritmo 2

Consideremos a equação íntegro-diferencial do tipo (2.1).

Suponhamos que:

A.1. F e K sejam funções de classe $C^{q+1}$; q inteiro, $q \geq 1$.

Como:

$y^{(v)}(x_0) = F(x_0, y(x_0), \dots, y^{(v-1)}(x_0), z(x_0))$ ; $z(x_0) = 0$ pode ser calculada exatamente e sem dificuldade, consideraremos $y^{(v)}(x_0) = y_0^{(v)}$ como parte das condições iniciais.

Então, usando desenvolvimento de Taylor para a $y^{(r)}(x)$ num entorno do ponto $x_n$, temos:

$$y^{(r)}(x_{n+1}) = y^{(r)}(x_n) + h\, y^{(r+1)}(x_n) + \dots + \frac{h^q}{q!}\, y^{(r+q)}(x_n) + + \frac{h^{q+1}}{(q+1)!}\, y^{(r+q+1)}(\xi_n^{(r)}) \qquad (2.2)$$

onde: $x_n < \xi_n^{(r)} < x_{n+1}$ : $r = 0,1,\dots,v$

Para que estas expansões definam um algoritmo precisaremos calcular as primeiras $(v+q)$ derivadas de $y$. Diferenciando sucessivamente (2.1), obtemos:

$$\begin{cases} y^{(v+s)}(x) = \dfrac{d^s}{dx^s} F(x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(v-1)}(x), z(x)) \quad ; \quad s=1,2,\dots, q \\ \text{onde} \\ z^{(i)}(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{d^i}{dx^i} K\, dt + \sum_{j=0}^{i-1} \left\{ \frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}} \left[ \left[ \frac{d^j}{dx^j} K \right]_{t=x} \right] \right\} \quad ; \quad i=1,2,\dots, q \end{cases} \qquad (2.3)$$

Para construir os algoritmos, usaremos técnicas para aproximar as integrais definidas em (2.3). Assim, vamos supor a existência de regras de quadratura da forma:

A.2. Seja $x_k = a+kh$ para $k=0,1,\dots, n$; onde $a+nh$ é mantido fixo em $[a,b]$, quando $h \to 0$. Para cada i usado e para $k=0,1,\dots, n$, sejam $w_{ik}$ um conjunto de pesos reais e $q_i$ um número positivo. Seja $\sum_{k=0}^{n} |w_{ik}| \le W$ para todo n, com $w_{ik} = 0$ para n=0. Para g suficientemente diferenciável supomos que

$$\left| \int_{x_o}^{x_n} g(t,s)\,ds - h \sum_{k=0}^{n} w_{ik}\, g(t,x_k) \right| = E(h,g) = O(h^{q_i})$$

Então dado $q_i$ escolhemos $w_{ik}$, $k=0,1,\dots,n$ satisfazendo A.2 e definimos os $y_n^{(v+s)}$, $s=1,2,\dots,q$ por:

$$\begin{cases} y_n^{(v+s)} = \left[\dfrac{d^s}{dx^s} F\right]_{\substack{x=x_n \\ y=y_n \\ \cdots\cdots \\ y^{(v+s-1)}=y_n^{(v+s-1)} \\ z=z_n \\ \cdots\cdots \\ z^{(s)}=z_n^{(s)}}} \\[2ex] z_n^{(i)} = h \displaystyle\sum_{k=0}^{n} w_{ik} \left[\dfrac{d^i}{dx^i} K\right]_{\substack{x=x_n \\ y=y_n \\ \cdots\cdots \\ y^{(v+i-1)}=y_n^{(v+i-1)} \\ t=x_k \\ U=y_k \\ \cdots\cdots \\ U^{(v)}=y_k^{(v)}}} + \\[2ex] + \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} \left[\dfrac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}} \left[\left[\dfrac{d^j}{dx^j} K\right]_{t=x}\right]\right]_{\substack{x=x_n \\ y=y_n \\ y^{(1)}=y_n^{(1)} \\ \cdots\cdots \\ y^{(v+i-1)}=y_n^{(v+i-1)}}} ; \\[2ex] i=1,2,\dots,q \end{cases} \qquad (2.4)$$

que serão usados para aproximar $y^{(v+s)}(x_n)$, $s=1,2,\ldots,q$.

Algoritmo 1

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Para } n=0,1,\ldots,N-1 \\
1)\ \ y_n, y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(v)} \ \text{ são conhecidos} \\
2)\ \ \text{usando (2.4), calculamos } y_n^{(v+1)}, y_n^{(v+2)}, \ldots, y_n^{(v+q)} \\
3)\ \ \text{para } r=0,1,\ldots,v \text{ calculamos:} \\
\qquad y_{n+1}^{(r)} = y_n^{(r)} + h\, y_n^{(r+1)} + \frac{h^2}{2!} y_n^{(r+2)} + \ldots + \frac{h^q}{q!} y_n^{(r+q)}
\end{array}\right. \qquad (2.5)$$

Uma modificação para este algoritmo pode ser obtida se fizermos:

$$\left\{\begin{array}{l}
y_{n+1}^{(v)} = F(x_{n+1}, y_{n+1}, y_{n+1}^{(1)}, \ldots, y_{n+1}^{(v-1)}, z_{n+1}) \\
\\
z_{n+1} = h \sum_{k=0}^{n+1} w_{ik}\, K(x_{n+1}, y_{n+1}, \ldots, y_{n+1}^{(v-1)}, x_k, y_k, \ldots, y_k^{(v)})
\end{array}\right. \qquad (2.6)$$

Algoritmo 2

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Para } n=0,1,\ldots,N-1 \\
1)\ y_n, y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(v)} \ \text{ são conhecidos} \\
2)\ \text{usando (2.4), calculamos } y_n^{(v+1)}, y_n^{(v+2)}, \ldots, y_n^{(v+q-1)} \\
3)\ \text{para } r=0,1,\ldots,v-1 \text{ calculamos:} \\
\qquad y_{n+1}^{(r)} = y_n^{(r)} + h\, y_n^{(r+1)} + \ldots + \frac{h^q}{q!} y_n^{(r+q)} \\
4)\ \text{usamos (2.6) para calcular } y_{n+1}^{(v)}
\end{array}\right. \qquad (2.7)$$

2.2. Resultados comuns à convergência dos Algoritmo 1 e Algoritmo 2.

Para limitar o erro de truncamento que ocorre na aplicação do Algoritmo 1 ou do Algoritmo 2, devemos examinar os:

$$e_n^{(r)} = y_n^{(r)} - y^{(r)}(x_n) \quad ; \quad n=0,1,\ldots,N \quad ; \quad r=0,1,\ldots,v+q$$

Consideremos primeiro os casos, $r=0,1,\ldots,v$ para o algoritmo 1 e $r=0,1,\ldots,v-1$ para o Algoritmo 2

Subtraindo (2.2) de (2.5) para o Algoritmo 1 ou de (2.7) para o Algoritmo 2, temos:

$$e_{n+1}^{(r)} = e_n^{(r)} + h\, e_n^{(r+1)} + \ldots + \frac{h^q}{q!} e_n^{(r+q)} - \frac{h^{q+1}}{(q+1)!} y^{(r+q+1)}(\xi_n^{(r)})$$

$$\left|e_{n+1}^{(r)}\right| \leq \sum_{j=0}^{q} \frac{h^j}{j!} \left|e_n^{(r+j)}\right| + O(h^{q+1}) \tag{2.8}$$

Agora consideremos $e_n^{(v+s)}$, $s=1,2,\ldots,q$

Subtraindo (2.3) de (2.4), segue que:

$$e_n^{(v+s)} = y_n^{(v+s)} - y^{(v+s)}(x_n) = \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]_{\substack{x=x_n \\ y=y_n \\ \cdots\cdots \\ y^{(v+s-1)}=y_n^{(v+s-1)} \\ z=z_n \\ \cdots\cdots \\ z^{(s)}=z_n^{(s)}}} - \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]_{x=x_n}$$

e

$$z_n^{(i)} - z^{(i)}(x_n) = h \sum_{k=0}^{n} w_{ik} \left[\frac{d^i}{dx^i} K\right]_{\substack{x=x_n \\ y=y_n \\ \cdots\cdots \\ y^{(v+i-1)}=y_n^{(v+i-1)} \\ t=x_k \\ U=y_k \\ \cdots\cdots \\ U^{(v)}=y_k^{(v)}}}$$

$$+ \sum_{j=0}^{i-1} \left[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}}\left[\left[\frac{d^j}{dx^j} K\right]_{t=x}\right]\right]_{\substack{x=x_n \\ y=y_n \\ \cdots\cdots \\ y^{(v+i-1)}=y_n^{(v+i-1)}}} -$$

$$-\left[\int_{x_o}^{x} \frac{d^i}{dx^i} K\, dt\right]_{x=x_n} - \sum_{j=0}^{i-1} \left[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}}\left[\left[\frac{d^j}{dx^j} K\right]_{t=x}\right]\right]_{x=x_n} ;$$

$i=1,2,\dots,q$

Usando desenvolvimento de Taylor para a $(\frac{d^s}{dx^s} F)$ num entorno do ponto $(x_n, y(x_n), \dots, y^{(v+s-1)}(x_n),\ z(x_n), \dots, z^{(s)}(x_n))$ temos:

$$e_n^{(v+s)} = \sum_{m=0}^{v+s-1} e_n^{(m)} \left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]\right]_{p_1} + \sum_{m=0}^{s} (z_n^{(m)} - z^{(m)}(x_n)) \left[\frac{\partial}{\partial z^{(m)}}\left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]\right]_{p_1} \qquad (2.9)$$

Por outro lado, usando desenvolvimento de Taylor para

$a(\frac{d^i}{dx^i} K)$ num entorno do ponto

$(x_n, y(x_n), \dots, y^{(v+i-1)}(x_n), x_k, y(x_k), \dots, y^{(v)}(x_k))$ e para

$a(\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}} \left[\left[\frac{d^j}{dx^j} K\right]_{t=x}\right])$ num entorno do ponto

$(x_n, y(x_n), \dots, y^{(v+i-1)}(x_n))$ e como $\left| \left[\int_{x_o}^{x} \frac{d^i}{dx^i} K\, dt\right]_{x=x_n} - \right.$

$$- h \sum_{k=0}^{n} w_{ik} \left[\frac{d^i}{dx^i} K\right]_{\substack{x=x_n \\ t=x_k}} \Bigg| = E(h, \frac{d^i}{dx^i} K) = E(h,i)$$

determinamos o seguinte resultado:

$$z_n^{(i)} - z^{(i)}(x_n) = h \sum_{k=0}^{n} w_{ik} \left[\frac{d^i}{dx^i} K\right]_{\substack{x=x_n \\ t=x_k}} +$$

$$+ h \sum_{k=0}^{n} w_{ik} \sum_{u=0}^{v+i-1} e_n^{(u)} \left[\frac{\partial}{\partial y^{(u)}} \left[\frac{d^i}{dx^i} K\right]\right]_{P_2} +$$

$$+ h \sum_{k=0}^{n} w_{ik} \sum_{u=0}^{v} e_k^{(u)} \left[\frac{\partial}{\partial U^{(u)}} \left[\frac{d^i}{dx^i} K\right]\right]_{P_2} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{u=0}^{v+i-1} e_n^{(u)} \left[\frac{\partial}{\partial y^{(u)}} \left[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}} \left[\left[\frac{d^j}{dx^j} K\right]_{t=x}\right]\right]\right]_{P_3} -$$

$$- \left[\int_{x_0}^{x} \frac{d^i}{dx^i} K \, dt\right]_{x=x_n}$$

Substituindo em (2.9) e tomando valores absolutos, segue que:

$$|e_n^{(v+s)}| \leq \sum_{m=0}^{v+s-1} |e_n^{(m)}| \left| \left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}} \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]\right]_{P_1} \right| +$$

$$+ \sum_{m=0}^{s} \left| h \sum_{k=0}^{n} w_{ik} \left[\frac{d^m}{dx^m} K\right]_{\substack{x=x_n \\ t=x_k}} - \left[\int_{x_0}^{x} \frac{d^m}{dx^m} K \, dt\right]_{x=x_n} \right| S +$$

$$+ \sum_{m=0}^{s} h \sum_{k=0}^{n} |w_{ik}| \sum_{u=0}^{v+m-1} |e_n^{(u)}| \left| \left[ \frac{\partial}{\partial y^{(u)}} \left[ \frac{d^m}{dx^m} K \right] \right]_{p_2} \right| S +$$

$$+ \sum_{m=0}^{s} h \sum_{k=0}^{n} |w_{ik}| \sum_{u=0}^{v} |e_k^{(u)}| \left| \left[ \frac{\partial}{\partial U^{(u)}} \left[ \frac{d^m}{dx^m} K \right] \right]_{p_2} \right| S +$$

$$+ \sum_{m=0}^{s} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{u=0}^{v+m-1} |e_n^{(u)}| \left| \left[ \frac{\partial}{\partial y^{(u)}} \left[ \frac{d^{m-j-1}}{dx^{m-j-1}} \left[ \left[ \frac{d^j}{dx^j} K \right]_{t=x} \right] \right] \right]_{p_3} \right| S$$

onde:

$$S = \left| \left[ \frac{\partial}{\partial z^{(m)}} \left[ \frac{d^s}{dx^s} F \right] \right]_{p_1} \right|$$

Sejam:

$$\left| \left[ \frac{\partial}{\partial z^{(m)}} \left[ \frac{d^s}{dx^s} F \right] \right] \right| \leq K_1 \quad ; \quad \left| \left[ \frac{\partial}{\partial y^{(u)}} \left[ \frac{d^m}{dx^m} K \right] \right] \right| \leq K_2 \quad ;$$

$$\left| \left[ \frac{\partial}{\partial U^{(u)}} \left[ \frac{d^m}{dx^m} K \right] \right] \right| \leq K_3 \quad ; \quad \left| \left[ \frac{\partial}{\partial y^{(u)}} \left[ \frac{d^{m-j-1}}{dx^{m-j-1}} \left[ \left[ \frac{d^j}{dx^j} K \right]_{t=x} \right] \right] \right] \right| \leq K_4 ;$$

$$\left| \left[ \frac{\partial}{\partial z^{(m)}} \left[ \frac{d^s}{dx^s} F \right] \right] \right| \leq K_5$$

$$\leq K_1 \sum_{m=0}^{v+s-1} |e_n^{(m)}| + K_4 K_5 \sum_{m=0}^{s} m \sum_{u=0}^{v+m-1} |e_n^{(u)}| +$$

$$+ h W K_2 K_5 \sum_{m=0}^{s} (n+1) \sum_{u=0}^{v+m-1} |e_n^{(u)}| + h W K_3 K_5 (s+1) \sum_{k=0}^{n} \sum_{u=0}^{v} |e_k^{(u)}| +$$

$$+ K_5 \sum_{m=0}^{s} E(h,m)$$

Seja $K_6 = \max(K_2, K_3)$

$$|e_n^{(v+s)}| \leq K_1 \sum_{u=0}^{v+s-1} |e_n^{(u)}| + K_4\, K_5\, \frac{q^2+q}{2} \sum_{u=0}^{v+s-1} |e_n^{(u)}| +$$

$$+ 2(b-a)\, W\, K_6\, K_5\, (q+1) \sum_{u=0}^{v+s-1} |e_n^{(u)}| +$$

$$+ h\, W\, K_3\, K_5\, (q+1) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{u=0}^{v} |e_k^{(u)}| + K_5 \sum_{m=0}^{s} E(h,m) =$$

$$= K_7 \sum_{u=0}^{v+s-1} |e_n^{(u)}| + h\, K_8 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{u=0}^{v} |e_k^{(u)}| + K_5 \sum_{m=0}^{s} E(h,m) \tag{2.10}$$

onde: $K_7 = K_1 + K_4\, K_5\, \frac{q^2+q}{2} + 2(b-a)\, W\, K_6\, K_5\, (q+1)$

$K_8 = W\, K_3\, K_5\, (q+1)$

Agora, vamos provar um lema que expressa os $e_n^{(v+s)}$ $s=1,2,\ldots,q$, em termos dos $e_j^{(r)}$, $r=0,1,\ldots,v$; $j=0,1,\ldots,n$.

