

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS**

UTILIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DE GREEN  
NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFU-  
SÃO DE NEUTRONS EM MULTIGRUPO,  
PARA UM REATOR REFLETIDO E COM  
DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME DE  
COMBUSTÍVEL

**RINALDO GREGORIO FILHO**

(Trabalho apresentado ao Instituto de  
Física e Química de São Carlos, USP,  
para obtenção do título de Mestre em  
Física Aplicada e Ciências dos Mate-  
riais)

Dezembro 1979

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Instituto de Física e Química São Carlos

UTILIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DE GREEN  
NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO  
DE NEUTRONS EM MULTIGRUPO,  
PARA UM REATOR REFLETIDO E COM  
DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME DE COM-  
BUSTÍVEL

RINALDO GREGORIO FILHO

(Trabalho apresentado ao Instituto de Física e Química de São Carlos, USP, para obtenção do título de Mestre em Física Aplicada e Ciências dos Materiais)

Orientador: Profa. Dra. Wilma S. H. de Sylos Cintra



Dezembro 1979

À Sandra e a minha filha

Cristine

## ÍNDICE

AGRADECIMENTOS .....	I
RESUMO .....	II
ABSTRACT .....	III

### CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1. Componentes de um reator nuclear.....	1
1.2. Distribuição dos neutrons no reator.....	4
1.3. Revisão histórica.....	6
1.4. Objetivo.....	7

### CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1. A equação de transporte de neutrons.....	9
2.2. Equação de difusão de neutrons.....	12
2.3. O método da difusão em grupo.....	16
2.4. Constantes de grupo.....	19

### CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA

3.1. O reator considerado.....	25
3.2. O método da função de Green.....	26
3.3. A equação.....	26
3.4. As soluções obtidas.....	32

### CAPÍTULO 4 - APLICAÇÃO NUMÉRICA

4.1. As considerações e os dados utilizados.....	45
4.2. A resolução.....	48
4.3. Resultados.....	55

### CAPÍTULO 5 - COMENTÁRIOS, CONCLUSÕES E SUGESTÃO..... 68

### APÊNDICE A - Resolução de uma equação diferencial utilizando funções de Green..... 76

APÊNDICE B - Cálculo das funções de Green para o cerne e refle-	
tor.....	84
APÊNDICE C - Listagem do programa utilizado.....	90
BIBLIOGRAFIA.....	98

I

AGRADECIMENTOS

Desejo aqui expressar minha gratidão a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuiram para a execução deste trabalho. Em particular quero agradecer à Profa:Dra.Wilma Sonia Hehl de Sylos Cintra, pela dedicada orientação deste trabalho; ao Prof.Dr.Joaquim de Sylos Cintra Filho, pelas discussões e sugestões; ao Prof.Wilson Nunes dos Santos, pelo auxílio prestado na parte computacional; ao pessoal do Departamento de Processamento de Dados na UFSCar, pelas facilidades e atendimento prestados; a Sra.Loreni Bastos Pereira Ruas, pelo trabalho de datilografia e ao Sr.Paulo Roberto Sobreira Beatrice, pela execução dos desenhos e gráficos.

II  
RESUMO

Neste trabalho é desenvolvido um método, que utiliza funções de Green, para a solução analítica da equação de difusão de neutrons em multigrupo, para um reator refletido, cujo fluxo tem dependência apenas radial e com distribuição de combustível não uniforme no cerne. As propriedades de moderação, difusão e absorção são consideradas diferentes no cerne e refletor. Uma distribuição de densidade de potência, que estabelece a condição de criticalidade do reator, é assumida a priori e determina a distribuição de combustível no cerne.

Com auxílio das funções de Green e das condições de continuidade do fluxo e da densidade de corrente de neutrons na interface cerne-refletor, a equação de difusão em multigrupo é transformada em um sistema de equações lineares, contendo como incógnitas os valores dos fluxos na interface entre as regiões. Resolvido esse sistema, obtém-se os valores dos fluxos na interface e, com eles, a distribuição de fluxo em cada região e para cada grupo.

Como verificação do método proposto, é feita uma aplicação numérica, utilizando dois grupos de energia, para um reator TRIGA de 1MW. Nessa aplicação são calculadas, além das distribuições dos fluxos para os dois grupos de energia, a distribuição de combustível no cerne, a massa crítica e a potência específica linear, para diferentes distribuições de densidade de potência.

### III ABSTRACT

In the present work a method is developed for applying Green's functions to obtain an analytical solution of the neutron diffusion equation to the case of a reflected reactor. The problem of a non-uniform fuel distribution in the core is treated. Multigroup theory is used and the neutron flux is assumed to have only radial dependence.

Different values are employed to characterize the moderation, diffusion and absorption properties of the core and the reflector. A power density distribution which establishes the reactor critical condition "a priori" is assumed and is then used to calculate the fuel distribution.

By using the Green's functions and the continuity relations (for neutron fluxes and neutron current densities) at the core-reflector interface, the multigroup diffusion equation is transformed into a system of linear equations. In this system of equations the unknowns are the neutron fluxes at the core-reflector interface. Once this system is solved and the interface fluxes are determined, it follows immediately that the neutron flux distribution in the core and in the reflector is determined.

The method employed and proposed in the present study has been applied to the problem of calculating the neutron distribution in a 1MW TRIGA reactor, using two energy group. This numerical application, in addition to calculating the two-group flux distribution, the fuel distribution in the core, the critical mass and the linear specific power for different assumed power density distribution have been evaluated.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1. Componentes de um reator nuclear

Apesar das diferenças existentes no projeto e nos componentes dos vários tipos de reatores nucleares, existem algumas características gerais que todos possuem em comum, em maior ou menor extensão. De modo geral, um reator consiste de uma região mais interna, denominada cerne, onde se processa a reação em cadeia liberando energia de fissão em forma de calor. Essa região contém o combustível nuclear, consistindo de nuclídeos fissionáveis.

Em alguns casos é desejável que as fissões, em sua maioria, sejam ocasionadas pela absorção de neutrons térmicos, isto é, neutrons que estão em equilíbrio térmico com o meio. Reatores com essa característica são denominados reatores térmicos, e contêm no cerne, além do combustível, um material moderador, cuja função é levar os neutrons rápidos emitidos na fissão até energias térmicas, principalmente como resultado de sucessivos espalhamentos elásticos. Os moderadores mais eficientes são aqueles constituídos de elementos de baixo número de massa. Água, água pesada e grafita são os mais utilizados.

Como combustível, os reatores térmicos, normalmente, utilizam o urânio em sua forma natural ou enriquecido a uma certa porcentagem de U-235.

Envolvendo o cerne, existe uma camada de material moderador denominada refletor, cuja finalidade é enviar de volta, através de colisões, neutrons que escapariam do cerne, diminuindo assim a perda de neutrons, e como resultado uma menor massa de combustível é requerida para tornar o reator crítico. Além disso, o refletor torna possível um aumento na retirada da potência média do reator para uma dada massa de combustível e pico do fluxo de neutrons. Isto ocorre porque os neutrons que retornam ao cerne, espalhados pelo refletor, tornam o fluxo próximo à fronteira maior do que seria se não houvesse refletor. Deste modo o fluxo de neutrons térmicos médio em todo o cerne aumenta, tendo como consequência um aumento na potência média retirada.

Em alguns reatores, pode ser encontrada envolvendo o cerne, uma região denominada envoltório, composta de elemento fértil, cuja finalidade é utilizar os neutrons que escapam do cerne, para produzir isótopos físseis. Assim, o Th-232 e o U-238 podem, deste modo, produzir, por absorção de neutron, o U-233 e o Pu-239, respectivamente.

O calor gerado no cerne e em outras partes do reator, é removido pela circulação de um fluido refrigerante conveniente. Para essa finalidade a água, água pesada e alguns gases são utilizados. Em alguns reatores, a água muitas vezes é usada como fluido refrigerante, moderador e refletor.

Se a energia liberada no reator está sendo convertida em energia elétrica, o calor é geralmente transferido do fluido refrigerante para um fluido de trabalho, produzindo vapor ou gás aquecido, sendo estes utilizados em um sistema turbina-gera-

dor convencional.

Existem reatores em que a água se mantém em ebulação dentro do cerne; deste modo o calor liberado na fissão é utilizado, diretamente, para produção de vapor.

Inseridas no caroço encontra-se, também, as barras de controle, que são peças móveis constituídas por materiais altamente absorvedores de neutrons, e que servem para controlar a reação em cadeia que se desenvolve no reator. São também utilizadas para manter o reator crítico a um especificado nível de potência, apesar do acúmulo de vários produtos de fissões absorvedores de neutrons no cerne e da queima do combustível. Os materiais mais utilizados nas barras de controle são o aço borado, hafnio metálico, prata e várias ligas desse metal.

Todos os componentes descritos estão localizados no interior de um vaso. Se esses componentes estiverem sob alta pressão o vaso é denominado vaso de pressão. Esse vaso é revestido, internamente, por uma camada de aço ou ferro, a blindagem térmica, e que tem por finalidade absorver parte dos raios gama provenientes do cerne, reduzindo a tensão térmica no vaso.

O vaso do reator juntamente com os componentes do circuito primário de refrigeração que contém fontes radioativas, ficam dentro de uma blindagem contra radiações para proteger o pessoal durante a operação normal do reator.

Finalmente, toda instalação do reator é encerrada em uma estrutura de contenção, um edifício de concreto, cuja finalidade é proteger o público em geral das consequências de um possível acidente, particularmente aquele que envolve liberação de ma-

terial radioativo. A figura 1 esquematiza os principais componentes de um reator nuclear.

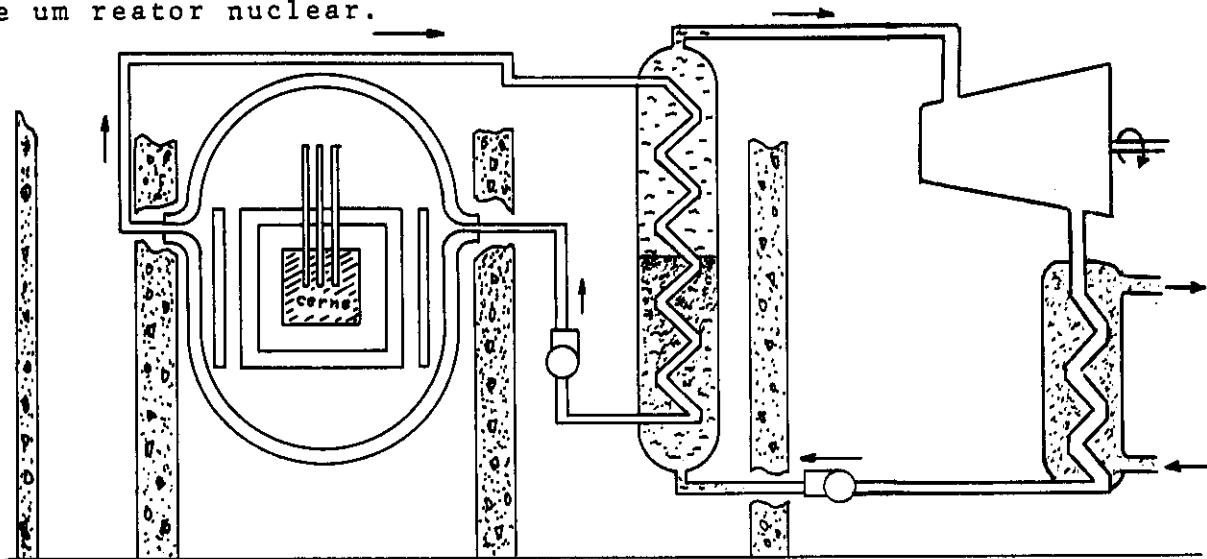


Fig.1-DESENHO ESQUEMÁTICO DOS PRINCIPAIS COMPONENTES DE UM REATOR NUCLEAR

### 1.2. Distribuição dos neutrons no reator

O comportamento de um reator nuclear é governado pela distribuição no espaço, energia e tempo dos neutrons no sistema. Com a finalidade de projetar um reator, é necessário se conhecer essa distribuição, e esse é um dos problemas centrais da teoria do reator.

Em princípio, isto pode ser feito resolvendo a equação de transporte de neutrons. Entretanto, a obtenção da solução dessa equação é na realidade um problema bastante difícil. Essa dificuldade está ligada principalmente a forte, complicada e ainda desconhecida dependência das secções de choque com a energia dos neutrons, e com o complexo arranjo geométrico dos materiais

no reator.

Em vista disso utiliza-se aproximações para a teoria de transporte, tais como:

- Teoria da difusão
- Expansão em harmônicos esféricos
- Métodos de elementos finitos
- Método de probabilidade de colisões, etc.

Soluções exatas da equação de transporte, mesmo com limitações que reduzem o número de variáveis em jogo, só podem ser obtidas para problemas idealizados.

Desde o início do desenvolvimento de reatores nucleares, a aproximação mais utilizada, pela sua simplicidade, foi a teoria da difusão, que ignorando a dependência angular do fluxo de neutrons e impondo uma direção preferencial para o movimento dos neutrons, através da lei de Fick, simplifica bastante as soluções.

A principal limitação dessa teoria é que, em virtude de suas hipóteses simplificadoras, não oferece bons resultados próximo a contornos físicos e fontes, não podendo, portanto, ser aplicada a pequenos sistemas, tais como células, onde cálculos precisos são fundamentais. Entretanto, em cálculo de reatores ela pode ser usada, fornecendo bons resultados com exceção das proximidades de fronteiras e barras de controle.

Por outro lado, soluções aproximadas por métodos numéricos exigem muito tempo de cálculo, mesmo com a utilização de computadores de grande porte.

### 1.3. Revisão histórica

Em teoria de difusão, o comportamento dos neutrons no reator é descrito pela equação da difusão de neutrons.

Vários métodos foram propostos para a resolução da equação de difusão em multigrupo; porém, dada sua complexidade, cada um deles tem considerações que limitam o problema que se propõe resolver a casos particulares. Essas limitações estão geralmente relacionadas com o tipo de geometria, composição do meio, e número de dimensões, regiões e grupos de energia.

Neste trabalho, está-se particularmente interessado na solução analítica dessa equação para o caso de um reator cilíndrico, com dependência radial do fluxo, duas regiões e distribuição não uniforme do combustível no cerne.

Esse problema foi resolvido numericamente para o caso particular de distribuição uniforme do combustível e moderador, por método iterativo<sup>(1)</sup>. Esse método exige, a priori, que se conheça as dimensões do reator e se estime sua composição, ou vice-versa. Partindo-se desses valores, inicia-se o processo de interação até que seja obtida a condição de criticalidade pela variação da grandeza inicialmente estimada.

Para o caso de muitos grupos de energia, a aplicação dessa técnica pode ser utilizada; porém torna-se muito extensa e exige muito tempo de computação.

Em 1964, Cuthill<sup>(2)</sup> resolveu a equação de difusão em multigrupo, transformando-a em um sistema de equações lineares, aproximando o operador diferencial do operador de diferenças fi-

nitas.

Ainda em 1964, Shimizu<sup>(3)</sup> desenvolveu o método da matriz resposta onde só as correntes nas interfaces entre as regiões eram consideradas.

O uso da função de Green na resolução da equação de difusão em multigrupo é bastante recente, tendo sido utilizado pela primeira vez por Kobayashi<sup>(4)</sup> em 1967, para geometria unidimensional, multiregiões, com secções de choque espacialmente constantes em cada região.

Em 1976, Cintra<sup>(5)</sup> também utilizou o método da função de Green na resolução de um reator tipo placa, refletido e com condições de criticalidade imposta por uma função de distribuição de densidade de potência. Impôs, entretanto, a restrição de que as propriedades de moderação e difusão fossem semelhantes no cerne e refletor.

Em 1977, Sanazzaro<sup>(6)</sup> utilizou o mesmo método, para resolver um reator cilíndrico, finito, em geometria  $(r,z)$ , totalmente refletido, sendo novamente imposta a restrição de que as propriedades de moderação e difusão do cerne e refletor fossem semelhantes.

#### 1.4. Objetivo

Neste trabalho foi considerado um reator cilíndrico, cujo fluxo de neutrons tem dependência radial. As propriedades de moderação e difusão do cerne e refletor são diferentes. A distri-

buição do combustível no cerne não é uniforme, sendo determinada por uma dada função de distribuição de densidade de potência que impõe a condição de criticalidade.

O objetivo deste trabalho foi mostrar a possibilidade do uso do método da função de Green na determinação dos fluxos, da potência e da massa crítica do reator descrito. Esse método permitiu obter-se uma solução analítica da equação de difusão em multigrupo, a qual descreve o comportamento dos neutrons no reator citado, e ainda encontrar a distribuição de combustível que determina uma distribuição de potência desejada.

É importante salientar que a solução analítica do problema proposto, que trata cerne e refletor com características diferentes, e distribuição de combustível não uniforme no cerne, não foi encontrada na literatura.

## CAPÍTULO 2

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo são expostos, numa forma resumida, os fundamentos teóricos necessários para a compreensão do método da difusão em multigrupos. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências bibliográficas(1,7,8,9,10).

#### 2.1. A equação de transporte de neutrons

Os neutrons movem-se no interior de um reator em complicados e tortuosos caminhos, em consequência das sucessivas colisões que sofrem com os núcleos do meio. Como resultado desse movimento, neutrons que estavam, inicialmente, em uma posição do reator e movendo-se com direção e energia particulares, surgem posteriormente, em outra posição do sistema, movendo-se em outra direção e com qualquer outra energia. Diz-se então, que os neutrons foram transportados da primeira região e energia para a segunda. O todo desse fenômeno é conhecido como teoria de transporte.

Essa teoria é, em princípio, relativamente simples. A equação exata que governa o fenômeno de transporte pode ser facilmente deduzida a partir de considerações de conservação do número de neutrons em um elemento de volume, de modo semelhante ao que é feito para outros fenômenos físicos, como condução de calor, transferência de massa, etc. Essa equação, denominada equação de Boltzmann, possui como grandeza básica o fluxo angular de neutrons, que,

no caso mais geral, é função do tempo, da posição, energia e direção de movimento do neutron.

Em sua primeira forma, essa equação é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) + \vec{\Omega} \cdot \text{grad} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) + \sigma(\vec{r}, E, t) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) = \\ = \int_E \int_{\Omega} \sigma(\vec{r}, E', t) f(\vec{r}', \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) \psi(\vec{r}', \vec{\Omega}', E', t) d\vec{\Omega}' dE' + \\ + Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

onde:  $\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  - fluxo angular de neutrons, definido como o produto da velocidade escalar pela densidade angular local (número médio de neutrons na posição  $\vec{r}$ , com velocidade na direção  $\vec{\Omega}$  e energia  $E$  no tempo  $t$ , por unidade de volume, ângulo sólido e energia).

$\sigma(\vec{r}, E, t)$  - Secção de choque macroscópica total, que representa a probabilidade de interação entre um neutron e o meio, por unidade de comprimento de deslocamento do neutron.

$f(\vec{r}', \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$  - Função transferência, definida de modo que  $\sigma(\vec{r}, E', t) f(\vec{r}', \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) d\vec{\Omega} dE$  descreve a probabilidade por unidade de comprimento de um neutron com direção  $\vec{\Omega}'$  e energia

$E'$  ao sofrer uma colisão com um núcleo em  $\vec{r}$ , emerge com direção entre  $\vec{n}$  e  $\vec{n} + d\vec{n}$  e energia entre  $E$  e  $E+dE$ .

$Q(\vec{r}, \vec{n}, E, t)$  - Número de neutrons introduzidos na posição  $\vec{r}$  por fontes externas, por unidade de volume, ângulo sólido, energia e tempo, no instante  $t$ .

Essa equação não leva em conta os neutrons atrasados, importantes no estudo do comportamento temporal dos reatores. Outros efeitos não levados em conta na eq.(2.1.1) são:

- Flutuações estatísticas na densidade angular de neutrons
- Colisões neutron-neutron
- Correções relativísticas
- Dependência angular das secções de choque, que ocorre em casos muito raros, com alguns cristais
- Tempo de colisão entre o neutron e o núcleo
- Comportamento ondulatório dos neutrons
- Efeitos de polarização, oriundos do "spin" e momento magnético do neutron

Como já foi mencionado, soluções exatas dessa equação são difíceis de serem obtidas, não só pelas dificuldades matemáticas

cas dos métodos que podem ser aplicados, como também por dificuldades de caráter físico, como a complicada dependência energética das secções de choque e estreita correlação que existe entre elas e o fluxo angular.

## 2.2. Equação de Difusão de Neutrons

Foi utilizada, neste trabalho, como aproximação da teoria de transporte, a teoria da difusão, que apesar de falhar próximo às fronteiras e barras de controle, fornece muito bons resultados em problemas práticos e nos cálculos do projeto de um reator. Como exemplo, podemos citar a utilização da equação de difusão em dois grupos de energia e unidimensional, no cálculo do grau de queima dos elementos combustíveis, que prevêm a queima a fim de serem realizadas as operações de recarga<sup>(11)</sup>.

Para a dedução da equação de difusão, considere-se um volume  $V \text{ cm}^3$  de um meio contendo neutrons monoenergéticos. Esses neutrons podem interagir com os núcleos do meio, sendo espalhados ou absorvidos. Alguns podem escapar e outros penetrar no volume considerado. Se fontes de neutrons estiverem presentes no volume  $V$ , outros neutrons surgirão emitidos pela fonte.

Os neutrons no interior desse volume devem satisfazer a condição de continuidade: a taxa de variação do número total de neutrons em  $V$  deve ser igual a diferença entre a taxa com que os neutrons são produzidos dentro de  $V$  e a taxa com que eles são absorvidos ou escapam de  $V$ .

