TEOREMAS DE BAIXA ENERGIA
NO ESPALHAMENTO COMPTON

JORGE CHAHINE

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO IFQSC
PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM FÍSICA BÁSICA

ORIENTADOR: PROF. Dr. SILVESTRE RAGUSA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIAS DOS MATERIAIS

SAO CARLOS - 1984

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE

JORGE CHAHINE

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 22 DE FEVEREIRO DE 1984.

COMISSÃO JULGADORA:

Dr. SILVESTRE RAGUSA - Orientador

Dr. VALÉRIO KURAK

Dr. ABRAHAM H.ZIMERMAN

INDICE

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Silvestre Ragusa pelas valiosas discussões e ensinamentos que permitiram a elaboração deste trabalho.

À minha esposa Nelza Elisabete Barufatti pelo companheirismo atuante e fértil do qual brotaram elementos essenciais para o término deste trabalho.

Ao Professor Roberto Mendonça Faria do IFQSC pela amizade sincera com a qual sempre pude contar para receber estímulo e apoio.

Aos demais professores e especialmente os funcionários do IFQSC, que sempre se colocaram a minha disposição para prestar toda a colaboração possível.

À Lucí, funcionária da Fundação Educacional de Barretos e ao Cleber, funcionário da Universidade Federal de Uberlândia pelos generosos e excelentes serviços que prestaram na confecção deste trabalho.

Aos pós-graduandos do campus de São Carlos - USP, que contribuiram para aperfeiçoar minha compreenssão sobre a realidade de nosso ensino e em especial da pós-graduação.

Ao CNPq e à FAPESP pelo apoio financeiro.

RESUMO

Obtivemos os teoremas de baixa energia no espalhamento Compton em terceira e quarta ordem na frequência do fóton incidente.

Em seguida calculamos a secção de choque polarizada em terceira ordem e a não polarizada até quarta ordem, em termos de amplitudes parciais não cobertos pelos teoremas de baixa energia o que permitirá a determinação experimental dessas amplitudes parciais.

ABSTRACT

We have obtained the low energy theorems in Compton scatering to third and fourth order in the frequency of the incident photon.

Next we calculated the polarized cross section to third order and the unpolarized to fourth order in terms of partial amplitudes not covered by the low energy theorems, what will permit the experimental determination of these partial amplitudes.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A amplitude espalhamento Compton em nucleons depende das propriedades estáticas do sistema como massa, carga, momento magnético e de propriedades dinâmicas contidas nas chamadas constantes de estrutura.

Usando a invariança de gauge da teoria, Thirring [1] demonstrou que o termo de Thomson, que é o termo de ordem zero na frequencia do fóton e que depende só da carga e da massa do sistema, calculado na aproximação de Born, é exato nas interações fortes. Mais tarde usando também a covariança de Lorentz da teoria Low [2] determinou exatamente o termo de primeira ordem na frequencia w do fóton incidente e que depende também, apenas das propriedades estáticas do sistema. Esses resultados dão origem aos teoremas de baixa energia, isto é, identificação de termos da amplitude que só dependem das propriedades estática do alvo.

Os termos de segunda ordem envolvem, em geral, além das propriedades estáticas, outras como por exemplo, a que descreve a deformação da carga, ou polarizabilidade elétrica da mesma, que dá origem ao espalhamento de Rayleigh. A importancia deste no efeito compton em prótons foi salientada por Capps [3] e considerado em detalhe por A.M. Baldin [4] que investigou a influencia da polarizabilidade do proton no espalhamento Compton.

Singh [17] determinou quais os termos de segunda ordem da amplitude que são expressos em termos das propriedades estáticas, determinando, desse modo, os teoremas de baixa energia de segunda ordem na frequencia do fóton incidente. Até esta ordem, tem-se apenas duas constantes de estrutura denominadas de polarizabilidades elétrica (α) e magnética (β) do alvo, com demonstrado por Klein [6] Estas

constantes de estrutura podem ser determinadas pela comparação da expressão da secção de choque com as dados experimentais como o fizeram Gol'dansky et al[7] e Baldin[4] no caso de espalhamento elástico de fótons por prótons.* No caso do neutron a polarizabilidade elétrica (α) pode ser determinada através do espalhamento de neutrons por campo columbiano de núcleos, que é bastante difícil de ser analizado devido à predominância do termo de momento magnético (μ_n) na região pra frente, onde ambos α e μ_n são importantes.

Até terceira ordem em w a secção de choque de espalhamento Compton para alvo não polarizado, contém apenas as duas constantes de estrutura α e β. Para se obter informações a respeito de novas constantes de estrutura é necessário a análise experimental da expressão da secção de choque para alvo e fóton polarizados até terceira ordem em w ou quarta ordem da não polarizada. Isto requer antes de tudo um estudo dos teoremas de baixa energia até quarta ordem em w, que permita determinar quais os termos, até esta ordem, que são expressos pelas propriedades estáticas do sistema.

Os objetivos do presente trabalho são os de determinar os teoremas de baixa energia até quarta ordem em w e calcular as expressões da secção de choque polarizada e não polarizada até, respectivamente, terceira e quarta ordem em w, de tal modo que se tenha o elementos para determinar experimentalmente todas as constantes de estrutura até a quarta ordem em w.

No capítulo II damos o formalismo necessário para o cálculo da amplitude Compton.

No capítulo III obtemos os teoremas de baixa energia até quarta ordem em w.

No capítulo IV escrevemos explicitamente a amplitude em

---

* A resenha de Barashenkov e Kaiser[8] traz uma discussão detalhadas a respeito da obtenção experimental de α e β.

termos das constantes de estrutura.

No capítulo V fazemos o cálculo da secção de choque polarizada e não polarizada até, respectivamente, terceira e quarta ordem em w.

CAPÍTULO II

FORMALISMO PARA O ESPALHAMENTO COMPTON

O espalhamento Compton é descrito pela amplitude

$$A = \varepsilon'_\mu \, A_{\mu\nu}(K',K) \, \varepsilon_\nu \qquad \text{(II.1)}$$

onde $K'(K)$ é o quadrimomentum final (inicial) do fóton, μ e ν são os índices das polarizações final e inicial do fóton, respectivamente ε' e ε, $A_{\mu\nu}(K',K)$ é o tensor amplitude. Para este último, a invariança de gauge implica na relação

$$K'_\mu \, A_{\mu\nu} \, (K',K) = A_{\nu\lambda}(K',K) \, K_\lambda = 0 \quad . \qquad \text{(II.2)}$$

De (II.2) segue que

$$K'_i \, A_{ij} \, (K',K) \, K_j = - \omega'\omega \, A_{44} \, (K',K) \quad . \qquad \text{(II.3)}$$

Na presença da gauge transversal

$$\vec{\varepsilon} \, . \, \vec{K} = \vec{\varepsilon}' \, . \, \vec{K}' = 0 \qquad \text{(II.4)}$$

a amplitude é

$$A = \varepsilon'_i \, A_{ij} \, (K',K) \, \varepsilon_j \quad . \qquad \text{(II.5)}$$

Em seguida, vamos extrair de $A_{\mu\nu}$ a parte não excitada, ou seja, a contribuição de uma partícula (alvo) no estado intermediário, denominada $U_{\mu\nu}$. Chamaremos o resto de $E_{\mu\nu}$. Dessa forma,

teremos

$$(EpEp'/m^2)^{1/2} A_{\mu\nu} = U_{\mu\nu} + E_{\mu\nu} \quad . \qquad (II.6)$$

A expressão (II.3) pode ser reescrita como

$$K'_i \, E_{ij} \, K_j + \omega\omega' \, E_{44} = - (K'_i \, U_{ij} \, K_j + \omega\omega' \, U_{44}) . \qquad (II.7)$$

Os termos U_{ij} e U_{44}, expressos em termos da corrente eletromagnética $J_\mu = (J_m, i\rho)$, assumem a seguinte forma:

$$U_{ij} = \frac{\langle\vec{p}'|J_i|\vec{p}'+\vec{K}'\rangle\langle\vec{p}+\vec{K}|J_j|\vec{p}\rangle}{E(\vec{p}+\vec{K}) - m - \omega} + \frac{\langle\vec{p}'|J_j|\vec{p}'-\vec{K}\rangle\langle\vec{p}-\vec{K}'|J_i|\vec{p}\rangle}{E(\vec{p}-\vec{K}') - m + \omega'} \qquad (II.8a)$$

$$U_{44} = - \left[\frac{\langle\vec{p}'|\rho|\vec{p}'+\vec{K}'\rangle\langle\vec{p}+\vec{K}|\rho|\vec{p}\rangle}{E(\vec{p}+\vec{K}) - m - \omega} + \frac{\langle\vec{p}'|\rho|\vec{p}'-\vec{K}\rangle\langle\vec{p}-\vec{K}'|\rho|\vec{p}\rangle}{E(\vec{p}-\vec{K}') - m - \omega'}\right] \qquad (II.8b)$$

Nas expressões (II.8a) e (II.8b) m, $\vec{p}'$ e $\vec{p}$ significam, respectivamente a massa e os momenta final e inicial do próton, $\vec{K}'(\vec{K})$ e $\omega'(\omega)$ são o momentum final (inicial) e a energia final (inicial) do fóton, $E(\vec{p}) = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$.

Nosso objetivo é determinar E_{ij} tanto quanto possível usando (II.7). O lado direito desta expressão é conhecido, portanto necessitamos algum conhecimento sobre E_{44}. Low [2] mostrou que E_{44} é, no mínimo, de segunda ordem em ω. Isto permitiu determinar a amplitude exatamente até a primeira ordem em ω, pois podemos notar em (II.7) que E_{44} não pode competir para a determinação de E_{ij} até a primeira ordem em ω.

O raciocínio é o seguinte. Até a primeira ordem em w, E_{ij} tem a forma $E_{ij} = a\,\delta_{ij} + bwi\varepsilon_{ijk}\sigma_k + O(w^2)$. Substituindo esta em (II. 7) e notando que E_{44} é da ordem w^2, o lado esquerdo de (II. 7) é, até a terceira ordem, a $\vec{k}.\vec{k} + bwi\vec{\sigma}.(\vec{k}' \times \vec{k})$. Comparando com o termo correspondente no segundo membro da equação, obtem-se os valores de a e b.

Posteriormente Singh deu um passo a mais, mostrando que, além de ser de segunda ordem, E_{44} tem a seguinte particular estrutura[5]

$$E_{44} = k'_i\, \Lambda_{ij}\, (w', \vec{k}', w, \vec{k})\, k_j \qquad \text{(II. 9)}$$

onde Λ_{ij} é um tensor de segunda ordem, livre de singularidades cinemáticas e par por cruzamento, isto é, invariante pelas trocas: $i \leftrightarrow j$, $\vec{k}' \leftrightarrow -\vec{k}$ e $w' \leftrightarrow -w$. Com esta propriedade que é chamada de lema de Singh, conseguiu ele determinar os teoremas de baixa energia de segunda ordem[17].

Nosso primeiro objetivo neste trabalho é determinar os teoremas de baixa energia até a ordem seguinte, isolando deste modo aquelas amplitudes que não são fixadas pelas propriedades estáticas do sistema e que terão que ser determinadas experimentalmente.

Consideremos agora o termo E_{ij}. A conservação da paridade e a invariança temporal, esta última usada no sistema Breit ($\vec{p}' = -\vec{p}$) por ser mais simples, foram usados por Pais[9] para obter a base mínima de E_{ij}. Escrevemos E_{ij} na forma

$$E_{ij} = \sum_m A_m\, E_{ij}^{(m)} \qquad \text{(II.10)}$$

As bases $E_{ij}^{(m)}$ são construidas com $\vec{S}$, $\vec{K}$ e $\vec{K}'$. Os A_m, $m = 1, 2, \ldots$, são polinômios em ω e $\vec{K}.\vec{K}'$. Para $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$

$$E_{ij} = A_1\ \delta_{ij} + A_2\ E_{ijn}\sigma_n + A_3\ [\delta_{ij}\ k.k' - \vec{k}_i\vec{k}'_j]$$

$$+ A_4\ [\delta_{ij}\ i\ \vec{\sigma}.\ (\vec{K}' x\ \vec{K}) - \vec{K}.\vec{K}'\ i\ E_{ijn}\ \sigma_n] +$$

$$+ A_5\ [\ K'_j\ i\ (\vec{K} \times \vec{\sigma})_i\ - K_i\ i\ (\vec{K}' \times \vec{\sigma})_j - 2\delta_{ij}\ \vec{\sigma}.$$

$$.\ (\vec{K}' \times \vec{K})] + A_6\ [K'_j\ i\ (\vec{K}' \times \vec{\sigma})_i - K_i\ i(\vec{K} \times \vec{\sigma})_j +$$

$$+ A_7\ [K'_iK'_j + K_iK_j] + A_8\ K_jK'_i + A_9\ [K_j\ i\ (\vec{K} \times \vec{\sigma})_i -$$

$$- K'_i\ i\ (\vec{K}' \times \vec{\sigma})_j] + A_{10}\ [K_j\ i\ (\vec{K}' \times \vec{\sigma})_i -$$

$$- K'_i\ i\ (\vec{K} \times \vec{\sigma})_j]\ . \qquad \text{(II.11)}$$

O tensor amplitude A_{ij} possui simetria por cruzamento . Como U_{ij} é simétrico por cruzamento, E_{ij} também o será. Logo os A_m, quando expandidos em potências de ω e $\vec{K}.\vec{K}'$, terão a seguinte forma:

$$A_i = a_{i,1} + a_{i,2}\omega^2 + a_{i,3}\vec{K}.\vec{K}' + a_{i,4}\omega^2\vec{K}.\vec{K}' + a_{i,5}(\vec{K}.\vec{K}')^2 + a_{i,6}\omega^4 + \ldots ; i = 1,3,7 \text{ e } 8$$

$$A_i = a_{i,1}\omega + a_{i,2}\omega\ \vec{K}\ .\ \vec{K}' + a_{i,3}\omega^3 + \ldots \qquad ;\ i = 2,4,5,6,9 \text{ e } 10$$