Lema 2.1. Seja $y(x)$ satisfazendo a equação íntegro-diferencial (2.1). Suponhamos que as condições A.1 e A.2 sejam satisfeitas. Então, existem constantes não negativas $K_9$, $K_{11}$ e $K_{12}$ tal que:

$$|e_n^{(v+s)}| \leq K_9 \sum_{u=0}^{v} |e_n^{(u)}| + h\, K_{11} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{v} |e_k^{(m)}| +$$

$$+ K_{12} \sum_{m=0}^{s} E(h,m) \tag{2.11}$$

Prova. Aplicando o lema 1.1 a (2.10) temos:

$$|e_n^{(v+s)}| \leq K_7\, (K_7+1)^{s-1} \sum_{u=0}^{v} |e_n^{(u)}| +$$

$$+ K_7 \sum_{u=v+1}^{v+s-1} (K_7+1)^{v+s-1-u} \left\{ h K_8 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{v} |e_k^{(m)}| + \right.$$

$$\left. + K_5 \sum_{m=0}^{u-v} E(h,m) \right\} + h K_8 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{v} |e_k^{(m)}| + K_5 \sum_{m=0}^{s} E(h,m)$$

Mas, $\sum_{u=v+1}^{v+q-1} (K_7 + 1)^{v+q-1-u} \leq (q-1)\, (K_7 + 1)^{q-1}$ e seja

$K_9 = K_7 (K_7 + 1)^{q-1}$, então:

$$|e_n^{(v+s)}| \leq K_9 \sum_{u=0}^{v} |e_n^{(u)}| + h K_9 K_8 (q-1) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{v} |e_k^{(m)}| +$$

$$+ K_5 K_9 \sum_{u=v+1}^{v+s-1} \sum_{m=0}^{u-v} E(h,m) + h K_8 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{v} |e_k^{(m)}| +$$

$$+ K_5 \sum_{m=0}^{s} E(h,m) \leq$$

$$\leq K_9 \sum_{u=0}^{v} |e_n^{(u)}| + h K_{11} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{v} |e_k^{(m)}| + K_{12} \sum_{m=0}^{s} E(h,m)$$

onde:

$K_{10} = \max\{K_9 (s-1)+1,\ K_9 (s-2)+1, \ldots,\ K_9 (1) +1,\ K_9 (0) +1\}$ ;

$K_{11} = K_9 K_8 (q-1) + K_8$ ; $K_{12} = K_5 K_{10}$

Corolário 2.1. $|e_0^{(r)}| = 0$ , $r=0,1,\ldots, v+q$

2.3. Convergência do Algoritmo 1

Definição $\varepsilon_k = \max\limits_{\substack{0 \le r \le v \\ 0 \le j \le k}} |e_j^{(r)}|$

Então, de (2.11) segue que:

$$|e_n^{(v+s)}| \le K_9 \sum_{u=0}^{v} \varepsilon_n + h K_{11} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{v} \varepsilon_k + K_{12} \sum_{m=0}^{s} E(h,m) \le$$

$$\le K_{13}\, \varepsilon_n + K_{12} \sum_{m=0}^{s} E(h,m) \qquad (2.12)$$

onde: $K_{13} = K_9(v+1) + (b-a)K_{11}\,(v+1)$

Lema 2.2. Suponhamos que as condições do lema 2.1 **sejam** satisfeitas e que para alguma constante $\bar{h}$, $h \le \bar{h} < 1$.

Então:

$$\varepsilon_{n+1} \le (1 + hK_{14}H)\,\varepsilon_n + hHK_{12}\left\{E(h,0) + \sum_{\ell=1}^{q} E(h,\ell)\, O(h^{\ell-1})\right\} + O(h^{q+1})$$

onde H e $K_{14}$ são constantes

Prova. De (2.8):

$$|e_{n+1}^{(r)}| \le \sum_{j=0}^{\min\{q,v-r\}} \frac{h^j}{j!} |e_n^{(r+j)}| + \sum_{j=v-r+1}^{q} \frac{h^j}{j!} |e_n^{(r+j)}| +$$

$$+ O(h^{q+1}) \le$$

$$\le \varepsilon_n + \sum_{j=1}^{\min\{q,v-r\}} \frac{h^j}{j!} \varepsilon_n + K_{13} \sum_{j=v-r+1}^{q} \frac{h^j}{j!} \varepsilon_n +$$

$$+ K_{12} \sum_{j=v-r+1}^{q} \frac{h^j}{j!} \sum_{m=0}^{r+j-v} E(h,m) + O(h^{q+1}) \le$$

$$\le \varepsilon_n + K_{14}\, \varepsilon_n \sum_{j=1}^{q} \frac{h^j}{j!} + K_{12} \sum_{j=v-r+1}^{q} \frac{h^j}{j!} \sum_{m=0}^{r+j-v} E(h,m) + O(h^{q+1})$$

onde: $K_{14} = \max\{1, K_{13}\}$

$$|e_{n+1}^{(r)}| \leq \varepsilon_n + K_{14}\ \varepsilon_n\ h \sum_{j=1}^{q} \frac{h^{j-1}}{j!} +$$

$$+ K_{12} \left\{ E(h,0) \sum_{j=v-r+1}^{q} \frac{h^j}{j!} + \sum_{\ell=1}^{r+q-v} E(h,\ell) \sum_{j=v-r+\ell}^{q} \frac{h^j}{j!} \right\} + O(h^{q+1})$$

$$\text{Seja } H = 1 + \frac{\bar{h}}{2!} + \frac{\bar{h}^2}{3!} + \ldots + \frac{\bar{h}^{q-1}}{q!}$$

$$|e_{n+1}^{(r)}| \leq (1 + h\, K_{14}\, H)\ \varepsilon_n + K_{12}\, E(h,0)\, h \sum_{j=1}^{q} \frac{h^{j-1}}{j!} +$$

$$+ K_{12}\, h \sum_{\ell=1}^{q} E(h,\ell) \sum_{j=\ell}^{q} \frac{h^{j-1}}{j!} + O\,(h^{q+1})$$

Portanto:

$$\varepsilon_{n+1} \leq (1 + h\, K_{14}\, H)\ \varepsilon_n + h\ H K_{12} \left\{ E(h,0) + \sum_{\ell=1}^{q} E(h,\ell)\, O(h^{\ell-1}) \right\} + O(h^{q+1})$$

Estamos agora, preparados para provar o teorema da convergência do Algoritmo 1.

Teorema 2.1. Seja $y(x)$ satisfazendo a equação íntegro-diferencial (2.1). Suponhamos que as condições A.1 e A.2. sejam satisfeitas e que $q_0 = q$; $q_\ell = q - \ell + 1$ para $\ell = 1, 2, \ldots, q$ e $q \geq 1$. Sejam os valores $y_n$ determinados pelo Algoritmo 1. Então:

1º) $$\varepsilon_n \leq \frac{e^{(x_n - a)K_{14}H} - 1}{K_{14}H} \left[ H K_{12} \left\{ O(h^{q_0}) + \sum_{\ell=1}^{q} O(h^{q_\ell})\, O(h^{\ell-1}) \right\} + O(h^{q}) \right], \text{ se}$$

$h \leq \bar{h} < 1$ para alguma constante $\bar{h}$.

2º) $$\lim_{\substack{h \to 0 \\ hn = \text{cte}.}} \ \max_{0 \leq j \leq n} |y(x_j) - y_j| = 0$$

3º) O Algoritmo 1 converge com ordem $q$.

Prova. Aplicando o Corolário 1.2 ao lema 2.2 temos:

$$\mathcal{E}_n \leq e^{nhK_{14}H}\ \mathcal{E}_0 + \frac{e^{nhK_{14}H}-1}{hK_{14}H}\left[hHK_{12}\{E(h,0) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\ell=1}^{q} E(h,\ell)\ O(h^{\ell-1})\} + O(h^{q+1})\right]$$

Mas, $\mathcal{E}_0 = \max\limits_{0\leq r\leq v} |e_0^{(r)}| = 0$, então:

$$\mathcal{E}_n \leq \frac{e^{(x_n-a)K_{14}H}-1}{K_{14}H}\left[HK_{12}\left\{O(h^{q_0}) + \sum_{\ell=1}^{q} C(h^{q_\ell})\ O(h^{\ell-1})\right\} + O(h^q)\right] = O(h^q)$$

Assim:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ hn=cte}} \max_{0\leq j\leq n} |y(x_j) - y_j| \leq \lim_{\substack{h\to 0\\ hn=cte}} \mathcal{E}_n = 0$$

2.4. Convergência do Algoritmo 2

Vamos, inicialmente, calcular uma limitação para $|e_n^{(v)}|$, que será necessária para o estudo da convergência do Algoritmo 2.

Subtraindo (2.1) de (2.6) e usando desenvolvimento de Taylor para a F num entorno do ponto $(x_n, y(x_n), y^{(1)}(x_n), \dots, y^{(v-1)}(x_n), z(x_n))$ e para a K num entorno do ponto

$(x_n, y(x_n), y^{(1)}(x_n), \dots, y^{(v-1)}(x_n), x_k, y(x_k), y^{(1)}(x_k), \dots, y^{(v)}(x_k))$, temos:

$$e_n^{(v)} = \sum_{m=0}^{v-1} e_n^{(m)} \left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}} F\right]_{P_4} + (z_n - z(x_n)) \left[\frac{\partial}{\partial z} F\right]_{P_4} \tag{2.13}$$

e

$$z_n - z(x_n) = h \sum_{k=0}^{n} w_{ik} \left\{ [K]_{\substack{x=x_n\\ t=x_k}} + \sum_{m=0}^{v-1} e_n^{(m)} \left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}} K\right]_{P_5} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{v} e_k^{(m)} \left[\frac{\partial}{\partial U^{(m)}} K\right]_{P_5} \right\} -$$

$$-\int_{x_o}^{x_n} K(x_n, y(x_n), \dots, y^{(v-1)}(x_n), t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(v)}(t))\, dt$$

.

Sejam

$$\left|\left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}} F\right]\right| \leq C_1 \quad ; \quad \left|\left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}} K\right]\right| \leq C_{k1} \quad ;$$

$$\left|\left[\frac{\partial}{\partial U^{(m)}} K\right]\right| \leq C_{K2} \quad ; \quad \left|\left[\frac{\partial}{\partial z} F\right]\right| \leq C$$

então,

$$|e_n^{(v)}| \leq C_1 \sum_{m=0}^{v-1} |e_n^{(m)}| + h\, W\, C_4 \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{v} |e_k^{(m)}| + C\, E(h,0) \tag{2.14}$$

onde: $C_2 = C_{K1} C$ ; $C_3 = C_{K2}\, C$ ; $\bar{C}_4 = \max\{C_3, C_2(n+1)\}$;
$C_4 \doteq 2\bar{C}_4$

Definição

$$\bar{\varepsilon}_k = \max_{\substack{0 \leq r \leq v-1 \\ 0 \leq j \leq k}} |e_j^{(r)}|$$

Lema 2.3. Seja $y(x)$ satisfazendo a equação íntegro dife-rencial (2.1). Suponhamos que as condições A.1 e A.2 sejam satisfeitas e que para alguma constante $\bar{h}$, $h \leq \bar{h} < \frac{1}{WC_4}$. Então, existem constantes não negativas $C_7$ e $C_8$ tal que

$$|e_n^{(v)}| \leq C_7\, \bar{\varepsilon}_n + C_8\, E(h,0)$$

Prova. De (2.14) segue que:

$$|e_n^{(v)}| \leq C_1 \sum_{m=0}^{v-1} |e_n^{(m)}| + h\, W\, C_4 |e_n^{(v)}| + h\, W\, C_4 \sum_{k=0}^{n-1} |e_k^{(v)}| +$$

$$+ h W C_4 \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{v-1} |e_k^{(m)}| + C E(h,0)$$

$$|e_n^{(v)}| \leq \frac{C_1}{1-hW C_4} \sum_{m=0}^{v-1} \bar{\varepsilon}_n + \frac{h W C_4}{1-h W C_4} \sum_{k=0}^{n-1} |e_k^{(v)}| +$$

$$+ \frac{hWC_4}{1-hWC_4} \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{v-1} \bar{\varepsilon}_n + \frac{C}{1-h W C_4} E(h,0) \leq$$

$$\leq \frac{C_1 v + (b-a) W C_4 v}{1-\bar{h} W C_4} \bar{\varepsilon}_n + \frac{h W C_4}{1-\bar{h} W C_4} \sum_{k=0}^{n-1} |e_k^{(v)}| + \frac{C}{1-\bar{h}W C_4} E(h,0)$$

Sejam:

$$C_5 = \frac{C_1 v + (b-a) W C_4 v}{1-\bar{h} W . C_4} \quad ; \quad C_6 = \frac{W C_4}{1-\bar{h} W C_4} , \quad \text{então:}$$

$$|e_n^{(v)}| \leq C_5 \bar{\varepsilon}_n + h C_6 \sum_{k=0}^{n-1} |e_k^{(v)}| + \frac{C}{1-\bar{h} W C_4} E(h,0)$$

Aplicando o corolário 1.1 segue que:

$$|e_n^{(v)}| \leq C_6 h e^{C_6 h(n-1)} \sum_{k=0}^{o} |e_k^{(v)}| + C_6 h e^{C_6 h(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ C_5 \bar{\varepsilon}_k + \right.$$

$$\left. + \frac{C}{1-\bar{h} W C_4} E(h,0) \right\} + C_5 \bar{\varepsilon}_n + \frac{C}{1-\bar{h} W C_4} E(h,0) \leq$$

$$\leq (b-a) C_6 C_5 e^{(b-a)C_6} \bar{\varepsilon}_{n-1} + (b-a) C_6 \frac{C e^{(b-a)C_6}}{1-\bar{h} W C_4} E(h,0) +$$

$$+ C_5 \bar{\varepsilon}_n + \frac{C}{1-\bar{h} W C_4} E(h,0) \leq \left[ (b-a) C_6 C_5 e^{(b-a) C_6} + C_5 \right] \bar{\varepsilon}_n +$$

$$+\left[\frac{C(b-a)C_6\ e^{(b-a)C6}+C}{1-\bar{h}\ W\ C_4}\right]\ E(h,0)$$

Portanto:

$$|e_n^{(v)}| \leq C_7\ \bar{\varepsilon}_n + C_8\ E(h,0)$$

onde:

$$C_7 = (b-a)\ C_6\ C_5\ .\ e^{(b-a)C6} + C_5 \quad ; \quad C_8 = \frac{C(b-a)C_6\ e^{(b-a)C6}+C}{1-\bar{h}\ W\ C_4}$$

Lema 2.4. Suponhamos que as condições do lema 2.3 sejam satisfeitas. Então, existem constantes não negativas $C_9$ e $C_{10}$ tal que para s=1,2,..., q-1:

$$|e_n^{(v+s)}| \leq C_9\ \bar{\varepsilon}_n + C_{10} \sum_{m=0}^{s} E(h,m)$$

Prova. Pelos lemas 2.1 e 2.3, temos:

$$|e_n^{(v+s)}| \leq K_9\ |e_n^{(v)}| + K_9 \sum_{u=0}^{v-1} |e_n^{(u)}| + h\,K_{11} \sum_{k=0}^{n-1} |e_k^{(v)}| +$$

$$+ h\,K_{11} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{v-1} |e_k^{(m)}| + K_{12} \sum_{m=0}^{s} E(h,m) \leq$$

$$\leq K_9\ C_7\ \bar{\varepsilon}_n + K_9\ C_8\ E(h,0) + K_9\ \bar{\varepsilon}_n\,v + h\,K_{11}\,C_7 \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\varepsilon}_k +$$

$$+ h\,K_{11}\,C_8 \sum_{k=0}^{n-1} E(h,0) + h\,K_{11}\,\bar{\varepsilon}_{n-1}\,n\,v + K_{12} \sum_{m=0}^{s} E(h,m) \leq$$

$$\leq \left[K_9\,C_7 + K_9\,v + (b-a)\,K_{11}\,C_7 + (b-a)\,v\,K_{11}\right]\ \bar{\varepsilon}_n +$$

$$+\left[K_9 C_8 + (b-a) K_{11} C_8 + K_{12}\right] E(h,0) + K_{12} \sum_{m=1}^{s} E(h,m) \leq$$

$$\leq C_9 \bar{\varepsilon}_n + C_{10} \sum_{m=0}^{s} E(h,m)$$

onde: $C_9 = K_9 C_7 + K_9 v + (b-a) K_{11} C_7 + (b-a) v K_{11}$

$C_{10} = \max(K_9 C_8 + (b-a) K_{11} C_8 + K_{12}, K_{12}, C_8)$

Seja $C_{11} = \max(C_7, C_9)$, então:

$$|e_n^{(v+s)}| \leq C_{11} \bar{\varepsilon}_n + C_{10} \sum_{m=0}^{s} E(h,m) \text{, para } s=0,1,\dots, q-1 \qquad (2.15)$$

Lema 2.5. Suponhamos que as condições do **lema 2.3 sejam** satisfeitas. Então:

$$\bar{\varepsilon}_{n+1} \leq (1+h C_{12} H) \bar{\varepsilon}_n + h C_{10} \sum_{\ell=0}^{q-1} E(h,\ell)\ O(h^{\ell}) + O(h^{q+1})$$ onde $H$ e $C_{12}$ são constantes.