Seja  $n(\vec{r}, t)$  a densidade de neutrons no ponto  $\vec{r}$  e no

instante  $t$ . O número total de neutrons em  $V$  será:

$$\int_V n(\vec{r}, t) dV \quad (2.2.1)$$

Pela condição de continuidade, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \int_V n(\vec{r}, t) dV = \int_V s(\vec{r}, t) dV - \int_V \Sigma_a(\vec{r}) \phi(\vec{r}, t) dV -$$

$$- \int_A \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} dA \quad (2.2.2)$$

onde:  $\phi(\vec{r}, t) = n(\vec{r}, t)v$  - fluxo de neutrons monoenergéticos  
 $(\text{neutrons/cm}^2 \text{seg})$ , com velocidade  $v$ ,  
na posição  $\vec{r}$  e instante  $t$ .

$s(\vec{r}, t)$  - termo fonte, que fornece o número de neutrons emitidos por  $\text{cm}^3$  por segundo pelas fontes localizadas no ponto  $\vec{r}$  e no instante  $t$ .

$\Sigma_a(\vec{r})$  - secção de choque macroscópica de absorção na posição  $\vec{r}$ .

$\vec{J}(\vec{r}, t)$  - vetor densidade de corrente de neutrons, definido de forma que:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}$$

é a taxa líquida de fluxo de neutrons que atravessa uma área unitária normal ao versor  $\vec{n}$  em  $\vec{r}$ .

A equação (2.2.2) pode ser colocada em uma forma mais conveniente usando o teorema da divergência:

$$\int_A \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} dA = \int_V \operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}, t) dV \quad (2.2.3)$$

Substituindo (2.2.3) na equação (2.2.2) e considerando que todas as integrações foram efetuadas no mesmo volume V, obtém-se:

$$\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} = s(\vec{r}, t) - \Sigma_a(\vec{r})\phi(\vec{r}, t) - \operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}, t) \quad (2.2.4)$$

conhecida como equação da continuidade e de central importância em teoria de reatores nucleares.

Pela lei de Fick, cuja validade está sujeita a certas restrições<sup>(1)</sup>, mas que em teoria de reatores não invalida sua aplicação, tem-se:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = -D(\vec{r}, t) \operatorname{grad} \phi(\vec{r}, t) \quad (2.2.5)$$

onde  $D(\vec{r}, t)$  é o coeficiente de difusão do meio.

Substituindo a eq.(2.2.5) na eq.(2.2.4), obtém-se :

$$\operatorname{div} D(\vec{r}, t) \operatorname{grad} \phi(\vec{r}, t) - \Sigma_a(\vec{r})\phi(\vec{r}, t) + s(\vec{r}, t) = \frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

ou como:

$$\phi(\vec{r}, t) = n(\vec{r}, t)v$$

tem-se finalmente:

$$\operatorname{div} D(\vec{r}, t) \operatorname{grad} \phi(\vec{r}, t) - \sum_a (\vec{r}) \phi(\vec{r}, t) + s(\vec{r}, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) \quad (2.2.6)$$

que é a equação da difusão de neutrons em sua forma mais geral.

Em regime estacionário, caso de um reator crítico, e em um meio onde  $D$  possa ser considerado espacialmente constante, situação mais frequente na prática, tem-se:

$$\frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial t} = 0$$

e

$$\operatorname{div} D \operatorname{grad} \phi(\vec{r}) = D \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi(\vec{r}) = D \nabla^2 \phi(\vec{r})$$

Nesse caso a eq.(2.2.6) se reduz a:

$$D \nabla^2 \phi(\vec{r}) - \sum_a (\vec{r}) \phi(\vec{r}) + s(\vec{r}) = 0 \quad (2.2.7)$$

conhecida como equação da difusão em regime estacionário.

Em muitos problemas, neutrons se difundem em um meio que possui uma superfície externa, isto é, uma fronteira entre o meio e a atmosfera.

A lei de Fick, que foi utilizada na dedução da equação (2.2.7), não é válida na vizinhança imediata de tal fronteira, e portanto a equação também não tem validade nesse ponto. Contudo, pode-se demonstrar que se o fluxo, quando calculado pela equa-

ção de difusão, é assumido nulo a uma pequena distância d além da fronteira, então o valor desse fluxo no interior do meio é bem próximo de seu valor exato, mesmo nas proximidades da fronteira. O parâmetro d é conhecido como distância extrapolada, e seu valor é normalmente tão pequeno, comparado às dimensões de um reator, que é possível, na prática, resolver a equação de difusão assumindo que o fluxo se anula na superfície real do sistema.

No caso de haver interface entre dois meios diferentes, tal como entre o cerne e o refletor, desde que os neutrons atravessem essa interface sem obstáculos, ambos, o fluxo e a densidade de corrente de neutrons normal a superfície, devem ser contínuas através da fronteira.

As imposições físicas acima, isto é, fluxo nulo na interface livre do sistema e continuidade do fluxo e da corrente de neutrons na interface entre meios diferentes, são as condições de contorno que permitem que haja uma única solução para a eq.(2.2.7) que represente corretamente o fluxo correspondente a um determinado problema físico real.

### 2.3. O Método da Difusão em Grupo

A equação (2.2.7) só é válida para neutrons monoenergéticos. Em um reator, entretanto, os neutrons surgem das fissões com uma distribuição contínua de energia, atingindo até energias da ordem de 14MeV. Além disso, os neutrons de altas energias estão continuamente sendo moderados, através de sucessivas colisões com os átomos do meio, à energias térmicas (~0,025eV para um meio

a 20°C). Portanto, em qualquer instante existem neutrons com várias energias.

Nesse caso, para evitar a inclusão de mais uma variável, a energia, na equação de difusão, o que dificultaria muito sua resolução, é utilizado o método da difusão em grupo, onde o intervalo total de energias dos neutrons é dividido em um certo número de intervalos menores de energia, denominados grupos de energia. Os neutrons dentro de cada grupo são, então, tratados como monoenergéticos e a difusão, o espalhamento, a absorção e outras interações são descritas em termos de convenientes coeficientes de difusão e secções de choque, grandezas essas conhecidas por constantes de grupo.

Desse modo pode-se utilizar a equação (2.2.7), com alterações adequadas, para cada grupo de energia.

O comportamento dos neutrons dentro do J-ésimo grupo é então descrito por:

$$D^J \nabla^2 \phi^J(\vec{r}) - \sum_a^J (\vec{r}) \phi^J(\vec{r}) - \sum_r^J (\vec{r}) \phi^J(\vec{r}) + S^J(\vec{r}) = 0 \quad (2.3.1)$$

que é a eq.(2.2.7), acrescido o termo  $\sum_r^J (\vec{r}) \phi^J(\vec{r})$ , onde:

$$\sum_r^J (\vec{r}) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq J}}^N \Sigma^{kJ}(\vec{r}) \quad (2.3.2)$$

sendo  $\Sigma^{kJ}$  a secção de choque média de transferência do grupo J para o grupo k qualquer, e portanto, considera os neutrons espalhados do J-ésimo grupo para os outros grupos.

O termo fonte,  $s^J(\vec{r})$ , agora deve incluir também o espalhamento de neutrons dos outros grupos para o grupo J. Deste modo  $s^J(r)$  é então considerado como soma dos neutrons surgidos das fissões, de uma fonte externa e dos neutrons que sofreram espalhamento em outros grupos. Para N grupos de energia, tem-se:

$$s^J(\vec{r}) = s^J(\vec{r}) + \sum_{k=1}^N \chi^{J \rightarrow k} \Sigma_{cf}^k(\vec{r}) \phi^k(\vec{r}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq J}}^N \Sigma^{Jk}(\vec{r}) \phi^k(\vec{r})$$

(2.3.3)

onde:

$s^J(\vec{r})$  = fonte externa de neutrons.

$\chi^J$  = fração de neutrons de fissão que nascem no grupo J.

$v^k$  = número médio de neutrons emitidos por fissão no grupo k

$\Sigma_{cf}^k(\vec{r})$  = secção de choque macroscópica média de fissão do combustível no grupo K

$\Sigma^{Jk}(\vec{r})$  = secção de choque macroscópica média de espalhamento do grupo k para o grupo J.

Substituindo a eq.(2.3.3) na eq.(2.3.1), obtém-se finalmente:

$$D^J \nabla^2 \phi^J(\vec{r}) - [\Sigma_a^J(\vec{r}) + \Sigma_r^J(\vec{r})] \phi^J(\vec{r}) + s^J(\vec{r}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \chi^{J \rightarrow k} \Sigma_{cf}^k(\vec{r}) \phi^k(\vec{r}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq J}}^N \Sigma^{Jk}(\vec{r}) \phi^k(\vec{r}) = 0 \quad (2.3.4)$$

A eq.(2.3.4) é a equação de difusão em multigrupo em regime estacionário, e representa um sistema de N equações diferenciais parciais acopladas; existe um sistema desse tipo para cada região do reator.

#### 2.4. Constantes de Grupo

A densidade de colisões, isto é, o número de interações neutron-núcleo que ocorrem por  $\text{cm}^3$  por segundo, no moderador, aumenta com a diminuição da energia do neutron. Portanto, neutrons rápidos sofrem um grande número de colisões até atingirem a energia térmica. Por esta razão, é desejável descrever a densidade de colisões em termos de uma variável independente, outra que não a energia. Esta variável, denotada por  $\mu$ , é denominada letargia e definida por:

$$\mu = \ln \frac{E_0}{E} \quad (2.4.1)$$

onde  $E$  é a energia do neutron e  $E_0$  é uma energia arbitrária, na prática escolhida como a energia do neutron mais energético do sistema considerado, de tal forma a ter-se sempre letargia positiva. Desta forma, cada colisão que diminui a energia do neutron, aumenta sua letargia.

Dividindo todo intervalo de letargia dos neutrons no reator em N grupos, o fluxo  $\phi^J(\vec{r})$  no J-ésimo grupo é definido por:

$$\phi^J(\vec{r}) = \int_{\mu_{J-1}}^{\mu_J} \phi(\vec{r}, \mu) d\mu \quad (2.4.2)$$

onde  $\mu^J$  e  $\mu^{J-1}$  são os limites superior e inferior de letargia, respectivamente, do grupo e  $\phi(\vec{r}, \mu)$  é o fluxo dependente da letargia no ponto  $\vec{r}$ .

### Coeficiente de Difusão

A difusão de neutrons em um meio homogêneo e em cada grupo, é descrita por um coeficiente de difusão médio definido por

$$D^J = \frac{\int_{\mu^{J-1}}^{\mu^J} D(\mu) \nabla^2 \phi(\vec{r}, \mu) d\mu}{\int_{\mu^{J-1}}^{\mu^J} \nabla^2 \phi(\vec{r}, \mu) d\mu} \quad (2.4.3)$$

Se for assumido que o fluxo possa ser considerado como produto de duas funções, uma só dependente do espaço e outra só da letargia, a eq.(2.4.3) torna-se:

$$D^J = \frac{1}{J} \int_{\mu^{J-1}}^{\mu^J} \phi(\mu) \phi(\mu) d\mu \quad (2.4.4)$$

onde  $\phi(\mu)$  é a parte de  $\phi(\vec{r}, \mu)$  que só depende da letargia e  $\phi^J$  uma constante dada por:

$$\phi^J = \frac{1}{J} \int_{\mu^{J-1}}^{\mu^J} \phi(\mu) d\mu \quad (2.4.5)$$

Para avaliar a integral de (2.4.4) é necessário assumir uma forma apropriada para  $\phi(\mu)$ . Para reatores térmicos é pos-

sível, em muitos casos, dentro de cada grupo  $\phi(\mu) = \text{constante}$ , e a equação (2.4.3), torna-se:

$$D^J = \frac{1}{u^J} \int_{\mu^{J-1}}^{\mu^J} D(\mu) d\mu \quad (2.4.6)$$

onde  $u^J = \int_{\mu^{J-1}}^{\mu^J} d\mu$ , é a largura da letargia do J-ésimo grupo.

Se  $D(\mu)$  é aproximadamente constante no intervalo de letargia  $u^J$ , então  $D^J$  pode ser considerado como constante dentro do grupo.

### Secções de choque

Os neutrons podem desaparecer de um grupo de energia ou por absorção ou como resultado de um espalhamento inelástico, que aumenta sua letargia levando-o para outro grupo.

A secção de choque macroscópica de absorção para um meio homogêneo dentro do J-ésimo grupo é descrita por:

$$\Sigma_a^J = \frac{1}{\phi^J} \int_{\mu^{J-1}}^{\mu^J} \Sigma_a(\mu) \phi(\mu) d\mu \quad (2.4.7)$$

Se novamente assumirmos  $\phi(\mu)$  constante, teremos:

$$\Sigma_a^J = \frac{1}{u^J} \int_{\mu^{J-1}}^{\mu^J} \Sigma_a(\mu) d\mu \quad (2.4.8)$$

Do mesmo modo definimos secção de choque de espalha -

mento e fissão, para o J-ésimo grupo, como:

$$\Sigma_s^J = \frac{1}{u^J} \int_{\mu^{J-1}}^{\mu_J} \Sigma_s(\mu) d\mu \quad (2.4.9)$$

$$\Sigma_f^J = \frac{1}{u^J} \int_{\mu^{J-1}}^{\mu_J} \Sigma_f(\mu) d\mu \quad (2.4.10)$$

Normalmente a dependência das secções de choque com a letargia é pequena, em cada grupo, e podemos considerá-las como constantes para qualquer letargia dentro do grupo.

#### Secção de choque de transferência do grupo

É uma grandeza que descreve a transferência de neutrons de um grupo para outro, sendo denotada por  $\Sigma(J \rightarrow k)$  ou  $\Sigma^{kJ}$ . É definida de tal modo que  $\Sigma^{kJ} \phi^J(\vec{r})$  é igual ao número de neutrons transferidos do J-ésimo para o k-ésimo grupo por  $\text{cm}^3/\text{seg}$  na posição  $\vec{r}$ .

Para grupos diretamente acoplados, isto é, quando os neutrons só são espalhados para grupos adjacentes, o que equivale a dizer que  $\Sigma^{kJ}$  só não é nulo se  $k = J+1$ , o valor de  $\Sigma^{kJ}$ , para remoção por espalhamento, poderá ser calculado pelo seguinte procedimento:

O número total de colisões por  $\text{cm}^3/\text{seg}$  no J-ésimo grupo é  $\Sigma_s^J \phi^J$ . Se  $\bar{\xi}^J$  é o aumento médio da letargia em uma colisão no J-ésimo grupo, o neutron requer  $u^J / \bar{\xi}^J$  colisões, em média, para atravessar esse grupo. Havendo  $\Sigma_s^J \phi^J$  colisões por  $\text{cm}^3/\text{seg}$  no J-ésimo

mo grupo,  $\xi^J \sum_s J / u^J$  neutrons são espalhados para fora do J-ésimo grupo por  $\text{cm}^3/\text{seg}$ . Desde que esses neutrons devem necessariamente entrar no  $(J+1)$ -ésimo grupo,  $\sum_s^{JK}$  é dado por:

$$\sum_s^{Jk} = \frac{\xi^J \sum_s^J}{u^J} \quad (2.4.11)$$

Fração de neutrons de fissão emitidos em um grupo e número médio de neutrons emitidos por fissão

Os neutrons de fissão são emitidos com um espectro contínuo de energia, conforme ilustra a fig.2.

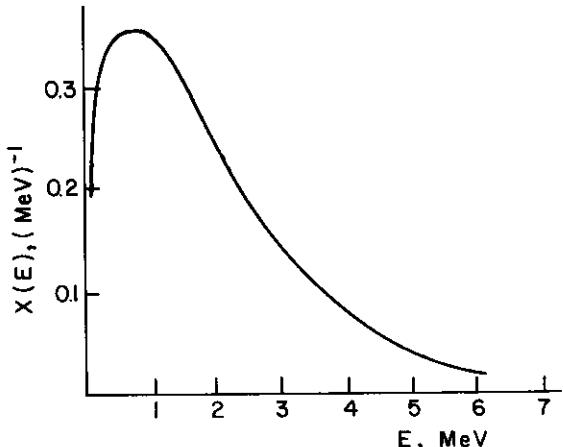


Fig. 2

Várias expressões já foram determinadas para descrever esse espectro, entre elas podemos citar a seguinte:

$$x(E) = 0,453 e^{-1.036E} \operatorname{senh} \sqrt{2,29E} \quad (2.4.12)$$

onde E é dado em MeV.

A energia média desses neutrons pode ser calculada por:

$$\bar{E} = \int_0^\infty E \chi(E) dE = 1,98 \text{ MeV} \quad (2.4.13)$$

No método da difusão em grupo é conveniente introduzir uma quantidade  $\chi^J$  que represente a fração de neutrons que surgem no grupo J. Esse valor pode ser dado por:

$$\chi^J = \frac{\int_{\mu_{J-1}}^{\mu_J} \chi(\mu) d\mu}{\int_{\mu_0}^{\mu_J} \chi(\mu) d\mu} \quad (2.4.14)$$

onde  $\chi(\mu)$  é o espectro de fissão normalizado para um neutron emitido.

Finalmente, deve-se considerar ainda que o número médio de neutrons emitidos por fissão também depende da energia do neutron incidente. Para fissões induzidas por neutron do J-ésimo grupo, tem-se:

$$v^J = \frac{1}{\phi^J} \int_{\mu^{J-1}}^{\mu^J} v(\mu) \phi(\mu) d\mu = \frac{1}{u^J} \int_{\mu^{J-1}}^{\mu^J} v(\mu) d\mu \quad (2.4.15)$$

CAPÍTULO 3  
FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA

### 3.1. O reator considerado

Foi considerado um reator térmico, cilíndrico, com raio  $R_1$  para o cerne e  $R_2$  para o refletor, e cujo fluxo tem dependência apenas radial.

As propriedades de moderação, absorção e difusão do cerne e refletor são diferentes.

O moderador é distribuído uniformemente nas duas regiões.

A distribuição do combustível ao longo do cerne é não uniforme, sendo estabelecida por uma função de distribuição de densidade de potência, inicialmente imposta, e que determina a condição de criticalidade.

A fig.3 mostra esquematicamente o reator descrito.

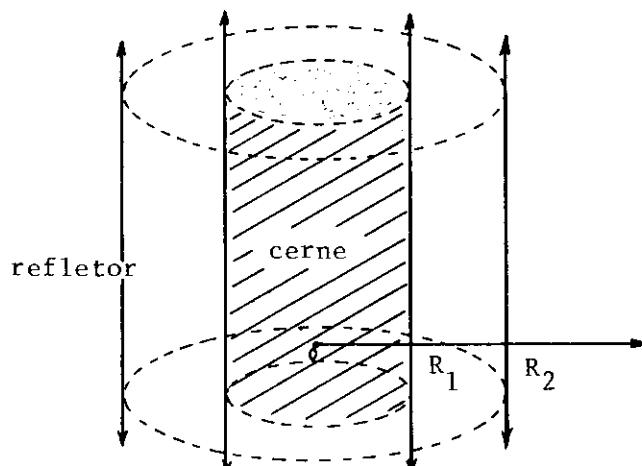


Fig.3 - Desenho esquemático do reator considerado

### 3.2. O método da função de Green

O método aqui proposto baseia-se na utilização da função de Green para a resolução da equação de difusão em multigrupo, que rege o comportamento dos neutrons no reator descrito no ítem anterior.

A função de Green é inicialmente utilizada para resolver a equação de difusão de neutrons em cada região do reator, separadamente, tendo como condições de contorno os valores dos fluxos nas interfaces entre as regiões. Deste modo, obtém-se as funções que fornecem as distribuições dos fluxos de neutrons no interior de cada região e para cada grupo, dependentes dos valores conhecidos dos fluxos nas interfaces das regiões adjacentes.

O valor do fluxo na interface mais externa é conhecido, sendo nulo no caso de se ter considerado a distância extrapolada. Pela imposição das condições físicas de continuidade do fluxo e da densidade de corrente nas interfaces, para um mesmo grupo, obtém-se um sistema linear de  $(M-1)$  equações, onde  $M$  é o número de regiões do reator, e igual número de incógnitas, ou seja, os fluxos nas interfaces interiores.

Resolvido esse sistema, as distribuições dos fluxos no interior de cada região e para cada grupo são, então, obtidas.

### 3.3. A equação

A equação (2.3.4), em geometria cilíndrica com depen-

déncia apenas radial, torna-se:

$$\frac{1}{r} D^J \frac{d}{dr} [r \frac{d}{dr} \phi^J(r)] - \sum_a^J \phi^J(r) - \sum_r^J \phi^J(r) + s^J(r) + \\ + \sum_{k=1}^N \chi^J v^k \sum_{cf}^k(r) \phi^k(r) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq J}}^N \sum^J \phi^k(r) = 0 \quad (3.3.1)$$

O coeficiente de difusão  $D^J$  foi suposto como sendo o do moderador e, portanto, espacialmente constante, uma vez que, no problema que se propõe resolver, o moderador é considerado uniformemente distribuído no cerne e refletor. Essa suposição é válida para baixas concentrações de combustível.

O segundo termo da equação (3.3.1) representa a absorção total dos neutrons, tanto pelo moderador como pelo combustível. Pode-se, então, separar  $\sum_a^J(r)$  em:

$$\sum_a^J(r) = \sum_{Ma}^J(r) + \sum_{ca}^J(r) \quad (3.3.2)$$

onde  $\sum_{Ma}^J(r)$  e  $\sum_{ca}^J(r)$  representam as secções de choque macroscópicas de absorção do moderador e do combustível, respectivamente, para o grupo J.