Substituindo estas expansões em (II.11) resulta, até a ordem que nos interessa,

$$E_{ij} = [a_{1,1} + a_{1,2}\omega^2 + a_{1,3}\ \vec{K}.\vec{K}' + a_{1,4}\omega^2\ \vec{K}.\vec{K}' + a_{1,5}(\vec{K}.\vec{K}')^2 +$$

$$+ a_{1,6}\omega^4]\delta_{ij} + [a_{2,1}\omega + a_{2,2}\omega\ \vec{K}.\vec{K}' + a_{2,3}\omega^3]i\varepsilon_{ijn}\sigma_n +$$

$$+ [a_{3,1} + a_{3,2}\omega^2 + a_{3,3}\ \vec{K}.\vec{K}']\ (\delta_{ij}\ \vec{K}.\vec{K}' - k_ik'_j) +$$

$$+ a_{4,1}\omega\,[\delta_{ij}\; i\,\vec{\sigma}.\,(\vec{K}' \times \vec{K}) - \vec{K}.\vec{K}'\;\varepsilon_{ijn}\sigma_n] +$$

$$+ a_{5,1}\omega\,[K'_j\; i\,(\vec{K} \times \vec{\sigma})_i - K_i\; i(\vec{K}' \times \vec{\sigma})_j - 2\delta_{ij}\;\vec{\sigma}.\,(\vec{K}' \times \vec{K})] +$$

$$+ a_{6,1}\omega\,[K'_j\; i\,(\vec{K}' \times \vec{\sigma})_i - K_i\; i\,(\vec{K} \times \vec{\sigma})_j] +$$

$$+ [a_{7,1} + a_{7,2}\,\vec{K}.\vec{K}' + a_{7,3}\omega^2]\;[\,K'_i K'_m + K_i K_j] +$$

$$+ [a_{8,1} + a_{8,2}\vec{K}.\vec{K}' + a_{8,3}\omega^2]\;k_j k'_i + a_{9,1}\omega[K_j i(\vec{K} \times \vec{\sigma})_i -$$

$$- K'_i\; i\,(\vec{K}' \times \vec{\sigma})_j] + a_{10,1}\omega[K_j i(\vec{K}' \times \vec{\sigma})_i - K'_i i(\vec{K}\times\vec{\sigma})_j]. \qquad (II.12)$$

Consideremos agora o tensor Λ_{ij} presente no termo E_{44}. Este tensor é simétrico por cruzamento e livre de singularidades cinemáticas. Com estes argumentos G.F. Ferreira e S. Ragusa [10] concluiram que Λ_{ij} pode ser expandido da mesma forma que E_{ij}, ou seja

$$\Lambda_{ij} = \sum_m B_m\, E^{(m)}_{ij} \qquad (II.13)$$

onde $E^{(m)}_{ij}$, m = 1, 2 ... , são as mesmas bases presentes em (II. 11). Necessitamos conhecer a estrutura de E_{44} até quarta ordem em ω. Portanto, de (II.9), basta considerar Λ_{ij} até 2ª ordem. Expandindo os B_m da mesma forma que os A_m, temos

$$\Lambda_{ij} = [b_{1,1} + b_{1,2}\omega^2 + b_{1,3}\vec{K}.\vec{K}']\;\delta_{ij} + b_{2,1}\,\omega\, i\;\varepsilon_{ijn}\sigma_n +$$

$$+ b_{3,1}[\delta_{ij}\vec{k}.\vec{k} - k_i k'_j\;] + b_{4,1}[K'_i K'_j + K_i K_j] +$$

$$+ b_{5,1}\;K'_i K_j \qquad (II.14)$$

Contraindo Λ_{ij} com $K'_i K_j$ obtemos a expressão para E_{44},

$$E_{4,4}\ [b_{1,1} + b_{1,2}\omega^2 + b_{1,3}\vec{K}.\vec{K}']\ \vec{K}.\vec{K}' + b_{2,1}\,\omega\, i\ \vec{\sigma}.(\vec{K}' \times \vec{K}) +$$

$$2b_{4,1}\,\omega^2\,\vec{K}.\vec{K}' + b_{5,1}\omega^4 \ . \qquad \text{(II.15)}$$

Substituindo (II.12) e (II.15) em (II.7) e lembrando que $\omega = \omega'$ obtemos

$$a_{1,1}\ \vec{K}.\vec{K}' + [(b_{1,1} + (a_{1,2} + 2a_{7,1})]\omega^2\ \vec{K}.\vec{K}' + a_{1,3}\ \vec{K}.\vec{K}' +$$

$$+ a_{8,1}\ \omega^4 + [b_{1,3} + (a_{1,4} + 2a_{7,2})]\omega^2 (\vec{K}.\vec{K}')^2 + a_{1,5}(\vec{K}.\vec{K}')^3 +$$

$$+ [b_{1,2} + 2b_{4,1} + a_{1,6} + 2a_{7,3} + a_{8,2}]\omega^4\ \vec{K}.\vec{K}' +$$

$$+ [b_{5,1} + a_{8,3}]\omega^6 + a_{2,1}\ \omega\ i\ \vec{\sigma}.(\vec{K}' \times \vec{K}) +$$

$$+ a_{2,2}\ \omega\vec{K}.\vec{K}'\ i\ \vec{\sigma}.(\vec{K}' \times \vec{K}) + [b_{2,1} + a_{2,3} + 2a_{9,1}]\omega^3\ i\ \vec{\sigma}.(\vec{K}' \times \vec{K}) =$$

$$= (K'_i\ U_{ij}\ K_j + \omega\omega'\ U_{44}) \ . \qquad \text{(II.16)}$$

As constantes $a_{1,1}$, $a_{1,3}$, $a_{8,1}$, $a_{1,5}$, $a_{2,1}$ e $a_{2,2}$ são as únicas que não estão acompanhadas pelos b's de E_{44} e portanto podem ser determinadas, comparando os termos semelhantes em ambos os lados de (II. 16).

No capítulo seguinte determinaremos os valores destas constantes. Antes ,porém,faremos alguns comentários sobre as constantes de estrutura de segunda ordem.

As constantes de estrutura de segunda ordem $a_{1,2}$ e $a_{3,1}$ que comparecem na primeira e terceira linha da equação (II.12) são chamadas de polarizabilidades elétrica e magnética de acordo com as seguintes considerações. Quando uma distribuição de carga está sujeita a um campo elétrico adquire um dipolo induzido $\vec{d} = \alpha\vec{E}$, onde α é a chamada polarizabilidade elétrica do sistema. A energia do sistema é então $H = -\vec{d}.\vec{E} = -\alpha\vec{E}^2$. Análogamente no caso magnético tem-se $H = -\beta\vec{B}^2$, onde β é a polarizabilidade magnética. Para uma onda plana de momentum $\vec{k}$, $\vec{E} \sim w\vec{\varepsilon}$ e $\vec{B} \sim (\vec{k} \times \vec{\varepsilon})$. Com isto a energia de transição correspondente a uma onda incidente $\vec{k}$ e emergente $\vec{k}'$ terá a forma $H \sim \alpha ww'\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon} + \beta(\vec{k} \times \vec{\varepsilon}).(\vec{k} \times \vec{\varepsilon}')$ ou $H \sim \alpha ww'\delta_{ij} + \beta(\vec{k}.\vec{k}'\,\delta_{ij} - k_i\,k'_j)\,\varepsilon'_i\varepsilon_j$. Esta é exatamente a forma da parte excitada da amplitude de ordem w^2 que aparece quando (II. 12) é contraída com $\varepsilon'_i\varepsilon_j$. Podemos dizer que $a_{1,2}$ e $a_{1,3}$ medem a deformação sofrida pelo nucleon quando submetido à ação da onda incidente.

CAPÍTULO III

OBTENÇÃO DOS TEOREMAS DE BAIXA ENERGIA

Para obter os valores das constantes mencionadas no fim do capítulo anterior, vamos calcular explicitamente a expressão $K'_i U_{ij} K_j + \omega\omega' U_{44}$. Da equação da continuidade resultam as seguintes relações.

$$K_j \langle \vec{p} + \vec{K} | J_j | \vec{p} \rangle = [E(\vec{p} + \vec{K}) - E(\vec{p})] \langle \vec{p} + \vec{K} | \rho | \vec{p} \rangle \qquad \text{(III.1a)}$$

$$K'_i \langle \vec{p}' | J_i | \vec{p}' + \vec{K}' \rangle = [E(\vec{p}') - E(\vec{p})] \langle \vec{p}' | \rho | \vec{p}' + \vec{K}' \rangle \qquad \text{(III.1b)}$$

Das expressões (II.8a), (II.8b), (III.1a) e (II.1b) obtemos

$$K'_i U_{ij} K_j + \omega\omega' U_{44} = [E(\vec{p} + \vec{K}) -$$

$$- E(\vec{p}) + \omega'] \langle \vec{p}' | \rho | \vec{p}' + \vec{K}' \rangle \langle \vec{p} + \vec{K} | \rho | \vec{p} \rangle +$$

$$+ [E(\vec{p}' - \vec{K}) - E(\vec{p}') - \omega] \langle \vec{p}' | \rho | \vec{p}' - \vec{K} \rangle \langle \vec{p} - \vec{K}' | \rho | \vec{p} \rangle . \qquad \text{(III.2)}$$

O cálculo de (III.2) requer o conhecimento sobre a forma da corrente. Usando a covariança de Lorentz e a equação de continuidade Foldy[11] e posteriormente Salzman[12] determinaram a forma mais geral para o elemento de matriz da corrente eletromagnética. Chamando de u o spinor de Dirac para o próton, λ o momento magnético anômalo em unidades de $e\hbar/2mc$ e $q = [\vec{p}' - \vec{p}, i(E\vec{p}' - \vec{E}\vec{p})]$ a transferência de momentum, o elemento de matriz tem a forma

$$\langle \vec{p}' | J_\mu | \vec{p} \rangle = e\, u(\vec{p}') [\gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{\lambda}{2m} \sigma_{\mu\nu} q_\nu F_2(q^2)]\, u(\vec{p}) \qquad \text{(III.3)}$$

onde $F_1(q^2)$ e $F_2(q^2)$ são os fatores de forma eletromagnéticos do próton . Estes fatores, quando expandidos em potencias de q^2 , possuem a seguinte forma:

$$F_{1,2} = 1 - \frac{q^2}{6} \langle r^2 \rangle_{1,2} + \frac{q^4}{120} \langle r^4 \rangle_{1,2} + \ldots \qquad \text{(III.4)}$$

Nessa expressão

$\langle r^2 \rangle_{1,2}$ são, respectivamente as médias dos quadrados dos raios de Dirac e do momento magnético anômalo. Significado análogo vale para a quarta potência $\langle r^4 \rangle_{1,2}$.

Usando a decomposição de Gordon a expressão (III.3) pode ser escrita na forma

$$\langle \vec{p}\,' | J_i | \vec{p} \rangle = e\, u^+(\vec{p}\,')\, \beta \{ F_1 \frac{P'_i + P_i}{2m} +$$

$$+ \frac{F_1 + \lambda F_2}{2m} [i\, (\vec{\sigma} \times \vec{q})_i + q_0 \alpha_i] \}\, u(\vec{p}) \qquad \text{(III.5a)}$$

$$\langle \vec{p}\,' | \rho | \vec{p} \rangle = e\, u^+(\vec{p}\,')\, \beta\, [F_1 \frac{P_0' + P_0}{2m} + \frac{F_1 + F_2}{2m}\, \vec{\alpha} \cdot \vec{q}]\, u(\vec{p}) \,. \qquad \text{(III.5b)}$$

O Spinor $u(\vec{p})$ expresso em termos de $\vec{p} = 0$ é escrito como $u(\vec{p}) = N(p)\, [1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}/E_{\vec{p}} + m]\, u(0)$ onde $N(\vec{p}) = [(E_{\vec{p}} + m)/2m]^{1/2}$ e $u(0) = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$.

Substituimos agora (III.5b) em (III.2) e explicitamos a soma sobre os spins dos estados intermediários. Fazemos em seguida a expansão até sexta ordem em ω . O cálculo está delineado no apêndice. Chamando $\mu = 1 + \lambda$ o momento magnético total em unidades $e\hbar/mc$ o resultado é o seguinte

$$K_i' U_{ij} K_j + \omega\omega' U_{44} = X'^{+} e^2 \{ \frac{1}{m} \vec{K}.\vec{K}' + (\frac{1-2\mu}{4m^3} - \frac{\langle r^2 \rangle_1}{3m}) \omega^2 K.K' -$$

$$- \frac{1}{4m^3} (\vec{K}.\vec{K}')^2 + [\frac{4\mu-1}{32m^5} + \frac{\mu}{12m^3} \langle r^2 \rangle_1 + \frac{\mu-1}{12m^3} \langle r^2 \rangle_2 +$$

$$+ \frac{\langle r^2 \rangle_1^2}{36m} + \frac{\langle r^4 \rangle_1}{60m}] \omega^4 \vec{K}.\vec{K}' + [\frac{2\mu+1}{16m^5} + \frac{\langle r^2 \rangle_1}{12m^3}] \omega^2 (\vec{K}.\vec{K}) +$$

$$+ [\frac{2\mu^2+1}{32m^5} + \frac{\langle r^2 \rangle_1}{12m^3}] (\vec{K}.\vec{K}')^3 + \frac{1-2\mu}{2m^2} \omega i \vec{\sigma} . (\vec{K}'.\vec{K}) -$$

$$- \frac{1-2\mu}{8m^4} \omega \vec{K}.\vec{K}' i \vec{\sigma}.(\vec{K}' x \vec{K}) +$$

$$+ [\frac{1-2\mu+2\mu^2}{8m^4} + \frac{\mu}{6m^2} \langle r^2 \rangle_1 + \frac{\mu-1}{6m^2} \langle r^2 \rangle_2] \omega^3 i \vec{\sigma} \cdot (\vec{K}' x \vec{K}) \} X . \qquad \text{(III.6)}$$

Estamos agora em condições de calcular os teoremas de baixa energia. Levando (III.6) em (II.16) e comparando os coeficientes dos termos semelhantes, obtemos os seguintes resultados:

$$a_{1,1} = - \frac{e^2}{m} , \quad a_{2,1} = e^2 \frac{2\mu-1}{2m^2} , \quad a_{1,3} = \frac{e^2}{4m^3} , \quad a_{8,1} = 0 \qquad \text{(III.6)}$$

$$a_{1,5} = - e^2 \frac{2\mu^2+1}{32m^5} - \frac{e^2}{12m^3} \langle r^2 \rangle_1 , \quad a_{2,2} = - e^2 \frac{2\mu-1}{8m^4}$$

Os valores de $a_{1,1}$ e $a_{2,1}$ foram obtidos por Low[2] e $a_{1,3}$ foi calculado por Singh[17]. O resto é novidade. O termo $a_{8,1}$ não nos interessa pois desaparece da amplitude em virtude da gauge transversal. Portanto, os valores de $a_{1,5}$ e $a_{2,2}$ são os novos relevantes teoremas de baixa energia que aparecem quando expandimos a amplitude

até a quarta ordem em w.