Prova. De (2.8):

$$|e_{n+1}^{(r)}| \leq \sum_{j=0}^{\min\{q,v-1-r\}} \frac{h^j}{j!} |e_n^{(r+j)}| + \sum_{j=v-r}^{q} \frac{h^j}{j!} |e_n^{(r+j)}| + O(h^{q+1}) \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\min\{q,v-1-r\}} \frac{h^j}{j!} \bar{\varepsilon}_n + \sum_{j=v-r}^{q} \frac{h^j}{j!} \left\{C_{11} \bar{\varepsilon}_n + C_{10} \sum_{m=0}^{r+j-v} E(h,m)\right\} + O(h^{q+1}) \leq$$

$$\leq \bar{\varepsilon}_n + C_{12} \bar{\varepsilon}_n \sum_{j=1}^{q} \frac{h^j}{j!} + C_{10} \sum_{j=v-r}^{q} \frac{h^j}{j!} \sum_{m=0}^{r+j-v} E(h,m) + O(h^{q+1})$$

onde $C_{12} = \max(1, C_{11})$

$$|e_{n+1}^{(r)}| \leq \bar{\varepsilon}_n + C_{12}\, \bar{\varepsilon}_n\, h \sum_{j=1}^{q} \frac{h^{j-1}}{j!} + C_{10} \sum_{\ell=0}^{r+q-v} E(h,\ell) \sum_{j=v-r+\ell}^{q} \frac{h^j}{j!} +$$

$$+\ O(h^{q+1}) \leq$$

$$\leq \bar{\varepsilon}_n + C_{12}\, \bar{\varepsilon}_n\, hH + C_{10} \sum_{\ell=0}^{q-1} E(h,\ell) \sum_{j=\ell+1}^{q} \frac{h^j}{j!} + O(h^{q+1}) =$$

$$= (1+h\, C_{12}\, H)\, \bar{\varepsilon}_n + h\, C_{10} \sum_{\ell=0}^{q-1} E(h,\ell)\ O(h^{\ell}) + O(h^{q+1}) \ ; \ r=0,1,\ldots,v-1$$

Portanto:

$$\bar{\varepsilon}_{n+1} \leq (1+h\, C_{12}\, H)\ \bar{\varepsilon}_n + h\, C_{10} \sum_{\ell=0}^{q-1} E(h,\ell)\, O(h^{\ell}) + O(h^{q+1})$$

Vamos agora, provar o Teorema que estabelece a convergência do Algoritmo 2.

Teorema 2.2. Seja $y(x)$ satisfazendo a equação íntegro-diferencial (2.1). Suponhamos que as condições A.1 e A.2 sejam satisfeitas e que $q_{\ell} = q-\ell$ para $\ell=0,1,\ldots, q-1$ e $q\geq 1$. Sejam os valores $y_n$ determinados pelo Algoritmo 2. Então:

1º) $\bar{\varepsilon}_n \leq \dfrac{e^{(x_n-a)\, C_{12}\, H}-1}{C_{12}H} \left[C_{10} \sum_{\ell=0}^{q-1} O(h^{q_{\ell}})\ O(h^{\ell}) + O(h^{q})\right]$ ;

se $h \leq \bar{h} < \dfrac{1}{WC_4}$

2º) $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ hn=cte}}\ \max\limits_{0\leq j\leq n} |y(x_j)-y_j| = 0$

3º) O Algoritmo 2 converge com ordem q

Prova. Aplicando o corolário 1.2 ao lema 2.5 temos:

$$\bar{\varepsilon}_n \le e^{nh C_{12} H}\, \bar{\varepsilon}_0 + \frac{e^{nh C_{12} H} - 1}{h C_{12} H} \left[ h C_{10} \sum_{\ell=0}^{q-1} E(h,\ell)\, O(h^{\ell}) + O(h^{q+1}) \right]$$

Mas, $\bar{\varepsilon}_0 = \max\limits_{\substack{0 \le r \le v-1 \\ 0 \le j \le 0}} |e_j^{(r)}| = 0$, então:

$$\bar{\varepsilon}_n \le \frac{e^{(x_n - a) C_{12} H} - 1}{C_{12} H} \left[ C_{10} \sum_{\ell=0}^{q-1} O(h^{q-\ell})\, O(h^{\ell}) + O(h^q) \right] = O(h^q)$$

Assim:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ hn = cte}} \max_{0 \le j \le n} |y(x_j) - y_j| \le \lim_{\substack{h \to 0 \\ hn = cte}} \bar{\varepsilon}_n = 0$$

2.5. Expansão assintótica do erro de truncamento

Vamos desenvolver agora, uma expansão assintótica para o erro de truncamento que ocorre na aplicação do Algoritmo 1, no caso especial da equação íntegro-diferencial:

$$\begin{cases} y^{(1)}(x) = F(x, y(x), z(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (2.16)$$

onde:

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, t, y(t))\, dt$$

Os resultados que provaremos a seguir, serão usados para demonstrar o teorema da forma assintótica do erro de truncamento.

Suponhamos que F e K sejam funções de classe $C^{q+2}$; q inteiro, $q \ge 1$ e que a condição A.2 seja satisfeita.

Subtraindo (2.3) de (2.4):

$$e_n^{(1+s)} = \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]_{\substack{x=x_n \\ y=y_n \\ \cdots \\ y^{(s)}=y_n^{(s)} \\ z=z_n \\ \cdots \\ z^{(s)}=z_n^{(s)}}} - \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]_{x=x_n} \qquad (2.17)$$

e

$$z_n^{(i)} - z^{(i)}(x_n) = h \sum_{k=0}^{n} w_{ik} \left[\frac{d^i}{dx^i} K\right]_{\substack{x=x_n \\ t=x_k \\ U=y_k}} + \sum_{j=0}^{i-1} \left[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}} \left[\left[\frac{d^j}{dx^j} K\right]_{t=x}\right]\right]_{\substack{x=x_n \\ y=y_n \\ \cdots \\ y^{(i-1)}=y_n^{(i-1)}}} - \qquad (2.18)$$

$$- \left[\int_{x_0}^{x} \frac{d^i}{dx^i} K(x,t,y(t))\, dt\right]_{x=x_n} -$$

$$- \sum_{j=0}^{i-1} \left[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}} \left[\left[\frac{d^j}{dx^j} K(x,t,y(t))\right]_{t=x}\right]\right]_{x=x_n}$$

a) Consideremos o desenvolvimento de Taylor para a $(\frac{d^s}{dx^s}F)$ num entorno do ponto

$(x_n, y(x_n), \ldots, y^{(s)}(x_n), z(x_n), \ldots, z^{(s)}(x_n))$ :

$$\left[\frac{d^s}{dx^s}F\right]_{\substack{x=x_n\\ y=y_n\\ \cdots\\ y^{(s)}=y_n^{(s)}\\ z=z_n\\ \cdots\\ z^{(s)}=z_n^{(s)}}} = \left[\frac{d^s}{dx^s}F\right]_{x=x_n} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{s} e_n^{(m)} \left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\left[\frac{d^s}{dx^s}F\right]\right]_{x=x_n} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{s} (z_n^{(m)} - z^{(m)}(x_n))\left[\frac{\partial}{\partial z^{(m)}}\left[\frac{d^s}{dx^s}F\right]\right]_{x=x_n} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{m=0}^{s} e_n^{(m)} \frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\right)^2 \left[\frac{d^s}{dx^s}F\right]\right]_{r_1} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{m=0}^{s} (z_n^{(m)} - z^{(m)}(x_n)) \frac{\partial}{\partial z^{(m)}}\right)^2 \left[\frac{d^s}{dx^s}F\right]\right]_{r_1} +$$

$$+ \sum_{\ell=0}^{s} e_n^{(\ell)}\left[\sum_{m=0}^{s} (z_n^{(m)} - z^{(m)}(x_n))\left[\frac{\partial^2}{\partial y^{(\ell)}\partial z^{(m)}}\left[\frac{d^s}{dx^s}F\right]\right]_{r_1}\right]$$

Por (2.12) temos:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{m=0}^{s} e_n^{(m)} \frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\right)^2 \left[\frac{d^s}{dx^s}F\right]\right]_{r_1} =$$

$$= O(\varepsilon_n)^2 + O(E(h,\ s-1))^2 + O(\varepsilon_n)\, O(E(h,s-1))$$

b) Consideremos o desenvolvimento de Taylor para a $\left(\frac{d^iK}{dx^i}\right)$ num e<u>n</u>

torno do ponto $(x_n, x_k, y(x_k))$, então:

$$\left[\frac{d^i}{dx^i}K\right]_{\substack{x=x_n\\t=x_k\\U=y_k}} = \left[\frac{d^i}{dx^i}K\right]_{\substack{x=x_n\\t=x_k}} + e_k\left[\frac{\partial}{\partial U}\left[\frac{d^i}{dx^i}K\right]\right]_{\substack{x=x_n\\t=x_k}} +$$

$$+ \frac{1}{2}e_k^2\left[\frac{\partial^2}{\partial U^2}\left[\frac{d^i}{dx^i}K\right]\right]_{r_2}$$

onde:

$$\frac{1}{2}e_k^2\left[\frac{\partial^2}{\partial U^2}\left[\frac{d^i}{dx^i}K\right]\right]_{r_2} = O\,(\varepsilon_n)^2$$

c) Usando desenvolvimento de Taylor para a

$\left(\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}}\left[\left[\frac{d^j}{dx^j}K\right]_{t=x}\right]\right)$ num entorno do ponto

$(x_n, y(x_n), \ldots, y^{(i-1)}(x_n))$, temos,

$$\left[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}}\left[\left[\frac{d^j}{dx^j}K\right]_{t=x}\right]\right]_{\substack{x=x_n\\y=y_n\\\cdots\\y^{(i-1)}=y_n^{(i-1)}}} =$$

$$= \left[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}}\left[\left[\frac{d^j}{dx^j}K\right]_{t=x}\right]\right]_{x=x_n} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{i-1} e_n^{(m)}\left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\left[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}}\left[\left[\frac{d^j}{dx^j}K\right]_{t=x}\right]\right]\right]_{x=x_n} +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{m=0}^{i-1} e_n^{(m)} \frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\right)^2 \left[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}}\left[\left[\frac{d^j}{dx^j}K\right]_{t=x}\right]\right]\right]_{r_3}$$

Também:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{m=0}^{i-1} e_n^{(m)} \frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\right)^2 \left[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}}\left[\left[\frac{d^j}{dx^j}K\right]_{t=x}\right]\right]\right]_{r_3} =$$

$$= O(\varepsilon_n)^2 + O(E(h,i-2))^2 + O(\varepsilon_n)\, O(E(h,i-2))$$

Substituindo (b) e (c) em (2.18), segue que:

$$z_n^{(i)} - z^{(i)}(x_n) = h\sum_{k=0}^{n} w_{ik}\left\{\left[\frac{d^i}{dx^i}K\right]_{\substack{x=x_n\\ t=x_k}} + e_k\left[\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{d^i}{dx^i}K\right]\right]_{\substack{x=x_n\\ t=x_k}} +\right.$$

$$\left. + O(\varepsilon_n)^2\right\} + \sum_{j=0}^{i-1}\left\{\left[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}}\left[\left[\frac{d^j}{dx^j}K\right]\right]_{t=x}\right]_{x=x_n} +\right.$$

$$+\sum_{m=0}^{i-1} e_n^{(m)}\left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\left[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}}\left[\left[\frac{d^j}{dx^j}K\right]_{t=x}\right]\right]\right]_{x=x_n} +$$

$$\left. + O(\varepsilon_n)^2 + O(E(h,i-2))^2 + O(\varepsilon_n)\, O(E(h,i-2))\right\} -$$

$$-\left[\int_{x_0}^{x}\frac{d^i}{dx^i}K\,dt\right]_{x=x_n} - \sum_{j=0}^{i-1}\left[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}}\left[\left[\frac{d^j}{dx^j}K\right]_{t=x}\right]\right]_{x=x_n} =$$

$$= h\sum_{k=0}^{n} w_{ik}\left\{e_k\left[\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{d^i}{dx^i}K\right]\right]_{\substack{x=x_n\\ t=x_k}} + O(\varepsilon_n)^2\right\} +$$

$$+\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{m=0}^{i-1} e_n^{(m)}\left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\left[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}}\left[\left[\frac{d^j}{dx^j}K\right]_{t=x}\right]\right]\right]_{x=x_n} +$$

$$+\sum_{j=0}^{i-1}\left\{O(\varepsilon_n)^2+O(E(h,i-2))^2+O(\varepsilon_n)\,O(E\,(h,i-2))\right\}+E(h,i)=$$

$$=\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{m=0}^{i-1}\left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\left[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}}\left[\left[\frac{d^j}{dx^j}K\right]_{t=x}\right]\right]\right]_{x=x_n}e_n^{(m)}+$$

$$+O(\varepsilon_n)+O(\varepsilon_n)^2+O(E(h,i-2))^2+O(\varepsilon_n)\,O(E\,(h,i-2))+E(h,i)$$

Mas, por (2.12)

$$\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{m=0}^{i-1}\left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\left[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}}\left[\left[\frac{d^j}{dx^j}K\right]_{t=x}\right]\right]\right]_{x=x_n}e_n^{(m)}=O(\varepsilon_n)+O(E\,(h,i-2))$$

Então

$$z_n^{(i)}-z^{(i)}(x_n)=O(\varepsilon_n)+O(E\,(h,i-2))+O(\varepsilon_n)\,O(E\,(h,i-2))+E(h,i) \qquad (2.19)$$

Lema 2.6. Seja $y(x)$ satisfazendo a equação íntegro dife-rencial (2.16). Suponhamos que $F$ e $K$ sejam funções de classe $C^{q+2}$, $q$ inteiro, $q\geq 1$ e que as hipóteses do teorema 2.1. sejam satisfeitas.

Fixado $i\geq 0$, escolhemos a seqüência de pesos $\{w_{ik}\}$ tal que

$$-\left[\int_{x_0}^{x}\frac{d^i}{dx^i}K\,dt\right]_{x=x_n}+h\sum_{k=0}^{n}w_{ik}\left[\frac{d^i}{dx^i}K\right]_{\substack{x=x_n\\ t=x_k}}=$$

$=\theta_i\,(x_n,y(x_n))\,h^{q_i}+O(h^{q_i+1})=E(h,i)$ ; onde $\theta_i$ é uma função de duas variáveis.

Então, para $s=1,2,\ldots,q$

$$e_n^{(1+s)} = \sum_{m=0}^{s} \left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}} \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]\right]_{x=x_n} e_n^{(m)} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z^{(s)}} \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]\right]_{x=x_n} \theta_s(x_n, y(x_n))\, h^{q-s+1} + O(h^{q-s+2}) +$$

$$+ O(h^q) + O(h^{q-s+3}) + O(h^{q-s+1})^2 + O(h^q)\, O(h^{q-s+1}) +$$

$$+ O(h^{q-s+3})\, O(h^{q-s+1}) + \Big\{ O(h^q) + O(h^{q-s+3}) +$$

$$+ O(h^{q-s+1}) \Big\} \sum_{\ell=0}^{s} \left\{ \sum_{m=0}^{s} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^{(\ell)} \partial z^{(m)}} \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]_{r_1}\right]\right\} e_n^{(\ell)}$$

Prova. Substituindo (a) e (2.19) em (2.17)

$$e_n^{(1+s)} = \sum_{m=0}^{s} \left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}} \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]\right]_{x=x_n} e_n^{(m)} + O(\varepsilon_n) + O(E(h, s-2)) +$$

$$+ O(\varepsilon_n)\, O(E(h, s-2)) + \sum_{m=0}^{s} E(h, m) \left[\frac{\partial}{\partial z^{(m)}} \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]\right]_{x=x_n} +$$

$$+ O(\varepsilon_n)^2 + O(E(h, s-1))^2 + O(\varepsilon_n)\, O(E(h, s-1)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \Big[ \Big( \sum_{m=0}^{s} \Big\{ O(\varepsilon_n) + O(E(h, m-2)) + O(\varepsilon_n)\, O(E(h, m-2)) +$$

$$+ E(h, m) \Big\} \frac{\partial}{\partial z^{(m)}} \Big)^2 \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]\Big]_{r_1} +$$

$$+ \sum_{\ell=0}^{s} e_n^{(\ell)} \Big[ \sum_{m=0}^{s} \Big\{ O(\varepsilon_n) + O(E(h, m-2)) + O(\varepsilon_n)\, O(E(h, m-2)) +$$

$$+ E(h,m)\Big\} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^{(\ell)} \partial z^{(m)}} \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]\right]_{r_1}\Bigg]$$

Mas,

$$\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{m=0}^{s} \Big\{ O(\varepsilon_n) + O(E(h,m-2)) + O(\varepsilon_n)\ O(E(h,m-2)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + E(h,m) \Big\} \frac{\partial}{\partial z^{(m)}} \right)^2 \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]\right]_{r_1} =$$

$$= O(\varepsilon_n)^2 + O(E(h,s-2))^2 + O(\varepsilon_n)^2\ O(E(h,s-2)) +$$

$$+ O(E(h,s))^2 + O(\varepsilon_n)\ O(E(h,s-2)) + O(\varepsilon_n)\ O(E(h,s)) +$$

$$+ O(E(h,s-2))\ O(E(h,s)) + O(\varepsilon_n)\ O(E(h,s-2))\ O(E(h,s))$$

Aplicando o resultado do teorema 2.1, $\varepsilon_n = O(h^q)$ e como $q_0 = q$; $q_\ell = q-\ell+1$, para $\ell = 1,2,\dots,q$:

$$e_n^{(1+s)} = \sum_{m=0}^{s} \left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}} \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]\right]_{x=x_n} e_n^{(m)} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z^{(s)}} \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]\right]_{x=x_n} \theta_s(x_n, y(x_n))\ h^{q-s+1} + O(h^{q-s+2}) +$$

$$+ O(h^q) + O(h^{q-s+3}) + O(h^{q-s+1})^2 + O(h^q)\ O(h^{q-s+1}) +$$

$$+ O(h^{q-s+3})\ O(h^{q-s+1}) + \Big\{ O(h^q) + O(h^{q-s+3}) +$$

$$+ O(h^{q-s+1}) \Big\} \sum_{\ell=0}^{s} \left\{ \sum_{m=0}^{s} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^{(\ell)}\ \partial z^{(m)}} \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]\right]_{r_1} \right\} e_n^{(\ell)}$$

Faremos agora, um estudo separado para s=1 e s=2, pois para estes casos o lema 2.6 não é suficientemente claro.