A secção de choque de absorção do combustível pode, ainda, ser considerada como a soma das secções de choque de captação radioativa e de fissão:

$$\sum_{ca}^J(r) = \sum_{c\gamma}^J(r) + \sum_{cf}^J(r) \quad (3.3.3)$$

Utilizando o parâmetro  $\alpha^J$ , denominado razão de captura-fissão, definido por:

$$\alpha^J = \frac{\Sigma_{c\gamma}^J(r)}{\Sigma_{cf}^J(r)} = \frac{\sigma_{c\gamma}^J}{\sigma_{cf}^J} \quad (3.3.4)$$

onde  $\sigma_{c\gamma}^J$  e  $\sigma_{cf}^J$  são, respectivamente, as secções de choque microscópicas de captura e fissão do combustível, para o grupo J, a equação (3.3.3) pode ser escrita como:

$$\Sigma_{ca}^J(r) = (1 + \alpha^J) \Sigma_{cf}^J(r) \quad (3.3.5)$$

Substituindo a equação (3.3.5) em (3.3.2), obtém-se:

$$\Sigma_a^J(r) = \Sigma_{Ma}^J(r) + (1 + \alpha^J) \Sigma_{cf}^J(r) \quad (3.3.6)$$

A condição de criticalidade é estabelecida pela imposição de uma certa função de distribuição de densidade de potência  $c(r)$ . Por definição, tem-se:

$$c(r) = h \sum_{k=1}^N \Sigma_{cf}^k(r) \phi^k(r) \quad (3.3.7)$$

O fator  $h$  fornece a energia liberada por fissão. Considerando-se  $h=1$ ,  $c(r)$  fornece a distribuição da taxa de fissão específica (fissões/cm<sup>3</sup> seg.), tornando com isto  $c(r)$  independente da unidade usada para a energia.

Multiplicando o último termo da equação (3.3.6) por:

$$\frac{c(r)}{\sum_{K=1}^N \sigma_{cf}^K(r) \phi^K(r)}$$

obtém-se:

$$\Sigma_a^J(r) = \Sigma_{Ma}^J(r) + \frac{(1+\alpha^J) \Sigma_{cf}^J(r) c(r)}{\sum_{K=1}^N \sigma_{cf}^K(r) \phi^K(r)} \quad (3.3.8)$$

Como,  $\Sigma_{cf}^J(r) = N(r) \sigma_{cf}^J$ , onde  $N(r)$  é a densidade atômica do combustível, a equação (3.3.8) torna-se:

$$\Sigma_a^J(r) = \Sigma_{Ma}^J(r) + (1+\alpha^J) c(r) \frac{\sigma_{cf}^J}{\sum_{K=1}^N \sigma_{cf}^K \phi^K(r)} \quad (3.3.9)$$

O moderador foi considerado uniformemente distribuído, tanto no cerne como no refletor. Portanto, tem-se:

$$\Sigma_{Ma}^J(r) = \Sigma_{Ma}^J \quad (3.3.10)$$

$$\Sigma_r^J(r) = \Sigma_r^J$$

onde  $\Sigma_r^J(r)$  é a secção de choque macroscópica de remoção por esparlhamento do moderador.

Para reatores críticos, normalmente se considera a inexistência de fontes externas. Isto implica em:

$$s^J(r) = 0 \quad (3.3.11)$$

No quinto termo da expressão (3.3.1), que representa os neutrons surgidos da fissão, o parâmetro  $v^J$ , número médio de neutrons emitidos por fissão, não varia muito para fissões causadas por neutrons térmicos e epitérmicos. Como em reatores térmicos a grande maioria das fissões ocorre com esses neutrons, pode-se considerar o valor de  $v^J$  independente do grupo de energia considerado. Desse modo, obtém-se:

$$\sum_{K=1}^N \chi^J v^k \Sigma_{cf}^k(r) \phi^k(r) = \chi^J v \sum_{K=1}^N \Sigma_{cf}^k(r) \phi^k(r) \quad (3.3.12)$$

Pela equação (3.3.7), tem-se:

$$\chi^J v \sum_{K=1}^N \Sigma_{cf}^k(r) \phi^k(r) = \chi^J v c(r) \quad (3.3.13)$$

Finalmente, utilizando os resultados obtidos pelas equações (3.3.9), (3.3.10), (3.3.11) e (3.3.13), e rearranjando a equação (3.3.1), chega-se a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r \frac{d}{dr} \phi^J(r)] - \left[ \frac{\Sigma_{Ma}^J + \Sigma_r^J}{D^J} \right] \phi^J(r) - \\ & - \frac{(1+\alpha^J)}{D^J} c(r) \frac{\sigma_{cf}^J \phi^J(r)}{\sum_{k=1}^N \sigma_{cf}^k \phi^k(r)} + \frac{\chi^J v}{D^J} c(r) + \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq J}}^N \frac{\Sigma_{Jk}^J}{D^J} \phi^k(r) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

A equação (3.3.14) é válida para todo reator, isto é, para o cerne e para o refletor.

Pode-se agora, para simplificar, considerar as seguintes substituições:

$$K^J = \sqrt{\frac{\sum_{Ma}^J + \sum_r^J}{D^J}}$$

$$H^J(r) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq J}}^N \frac{\sum_{c_f}^{Jk} \phi^k(r)}{D^J} \quad (3.3.15)$$

$$E^J(r) = \frac{\chi^J v}{D^J} c(r) - \frac{(1+\alpha^J)}{D^J} c(r) \frac{\sigma_{c_f}^J \phi^J(r)}{\sum_{k=1}^N \sigma_{c_f}^k \phi^k(r)}$$

A equação (3.3.14) torna-se, então:

$$\frac{d}{dr} [r \frac{d}{dr} \phi^J(r)] - K^J \frac{2}{r} \phi^J(r) + r f^J(r) = 0 \quad (3.3.16)$$

onde:

$$f^J(r) = \begin{cases} H^J(r), & \text{para meios onde não ocorrem fissões.} \\ H^J(r) + E^J(r), & \text{para meios onde as fissões ocorrem.} \end{cases}$$

Para um reator com várias regiões, a equação (3.3.16) deve ser resolvida em cada região, com o conveniente valor de  $f^J(r)$ , sendo que as condições de contorno na interface entre regiões, devem ser satisfeitas.

Utilizando o operador  $L$ :  $\frac{d}{dr} [r \frac{d}{dr}] - K_i^J \frac{2}{r}$  na equação

(3.3.16), obtém-se:

$$L\phi_i^J(r) = -r f_i^J(r) \quad (3.3.17)$$

onde  $i$  representa a região considerada.

Neste trabalho onde são consideradas duas regiões, o índice  $c$  é usado para o cerne e o índice  $r$  para o refletor.

### 3.4. As soluções obtidas

A solução da equação (3.3.17) é determinada inicialmente para o cerne do reator, com raio  $R_1$ , e depois para o refletor, de raio  $R_2$ .

Para o cerne, a equação (3.3.17), torna-se:

$$L\phi_c^J(r) = -r f_c^J(r); \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (3.4.1)$$

com  $f_c^J(r) = H_c^J(r) + E^J(r)$  onde:

$$H_c^J(r) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq J}}^N \frac{\sum_c^{Jk} \phi_c^k(r)}{D_c^J}$$

$$E^J(r) = \frac{\chi \sum_c^J v_c(r)}{D_c^J} - \frac{(1+\alpha_c^J)}{D_c^J} c(r) \frac{\sigma_{cf}^J \phi_c^J(r)}{\sum_{k=1}^N \sigma_{cf}^k \phi_c^k(r)}$$

$$e \quad K_c^J = \frac{\sum_c^J M_a c + \sum_c^J r c}{D_c^J}$$

Com as condições de contorno:

$$\left. \frac{d\phi_c^J(r)}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (3.4.2)$$

$$\phi_c^J(R_1) = \phi_r^J(R_1)$$

onde  $\phi_r^J(R_1)$  é o valor do fluxo na interface cerne-refletor, inicialmente desconhecido.

A solução geral da equação (3.4.1), calculada no Apêndice A, é dada por (A.7). Com as condições de contorno (3.4.2) substituídas, obtém-se:

$$\phi_c^J(r) = \int_0^{R_1} r' G_c^J(r, r') f_c^J(r') dr' - R_1 \phi_r^J(R_1) \left. \frac{d}{dr'} G_c^J(r', r) \right|_{r'=R_1} \quad (3.4.3)$$

onde  $G_c^J(r, r')$ , calculada no apêndice B, é dada por:

$$G_c^J(r, r') = \begin{cases} [K_o(K_c^J r') - M I_o(K_c^J r')] I_o(K_c^J r) & ; \quad 0 \leq r < r' \\ [K_o(K_c^J r) - M I_o(K_c^J r)] I_o(K_c^J r') & ; \quad r' < r \leq R_1 \end{cases}$$

com  $M = K_o(K_c^J R_1) / I_o(K_o^J R_1)$ .

Como  $L[G_c^J(r, r')]$  é contínua em  $C: [0, R_1]$ , exceto no ponto  $r'$ , deve-se separar a integral de (3.4.3) em duas partes e, introduzindo o valor de  $f_c^J(r)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}\phi_c^J(r) &= \int_0^r r' G_c^J(r, r') [H_c^J(r) + E^J(r)] dr' + \int_r^{R_1} r' G_c^J(r, r') [H_c^J(r') + \\ &\quad + E^J(r')] dr' - R_1 \phi_r^J(R_1) \left. \frac{d}{dr'} G_c^J(r', r) \right|_{r'=R_1} \quad (3.4.4)\end{aligned}$$

Substituindo o valor de  $G_c^J(r, r')$ , observando seus inter  
valos de definição, obtém-se:

$$\begin{aligned}\phi_c^J(r) &= \int_0^r r' [K_o(K_c^J r) - MI_o(K_c^J r)] I_o(K_c^J r') dr' [H_c^J(r') + \\ &\quad + E^J(r')] + \int_r^{R_1} r' I_o(K_c^J r) [K_o(K_c^J r') - MI_o(K_c^J r')] dr' [H_c^J(r') + \\ &\quad + E^J(r')] - R_1 \phi_r^J(R_1) \left. \frac{d}{dr'} \{ [K_o(K_c^J r') - \right. \\\left. \left. - MI_o(K_c^J r')] I_o(K_c^J r) \} \right\} \right|_{r'=R_1} \quad (3.4.5)\end{aligned}$$

Manipulando-se algebraicamente a equação (3.4.5), chega-se a:

$$\begin{aligned}\phi_c^J(r) &= -MI_o(K_c^J r) \left[ \int_0^{R_1} r' H_c^J(r') I_o(K_c^J r') dr' + \int_0^{R_1} r' E^J(r') I_o(K_c^J r') dr' \right] + \\ &\quad + K_o(K_c^J r) \left[ \int_0^r r' H_c^J(r') I_o(K_c^J r') dr' + \int_0^r r' E^J(r') I_o(K_c^J r') dr' \right] +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + I_o (K_c^J r) \left[ \int_r^{R_1} r' K_o (K_c^J r') H_c^J(r') dr' + \int_r^{R_1} r' k_o (K_c^J r') E^J(r') dr' \right] + \\
 & + \phi_r^J(R_1) \frac{I_o (K_c^J r)}{I_o (K_c^J R_1)} \quad 0 \leq r \leq R_1
 \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

A equação (3.4.6) fornece a distribuição do fluxo no cerne, para o grupo J.

Para o refletor, a equação (3.3.17), torna-se:

$$L\phi_r^J(r) = -r f_r^J(r) ; \quad R_1 \leq r \leq R_2 \tag{3.4.7}$$

com  $f_f^J(r) = H_r^J(r)$ , onde

$$H_r^J(r) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq J}}^N \frac{\sum_r^{Jk} \phi_r^k(r)}{D_r^J}$$

e

$$K_r^J = \frac{\sum_r^J M_a r + \sum_r^J r r}{D_r^J}$$

Com as condições de contorno:  $\phi_r^J(R_1) = \phi_c^J(R_1)$

$$\phi_r^J(R_2) = 0 \tag{3.4.8}$$

A solução geral da equação (3.4.7), calculada no apêndice A e dada por (A.6), fornece:

$$\begin{aligned}
 \phi_r^J(r) = & \int_{R_1}^r r' G_r^J(r, r') f_r^J(r') dr' + R_1 \left[ \phi_c^J(R_1) \frac{d}{dr'} G_r^J(r', r) \Big|_{r'=R_1} \right] \\
 & (3.4.9)
 \end{aligned}$$

O valor de  $G_r^J(r, r')$ , calculado no Apêndice B, é dado por (B.16):

$$G_r^J(r, r') = \begin{cases} \frac{I_o(K_r^J r') - SK_o(K_r^J r')}{Q - S} [I_o(K_r^J r) - QK_o(K_r^J r)] ; & R_1 \leq r < r' \\ \frac{I_o(K_r^J r') - QK_o(K_r^J r')}{Q - S} [I_o(K_r^J r) - SK_o(K_r^J r)] ; & r' < r \leq R_2 \end{cases}$$

com:

$$Q = \frac{I_o(K_r^J R_1)}{K_o(K_r^J R_1)} \quad \text{e}$$

$$S = \frac{I_o(K_r^J R_2)}{K_o(K_r^J R_2)}$$

Como no caso anterior, a integral deve ser separada em duas partes, e com o valor de  $f_r^J(r)$  introduzido obtém-se:

$$\begin{aligned} \phi_r^J(r) &= \int_{R_1}^r r' G_r^J(r, r') H_r^J(r') dr' + \\ &+ \int_r^{R_2} r' G_r^J(r, r') H_r^J(r') dr' + R_1 \phi_c^J(R_1) \left. \frac{d}{dr'} G_r^J(r', r) \right|_{r'=R_1} \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Substituindo os valores de  $G_r^J(r, r')$ , a equação (3.4.10) torna-se:

$$\begin{aligned}
\phi_r^J(r) &= \left[ \frac{I_o(K_r^J r) - SK_o(K_r^J r)}{Q - S} \right] \int_{R_1}^r r' \left[ I_o(K_r^J r') - \right. \\
&\quad \left. - QK_o(K_r^J r') \right] H_r^J(r') dr' + \left[ \frac{I_o(K_r^J r) - QK_o(K_r^J r)}{Q - S} \right] \int_{R_1}^{R_2} r' \left[ I_o(K_r^J r') - \right. \\
&\quad \left. - SK_o(K_r^J r') \right] H_r^J(r') dr' + \phi_c^J(R_1) R_1 \frac{d}{dr'} \left[ I_o(K_r^J r') - \right. \\
&\quad \left. - QK_o(K_r^J r') \right] \Big|_{r'=R_1} \quad \left[ \frac{I_o(K_r^J r) - SK_o(K_r^J r)}{Q - S} \right] \quad (3.4.11)
\end{aligned}$$

Rearranjando a equação (3.4.11), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\phi_r^J(r) &= \left[ \frac{I_o(K_r^J r) - SK_o(K_r^J r)}{Q - S} \right] \left[ \int_{R_1}^r r' I_o(K_r^J r') H_r^J(r') dr' - \right. \\
&\quad \left. - Q \int_{R_1}^r r' K_o(K_r^J r') H_r^J(r') dr' \right] + \left[ \frac{I_o(K_r^J r) - QK_o(K_r^J r)}{Q - S} \right] \left[ \int_{R_1}^{R_2} r' \right. \\
&\quad \left. I_o(K_r^J r') H_r^J(r') dr' - S \int_{R_1}^{R_2} r' K_o(K_r^J r') H_r^J(r') dr' \right] + \\
&\quad + \phi_c^J(R_1) T \left[ I_o(K_r^J r) - SK_o(K_r^J r) \right] \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (3.4.12)
\end{aligned}$$

onde:

$$T = \frac{K_o(K_r^J R_2)}{I_o(K_r^J R_1) K_o(K_r^J R_2) - I_o(K_r^J R_2) K_o(K_r^J R_1)} \quad (3.4.13)$$

A equação (3.4.12) fornece a distribuição do fluxo no refletor, para o grupo J.

Tanto a equação (3.4.6) como a equação (3.4.12), contém o valor do fluxo na interface entre as regiões como única incógnita.

Da continuidade do fluxo e da densidade de corrente de neutrons na interface cerne-refletor, obtém-se:

$$\phi_c^J(R_1) = \phi_r^J(R_1) \quad (3.4.14)$$

$$D_c^J \frac{d}{dr} \phi_c^J(r) \Big|_{r=R_1} = D_c^J \frac{d}{dr} \phi_r^J(r) \Big|_{r=R_1} \quad (3.4.15)$$

Para facilitar o desenvolvimento algébrico, foram feitas as seguintes substituições:

$$\xi_1(r') = r' H_c^J(r') I_o(K_c^J r')$$

$$\xi_2(r') = r' E^J(r') I_o(K_c^J r')$$

$$\xi_3(r') = r' H_c^J(r') K_o(K_c^J r')$$

$$\xi_4(r') = r' E^J(r') K_o(K_c^J r')$$

$$\xi_5(r') = r' H_r^J(r') I_o(K_r^J r')$$

$$\xi_6(r') = r' H_r^J(r') K_o(K_r^J r') \quad (3.4.16)$$

$$\psi_1(r) = \frac{I_o(K_r^J r) - SK_o(K_r^J r)}{Q - S}$$

$$\psi_2(r) = \frac{I_o(K_r^J r) - QK_o(K_r^J r)}{Q - S}$$

As equações (3.4.6) e (3.4.12), tornam-se agora respectivamente:

$$\phi_c^J(r) = -M I_o(K_c^J r) \int_0^{R_1} [\xi_1(r') + \xi_2(r')] dr' +$$

$$+ K_o(K_c^J r) \int_0^r [\xi_1(r') + \xi_2(r')] dr' + I_o(K_c^J r) \int_r^{R_1} [\xi_3(r') +$$

$$\xi_4(r')] dr' + \phi_r^J(R_1) \frac{I_o(K_c^J r)}{I_o(K_c^J R_1)} \quad (3.4.17)$$

e

$$\phi_r^J(r) = \psi_1(r) \int_{R_1}^r [\xi_5(r') - Q\xi_6(r')] dr' - \psi_2(r) \int_r^{R_2} [\xi_5(r') -$$

$$- S\xi_6(r')] dr' + T \phi_c^J(R_1) [I_o(K_r^J r) - SK_o(K_r^J r)] \quad (3.4.18)$$

Substituindo as equações (3.4.17) e (3.4.18) em (3.4.15) obtém -

se:

$$\begin{aligned}
 & D_c^J \left\{ -M \int_0^{R_1} [\xi_1(r') + \xi_2(r')] dr' \right. \frac{d}{dr} [I_o(K_c^J r)] \Big|_{r=R_1} + \\
 & + \frac{d}{dr} [K_o(K_c^J r)] \Big|_{r=R_1} \int_0^{R_1} [\xi_1(r') + \xi_2(r')] dr' + \\
 & + K_o(K_c^J R_1) \frac{d}{dr} \int_0^r [\xi_1(r') + \xi_2(r')] dr' \Big|_{r=R_1} + \\
 & + \frac{d}{dr} [I_o(K_c^J r)] \Big|_{r=R_1} \int_{R_1}^{R_1} [\xi_3(r') + \xi_4(r')] dr' + \\
 & + I_o(K_c^J R_1) \frac{d}{dr} \int_r^{R_1} [\xi_3(r') + \xi_4(r')] dr' \Big|_{r=R_1} + \\
 & + \frac{\phi_r^J(R_1)}{I_o(K_c^J R_1)} \frac{d}{dr} [I_o(K_c^J r)] \Big|_{r=R_1} = D_r^J \left\{ \frac{d}{dr} \psi_1(r) \right. \Big|_{r=R_1} \int_{R_1}^{R_1} [\xi_5(r') - \right. \\
 & \left. - Q\xi_6(r')] dr' + \psi_1(R_1) \frac{d}{dr} \int_{R_1}^r [\xi_5(r') - Q\xi_6(r')] dr' \Big|_{r=R_1} + \\
 & + \frac{d}{dr} \psi_2(r) \Big|_{r=R_1} \int_{R_1}^{R_2} [\xi_5(r') - S\xi_6(r')] dr' + \psi_2(R_1) \frac{d}{dr} \int_r^{R_2} [\xi_5(r') - \\
 & \left. - S\xi_6(r')] dr' \Big|_{r=R_1} + T\phi_c^J(R_1) \frac{d}{dr} [I_o(K_r^J r) - SK_o(K_r^J r)] \Big|_{r=R_1} \} \quad (3.4.19)
 \end{aligned}$$

Usando a relação:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \int_{a(r)}^{b(r)} f(r') dr' &= \int_{a(r)}^{b(r)} \frac{\partial f}{\partial r}(r') dr' + \\ &+ f[b(r)] \frac{db(r)}{dr} - f[a(r)] \frac{da(r)}{dr} \quad (3.4.20) \end{aligned}$$

obtém-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \int_0^r [\xi_1(r') + \xi_2(r')] dr' \Big|_{r=R_1} &= [\xi_1(r) + \xi_2(r)] \Big|_{r=R_1} = \\ &= \xi_1(R_1) + \xi_2(R_1) \\ \frac{d}{dr} \int_r^{R_1} [\xi_3(r') + \xi_4(r')] dr' \Big|_{r=R_1} &= -[\xi_3(r) + \xi_4(r)] \Big|_{r=R_1} = \\ &= -\xi_3(R_1) - \xi_4(R_1) \\ \frac{d}{dr} \int_{R_1}^r [\xi_5(r') - Q\xi_6(r')] dr' \Big|_{r=R_1} &= [\xi_5(r) - Q\xi_6(r)] \Big|_{r=R_1} = \\ &= \xi_5(R_1) - Q\xi_6(R_1) \\ \frac{d}{dr} \int_r^{R_2} [\xi_5(r') - S\xi_6(r')] dr' \Big|_{r=R_1} &= -[\xi_5(r) - S\xi_6(r)] \Big|_{r=R_1} = S\xi_6(R_1) - \\ &- \xi_5(R_1) \end{aligned}$$