No capítulo seguinte vamos explicitar a amplitude até a quarta ordem em w, em termos das constantes de estrutura.

CAPÍTULO IV

A AMPLITUDE DE ESPALHAMENTO

A amplitude de espalhamento está na equação (II.5). Separando o termo não excitado escrevemos

$$A = (m^2/E_{p'}E_p)^{1/2}\ (U + E) \quad . \tag{IV.1}$$

onde

$$U = \varepsilon'_i\ U_{ij}\ \varepsilon_j \quad \text{e} \quad E = \varepsilon'_i\ E_{ij}\ \varepsilon_j \quad . \tag{IV.2}$$

A parte E já está determinada no que foi possível. O cálculo de U será feito levando (III.5a) em (II.2a). Em seguida faremos a soma sobre os spins dos estados intermediários. No apêndice apresentamos o detalhe de cálculo. O resultado, no Breit, é

$$U = e^2 X'^{+} \{ - \frac{\mu^2}{2m^2\omega}\ i\ \vec{\sigma}\cdot (\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}') \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) +$$

$$+ \frac{\mu}{2m^2\omega}\ \vec{\varepsilon}' \cdot \vec{K}\ i\ \vec{\sigma} \cdot (\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) - \vec{\varepsilon}.\vec{K}'\ i\ \vec{\sigma} \cdot (\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}') -$$

$$- (\frac{\mu^2-1}{4m^3})\ \frac{\vec{K}.\vec{K}'}{\omega\omega'}\ (\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}')\cdot(\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) - \frac{1}{4m^3}\ \frac{\vec{K}.\vec{K}'}{\omega\omega'}\ \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'\ \vec{K}.\vec{K}' +$$

$$\frac{\mu^2}{8m^4}\ \omega\ \vec{K}.\vec{K}'\ i\ \vec{\sigma}.\ (\vec{\varepsilon}' \times \varepsilon) + \frac{\mu-1}{8m^4}\ \omega \vec{K}'.\vec{\varepsilon}\ \vec{K}.\vec{\varepsilon}'\ i\ \vec{\sigma}.\ (\vec{K}' \times \vec{K}) +$$

$$+ [\ \frac{\mu(\mu+1)}{16m^4} + \frac{\mu}{6m^2} \langle r^2 \rangle_1 + \frac{\mu(\mu-1)}{6m^2} \langle r^2 \rangle_2]\ \omega\ i\ \vec{\sigma}.\ (\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}') \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) -$$

$$- [\ \frac{\mu(1-2\mu)}{16m^4} + \frac{\mu^2}{8m^4} \cos\theta]\ \frac{\vec{K}.\vec{K}'}{\omega}\ i\ \vec{\sigma}.\ (\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}') \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) +$$

$$+ \left[\frac{\mu(\mu-1)}{16m^4} + \frac{\mu}{16m^4} \cos\theta \right] \omega [\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}' \; i\vec{\sigma}.(\vec{K}' \times \vec{K}) + \vec{K}.\vec{K}' \; i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{\varepsilon})] -$$

$$+ \left[\frac{\mu(\mu+1)}{16m^4} + \frac{\mu+1}{12m^2} \langle r^2 \rangle_1 + \frac{\mu-1}{12m^2} \langle r^2 \rangle_2 \right] \omega [\vec{\varepsilon}'.\vec{K} \; i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) -$$

$$\vec{\varepsilon}.\vec{K}' \; i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{K})] + \left[\frac{\mu(2\mu-3)}{16m^4} + \frac{\mu\cos\theta}{8m^4} \right] \frac{\vec{K}.\vec{K}'}{\omega} [\vec{\varepsilon}'.\vec{K} \; i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) -$$

$$\vec{\varepsilon}.\vec{K}' \; i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{K})] + \left[\frac{\mu^2-1}{16m^5} (1+\cos\theta - \cos^2\theta) + \frac{\mu-1}{12m^3} \langle r^2 \rangle_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu(\mu-1)}{12m^3} \langle r^2 \rangle_2 \right] (\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}').(\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) \; \vec{K}.\vec{K}' +$$

$$+ \left[\frac{1}{16m^5} (1+2\mu^2+\cos\theta-\cos^2\theta) + \frac{\langle r^2 \rangle_1}{12m^3} \right] \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}' \; (\vec{K}.\vec{K}')^2 \} \; X . \qquad \text{(IV.3)}$$

Vamos, agora, escrever explicitamente a parte E. Para isto substituimos (III.6), (III.7) em (II.12). Em seguida usamos a identidade (AII.9) para converter o quinto elemento de base presente em (II. 11) no primeiro elemento presente em (IV. 3) e obtemos a seguinte expressão:

$$E = -\frac{e^2}{m} \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}' + e^2 \frac{2\mu-1}{2m^2} w \, i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{\varepsilon}) + \frac{e^2}{4m^3} \vec{K}.\vec{K}' \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}' + a_{1,2} w^2 \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'$$

$$+ a_{3,1} (\varepsilon' \times k').(\varepsilon \times k) - \frac{e^2}{8m^4} \frac{2\mu-1}{} w \vec{K}.\vec{K} \, i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{\varepsilon}) + a_{2,3} w^3 i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{\varepsilon}) +$$

$$+ a_{6,1} w \left[\vec{\varepsilon}.\vec{k}' i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{k}') - \vec{\varepsilon}.\vec{k} i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon} \times \vec{k})\right] + \left[a_{4,1} + a_{5,1}\right] w \left[\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon} i\, \vec{\sigma}\,.(\vec{k}' \times \vec{k}) - \right.$$

$$\left. - \vec{k}.\vec{k} i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{\varepsilon})\right]$$

$$+ a_{5,1}\, w\, \sigma.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{k}') \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{k}) - \left[e^2 \frac{2\mu^2+1}{32m^5} + \frac{\langle r^2\rangle_1}{12m^3}\right](\vec{k}.\vec{k}')^2\, \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}' + a_{1,6}\, w^4\, \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'$$

$$+ a_{3,2} w^2 (\vec{\varepsilon}' \times \vec{k}').(\vec{\varepsilon} \times \vec{k}) + a_{3,3}\, \vec{k}.\vec{k}').\ (\vec{\varepsilon} \times \vec{k}). \qquad \text{(IV. 4)}$$

Reunindo (IV. 3) e (IV. 4) em (IV. 1) obtemos a amplitude de espalhamento no sistema Breit. O próximo passo consiste em fazer a transformação de Lorentz para o sistema de laboratório.

No apêndice, escrevemos as transformações de Lorentz para os momenta, energias, polarizações e spinores.

O cálculo da amplitude foi feito na gauge transversal e esta também deve ser transformada, como salientado no passado por V.K. Fedyanin[14]. A não observância desta mudança de gauge transversal quando se muda de sistema de referencia conduziu a erros no passado. Reproduzimos, no apêndice, a transformação de gauge.

Transformando U + E para o laboratório e multiplicando o resultado por $m^2/Ep'Ep$ obtemos a amplitude no sistema laboratório que designaremos por A_L. Até a quarta ordem em w temos:

$$A_L = e^2\, X'^{+} \left\{ \frac{-\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'}{m} + \frac{2\mu-1}{4m^3}\, (w+w')\, i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{\varepsilon}) + \right.$$

$$\frac{\mu}{2m^2}\left[\frac{\vec{\varepsilon}'.\vec{k}}{w}\, i\sigma.(\vec{\varepsilon} \times \vec{k}) - \frac{\vec{\varepsilon}.\vec{k}'}{w'}\, i\, \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{k}')\right] +$$

$$- \frac{\mu^2}{4m^2} \left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega'}\right) i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')\times(\vec{\varepsilon}\times\vec{K}) - \frac{\vec{K}.\vec{K}'\ \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'}{2m^3} -$$

$$- \frac{\mu^2}{4m^3} (\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}').(\vec{\varepsilon}\times\vec{K})\cos\theta + \left[\frac{a_{1,2}}{e^2} + \frac{1}{2m^3}\right] \omega\omega'\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}' +$$

$$+ \left[\frac{a_{3,1}}{e^2} + \frac{1}{2m^3}\right](\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}').(\vec{\varepsilon}\times\vec{K}) + \frac{\mu(\mu-1)}{4m^3}\left[\frac{\omega}{\omega'}\vec{\varepsilon}'.\vec{K}\, i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}\times\vec{K}) +\right.$$

$$\left. + \frac{\omega'}{\omega}\vec{\varepsilon}.\vec{K}'\, i\,\vec{\sigma}.(\varepsilon'\times K')\right] - \frac{\mu-1}{4m^3}\left[\vec{\varepsilon}.\vec{K}' i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}) +\right.$$

$$\left. + \vec{\varepsilon}'.\vec{K}\, i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}\times\vec{K}')\right] - \frac{3\mu^2}{16m^4} i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')\times(\vec{\varepsilon}\times\vec{K})(\omega+\omega')\cos\theta +$$

$$+ \frac{4\mu^2-\mu}{16m^4}\left[\vec{\varepsilon}'.\vec{K}\, i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}\times\vec{K}) - \vec{\varepsilon}.\vec{K}'\, i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')\right](\omega+\omega')\cos\theta -$$

$$- \left[\frac{a_{6,1}}{2e^2} + \frac{6\mu+1}{32m^4} - \frac{\mu+1}{24m^2}\langle r^2\rangle_1 - \frac{\mu-1}{24m^2}\langle r^2\rangle_2\right](\omega+\omega')\left[\vec{\varepsilon}'.\vec{K}\, i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}\times\vec{K}) -\right.$$

$$\left. - \vec{\varepsilon}.\vec{K}'\, i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')\right] + \left[\frac{a_{5,1}}{2e^2} + \frac{8\mu^2-\mu+2}{32m^4} + \frac{\mu}{12m^2}\langle r^2\rangle_1 +\right.$$

$$\left. + \frac{\mu(\mu-1)}{12m^2}\langle r^2\rangle_2\right](\omega+\omega')\, i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')\times(\vec{\varepsilon}\times\vec{K}) + \left[\frac{a_{2,3}}{2e^2} + \frac{3\mu^2-8\mu+4}{16m^4}\right]\times$$

$$(\omega+\omega')\omega\omega' i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\varepsilon) + \left[\frac{a_{4,1}+a_{5,1}}{2e^2} + \frac{3(2\mu-1)}{32m^4}\right]\times$$

$$[\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'\, i\,\sigma.(\vec{K}'\times\vec{K}) - \vec{K}.\vec{K}' i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{\varepsilon})](w+w') +$$

$$+ \frac{3(2\mu - 1)(w+w')}{16m^4} \vec{k}.\vec{k}' i\sigma.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{\varepsilon}) - \frac{13\,(\vec{k}.\vec{k}')^2}{32m^5} \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}' -$$

$$- \frac{3\mu^2\, \vec{k}.\vec{k}'\, (\vec{\varepsilon} \times \vec{k}).(\vec{\varepsilon}' \times \vec{k}')}{16m^5} \cos\theta \; +$$

$$\left[\frac{a_{3,2}}{e^2} - \frac{a_{1,2}}{4m^2e^2} - \frac{a_{3,1}}{4m^2e^2} + \frac{\mu^2-6}{16m^5} \right] ww'(\vec{\varepsilon} \times \vec{k}).\,(\vec{\varepsilon}' \times \vec{k}') \; +$$

$$+ \left[\frac{a_{3,3}}{e^2} + \frac{a_{1,2}}{4m^2e^2} + \frac{a_{3,1}}{4m^2e^2} + \frac{\mu^2+5}{16m^5} + \frac{\mu-1}{12m^3} \langle r^2 \rangle_1 + \frac{\mu(\mu-1)}{12m^3} \langle r^2 \rangle_2 \right] \times$$

$$\vec{k}.\vec{k}'\, (\vec{\varepsilon}' \times \vec{k}').(\vec{\varepsilon} \times \vec{k})$$

$$+ \left[\frac{a_{1,6}}{e^2} - \frac{a_{1,2}}{4m^2e^2} - \frac{a_{3,1}}{4m^2e^2} \right] w^4\, \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}' + \left[\frac{a_{1,4}}{e^2} + \frac{a_{1,2}}{4m^2e^2} + \frac{a_{3,1}}{4m^2e^2} \right] w^2 \vec{k}.\vec{k}'\, \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}' . \qquad \text{(IV. 5)}$$

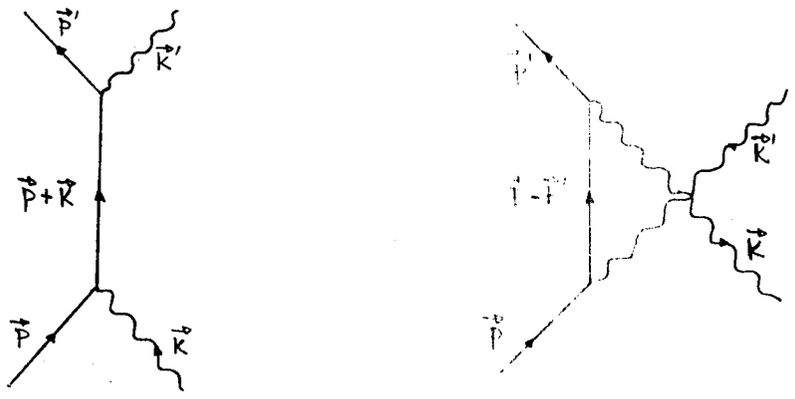
Por conveniência, do ponto de vista da interpretação dos dados experimentais, vamos extrair, dos coeficientes não determinados pelos teoremas de baixa energia, os valores correspondentes à amplitude de Feyman, que será calculada em seguida.

A densidade de hamiltoniana efetiva do fóton-nucleon com momento magnético anômalo λ é

$$\mathcal{H} = ie\bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi A_\mu + \frac{e\lambda}{4m} F_{\mu\nu}\, \bar{\Psi}\, \sigma_{\mu\nu} \Psi \, . \qquad \text{(IV. 6)}$$

Powell [16] foi o primeiro a utilizar a hamiltoniana acima para calcular a amplitude de espalhamento de Compton para o nucleon puntiforme.