I) s=1

$$z_n^{(1)} - z^{(1)}(x_n) = h\sum_{k=0}^{n} w_{1k}\left[\frac{d}{dx}K\right]_{\substack{x=x_n\\ t=x_k\\ U=y_k}} +$$

$$+ e_n\left[\frac{\partial}{\partial y}\left[K\right]_{t=x}\right]_{x=x_n} + \frac{1}{2}\left[\left(e_n\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\left[K\right]_{t=x}\right]_{r_3} -$$

$$-\left[\int_{x_0}^{x}\frac{d}{dx}K\,dt\right]_{x=x_n} =$$

$$= h\sum_{k=0}^{n} w_{1k}\left\{\left[\frac{d}{dx}K\right]_{\substack{x=x_n\\ t=x_k}} + e_k\left[\frac{\partial}{\partial U}\left[\frac{d}{dx}K\right]\right]_{\substack{x=x_n\\ t=x_k}} +\right.$$

$$\left.+ O(\varepsilon_n)^2\right\} + e_n\left[\frac{\partial}{\partial y}\left[K\right]_{t=x}\right]_{x=x_n} + O(\varepsilon_n)^2 -$$

$$- h\sum_{k=0}^{n} w_{1k}\left[\frac{d}{dx}K\right]_{\substack{x=x_n\\ t=x_k}} + E(h,1) = O(\varepsilon_n) + E(h,1)$$

Por outro lado,

$$z_n - z(x_n) = h\sum_{k=0}^{n} w_{ok}\left[K\right]_{\substack{x=x_n\\ t=x_k\\ U=y_k}} - \left[\int_{x_0}^{x} K\,dt\right]_{x=x_n} =$$

$$= h\sum_{k=0}^{n} w_{ok}\left[K\right]_{\substack{x=x_n\\ t=x_k\\ U=y_k}} - h\sum_{k=0}^{n} w_{ok}\left[K\right]_{\substack{x=x_n\\ t=x_k}} + E(h,0) = O(\varepsilon_n) + E(h,0)$$

Portanto

$$z_n^{(i)} - z^{(i)}(x_n) = O(\varepsilon_n) + E(h,i) \quad ; \quad i = 0,1$$

Mas,

$$\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{m=0}^{1} e_n^{(m)} \frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\right)^2 \left[\frac{d}{dx} F\right]\right]_{r_1} =$$

$$= O(\varepsilon_n)^2 \left(\sum_{m=0}^{1} \frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\right)^2 \left[\frac{d}{dx} F\right]\Bigg]_{r_1} = O(\varepsilon_n)^2$$

Então,

$$e_n^{(2)} = \sum_{m=0}^{1} e_n^{(m)} \left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}} \left[\frac{d}{dx} F\right]\right]_{x=x_n} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{1} \left(O(\varepsilon_n) + E(h,m)\right) \left[\frac{\partial}{\partial z^{(m)}} \left[\frac{d}{dx} F\right]\right]_{x=x_n} + O(\varepsilon_n)^2 \quad +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{m=0}^{1} \left(O(\varepsilon_n) + E(h,m)\right) \frac{\partial}{\partial z^{(m)}}\right)^2 \left[\frac{d}{dx} F\right]\right]_{r_1} +$$

$$+ \sum_{\ell=0}^{1} e_n^{(\ell)} \left[\sum_{m=0}^{1} \left(O(\varepsilon_n) + E(h,m)\right) \left[\frac{\partial^2}{\partial y^{(\ell)} \partial z^{(m)}} \left[\frac{d}{dx} F\right]\right]_{r_1}\right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{1} \left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}} \left[\frac{d}{dx} F\right]\right]_{x=x_n} e_n^{(m)} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{1} E(h,m) \left[\frac{\partial}{\partial z^{(m)}} \left[\frac{d}{dx} F\right]\right]_{x=x_n} + O(\varepsilon_n) + O(E(h,1))^2 + O(\varepsilon_n)\, O(E(h,1)) =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y^{(1)}}\left[\frac{d}{dx}\,F\right]\right]_{x=x_n} e_n^{(1)} + \left[\frac{\partial}{\partial z^{(1)}}\left[\frac{d}{dx}\,F\right]\right]_{x=x_n} \theta_1(x_n, y(x_n))\, h^q + O(h^q)$$

II) $s=2$

$$z_n^{(2)} - z^{(2)}(x_n) = h \sum_{k=0}^{n} w_{2k}\left[\frac{d^2}{dx^2}\,K\right]_{\substack{x=x_n\\ t=z_k}} +$$

$$+ h \sum_{k=0}^{n} w_{2k}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{d^2}{dx^2}\,K\right]\right]_{\substack{x=x_n\\ t=x_k}} e_k + O(\varepsilon_n)^2 +$$

$$+ \sum_{j=0}^{1}\left\{\sum_{m=0}^{1} e_n^{(m)}\left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\left[\frac{d^{1-j}}{dx^{1-j}}\left[\left[\frac{d^j}{dx^j}\,K\right]_{t=x}\right]\right]\right]_{x=x_n} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{m=0}^{1} e_n^{(m)}\,\frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\right)^2\left[\frac{d^{1-j}}{dx^{1-j}}\left[\left[\frac{d^j}{dx^j}\,K\right]_{t=x}\right]\right]\right]_{r_3}\right\} -$$

$$-\left[\int_{x_0}^{x}\frac{d^2}{dx^2}\,K\;dt\right]_{x=x_n} = O(\varepsilon_n) + E(h,2)$$

Então,

$$z_n^{(i)} - z^{(i)}(x_n) = O(\varepsilon_n) + E(h,i) \quad ; \quad i=0,1,2$$

$$e_n^{(3)} = \sum_{m=0}^{2} e_n^{(m)}\left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\left[\frac{d^2}{dx^2}\,F\right]\right]_{x=x_n} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{2}\left\{O(\varepsilon_n) + E(h,m)\right\}\left[\frac{\partial}{\partial z^{(m)}}\left[\frac{d^2}{dx^2}\,F\right]\right]_{x=x_n} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{m=0}^{2} e_n^{(m)} \frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\right)^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} F\right]\right]_{r_1} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{m=0}^{2} \left\{O(\varepsilon_n) + E(h,m)\right\} \frac{\partial}{\partial z^{(m)}}\right)^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} F\right]\right]_{r_1} +$$

$$+ \sum_{\ell=0}^{2} e_n^{(\ell)} \left[\sum_{m=0}^{2} \left\{ O(\varepsilon_n) + E(h,m)\right\} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^{(\ell)} \partial z^{(m)}} \left[\frac{d^2}{dx^2} F\right]\right]_{r_1} \right]$$

Mas,

$$\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{m=0}^{2} e_n^{(m)} \frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\right)^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} F\right]\right]_{r_1} = O(\varepsilon_n)^2 + O(E(h,1))^2 + O(\varepsilon_n) O(E(h,1))$$

Por (2.12):

$$e_n^{(2)} = O(\varepsilon_n) + O(E(h,1))$$

Então,

$$\left\{O(\varepsilon_n) + O(E(h,2))\right\} \sum_{\ell=0}^{2} \left[\sum_{m=0}^{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^{(\ell)} \partial z^{(m)}} \left[\frac{d^2}{dx^2} F\right]\right]_{r_1}\right] e_n^{(\ell)} =$$

$$= O(\varepsilon_n)^2 + O(\varepsilon_n)\, O(E(h,1)) + O(\varepsilon_n)\, O(E(h,2)) + O(E(h,1))\, O(E(h,2))$$

Portanto

$$e_n^{(3)} = O(\varepsilon_n) + O(E(h,1)) + \sum_{m=0}^{2} E(h,m) \left[\frac{\partial}{\partial z^{(m)}} \left[\frac{d^2}{dx^2} F\right]\right]_{x=x_n} +$$

$$+ O(\varepsilon_n)\, O(E(h,1)) + O(E(h,2))^2 + O(\varepsilon_n)\, O(E(h,2)) + O(E(h,1))\, O(E(h,2)) =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial z^{(2)}} \left[\frac{d^2}{dx^2} F\right]\right]_{x=x_n} \theta_2(x_n, y(x_n))\, h^{q-1} + O(h^q)$$

Lema 2.7. Nas mesmas condições do lema 2.6 temos:

$$e_n^{(2)} = \left[\frac{\partial}{\partial y^{(1)}} \left[\frac{d}{dx} F\right]\right]_{x=x_n} e_n^{(1)} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z^{(1)}} \left[\frac{d}{dx} F\right]\right]_{x=x_n} \theta_1(x_n, y(x_n))\, h^q + O(h^q)$$

$$e_n^{(1+s)} = \left[\frac{\partial}{\partial z^{(s)}} \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]\right]_{x=x_n} \theta_s(x_n, y(x_n))\, h^{q-s+1} +$$

$$+ O(h^{q-s+2}) \quad ; \quad \text{para} \quad s=2,3,\dots, q$$

Prova. Os casos $s=1$ e $s=2$ já foram discutidos. Mostremos para $s=3,4,\dots, q$.

Do lema 2.6:

$$e_n^{(1+s)} = \sum_{m=0}^{s} \left[\frac{\partial}{\partial y^{(m)}} \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]\right]_{x=x_n} e_n^{(m)} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z^{(s)}} \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]\right]_{x=x_n} \theta_s(x_n, y(x_n))\, h^{q-s+1} + O(h^{q-s+2}) +$$

$$+ O(h^q) + O(h^{q-s+3}) + O(h^{q-s+1})^2 + O(h^q)\ O(h^{q-s+1}) +$$

$$+ O(h^{q-s+3})\ O(h^{q-s+1}) + \Big\{ O(h^q) + O(h^{q-s+3}) +$$

$$+ O(h^{q-s+1}) \Big\} \sum_{\ell=0}^{s} \left\{ \sum_{m=0}^{s} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^{(\ell)} \partial z^{(m)}} \left[\frac{d^s}{dx^s} F\right]\right]_{r_1} \right\} e_n^{(\ell)}$$

De (2.12) segue que:

$$e_n^{(1+i)} = O(\varepsilon_n) + O(E(h,i)) \quad ; \quad i=1,2,\dots, q$$

Portanto

$$e_n^{(1+s)} = \left[\frac{\partial}{\partial z^{(s)}}\left[\frac{d^s}{dx^s}F\right]\right]_{x=x_n} \theta_s(x_n, y(x_n))\, h^{q-s+1} + O(h^{q-s+2}) +$$

$$+ O(h^q) + C(h^{q-s+3}) + O(h^{q-s+1})^2 + O(h^q)\, O(h^{q-s+1}) +$$

$$+ C(h^{q-s+3})\, O(h^{q-s+1}) + O(h^q)\, O(h^{q-s+2}) +$$

$$+ O(h^q)\, O(h^{q-s+3}) + O(h^{q-s+2})\, O(h^{q-s+3}) =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial z^{(s)}}\left[\frac{d^s}{dx^s}F\right]\right]_{x=x_n} \theta_s(x_n, y(x_n))\, h^{q-s+1} + O(h^{q-s+2})$$

Teorema 2.3. Seja $y(x)$ satisfazendo a equação íntegro-diferencial

$$\begin{cases} y^{(1)}(x) = F(x, y(x), \int_{x_0}^{x} K\,(x,t,y(t))\, dt) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

onde $F$ e $K$ são funções de classe $C^{q+2}$ ; $q\geq 1$ inteiro.

Sejam $q_0=q$ ; $q_i = q-i+1$ para $i=1,2,\dots, q$ e suponhamos que os erros de quadratura possam ser definidos por

$$-\left[\int_{x_0}^{x} \frac{d^i}{dx^i} K\, dt\right]_{x=x_n} + h \sum_{k=0}^{n} w_{ik} \left[\frac{d^i}{dx^i} K\right]_{\substack{x=x_n \\ t=x_k}} =$$

$$= \theta_i(x_n, y(x_n))\, h^{q_i} + O(h^{q_i+1}) \quad ;$$

onde $\theta_i$ é uma função de duas variáveis de classe $C^1$.

Sejam os valores $y_n$ determinados pelo algoritmo 1. Então, para $n \geq 0$, inteiro

$$e_n^{(1)} = y_n^{(1)} - y^{(1)}(x_n) = h^q \; e^{(1)}(x_n) + O(h^{q+1})$$

onde $e^{(1)}(x)$ é a solução da equação diferencial

$$\begin{cases} e^{(2)}(x) = \left[\dfrac{\partial}{\partial y^{(1)}} \left[\dfrac{d}{dx} F\right]\right] e^{(1)}(x) - \dfrac{y^{(q+2)}(x)}{(q+1)!} + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{j=1}^{q} \frac{1}{j!} \left[\frac{\partial}{\partial z^{(j)}} \left[\frac{d^j}{dx^j} F\right]\right] \theta_j(x, y(x)) \\ e^{(1)}(x_0) = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

**Prova.** Pelo algoritmo 1,

$$y_{n+1}^{(1)} = y_n^{(1)} + h\, y_n^{(2)} + \frac{h^2}{2!} y_n^{(3)} + \dots + \frac{h^q}{q!} y_n^{(q+1)}$$

Consideremos o desenvolvimento de Taylor para a $y^{(1)}(x)$ num entorno do ponto $x_n$:

$$y^{(1)}(x_{n+1}) = y^{(1)}(x_n) + h\, y^{(2)}(x_n) + \frac{h^2}{2!} y^{(3)}(x_n) + \dots +$$

$$+ \frac{h^q}{q!} y^{(q+1)}(x_n) + \frac{h^{q+1}}{(q+1)!} y^{(q+2)}(x_n) + \frac{h^{q+2}}{(q+2)!} y^{(q+3)}(\eta_n)$$

onde: $x_n < \eta_n < x_{n+1}$

Então,

$$e_{n+1}^{(1)} = y_{n+1}^{(1)} - y^{(1)}(x_{n+1}) = e_n^{(1)} + h\, e_n^{(2)} + \frac{h^2}{2!} e_n^{(3)} + \dots +$$

$$+ \frac{h^q}{q!} e_n^{(q+1)} - \frac{h^{q+1}}{(q+1)!} y^{(q+2)}(x_n) + O(h^{q+2})$$

Como as condições do lema 2.7 são satisfeitas segue que

$$e^{(1)}_{n+1} = e^{(1)}_{n} + h\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y^{(1)}}\left[\frac{d}{dx}F\right]\right]_{x=x_n} e^{(1)}_n + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial}{\partial z^{(1)}}\left[\frac{d}{dx}F\right]\right]_{x=x_n} \theta_1(x_n, y(x_n))\, h^q + O(h^q)\right\} +$$

$$+ \sum_{j=2}^{q} \frac{h^j}{j!}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial z^{(j)}}\left[\frac{d^j}{dx^j}F\right]\right]_{x=x_n} \theta_j(x_n, y(x_n))\, h^{q-j+1} + \right.$$

$$\left. + O(h^{q-j+2})\right\} - \frac{h^{q+1}}{(q+1)!}\, y^{(q+2)}(x_n) + O(h^{q+2})$$

Sejam $\bar{e}^{(1)}_{n+1} = \dfrac{e^{(1)}_{n+1}}{h^q}$ ; $\bar{e}^{(1)}_{n} = \dfrac{e^{(1)}_{n}}{h^q}$ , então

$$\bar{e}^{(1)}_{n+1} = \bar{e}^{(1)}_{n} + h\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y^{(1)}}\left[\frac{d}{dx}F\right]\right]_{x=x_n} \bar{e}^{(1)}_n + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial}{\partial z^{(1)}}\left[\frac{d}{dx}F\right]\right]_{x=x_n} \theta_1(x_n, y(x_n))\right\} + O(h) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{q} \frac{h}{j!}\left[\frac{\partial}{\partial z^{(j)}}\left[\frac{d^j}{dx^j}F\right]\right]_{x=x_n} \theta_j(x_n, y(x_n)) + O(h^2) -$$

$$- \frac{h}{(q+1)!}\, y^{(q+2)}(x_n) + O(h^2) =$$

$$= \bar{e}^{(1)}_{n} + h\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y^{(1)}}\left[\frac{d}{dx}F\right]\right]_{x=x_n} \bar{e}^{(1)}_n - \frac{y^{(q+2)}(x_n)}{(q+1)!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{j!}\left[\frac{\partial}{\partial z^{(j)}}\left[\frac{d^j}{dx^j}F\right]\right]_{x=x_n} \theta_j(x_n, y(x_n))\right\} + O(h) \qquad (2.21)$$

Suponhamos que o algoritmo $y_{n+1}^{(1)} = y_n^{(1)} + h\,y_n^{(2)} + O(h^2)$ de ordem 1, é aplicado para resolver a equação diferencial definida por (2.20). A solução da equação resultante difere da solução da equação (2.21) por um termo da $O(h)$. Portanto,

$$\bar{e}_n^{(1)} - e^{(1)}(x_n) = O(h) \quad ; \quad \text{ou seja,} \quad e_n^{(1)} = h^q\, e^{(1)}(x_n) + O(h^{q+1}).$$

Vamos agora, provar o teorema da forma assintótica para o erro de truncamento $e_n = y_n - y(x_n)$.