Com os resultados obtidos, juntamente com a condição dada pela eq. (3.4.14), chega-se a:

$$\begin{aligned}
 \phi_c^J(R_1) = & \frac{1}{\beta} D_r^J \left\{ \frac{I_o(K_r^J R_1) - SK_o(K_r^J R_1)}{Q - S} [R_1 H_r^J(R_1) I_o(K_r^J R_1) - \right. \\
 & \left. - QR_1 H_r^J(R_1) K_o(K_r^J R_1)] + K_r^J \left[ \frac{I_1(K_r^J R_1) + QK_1(K_r^J R_1)}{Q - S} \right] \left[ \int_{R_1}^{R_2} r' H_r^J(r') \right. \right. \\
 & \left. \left. I_o(K_r^J r') dr' - S \int_{R_1}^{R_2} r' H_r^J(r') K_o(K_r^J r') dr' \right] + \left[ \frac{I_o(K_r^J R_1) - QK_o(K_r^J R_1)}{Q - S} \right] \cdot \right. \\
 & \left. \left[ SR_1 H_r^J(R_1) K_o(K_r^J R_1) - R_1 H_r^J(R_1) I_o(K_r^J R_1) \right] \right\} - \\
 & - D_c^J \left[ K_c^J [-MI_1(K_c^J R_1) - K_1(K_c^J R_1)] \left[ \int_0^{R_1} r' H_c^J(r') I_o(K_c^J r') dr' \right] + \right. \\
 & + \left. \int_0^{R_1} r' E^J(r') I_o(K_c^J r') dr' \right] + K_o(K_c^J R_1) [R_1 H_c^J(R_1) I_o(K_c^J R_1) + \\
 & + R_1 E^J(R_1) I_o(K_c^J R_1)] - I_o(K_c^J R_1) [R_1 H_c^J(R_1) K_o(K_c^J R_1) + \\
 & + R_1 E^J(R_1) K_o(K_c^J R_1)] \right] \} \quad (3.4.21)
 \end{aligned}$$

onde:

$$\beta^J = \frac{D_c^J K_c^J I_1(K_c^J R_1)}{I_o(K_c^J R_1)} - D_r^J T K_r^J [I_1(K_r^J R_1) + S K_1(K_r^J R_1)] \quad (3.4.22)$$

Lembrando que:

$$M = \frac{K_o(K_c^J R_1)}{I_o(K_c^J R_1)}, \quad Q = \frac{I_o(K_r^J R_1)}{K_o(K_r^J R_1)} \quad e$$

$$S = \frac{I_o(K_r^J R_2)}{K_o(K_r^J R_2)}, \quad \text{tem-se:}$$

$$\frac{I_o(K_r^J R_1) - S K_o(K_r^J R_1)}{Q - S} = K_o(K_r^J R_1)$$

$$\frac{I_1(K_r^J R_1) + Q K_1(K_r^J R_1)}{Q - S} = \frac{T}{K_r^J R_1}$$

$$\frac{I_o(K_r^J R_1) - Q K_o(K_r^J R_1)}{Q - S} = 0$$

$$-[M I_1(K_c^J R_1) + K_1(K_c^J R_1)] = -\frac{1}{K_c^J R_1 I_o(K_c^J R_1)}$$

e a equação (3.4.21) fica:

$$\begin{aligned}
 \phi_c^J(R_1) = & \frac{1}{\beta^J R_1} \left\{ D_r^J T \left[ \int_{R_1}^{R_2} r' H_r^J(r') I_o(K_r^J r') dr' \right] - \right. \\
 & - S \int_{R_1}^{R_2} r' H_r^J(r') K_o(K_r^J r') dr' ] + \\
 & + \frac{D_c^J}{I_o(K_c^J R_1)} \left[ \int_0^{R_1} r' H_c^J(r') I_o(K_c^J r') dr' \right] + \\
 & \left. + \int_0^{R_1} r' E^J(r') I_o(K_c^J r') dr' \right\} \quad (3.4.23)
 \end{aligned}$$

Expressão que fornece o valor do fluxo na interface cerne-refletor, para o grupo J.

Os valores obtidos nas equações (3.4.23) substituídos nas equações (3.4.6) e (3.4.12) fornecem a distribuição dos fluxos no interior de cerne e refletor, respectivamente.

**CAPÍTULO 4**  
**APLICAÇÃO NUMÉRICA**

**4.1. As Considerações e os Dados Utilizados**

Para ilustrar a aplicação do método proposto, foi considerado um reator com as características descritas no item 3.1 , utilizando como combustível o u-235 e como moderador a água. Como refletor foi considerado também a água, porém com características de moderação, absorção e difusão diferentes do moderador. O problema foi resolvido em dois grupos de energia, grupo rápido (de 1eV a 10MeV) e grupo térmico (de 0 a 1eV), que são aqui denominados grupo 1 e grupo 2, respectivamente, e com as seguintes considerações:

- a) Os neutrons são provenientes só de fissões térmicas, surgindo como rápidos;
- b) Não há espalhamento do grupo 2 para o grupo 1;
- c) A absorção, tanto no moderador como no combustível e refletor, é desprezível no grupo 1 (não se considera a captura por ressonância);
- d) A condição de criticalidade é imposta por uma distribuição de densidade de potência dada pela função:

$$c(r) = C_0 \left(1 - \epsilon \frac{r^2}{R_1^2}\right)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro arbitrário e  $R_1$  o raio do cerne do reator.

Considerou-se  $C_0 = 1$ , o que equivale a normalizar  $c(r)$  para  $r=0$ . O gráfico da variação de  $c(r)$  em função de  $r$ , para 4 valores de  $\epsilon$ , é mostrado na figura 4.1.

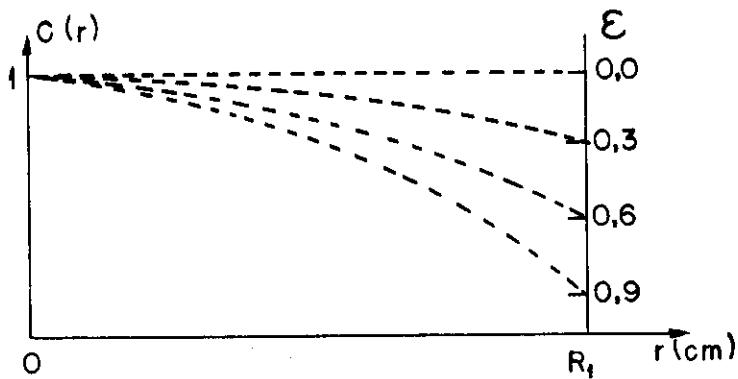


Fig.4.1. Variação da função de distribuição de densidade de potência, normalizada para  $r=0$ , em função de  $r$ , para vários valores de  $\epsilon$ .

Os valores das constantes de grupo foram baseados nos de um reator Triga de 1Mw de potência, refrigerado, moderado e refletido a água e utilizando como combustível o  $^{235}U$ <sup>(12)</sup>. Esses valores são apresentados na tabela 4.2.

As dimensões do reator aqui considerado são as seguintes:

$$\text{Raio do cerne} = 22\text{cm} (R_1)$$

$$\text{Raio do refletor} = 35\text{cm} (R_2)$$

TABELA 4.2. Valores das Constantes de Grupo obtidos do Reator  
Triga de 1Mw (12).

REGIÃO	$\Sigma_{Ma}$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	$\Sigma^{21}_{(1 \rightarrow 2)}$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	$\sigma_{c\gamma}$ ( $\text{cm}^2$ )	$\sigma_{cf}$ ( $\text{cm}^2$ )	$v$	$\chi$	D(cm)	$\alpha = \frac{\sigma_{c\gamma}}{\sigma_{cf}}$
GRUPO RÁPIDO (1)								
CERNE	-	0,03717	-	-	-	2,43	1,0	0,9944
REFLETOR	-	0,04942	-	-	-	-	1,2786	-
GRUPO TÉRMICO (2)								
CERNE	0,03446	-	$62,496 \times 10^{-24}$	$363,02 \times 10^{-24}$	2,43	0,0	0,1658	0,1722
REFLETOR	0,01888	-	-	-	-	-	0,1374	-

#### 4.2. A resolução

Grupo 1 - Neutrons rápidos, com energia de 1eV a 10MeV

Fluxo no Cerne:  $0 \leq r \leq R_1$

Utilizando a equação (3.4.6),

$$\phi_c^1(r) = -M I_o(K_c^1 r) \left[ \int_0^{R_1} r' H_c^1(r') I_o(K_c^1 r') dr' + \right.$$

$$\left. \int_0^{R_1} r' E^1(r') I_o(K_c^1 r') dr' \right] + K_o(K_c^1 r) \left[ \int_0^r r' H_c^1(r') I_o(K_c^1 r') dr' + \right.$$

$$\left. + \int_0^r r' E^1(r') I_o(K_c^1 r') dr' \right] + I_o(K_c^1 r) \left[ \int_r^{R_1} r' K_o(K_c^1 r') H_c^1(r') dr' + \right.$$

$$\left. + \int_r^{R_1} r' K_o(K_c^1 r') E^1(r') dr' \right] + \phi_c^1(R_1) \frac{I_o(K_c^1 r)}{I_o(K_c^1 R_1)} ; \quad 0 \leq r \leq R_1$$

(4.2.1)

Pelas condições (a), (b) e (c) respectivamente, obtém-se:

$$E^1(r) = \frac{\chi_{vc}(r)}{D_c^1} \quad (4.2.2)$$

$$H_c^1(r) = 0 \quad (4.2.3)$$

$$K_c^1 = \sqrt{\frac{\sum c}{D_c^1}} \quad (4.2.4)$$

Substituindo esses valores em (4.2.1) chega-se a:

$$\begin{aligned} \phi_c^1(r) &= -MI_o(K_c^1 r) \int_0^{R_1} r' \frac{x^1 v_c(r') I_o(K_c^1 r') dr'}{D_c^1} + \\ &+ K_o(K_c^1 r) \int_0^r r' \frac{x^1 v_c(r')}{D_c^1} I_o(K_c^1 r') dr' + \\ &+ I_o(K_c^1 r) \int_r^{R_1} r' \frac{x^1 v_c(r')}{D_c^1} K_o(K_c^1 r') dr' + \phi_c^1(R_1) \frac{I_o(K_c^1 r)}{I_o(K_c^1 R_1)} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Rearranjando, obtém-se:

$$\begin{aligned} \phi_c^1(r) &= \frac{x^1 v}{D_c^1} \{ -MI_o(K_c^1 r) \left[ \int_0^{R_1} r' I_o(K_c^1 r') dr' \right] - \\ &- \frac{\epsilon}{R_1^2} \left[ \int_0^{R_1} r'^3 I_o(K_c^1 r') dr' \right] + K_o(K_c^1 r) \left[ \int_0^r r' I_o(K_c^1 r') dr' \right] - \\ &- \frac{\epsilon}{R_1^2} \left[ \int_0^r r'^3 I_o(K_c^1 r') dr' \right] + I_o(K_c^1 r) \left[ \int_r^{R_1} r' K_o(K_c^1 r') dr' \right] - \\ &- \frac{\epsilon}{R_1^2} \left[ \int_r^{R_1} r'^3 K_o(K_c^1 r') dr' \right] \} + \phi_c^1(R_1) \frac{I_o(K_c^1 r)}{I_o(K_c^1 R_1)} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Lembrando que  $M = K_o(K_c^1 R_1) / I_o(K_c^1 R_1)$ .

Fluxo no refletor:  $R_1 \leq r \leq R_2$

Pela equação (3.4.12), já consideradas as condições (b) e (c) que fornecem, respectivamente:

$$\frac{H}{r}(r) = 0 \quad (4.2.7)$$

$$K_r^1 = \sqrt{\frac{\sum r}{D_r^1}} \quad (4.2.8)$$

obtém-se:

$$\phi_r^1(r) = \phi_r^1(R_1) T [I_o(K_r^1 r) - S K_o(K_r^1 r)] \quad (4.2.9)$$

onde:

$$T = \frac{K_o(K_r^1 R_2)}{I_o(K_r^1 R_1) K_o(K_r^1 R_2) - I_o(K_r^2 R_2) K_o(K_r^2 R_1)} \quad \text{e}$$

$$S = \frac{I_o(K_r^1 R_2)}{K_o(K_r^1 R_2)}$$

Grupo 2 - Neutrons térmicos, com energia de 0 a 1 eV

Fluxo no cerne:  $0 \leq r \leq R_1$

Novamente, utilizando a eq. (3.4.6), com as condições (a) e (b), onde obtém-se respectivamente:

$$E^2(r) = -\frac{1+\alpha^2}{D_c^2} c(r) \quad (4.2.10)$$

$$K_c^2 = \sqrt{\frac{\Sigma^2}{\frac{M_a c}{D_c^2}}} \quad (4.2.11)$$

$$H_c^2(r) = \frac{\Sigma^2}{\frac{c}{D_c^2}} \phi_c^1(r) \quad (4.2.12)$$

tem-se:

$$\begin{aligned}
 \phi_c^2(r) = & -M I_0(K_c^2 r) \left\{ \frac{\Sigma^2}{\frac{c}{D_c^2}} \int_0^{R_1} r' \phi_c^1(r') I_0(K_c^2 r') dr' - \right. \\
 & \left. - \frac{1+\alpha^2}{D_c^2} \left[ \int_0^{R_1} r' I_0(K_c^2 r') dr' - \frac{\epsilon}{R_1^2} \int_0^{R_1} r'^3 I_0(K_c^2 r') dr' \right] \right\} + \\
 & + K_0(K_c^2 r) \left\{ \frac{\Sigma^2}{\frac{c}{D_c^2}} \int_0^r r' \phi_c^1(r') I_0(K_c^2 r') dr' - \right. \\
 & \left. - \frac{1+\alpha^2}{D_c^2} \left[ \int_0^r r' I_0(K_c^2 r') dr' - \frac{\epsilon}{R_1^2} \int_0^r r'^3 I_0(K_c^2 r') dr' \right] \right\} + \\
 & + I_0(K_c^2 r) \left\{ \frac{\Sigma^2}{\frac{c}{D_c^2}} \int_r^{R_1} r' \phi_c^1(r') K_0(K_c^2 r') dr' - \right. \\
 & \left. - \frac{1+\alpha^2}{D_c^2} \left[ \int_r^{R_1} r' K_0(K_c^2 r') dr' - \frac{\epsilon}{R_1^2} \int_r^{R_1} r'^3 K_0(K_c^2 r') dr' \right] \right\} + \phi_c^2(R_1) \frac{I_0(K_c^2 r)}{I_0(K_c^2 R_1)} \quad (4.2.13)
 \end{aligned}$$

onde:  $M = \frac{K_o^2 (K_c^2 R_1)}{I_o (K_c^2 R_1)}$

Fluxo no refletor:  $R_1 \leq r \leq R_2$

Da consideração (b), obtém-se:

$$K_r^2 = \sqrt{\frac{\Sigma^2}{D_r^2}} \quad (4.2.14)$$

$$H_r^2(r) = \frac{\Sigma^2}{D_r^2} \phi_r^1(r) \quad (4.2.15)$$

Utilizando a equação (3.4.12), tem-se:

$$\begin{aligned} \phi_r^2(r) &= \frac{\Sigma^2}{D_r^2} \left\{ \frac{I_o(K_r^2 r) - SK_o(K_r^2 r)}{Q-S} \left[ \int_{R_1}^r r' I_o(K_r^2 r') \phi_r^1(r') dr' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - Q \int_{R_1}^r r' K_o(K_r^2 r') \phi_r^1(r') dr' \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_o(K_r^2 r) - QK_o(K_r^2 r)}{Q-S} \left[ \int_r^{R_2} r' I_o(K_r^2 r') \phi_r^1(r') dr' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - S \int_r^{R_2} r' K_o(K_r^2 r') \phi_r^1(r') dr' \right] \right\} + \phi_r^2(R_1) T [I_o(K_r^2 r) - SK_o(K_r^2 r)] \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Lembrando que:

$$S = \frac{I_o (K_r^2 R_2)}{K_o (K_r^2 R_2)}$$

$$Q = \frac{I_o (K_r^2 R_1)}{K_o (K_r^2 R_1)}$$

e

$$T = \frac{K_o (K_r^2 R_2)}{I_o (K_r^2 R_1) K_o (K_r^2 R_2) - I_o (K_r^2 R_2) K_o (K_r^2 R_1)}$$

### Fluxo na interface

#### Grupo 1

Da equação (3.4.23):

$$\begin{aligned} \phi_c^1(R_1) &= \frac{1}{\beta^1 R_1} \left\{ D_c^1 T \left[ \int_{R_1}^{R_2} r' H_r^1(r') I_o(K_r^1 r') dr' \right] - \right. \\ &\quad \left. - S \int_{R_1}^{R_2} r' H_r^1(r') K_o(K_r^1 r') dr' \right\} + \\ &+ \frac{D_c^1}{I_o(K_c^1 R_1)} \left[ \int_o^{R_1} r' H_c^1(r') I_o(K_c^1 r') dr' + \int_o^{R_1} r' E(r') I_o(K_c^1 r') dr' \right] \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

com

$$\beta^1 = D_c^1 K_c^1 \frac{I_1(K_c^1 R_1)}{I_o(K_c^1 R_1)} - D_r^1 T K_r^1 [I_1(K_r^1 R_1) + S K_1(K_r^1 R_1)] \quad (4.2.18)$$

Das equações (4.2.2), (4.2.3) e (4.2.7), obtém-se:

$$H_r^1(r') = H_c^1(r') = 0$$

$$E^1(r') = \frac{\chi^1 v}{D^1 c} I_o(K_c^1 r')$$

e (4.2.17) torna-se:

$$\begin{aligned} \phi_c^1(R_1) &= \frac{\chi^1 v}{\beta^1 R_1 I_o(K_c^1 R_1)} \left[ \int_0^{R_1} r' I_o(K_c^1 r') dr' - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\epsilon}{R_1^2} \int_0^{R_1} r'^3 I_o(K_c^1 r') dr' \right] \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

### Grupo 2

Da equação (3.4.23):

$$\begin{aligned} \phi_c^2(R_1) &= \frac{1}{\beta^2 R_1} \{ D_r^2 T \left[ \int_{R_1}^{R_2} r' H_r^2(r') I_o(K_r^2 r') dr' - \right. \\ &\quad \left. - S \int_{R_1}^{R_2} r' H_r^2(r') K_o(K_r^2 r') dr' \right] + \frac{D_c^2}{I_o(K_c^2 R_1)} \left[ \int_0^{R_1} r' H_c^2(r') I_o(K_c^2 r') dr' + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{R_1} r' E^2(r') I_o(K_c^2 r') dr' \right] \} \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

onde:

$$\beta^2 = \frac{D_c^2 K_c^2 I_1(K_c^2 R_1)}{I_o(K_c^2 R_1)} - D_r^2 T K_r^2 [I_1(K_r^2 R_1) + S K_1(K_r^2 R_1)] \quad (4.2.21)$$

Com as equações (4.2.10), (4.2.12) e (4.2.15), substituídas em (4.2.20), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \phi_c^2(R_1) = & \frac{1}{\beta^2 R_1} \left\{ \sum_r^{21} T \left[ \int_{R_1}^{R_2} r' \phi_r^1(r') I_o(K_r^2 r') dr' - \right. \right. \\
 & - S \int_{R_1}^{R_2} r' \phi_r^1(r') K_o(K_r^2 r') dr' \left. \right] + \\
 & + \frac{\sum_c^{21}}{I_o(K_c^2 R_1)} \left[ \int_o^{R_1} r' \phi_c^1(r') I_o(K_c^2 r') dr' - \right. \\
 & \left. - \frac{(1+\alpha^2)}{I_o(K_c^2 R_1)} \left[ \int_o^{R_1} r' I_o(K_c^2 r') dr' - \frac{\epsilon}{R_1^2} \int_o^{R_1} r'^3 I_o(K_c^2 r') dr' \right] \right] \}
 \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

#### 4.3. Resultados

Inicialmente foi resolvida numericamente a equação (4.2.19), cujo resultado, o valor do fluxo na interface cerne-refletor para o Grupo 1, foi utilizado para resolução numérica das equações (4.2.6) e (4.2.9).

Deste modo obteve-se a distribuição do fluxo de neutrinos rápidos nas duas regiões.

Com a solução numérica da equação (4.2.22), obteve-se o fluxo na interface para o Grupo 2. Substituindo-se esse valor nas

equações (4.2.13) e (4.2.16), foram elas resolvidas, fornecendo assim a distribuição do fluxo de neutrons térmicos no cerne e refletor, respectivamente.

É importante observar que os valores obtidos dos fluxos estão normalizados para a taxa de fissão específica (fissão /  $\text{cm}^3 \text{seg}$ ) em  $r=0$ . Por essa razão seus valores são dados em cm. Para obter-se os valores dos fluxos em  $\text{cm}^{-2} \text{seg}^{-1}$ , multiplica-se cada valor obtido pela taxa de fissão específica necessária para uma de sejada densidade de potência em  $r=0$ .

Na secção 4.1, considerou-se a condição de criticalidade estabelecida através de uma função de distribuição de densidade de potência, normalizada para  $r=0$ , dada por:

$$c(r) = (1 - \epsilon) \frac{r^2}{R_1^2} \quad (4.3.1)$$

Das equações (3.3.7) e (4.3.1), considerando-se ainda que só ocorrem fissões no cerne e para o Grupo 2, conforme impõe a condição a dada no ítem 4.1, pode-se calcular a distribuição de com-bustível ao longo de  $r$  por:

$$N(r) = \frac{(1 - \epsilon) \frac{r^2}{R_1^2}}{\sigma_{cf}^2 \phi_c^2(r)} \quad (4.3.2)$$

Com as mesmas considerações acima, pode-se ainda obter a potência específica linear ( $\text{potência} \times \text{cm} / \text{cm}^3$ ), normalizada para a densidade de potência ( $\text{potência}/\text{cm}^3$ ) em  $r=0$ , por:

$$P = \int_0^R \sigma_{cf}^2 N(r) \phi_c^2(r) dr \quad (4.3.3)$$

Novamente, para obter-se a potência específica linear em potência/cm<sup>2</sup>, multiplica-se os valores obtidos por uma densidade de potência desejada em r=0.