Os diagramas de Feyman para o espalhamento Compton são os seguintes:



A amplitude correspondente a estes gráficos é dada por

$$A_n = e^2\bar{\mu}(\vec{p}')\ \{[\vec{\gamma}.\vec{\varepsilon}' - \frac{\lambda}{2m}\sigma_{\nu\mu} K'_\nu \ \varepsilon'_\mu\ ]\ \frac{-i\ \gamma.(P+K)+m}{(P+K)^2+m^2}\ [\gamma.\varepsilon\ +$$

$$+\frac{\lambda}{2m}\sigma_{\rho\delta} K_\rho\ \varepsilon_\delta] + [\vec{\gamma}.\vec{\varepsilon} + \frac{\lambda}{2m}\sigma_{\nu\mu} K_\nu\ \varepsilon_\mu]\ \frac{-i\ \gamma.(P-K')+m}{(P-K')^2+m^2}[\vec{\gamma}.\vec{\varepsilon}' -$$

$$-\frac{\lambda}{2m}\sigma_{\rho\delta} K'_\rho\ \ \varepsilon'_\delta\ ]\}\mu(\vec{p})\ . \qquad \text{(IV.7)}$$

Desenvolvendo (IV.7) para $\vec{p} = 0$ obtemos

$$A_N = e^2 \chi'^{+} \Bigg\{ -\frac{\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'}{m} + \frac{2\mu-1}{4m^3}(w+w')\, i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'+\vec{\varepsilon}) +$$

$$+ \frac{\mu}{2m^2}\left[\frac{\vec{\varepsilon}'.\vec{k}}{w}\, i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}\times\vec{k}) - \frac{\vec{\varepsilon}.\vec{k}'}{w'}\, i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{k}')\right] -$$

$$- \frac{\mu^2}{4m^2}\left[\frac{1}{w}+\frac{1}{w'}\right] i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{k}')\times(\vec{\varepsilon}\times\vec{k}) - \frac{\vec{k}.\vec{k}'\,\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'}{2m^3} +$$

$$+ \frac{1-\mu^2\cos\theta}{4\,m^3}(\varepsilon\times k).(\varepsilon'\times k') +$$

$$+ \frac{\mu^2+1}{4\,m^3}\, ww'\,\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}' + \left[\frac{\mu(\mu-1)}{4\,m^3}\,\frac{w}{w'}\,\vec{\varepsilon}'.\vec{k}\, i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}\times\vec{k}) + \frac{w'}{w}\,\vec{\varepsilon}.\vec{k}\, i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{k}')\right] -$$

$$- \frac{\mu-1}{4m^3}\left[\vec{\varepsilon}.\vec{k}'\, i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{k}) + \vec{\varepsilon}'.\vec{k}\, i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}\times\vec{k}')\right] + \frac{\mu-4\mu^2}{16m^4}\times$$

$$\left[\vec{\varepsilon}'.\vec{k}\, i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}\times\vec{k}) - \vec{\varepsilon}.\vec{k}'\, i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}\times\vec{k}')\right](w+w')(1-\cos\theta) +$$

$$+ \frac{3\mu^2}{16m^4}\, i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{k}')\times(\vec{\varepsilon}\times\vec{k})\,(w+w')(1-\cos\theta) + \frac{2\mu^2-10\mu+5}{16m^4}\, ww'(w+w')\, i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{\varepsilon}) +$$

$$+ \frac{3(2\mu-1)}{16m^5}\,\vec{k}.\vec{k}'\,(w+w')\, i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{\varepsilon}) - \frac{13}{8m^5}\,(\vec{k}.\vec{k}')^2\,\varepsilon.\varepsilon' - \frac{3\mu^2}{16m^5}\,\vec{k}.\vec{k}'\,(\vec{\varepsilon}\times\vec{k}).(\varepsilon'\times k')\cos\theta -$$

$$- \frac{\mu^2+2}{16m^2}\, ww'(\vec{\varepsilon}\times\vec{k}).(\vec{\varepsilon}'\times\vec{k}') + \frac{2\mu^2+1}{8m^5}\,\vec{k}.\vec{k}'(\vec{\varepsilon}\times\vec{k}).(\varepsilon'\times k') - \frac{6\mu^2+7}{32m^5}\, w^2 w'^2\,\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}' -$$

$$+ \frac{3\mu^2-5\mu+14}{16m^5}\, ww'\,\vec{k}.\vec{k}'\,\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'\Bigg\}\,\chi\,. \qquad \text{(IV. 8)}$$

Em seguida vamos extrair de (IV. 5) a amplitude de Powell calculada acima. Fixemos por exemplo o primeiro termo de segunda ordem em (IV. 5) aquele que contém $a_{1,2}$. Deste subtraire - mos o valor do termo correspondente de segunda ordem que aparece em (IV. 8). Isto é escrevemos

$$a_{1,2} + \frac{e^2}{2m^2} = C_1 + e^2 \frac{\mu^2+1}{4m^3} .$$

O que efetivamente é chamada de polarizabilidade elétrica é não a constante $a_{1,2}$, como mencionado anteriormente, mas sim C_1. Extraindo das outras constantes dinâmicas os valores correspondentes que aparecem na amplitude de Feyman escrevemo-las sob a forma:

$$a_{3,1} + \frac{e^2}{2m^3} = C_2 + \frac{e^2}{4m^3} \; ; \; \frac{a_{6,1}}{2} + e^2 \frac{6\mu+1}{32m^4} = C3 + e^2 \frac{\mu-4\mu^2}{16m^4}$$

$$\frac{a_{5,1}}{2} + e^2 \frac{8\mu^2 - \mu + 2}{32m^4} = C_4 + e^2 \frac{3\mu}{16m^4} \; ; \; \frac{a_{2,3}}{2} + e^2 \frac{8\mu^2-8\mu+4}{16m^4} = C_5 + e^2 \frac{2\mu^2-10\mu + 5}{16m^4}$$

$$\frac{a_{4,1} + a_{5,1}}{2} + e^2 \frac{2\mu-1}{32m^4} = C_6 \; ; \; a_{3,2} - \frac{a_{1,2} + a_{3,1}}{4m^3e^2} + e^2 \frac{\mu^2-6}{16m^5} = C_7 - e^2 \frac{\mu^2+2}{16m^5}$$

$$a_{3,3} + \frac{a_{1,2} + a_{3,1}}{4m^2} + e^2 \frac{\mu^2 + 5}{16m^5} = C_8 + e^2 \frac{2\mu^2+ 1}{8m^5} \; ; \; a_{1,6} - \frac{a_{1,2}+a_{3,1}}{4m^2e^2} = C_9 -$$

$$- e^2 \frac{6\mu^2+7}{32m^5}$$

$$a_{1,4} + \frac{a_{1,2} + a_{3,1}}{4m^2} = C_{10} + e^2 \frac{3\mu^2 - 5\mu + 14}{16m^5} .$$

Em termos das constantes C_1 , C_2 ,..., C_{10} a amplitude é reescrita na forma abaixo.

$$A_L = e^2 X'^+ \{ - \frac{\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'}{m} + \frac{\mu}{2m^2} [\frac{\vec{\varepsilon}'.\vec{K}}{\omega} i \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) - \frac{\vec{\varepsilon}.\vec{K}'}{\omega'} i \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{K})] +$$

$$+ \frac{2\mu-1}{4m^3}(\omega+\omega') i \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{\varepsilon}) - \frac{\mu^2}{4m^2}(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega'}) i \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}') \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) -$$

$$- \frac{\vec{K}.\vec{K}' \; \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'}{2m^3} + \omega\omega' \; \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}' \; [\frac{C_1}{e^2} + \frac{\mu^2+1}{4m^3}] \quad + \quad (\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}').(\vec{\varepsilon} \times \vec{K})$$

$$[\frac{C_2}{e^2} + \frac{1}{4m^3}] - \frac{\mu^2}{4m} (\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}').(\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) \cos\theta - \frac{\mu-1}{4m^3}[\vec{\varepsilon}.\vec{K}' i \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}) +$$

$$+ \vec{\varepsilon}'.\vec{K} \; i \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon} \times \vec{K}') + \frac{\mu(\mu-1)}{4m^3} [\frac{\omega}{\omega'} \vec{\varepsilon}'.\vec{K} \; i \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) + \frac{\omega'}{\omega} \vec{\varepsilon} \; .$$

$$. \; K' \; i \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}')] - \frac{3\mu^2}{16m^4} i \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}') \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) (\omega+\omega') \cos\theta +$$

$$+ \frac{4\mu^2-\mu}{16m^4} [\vec{\varepsilon}'.\vec{K} \; i \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) - \vec{\varepsilon}.\vec{K}' \; i \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}')] (\omega+\omega') \cos\theta -$$

$$- [\vec{\varepsilon}'.\vec{K} \; i \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) - \vec{\varepsilon}.\vec{K} \; i \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}')] (\omega+\omega') [\frac{C_3}{e^2} + \frac{\mu-4\mu^2}{16m^4} +$$

$$+ \frac{\mu+1}{24m^2} \langle r^2 \rangle_1 - \frac{\mu-1}{24m^2} \langle r^2 \rangle_2] + i \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}') \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) (\omega+\omega')$$

$$[\frac{C_4}{e^2} + \frac{3\mu^2}{16m^4} + \frac{\mu}{12m^2} \langle r^2 \rangle_1 + \frac{\mu(\mu-1)}{12m^2} \langle r^2 \rangle_2] + (\omega+\omega')\omega\omega' \; i \vec{\sigma} \; .$$

$$. \; (\vec{\varepsilon}' \times \vec{\varepsilon}) [\frac{C_5}{e^2} + \frac{2\mu^2-5(2\mu-1)}{16m^4}] \quad +$$

$$+ \frac{C_6}{e^2} (w+w') [\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}' \; i \vec{\sigma}.(\vec{K}' \times \vec{K}) - \vec{K}.\vec{K}' \; i \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{\varepsilon})] +$$

$$+ \frac{3(2\mu-1)}{16m^2} (w+w') \vec{K}.\vec{K}' \; i \; \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'x\vec{\varepsilon}) - \frac{13}{32m^5}(\vec{K}.\vec{K}')^2 \; \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}' -$$

$$- \frac{3\mu^2}{16m^5} \vec{K}.\vec{K}'(\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}').(\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) \cos\theta + [\frac{C_7}{e^2} - \frac{\mu^2+2}{16m^5}] \times$$

$$\omega\omega'(\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}').(\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) + [\frac{C_8}{e^2} + \frac{2\mu^2+1}{8m^5} + \frac{\mu-1}{12m^3} \langle r^2\rangle_1 +$$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)}{12m^3} \langle r^2\rangle_2] \; \vec{K}.\vec{K}'(\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}').(\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) + [\frac{C_{10}}{e^2} + \frac{3\mu^2-5\mu+14}{16m^5}]$$

$$\omega^2 \; \vec{K}.\vec{K}' \; \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}' + [\frac{C_9}{e^2} - \frac{6\mu^2+7}{32m^5} - \omega^4 \; \vec{\varepsilon}'.\vec{\varepsilon}]\Big\} X \; . \qquad \text{(IV. 9)}$$

No capítulo seguinte apresentamos a expressão da secção de choque de espalhamento.

CAPÍTULO V

SECÇÃO DE CHOQUE PARA O ESPALHAMENTO COMPTON

Neste capítulo calcularemos a expressão da secção de choque de espalhamento em duas situações distintas. Primeiramente faremos o cálculo de secção de choque para alvo e fóton incidentes polarizados até terceira ordem em w. Deste modo, estarão presentes, além de α e β, as constantes de estrutura relacionadas com o spin.

Estamos, também, interessados nas constantes de estrutura que aparecem até a quarta ordem em w. Nesta ordem, bastá calcular a secção de choque não polarizada, que é o que faremos posteriormente.

A secção do choque é proporcional ao módulo quadrado da amplitude e a obtenção de sua expressão está delineada no apêndice (A.IV). O r..ultado final é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = e^4 \frac{E(p')}{m} \frac{w'^2}{w^2} \left| A_L \right|^2 . \qquad (V.I)$$

A amplitude A_L está na expressão (IV.9) e tem a forma geral

$$Ae = X_f^+ (a + i\vec{\sigma}.\vec{b}) Xi \qquad (V.2)$$

onde a e $\vec{b}$ dependem dos momenta e polarizações dos fótons. Estas quantidades são complexas quando os ε's designam polarizações circulares. No caso presente estamos interessados no caso do fóton inicial circularmente polarizado à esquerda e a próton inicial polarizado na direção-sentido z do movimento do fóton inicial. Devemos então somar sobre os estados de spin do próton final e sobre os polarizações do fóton final.