Teorema 2.4. Nas mesmas condições do teorema 2.3, temos que o comportamento assintótico do erro de truncamento na solução da equação

$$\begin{cases} y^{(1)}(x) = F(x,\, y(x),\, \int_{x_0}^{x} K(x,t,\, y(t))\, dt) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

pelo algoritmo 1, é dado pela fórmula:

$$e_n = y_n - y(x_n) = h^q\, g(x_n) + O(h^{q+1})$$

onde $g(x)$ é a solução da equação diferencial

$$\begin{cases} g^{(1)}(x) = e^{(1)}(x) - \dfrac{y^{(q+1)}(x)}{(q+1)!} \\ g(x_0) = 0 \end{cases} \qquad (2.22)$$

Prova. Pelo algoritmo 1,

$$y_{n+1} = y_n + h\,y_n^{(1)} + \frac{h^2}{2!}\, y_n^{(2)} + \dots + \frac{h^q}{q!}\, y_n^{(q)}$$

Usando o desenvolvimento de Taylor para o $y(x)$ num entorno do ponto $x_n$, segue que:

$$e_{n+1} = y_{n+1} - y(x_{n+1}) = e_n + h\,e_n^{(1)} + \frac{h^2}{2!}\, e_n^{(2)} + \dots +$$

$$+ \frac{h^q}{q!} e_n^{(q)} - \frac{h^{q+1}}{(q+1)!} y^{(q+1)}(x_n) + O(h^{q+2})$$

Como as condições do lema 2.7 e do teorema 2.3 são satisfeitas, temos que

$$e_{n+1} = e_n + h\left\{h^q\, e^{(1)}(x_n) + O(h^{q+1})\right\} +$$

$$+ \frac{h^2}{2!}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y^{(1)}}\left[\frac{d}{dx} F\right]\right]_{x=x_n} (h^q\, e^{(1)}(x_n) + O(h^{q+1})) +\right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial}{\partial z^{(1)}}\left[\frac{d}{dx} F\right]\right]_{x=x_n} \theta_1(x_n, y(x_n))\, h^q + O(h^q)\right\} +$$

$$+ \sum_{j=3}^{q} \frac{h^j}{j!}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial z^{(j-1)}}\left[\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} F\right]\right]_{x=x_n} \theta_{j-1}(x_n, y(x_n))\, h^{q-(j-1)+1} +\right.$$

$$\left. + O(h^{q-(j-1)+2})\right\} - \frac{h^{q+1}}{(q+1)!} y^{(q+1)}(x_n) + O(h^{q+2}) =$$

$$= e_n + h^{q+1} e^{(1)}(x_n) - \frac{h^{q+1}}{(q+1)!} y^{(q+1)}(x_n) + O(h^{q+2})$$

Sejam $\bar{g}_{n+1} = \dfrac{e_{n+1}}{h^q}$ ; $\bar{g}_n = \dfrac{e_n}{h^q}$ , então

$$\bar{g}_{n+1} = \bar{g}_n + h\left\{e^{(1)}(x_n) - \frac{y^{(q+1)}(x_n)}{(q+1)!}\right\} + O(h^2)$$

A mesma equação, a menos do termo da $O(h^2)$, resultaria se o problema de valor inicial (2.22) fosse resolvido pelo algoritmo $y_{n+1} = y_n + h\, y_n^{(1)} + O(h^2)$ de ordem 1. Portanto, $\bar{g}_n - g(x_n) = O(h)$, ou seja, $e_n = h^q\, g(x_n) + O(h^{q+1})$.

## 2.6. Aplicação da expansão assintótica do erro de truncamento

O teorema 2.4 garante que

$$e_n = y_n - y(x_n) = h^q g(x_n) + O(h^{q+1}) \qquad (2.23)$$

onde $g(x)$ é a solução da equação diferencial

$$\begin{cases} g^{(1)}(x) = e^{(1)}(x) - \dfrac{y^{(q+1)}(x)}{(q+1)!} \\ g(x_o) = 0 \end{cases}$$

Em problemas práticos a solução exata não é conhecida e a função $g(x)$ não é, em geral, facilmente determinada. Mesmo nestes casos a expressão (2.23) é útil conforme se observa na seguinte aplicação da expansão assintótica do erro de truncamento.

De (2.23) segue que

$$y_n = y(x_n) + h^q g(x_n) + O(h^{q+1}) \qquad (2.24)$$

Se aplicarmos o algoritmo 1 ao mesmo problema, usando comprimento de passo $(sh)$, onde $s \neq 0$, $s \neq 1$, então a aproximação $\hat{y}_n$ para $y(x_n)$ satisfaz:

$$\hat{y}_n = y(x_n) + s^q h^q g(x_n) + O(h^{q+1}) \qquad (2.25)$$

Multiplicando (2.24) por $s^q$ e subtraindo de (2.25) temos,

$$\hat{y}_n - s^q y_n = y(x_n) - s^q y(x_n) + O(h^{q+1})$$

Resolvendo para $y(x_n)$, o resultado é:

$$y(x_n) = \frac{s^q y_n - \hat{y}_n}{s^q - 1} + O(h^{q+1})$$

Esta relação mostra que se h é pequeno, o valor

$\bar{y}_n = \dfrac{s^q y_n - \hat{y}_n}{s^q - 1}$ aproxima a solução exata com um erro cuja ordem excede a ordem do método por 1.

A técnica acima foi usada primeiramente por L.F.Richardson [1927] e é conhecida por Extrapolação de Richardson.

## CAPÍTULO III

## ALGORITMO DE PASSO MÚLTIPLO DE ORDEM $\alpha$

Neste capítulo é discutido o problema de resolver numericamente a equação íntegro-diferencial do tipo.

$$\begin{cases} y^{(v)}(x) = F(x,\ y(x),\ y^{(1)}(x), \dots,\ y^{(v-1)}(x),\ z(x)) \\ y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)} \quad ; \quad i=0,1,\dots,\ v-1 \end{cases} \tag{3.1}$$

onde:

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, y(x), y^{(1)}(x), \dots,\ y^{(v-1)}(x),\ t,\ y^{(t)}, y^{(1)}(t), \dots,\ y^{(v)}(t))\ dt,$$

$F$ e $K$ são funções de classe $C^s$,
utilizando-se um algoritmo baseado nos métodos de passo múltiplo.

Como os métodos de passo múltiplo exigem certos valores iniciais para que possam ser usados; os algoritmos 1 e 2 definidos no capítulo II, poderão funcionar como métodos para fornecer tais valores iniciais.

São ainda discutidas limitação para o erro de truncamento e ordem de convergência do citado algoritmo.

Finalmente, é apresentado um algoritmo simples, que calcula valores iniciais para a equação

$$\begin{cases} y^{(1)}(x) = F(x, y(x),\ \int_{x_0}^{x} K(x,t,y(t))\ dt) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

caso particular de (3.1)

### 3.1. Definição do Algoritmo 3

Seja a equação íntegro-diferencial do tipo (3.1)

Temos:

$$\begin{cases} y^{(i)}(x_{n+1}) = y^{(i)}(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y^{(i+1)}(x)dx \quad ; \quad i=0,1,\dots, v-1 \\ y^{(v)}(x_{n+1}) = F(x_{n+1}, y(x_{n+1}), y^{(1)}(x_{n+1}), \dots, y^{(v-1)}(x_{n+1}), z(x_{n+1})) \end{cases} \tag{3.2}$$

onde

$$z(x_{n+1}) = \int_{x_0}^{x_{n+1}} K(x_{n+1}, y(x_{n+1}), \dots, y^{(v-1)}(x_{n+1}), t, y(t), \dots, y^{(v)}(t))dt$$

Para construir o algoritmo teremos que aproximar as integrais definidas em (3.2) por regras de quadratura apropriadas. Assim, consideremos as seguintes hipóteses:

B.1. Sejam $w_{nk}$, $k=0,1,\dots, n$ um conjunto de pesos reais e $q_0$ um número positivo. Seja $\sum_{k=0}^{n} |w_{nk}| \leq W$ para todo n. Para g suficientemente diferenciável, suponhamos que:

$$\left| \int_{x_0}^{x_n} g(t,s)ds - h \sum_{k=0}^{n} w_{nk}\, g(t,x_k) \right| = E(h,0) = O(h^{q_0})$$

B.2. $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx$ é aproximada por uma regra de quadratura baseada em interpolação sobre r-pontos, ou seja,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx = h\left[\alpha_r\, f(x_{n+1}) + \dots + \alpha_1\, f(x_{n-(r-2)})\right] + O(h^{r+1})$$

onde: $h\,\alpha_r = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_{n-(r-2)})}{(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}-x_{n-1})\dots(x_{n+1}-x_{n-(r-2)})}dx ;\dots;$

$$h\alpha_1 = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x-x_{n+1})(x-x_n)\dots(x-x_{n-(r-3)})}{(x_{n-(r-2)}-x_{n+1})(x_{n-(r-2)}-x_n)\dots(x_{n-(r-2)}-x_{n-(r-3)})}\, dx$$

Deste modo, conseguimos as seguintes equações:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(i)} = y_n^{(i)} + h\left[\alpha_r\, y_{n+1}^{(i+1)} + \dots + \alpha_1\, y_{n-(r-2)}^{(i+1)}\right] & ; \quad i=0,1,\dots,\ v-1 \\ y_{n+1}^{(v)} = F(x_{n+1},\, y_{n+1}, \dots,\, y_{n+1}^{(v-1)},\ z_{n+1}) & \end{cases} \tag{3.3}$$

onde:

$$z_{n+1} = h\sum_{k=0}^{n+1} w_{n+1,k}\, K(x_{n+1},\, y_{n+1}, \dots,\, y_{n+1}^{(v-1)},\ x_k, y_k, \dots,\, y_k^{(v)})$$

Algoritmo 3

1) Para $n=0,1,\dots,t$ valores para $y_n^{(i)}$, $i=0,1,\dots,v$ são calculados por algum método de um passo (por exemplo, os Algoritmos 1 ou 2).

2) Para $n=t,\dots,N-1$, calculamos valores para $y_{n+1}^{(i)}$; $i=0,1,\dots,v$ resolvendo as equações de (3.3)

## 3.2. Convergência do Algoritmo 3

Para provar o teorema da convergência do algoritmo 3 precisamos calcular uma limitação para o erro de truncamento. Inicialmente devemos examinar os

$$e_k^{(i)} = y_k^{(i)} - y^{(i)}(x_k) \quad ; \quad i=0,1,\dots,\ v$$

Subtraindo (3.2) de (3.3), temos:

$$\begin{cases} e_{n+1}^{(i)} = e_n^{(i)} + h\left[\alpha_r\, y_{n+1}^{(i+1)} + \dots + \alpha_1\, y_{n-(r-2)}^{(i+1)}\right] - \int_{x_n}^{x_{n+1}} y^{(i+1)}(x)\, dx \\ \qquad i=0,1,\dots,\ v-1 \\ e_{n+1}^{(v)} = F(x_{n+1},\ y_{n+1}, \dots,\ y_{n+1}^{(v-1)},\ z_{n+1}) - \\ \qquad - F(x_{n+1},\ y(x_{n+1}), \dots,\ y^{(v-1)}(x_{n+1}), z(x_{n+1})) \end{cases} \tag{3.4}$$

onde:

$$z_{n+1} = h\sum_{k=0}^{n+1} w_{n+1,k}\, K(x_{n+1},\, y_{n+1}, \dots,\, y_{n+1}^{(v-1)},\ x_k, y_k, \dots,\, y_k^{(v)}) \text{ e}$$

$$z(x_{n+1}) = \int_{x_0}^{x_{n+1}} K(x_{n+1}, y(x_{n+1}), \dots, y^{(v-1)}(x_{n+1}), t, y(t), \dots, y^{(v)}(t))\, dt$$

Usando desenvolvimento de Taylor para a F num entorno do ponto $(x_{n+1}, y(x_{n+1}), \dots, y^{(v-1)}(x_{n+1}), z(x_{n+1}))$, temos:

$$e_{n+1}^{(v)} = \sum_{m=0}^{v-1} e_{n+1}^{(m)} \left[\frac{\partial F}{\partial y^{(m)}}\right]_{q_1} + (z_{n+1} - z(x_{n+1})) \left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{q_1} \qquad (3.5)$$

Consideremos agora, o desenvolvimento de Taylor para a K num entorno do ponto

$(x_{n+1}, y(x_{n+1}), \dots, y^{(v-1)}(x_{n+1}), x_k, y(x_k), \dots, y^{(v)}(x_k))$;

então,

$$z_{n+1} - z(x_{n+1}) = h \sum_{k=0}^{n+1} w_{n+1,k} \left\{ [K]_{\substack{x=x_{n+1}\\ t=x_k}} + \sum_{u=0}^{v-1} e_{n+1}^{(u)} \left[\frac{\partial K}{\partial y^{(u)}}\right]_{q_2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\ell=0}^{v} e_k^{(\ell)} \left[\frac{\partial K}{\partial U^{(\ell)}}\right]_{q_2} \right\} -$$

$$- \int_{x_0}^{x_{n+1}} K(x_{n+1}, y(x_{n+1}), \dots, y^{(v-1)}(x_{n+1}), t, y(t), \dots, y^{(v)}(t))\, dt$$

Sejam:

$$\left|\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(m)}}\right]\right| \le K_1 \quad ; \quad \left|\left[\frac{\partial K}{\partial y^{(u)}}\right]\right| \le K_2 \quad ;$$

$$\left|\left[\frac{\partial K}{\partial U^{(\ell)}}\right]\right| \le K_3 \quad ; \quad \left|\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]\right| \le K_4$$

$$\left|e_{n+1}^{(v)}\right| \le K_1 \sum_{m=0}^{v-1} \left|e_{n+1}^{(m)}\right| + h K_2 K_4 \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{u=0}^{v-1} \left|w_{n+1,k}\right| \left|e_{n+1}^{(u)}\right| +$$

$$+ h K_3 K_4 \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{\ell=0}^{v} \left|w_{n+1,k}\right| \left|e_k^{(\ell)}\right| + K_4\, E(h,0) \qquad (3.6)$$

Lema 3.1. Seja $y(x)$ satisfazendo a equação íntegro-diferencial (3.1). Suponhamos que a condição B.1 seja satisfeita. Então, existem constantes não negativas $K_4, K_6, K_7, K_8$ e $K_9$ tal que para $h < \bar{h} < \dfrac{1}{K_8 |w_{n+1,n+1}|}$,

$$|e_{n+1}^{(v)}| \leq \frac{K_6}{1 - hK_8 |w_{n+1,n+1}|} \sum_{m=0}^{v-1} |e_{n+1}^{(m)}| + \frac{hK_7}{1-hK_8 |w_{n+1,n+1}|} \sum_{k=0}^{n} |e_k^{(v)}| +$$

$$+ \frac{hK_9}{1-hK_8 |w_{n+1,n+1}|} \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{m=0}^{v-1} |e_k^{(m)}| + \frac{K_4}{1-hK_8 |w_{n+1,n+1}|} E(h,0)$$

Prova. De (3.6) segue que,

$$|e_{n+1}^{(v)}| \leq K_1 \sum_{m=0}^{v-1} |e_{n+1}^{(m)}| + hK_2 K_4 W \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{u=0}^{v-1} |e_{n+1}^{(u)}| +$$

$$+ hK_3 K_4 W \sum_{k=0}^{n} |e_k^{(v)}| + hK_3 K_4 |w_{n+1,n+1}| |e_{n+1}^{(v)}| +$$

$$+ hK_3 K_4 W \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{\ell=0}^{v-1} |e_k^{(\ell)}| + K_4 E(h,0) \leq$$

$$\leq K_1 \sum_{m=0}^{v-1} |e_{n+1}^{(m)}| + (b-a) K_2 K_4 W \sum_{m=0}^{v-1} |e_{n+1}^{(m)}| +$$

$$+ hK_3 K_4 W \sum_{k=0}^{n} |e_k^{(v)}| + hK_3 K_4 |w_{n+1,n+1}| |e_{n+1}^{(v)}| +$$

$$+ hK_4 K_5 W \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{m=0}^{v-1} |e_k^{(m)}| + K_4 E(h,0)$$

onde: $K_5 = K_2 + K_3$

Sejam: $K_6 = K_1 + (b-a) K_2 K_4 W$ ; $K_7 = K_3 K_4 W$ ;
$K_8 = K_3 K_4$ ; $K_9 = K_4 K_5 W$

$$|e_{n+1}^{(v)}| \le K_6 \sum_{m=0}^{v-1} |e_{n+1}^{(m)}| + h K_7 \sum_{k=0}^{n} |e_k^{(v)}| +$$

$$+ h K_8 |w_{n+1,n+1}| |e_{n+1}^{(v)}| + h K_9 \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{m=0}^{v-1} |e_k^{(m)}| + K_4 E(h,0)$$

Definição

$$\tilde{\varepsilon}_n = \max_{\substack{0 \le i \le v-1 \\ t \le k \le n}} |e_k^{(i)}| \quad , \quad n=t+1, \ldots, N$$

Então do lema 3.1 segue que,

$$|e_{n+1}^{(v)}| \le \frac{K_6 v}{1-h K_8 |w_{n+1,n+1}|} \tilde{\varepsilon}_{n+1} + \frac{h K_7}{1-h K_8 |w_{n+1,n+1}|} \sum_{k=0}^{n} |e_k^{(v)}| +$$

$$+ \frac{h K_9}{1-h K_8 |w_{n+1,n+1}|} \sum_{k=0}^{t} \sum_{m=0}^{v-1} |e_k^{(m)}| + \frac{h K_9}{1-h K_8 |w_{n+1,n+1}|} \sum_{k=t+1}^{n+1} \sum_{m=0}^{v-1} \tilde{\varepsilon}_k +$$

$$+ \frac{K_4}{1-h K_8 |w_{n+1,n+1}|} E(h,0)$$

Lema 3.2. Suponhamos que as condições do lema 3.1 sejam satisfeitas e que os valores iniciais $y_n^{(i)}$ ; $i=0,1,\ldots, v$; $n=0,1,\ldots,t$ sejam calculados tal que os erros $e_n^{(i)}$; $i=0,1,\ldots,v$; $n=0,1,\ldots,t$ sejam da $O(h^q)$. Então;

$$|e_{n+1}^{(v)}| \le h K_{13} \sum_{k=0}^{t} |e_k^{(v)}| + K_{14} \tilde{\varepsilon}_{n+1} + K_{15} E(h,0) + O(h^q)$$

onde: $K_{13}, K_{14}, K_{15}$ são constantes não negativas e $K_{14} \ge 1$.