Finalmente, pode-se calcular a massa crítica, em g/cm<sup>2</sup>, pela relação:

$$M_c = \frac{M(u-235)}{N_{Av}} \int_0^R N(r) dr \quad (4.3.4)$$

onde M(u-235) é a massa atômica do urânio 235 e N<sub>Av</sub> é o número de Avogadro.

Todos os cálculos efetuados foram repetidos para 4 valores do parâmetro ε, o que forneceu resultados para diferentes distribuições de densidade de potência.

Esses resultados encontram-se nas tabelas 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7 e representados graficamente nas figuras 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11.

TABELA 4.3

		Distribuição do Fluxo-Grupo 1 (cm)			
r (cm) \ $\epsilon$		0,0	0,3	0,6	0,9
0,4296086		61,21072	58,23965	55,29537	52,37507
1,718435		61,18837	58,19382	55,19927	52,20472
3,007260		61,10370	57,94229	54,78088	51,61948
4,296086		60,89709	57,48217	54,06725	50,65233
5,584912		60,53381	56,78468	53,03554	49,28641
6,873738		60,07036	55,91410	51,75784	47,60158
8,162564		69,40223	54,77836	50,15450	45,53063
9,451390		58,59811	53,45895	48,31980	43,18065
10,74022		57,50532	51,82575	46,14619	40,46663
12,02904		55,75827	49,55496	43,35165	47,14833
13,31787		54,55183	47,80574	41,05966	34,31357
14,60669		52,43393	45,23989	38,04584	30,85180
15,03630		51,61155	44,29174	36,97192	29,65211
15,68071		50,26347	42,78375	35,30403	27,82432
16,32512		48,72815	41,13339	33,53862	25,94385
16,96954		47,20407	39,50452	31,80497	24,10542
17,61395		45,17115	37,50125	29,83134	22,16143
18,25836		43,03662	35,43679	27,83695	20,23711
18,90278		40,54320	33,12028	25,69736	18,27445
19,54719		37,92672	30,74786	23,56900	16,39014
20,19160		34,90824	28,10796	21,30768	14,50740
20,83602		31,58615	25,28607	18,98599	12,68591
21,48043		27,73933	22,11996	16,50058	10,88121
22,00000		24,37433	19,41875	14,46316	9,50757
23,64447		16,82716	13,40600	9,98484	6,56368
25,25660		11,74589	9,35782	6,96974	4,581661
26,86872		8,13373	6,48005	4,82636	3,17268
28,48084		5,53866	4,41258	3,28651	2,16043
30,09297		3,63923	2,899331	2,15943	1,41953
31,70509		2,19586	1,74941	1,30297	0,85653
33,31721		1,04011	0,82864	0,61717	0,40571
34,39196		0,36409	0,29006	0,21604	0,14202
35,00000		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

TABELA 4.4

		Distribuição do Fluxo - Grupo 2 (cm)			
r (cm) \ $\epsilon$		0,0	0,3	0,6	0,9
0,429608		29,88371	26,75250	23,58990	20,49231
1,718435		29,85741	26,72076	23,58705	20,47003
3,007260		29,82207	26,66174	23,50141	20,34109
4,296086		29,60668	26,39127	23,17586	19,96046
5,584912		29,21704	25,94329	22,66954	19,39579
6,873738		28,63631	25,30957	21,98283	18,65609
8,162564		27,89590	24,52968	21,16346	17,79725
9,451390		26,89677	23,52387	20,15098	16,77808
10,74022		25,74832	22,41099	19,07365	15,73632
12,02904		24,18781	20,96135	17,73488	14,50841
13,31787		22,68174	19,63439	16,58704	13,53969
14,60669		20,35889	17,62349	14,88808	12,15267
15,03630		19,60747	16,99584	14,38421	11,77258
15,68071		18,43706	16,03291	13,62877	11,22462
16,32512		17,23348	15,05993	12,88638	10,71283
16,96954		16,03045	14,10399	12,17752	10,25106
17,61395		14,86182	13,19031	11,51880	9,84729
18,25836		13,81943	12,38954	10,95965	9,52975
18,90278		12,94859	11,72979	10,51099	9,29219
19,54719		12,43113	11,34360	10,25607	9,16853
20,19160		12,41486	11,34172	10,26859	9,19545
20,83602		13,35076	12,05979	10,76883	9,47786
21,48043		15,18349	13,40478	11,62607	9,84736
22,00000		17,98611	15,46624	12,94636	10,42649
23,64447		24,38724	20,02382	15,66040	11,29698
25,25660		23,07929	18,70294	14,32659	9,95024
26,86872		19,09720	15,38247	11,66774	7,95301
28,48084		14,54848	11,67970	8,81091	5,94213
30,09297		10,27914	8,23599	6,19285	4,14970
31,70509		6,48306	5,18843	3,89379	2,59916
33,31721		3,17858	2,54215	1,90572	1,26929
34,39196		1,15360	0,92236	0,69112	0,45988
35,00000		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

TABELA 4.5

$r$ (cm) \ $\epsilon$	DISTRIBUIÇÃO DO COMBUSTÍVEL NO CERNE ( $\text{ATOMOS}/\text{CM}^3 \times 10^{20}$ )			
	0,0	0,3	0,6	0,9
0,429608	0,922912	1,027214	1,159198	1,326752
1,718435	0,923117	1,027287	1,159438	1,329824
3,007260	0,923702	1,027400	1,158988	1,331465
4,296086	0,930421	1,031840	1,161399	1,332700
5,584912	0,942830	1,041276	1,168155	1,337866
6,873738	0,961950	1,056515	1,179703	1,346824
8,162564	0,987482	1,076617	1,194107	1,356042
9,451390	1,023163	1,106172	1,215635	1,369107
10,74022	1,069844	1,141276	1,237705	1,377035
12,02904	1,138867	1,196300	1,274631	1,387802
13,31787	1,214488	1,248742	1,299882	1,383507
14,60669	1,353055	1,356359	1,360878	1,367431
15,03630	1,404908	1,393655	1,378316	1,356171
15,68071	1,494094	1,456277	1,405118	1,332044
16,32512	1,598441	1,526979	1,431411	1,297063
16,96954	1,718398	1,604501	1,454567	1,248280
17,61395	1,853521	1,686794	1,471680	1,183537
18,25836	1,993330	1,763959	1,474736	1,098720
18,90278	1,890278	1,828316	1,459883	0,994801
19,54719	2,215943	1,853264	1,413670	0,869789
20,19160	2,218848	1,815019	1,326784	0,724592
20,83602	2,063306	1,669517	1,181313	0,560114
21,48043	1,814254	1,467269	1,014113	0,397250
22,00000	1,531554	1,246760	0,851102	0,264201

TABELA 4.6

$\epsilon$	Massa crítica (g/cm <sup>2</sup> )
0,0	1,0924
0,3	1,0752
0,6	1,0556
0,9	1,0339

TABELA 4.7. Potência específica linear normalizada para a densidade de potência em r=0.

$\epsilon$	Potênci <u>a</u> específica linear normalizada (cm)
0,0	21,9835
0,3	19,7942
0,6	17,5981
0,9	15,3926

As soluções numéricas das equações foram obtidas com auxílio do computador HP-2100 do Departamento de Processamento de Dados da Universidade Federal de São Carlos. A listagem do programa utilizado encontra-se no Apêndice C.

Para a solução numérica das integrais envolvidas nas equações, foi utilizada a subrotina QSF da SSP (IBM)<sup>(13)</sup>, com du-

pla precisão. Essa subrotina utiliza uma combinação da regra de Simpson com a dos 3/8 de Newton, para integrar uma função cujos valores, em pontos equidistantes, são conhecidos. O erro de truncamento local é da ordem de  $h^5$ , para mais de 3 pontos, onde  $h$  é o passo de integração utilizado.

O cálculo das integrais:

$$\int_r^{R_1} r' \phi_c^1(r') K_o(K_c^2 r') dr' ,$$

$$\int_r^{R_1} r' K_o(K_c^2 r') dr'$$

e

$$\int_r^{R_1} r'^3 K_o(K_c^2 r') dr'$$

da equação (4.2.13), exigiram um refinamento maior no passo de integração, no intervalo de  $r=14,6$  até  $r=22$ . Isto ocorreu porque os valores muito pequenos das funções de Bessel modificada de segunda espécie e ordem zero, para argumentos situados no intervalo citado, que tomam parte nas integrandas, ocasionavam uma oscilação de amplitude crescente na distribuição do fluxo.

Por esse motivo as integrais envolvidas no cálculo dos fluxos no cerne, para os dois grupos, foram divididos em duas partes, de  $r=0$  a  $r=14,6$ , com passo de  $\sim 0,43$ , e de  $r=14,6$  até  $r=22$ , com passo de  $\sim 0,21$ . As integrais que aparecem no cálculo dos fluxos no refletor, foram calculadas com passo de  $\sim 0,54$ .

Os pontos onde se obteve os fluxos, foram escolhidos

de modo a se obter argumentos cujos valores das funções de Bessel encontram-se tabelados na literatura (14,15).

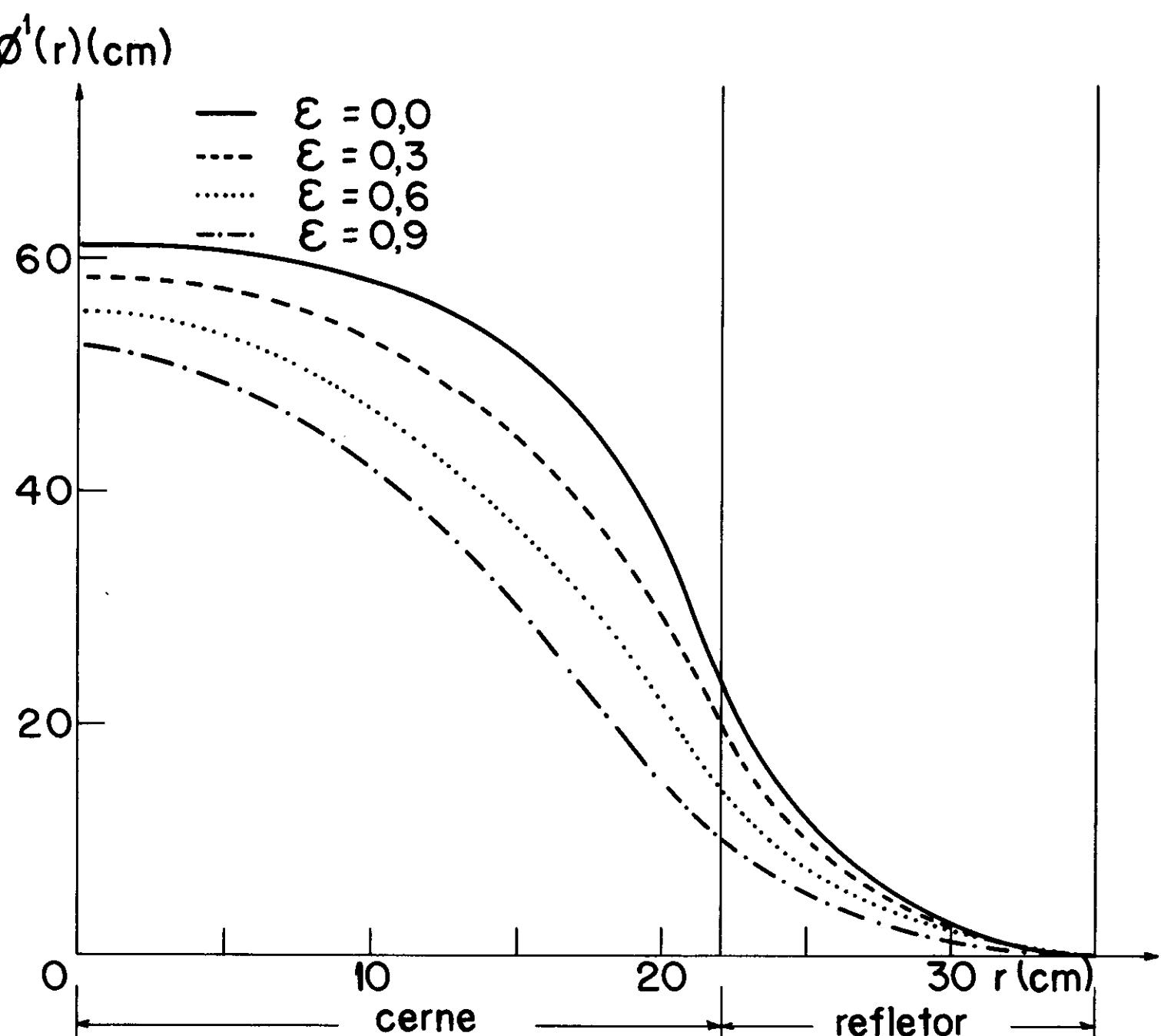


Fig. 4.8. Fluxos normalizados para a taxa de fissão específica ( $\text{fissões}/\text{cm}^3 \text{seg}$ ) em  $r=0$ , para o Grupo 1 e vários valores de  $\epsilon$ .

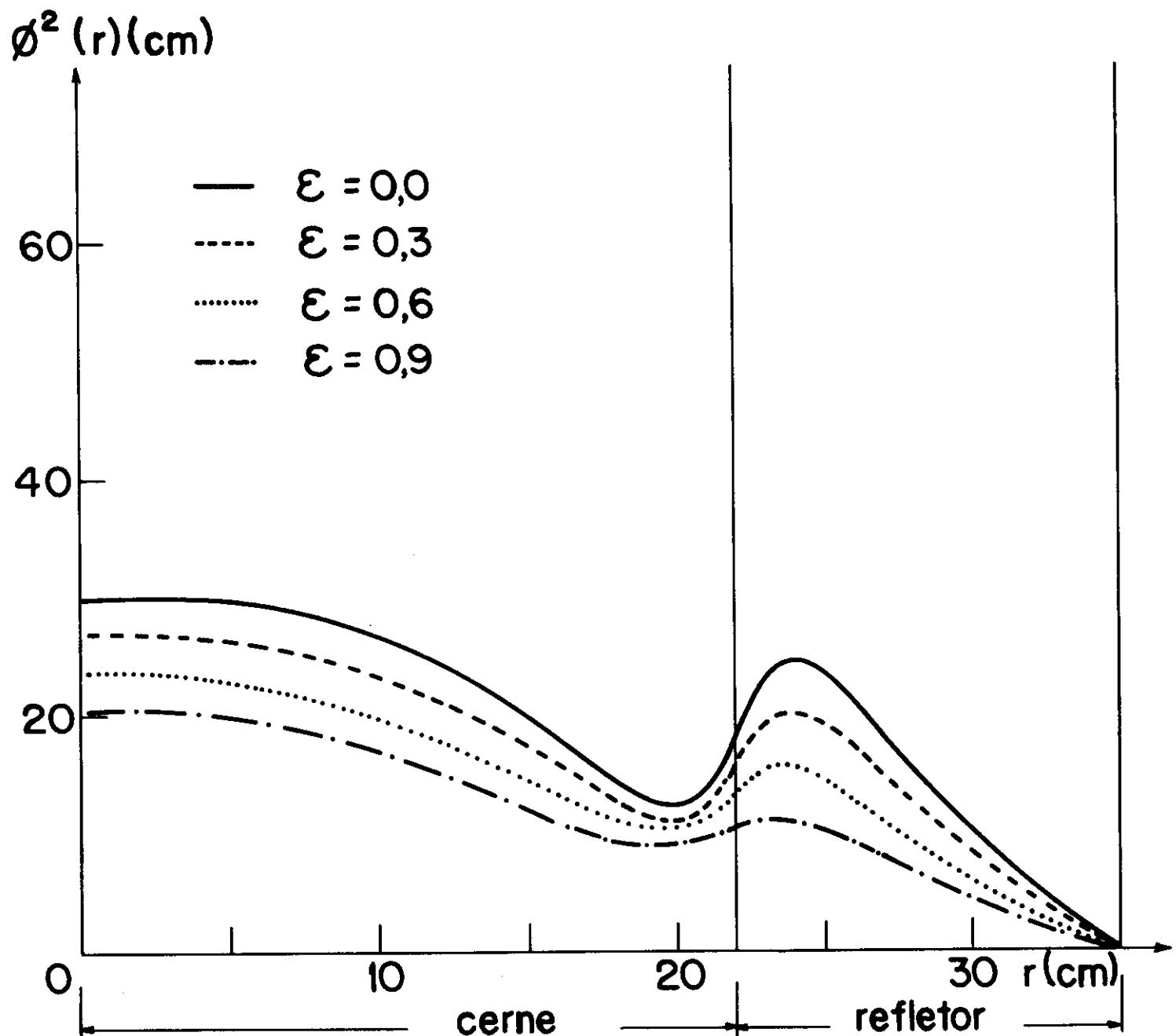


Fig. 4.9. Fluxos normalizados para a taxa de fissão específica (fissões/cm<sup>3</sup>seg) em  $r=0$ , para o Grupo 2 e vários valores de  $\epsilon$ .

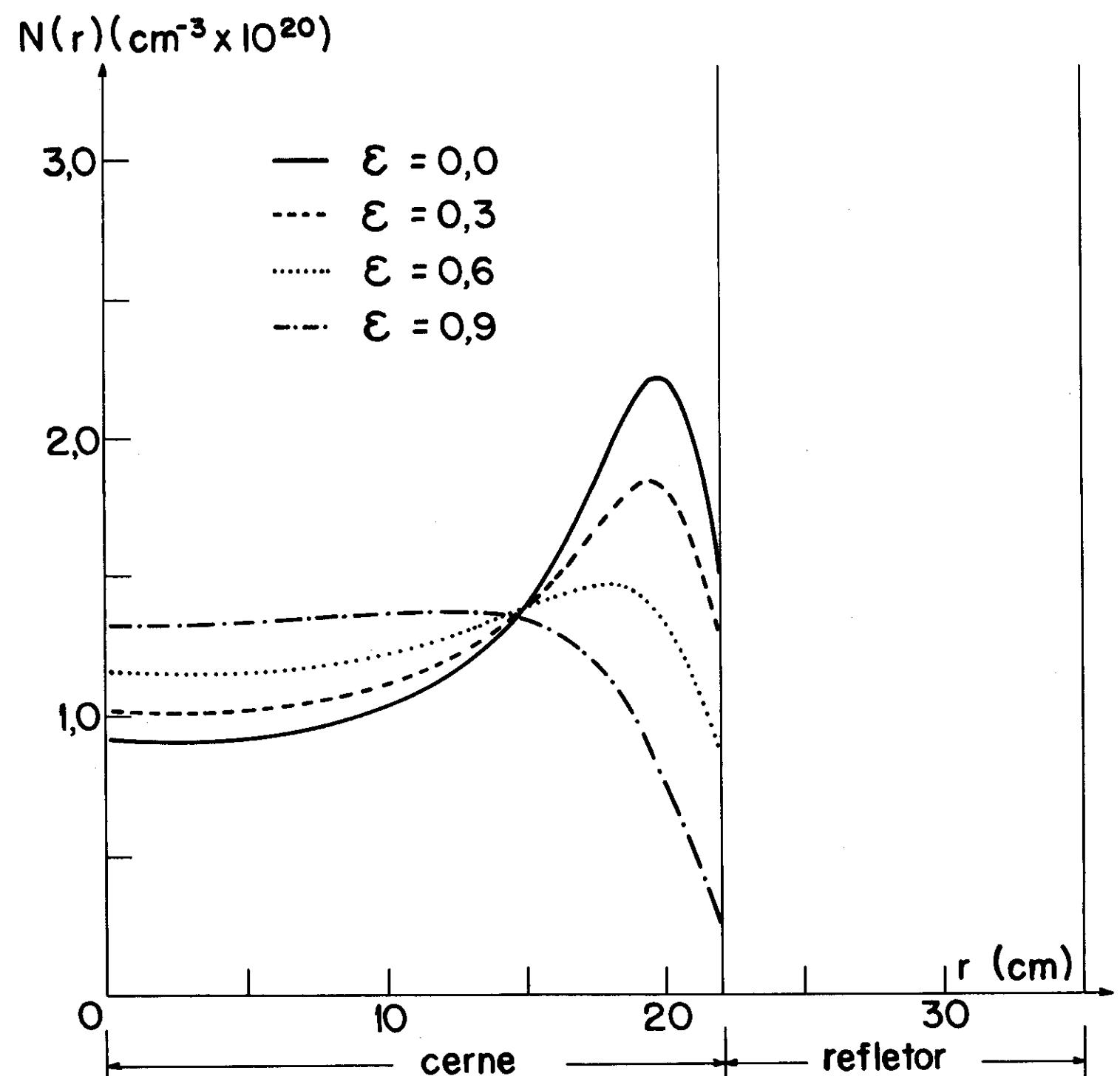


Fig.4.10. Distribuição do combustível no cerne para vários valores de  $\epsilon$ .