O módulo quadrado de A_L é

$$A_L^+ A_L = Xi^+ (a^* - i\,\vec{\sigma}.\,\vec{b}^*)\, X_f X_f^+ (a + i\,\vec{\sigma}.\,\vec{b})\, Xi \qquad (V.\ 3)$$

A soma sobre os estados de spin do próton final pode ser facilmente executada, pois da completeza das spinores temos

$$\sum_f X_f X_f^+ = I \qquad (V.\ 4)$$

onde I é a matriz identidade. Portanto

$$\sum_f |A_L|^2 = X_i^+ (a^* - i\,\vec{\sigma}.\vec{b}^*)\,(a + i\,\vec{\sigma}.\vec{b})\,Xi\ . \qquad (V.5)$$

Com o próton polarizado inicialmente no sentido de z o spinor X_i é

$$Xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (V.6)$$

Para o cálculo de (V. 5) é conveniente introduzir o operador de projeção $(1 + \sigma_z)/2$ que quando aplicado no spinor X_i o reproduz e quando aplicado no spinor spin para baixo" dá zero. O lado direito de (V. 5) pode, então, ser reescrito sob a forma

$$\frac{1}{4} X_i^+ (1 + \sigma_z)\,(a^* - i\,\vec{\sigma}.\vec{b}^*)\,(a + i\,\vec{\sigma}.\vec{b})\,(1 + \sigma_z)\,Xi\ . \qquad (V.\ 7)$$

Como $(1 + \sigma_z)$ aplicado no spinor "spin para baixo" dá zero a expressão acima pode, por sua vez, ser reescrita do seguinte modo:

$$\frac{1}{4} \sum_{r=1}^{2} X_r (1 + \sigma_z)\,(a^* - i\,\vec{\sigma}.\vec{b}^*)\,(a + i\,\vec{\sigma}.\vec{b})\,(1 + \sigma_z)\,X_r\ . \qquad (V.\ 8)$$

Designando por M a matriz entre os spinores temos

$$\frac{1}{4} \sum_{r=1}^{2} (Xr)_\alpha^+\, M\alpha\beta (Xr)_\beta\ . \qquad (V.\ 9)$$

Usando (V. 4) a soma sobre r dá $\delta\alpha\beta$ e chegamos ao seguinte resultado:

$$\sum_f |A_L|^2 = \frac{1}{4}\, T_r M = a^*a + \vec{b}^*.\vec{b} + i(a^*b_z - a\,b^*_z) + $$
$$+ (b^*_x b_y - b_x b^*_y)\ . \qquad (V.\ 10)$$

Somamos agora sobre as polarizações do fóton final. Os diversos termos de (V. 10) contêm o fator $\varepsilon'_i \, \varepsilon'_j$. Designando por λ o estado de polarização do fóton, que está implicito nas equações escritas até agora, a soma sobre os estados de polarização do fóton final pode ser feita usando a relação

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \varepsilon'^{(\lambda)}_i \, \varepsilon'^{(\lambda)}_j = \delta_{ij} - \hat{k}'_i \, \hat{k}'_j \quad . \qquad \text{(V. 11)}$$

Com o fóton inicial circularmente polarizado à esquerda, temos

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \, (1 \, , \, i \, , \, o) \quad . \qquad \text{(V. 12)}$$

No apêndice detalhamos esta soma sobre estado de polarização as fóton final utilizando (V. 11) e (V. 12). Escrevemos abaixo o resultado para a secção de choque polarizada. Os g's que aparecem nesta expressão são funções conhecidas em termos de e, m e μ.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{m^2} \left\{ \frac{1+\cos^2\theta}{2} + w g_1 + w^2 \left[g_2 - \frac{C_1}{e^2} \, m(1-\cos^2\theta) - \frac{C_2}{e^2} \, 2m\cos\theta \right] + \right.$$

$$+ w^3 \left[g_5 + \frac{C_1}{e^2} \, g_3 + \frac{C_2}{e^2} \, g_4 + \frac{C_3}{e^2} \, 2m(1-\cos^2\theta) + \frac{C_4}{e^2} \, 4m\cos\theta + \right.$$

$$\left. \left. (C_5 - C_6 \cos\theta) \frac{2m}{e^2} (1 + \cos^2\theta) \right] \right\} \quad . \qquad \text{(V. 13)}$$

$$g_1 = \frac{\mu - 3}{2m} + \frac{1 - \mu^2 \cos\theta}{m} + \frac{3(\mu-1)}{2m} \cos^2\theta + \frac{\cos^3\theta}{m}$$

$$g_2 = \frac{29 - 26\mu + 14\mu^2 + \mu^4}{8\,m^2} + \frac{-18 + 3\mu + 12\mu^2 - 3\mu^3}{4\,m^2}\,\mathrm{Cos}\theta \quad +$$

$$+ \frac{29 - 33\mu^2 + \mu^4}{8\,m^2}\,\mathrm{Cos}^2\theta + \frac{-14 + 17\mu - \mu^3}{4\,m^2}\,\mathrm{Cos}^3\theta + \frac{3}{2m^2}\,\mathrm{Cos}^4\theta$$

$$g_3 = \frac{7 - 2\mu + \mu^2}{2} + (-3 + \mu^2)\mathrm{Cos}\theta - \frac{5 + 2\mu + \mu^2}{2}\,\mathrm{Cos}^2\theta$$

$$g_4 = \frac{\mu^2}{2} + \frac{14 - 3\mu}{2}\cos\theta + \frac{12 + \mu^2}{2}\,\mathrm{Cos}^2\theta - \frac{\mu}{2}\,\mathrm{Cos}^3\theta$$

$$g_5 = \frac{\langle r^2\rangle_1}{12m}(13 - 5\mu + 2\mu^2) + \frac{\langle r^2\rangle_2}{12m}(1 - \mu) + \frac{-53+61\mu-39\mu^2-\mu^3-2\mu^4}{8\,m^3} \quad +$$

$$+ \left[\frac{\langle r^2\rangle_1}{3m}(-3+\mu+\mu^2) + \frac{\langle r^2\rangle_2}{3m}(-\mu+\mu^2) + \frac{109 - 84\mu-12\mu^2+18\mu^3+3\mu^4}{18\,m^3}\right]\mathrm{Cos}\theta \quad +$$

$$+ \left[\frac{\langle r^2\rangle_1}{12m}(15-3\mu-2\mu^2) - \frac{\langle r^2\rangle_2}{12m}(1-\mu) + \frac{-113+101\mu+57\mu^2-14\mu^3-4\mu^4}{8\,m^3}\right]\mathrm{Cos}^2\theta \quad +$$

$$+ \left[-\frac{\langle r^2\rangle_1}{m} + \frac{117-130\mu-2\mu^2+6\mu^3+3\mu^4}{8\,m^3}\right]\mathrm{Cos}^3\theta + \frac{-72+46\mu-7\mu^3+\mu^4}{8\,m^3}\,\mathrm{Cos}^4\theta \quad +$$

$$+ \frac{2\mathrm{Cos}^5\theta}{m^3}\,.$$

A comparação da expressão da secção de choque com os dados experimentais, para vários ângulos permite a obtenção dos valores das constantes de estrutura. Em particular para $\theta = 90°$ sobrevivem apenas três constantes: C_1. C_3 e C_5.

Consideremos agora, a secção de choque não palorizada até

quarta ordem em w. Para isto necessitamos da amplitude até esta ordem dada pela (IV. 9). Neste caso comparecem, além das já mencionadas, mais quatro constantes de estrutura C_7, C_8, C_9 e C_{10}.

Para calcular a secção de choque não polarizada devemos somar sobre os estados finais do próton e do fóton e fazer a média sobre as iniciais. A média sobre os estados iniciais do próton pode ser feita utilizando a expressão (V. 7) sem os operadores de projeção, ou seja:

$$\frac{1}{2}\sum_i\sum_f |A_L|^2 = \frac{1}{2} X_i(a^*-i\vec{\sigma}.\vec{b}^*)\ (a + i\vec{\sigma}.\vec{b})\ X_i = aa^* + \vec{b}.\vec{b}^*. \qquad (V.14)$$

Notamos que como $\vec{b}$ é, no mínimo, de ordem w, basta calcular os termos dependentes de $\vec{\sigma}$ até a terceira para obter a secção de choque até a quarta ordem. As quantidades a e $\vec{b}$ até a ordem mencionada estão na (IV. 9).

A média sobre as polarizações iniciais do fóton pode ser feita lembrando que os diversos termos de (V. 14) contêm o fator $\varepsilon_r\ \varepsilon_s$. Designando por α o estado de polarização do fóton inicial, faremos a média usando a relação

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2} \varepsilon_r^{(\alpha)}\varepsilon_s^{(\alpha)} = \frac{1}{2}\ (\delta_{rs} - \hat{k}_r\ \hat{k}_s). \qquad (V.\ 15)$$

Após somar e fazer a média sobre os estados final e inicial do fóton levamos (V. 14) em (V.I) e obtemos a secção de choque não polarizada: Os f'_s que aparecem são funções conhecidas de $\underline{e}$, $\underline{m}$ e $\underline{\mu}$.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{m^2}\ \{\ \frac{1+\cos^2\theta}{2} - \frac{\omega}{m}\ (1+\cos^2\theta)\,(1-\cos\theta)\ + \omega^2\,[f_1 - mC_1(1+\cos^2\theta) -$$

$$-2mC_2\cos\theta] + \omega^3 [f_2 + 3C_1(1+\cos^2\theta)(1-\cos\theta) + 6C_2\cos\theta(1-\cos\theta)] +$$

$$+\omega^4 [f_8 + (\frac{mC_1)^2}{2}(1+\cos^2\theta) + mC_1 f_3 + (mC_2)^2(2-\cos^2\theta) + 2m^2C_1C_2\cos\theta +$$

$$+ C_2 f_4 - \frac{mC_9}{2} + C_5 f_5 - \frac{mC_{10}}{2}\cos\theta - 2mC_7\cos\theta - 2mC_8\cos^2\theta +$$

$$+ C_6 f_6 + C_4 f_7 + C_3(4-2\mu)(1-\cos^2\theta)]\} \qquad (V.2)$$

$$f_1 = \frac{17-4\mu+3\mu^4}{8m^2} + \frac{-7+\mu^2-2\mu^3}{2m^2}\cos\theta +$$

$$+ \frac{25-4\mu+8\mu^2-\mu^4}{8m^2}\cos^2\theta - \frac{3\cos^3\theta}{m^2} + \frac{3}{2m^2}\cos^4\theta$$

$$f_2 = \frac{-7+12\mu-9\mu^4}{8m^3} + \frac{19-12\mu-12\mu^2+24\mu^3+9\mu^4}{8m^3}\cos\theta +$$

$$+ \frac{-7+12\mu-12\mu^2-24\mu^3+3\mu^4}{8m^3}\cos^2\theta +$$

$$+ \frac{-5-12\mu+24\mu^2-3\mu^4}{8m^3}\cos^3\theta$$

$$f_3 = \frac{5+\mu^2}{4m^2} - \frac{3\cos\theta}{m^2} + \frac{13-\mu^2}{4m^2}\cos^2\theta -$$

$$- \frac{7}{2m^2}\cos^3\theta + \frac{2}{m^2}\cos^4\theta$$

$$f_4 = \frac{1}{m} + \frac{5-\mu^2}{2m}\cos\theta - \frac{15}{2m}\cos^2\theta + \frac{4}{m}\cos^3\theta$$

$$f_5 = 2\mu-3 - 2\mu^2\cos\theta + (2\mu+1)\cos^2\theta$$

$$f_6 = -\mu^2 + (2-2\mu)\cos\theta + 3\mu^2\cos^2\theta - 2\mu\cos^3\theta$$

$$f_7 = -3\mu^2 + (4\mu-2)\cos\theta + \mu^2\cos^2\theta$$

$$f_8 = \frac{\langle r^2\rangle_1}{24m^2}(-6\mu^2+4\mu+7) + \frac{\langle r^2\rangle_2}{24m^2}(-6\mu^4+6\mu^3-2\mu^2+4\mu-2)$$

$$+ \frac{347-222\mu+236\mu^2+140\mu^4}{64m^4} +$$

$$+ \left[\frac{\langle r^2\rangle_1}{24m^2}(-24-4\mu+8\mu^2+4\mu^3) + \frac{\langle r^2\rangle_2}{6m^2}(3\mu^3-4\mu^2+\mu) +\right.$$

$$\left.+ \frac{-160+61\mu-5\mu^2-44\mu^3-38\mu^4}{16m^4}\right]\cos\theta + \left[\frac{\langle r^2\rangle_1}{12m^2}\right.$$

$$(\mu^3-4\mu^2-2\mu+17) + \frac{\langle r^2\rangle_2}{12m^2}(\mu^4-\mu^3-5\mu^2+6\mu-1) +$$

$$\left.+ \frac{877-135\mu+142\mu^2+392\mu^3+53\mu^4}{32m^4}\right]\cos^2\theta + \left[\frac{-7\langle r^2\rangle_1}{6m^2} + \frac{218+35\mu+48\mu-48\mu^3+12\mu^4}{8m^4}\right]\cos$$

$$\left[\frac{2\langle r\rangle_1}{3m^2} + \frac{1667-192\mu+128\mu^2-54\mu^4}{64m^4}\right]\cos^4\theta + \frac{14}{m^4}\cos^5\theta + \frac{5}{2m^4}\cos^6\theta .$$

Até a 2ª ordem em w a expressão de choque é a mesma calculada por Petrun'kin[13] .

CAPÍTULO VI

Contribuições Originais deste Trabalho e Problemas Propostos

Como contribuições originais citamos:

I. Determinação dos teoremas de baixa energia de terceira e quarta ordem em w.

II. Cálculo da secção de choque para fóton e próton polarizados no estado inicial em termos das constantes dinâmicas ou de estrutura até terceira ordem em w.

III. Cálculo da secção de choque não polarizada em termos das constantes dinâmicas até quarta ordem em w.

Como problemas propostos indicamos:

I. Cálculo da secção de choque polarizada com polarizações do fóton e do próton perpendiculares entre si, na mesma linha de cálculo que apresentamos neste trabalho no caso das polarizações paralelas entre si.

II. Comparação com os dados experimentais existentes afim de ter-se o valor experimental das constantes de estrutura de terceira e quarta ordem, a exemplo do que foi feito para as constantes dipolares.

APÊNDICE I

DETALHES DO CÁLCULO $K'_i\, U_{ij}\, K_j + \omega\omega'\, U_{44}$

No sistema Breit $\vec{p}' = -\vec{p}$, portanto $\vec{p}' = \frac{\vec{K}-\vec{K}'}{2}$ e $\vec{p} = \frac{\vec{K}'-\vec{K}}{2}$. Os momenta dos estados intermediários são: $\vec{p}+\vec{K} = \frac{\vec{K}'-\vec{K}}{2}$ e $\vec{p}-\vec{K}' = -\frac{\vec{K}'+\vec{K}}{2}$. Usaremos a notação: $E_1 = E(\vec{p}+\vec{K}) = E(\vec{p}-\vec{K}')$ e $E_2 = E(\vec{p}) = E(\vec{p}')$. Temos então

$$K'_j\, U_{ij}\, K_j + \omega\omega'\, U_{44} = [E_1-E_2+\omega')]\langle p'|\rho|\vec{p}'+\vec{K}'\rangle\langle\vec{p}+\vec{K}|\rho|\vec{p}\rangle +$$

$$+[E_1-E_2-\omega]\langle p'|\rho|\vec{p}'-\vec{K}\rangle\langle\vec{p}-\vec{K}'\rangle\langle\vec{p}-\vec{K}'|\rho|\vec{p}\rangle. \qquad \text{(AI.1)}$$

Chamaremos a segunda expressão do lado direito de (AI.1) de termo cruzado.

Como $\omega = \omega'$ e $\vec{p}' = -\vec{p}$ o quadrado da transferência de momento(q) é o mesmo para todos os elementos de matris de (AI.1). Daí segue, que $F_{1,2}(q^2)$ são os mesmos em todos os elementos de matris. Escreveremos daqui por diante $F_{1,2}$ ao invés de $F_{1,2}(q^2)$.