Prova. Temos,

$$|e_{n+1}^{(v)}| \le \left\{ \frac{K_6 v}{1-h K_8 |w_{n+1,n+1}|} + \frac{(b-a) K_9 v}{1-h K_8 |w_{n+1,n+1}|} \right\} \tilde{\varepsilon}_{n+1} +$$

$$+ \frac{h K_7}{1-h K_8 | w_{n+1,n+1}|} \sum_{k=0}^{n} |e_k^{(v)}| + \frac{(b-a)\, K_9\, v}{1-h K_8 | w_{n+1,n+1}|} O(h^q) +$$

$$+ \frac{K_4}{1-h K_8 | w_{n+1,n+1}|} E(h,0) \leq$$

$$\leq K_{10}\ \tilde{\varepsilon}_{n+1} + h K_{11} \sum_{k=0}^{n} |e_k^{(v)}| + K_{12}\ E(h,0) + O(h^q)$$

Aplicando o corolário 1.1:

$$\left|e_{n+1}^{(v)}\right| \leq h K_{11}\ e^{hK_{11}(n-t)} \sum_{k=0}^{t} \left|e_k^{(v)}\right| + h K_{11}\ e^{hK_{11}(n-t)} \sum_{k=t+1}^{n} \Big[ K_{10}\ \tilde{\varepsilon}_k +$$

$$+ K_{12}\ E(h,0) + O(h^q) \Big] + K_{10}\ \tilde{\varepsilon}_{n+1} + K_{12}\ E(h,0) + O(h^q) \leq$$

$$\leq h K_{11}\ e^{(b-a)K_{11}} \sum_{k=0}^{t} |e_k^{(v)}| + (b-a)\, K_{11}\ e^{(b-a)K_{11}} K_{10}\ \tilde{\varepsilon}_{n+1} +$$

$$+ (b-a) K_{11}\ e^{(b-a)K_{11}} K_{12}\ E(h,0) + O(h^q) + K_{10}\ \tilde{\varepsilon}_{n+1} + K_{12}\ E(h,0)$$

Sejam

$$K_{13} = K_{11}\ e^{(b-a)K_{11}} \quad ; \quad \bar{K}_{14} \geq \max\left\{(b-a)\ K_{13} K_{10},\ K_{10}, 1\right\} \quad ;$$

$$K_{15} = (b-a)\ K_{13}\ K_{12} + K_{12} \quad ; \quad K_{14} = 2\bar{K}_{14}$$

$$|e_{n+1}^{(v)}| \leq h K_{13} \sum_{k=0}^{t} |e_k^{(v)}| + K_{14}\ \tilde{\varepsilon}_{n+1} + K_{15}\ E(h,0) + O(h^q)$$

Lema 3.3. Seja $y(x)$ satisfazendo a equação íntegro-diferencial (3.1). Suponhamos que a condição B.2. seja satisfeite. Então, para $i=0,1,\dots, v-1$,

$$\left|e_{n+1}^{(i)}\right| \leq \left|e_n^{(i)}\right| + h\left[|\alpha_r|\,|e_{n+1}^{(i+1)}| + \dots + |\alpha_1|\,|e_{n-(r-2)}^{(i+1)}|\right] + O(h^{r+1})$$

Prova. De (3.4) segue que:

$$|e_{n+1}^{(i)}| \leq |e_n^{(i)}| + \Big|h\left[\alpha_r\, y_{n+1}^{(i+1)} + \dots + \alpha_1\, y_{n-(r-2)}^{(i+1)}\right] -$$

$$- h\left[\alpha_r\, y^{(i+1)}(x_{n+1}) + \dots + \alpha_1\, y^{(i+1)}(x_{n-(r-2)})\right]\Big| + O(h^{r+1}) =$$

$$= |e_n^{(i)}| + \Big|h\left[\alpha_r\, e_{n+1}^{(i+1)} + \dots + \alpha_1\, e_{n-(r-2)}^{(i+1)}\right]\Big| + O(h^{r+1}) \leq$$

$$\leq |e_n^{(i)}| + h\left[|\alpha_r|\,|e_{n+1}^{(i+1)}| + \dots + |\alpha_1|\,|e_{n-(r-2)}^{(i+1)}|\right] + O(h^{r+1})$$

Teorema 3.1. Seja $y(x)$ satisfazendo a equação íntegro-diferencial (3.1). Suponhamos que as condições B.1. e B.2. sejam satisfeitas com $q_0=q$ e que os valores iniciais $y_n^{(i)}$; $i=0,1,\dots,v$ ; $n=0,1,\dots,t$ sejam calculados tal que os erros $e_n^{(i)}$ ; $i=0,1,\dots,v$ ; $n=0,1,\dots,t$ sejam da $O(h^q)$.

Sejam os valores $y_n$, $n \geq t+1$, determinados pelo Algoritmo 3. Então,

1º) $$\tilde{\varepsilon}_n \leq e^{(x_n-a)\beta_1 K_{14} K_{16}}\, \tilde{\varepsilon}_t + \frac{e^{(x_n-a)\beta_1 K_{14} K_{16}}-1}{\beta_1 K_{14} K_{16}} \left\{h\beta_1 K_{13} K_{16} \sum_{k=0}^{t} |e_k^{(v)}| + \right.$$

$$\left. + O(h^q) + O(h^r)\right\} \quad ; \text{ se } h < \bar{h} < \frac{1}{K_8 |w_{n+1,n+1}|} \quad ; \quad K_{14} \geq 1.$$

2º) $$\lim_{\substack{h\to 0\\ hn=cte}} \max_{t+1 \leq j \leq n} |y(x_j) - y_j| = 0$$

3º) O algoritmo 3 converge com ordem $\alpha$ ; onde $\alpha = \min\{q,r\}$

Prova. Temos, para $i=0,1,\dots,v-1$:

$$|e_{n+1}^{(i)}| \leq |e_n^{(i)}| + h\left[|\alpha_r|\,|e_{n+1}^{(i+1)}| + \dots + |\alpha_1|\,|e_{n-(r-2)}^{(i+1)}|\right] + O(h^{r+1})$$

Seja:

$$\tilde{\varepsilon}_j = \max_{\substack{0\leq i\leq v\\ 0\leq k\leq j}} |e_k^{(i)}| \qquad ; \qquad j=0,1,\dots,t$$

$$|e_{n+1}^{(i)}| \leq \tilde{\varepsilon}_n + h\left[|\alpha_r| \max\left\{\tilde{\varepsilon}_{n+1},\ |e_{n+1}^{(v)}|\right\} + \dots +\right.$$

$$\left. + |\alpha_1| \max\left\{\tilde{\varepsilon}_{n-(r-2)},\ |e_{n-(r-2)}^{(v)}|\right\}\right] + O(h^{r+1})$$

Aplicando o lema 3.2 segue que

$$|e_{n+1}^{(i)}| \leq \tilde{\varepsilon}_n + h^2\,\beta_1 K_{13} \sum_{k=0}^{t} |e_k^{(v)}| + h\,\beta_1 K_{14}\,\tilde{\varepsilon}_{n+1} +$$

$$+ h\,\beta_1 K_{15}\,E(h,0) + O(h^{q+1}) + O(h^{r+1})$$

onde: $\beta_1 = |\alpha_r| + \dots + |\alpha_1|$ ; $n=t,t+1,\dots, N-1$
$i=0,1,\dots, v-1$

Portanto

$$\tilde{\varepsilon}_{n+1} \leq \tilde{\varepsilon}_n + h^2 \beta_1 K_{13} \sum_{k=0}^{t} |e_k^{(v)}| + h\,\beta_1 K_{14}\,\tilde{\varepsilon}_{n+1} + O(h^{q+1}) + O(h^{r+1})$$

Seja $h < \bar{h} < \dfrac{1}{\beta_1 K_{14}}$ ; então,

$$\tilde{\varepsilon}_{n+1} \leq \frac{1}{1-h\beta_1 K_{14}}\,\tilde{\varepsilon}_n + \frac{h^2\beta_1 K_{13}}{1-h\beta_1 K_{14}} \sum_{k=0}^{t} |e_k^{(v)}| + O(h^{q+1}) + O(h^{r+1})$$

ou seja,

$$\tilde{\varepsilon}_{n+1} \leq \left(1 + \frac{h\beta_1 K_{14}}{1-h\beta_1 K_{14}}\right)\tilde{\varepsilon}_n + \frac{h^2\beta_1 K_{13}}{1-h\beta_1 K_{14}} \sum_{k=0}^{t} |e_k^{(v)}| + O(h^{q+1}) + O(h^{r+1})$$

Aplicando o corolário 1.2, com:

$A = 1+h\,\beta_1\,K_{14}\,K_{16}$ ; $\delta = h\,\beta_1\,K_{14}\,K_{16}$ ;

$$B = h^2\beta_1\,K_{13}\,K_{16}\sum_{k=0}^{t}|e_k^{(v)}| + O(h^{q+1}) + O(h^{r+1})$$

onde: $K_{16} = (1-h\,\beta_1\,K_{14})^{-1}$ ; para $h\,\beta_1\,K_{14} < 1$

$$\tilde{\varepsilon}_n \le e^{nh\beta_1 K_{14}K_{16}}\tilde{\varepsilon}_t + \frac{e^{nh\beta_1 K_{14}K_{16}}-1}{h\beta_1 K_{14}K_{16}}\left\{h^2\beta_1\,K_{13}K_{16}\sum_{k=0}^{t}|e_k^{(v)}| + O(h^{q+1}) + O(h^{r+1})\right\}$$

Mas, $\tilde{\varepsilon}_t = O(h^q)$, então,

$$\tilde{\varepsilon}_n \le e^{(x_n-a)\beta_1 K_{14}K_{16}}\tilde{\varepsilon}_t + \frac{e^{(x_n-a)\beta_1 K_{14}K_{16}}-1}{\beta_1 K_{14}K_{16}}\left\{h\,\beta_1 K_{13}K_{16}\sum_{k=0}^{t}|e_k^{(v)}| + O(h^q) + O(h^r)\right\} = O(h^{\alpha})$$

onde: $\alpha = \min\{q,r\}$.

Assim,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ hn=cte}}\ \max_{t+1\le j\le n}|y(x_j)-y_j| \le \lim_{\substack{h\to 0\\ hn=cte}}\tilde{\varepsilon}_n = 0$$

3.3. Algoritmo para determinar valores iniciais

Como vimos na definição do algoritmo 3, métodos de passo múltiplo exigem para sua aplicação certos valores iniciais. Vamos discutir agora, um método simples localmente da $O(h^5)$ para obter tais valores iniciais e que se aplica a seguinte equação:

$$\begin{cases} y^{(1)}(x) = F(x, y(x), z(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.7}$$

onde: $z(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, t, y(t))\, dt$

Integrando a equação (3.7) de $x_0$ a $x_k$, temos

$$y(x_k) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_k} F(s, y(s), z(s))\, ds$$

onde: $z(s) = \int_{x_0}^{s} K(s, t, y(t))\, dt$

Assim,

$$\begin{cases} y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} F(s, y(s), z(s))\, ds \\ y(x_2) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_2} F(s, y(s), z(s))\, ds \end{cases}$$

Usando a regra de Simpson, escrevemos:

$$y(x_1) = y(x_0) + \frac{h}{6}\Big[F(x_0, y(x_0), z(x_0)) + 4F(x_{1/2}, y(x_{1/2}), z(x_{1/2})) + $$
$$+ F(x_1, y(x_1), z(x_1))\Big] + O(h^5)$$

$$y(x_2) = y(x_0) + \frac{h}{3}\Big[F(x_0, y(x_0), z(x_0)) + 4F(x_1, y(x_1), z(x_1)) + $$
$$+ F(x_2, y(x_2), z(x_2)) + O(h^5).$$

Obtemos então, as seguintes aproximações para $y_1$ e $y_2$:

$$\begin{cases} y_1 = y_o + \frac{h}{6}\left[F(x_o, y_o, z_o) + 4F(x_{1/2}, y_{1/2}, z_{1/2}) + F(x_1\, y_1, z_1)\right] \\ y_2 = y_o + \frac{h}{3}\left[F(x_o, y_o, z_o) + 4F(x_1, y_1, z_1) + F(x_2, y_2, z_2)\right] \end{cases} \tag{3.8}$$

Por um esquema interpolatório aproximamos $y(x_{1/2})$;

$$y_{1/2} = \frac{3}{8}\, y_o + \frac{3}{4}\, y_1 - \frac{1}{8}\, y_2 \tag{3.9}$$

e pelo desenvolvimento de Taylor calculamos uma aproximação para $y(x_{1/4})$, ou seja,

$$y_{1/4} = y_o + \frac{h}{4}\, y^{(1)}(x_o) + \left(\frac{h}{4}\right)^2 \frac{1}{2!}\, y^{(2)}(x_o) \tag{3.10}$$

onde: $y^{(1)}(x_o) = F(x_o, y_o, z(x_o))$

$$y^{(2)}(x_o) = \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{x=x_o} + \left[\frac{\partial F}{\partial y}\, F\right]_{x=x_o} + \left[\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{x=x_o}\right] K(x_o, x_o, y_o)$$

$z_o = z(x_o) = 0$

Devemos determinar valores apropriados para $z_{1/2}$, $z_1$ e $z_2$. Usando a regra de Simpson, temos:

$$z(x_{1/2}) = \int_{x_o}^{x_{1/2}} K(x_{1/2}\,, t, y(t))\, dt =$$

$$= \frac{h}{12}\left[K(x_{1/2}\,, x_o, y_o) + 4K(x_{1/2}, x_{1/4}, y(x_{1/4})) + \right.$$

$$\left. + K(x_{1/2}, x_{1/2}, y(x_{1/2}))\right] + O(h^5)$$

$$z(x_1) = \int_{x_o}^{x_1} K(x_1, t, y(t))\, dt = \frac{h}{6}\left[K(x_1, x_o, y_o) + 4K(x_1, x_{1/2}, y(x_{1/2})) + \right.$$

$$+ K(x_1, x_1, y(x_1))\Big] + O(h^5)$$

$$z(x_2) = \int_{x_0}^{x_2} K(x_2, t, y(t))\ dt =$$

$$= \frac{h}{3}\Big[K(x_2, x_0, y_0) + 4K(x_2, x_1, y(x_1)) + K(x_2, x_2, y(x_2))\Big] + O(h^5)$$

Portanto

$$\begin{cases} z_{1/2} = \frac{h}{12}\Big[K(x_{1/2}, x_0, y_0) + 4K(x_{1/2}, x_{1/4}, y_{1/4}) + K(x_{1/2}, x_{1/2}, y_{1/2})\Big] \\ z_1 = \frac{h}{6}\Big[K(x_1, x_0, y_0) + 4K(x_1, x_{1/2}, y_{1/2}) + K(x_1, x_1, y_1)\Big] \\ z_2 = \frac{h}{3}\Big[K(x_2, x_0, y_0) + 4K(x_2, x_1, y_1) + K(x_2, x_2, y_2)\Big] \end{cases} \qquad (3.11)$$

Obtidos os valores $y_1$ e $y_2$, vamos considerar agora, o caso de achar $y_k$ ; $k=3,4,5,\dots, n$