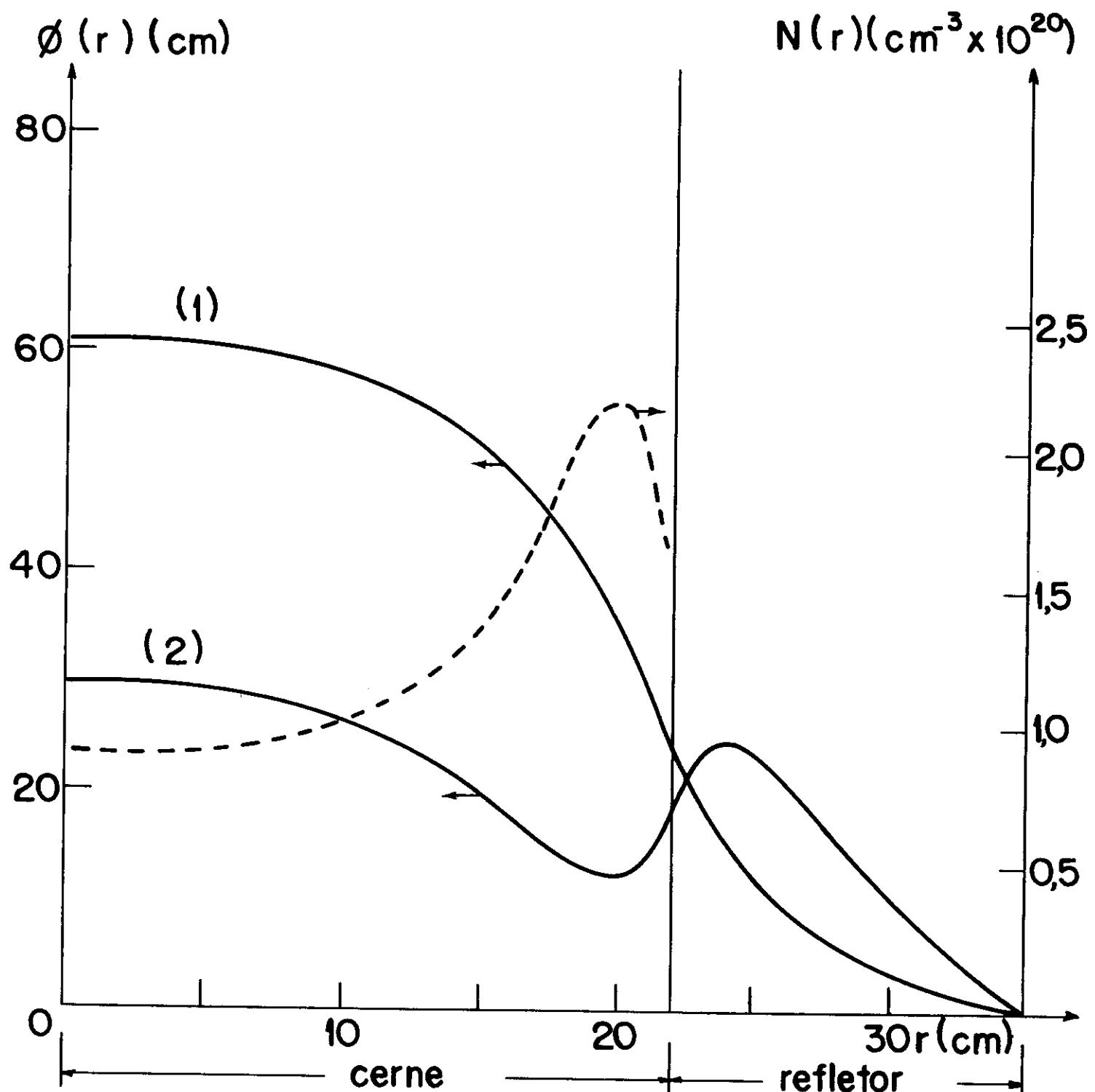


Fig. 4.11. Fluxos para os dois grupos de energia e distribuição do combustível para o caso  $\epsilon=0,0$ , que forneceu a maior potência específica linear.

CAPÍTULO 5  
COMENTÁRIOS, CONCLUSÕES E SUGESTÃO

Das figuras 4.8 e 4.9, pode-se observar que o fluxo rápido é maior que o fluxo térmico no cerne. Isto ocorre porque o cerne, sendo constituído por uma mistura de materiais combustível e moderador, é mais efetivo em absorver neutrons térmicos que em moderar neutrons rápidos.

A distribuição do fluxo térmico apresenta um pequeno pico no refletor, próximo a interface cerne-refletor. Esse pico surge, devido a moderação, no refletor, dos neutrons rápidos que escapam do cerne. Como a secção de choque de absorção de neutrons é pequena no refletor, onde só existe material moderador, os neutrons termalizados se acumulam nessa região, até se difundirem de volta ao cerne, escaparem do reator ou eventualmente serem absorvidos.

Esse fenômeno, que em bons refletores resulta num fluxo de neutrons térmicos no refletor quase tão alto quanto no cerne, faz com que alguns reatores sejam controlados pela inserção de absorvedores no refletor em lugar de no cerne<sup>(9)</sup>.

As formas das distribuições dos fluxos obtidas, tanto para os neutrons térmicos como rápidos, estão de pleno acordo com as apresentadas na literatura<sup>(1,9)</sup>, onde a equação de difusão em 2 grupos de energia é resolvida por outros métodos.

Um resultado importante a ser observado é que a massa crítica obtida, para as várias formas de distribuição de densida-

de de potência, foi aproximadamente a mesma. A variação entre os dois extremos, isto é, para  $\epsilon=0$  e  $\epsilon=0,9$ , foi de apenas 5,6%.

A potência específica linear normalizada, entretanto, foi bem maior para a distribuição uniforme da densidade de potência onde  $\epsilon=0$ , que para  $\epsilon=0,9$ , sendo essa variação de 42,8%. Conclui-se, portanto, que a imposição de uma distribuição de densidade de potência constante, leva a uma distribuição de combustível que optimiza a retirada de potência.

Pode-se observar também, pela figura 4.6, que essa mesma distribuição de combustível forneceu um pico de neutrons térmicos mais pronunciado no refletor, indicando que a eficiência deste foi aumentada.

Deve-se frisar que as equações obtidas no ítem 3.4 podem, teoricamente, ser utilizadas para um número qualquer de grupos de energia, desde que o reator considerado tenha as características do descrito neste trabalho. A aplicação numérica, usando só dois grupos de energia, foi escolhida por sua simplicidade de cálculo, o que não diminui sua efetividade na comprovação da validade das equações obtidas.

Outro fato que também deve ser observado, é que o método proposto pode ser igualmente utilizado para a resolução da equação de difusão em multigrupo, para um reator esférico, totalmente refletido. O cálculo para reatores desse tipo é muito utilizado em Engenharia Nuclear, visto que, para reatores cilíndricos, totalmente refletidos, que é a grande maioria dos reatores construídos, a solução da equação de difusão em multigrupo, só é possível por m-

todo iterativo. O que frequentemente se faz é utilizar o resultado obtido para um reator esférico equivalente, isto é, que possue igual volume do cerne, para reduzir o tempo consumido no processo de iteração.

Quanto as vantagens do método desenvolvido neste trabalho, pode-se citar duas fundamentais. A primeira se encontra no modo como cada região é resolvida; isoladamente e considerada como um sistema nū, exceto em que as condições de contorno não são homogêneas, sendo dadas pelos valores dos fluxos nas interfaces das regiões adjacentes. O reator a ser resolvido pode, ainda, ter um número qualquer de regiões.

A segunda vantagem fundamental deste método é a de que a função de distribuição de densidade de potência pode ser qualquer, o que permite à priori impor uma distribuição desejada, que melhore o desempenho termodinâmico do reator, ou permita uma otimização na queima dos elementos combustíveis, ou na retirada de potência, ou ainda que estabeleça uma densidade máxima de potência local, permissível para o sistema. Como resultado dessa imposição inicial, obtém-se a distribuição da densidade de combustível, ao longo do cerne, que deve ser utilizada.

Além disso, os outros métodos empregados na resolução da equação de difusão de neutrons em multigrupo e duas regiões, para um reator com distribuição não uniforme de combustível no cerne, são métodos iterativos, tediosos e demorados, não tendo sido obtido, até o momento, soluções analíticas.

Por outro lado, o método da função de Green tem como desvantagem o extenso desenvolvimento analítico, necessário para

o caso em que vários grupos de energia são considerados.

Uma aparente desvantagem está na restrição que deve ser feita na formulação do problema, onde foi considerado um reator com baixa concentração de combustível no cerne. Essa imposição foi necessária para que se pudesse considerar o coeficiente de difusão como sendo só do moderador, e portanto, espacialmente constante nas duas regiões, uma vez que o moderador foi admitido com distribuição uniforme em cada região. Entretanto, para se ter uma variação de 1% no valor do coeficiente de difusão, devido a presença do combustível, é necessário uma relação:

$$\frac{N_U}{N_{H_2O}} = \frac{1}{164}$$

onde  $N_U$  e  $N_{H_2O}$  são as densidades de átomos de u-235 e de moléculas de água respectivamente.

Mas na prática, os reatores são construídos com essa relação ainda menor e, portanto, a hipótese feita é justificável.

Finalmente, para mostrar que as simplificações de caráter físico feitas na secção 4.1, para a formulação do problema resolvido, são razoáveis, alguns comentários podem ser feitos.

As fissões foram consideradas causadas só por neutrons do grupo 2. A tabela 5.1 apresenta as secções de choque microscópicas de fissão do u-235, obtidas da referência (12), e que mostra como a probabilidade de ocorrer fissão no grupo rápido é desprezível comparada a do grupo térmico.

TABELA 5.1- Secções de choque microscópica de fissão do u-235, em barn, para os dois grupos. A do grupo 1 possui só 2,4% de valor da do grupo 2

$\sigma_{cf}^1$	$\sigma_{cf}^2$
8,783	363,02

Foi considerado também que os neutrons de fissão surgem só no grupo 1. A tabela 5.2 fornece os valores das frações de neutrons de fissão, para os dois grupos, geradas pelo código de computação XSDRN (16).

TABELA 5.2

$x^1$	$x^2$
0,99999	0,0

Esse resultado mostra que a hipótese feita é válida.

Outra simplificação feita foi a de que não havia esparlhamento de neutrons do grupo 2 para o grupo 1. Os dados da tabela 5.3, que apresenta as secções de choque microscópica de transferência do grupo 1 para o 2 e do 2 para o 1, geradas pelo XSDRN, mostram que essa outra hipótese também é razoável.

TABELA 5.3. Secções de choque de remoção do u-235 e da água, em barn, para os dois grupos

	$\sigma(1 \rightarrow 2)$	$\sigma(2 \rightarrow 1)$
u-235	$3,412 \times 10^{-3}$	$8,403 \times 10^{-8}$
H <sub>2</sub> O	1,461	$2,46 \times 10^{-4}$

Por último, a tabela 5.4, que fornece as secções de choque microscópicas de absorção de u-235 e da água, para os dois grupos de energia, obtidas da referência (12), mostra que a hipótese de que a absorção, no cerne e refletor, é desprezível no grupo 1, é também justificável. A secção de choque de absorção do grupo 1, para o u-235, é só 3,27% da do grupo 2. Para a água essa relação é de 2,2%.

TABELA 5.4. Secções de choque de absorção do u-235 e da água, em barn, para os dois grupos

	$\sigma_a^1$	$\sigma_a^2$
u-235	13,9060	425,5160
H <sub>2</sub> O	0,01238	0,5654

Como sugestão para um trabalho futuro, propõe-se a resolução da equação de difusão em multigrupo, pelo método aqui

proposto, para um reator cilíndrico, finito, totalmente refletido, e com distribuição de combustível não uniforme no cerne.

A solução analítica desse problema é considerada até agora impraticável<sup>(1)</sup>, podendo-se, no máximo, estimar a composição crítica ou dimensões de um reator desse tipo, utilizando métodos iterativos, muito laboriosos para vários grupos de energia.

Em 1974, Kobayashi<sup>(17)</sup>, procurou resolver esse problema com auxílio da função de Green, que seria determinada em forma da série de Fourier. Entretanto, a série não convergiu uniformemente, tornando a aproximação impraticável.

Em 1977, Sanazzaro<sup>(6)</sup> resolveu o problema proposto, em geometria  $(r,z)$ , utilizando funções de Green. Estas foram obtidas com auxílio da transformada de Hankel, que diminuiu as dimensões do problema removendo a coordenada  $r$ . Porém para que a mesma equação, excetuando o termo fonte, pudesse ser utilizada nas duas regiões, cerne e refletor, e com isso obter condições de contorno conhecidas e homogêneas, os valores dos fluxos na interface mais externa, foi feita a restrição de que ambas regiões possuam propriedades idênticas de moderação, absorção e difusão. O resultado obtido pode, com boa aproximação, ser utilizado para o caso de reatores moderados a água e refletidos também a água, com propriedades de difusão e moderação semelhantes no cerne e refletor. Se essas propriedades forem diferentes o resultado obtido por Sanazzaro não se aplica.

Utilizando o método aqui proposto, esse problema pode ser resolvido, sem restrições, mesmo para reatores que utili-

zem materiais diferentes como moderador e refletor.

Para isso, inicialmente a equação de difusão em multigrupo seria resolvida separadamente para cada região, utilizando a função de Green bidimensional, e tendo como condições de contorno os valores dos fluxos de cada grupo, nas interfaces cerne-refletor. A solução geral da equação de difusão, equivalente a (A.5) desenvolvida no Apêndice A, seria obtida pela utilização do teorema de Green bidimensional. As funções de Green em geometria  $(r,z)$ , para cada região, poderiam ser obtidas com auxílio da transformada de Hankel. Deste modo, obter-se-iam distribuições dos fluxos, para os vários grupos e em cada região, dependentes dos valores desconhecidos dos fluxos nas interfaces. Esses valores seriam calculados a partir de um sistema de equações obtidos, pela imposição de continuidade do fluxo e da densidade de corrente de neutrons nas interfaces. Finalmente, os fluxos no interior de cada região seriam obtidos.

## APÊNDICE A

RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL  
UTILIZANDO FUNÇÕES DE GREEN

Este apêndice tem por objetivo introduzir o método da função de Green na resolução de uma equação diferencial não homogênea do tipo:

$$L[u(r)] = -\phi(r) , \quad (A.1)$$

no domínio  $C:(a,b)$  onde  $L$  é o operador diferencial:

$$L \equiv \frac{d}{dr} [p(r) \frac{du}{dr}] - q(r) \quad (A.2)$$

e  $\phi(r)$  denota uma função seccionalmente contínua, definida em  $C$  e que representa o termo fonte na ED.

Convém salientar que o operador  $L$  é geral, pois qualquer equação diferencial de segunda ordem  $a(r)u''(r)+b(r)u'r + c(r)u(r)=F(r)$ , em um intervalo  $a \leq r \leq b$ , onde  $a(r)$  é uma função positiva e continuamente diferenciável nesse intervalo, e  $b(r)$  e  $c(r)$  contínuas, pode ser colocada na forma auto-adjunta:

$$L[u(r)] = f(r)$$

com

$$p(r) = e^{\int_a^r \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi}$$

$$q(r) = \frac{c(r)}{a(r)} p(r)$$

e

$$f(r) = \frac{F(r)}{a(r)} p(r)$$

bastando multiplicar a ED inicial por:  $\frac{e^{\int_a^r \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi}}{a(r)}$ .

Para resolver a ED (A.1) para uma fonte genérica  $\phi(r)$ , introduz -se a função de Green  $G(r, r')$  que é a solução para uma fonte pontual localizada em  $r'$ , ou seja,  $G(r, r')$  deve satisfazer a:

$$LG(r, r') = \delta(r - r') , \quad a < r < b \quad (A.3)$$

sendo  $\delta(r - r')$  a função delta de Dirac.

Multiplicando (A.1) por  $G(r, r')$ , (A.3) por  $\mu(r)$ , subtraindo os respectivos resultados e integrando de  $a$  até  $b$ , obtém - se :

$$\begin{aligned} \int_a^b [G(r, r') L\mu(r) - \mu(r) LG(r, r')] dr &= \int_a^b \phi(r) G(r, r') dr - \\ - \int_a^b \mu(r) \delta(r - r') dr & \end{aligned} \quad (A.4)$$

Aplicando o teorema de Green unidimensional no termo da direita e utilizando as propriedades da função delta, a expressão (A.4) torna - se:

$$\left\{ p(r) \left[ G(r, r', r') \frac{du(r)}{dr} - u(r) \frac{dG(r, r')}{dr} \right] \right\}_{r=a}^b = \\ = \int_a^b \phi(r) G(r, r', r') dr - u(r')$$

trocando as variáveis  $r'$  por  $r$ ; obtem-se

$$u(r) = \int_a^b G(r', r) \phi(r') dr' - \left\{ p(r') \left[ G(r', r) \frac{du(r')}{dr'} - u(r') \frac{dG(r', r)}{dr'} \right] \right\}_{r'=a}^b \quad (A.5)$$

expressão que fornece a solução para (A.1), dadas as condições de contorno.

Pode-se, agora, considerar várias possibilidades para as condições de contorno de (A.1) em  $r=a$  e  $r=b$ .

1)  $u(a)$  e  $u(b)$  conhecidas:

Neste caso escolhe-se como condição de contorno de (A.3):

$$G(a, r) = 0$$

$$G(b, r) = 0$$

Isto possibilita eliminar da expressão (A.5) as quantidades desconhecidas:

$$\frac{d\mu}{dr'}(r) \Big|_{r'=a} \quad \text{e}$$

$$\frac{d\mu}{dr'}(r') \Big|_{r'=b}$$

reduzindo-a para:

$$\mu(r) = \int_a^b G(r', r) \phi(r') dr' + \{ p(r') \mu(r') \frac{d}{dr'} G(r', r) \Big|_{r'=a}^b \} \quad (\text{A.6})$$

que é a solução de (A.1) em termos das quantidades conhecidas.

$$2) \mu(a) \text{ e } \frac{d\mu}{dr}(r) \Big|_{r=b}, \text{ dadas}$$

Para este caso escolhe-se:

$$G(a, r) = 0$$

$$\frac{dG}{dr'}(r', r) \Big|_{r'=b} = 0$$

Deste modo elimina-se as quantidades desconhecidas  $\mu(b)$  e  $\frac{d\mu}{dr}(r) \Big|_{r=a}$  de (A.5) e obtém-se a seguinte solução de (A.1):

$$\begin{aligned} \mu(r) &= \int_a^b G(r', r) \phi(r') dr' - p(a) \mu(a) \frac{d}{dr'} G(r', r) \Big|_{r'=a} \\ &\quad - p(b) G(b, r) \frac{d\mu}{dr'}(r') \Big|_{r'=b} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

expressão que só contém quantidades conhecidas.

$$3) \quad A\mu(a) + B \frac{d\mu}{dr}(r) \Big|_{r=a} = X, \quad \text{dados}$$

$$C\mu(b) + D \frac{d\mu}{dr}(r) \Big|_{r=b} = Y$$

Neste caso escolhe-se:

$$AG(a, r) + B \frac{d}{dr'} G(r', r) \Big|_{r'=a} = 0$$

$$CG(b, r) + D \frac{d}{dr'} G(r', r) \Big|_{r'=b} = 0$$

Em (A.5) a quantidade necessária, em  $r=a$ ; é:

$$G(a, r) \frac{d\mu}{dr'}(r') \Big|_{r'=a} - \mu(a) \frac{d}{dr'} G(r', r) \Big|_{r'=a} =$$

$$= G(a, r) \frac{d\mu}{dr'}(r') \Big|_{r'=a} - \mu(a) \left[ - \frac{A}{B} G(a, r) \right] =$$

$$= \frac{G(a, r)}{B} [A\mu(a) + B \frac{d\mu}{dr'}(r') \Big|_{r'=a}] = \frac{G(a, r)}{B} X = -$$

$$- \frac{1}{A} \frac{d}{dr'} G(r', r) \Big|_{r'=a} \cdot X$$

é denominada de solução fundamental da equação diferencial  $L[u(r)] = 0$ . Portanto a função de Green é uma solução fundamental particular satisfazendo determinadas condições de contorno.

Para construir a função de Green de (A.1) com condições de contorno  $u(a)$  e  $u(b)$  conhecidas, deve-se encontrar a solução do seguinte problema:

$$L[G(r, r')] = 0 \quad \text{para } a < r < r' \quad \text{e} \\ r' < r \leq b$$

$$B_1 G(a, r') = 0 \quad ; \quad B_2 G(b, r') = 0$$

onde  $B_1$  e  $B_2$  são operadores lineares definindo condições homogêneas para  $G(r, r')$  com relação a  $r$ . Portanto, a função  $G(r, r')$  é da forma:

$$G(r, r') = \begin{cases} A_1 u_1(r) & , \quad a < r < r' \\ A_2 u_2(r) & , \quad r' < r \leq b \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são constantes, e as funções  $u_1$  e  $u_2$  devem ser duas soluções linearmente independentes de  $L[u] = 0$ , com  $B_1[u_1] = 0$  e  $B_2[u_2] = 0$ , respectivamente.

As propriedades a e b de  $G(r, r')$  requerem que:

$$A_1 u_1(r') - A_2 u_2(r') = 0$$

$$-A_1 u'_1(r') + A_2 u'_2(r') = -\frac{1}{p(r')} \quad (\text{A.10})$$

que é uma quantidade conhecida.

Do mesmo modo pode-se mostrar que a quantidade necessária para  $r'=b$  em (A.5) pode ser expressa em termos do valor dado  $\Psi$ . Em cada caso pode-se escolher às condições de contorno para  $G(r, r')$ , de modo a eliminar valores desconhecidos de  $\mu(r)$  ou  $d\mu/dr$  nas fronteiras.

Desse modo obtém-se a solução da equação diferencial não homogênea (A.1), uma vez determinada sua função de Green.