Fazendo em (AI.1) a soma sobre os spins do estados intermediários obtemos

$$K'\, U_{ij}\, K_j + \omega\omega' U_{44} = [E_1-E_2+\omega']\; e^2 u^+(\vec{p}')\,\beta\,[F_1\frac{E_1+E_2}{2m} -$$

$$-\frac{F_1+\lambda F_2}{2m}\,\vec{\alpha}.\vec{K}']\times\frac{\vec{\alpha}.(\vec{K}'+\vec{K})+\beta m+E_1}{2E_1}$$

$$[F_1\frac{E_1+E_2}{2m} - \frac{F_1+\lambda F_2}{2m}\,\vec{\alpha}.\vec{\alpha}]\,\beta\, u(\vec{p}) +$$

$$+ \text{ termo cruzado}. \qquad \text{(AI.2)}$$

Em seguida expressamos $u(\vec{p}\,')$ e $u(\vec{p})$ em termos de $u(0)$. Fazemos todos os produtos indicados em (AI.2). Lembramos que $u'^{+}(0)[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]u(0) = X'^{+}[\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n]X$ se $\underline{m}$ for par e é igual a zero se $\underline{m}$ for impar. Utilizando a identidade $\vec{\sigma}.\vec{a}\ \vec{\sigma}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{b}+i\,\vec{\sigma}.(\vec{a}\times\vec{b})$, obtemos

$$K'_i\,U_{ij}\,K_j + \omega\omega' U_{44} = \frac{E_1-E_2+\omega'}{8m^2E_1}\,N^2(\vec{p}\,')\,e^2\,X'^{+}\{F_1^2(E_1+\overline{m})(E_1+E_2)^2 -$$

$$- F_1(F_1+\lambda F_2)(E_1+E_2)[\omega^2+\vec{K}.\vec{K}'+ i\,\vec{\sigma}.(\vec{K}'\times\vec{K})] + (F_1+\lambda F_2)^2(E_1-m)$$

$$[\vec{K}.\vec{K}'+i\,\vec{\sigma}.(\vec{K}'\times\vec{K})] + F_1^2\,\frac{(E_1+E_2)^2}{E_2+m}\,i\,\vec{\sigma}.(\vec{K}'\times\vec{K}) + F_1\,(F_1+\lambda F_2)$$

$$\frac{(E_1+E_2)(E_1+m)}{E_2+m}[\vec{K}.\vec{K}'-\omega^2-i\,\vec{\sigma}.(\vec{K}'\times\vec{K})] + \frac{(F_1+\lambda F_2)^2}{E_2+m}\,\omega^2 i\vec{\sigma}.(\vec{K}'\times\vec{K}) +$$

$$+ F_1(F_1+\lambda F_2)\frac{(E_1+E_2)(E_1-m)}{E_2+m}[\omega^2-\vec{K}.\vec{K}' - i\,\vec{\sigma}.(\vec{K}'\times\vec{K})] +$$

$$+ F_1(F_1+\lambda F_2)\frac{(E_1+E_2)}{2(E_2+m)^2}[\omega^4-(\vec{K}.\vec{K}')^2 + (\vec{K}.\vec{K}'-\omega^2)\,i\,\vec{\sigma}.(\vec{K}'\times\vec{K})] -$$

$$+ (F_1+\lambda F_2)^2\,\frac{(E_1+m)}{2(E_2+m)^2}[(\vec{K}.\vec{K}')^2-\omega^2\vec{K}.\vec{K}'+(\omega^2-\vec{K}.\vec{K}')\ i\,\vec{\sigma}.(\vec{K}'\times\vec{K})]\}\,X +$$

$$+ \text{ termo cruzado .} \qquad \text{(AI.3)}$$

Para explicitar o termo cruzado, vamos tomar como exemplo o segundo termo entre chaves da expressão acima. Sua contribuição para (AI.3) é

$$N(\vec{p}\,')\,\frac{E_1 - E_2 + w'}{8m^2E_1}\,e^2\,X'^{+}\,F_1(F_1+\lambda F_2)(E_1+E_2)$$

$$[w^2 + \vec{k}.\vec{k} + i\vec{\sigma}.(\vec{k}'\times\vec{k})]X. \qquad \text{(A I. 4)}$$

O termo cruzado correspondente é

$$N(\vec{p}\,') \frac{E_1-E_2-\omega}{8m^2E_1} e^2 X'^{+} F_1(F_1+\lambda F_2)(E_1+E_2)[\omega'^2+\vec{K}.\vec{K}'-i\vec{\sigma}.(\vec{K}'\times\vec{K})]X \quad (AI.5)$$

Ao somarmos (AI.4) e (AI.5) notamos que, como $\omega = \omega'$, todos os termos entre colchetes que multiplicam $E_1 - E_2$ são independentes de σ e todos aqueles que multiplicam ω $(=\omega')$ dependem somente de σ. Esta análise é válida para todos os termos entre chaves de (AI.3), que agora assume a seguinte forma

$$K'_i U_{ij} K_j + \omega\omega' U_{44} = \frac{N^2(\vec{p}\,')}{8m^2E_1} e^2 X'^{+} \{(E_1-E_2)[2F_1^2(E_1+m)(E_1+E_2)^2-$$

$$- 2F_1(F_1+\lambda F_2)(E_1+E_2)(\omega^2+\vec{K}.\vec{K}') + 2(F_1+\lambda F_2)^2(E_1-m)\vec{K}.\vec{K}' +$$

$$+ 2F_1(F_1+\lambda F_2)\frac{(E_1+E_2)(E_1+m)}{E_2+m}(\vec{K}.\vec{K}'-\omega^2) + 2F_1(F_1+\lambda F_2)\frac{E_1+E_2)(E_1-m)}{E_2+m}$$

$$(\omega^2-\vec{K}.\vec{K}') + F_1(F_1+\lambda F_2)\frac{(E_1+E_2)}{(E_2+m)}(\omega^4-(\vec{K}.\vec{K}')^2) - F_1^2(\frac{E_1+E_2)(E_1-m)}{E_2+m}$$

$$(\omega^2-\vec{K}.\vec{K}') + (F_1+\lambda F_2)^2\frac{(E_1-m)}{(E_2+m)^2}((\vec{K}.\vec{K}')^2-\omega^2\vec{K}.\vec{K}')] + \omega\, i\vec{\sigma}.(\vec{K}'\times\vec{K})$$

$$[-2F_1(F_1+\lambda F_2)(E_1+E_2) + 2(F_1+\lambda F_2)^2(E_1-m) + 2F_1^2\frac{(E_1+E_2)^2}{(E_2+m)} -$$

$$- 2F_1(F_1+\lambda F_2)\frac{(E_1+E_2)(E_1+m)}{E_2+m} + 2(F_1+\lambda F_2)^2\frac{\omega^2}{E_2+m} -$$

$$- 2F_1(F_1+\lambda F_2)\frac{(E_1+E_2)E_1-m)}{E_2+m} + 2F_1(F_1+\lambda F_2)\frac{(E_1+E_2)}{(E_2+m)^2}(\vec{K}.\vec{K}'-\omega^2) +$$

$$+ 2(F_1+F_2)^2\frac{(E_1+m)}{(E_2+m)^2}(\omega^2-\vec{K}.\vec{K}')]\} X . \quad (AI.6)$$

A energia $E(\vec{p})$ e os fatores de forma $F_{1,2}$ possuem as seguintes expansões em potências de ω e $\vec{K}.\vec{K}'$:

$$E(\vec{p}) = m + \vec{p}^{\,2}/2m - \vec{p}^{\,4}/8m^3 + \ldots \qquad (AI.7)$$

$$F_{1,2} = 1 - \frac{\omega^2}{6} \langle r^2 \rangle_{1,2} + \frac{(\vec{K}'.\vec{K})^2}{24m^2} \langle r^2 \rangle_{1,2} + \frac{\omega^4}{120} \langle r^4 \rangle_{1,2} + \ldots \qquad (AI.8)$$

Chamando $\mu = 1+\lambda$ o momento magnético total em unidade de $e\hbar/mc$ e substituindo as expansões acima em (AI.6), obtemos o resultado escrito em (III.6).

APÊNDICE II

DETALHES DO CÁLCULO DE U

A parte U da amplitude é

$$U = \frac{\langle \vec{p}'|\vec{j}.\vec{\varepsilon}'|\vec{p}'+\vec{K}'\rangle\langle \vec{p}+\vec{K}|\vec{j}.\vec{\varepsilon}|\vec{p}\rangle}{E(\vec{p}+\vec{K}) - E(\vec{p}) - \omega} + \frac{\langle \vec{p}'|\vec{j}.\vec{\varepsilon}|\vec{p}'-\vec{K}\rangle\langle \vec{p}-\vec{K}'|\vec{j}.\vec{\varepsilon}'|\vec{p}\rangle}{E(\vec{p}-\vec{K}') - E(\vec{p}) + \omega'} . \qquad (AII.1)$$

Daqui por diante chamaremos a segunda parte do lado direito de (AII.1) de termo cruzado. As energias dos estados serão designados na mesma forma que no apêndice I.

Explicitando a forma da corrente em (AII.1) e fazendo a soma sobre os spins dos estados intermediários, obtemos no Breit

$$U = e^2\, u^+(\vec{p}')\, \beta\, [F_1 \frac{\vec{K}.\vec{\varepsilon}'}{2m} + \frac{F_1+\lambda F_2}{2m}\, i\, \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}) + \frac{F_1+\lambda F_2}{2m}(E_2-E_1)\vec{\alpha}.\vec{\varepsilon}'] \times$$

$$\times \frac{\vec{\alpha}.\frac{(\vec{K}'+\vec{K})}{2} + \beta m + E_1}{2E_1}\, \beta\, [F_1 \frac{\vec{K}'.\vec{\varepsilon}}{2m} - \frac{F_1+\lambda F_2}{2m}\, i\, \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) +$$

$$+ \frac{F_1+\lambda F_2}{2m}(E_1-E_2)\vec{\alpha}.\vec{\varepsilon}]\, u(\vec{p}) \times \frac{1}{E_1 - E_2 - \omega} + \text{termo cruzado}.$$

(AII.2)

Expressando $u(\vec{p}')$ e $u(\vec{p})$ em termos de $u(0)$ e fazendo os produtos indicados em (AII.2), obtemos

$$U = \frac{N^2(\vec{p}')\, e^2}{8m^2 E_1 (E_1-E_2-\omega)}\, X'^+ [F_1(F_1+\lambda F_2)(E_1-E_2)\vec{K}.\vec{\varepsilon}'\, \vec{\sigma}.(\vec{K}'+\vec{K})\vec{\sigma}.\vec{\varepsilon} -$$

$$- \frac{F_1^2 \vec{K}'.\vec{\varepsilon}\, K.\vec{\varepsilon}'}{4(E_2+m)}\, \vec{\sigma}.(\vec{K}+\vec{K}')\vec{\sigma}(\vec{K}'-\vec{K}) + \frac{F_1(F_1+\lambda F_2)\vec{K}.\vec{\varepsilon}'}{4(E_2+m)}\, \vec{\sigma}.(\vec{K}'+\vec{K})\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon} \times \vec{K})\vec{\sigma}.(\vec{K}'-\vec{K}) +$$

$$F_1^2(E_1+m)\ \vec{K}'.\vec{\varepsilon}\,\vec{K}.\vec{\varepsilon}'-F_1(F_1+\lambda F_2)(E_1+m)\vec{K}.\vec{\varepsilon}'\,i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}\times\vec{K})\ +$$

$$+\ F_1(F_1+\lambda F_2)\ \frac{(E_1+m)(E_1+E_2)}{2(E_2+m)}\ \vec{K}.\vec{\varepsilon}'\,\vec{\sigma}.\ \vec{\varepsilon}\,\vec{\sigma}.(\vec{K}'-\vec{K})\ -$$

$$-\ \frac{(F_1+\lambda F_2)}{2}\ (E_1-E_2)\,i\,\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')\ \vec{\sigma}.(\vec{K}'+\vec{K})\,\vec{\sigma}.\vec{\varepsilon}\ -$$

$$-\ \frac{F_1(F_1+\lambda F_2)}{4(E_2+m)}\ \vec{K}'.\vec{\varepsilon}\ i\ \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')\vec{\sigma}\ .(\vec{K}'+\vec{K})\vec{\sigma}\ .\ (\vec{K}'-\vec{K})\ -$$

$$-\ \frac{(F_1+\lambda F_2)^2}{4(E_2+m)}\ \vec{\sigma}\ .(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')\ \vec{\sigma}.(\vec{K}'+\vec{K})\vec{\sigma}\ .(\vec{\varepsilon}\times\vec{K})\vec{\sigma}\ .(\vec{K}'-\vec{K})\ +$$

$$+\ F_1(F_1+\lambda F_2)(E_1+m)\ \vec{K}'.\vec{\varepsilon}\ i\ \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')\ +\ (F_1+\lambda F_2)^2(E_1+m)\vec{\sigma}\ .$$

$$.\ (\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')\vec{\sigma}\ .(\vec{\varepsilon}\times\vec{K})\ +\ \frac{(F_1+\lambda F_2)^2}{2}(E_1-E_2)(E_1+m)\,i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')\vec{\sigma}.$$

$$.\vec{\varepsilon}\ \vec{\sigma}.(K'-K)-\frac{F_1(F_1+\lambda F_2)}{2}\ (E_1-E_2)\vec{K}'.\vec{\varepsilon}\ \vec{\sigma}.\vec{\varepsilon}'\vec{\sigma}\ .(\vec{K}'+\vec{K})\ +$$

$$+\ \frac{(F_1+\lambda F_2)^2}{2}(E_1-E_2)\vec{\sigma}.\vec{\varepsilon}'\vec{\sigma}.(\vec{K}'+\vec{K})\,i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}\times\vec{K})\ -\ \frac{\vec{K}.\vec{\varepsilon}'\ \vec{K}'.\vec{\varepsilon}}{4(E_2+m)}\ \vec{\sigma}\ .$$

$$.(\vec{K}-\vec{K}')\vec{\sigma}.(\vec{K}'+\vec{K})\ +\ \frac{F_1(F_1+\lambda F_2)\vec{K}.\vec{\varepsilon}'}{4(E_2+m)}\ \vec{\sigma}.(\vec{K}-\vec{K}')\vec{\sigma}.(\vec{K}'+\vec{K})\,i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}\times\vec{K})-$$

$$-\ \frac{F_1(F_1+\lambda F_2)}{4(E_2+m)}\ \vec{K}'.\vec{\varepsilon}\ \vec{\sigma}.(\vec{K}-\vec{K}')\,i\ \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')\vec{\sigma}.(\vec{K}'+\vec{K})\ -\ \frac{(F_1+\lambda F_2)^2}{4(E_2+m)}\ \vec{\sigma}.$$

$$.\ (\vec{K}-\vec{K}')\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')\vec{\sigma}.(\vec{K}'+\vec{K})\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}\times\vec{K})+F_1(F_1+\lambda F_2)\frac{(E_2-E_1)(E_1+m)}{2(E_2+m)}\vec{K}'.$$

$$.\ \vec{\varepsilon}\ \vec{\sigma}.(\vec{K}-\vec{K}')\vec{\sigma}.\vec{\varepsilon}'\ -\ (F_1+\lambda F_2)^2\ \frac{(E_1-E_2)(E_1+m)}{2(E_2+m)}\ \vec{\sigma}.(\vec{K}-\vec{K}')\ \vec{\sigma}\ .\ \vec{\varepsilon}'\ i\ \vec{\sigma}\ .$$

$$. (\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) \;] \; X + \text{termo cruzado} . \qquad \text{(AII.3)}$$