Temos

$$y(x_k) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_{k-2}} F(s, y(s), z(s))\ ds + \int_{x_{k-2}}^{x_k} F(s, y(s), z(s))\ ds =$$

$$= y(x_{k-2}) + \int_{x_{k-2}}^{x_k} F(s, y(s), z(s))\ ds$$

Então, usando a regra de Simpson:

$$y_k = y_{k-2} + \frac{h}{3}\Big[F(x_{k-2}, y_{k-2}, z_{k-2}) + 4F(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}) +$$

$$+ F(x_k, y_k, z_k)\Big] \qquad (3.12)$$

Pela regra $\frac{3}{8}$ de Simpson, determinamos a aproximação $z_3$ para $z(x_3) = \int_{x_o}^{x_3} K(x_3, t, y(t))\, dt$

$$z_3 = \frac{3h}{8}\Big[K(x_3, x_o, y_o) + 3K(x_3, x_1, y_1) + 3K(x_3, x_2, y_2) +$$

$$+ K(x_3, x_3, y_3)\Big] \qquad (3.13)$$

Para k=4,5,..., n procedemos do seguinte modo:

1º) Se k é par podemos aplicar a regra de Simpson para obter a seguinte aproximação $z_k$ para

$$z(x_k) = \int_{x_o}^{x_k} K(x_k, t, y(t))\, dt$$

$$z_k = \frac{h}{3}\Big[K(x_k, x_o, y_o) + 4K(x_k, x_1, y_1) + 2K(x_k, x_2, y_2) + \dots +$$

$$+ 4K(x_k, x_{k-1}, y_{k-1}) + K(x_k, x_k, y_k)\Big] \qquad (3.14)$$

2º) Se k é ímpar aplicamos a regra de Simpson e a regra $\frac{3}{8}$ de Simpson e assim $z(x_k)$ será aproximada por:

$$z_k = \frac{h}{3}\Big[K(x_k, x_o, y_o) + 4K(x_k, x_1, y_1) + 2K(x_k, x_2, y_2) + \\ + \cdots + 4K(x_k, x_{k-4}, y_{k-4}) + K(x_k, x_{k-3}, y_{k-3})\Big] + \\ + \frac{3h}{8}\Big[K(x_k, x_{k-3}, y_{k-3}) + 3K(x_k, x_{k-2}, y_{k-2}) + \\ + 3K(x_k, x_{k-1}, y_{k-1}) + K(x_k, x_k, y_k)\Big] \qquad (3.15)$$

Algoritmo 4

1) $y_{1/4}$ e $y_{1/2}$ são calculados por (3.10) e (3.9)

2) $z_{1/2}$, $z_1$ e $z_2$ são calculados por (3.11)

3) $y_1$ e $y_2$ são obtidos resolvendo o sistema (3.8)

4) Para $k=3,4,5,\ldots, n$

   a) calculamos $z_3$ por (3.13)

   b) calculamos $z_k$ por (3.14) se $k$ for par ($k \geq 4$),

   ou por (3.15) se $k$ for ímpar ($k \geq 5$) ;

   c) calculamos $y_k$ por (3.12).

Algoritmo 5

Usamos um método predictor - corrector para resolver a equação (3.7)

1) Os valores iniciais $y_1, y_2, \ldots, y_p$ são calculados pelo Algoritmo 4;

2) Para $k= p+1, p+2, \ldots, n$:

a) calculamos $y_k^{[o]}$ usando algum predictor;

b) calculamos $y_k^{[s]}$ ; $s=1,2,\ldots, m$ usando algum corrector;

c) o valor final de $y_k$ é $y_k^m$

# CAPÍTULO IV

## RESULTADOS NUMÉRICOS

### 4.1. Aplicação dos Algoritmos

Os algoritmos 1, 2 e 3 apresentados têm ordem arbitrária q. Como ilustração faremos aplicações numéricas dos algoritmos 1 e 2 nas ordens q=1 e q=2 e para o algoritmo 3 nas ordens q=2 e q=3.

#### Algoritmo 1

As regras de quadratura escolhidas para este algoritmo devem satisfazer às hipóteses do teorema 2.1. Assim as integrais das funções K, $\frac{d}{dx}K$ e $\frac{d^2}{dx^2}K$ serão aproximadas do seguinte modo:

Regra do trapézio se n=1

Regra de Simpson se n par e $n \geq 2$

Regra $\frac{3}{8}$ de Simpson se n=3

Regra $\frac{3}{8}$ de Simpson e regra de Simpson se n ímpar e $n \geq 5$.

#### Algoritmo 2

A aplicação deste algoritmo é semelhante a do algoritmo 1, sendo que a escolha das regras de quadratura para aproximar as integrais das funções K e $\frac{d}{dx}K$ são as mesmas.

O valor $y_{n+1}^{(v)}$ é calculado diretamente pela equação

$$y_{n+1}^{(v)} = F(x_{n+1}, y_{n+1}, y_{n+1}^{(1)}, \dots, y_{n+1}^{(v-1)}, z_{n+1}) \quad \text{onde}$$

$$z_{n+1} = h \sum_{k=0}^{n+1} w_{ik}\, K(x_{n+1}, y_{n+1}, \dots, y_{n+1}^{(v-1)}, x_k, y_k, \dots, y_k^{(v)})$$

se F for linear em $y_{n+1}^{(v)}$, em caso contrário $y_{n+1}^{(v)}$ é calculado primeiro pelo algoritmo 1 e depois corrigido pelo algoritmo 2.

Algoritmo 3

Neste caso temos as equações:

$$y_{n+1}^{(i)} = y_n^{(i)} + h\left[\alpha_r\, y_{n+1}^{(i+1)} + \dots + \alpha_1\, y_{n-(r-2)}^{(i+1)}\right] \quad ; \; i=0,1,\dots,\, v-1$$

$$y_{n+1}^{(v)} = F(x_{n+1},\, y_{n+1},\dots,\, y_{n+1}^{(v-1)},\, z_{n+1})$$

onde:

$$z_{n+1} = h \sum_{k=0}^{n+1} w_{n+1,k}\, K(x_{n+1},\, y_{n+1},\dots,\, y_{n+1}^{(v-1)},\, x_k,\, y_k,\dots,\, y_k^{(v)})$$

A primeira delas é da forma:

$$y_{n+1}^{(i)} = y_n^{(i)} + \frac{h}{2}\left[y_{n+1}^{(i+1)} + y_n^{(i+1)}\right] \qquad \text{se } q=2$$

$$y_{n+2}^{(i)} = y_{n+1}^{(i)} + \frac{h}{12}\left[5\, y_{n+2}^{(i+1)} + 8\, y_{n+1}^{(i+1)} - y_n^{(i+1)}\right] \qquad \text{se } q=3$$

Na segunda equação usaremos as seguintes regras de quadratura:

regra de Simpson se n ímpar e $n \geq 1$

regra $\frac{3}{8}$ de Simpson se $n=2$

regra $\frac{3}{8}$ de Simpson e regra de Simpson se n par e $n \geq 4$.

4.2. Comparação de resultados numéricos

Aplicaremos os algoritmos estudados para resolver as seguintes equações:

Exemplo 1

$$\begin{cases} y^{(1)}(x) = 1 + 2x - y(x) + \int_0^x x(1+2x)\, e^{t(x-t)}\, y(t)\, dt \\ y(0) = 1 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

cuja solução exata é $y(x) = e^{x^2}$

Exemplo 2

$$\begin{cases} y^{(2)}(x) = y^{(1)}(x) - \frac{x^2}{2} y(x) - 1 + \int_0^x (t\, y(x) - y^{(1)}(t) - y^{(2)}(t))\, dt \\ y(0) = 0 \\ y^{(1)}(0) = 1 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

cuja solução exata é $y(x) = \sin x$

A seguir evidenciaremos algumas características dos algoritmos estudados, à vista da teoria desenvolvida e dos exemplos apresentados.

O algoritmo 4 fornece valores bem mais precisos, entretanto não foi demonstrada a convergência, apenas sabemos o comportamento local do erro.

O algoritmo 3 tem a vantagem de exigir menos cálculos das funções F e K e nos exemplos citados apresenta valores mais precisos, mas por outro lado necessita de algoritmos de um passo para fornecer seus valores iniciais.

A eficiência do algoritmo 2 é semelhante a do algoritmo 1, sendo que o primeiro calcula uma derivada a menos de cada uma das funções F e K, porém dependendo do problema a resolver precisa do algoritmo 1 para calcular uma primeira aproximação para $y_{n+1}^{(v)}$. Quando a equação dada é do tipo

$$y^{(1)}(x) = F(x, y(x), \int_{x_0}^{x} K(x,t,y(t))\, dt) \quad ; \quad y(x_0) = y_0$$

então, há a possibilidade de se aplicar a extrapolação de Richardson, para o Algoritmo 1. Assim na prática, a escolha do método dependeria do particular problema em questão.

Os resultados numéricos dos algoritmos apresentados estão nas tabelas que seguem e servem para confirmar a validade da teoria estudada.

Nas tabelas abaixo usaremos as notações:

$y(x_n)$ representa o valor exato da $y(x)$ no ponto $x_n$;

$y_n$ é a aproximação de $y(x_n)$;

$EA = |y(x_n) - y_n|$ ;

$ER = |(y(x_n) - y_n)/ y(x_n)|$

Exemplo 1 Algoritmo 1

Q=1

H = 0.100

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0200000 | 0.2081077E-01 | 0.1999477E-01 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1237002 | 0.4981060E-01 | 0.4244580E-01 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.3323679 | 0.1009614E 00 | 0.7043842E-01 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.7019843 | 0.1944965E 00 | 0.1025565E 00 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.3272785 | 0.3910033E 00 | 0.1438420E 00 |

H = 0.050

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0302273 | 0.1058343E-01 | 0.1016845E-01 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1480251 | 0.2548576E-01 | 0.2171753E-01 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.3811032 | 0.5222614E-01 | 0.3643694E-01 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.7912160 | 0.1052648E 00 | 0.5550534E-01 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.5030220 | 0.2152598E 00 | 0.7918965E-01 |

H = 0.025

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0354970 | 0.5313694E-02 | 0.5105341E-02 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1604757 | 0.1303508E-01 | 0.1110777E-01 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4062251 | 0.2710422E-01 | 0.1890997E-01 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8415212 | 0.5495965E-01 | 0.2897980E-01 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.6052647 | 0.1130171E 00 | 0.4157666E-01 |

**Exemplo 1 Algoritmo 1**

Q=2

H = 0.100

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0403125 | 0.4982482E-03 | 0.4787116E-03 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1707761 | 0.2734703E-02 | 0.2330360E-02 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4271963 | 0.6133106E-02 | 0.4278923E-02 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8859891 | 0.1049172E-01 | 0.5532205E-02 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.6913793 | 0.2690243E-01 | 0.9896852E-02 |

H = 0.050

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E-00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0406485 | 0.1622186E-03 | 0.1558580E-03 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1731957 | 0.3150822E-03 | 0.2684953E-03 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4323363 | 0.9930469E-03 | 0.6928253E-03 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8933336 | 0.3147270E-02 | 0.1659531E-02 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.7098356 | 0.8446171E-02 | 0.3107172E-02 |

H = 0.025

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0408055 | 0.5180947E-05 | 0.4977799E-05 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1734608 | 0.5056615E-04 | 0.4308963E-04 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4330341 | 0.2953112E-03 | 0.2960316E-08 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8955667 | 0.9141005E-03 | 0.4819982E-03 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.7159238 | 0.2357956E-02 | 0.8674435E-03 |

Exemplo 1        Algoritmo 1

Extrapolação de Richardson

Q=1

H = 0.100 S = 0.500

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0404540 | 0.3567738E-03 | 0.3427845E-03 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1723500 | 0.1160868E-02 | 0.9892268E-03 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4298390 | 0.3490414E-02 | 0.2435179E-02 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8804480 | 0.1603287E-01 | 0.8454014E-02 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.6787660 | 0.3951582E-01 | 0.1453706E-01 |

H = 0.100 S = 0.250

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0406626 | 0.1481072E-03 | 0.1422999E-03 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1727333 | 0.7775360E-03 | 0.6625725E-03 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4308443 | 0.2485081E-02 | 0.1733782E-02 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8880333 | 0.8447544E-02 | 0.4454326E-02 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.6979260 | 0.2035582E-01 | 0.7488489E-02 |

H = 0.050 S = 0.500

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0407670 | 0.4377309E-04 | 0.4205672E-04 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1729250 | 0.5858680E-03 | 0.4992437E-03 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4313470 | 0.1982415E-02 | 0.1383084E-02 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8918260 | 0.4654876E-02 | 0.2454481E-02 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.7075060 | 0.1077582E-01 | 0.3964204E-02 |

Exemplo 1 Algoritmo 1

Extrapolação de Richardson

Q=2

H = 0.100 S = 0.500

| X | Y(X) | Y | EA | ER |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0407600 | 0.5077384E-04 | 0.4878297E-04 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1740013 | 0.4904633E-03 | 0.4179452E-03 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4340493 | 0.7199198E-03 | 0.5022710E-03 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8957810 | 0.6998796E-03 | 0.3690412E-03 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.7159870 | 0.2294827E-02 | 0.8442197E-03 |

H = 0.100 S= 0.250

| X | Y(X) | Y | EA | ER |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0408378 | 0.2709310E-04 | 0.2603076E-04 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1736389 | 0.1280624E-03 | 0.1091276E-03 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4334232 | 0.9378697E-04 | 0.6543295E-04 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8962044 | 0.2764118E-03 | 0.1457498E-03 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.7175592 | 0.7225610E-03 | 0.2658153E-03 |

H = 0.050 S = 0.500

| X | Y(X) | Y | EA | ER |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0408573 | 0.4656054E-04 | 0.4473487E-04 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1735483 | 0.3746245E-04 | 0.3192339E-04 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4332666 | 0.6274599E-04 | 0.4377639E-04 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8963103 | 0.1705456E-03 | 0.8992743E-04 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.7179523 | 0.3294926E-03 | 0.1212135E-03 |

Exemplo 1 Algoritmo 4

H = 0.100

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.100 | 1.0100501 | 1.0100543 | 0.4192814E-05 | 0.4151095E-05 |
| 0.200 | 1.0408107 | 1.0408115 | 0.7273629E-06 | 0.6988426E-06 |
| 0.300 | 1.0941742 | 1.0941809 | 0.6692484E-05 | 0.6116469E-05 |
| 0.400 | 1.1735108 | 1.1735155 | 0.4696659E-05 | 0.4002229E-05 |
| 0.500 | 1.2840254 | 1.2840387 | 0.1334864E-04 | 0.1039593E-04 |

H = 0.050

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.050 | 1.0025031 | 1.0025032 | 0.1313164E-06 | 0.1309886E-06 |
| 0.100 | 1.0100501 | 1.0100501 | 0.1117587E-07 | 0.1106466E-07 |
| 0.150 | 1.0227550 | 1.0227552 | 0.1667067E-06 | 0.1629977E-06 |
| 0.200 | 1.0408107 | 1.0408108 | 0.6332993E-07 | 0.6084673E-07 |
| 0.250 | 1.0644944 | 1.0644947 | 0.2477318E-06 | 0.2327224E-06 |
| 0.300 | 1.0941742 | 1.0941744 | 0.1648440E-06 | 0.1506561E-06 |
| 0.350 | 1.1303191 | 1.1303195 | 0.3827735E-06 | 0.3386420E-06 |
| 0.400 | 1.1735108 | 1.1735112 | 0.3268942E-06 | 0.2785608E-06 |
| 0.450 | 1.2244600 | 1.2244606 | 0.5876645E-06 | 0.4799376E-06 |
| 0.500 | 1.2840254 | 1.2840259 | 0.5746260E-06 | 0.4475191E-06 |

H = 0.025

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.025 | 1.0006251 | 1.0006251 | 0.1862645E-08 | 0.1861481E-08 |
| 0.050 | 1.0025031 | 1.0025031 | 0.9313225E-09 | 0.9289971E-09 |
| 0.075 | 1.0056408 | 1.0056408 | 0.1862645E-08 | 0.1852197E-08 |
| 0.100 | 1.0100501 | 1.0100501 | 0.9313225E-09 | 0.9220557E-09 |
| 0.125 | 1.0157477 | 1.0157477 | 0.2793967E-08 | 0.2750651E-08 |
| 0.150 | 1.0227550 | 1.0227550 | 0.9313225E-09 | 0.9106017E-09 |
| 0.175 | 1.0310987 | 1.0310987 | 0.3725290E-08 | 0.3612932E-08 |
| 0.200 | 1.0408107 | 1.0408107 | 0.3725290E-08 | 0.3579219E-08 |
| 0.225 | 1.0519283 | 1.0519283 | 0.6519258E-08 | 0.6197435E-08 |
| 0.250 | 1.0644944 | 1.0644944 | 0.7450580E-08 | 0.6999172E-08 |
| 0.275 | 1.0785580 | 1.0785580 | 0.8381903E-08 | 0.7771397E-08 |
| 0.300 | 1.0941742 | 1.0941742 | 0.1210719E-07 | 0.1106514E-07 |
| 0.325 | 1.1114050 | 1.1114050 | 0.1396983E-07 | 0.1256952E-07 |
| 0.350 | 1.1303191 | 1.1303191 | 0.1676380E-07 | 0.1483103E-07 |
| 0.375 | 1.1509929 | 1.1509929 | 0.1955777E-07 | 0.1699208E-07 |
| 0.400 | 1.1735108 | 1.1735108 | 0.2235174E-07 | 0.1904689E-07 |
| 0.425 | 1.1979658 | 1.1979658 | 0.2514570E-07 | 0.2099033E-07 |
| 0.450 | 1.2244600 | 1.2244601 | 0.2793967E-07 | 0.2281795E-07 |
| 0.475 | 1.2531056 | 1.2531057 | 0.3259629E-07 | 0.2601240E-07 |
| 0.500 | 1.2840254 | 1.2840254 | 0.3725290E-07 | 0.2901258E-07 |