#### Determinação de $G(r, r')$

Por definição a função  $G(r, r')$  é a função de Green da expressão diferencial  $L[\mu(r)]$  se satisfizer as seguintes propriedades:

- a) Para um  $r'$  fixo,  $G(r, r')$  é uma função contínua de  $r$  e satisfaz prescritas condições de contorno homogêneas;
- b) Exceto no ponto  $r=r'$  as derivadas  $\frac{dG}{dr}(r, r')$  e  $\frac{d}{dr} [p(r) \frac{dG}{dr}(r, r')]$  são contínuas em C. No ponto  $r=r'$ ,  $\frac{dG}{dr}(r, r')$  tem uma descontinuidade dada por:

$$\frac{dG}{dr}(r, r') \left|_{\begin{array}{l} r=r'_+ \\ r=r'_- \end{array}} \right. = - \frac{1}{p(r')}$$

sendo  $p(r)$  contínua em  $r'$ ;

- c)  $G(r, r')$  satisfaz a equação diferencial  $L[G(r, r')] = 0$ , exceto no ponto  $r=r'$ .

Uma função contínua que satisfaz só as condições b e c

onde tira-se:

$$A_1 = \frac{-u_2(r')}{p(r')\omega(u_1, u_2; r')} \quad (A.11)$$

$$A_2 = \frac{-u_1(r')}{p(r')\omega(u_1, u_2; r')}$$

sendo  $\omega(u_1, u_2; r') = [u_1 u_2 - u_2 u_1]_{r=r'}^r$ , o wronskiano de  $u_1$  e  $u_2$ . Como  $u_1$  e  $u_2$  são linearmente independentes  $\omega \neq 0$ .

A forma explícita da função de Green é então:

$$G(r, r') = \begin{cases} \frac{-u_1(r)u_2(r')}{p(r')\omega(u_1, u_2; r')} & , \quad a \leq r < r' \\ \frac{-u_1(r')u_2(r)}{p(r')\omega(u_1, u_2; r')} & , \quad r' < r \leq b \end{cases} \quad (A.12)$$

A função de Green é simétrica, isto é,  $G(r, r') = G(r', r)$ , pois (A.1) é uma equação diferencial auto-adjunta.

## APÊNDICE B

## CÁLCULO DAS FUNÇÕES DE GREEN PARA O CERNE E REFLETOR

Para o cerne, tomando-se a equação (3.3.17), tem-se :

$$L\phi_c^J(r) = -r f_c^J(r) \quad , \quad 0 < r < R_1$$

com

$$f_c^J(r) = H_c^J(r) + E^J(r)$$

e condições de contorno

$$\left. \frac{d\phi_c^J}{dr}(r) \right|_{r=0} = 0$$

$$\phi_c^J(R_1) = \phi_r^J(R_1)$$

Pelo Apêndice A, deve-se ter como condições de contorno de  $G(r, r')$ :

$$\left. \frac{dG}{dr}(r, r') \right|_{r=0} = 0$$

(B.1)

$$G(R_1, r') = 0$$

Usando a propriedade da função de Green, dada no A-

pêndice A, o cálculo de  $G_c(r, r')$  equivale a resolver o seguinte problema:

$$L[G_c(r, r')] = 0 \quad , \quad 0 \leq r < r' \quad (B.2)$$

$$L[G_c(r, r')] = 0 \quad , \quad r' < r \leq R_1$$

com as condições de contorno dadas em (B.1).

As equações (B.2) tem por soluções:

$$G_c^J(r, r') = \begin{cases} AI_o(K_c^J r) + BK_o(K_c^J r) & , \quad 0 \leq r < r' \\ CI_o(K_c^J r) + DK_o(K_c^J r) & , \quad r' < r \leq R_1 \end{cases} \quad (B.3)$$

Utilizando as condições de contorno, obtém-se:

$$\left. \frac{dG_c^J}{dr}(r, r') \right|_{r=0} = 0 \rightarrow G_c^J(r, r') \text{ é finita em } r=0, \text{ logo:}$$

$$B = 0 \quad e$$

$$C = - \frac{DK_o(K_c^J R_1)}{I_o(K_c^J R_1)} \quad (B.4)$$

Do Apêndice A, relações (A-10), chega-se a:

$$AI_o(K_c^J r') + D[M I_o(K_c^J r') - K_o(K_c^J r')] = 0 \quad (B.5)$$

$$AK_c^J I_1(K_c^J r') + DK_c^J [M I_1(K_c^J r') + K_1(K_c^J r')] = \frac{1}{r},$$

onde:

$$M = \frac{K_o(K_c^J R_1)}{I_o(K_c^J R_1)}$$

O wronskiano do sistema (B.5) é:

$$\omega(r') = K_c^J [I_o(K_c^J r') K_1(K_c^J r') + I_1(K_c^J r') K_o(K_c^J r')]$$

Da relação:

$$I_n(z)K_{n-1}(z) + I_{n-1}(z)K_n(z) = \frac{1}{z} \quad (B.6)$$

obtém-se:

$$\omega(r') = \frac{1}{r'} \quad (B.7)$$

Portanto, das relações (A.11), obtidas no Apêndice A:

$$A = K_o(K_c^J r') - M I_o(K_c^J r') \quad (B.8)$$

e

$$D = I_o(K_c^J r')$$

Logo, a função de Green para o cerne é dada por:

$$G_c^J(r, r') = \begin{cases} [K_o(K_c^J r') - M I_o(K_c^J r')] I_o(K_c^J r) , & 0 \leq r < r' \\ [K_o(K_c^J r) - M I_o(K_c^J r)] I_o(K_c^J r') , & r' < r \leq R_1 \end{cases} \quad (B.9)$$

Para o refletor, de (3.3.17) tem-se:

$$L\phi_r^J(r) = -rf_r^J(r); \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

com

$$f_r^J(r) = h_r^J(r)$$

e condições de contorno:

$$\phi_r^J(R_1) = \phi_c^J(R_1)$$

$$\phi_r^J(R_2) = 0$$

Pelo que foi visto no Apêndice A, deve-se ter, neste caso, as seguintes condições de contorno para  $G(r, r')$ :

$$G_r(R_1, r') = 0 \quad (B.10)$$

$$G_r(R_2, r') = 0$$

e  $G_r^J(r, r')$  deve satisfazer a:

$$L[G_r^J(r, r')] = 0; \quad R_1 \leq r < r' \quad (B.11)$$

$$L[G_r^J(r, r')] = 0; \quad r' < r \leq R_2$$

cuja solução fornece:

$$G_r^J(r, r') = \begin{cases} EI_o(K_r^J r') + F K_o(K_r^J r) & ; R_1 \leq r < r' \\ PI_o(K_r^J r) + R K_o(K_r^J r) & ; r' < r \leq R_2 \end{cases} \quad (B.12)$$

Das condições de contorno (B.10), tira-se:

$$F = -E \frac{I_o(K_r^J R_1)}{K_o(K_r^J R_1)} \quad \text{e}$$

$$R = -P \frac{I_o(K_r^J R_2)}{K_o(K_r^J R_2)}$$

De (A.10), obtém-se:

$$E[I_o(K_r^J r') - Q K_o(K_r^J r')] - P[I_o(K_r^J r') - S K_o(K_r^J r')] = 0 \quad (B.13)$$

$$PK_r^J[I_1(K_r^J r') + SK_1(K_r^J r')] - EK_r^J[I_1(K_r^J r') + QK_1(K_r^J r')] = -\frac{1}{r'}$$

onde:

$$Q = \frac{I_o(K_r^J R_1)}{K_o(K_r^J R_1)}$$

e

$$S = \frac{I_o(K_r^J R_2)}{K_o(K_r^J R_2)}$$

O wronskiano de (B.13) é:

$$\omega(r') = K_r^J [Q-S] [I_o(K_r^J r') K_1(K_r^J r') + K_o(K_r^J r') I_1(K_r^J r')]$$

Utilizando novamente a relação (B.6), vem:

$$\omega(r') = \frac{Q-S}{r'} \quad (B.14)$$

Portanto, de (A.11):

$$E = \frac{I_o(K_r^J r') - SK_o(K_r^J r')}{Q-S} \quad (B.15)$$

$$P = \frac{I_o(K_r^J r') - QK_o(K_r^J r')}{Q-S}$$

Logo a função de Green para o refletor, é dada por:

$$G_r^J(r, r') = \begin{cases} \frac{I_o(K_r^J r') - SK_o(K_r^J r')}{Q-S} [ I_o(K_r^J r) - QK_o(K_r^J r) ] ; & R_1 < r < r' \\ \frac{I_o(K_r^J r') - QK_o(K_r^J r')}{Q-S} [ I_o(K_r^J r) - SK_o(K_r^J r) ] ; & r' < r \leq R_2 \end{cases} \quad (B.16)$$

90  
APÊNDICE C

\*\*\*\*\* T=00000 IS CN LU 07

```

0001 FTN4,L
0002      PROGRAM RGF01
0003 C
0004 C      CALCULO DOS FLUXOS RAPIDOS (ERLFC 1) E TÉRMICO (GRUFC 2) , DA DIS-
0005 C      TRIBUICAO DE COMBUSTIVEL (L-235) E DA MASSA CRITICA DE UM REATOR
0006 C      CILINDRICO,REFLETIVO E COM DISTRIUICAO DE COMBUSTIVEL NAO UNIFOR-
0007 C      ME. UTILIZANDO O METODO DA FUNCAO DE GREEN.
0008 C
0009 C
0010 DOUBLE PRECISION F,Z,H,F,G,GC,GR,HR,Z1,Z2,AINT3,AINT4,Z3,Z4,ZC1
0011 1,ZC2,ZC3,ZC4,FI1,FIC1,AINTC4,AINTC3,FIRE1,RKR1,R1,H2,DC1,HKC1,H3,H
0012 24,T,S,AM,R1,CHI,ANI,DR1,AINT1,AINT2,CTE,EP,EFSI,FIR1,RC,RR,D,PL,RN
0013 3,RETA1,Z13,ZC13,AINT13,DM,DMC,ZF13,ZPC13,AINTP,POT
0014 DOUBLE PRECISION AINT5,AINT6,AINT7,AINT8,AINT9,AINT10,C,E,CC,EC,CR
0015 1,ER,DR2,DC2,AN,SIGMAC,SIGMAR,T2,RKR2,HKC2,R10,R11,H12,S2,H9,ALFA,H
0016 2POR1,AQ,25,ZC5,Z6,ZC6,Z7,ZC7,Z8,ZCH,Z9,ZC9,Z10,ZC10,R14,H6,Z11,AIN
0017 3T11,Z12,AINT12,FIR2,FIC2,FI2,FIRE2,SCMFUS,BN,DNC,P7,HH,BETA2
0018 DIMENSION F(35),Z(35),G(34),H(34),GC(35),HC(35),GR(25),HR(25),Z1(3
0019 14),Z2(34),AINT3(34),AINT4(34),Z3(34),Z4(34),ZC1(35),ZC2(35),ZC3(35
0020 2),ZC4(35),FI1(34),FIC1(35),AINTC3(35),AINTC4(35),FIRE1(25),RR(25)
0021 3,R(34),RC(35)
0022 DIMENSION C(34),E(34),CC(35),EC(35),CR(25),ER(25),Z5(34),ZC5(35),Z
0023 16(34),ZC6(35),Z7(34),ZC7(35),Z8(34),ZCH(35),Z9(34),ZC9(35),Z10(34)
0024 2,ZC10(35),Z11(25),AINT11(25),Z12(25),AINT12(25),AINT8(34),AINT9(34
0025 3),ZC20(15),AINT10(34),FI2(34),FIC2(35),FIRE2(25),DN(34),DNC(35)
0026 DATA GR/15.136966D0,16.60795D0,18.22807D0,20.012615D0,21.97861D0,2
0027 14.14481D0,26.531669D0,29.162352D0,32.08079D0,35.273009D0,38.791016
0028 2D0,42.667738D0,46.960631D0,51.69704D0,56.92108D0,62.682618D0,69.03
0029 375696D0,76.047424D0,83.781297D0,92.313792D0,101.727093D0,112.11478
0030 48D0,123.576326D0,136.225887D0,150.184865D0,HR/.00768623D0,.006836
0031 55D0,.006082D0,.00541195D0,.0048166D0,.00428759D0,.0038173D0,.0033
0032 69922D0,.00302738D0,.00269664D0,.00240235D0,.002140503D0,.00190857D
0033 70,.001702154D0,.00151823D0,.00135434D0,.00120828D0,.00107809D0,.00
0034 8096202D0,.00085852D0,.00076624D0,.000683927D0,.00061052D0,.0005450
0035 92D0,.000486596D0/
0036 DATA RKR1/.1966D0/,R1/13.18408D0/,R2/.0082039D0/,DC1/.9944D0/,HKC1
0037 1/.1933D0/,R3/12.75784D0/,R4/.0098783D0/,T/.000406727D0/,S/317330.6
0038 2066D0/,AM/.00055069D0/,R1/22.000/,CHT/1.0C0/,ANI/2.43D0/,DR1/1.278
0039 36D0/
0040 DATA G/1.00131694D0,1.007072497D0,1.0158918D0,1.0283349D0,1.044439
0041 177D0,1.06430697D0,1.08802726D0,1.11572739D0,1.1475667D0,1.18369500
0042 2+1.224324D0,1.269648D0,1.31993D0,1.375442D0,1.43646D0,1.503326D0,1
0043 3.57639415D0,1.65606667D0,1.74278061D0,1.8369878D0,1.93920554D0,2.0
0044 44999997D0,2.16998335D0,2.2998084D0,2.4401847D0,2.5918715D0,2.75574
0045 532D0,2.9327085D0,3.12372877D0,3.3298922D0,3.55230887D0,3.7923146D0
0046 6,4.05118252D0,4.3303963D0/,G/4.3303963D0,4.47814948D0,4.6315834D0
0047 7,4.79091493D0,4.95632426D0,5.12817216D0,5.30665962D0,5.49200678D0,
0048 85.6844773D0,5.8843453D0,6.09191949D0,6.36017272D0,6.531455500,6.76
0049 93978100,7.0052273D0,7.25624177D0,7.51677795D0,7.78735158D0,8.06835
0050 127D0,8.36018667D0,8.6632751D0,8.9781773D0,9.3052498D0,9.64487236D0
0051 2+9.99744367D0,10.3642555D0,10.7450142D0,11.140554D0,11.551408D0,11
0052 3.9781782D0,12.4214868D0,12.8820897D0,13.360418D0,13.857788D0,14.37
0053 44253D0/
0054 DATA H/2.592868D0,1.9685007D0,1.5564981D0,1.2810493D0,1.07784169D0
0055 1,.91977713D0,.7565893D0,.6945909D0,.60842229D0,.535004D0,.47197277
0056 2D0,.41753285D0,.37105038D0,.3307386D0,.2952014D0,.26379916D0,.23
0057 3601359D0,0.21135749D0,0.185679D0,0.1706191D0,0.1535519D0,0.13826D0
0058 4+0.1245443D0,0.11223806D0,0.1012439D0,0.09153165D0,0.08276614D0,0.
```

0059  
 0060  
 0061  
 0062  
 0063  
 0064  
 0065  
 0066  
 0067  
 0068  
 0069  
 0070  
 0071  
 0072  
 0073  
 0074  
 0075  
 0076  
 0077  
 0078  
 0079  
 0080  
 0081  
 0082  
 0083  
 0084  
 0085  
 0086  
 0087  
 0088  
 0089  
 0090  
 0091  
 0092  
 0093  
 0094  
 0095  
 0096  
 0097  
 0098  
 0099  
 0100  
 0101  
 0102  
 0103  
 0104  
 0105  
 0106  
 0107  
 0108  
 0109  
 0110  
 0111  
 0112  
 0113  
 0114  
 0115  
 0116  
 0117  
 0118

```

5073470900,0.067704500,0.061250300,0.055422600,0.050268400,0.045593
6600.0.041353900,HC/0.041353900,0.039335500,0.0375090400,0.0357200
7,0.034022700,0.032435700,0.030860600,0.02945200,0.028043200,0.0267
8417700,0.025490400,0.024280300,0.023168100,0.022055900,0.02105684
900.0.020066700,0.019134960,0.018254740,0.0173882500,0.0173882500
1,0.015820900,0.014939800,0.014404100,0.0137344500,0.013112800,0.01
22490200,0.011934750,0.011380200,0.010861900,0.01036700,0.00988400
3,0.009442680,0.009001300,0.008599500,0.00820560/
    DATA CC/140.1361600,153.6985960,168.5939110,184.9529380,202.921
133100,222.65880,244.34104300,268.161300,294.3321800,323.08751700,
2354.6845400,389.4062800,427.5641200,469.500600,515.5926800,566.255
30600,621.9440500,683.16192700,750.46115700,824.4498900,905.7973200
4.995.2399500,1093.5883600,1194.9832800,1320.6607700,1451.4474600,1
5555.2843700,1753.4809900,1927.4787700,2118.864500,2329.3850200,256
60.5633500,2815.7166300,3110.0116600,3404.3066800/,EC/.5261780-03,.
7472750-03,.4247960-03,.381740-03,.3430790-03,.308360-03,.2771830-0
73,.249180-03
8,.224020-03,.201420-03,.181110-03,.162870-03,.146470-03,.131730-
903,.1184890-03,.106580-03,.95880-04,.86260-04,.776060-04,.69830-04
1,.628310-04,.56540-04,.508810-04,.45790-04,.412140-04,.370960-04,.
2333910-04,.300580-04,.270590-04,.24360-04,.219320-04,.19750-04,.17
378010-04,.160990-04,.1441690-04/
    DATA DR2/.137400/,DC2/.165800/,AN/3.887640-09/,SIGMAR/.0494200/,T2
1/1.24377970-07/,HKR2/.3707800/,HKO2/.4559400/,R10/477.7800/,B11/.0
2001271900/,H12/3375.46300/,S2/6.6959680+10/,H9/3553.5700/,SIGMAC/.
30371700/,ALFA/.172200/,BPCRI/3553.5700/,AQ/4.24773480+06/,SCMFU5/3
463.020-24/
    DATA C/1.01002502800,1.04040178200,1.09204536400,1.16651492300,1.2
16606587800,1.39372558400,1.553395100,1.7499806400,1.98955935700,2.
227958530200,2.62414286400,3.04925665800,3.55326890400,4.1572977040
30,4.88079258600,5.74720718700,6.7848131600,8.02768454700,9.516888
402600,11.30192195200,13.44245616300,16.01043552500,19.0926234800,2
52.79367799300,27.23987182400,32.5835926600,39.0087876700,46.737551
62700,56.0380568400,67.2344067100,80.7179132400,96.9616393100,116.5
737324200,140.136159700/
    DATA E/1.75270385500,1.11452913400,0.77752209200,0.56534710500,0.4
12102443800,0.3185082200,0.24365506100,0.18795475200,0.145931400,0.
211389387300,0.08926900,0.07021734200,0.055398303300,0.04381998200,
30.034739504400,0.027594997600,0.021958018800,0.01749964100,0.01396
45884500,0.011159676100,0.008927451500,0.007149110600,0.00573042290
50,0.004597246300,0.003691098300,0.002965745600,0.002384565200,0.00
61918494700,0.00154443800,0.001243994300,0.00100251900,0.000808310
70,0.00065202100,0.0005261780/
    DATA CH/515.592675500,621.944084100,750.461157300,905.7973300,1093
1.5883500,1320.66076800,1595.28437200,1927.4787600,2329.38500100,28
215.71662500,3404.30664800,4116.77160700,4979.31688700,6023.7144760
30.7288.4893300,8820.35948500,10675.9839100,12924.0846700,15648.022
46200,18948.9253200,22949.4841100,27798.5657500,33676.8110800,40803
5.4360200,49444.4892200/,ER/1.1848904D-04,9.58800130-05,7.7605920-0
65.6.28308920-05,5.08813120-05,4.12140690-05,3.33910820-05,2.705884
770-05,2.19319910-05,1.77800620-05,1.44168890-05,1.16920250-05,9.48
838544D-06,7.694034D-06,6.24302050-06,5.0664566D-06,4.11225850-06,3
9.33826440-06,2.7103360-06,2.20082530-06,1.78733560-06,1.45171990-0
16,1.17927220-06,4.58071750-07,7.78454380-07/
    E6=-(1.000+ALFA)/DC2
    E7=SIGMAR/DR2
    E8=S2-AQ
    E14=SIGMAC/DC2
    CTE=CHI*ANI/DC1
    N=34
  
```

```

0119      D=.429608627D0
0120      RL=D .
0121      DC 1 I=1,34
0122      R(I)=RL
0123      1 RL=RL+D
0124      RETA1=DH1*T*BKR1*(B1+S*P2)+DC1*BKC1*P3/14.601D0
0125 C      FARA O CALCULO DAS INTEGRAIS FCI UTILIZADA A "SUBROUTINE GSF"
0126 C      CALCULO DAS INTEGRAIS NO CAROCO C/ PASSO .4296 (GRUPO 1)
0127      DC 2 I=1,34
0128      2 F(I)=R(I)*G(I)
0129      CALL GSF(D,F,Z+N)
0130      DC 3 I=1,34
0131      3 Z1(I)=Z(I)
0132      DC 4 I=1,34
0133      4 F(I)=F(I)*R(I)*R(I)
0134      CALL GSF(D,F,Z+N)
0135      DC 5 I=1,34
0136      5 Z2(I)=Z(I)
0137      DC 6 I=1,34
0138      6 F(I)=R(I)*H(I)
0139      CALL GSF(D,F,Z+N)
0140      DC 7 I=1,34
0141      7 Z3(I)=Z(I)
0142      DC 8 I=1,34
0143      8 F(I)=F(I)*R(I)*R(I)
0144      CALL GSF(D,F,Z+N)
0145      DC 9 I=1,34
0146      9 Z4(I)=Z(I)
0147      N=35
0148      D=.214804313D0
0149      RN=14.60669D0
0150      DO 10 I=1,35 .
0151      R0(I)=RN
0152      10 RN=RN+D
0153 C      CALCULO DAS INTEGRAIS NO CAROCO C/ PASSO .2148 (GRUPO 1)
0154      DC 11 I=1,35
0155      11 F(I)=RC(I)*GC(I)
0156      CALL GSF(D,F,Z+N)
0157      DC 12 I=1,35
0158      12 ZC1(I)=Z(I)
0159      DC 13 I=1,35
0160      13 F(I)=F(I)*RC(I)*RC(I)
0161      CALL GSF(D,F,Z+N)
0162      DC 44 I=1,35
0163      44 ZC2(I)=Z(I)
0164      DC 14 I=1,35
0165      14 F(I)=RC(I)*FC(I)
0166      CALL GSF(D,F,Z+N)
0167      DC 15 I=1,35
0168      15 ZC3(I)=Z(I)
0169      DC 16 I=1,35
0170      16 F(I)=F(I)*RC(I)*RC(I)
0171      CALL GSF(D,F,Z+N)
0172      DC 17 I=1,35
0173      17 ZC4(I)=Z(I)
0174      AINT1=Z1(34)+ZC1(35)
0175      AINT2=Z2(34)+ZC2(35)
0176      DC 30 I=1,34
0177      AINT3(I)=Z3(34)+ZC3(35)-Z3(I)
0178      30 AINT4(I)=Z4(34)+ZC4(35)-Z4(I)