Desenvolvendo os produtos das matrizes σ e expandindo as energias em potências de ω e $\vec{K}.\vec{K}'$ resulta

$$U = \frac{e^2}{E_1 - E_2 - \omega} X'^{+} \Big[\frac{F_1(F_1+\lambda F_2)}{16m^4} \vec{K}.\vec{K}' \; \vec{K}.\vec{\varepsilon}' \; i \; \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon} \times \vec{K}') -$$

$$- \frac{F_1^2}{16m^4} \vec{K}.\vec{\varepsilon}' \; \vec{K}'.\vec{\varepsilon} \; i \; \vec{\sigma}.(\vec{K}' \times \vec{K}) + \frac{F_1(F_1+\lambda F_2)}{32m^4} (\vec{K}.\vec{K}' + \omega^2) \vec{K}.\vec{\varepsilon}' i [\vec{\sigma} .$$

$$. (\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) - \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}')] - \frac{F_1(F_1+\lambda F_2)}{32m^4} \vec{K}.\vec{\varepsilon}' \; \vec{K}'.\vec{\varepsilon} \; i \; \vec{\sigma}.(\vec{K}' \times \vec{K}) +$$

$$+ \frac{F_1^2}{16m^2} \vec{K}.\vec{\varepsilon}' \; \vec{K}'.\vec{\varepsilon} \; (4 - \frac{\vec{K}.\vec{K}'}{4m^2}) + \frac{F_1(F_1+\lambda F_2)}{16m^2} (4 - \frac{\vec{K}.\vec{K}'}{4m^2}) [\vec{K}'.\vec{\varepsilon} \; i \; \vec{\sigma} .$$

$$. (\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}') - \vec{K}.\vec{\varepsilon}' \; i \; \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon} \times \vec{K})] - \frac{(F_1+\lambda F_2)^2}{16m^4} \vec{K}.\vec{K}' [\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}').(\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) +$$

$$+ i \; \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}' \times \vec{K}') \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{K})] - \frac{F_1(F_1+\lambda F_2)}{32m^4} \vec{K}'.\vec{\varepsilon} \; \vec{K}.\vec{\varepsilon}' \; i \; \vec{\sigma}.(\vec{K}' \times \vec{K}) +$$

$$+ \frac{F_1(F_1+\lambda F_2)}{32m^4} (\omega'^2 + \vec{K}.\vec{K}') \; \vec{K}'.\vec{\varepsilon} \; i [\vec{\sigma}.(\vec{K}' \times \vec{\varepsilon}') - \vec{\sigma}.(\vec{K} \times \vec{\varepsilon}')] +$$

$$+ \frac{F_1(F_1+\lambda F_2)}{16m^4} \vec{K}.\vec{K}' \; \vec{K}'.\vec{\varepsilon} \; i \; \vec{\sigma}.(\vec{K} \times \vec{\varepsilon}') + \frac{(F_1+\lambda F_2)^2}{32m^4} i \; [\vec{K}' .$$

$$. (\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) \; \vec{K}.\vec{\varepsilon}' \vec{\sigma} . \vec{K}' + (\omega^2 - \vec{K}.\vec{K}') \; \vec{K}'. (\vec{\varepsilon} \times \vec{K}) \vec{\sigma} . \vec{\varepsilon}' +$$

$$+ (\omega^2 \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}' + \vec{K}.\vec{K}' \; \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}' - \vec{\varepsilon}'.\vec{K} \; \vec{\varepsilon}.\vec{K}') \vec{\sigma} . (\vec{K} \times \vec{K}') -$$

$$- \omega^2 \; \vec{\varepsilon}.\vec{K}' \; i \; \vec{\sigma}.(\vec{K} \times \vec{\varepsilon}') + \omega^2 \vec{\varepsilon}. \vec{K}' \; i \; \vec{\sigma} . (\vec{K}' \times \vec{\varepsilon})] +$$

$$+\frac{(F_1+\lambda F_2)}{16m^2}\left(4-\frac{\vec{K}.\vec{K}'}{4m^2}\right)[(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}').(\vec{\varepsilon}\times\vec{K})+i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')\times(\vec{\varepsilon}\times\vec{K})]+$$

$$+\frac{(F_1+\lambda F_2)^2}{16m^4}[-\omega^2\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'+i\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')\times(\vec{\varepsilon}\times\vec{K})]\ X + \text{termo cruzado}. \qquad \text{(AII.4)}$$

A expansão do denominador de energia é a seguinte:

$$\frac{1}{E_1-E_2-\omega}=-\frac{1}{\omega}-\frac{\vec{K}.\vec{K}'}{2m\omega^2}-\frac{(\vec{K}.\vec{K}')^2}{4m^2\omega^3}-\frac{(\vec{K}.\vec{K}')^3}{8m^3\omega^4}+\frac{\vec{K}.\vec{K}'}{8m^3}+\ldots \qquad \text{(AII.5)}$$

Substituimos (AII.5), (AI.8) em (AII.4) e depois explicitamos o termo cruzado. Através das identidades escritas abaixo chegamos na expressão (IV.3).

$$\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K})\times(\vec{\varepsilon}\times\vec{K}')=\vec{K}.\vec{K}'\ \vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{\varepsilon})+\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'\vec{\sigma}.(\vec{K}'\times\vec{K}) \qquad \text{(AII.6)}$$

$$(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}').\vec{K}\ \vec{\sigma}.\vec{\varepsilon}=\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')\times(\vec{\varepsilon}\times\vec{K})-\vec{K}.\vec{K}'\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{\varepsilon})+$$
$$+\vec{\varepsilon}'.\vec{K}\ \vec{\sigma}.(\vec{K}'\times\vec{\varepsilon}) \qquad \text{(AII.7)}$$

$$(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}').\vec{K}\ \vec{\sigma}.\vec{K}=\omega^2\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')+\vec{K}.\vec{K}'\vec{\sigma}.(\vec{K}\times\vec{\varepsilon}')+$$
$$+\vec{K}.\vec{\varepsilon}'\ \vec{\sigma}.(\vec{K}'\times\vec{K}) \qquad \text{(AII.8)}$$

$$\vec{K}.\vec{\varepsilon}'\vec{\sigma}.(\vec{K}'\times\vec{\varepsilon})-\vec{K}'.\vec{\varepsilon}\vec{\sigma}.(\vec{K}\times\vec{\varepsilon}')=\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{K}')\times(\vec{\varepsilon}\times\vec{K})+$$
$$+\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'\vec{\sigma}.(\vec{K}'\times\vec{K})+(\vec{K}.\vec{K}'\vec{\sigma}.(\vec{\varepsilon}'\times\vec{\varepsilon})$$

(AII.9

APÊNDICE III

TRNSFORMAÇÃO DE LORENTZ DOS MOMENTA E DA GAUGE

Seja $\vec{p}'(\vec{p})$ e $\vec{p}_b'(\vec{p}_b)$ os momenta finais(iniciais) do próton nos sistemas laboratório e Breit respectivamente. Se $\underline{v}$ é a velocidade relativa entre os dois sistemas, as transformações de Lorentz entre essas grandezas é dada por

$$\vec{p}_b = \vec{p} + \frac{\vec{v}.\vec{p}}{\vec{v}^2}(\gamma-1)\vec{v} - \gamma\, E(\vec{p})\,\vec{v}\,. \qquad \text{(AIII.1)}$$

$$\vec{p}_b' = \vec{p}' + \frac{\vec{v}.\vec{p}'}{\vec{v}^2}(\gamma-1)\vec{v} - \gamma\, E(\vec{p}')\,\vec{v}\,. \qquad \text{(AIII.2)}$$

onde $\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$. Como $\vec{p}_b' + \vec{p}_b = 0$ e $\vec{p} = 0$ segue que

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}'}{E\vec{p}'+m} \qquad \text{(AIII.3)}$$

Se $\vec{K}'(\vec{K})$ é o momentum final(inicial) do fóton então $\vec{p}' = \vec{K}-\vec{K}'$.

Logo

$$\vec{v} = \frac{\vec{K}-\vec{K}'}{E(K-K')+m}\,. \qquad \text{(AIII.4)}$$

Usando (AIII.4) escrevemos as transformações para o momentum e energia do fóton.

$$\vec{K}_b = \vec{K} + \frac{(\vec{K}-\vec{K}').\vec{K}}{|\vec{K}-\vec{K}'|^2}(\gamma-1)(\vec{K}-\vec{K}') - \frac{\gamma(\vec{K}-\vec{K}')\omega}{E(K-K')+m} \qquad \text{(AIII.5)}$$

$$\omega_b = \gamma\left(\omega - \frac{(\vec{K}-\vec{K}').\vec{K}}{E(K-K')+m}\right) \qquad \text{(AIII.6)}$$

e transformações análogas para $\vec{K}'_b$ e ω'_b

A gauge transversal no sistema laboratório é expressa da seguinte forma

$$\vec{K} \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{K}' \cdot \vec{\varepsilon}' = 0 \,. \qquad \text{(AIII.7)}$$

Num sistema de referência qualquer a relação covariante entre o momentum k'_μ e a polarização ε'_μ é

$$K'_\mu \, \varepsilon_\mu = 0 \,. \qquad \text{(A III. 8)}$$

Dai concluímos que a forma mais geral para a polarização é

$$\varepsilon'_\mu \rightarrow \varepsilon'_\mu + f \frac{k'_\mu}{m} \qquad \text{(A III. 9)}$$

onde f é uma função escolar de $w, \vec{k}$, w' e $\vec{k}'$. Para que (A III. 9) se reduza à gauge transversal $\vec{k}'.\vec{\varepsilon}' = 0$ é necessário que

$$\varepsilon'_o + f \frac{k'_o}{m} = 0 \,, \quad (k'_o = w') \,. \qquad \text{(A III. 10)}$$

A expressão acima fornece o valor de f. No caso do sistema Breit temos o seguinte resultado para f:

$$f = \frac{-(\varepsilon_b)_o}{w'_b} = \frac{\gamma(\varepsilon'_o - \vec{v}.\vec{\varepsilon}')}{\gamma(w' - \vec{v}.\vec{k}')} \qquad \text{(A III. 11)}$$

Em (AIII.11) $\vec{v}$ é a velocidade relativa dos sistemas laboratório e Breit e $\vec{K}'$ é o momentum do fóton final no sistema laboratório. Neste último $\vec{p} = 0$ e $\vec{p}' = \vec{K} - \vec{K}'$, logo

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}'}{E(\vec{p}')+m} = \frac{\vec{K}-\vec{K}'}{E(\vec{K}-\vec{K}')+m} \qquad \text{(AIII.12)}$$

Como $\varepsilon'_0 = 0$, de (AIII. 11) e (AIII. 12) segue

$$f = \frac{\vec{K} \cdot \vec{\varepsilon}'}{\omega' - \frac{(\vec{K}-\vec{K}') \cdot \vec{K}'}{E(\vec{K}-\vec{K}')+m}} \times \frac{1}{E(\vec{K}-\vec{K}')+m} \quad . \qquad \text{(AIII.13)}$$

Teremos, portanto

$$\vec{\varepsilon}'_b = \vec{\varepsilon}' + \frac{\vec{K}.\vec{\varepsilon}'(\vec{K}-\vec{K}')(\gamma-1)}{|\vec{K}-\vec{K}|^2} + \frac{\vec{K} \cdot \vec{\varepsilon}'}{\omega'(m + E(\vec{K}-\vec{K}') - \vec{K} \cdot \vec{K}' + \omega'^2}$$

$$[\vec{K}' + \frac{\vec{K}.\vec{K}' - \omega'^2}{|\vec{K}-\vec{K}'|^2}(\vec{K}-\vec{K}')(\gamma-1) - \gamma \frac{\omega'(\vec{K}-\vec{K}')}{E(\vec{K}-\vec{K}')+m}] \ . \qquad \text{(AIII.14)}$$

Consideremos agora a transformação dos spinores. Seja $X'_b(X_b)$ e $X'(X)$ os spinores finais(iniciais) no sistema breit e laboratório respectivamente. Se $\underline{v}$ é a velocidade relativa dos dois sistemas e $\vec{p}$ é o momentum inicial da partícula de spin $\vec{s}$ a relação de transformação entre os spinores iniciais é dada por [15].

$$X_b = e^{-i(\vec{p} \times \vec{v}).\vec{s}} X \ . \qquad \text{(AIII.15)}$$

Para os spinores finais basta trocar $\vec{p}$ por $\vec{p}'$ que é o momentum final da partícula. $\vec{p}$ é zero no sistema laboratório, daí $X_b = X$ e como $\vec{p}'$ e paralelo a $\vec{v}$ segue que $X'_b = X'$.

APÊNDICE IV

A EXPRESSÃO DA SECÇÃO DE CHOQUE

Consideremos a transição de um sistema no estado i para o estado f. A probabilidade de transição por unidade de tempo (w) de i para f é proporcional ao quadrado da matriz S_{fi}, que descreve o processo. A relação é a seguinte:

$$W = \lim_{T\to\infty} \frac{S_{fi}}{T} . \qquad \text{(AIV. 1)}$$

No espalhamento Compton o próton e o fóton iniciais possuem momentam $P = (\vec{P}, iE\vec{p})$ e $k = (\vec{k}, iw)$ respectivamente. No estado final os momenta correspondentes são $P' = (\vec{P}', iE\vec{p}')$ e $\vec{k}' = (k', iw')$. A relação entre a matriz S_{fi} e nossa amplitude A_{fi} é dada pela expressão abaixo.

$$S_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{i} \frac{1}{\sqrt{4ww'}\, V^2} \delta(\Delta P\mu + \Delta k\mu)\, A_{fi} , \qquad \text{(AIV.2)}$$

onde o termo que aparece antes da delta é um fator de normalização dos estados do fóton.