Exemplo 1 Algoritmo 2

Q=1

H = 0.100

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0212000 | 0.1961077E-01 | 0.1884182E-01 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1331150 | 0.4039580E-01 | 0.3442303E-01 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.3711005 | 0.6222887E-01 | 0.4341561E-01 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.7791665 | 0.1173143E 00 | 0.6185894E-01 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.4927522 | 0.2255295E 00 | 0.8296769E-01 |

H = 0.050

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0311816 | 0.9629082E-02 | 0.9251521E-02 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1540739 | 0.1943694E-01 | 0.1656307E-01 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.3985356 | 0.3479379E-01 | 0.2427480E-01 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8340375 | 0.6244339E-01 | 0.3292592E-01 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.5999613 | 0.1183204E 00 | 0.4352767E-01 |

H = 0.025

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0361007 | 0.4710007E-02 | 0.4525325E-02 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1635857 | 0.9925143E-02 | 0.8457649E-02 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4157016 | 0.1762781E-01 | 0.1229850E-01 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8648557 | 0.3162518E-01 | 0.1667571E-01 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.6581948 | 0.6008695E-01 | 0.2210475E-01 |

Exemplo 1 Algoritmo 2

Q=2

H = 0.100

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0405082 | 0.3025466E-03 | 0.2906836E-03 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1720377 | 0.1473129E-02 | 0.1255318E-02 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4389843 | 0.5654926E-02 | 0.3945308E-02 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8957543 | 0.7265796E-03 | 0.3831199E-03 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.7065643 | 0.1171744E-01 | 0.4310606E-02 |

H = 0.050

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0407239 | 0.8677970E-04 | 0.8337702E-04 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1737960 | 0.2852045E-03 | 0.2430352E-03 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4328870 | 0.4423474E-03 | 0.3086153E-03 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8947109 | 0.1769932E-02 | 0.9332722E-03 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.7137483 | 0.4533465E-02 | 0.1667768E-02 |

H = 0.025

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0408575 | 0.4678964E-04 | 0.4495499E-04 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1734694 | 0.4138890E-04 | 0.3526929E-04 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4331212 | 0.2082204E-03 | 0.1452704E-03 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8959418 | 0.5390625E-03 | 0.2842435E-03 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.7170291 | 0.1252666E-02 | 0.4608301E-03 |

Exemplo 1 Algoritmo 3

Q=2

H = 0.100

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0408710 | 0.6028823E-04 | 0.5792429E-04 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1736898 | 0.1789554E-03 | 0.1524958E-03 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4337094 | 0.3800131E-03 | 0.2651261E-03 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8972790 | 0.7981108E-03 | 0.4208378E-03 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.7200389 | 0.1757094E-02 | 0.6463989E-03 |

H = 0.050

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0408277 | 0.1696031E-04 | 0.1629529E-04 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1735419 | 0.3102514E-04 | 0.2643788E-04 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4333865 | 0.5709752E-04 | 0.3983559E-04 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8965944 | 0.1135123E-03 | 0.5985422E-04 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.7185262 | 0.2443958E-03 | 0.8990819E-04 |

H = 0.025

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0408186 | 0.7901340E-05 | 0.7591524E-05 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1735197 | 0.8827075E-05 | 0.7521937E-05 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4333412 | 0.1184828E-04 | 0.8266268E-05 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8965004 | 0.1956429E-04 | 0.1081610E-04 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.7183199 | 0.3810599E-04 | 0.1401841E-04 |

Exemplo 1        Algoritmo 3

Q=3

H = 0.100

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0408621 | 0.5139503E-04 | 0.4937980E-04 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1736823 | 0.1714378E-03 | 0.1460897E-03 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4337024 | 0.3730729E-03 | 0.2602841E-03 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8972714 | 0.7905969E-03 | 0.4168757E-03 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.7200290 | 0.1747237E-02 | 0.6427727E-03 |

H = 0.050

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E 00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0408200 | 0.9310431E-05 | 0.8945364E-05 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1735354 | 0.2454407E-04 | 0.2091508E-04 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4333805 | 0.5108863E-04 | 0.3564332E-04 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8965878 | 0.1069651E-03 | 0.5640193E-04 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.7185176 | 0.2357624E-03 | 0.8673215E-04 |

H = 0.025

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000E 00 | 0.0000000E-00 |
| 0.2 | 1.0408107 | 1.0408120 | 0.1262873E-05 | 0.1213355E-05 |
| 0.4 | 1.1735108 | 1.1735140 | 0.3197230E-05 | 0.2724500E-05 |
| 0.6 | 1.4333294 | 1.4333360 | 0.6615184E-05 | 0.4615257E-05 |
| 0.8 | 1.8964808 | 1.8964947 | 0.1384317E-04 | 0.7299403E-05 |
| 1.0 | 2.7182818 | 2.7183124 | 0.3054365E-04 | 0.1123638E-04 |

Exemplo 2 Algoritmo 1

Q=1

H = 0.100

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000E 00 | |
| 0.2 | 0.1986693 | 0.2000000 | 0.1330664E-02 | 0.6697885E-02 |
| 0.4 | 0.3894183 | 0.3960000 | 0.6581652E-02 | 0.1690123E-01 |
| 0.6 | 0.5646424 | 0.5800600 | 0.1541752E-01 | 0.2730492E-01 |
| 0.8 | 0.7173560 | 0.7445892 | 0.2723312E-01 | 0.3796318E-01 |
| 1.0 | 0.8414709 | 0.8826878 | 0.4121682E-01 | 0.4898187E-01 |

H = 0.050

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000E 00 | |
| 0.2 | 0.1986693 | 0.1995000 | 0.8306644E-03 | 0.4181140E-02 |
| 0.4 | 0.3894183 | 0.3930185 | 0.3600162E-02 | 0.9244973E-02 |
| 0.6 | 0.5646424 | 0.5727620 | 0.8119600E-02 | 0.1438007E-01 |
| 0.8 | 0.7173560 | 0.7314012 | 0.1404516E-01 | 0.1957906E-01 |
| 1.0 | 0.8414709 | 0.8623746 | 0.2090367E-01 | 0.2484183E-01 |

H = 0.025

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000E 00 | |
| 0.2 | 0.1986693 | 0.1991255 | 0.4562435E-03 | 0.2296496E-02 |
| 0.4 | 0.3894183 | 0.3912940 | 0.1875691E-02 | 0.4816648E-02 |
| 0.6 | 0.5646424 | 0.5687928 | 0.4150380E-02 | 0.7350458E-02 |
| 0.8 | 0.7173560 | 0.7244563 | 0.7100244E-02 | 0.9897796E-02 |
| 1.0 | 0.8414709 | 0.8519553 | 0.1048434E-01 | 0.1245954E-01 |

## Exemplo 2 Algoritmo 1

Q=2

H = 0.100

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000E 00 | |
| 0.2 | 0.1986693 | 0.1990000 | 0.3306644E-03 | 0.1664396E-02 |
| 0.4 | 0.3894183 | 0.3900509 | 0.6325866E-03 | 0.1624439E-02 |
| 0.6 | 0.5646424 | 0.5655196 | 0.8771251E-03 | 0.1553416E-02 |
| 0.8 | 0.7173560 | 0.7185066 | 0.1150531E-02 | 0.1603849E-02 |
| 1.0 | 0.8414709 | 0.8429896 | 0.1518673E-02 | 0.1804783E-02 |

H = 0.050

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000E 00 | |
| 0.2 | 0.1986693 | 0.1987515 | 0.8217990E-04 | 0.4136516E-03 |
| 0.4 | 0.3894183 | 0.3895738 | 0.1554556E-03 | 0.3991996E-03 |
| 0.6 | 0.5646424 | 0.5648441 | 0.2016350E-03 | 0.3571021E-03 |
| 0.8 | 0.7173560 | 0.7175542 | 0.1981072E-03 | 0.2761630E-03 |
| 1.0 | 0.8414709 | 0.8416397 | 0.1687589E-03 | 0.2005522E-03 |

H = 0.025

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000E 00 | |
| 0.2 | 0.1986693 | 0.1986898 | 0.2053054E-04 | 0.1033402E-03 |
| 0.4 | 0.3894183 | 0.3894564 | 0.3810203E-04 | 0.9784345E-04 |
| 0.6 | 0.5646424 | 0.5646816 | 0.3918679E-04 | 0.6940107E-04 |
| 0.8 | 0.7173560 | 0.7173661 | 0.1005548E-04 | 0.1401743E-04 |
| 1.0 | 0.8414709 | 0.8414213 | 0.4959572E-04 | 0.5893931E-04 |

Exemplo 2 Algoritmo 2

Q=1

H = 0.100

| X | Y(X) | Y | EA | ER |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000E 00 | |
| 0.2 | 0.1986693 | 0.2000000 | 0.1330664E-02 | 0.6697885E-02 |
| 0.4 | 0.3894183 | 0.3961935 | 0.6775201E-02 | 0.1739825E-01 |
| 0.6 | 0.5646424 | 0.5810635 | 0.1642109E-01 | 0.2908228E-01 |
| 0.8 | 0.7173560 | 0.7474555 | 0.3009942E-01 | 0.4195882E-01 |
| 1.0 | 0.8414709 | 0.8888519 | 0.4738098E-01 | 0.5630732E-01 |

H = 0.050

| X | Y(X) | Y | EA | ER |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000E 00 | |
| 0.2 | 0.1986693 | 0.1995122 | 0.8429593E-03 | 0.4243027E-02 |
| 0.4 | 0.3894183 | 0.3931966 | 0.3778263E-02 | 0.9702324E-02 |
| 0.6 | 0.5646424 | 0.5734740 | 0.8831533E-02 | 0.1564093E-01 |
| 0.8 | 0.7173560 | 0.7332515 | 0.1589542E-01 | 0.2215834E-01 |
| 1.0 | 0.8414709 | 0.8662009 | 0.2472994E-01 | 0.2938895E-01 |

H = 0.025

| X | Y(X) | Y | EA | ER |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000E 00 | |
| 0.2 | 0.1986693 | 0.1991366 | 0.4672950E-03 | 0.2352124E-02 |
| 0.4 | 0.3894183 | 0.3914077 | 0.1989441E-02 | 0.5108750E-02 |
| 0.6 | 0.5646424 | 0.5692167 | 0.4574236E-02 | 0.8101119E-02 |
| 0.8 | 0.7173560 | 0.7255180 | 0.8161995E-02 | 0.1137788E-01 |
| 1.0 | 0.8414709 | 0.8540971 | 0.1262615E-01 | 0.1500485E-01 |

Exemplo 2 Algoritmo 2

Q=2

H = 0.100

| X | Y(X) | Y | EA | ER |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000E 00 | |
| 0.2 | 0.1986693 | 0.1990011 | 0.3318549E-03 | 0.1670388E-02 |
| 0.4 | 0.3894183 | 0.3900626 | 0.6442782E-03 | 0.1654463E-02 |
| 0.6 | 0.5646424 | 0.5655505 | 0.9080418E-03 | 0.1608171E-02 |
| 0.8 | 0.7173560 | 0.7184516 | 0.1095599E-02 | 0.1527274E-02 |
| 1.0 | 0.8414709 | 0.8426526 | 0.1181700E-02 | 0.1404327E-02 |

H = 0.050

| X | Y(X) | Y | EA | ER |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000E 00 | |
| 0.2 | 0.1986693 | 0.1987519 | 0.8263986E-04 | 0.4159668E-03 |
| 0.4 | 0.3894183 | 0.3895776 | 0.1592896E-03 | 0.4090451E-03 |
| 0.6 | 0.5646424 | 0.5648653 | 0.2228394E-03 | 0.3946557E-03 |
| 0.8 | 0.7173560 | 0.7176224 | 0.2663913E-03 | 0.3713515E-03 |
| 1.0 | 0.8414709 | 0.8417546 | 0.2836664E-03 | 0.3371077E-03 |

H = 0.025

| X | Y(X) | Y | EA | ER |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000E 00 | |
| 0.2 | 0.1986693 | 0.1986899 | 0.2060143E-04 | 0.1036971E-03 |
| 0.4 | 0.3894183 | 0.3894579 | 0.3958866E-04 | 0.1016610E-03 |
| 0.6 | 0.5646424 | 0.5646978 | 0.5518086E-04 | 0.9772708E-04 |
| 0.8 | 0.7173560 | 0.7174217 | 0.6564985E-04 | 0.9551641E-04 |
| 1.0 | 0.8414709 | 0.8415404 | 0.6943149E-04 | 0.8251204E-04 |

Exemplo 2 Algoritmo 3

Q=2

H = 0.100

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000E 00 | |
| 0.2 | 0.1986693 | 0.1989163 | 0.2470223E-03 | 0.1243384E-02 |
| 0.4 | 0.3894183 | 0.3899336 | 0.5152993E-03 | 0.1323253E-02 |
| 0.6 | 0.5646424 | 0.5654551 | 0.8126548E-03 | 0.1439237E-02 |
| 0.8 | 0.7173560 | 0.7184867 | 0.1130661E-02 | 0.1576151E-02 |
| 1.0 | 0.8414709 | 0.8429278 | 0.1456817E-02 | 0.1731274E-02 |

H = 0.050

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000E 00 | |
| 0.2 | 0.1986693 | 0.1987930 | 0.1237592E-03 | 0.6229409E-03 |
| 0.4 | 0.3894183 | 0.3896924 | 0.2741334E-03 | 0.7039560E-03 |
| 0.6 | 0.5646424 | 0.5650811 | 0.4386515E-03 | 0.7768659E-03 |
| 0.8 | 0.7173560 | 0.7179668 | 0.6107753E-03 | 0.8514255E-03 |
| 1.0 | 0.8414709 | 0.8422546 | 0.7836483E-03 | 0.9312838E-03 |

H = 0.025

| X | Y(X) | Y | E A | E R |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000E 00 | |
| 0.2 | 0.1986693 | 0.1986718 | 0.2503860E-05 | 0.1260315E-04 |
| 0.4 | 0.3894183 | 0.3894207 | 0.2425163E-05 | 0.6227657E-05 |
| 0.6 | 0.5646424 | 0.5646448 | 0.2407934E-05 | 0.4264529E-05 |
| 0.8 | 0.7173560 | 0.7173585 | 0.2456828E-05 | 0.3424838E-05 |
| 1.0 | 0.8414709 | 0.8414735 | 0.2567656E-05 | 0.3051390E-05 |

# BIBLIOGRAFIA


[1] BRUNNER,H. and LAMBERT,J.D. - Stability of numerical methods for Volterra integro-differential equations -Computing 12, 75-89 (1974)

[2] CAMPBELL,G.M. and DAY,J.T. - The numerical solution of non linear Volterra integral equations - BIT 10 (1970), 10-19

[3] CHANG,S.H. and DAY,J.T. - On the numerical solution of a certain non linear integro-differential equation- a ser publicado.

[4] DAY,J.T. - A starting method for solving non linear Volterra integral equations. Mathematics of Computation - Vol.21, nº 98, (1967)

[5] DAY,J.T. - On the numerical solution of Volterra integral equations BIT 8 (1968), 134-137

[6] DAY,J.T. - On the numerical solution of integro-differential equations BIT 10 (1970), 511-514

[7] GOLDFINE,A. - A fifth order algorithm for the numerical solution of integro-differential equations Technical Report nº 115, Computer Science Department, Penn State University, (1972)

[8] GOLDFINE,A. - An algorithm for the numerical solution of integro-differential equations BIT 12 (1972), 578-580

[9] HENRICI,P. - Discrete variable methods in ordinary differential equations - (1962)

[10] HILDEBRAND,F.B. - Introduction to numerical analysis (1956)

[11] ISAACSON,E. and KELLER,H.B. - Analysis of numerical methods - (1966)

[12] KRYLOV,V.I. - Approximate calculation of integrals (1962)

[13] LAMBERT,R.J. - An analysis of the numerical stability of predictor-corrector solutions of non linear ordinary differential equations
SIAM J. Num. Anal., Vol.4, Nº 4, (1967)

[14] LAMBERT,J.D. - Computational methods in ordinary differential equations - (1973)

[15] LINZ,P. - Linear multistep methods for Volterra integro-differential equations
J. Assoc. Comput. Mach., 16 (1969), 295-301

[16] POUZET,P. - Méthode d'integration numérique des équations intégrales et integro differentielles du type Volterra de seconde espèce. Formules de Runge-Kutta
Proc. Rome Symposium on the Num. Treatment of Ordinary differential Equations, Integral and integro-differential equations, Biakhaüser Verlag, Basel (1960)

[17] WOLFE,M.A. and PHILLIPS,G.M. - Some methods for the solution of non-singular Volterra integro-differential equations
The Computer Journal, 10 (1968), 334-336