```

```

0179      DC 31 I=1,35
0180      AINTC3(I)=ZC3(35)-ZC3(I)
0181 31 AINTC4(I)=ZC4(35)-ZC4(I)
0182      RL=22.03234994D0
0183      DC 38 I=1,25
0184      RR(I)=RL
0185 38 RL=RL+.537374389D0
0186      EPSI=0.000
0187 29 EP=EPSI/(R1*R1)
0188 C   FLUXO NA INTERFACE CAROCO REFLETOR (GRUPO 1)
0189      FIR1=CHI*ANI/(BETA1*R1*14.601D0)*(AINT1-EP*AINT2)
0190 C   FLUXO NO CAROCO ATE O PONTO R=14.6 (GRUPO 1)
0191      DC 18 I=1,34
0192      FI1(I)=CTE*(-AM*G(I)*(AINT1-EP*AINT2)+H(I)*(Z1(I)-EP*Z2(I))+G(I)*(1AINT3(I)-EP*AINT4(I)))+FIR1*G(I)/14.601D0
0193 18 CONTINUE
0194 C   FLUXO NO CAROCO DO PONTO R= 14.6 ATE R=22 (GRUPO 1)
0195      DC 19 I=1,35
0196      FIC1(I)=CTE*(-AM*GC(I)*(AINT1-EP*AINT2)+HC(I)*((Z1(34)+ZC1(I))-EP*1(Z2(34)+ZC2(I)))+GC(I)*(AINTC3(I)-EP*AINTC4(I)))+FIR1*GC(I)/14.601
0197 2D0
0200 19 CONTINUE
0201      WRITE(6,20)EPSI,FIR1
0202 20 FORMAT(1H1+14X,"VALOR DC FLUXO NA INTERFACE PARA O GRUPO 1 E EPSI
0203 1IGUAL A",D14.7,///,40X,"FIR1=",D14.7)
0204      WRITE(6,21)
0205 21 FORMAT(//,15X,"R",34X,"FLUXO NO CAROCO")
0206      DC 22 I=1,34
0207      WRITE(6,23)R(I),FI1(I)
0208 23 FORMAT(8X,D14.7,28X,D14.7)
0209 22 CONTINUE
0210      DC 25 I=1,35
0211      WRITE(6,24)RC(I),FIC1(I)
0212 24 FORMAT(8X,D14.7,28X,D14.7)
0213 25 CONTINUE
0214      WRITE(6,26)
0215 26 FORMAT(//,15X,"R",33X,"FLUXO NO REFLETOR")
0216 C   FLUXO NO REFLETOR (GRUPO 1)
0217      DC 27 I=1,25
0218      FIRE1(I)=T*FIR1*(S*HR(I)-GR(I))
0219      WRITE(6,28)RR(I),FIRE1(I)
0220 28 FORMAT(8X,D14.7,28X,D14.7)
0221 27 CONTINUE
0222      BETA2=DR2*T2*BKR2*(B10+S2*F11)+DC2*BKC2*B12/BPOR1
0223 C   CALCULO DAS INTEGRAIS NO CAROCO C/ PASSO .4296 (GRUPO 2)
0224      N=34
0225      D=.429608627D0
0226      DO 42 I=1,34
0227 42 F(I)=R(I)*C(I)
0228      CALL GSF(D,F,Z,N)
0229      DC 43 I=1,34
0230 43 Z5(I)=Z(I)
0231      DO 64 I=1,34
0232 64 F(I)=C(I)*R(I)**3
0233      CALL GSF(D,F,Z,N)
0234      DC 45 I=1,34
0235 45 Z6(I)=Z(I)
0236      DC 46 I=1,34
0237 46 F(I)=R(I)*FI1(I)*C(I)
0238      CALL GSF(D,F,Z,N).

```

```

0239      DC 47 I=1,34
0240      47 Z7(I)=Z(I)
0241      DC 48 I=1,34
0242      48 F(I)=H(I)*E(I)
0243      CALL GSF(D,F,Z,N)
0244      DC 49 I=1,34
0245      49 Z8(I)=Z(I)
0246      DC 50 I=1,34
0247      50 F(I)=H(I)*E(I)*F11(I)
0248      CALL GSF(D,F,Z,N)
0249      DC 51 I=1,34
0250      51 Z9(I)=Z(I)
0251      DC 52 I=1,34
0252      52 F(I)=E(I)*F(I)**3
0253      CALL GSF(D,F,Z,N)
0254      DC 53 I=1,34
0255      53 Z10(I)=Z(I)
0256 C      CALCULO DAS INTEGRAIS NO CAROCO C/ PASSO .215 (GRUPO 2)
0257      N=35
0258      D=.214804313D0
0259      DC 54 I=1,35
0260      54 F(I)=RC(I)*CC(I)
0261      CALL GSF(D,F,Z,N)
0262      DC 55 I=1,35
0263      55 ZC5(I)=Z(I)
0264      DC 56 I=1,35
0265      56 F(I)=CC(I)*RC(I)**3
0266      CALL GSF(D,F,Z,N)
0267      DC 57 I=1,35
0268      57 ZC6(I)=Z(I)
0269      DC 58 I=1,35
0270      58 F(I)=RC(I)*FIC1(I)*CC(I)
0271      CALL GSF(D,F,Z,N)
0272      DC 59 I=1,35
0273      59 ZC7(I)=Z(I)
0274      DC 60 I=1,35
0275      60 F(I)=RC(I)*EC(I)
0276      CALL GSF(D,F,Z,N)
0277      DC 61 I=1,35
0278      61 ZCP(I)=Z(I)
0279      DC 62 I=1,35
0280      62 F(I)=RC(I)*EC(I)*FIC1(I)
0281      CALL GSF(D,F,Z,N)
0282      DC 63 I=1,35
0283      63 ZC8(I)=Z(I)
0284      DC 64 I=1,35
0285      64 F(I)=EC(I)*RC(I)**3
0286      CALL GSF(D,F,Z,N)
0287      DC 65 I=1,35
0288      65 ZC9(I)=Z(I)
0289      AINT5=25(34)+ZC5(35)
0290      AINT6=26(34)+ZC6(35)
0291      AINT7=27(34)+ZC7(35)
0292      N=25
0293      D=.537374385D0
0294      DC 66 I=1,25
0295      66 F(I)=RR(I)*FIRE1(I)*CR(I)
0296      CALL GSF(D,F,Z,N)
0297      DC 67 I=1,25
0298      Z11(I)=Z(I)

```

```

0299   67 AINT11(I)=Z(25)-Z(I)
0300     DC 68 I=1,25
0301   68 F(I)=RR(I)*FIRE1(I)*ER(I)
0302     CALL GSF(L,F,Z,N)
0303     DC 69 I=1,25
0304   71 Z12(I)=Z(1)
0305   69 AINT12(I)=Z(25)-Z(1)
0306     DC 70 I=1,34
0307     AINT8(I)=Z8(34)+ZC8(35)-Z8(I)
0308     AINT9(I)=Z9(34)+ZC9(35)-Z9(I)
0309   70 AINT10(I)=Z10(34)+ZC10(35)-Z10(I)
0310 C   CALCULO DC FLUXO NA INTERFACE CAROCO-REFLETOR (GRUPO 2)
0311   FIR2=1.000/(BETA2*R1)*(1.0E0/BPCR1)*(SIGMAC*AINT7-(1.0E0+ALFA)*(AIN
0312   275-EF*AINTE))-T2*SIGMAR*(Z11(25)-S2*Z12(25)))
0313 C   CALCULO DC FLUXO NO CAROCO ATE O PONTO R=14.6 (GRUPO 2)
0314     DC 71 I=1,34
0315   FI2(I)=-AN*C(I)*(B14*AINT7+E6*(AINT5-EF*AINTE))+E(I)*(B14*Z7(I)+B6
0316   1*(Z5(I)-EF*Z6(I)))+C(I)*(B14*AINT9(I)+E6*(AINT8(I)-EP*AINT10(I)))+
0317   2*FIR2*C(I)/BPCR1
0318   71 CONTINUE
0319 C   CALCULO DC FLUXO NO CAROCO DC PCNT0 R=14.6 ATE R=22 (GRUPO 2)
0320     DC 72 I=1,35
0321   FIC2(I)=-AN*CC(I)*(B14*AINT7+E6*(AINT5-EF*AINTE))+EC(I)*(B14*(Z7(3
0322   14)+ZC7(1))+E6*((Z5(34)+ZC5(I))-EP*(Z6(34)+ZC6(I)))+CC(I)*(B14*(ZC
0323   29(35)-ZC9(I))+E6*((ZC8(35)-ZC8(I))-EP*(ZC10(35)-ZC10(I)))+FIR2*CC
0324   3(I)/BPCR1
0325   72 CONTINUE
0326 C   CALCULO DO FLUXO NO REFLETOR (GRUPO 2)
0327     DC 73 I=1,25
0328   FIRE2(I)=-B7*((CR(I)-S2*ER(I))/R8)*(Z11(I)-A0*Z12(I))+((CR(I)-A0*
0329   1*ER(I))/R8)*(AINT11(I)-S2*AINT12(I))-T2*FIR2*(CR(I)-S2*ER(I))
0330   73 CONTINUE
0331   WRITE(6,74)EPSI,FIR2
0332   74 FORMAT(1H1,5X,"VALOR DO FLUXO NA INTERFACE CAROCO-REFLETOR PARA O
0333   1GRUPO 2 E EPSI IGUAL A",D14.7,/,26X,"FIR2=",D14.7)
0334   WRITE(6,75)
0335   75 FORMAT(//,15X,"R",34X,"FLUXO NO CAROCO")
0336     DC 78 I=1,34
0337   WRITE(6,76)R(I),FI2(I)
0338   76 FORMAT(8X,D14.7,28X,D14.7)
0339   78 CONTINUE
0340     DO 77 I=1,35
0341   WRITE(6,79)RC(I),FIC2(I)
0342   79 FORMAT(8X,D14.7,28X,D14.7)
0343   77 CONTINUE
0344   WRITE(6,80)
0345   80 FORMAT(//,15X,"R",33X,"FLUXO NO REFLETOR")
0346     DC 81 I=1,25
0347   WRITE(6,82)RR(I),FIRE2(I)
0348   82 FORMAT(8X,D14.7,28X,D14.7)
0349   81 CONTINUE
0350 C   CALCULO DA DISTRIBUICAO DA DENSIDADE DE COMBUSTIVEL-U235
0351   WRITE(6,91)
0352   91 FORMAT(//,15X,"R",33X,"DIST.DO COMBUSTIVEL")
0353     DC 90 I=1,34
0354   DN(I)=(1.0E0-EP*R(I)*R(I))/(SCMFUS*FI2(I))
0355   WRITE(6,92)R(I),DN(I)
0356   92 FORMAT(8X,D14.7,28X,D14.7)
0357   90 CONTINUE
0358     DO 94 I=1,35

```

```

0359      DNC(I)=(1.0DU-EP*RC(I)*RC(I))/(SCMFU5*FIC2(I))
0360      WRITE(6,95)RC(I),DNC(I)
0361      95 FORMAT(8X,D14.7,28X,D14.7)
0362      94 CONTINUE
0363 C      CALCULO DA MASSA CRITICA (G/CN2)
0364      N=34
0365      D=.429608627E0
0366      DO 100 I=1,34
0367      100 F(I)=DN(I)
0368      CALL QSF(D,F,Z,N)
0369      Z13=Z(34)
0370      DO 105 I=1,34
0371      105 F(I)=DN(I)*FIC2(I)*363.02D-24
0372      CALL QSF(D,F,Z,N)
0373      ZF13=Z(34)
0374      N=35
0375      D=.214804313D0
0376      DO 102 I=1,35
0377      102 F(I)=DNC(I)
0378      CALL QSF(D,F,Z,N)
0379      ZC13=Z(35)
0380      AINT13=Z13+ZC13
0381      DMC=235*AIN13/6.022D+23
0382      DO 106 I=1,35
0383      106 F(I)=DNC(I)*FIC2(I)*363.02D-24
0384      CALL QSF(D,F,Z,N)
0385      ZPC13=Z(35)
0386      POT=ZP13+ZPC13
0387      WRITE(6,104)DMC
0388      104 FORMAT(1H1,25X,"MASSA CRITICA=",D14.7,3X,"G/CN2")
0389      WRITE(6,110)FCT
0390      110 FORMAT(1H1,25X,"DENS. DE PCTENCIAS LINEAR NORMALIZADA=",D14.7,3X,"C
0391      1M")
0392      EPSI=EPS1+.3E0
0393      IF(EPSI.GT..91)GO TO 32
0394      GO TO 29
0395      32 END
0396      SUBROUTINE QSF(D,F,Z,N)
0397      DOUBLE PRECISION Y,Z,H,HT,SLM1,SUM2+AUX,AUX1,AUX2,F,D
0398      DIMENSION F(37),Z(37)
0399      HT=.33333333D0#D
0400      IF(N=5)7,8,1
0401      1 SLM1=F(2)+F(2)
0402      SLM1=SLM1+SLM1
0403      SLM1=HT*(F(1)+SUM1+F(3))
0404      AUX1=F(4)+F(4)
0405      AUX1=AUX1+AUX1
0406      AUX1=SLM1+HT*(F(3)+AUX1+F(5))
0407      AUX2=HT*(F(1)+3.875*(F(2)+F(5))+2.625*(F(3)+F(4))+F(6))
0408      SLM2=F(5)+F(5)
0409      SLM2=SLM2+SLM2
0410      SLM2=AUX2-HT*(F(4)+SUM2+F(6))
0411      Z(1)=0.
0412      AUX=F(3)+F(3)
0413      AUX=AUX+AUX
0414      Z(2)=SLM2-HT*(F(2)+AUX+F(4))
0415      Z(3)=SLM1
0416      Z(4)=SLM2
0417      IF(N=6)5,5,2
0418 C      INTEGRATION LOOP

```

```

0415      2 DC 4 I=7,N+2
0420          SUM1=AUX1
0421          SUM2=AUX2
0422          AUX1=F(I-1)+F(I-1)
0423          AUX1=AUX1+AUX1
0424          AUX1=SUM1+HT*(F(I-2)+AUX1+F(I))
0425          Z(I-2)=SUM1
0426          IF(I=N)3,6,6
0427          3 AUX2=F(I)+F(I)
0428          AUX2=AUX2+ALX2
0429          AUX2=SUM2+HT*(F(I-1)+AUX2+F(I+1))
0430          4 Z(I-1)=SUM2
0431          5 Z(N-1)=ALX1
0432          Z(N)=ALX2
0433          RETURN
0434          6 Z(N-1)=SUM2
0435          Z(N)=AUX1
0436          RETURN
0437 C      END OF INTEGRATION LOOP
0438 7 IF(N=3)12,11,8
0439 C      N IS EQUAL TO 4 OR 5
0440 8 SUM2=1.125*HT*(F(1)+F(2)+F(2)+F(2)+F(3)+F(3)+F(3)+F(4))
0441     SUM1=F(2)+F(2)
0442     SUM1=SUM1+SUM1
0443     SUM1=HT*(F(1)+SUM1+F(3))
0444     Z(1)=0.
0445     ALX1=F(3)+F(3)
0446     ALX1=AUX1+ALX1
0447     Z(2)=SUM2-HT*(F(2)+AUX1+F(4))
0448     IF(N=5)10,9,9
0449     9 AUX1=F(4)+F(4)
0450     AUX1=AUX1+ALX1
0451     Z(5)=SUM1+HT*(F(3)+AUX1+F(5))
0452     10 Z(3)=SUM1
0453     Z(4)=SUM2
0454     RETURN
0455     . 11 SUM1=HT*(1.25*F(1)+F(2)+F(2)-.25*F(3))
0456     SUM2=F(2)+F(2)
0457 C      N IS EQUAL TO 3
0458     SUM2=SUM2+SUM2
0459     Z(3)=HT*(F(1)+SUM2+F(3))
0460     Z(1)=0.
0461     Z(2)=SUM1
0462     12 RETURN
0463     END
0464     END

```

TEMPO DE EXECUÇÃO: 08.0 min. e 02.0 seg.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) LAMARSH, J.R. Nuclear Reactor Theory. Addison-Wesley, 1966.
- (2) CUTHILL, E. Advances in Computers, 5, p.289, F.L.Alt and M. Rubinoff Eds., Academic Press, New York, 1964.
- (3) SHIMIZU, A. Response Matrix Method. J.At.Energy Soc.Japan, 5, 359, 1964.
- (4) KOBAYASHI, K. and NISHIHARA, H. Solution of Group Diffusion Equation Using Green's Function. Nucl.Sci.Engng., New York, 28:93-104, 1967.
- (5) CINTRA, W.H. Solution of a Non-Linear Multigroup Problem by Green's Functions. Trans.Am.Nucl.Soc., Hinsdale, Ill, 23: 539-8, 1976.
- (6) SANAZZARO, L.R. O Método da Função de Green na Solução da Equação de Difusão de Neutrons para um Reator Cilíndrico, Homogêneo, Finito, totalmente Refletido. São Paulo, 1977. (Dissertação de Mestrado).
- (7) MEEM, J.L. Two Group Reactor Theory. New York, Gordon and Breach, 1964.
- (8) LAMARSH, J.R. Introduction to Nuclear Engineering. Reading , Mass., Addison-Wesley, 1977.
- (9) GLASSTONE, S. and SESONSKE, A. Nuclear Reactor Engineering , New York, New York, Van Nostrand, 1967.
- (10) BECKURTS, K.H. and WIRTZ, K. Neutron Physics, Springer-Verlag, New York, 1958.

- (11) NAKAMURA,S. A Method for the Burnup Analysis of Power Reactor in Equilibrium Operation Cycles. J.Nucl.Sc.Technol., Tokio, 3(5):184-8, 1966.
- (12) LARSEN,J.E. and WEST,G.B. Calculated Fluxes and Cross Sections for Triga Reactors. San Diego, Calif., Gulf Energy and Environmental Systems, Aug.1963 (GA-4361).
- (13) International Business Machines Corp., New York. System/360- Scientific subroutine package. Version III-Programmer's manual. New York, 1968 (Program n° 360. A-CM-03X; GH 20-0205-4).
- (14) ABRAMOWITZ,M. and STEGUN,J. Handbook of Mathematical Functions, New York, Dover, 1965.
- (15) GRAY,A. and Mathews,G.B. A Treatise on Bessel Functions and their Applications to Physics. MacMillan and Co., London , 1952.
- (16) GREENE,N.M. and CRAVEN,C.N. XSDRN: a discrete ordinates Spectral Averaging Code. Oak Ridge, Oak Ridge National Lab., July 1969 (ORNL-TM-2500).
- (17) KOBAYASHI,K. Solution of Diffusion Equation in r-z Geometry by Finite Fourier Transformation. J.Nucl.Sci.Technol. , Tokyo, Japan, 11(12):561-570, Dec.1974.
- (18) WYLD,H.W. Mathematical Methods for Physics, Reading, Mass., Benjamin, 1976.
- (19) WEINBERGER,H.F. A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods. Waltham, Mass., Ginn and Co., 1965.

- (20) WEINBERG,A.M. and WIGNER,E.P. The Physical Theory of Neutron Chain Reactors. Chicago Press, London, 1958.
- (21) SNEDDON,I.N. Elements of Partial Differential Equations. New York, McGraw-Hill, 1957.
- (22) LEMANSKA,M. The Solution of the Multi-Dimensional, Multi - Group Diffusion Equation Using the Lie Series Method Bare Reactor. J.Nucl.Energy, London, 25: 397-403, 1971.
- (23) BUTKOV, E. Mathematical Physics. Reading, Mass., Addison - Wesley, 1973.
- (24) ROACH,G.F. "Greens's Function Introductory Theory with Applications", Van Nostrand, London, 1970.
- (25) MACKIE,A.G. Boundary Value Problems. Oliver & Boyd, London, 1965.
- (26) HONIG,C.S. Análise Funcional e o Problema de Sturm-Liouville. Edgar Blücher, São Paulo, 1978.
- (27) HORAK,W.C. and DORDING,J.J. A Local Green's Function Method for the Numerical Solution of Heat Conduction and Fluid Flow Problems. Nucl.Sci. Engng., New York, 64:192-207, 1977.
- (28) OTSUKA,M. Fuel-Importance Function and Minimum Critical Mass. Nucl.Sci.Engng, New York, 18: 514-7, 1964.
- (29) CASE,K.M. and ZWEIFEL,P.F. Linear Transport Theory. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1967.
- (30) HILDEBRAND,F.B. Methods of Applied Mathematics. 2ed.Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1965

- (31) GARCIA, R.D.M. O Problema de Criticalidade para Reatores  
Tipo Plata Refletida na Teoria de Transporte em 2 Grupos de Energia. São Paulo, 1977 (Dissertação de Mestrado).