A probabilidade w também é proporcional ao número de estados finais do próton e do fóton. Multiplicando w pelo número de estados finais das partículas e dividindo o resultado pela corrente de fótons incidentes C/V, obtemos a secção de choque diferencial $d\sigma$.

$$d\sigma = \lim_{T\to\infty} \frac{|S_{fi}|^2}{T} \frac{Vd\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{Vdk'}{(2\pi)^3} \frac{V}{C} . \qquad \text{(A IV.3)}$$

Fica implícita a soma sobre os momenta finais P' e k'.

Substituimos (IV.2) em (IV.3) e obtemos

$$d\sigma = \lim_{T\to\infty} \frac{(2\pi)^2}{4ww'VC} \frac{\delta(\Delta P\mu + \Delta k\mu)^2}{T} d\vec{p}'\, d\vec{k}'\, |A_{fi}|^2 . \qquad (A\ IV.4)$$

O quadrado da função δ é calculado através do processo descrito abaixo.

$$\delta(\Delta P) = \frac{1}{VT} \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i\Delta P.x} d^4x \ , \ V\to\infty \text{ e } T\to\infty \qquad (AIV.5)$$

Se $\Delta P = 0$, então $\delta(\Delta P = 0) = VT/(2\pi)^4$. Logo

$$\delta(\Delta P\mu + \Delta k\mu)^2 = \delta(0)\delta(\Delta P\mu + \Delta k\mu) = \frac{VT}{(2\pi)^4} \delta(\Delta P\mu + \Delta k\mu) \qquad (AIV.\ 6)$$

Substituindo (IV. 6) em (IV. 4), resulta

$$d\sigma = \frac{\delta(\Delta P\mu + \Delta k\mu)}{4ww'(2\pi)^2} d\vec{p}'\, d\vec{k}'\, |A_{fi}|^2 = \frac{\delta(\vec{p}'+\vec{k}' - \vec{p}-\vec{k})\, \delta(Ep' + w' - Ep - w)}{4ww'(2\pi)^2}$$

$$d\vec{p}'\, d\vec{k}'\, |A_{fi}|^2 . \qquad (A\ IV.7)$$

Escrevemos $d\vec{k}'$ em termos do ângulo sólido $d\Omega$ e integramos sobre $\vec{p}'$. Extraindo a carga eletrônica $\underline{e}$ de A_{fi} segue

$$d\sigma = \frac{e^4 \left|A_{fi}\right|^2}{4ww'(2\pi)^2} w'^2 dw' d\Omega \; \delta(E_f - E_i) \qquad \text{(A IV. 8)}$$

onde $E_f = Ep' + w'$ e $E_i = Ep + w = m + w$, para $p = 0$.

Mudando a variável de integração dw' para dE_f temos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{16\pi^2} \frac{w'}{w} \left|A_{fi}\right|^2 \frac{dw'}{dE_f} dE_f \; \delta(E_f - E_i) \; . \qquad \text{(A IV. 9)}$$

Em seguida integramos sobre E_f e calculamos a derivada indicada em (IV. 9)

$$\frac{dE_f}{dw'} = \frac{d}{dw'} (w' + w'^2 - 2ww'\cos\theta + m^2)^{1/2} = \frac{m + w(1-\cos\theta)}{E\vec{p}'}$$

e através da relação de Compton $w(1-\cos\theta) = m(w-w')/w'$ obtemos

$$\frac{dE_f}{dw'} = \frac{mw}{E\vec{p}'w'} \; . \qquad \text{(A IV. 10)}$$

O resultado acima, substituido em (A IV. 9) dá

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = e^4 \frac{E(\vec{p}')}{m} \frac{w'^2}{w^2} \left|A_{fi}\right|^2 \qquad \text{(A IV. 11)}$$

onde chamamos de $\underline{e}$ o termo $e/\sqrt{4\pi}$ que é a carga eletrônica no sistema ganssiano.

APÊNDICE V

SOMA SOBRE AS POLARIZAÇÕES DO FÓTON

O módulo quadrado da amplitude é dada pela expressão (V.10)

$$A^{+}A = a^{*}a + \vec{b}^{*}.\vec{b} + i(a^{*}bz - ab^{*}z) + i\,(b^{*}xby - bxb^{*}y)\,. \qquad (AV\,.\,1)$$

As quantidades a e $\vec{b}$ contidos na expressão (IV. 9) são explicitamente.

$$a = -\frac{\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'}{m} + ww\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'\left[\frac{C_1}{e^2} + N_1\right] + (\vec{\varepsilon}' \times \vec{k}').(\vec{\varepsilon} \times \vec{k})\left[\frac{C_2}{e^2} + N_2\right] \qquad (AV\,.\,2)$$

$$\vec{b} = \frac{2\mu-1}{4m^2}(w + w')(\vec{\varepsilon}' \times \vec{\varepsilon}) - \frac{\mu^2}{4m^2}\left[\frac{1}{w} + \frac{1}{w'}\right](\vec{\varepsilon}' \times \vec{k}') \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{k}) +$$

$$+ \frac{\mu}{2m^2}\left[\frac{\vec{\varepsilon}'.\vec{k}}{w}\,\vec{\varepsilon} \times \vec{k} - \frac{\vec{\varepsilon}.\vec{k}'}{w'}\,\vec{\varepsilon}' \times \vec{k}'\right] - \frac{\mu-1}{4m^3}\left[\vec{\varepsilon}.\vec{k}'\,\vec{\varepsilon}' \times \vec{k} + \vec{\varepsilon}'.\vec{k}\,\vec{\varepsilon} \times \vec{k}'\right]$$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)}{4m^3}\left[\frac{w}{w'}\,\vec{\varepsilon}'.\vec{k}\,\vec{\varepsilon} \times \vec{k} + \frac{w'}{w}\,\vec{\varepsilon}.\vec{k}'\,\vec{\varepsilon}' \times \vec{k}'\right] + (\vec{\varepsilon}' \times \vec{k}') \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{k})(w+w')\left[\frac{C_4+N_4}{e^2}\right]$$

$$+ (\vec{\varepsilon}' \times \vec{\varepsilon})(w+w')ww'\left[\frac{C_5}{e^2} - \frac{C_6}{e^2}\cos\theta + N_5\right] + \left[\vec{\varepsilon}.\vec{k}'\,\vec{\varepsilon}' \times \vec{k}' - \vec{\varepsilon}'\vec{k}\,\vec{\varepsilon} \times \vec{k}\right](w'+w)\left[\frac{C_3}{e^2} + N_3\right]$$

$$+ \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'\,\vec{k}' \times \vec{k}\,(w + w')\,\frac{C_6}{e^2} \qquad (A\,V\,.\,3)$$

Os N_i , $i = 1,2 .. 5$ contidos em a e $\vec{b}$ são funções conhecidas em termos da massa carga e momento magnético do alvo.

Tomamos $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$ e $\hat{k}$ um sistema ortonormal. Com isto, temos

$$\vec{\varepsilon}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\varepsilon}_1 + i\vec{\varepsilon}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1,i,0) \qquad (A\ V\ .4)$$

$$\hat{k}' = (\mathrm{Sen}\theta\ \mathrm{Cos}\ \emptyset\ ,\ \mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\ \emptyset\ ,\ \cos\theta) \qquad (A\ V\ .5)$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{k}$ e $\vec{k}'$ e $\emptyset$ é o angulo entre $\vec{\varepsilon}_1$ e a projeção de $\hat{k}'$ no plano $\varepsilon_1\ \varepsilon_2$.

Consideremos primeiramente $a^*a + \vec{b}^*.\vec{b}$. O primeiro termo deste será calculado explicitamente:

$$\vec{\varepsilon}_o\vec{\varepsilon}'\ \vec{\varepsilon}^*_o\vec{\varepsilon}' = \varepsilon_i\varepsilon^*_j\varepsilon'_i\varepsilon'_j = \varepsilon_i\varepsilon^*_j \times (\delta_{ij} - \hat{k}'_i\hat{k}'_j)$$

$$= \vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}^* - \hat{k}'.\vec{\varepsilon}\ \hat{k}'.\vec{\varepsilon} = 1 - \frac{\mathrm{Sen}^2\theta}{2} = \frac{1+\cos^2\theta}{2} . \qquad (A\ V\ .6)$$

Os demais termos de $a^*a + \vec{b}^*.\vec{b}$ escrevemos abaixo:

$$- \left[\frac{C_1}{me^2} + N_1\right] ww'(1+\cos^2\theta) - \left[\frac{C_2}{me^2} + \frac{N_2}{m}\right] 2ww'\cos\theta - \frac{\mu^2(2\mu-1)(w+w)^2\cos\theta}{8m^4}$$

$$- \frac{(2\mu-1)\mu(w+w')^2(1-\cos^2\theta)}{4m^4} - \frac{(2\mu-1)(\mu-1)(w+w')ww'\mathrm{Cos}\theta(1-\mathrm{Cos}^2\theta)}{8m^5} +$$

$$+ \frac{(2\mu-1)^2\ (w+w')^2\ (3-\cos^2\theta)}{32m^4} + \frac{\mu^4(w+w')^2(3-\cos^2\theta)}{32m^4} + \frac{\mu^2}{4m^4}\ (w^2+w'^2+ww')(1-\cos^2\theta)$$

$$(A\ V\ .7)$$

Consideremos agora o termo $i(a^*bz - ab^*z)$. Faremos o cálculo explícito da primeira diferença contida neste termo

$$i\left[\frac{-(2\mu-1)}{4m^3}(w+w')\,\vec{\varepsilon}^*.\vec{\varepsilon}'(\vec{\varepsilon}'x\vec{\varepsilon})_z - \text{complexo conjugado}\right]. \qquad (A\ V\ .8)$$

Deste último destacamos

$$\varepsilon^*.\varepsilon'(\varepsilon' \times \varepsilon)_z = \varepsilon^*_i\varepsilon'_i\ \varepsilon_{mnz}\,\varepsilon'_m\varepsilon_n = \varepsilon_{mnz}\,\varepsilon^*_i\varepsilon_n(\delta_{im} - \hat{k}'_i\hat{k}'_m)$$

$$= (\varepsilon^*x\varepsilon)_z - \hat{k}'.\varepsilon(\hat{k}' \times \varepsilon)_z = i\frac{-1}{2}(\mathrm{Sen}\theta\mathrm{Cos}\emptyset - i\mathrm{Sen}\theta\mathrm{Cos}\emptyset)(i\mathrm{Sen}\theta\mathrm{Cos}\emptyset - \mathrm{Sen}\theta\mathrm{Sen}\emptyset)$$

$$= \frac{i}{2}(1+\mathrm{Cos}^2\theta).$$

Logo (A VI. 8) é escrito como

$$\frac{(2\mu-1)}{4m^3}(w+w')(1 + \mathrm{Cos}^2\theta). \qquad (A\ V\ .9)$$

Escrevemos abaixo os demais termos de $i(a^*b_z - ab^*_z)$.

$$-\frac{\mu^2}{2m^3}(w+w')\mathrm{Cos}\theta - \frac{\mu}{2m^3}w'(1-\mathrm{Cos}^2\theta) - \frac{\mu-1}{4m^4}\,ww'\mathrm{Cos}\theta\,(1-\mathrm{Cos}^2\theta) + \frac{\mu(\mu-1)}{4m^4}\frac{w'^3}{w}(1-\mathrm{Cos}^2\theta)$$

$$+ 2\left[\frac{C_4}{me^2} + \frac{N_4}{m}\right]ww'(w+w')\mathrm{Cos}\theta + \left[\frac{C_5 - C_6\,\mathrm{Cos}\theta}{me^2} + \frac{N_5}{m}\right]ww'(w+w')(1+\mathrm{Cos}^2\theta)$$

$$+ \frac{C_3}{me^2} + \frac{N_3}{m}\,w'^2(w+w')(1-\mathrm{Cos}^2\theta) - \left[\frac{C_1}{e^2} + N_1\right]\frac{2\mu - 1}{4m^2}\,ww'(w+w')(1+\mathrm{Cos}^2\theta) \pm$$

$$\frac{\mu^2}{2m^2}\left[\frac{C_1}{e^2} + N_1\right]ww'(w+w')\mathrm{Cos}\theta + \frac{\mu}{2m^2}\left[\frac{C_1}{e^2} + N_1\right]w'^2w\,(1 - \cos^2\theta) -$$

$$- \left[\frac{C_2}{e^2} + N_2\right] \frac{2\mu-1}{2m^2} ww'(w+w') \cos\theta + \left[\frac{C_2}{e^2} + N_2\right] \frac{\mu^2}{4m^2} ww'(w+w')(1 + \cos^2\theta) +$$

$$+ \left[\frac{C_2}{e^2} + N_2\right] \frac{\mu}{2m^2} ww'^2 \cos\theta(1-\cos^2\theta) . \qquad (A\ V\ .\ 10)$$

O último termo de A^+A escrito em (A VI. 1) é $i(b^*x\ by - bx\ b^*y)$. Faremos o cálculo explícito da primeira diferença contida neste termo, que se escreve como:

$$i \left[\frac{(2\mu-1)^2}{16m^4} (w+w')^2 (\vec{\varepsilon} \times \vec{\varepsilon}^*)_x \ (\vec{\varepsilon}' \times \vec{\varepsilon})y - \text{complexo conjugado} \right] . \qquad (A\ V\ 11)$$

Do termo acima destacamos

$$(\vec{\varepsilon} \times \vec{\varepsilon}^*)_x \ (\vec{\varepsilon}' \times \vec{\varepsilon})_y = \varepsilon_{rsy}\ \varepsilon_{mnx}\ \varepsilon'_m\ \varepsilon^*_n\ \varepsilon'_r\ \varepsilon_s$$

$$= \varepsilon_{rsy}\ \varepsilon_{mnx}\ \varepsilon^*_n \varepsilon_s\ (\delta_{mr} - \hat{k}'_m \hat{k}'_r) = \varepsilon^*_y \varepsilon_x + \cos^2\theta\ \varepsilon^*_y \varepsilon_x = \frac{-i}{2}(1+\cos^2\theta). \qquad (A\ V\ .\ 12)$$

Logo (A VI. 11) se escreve como

$$\frac{(2\mu-1)^2}{16m^4} (w + w')^2 (1 + \cos^2\theta) . \qquad (A\ V\ .13)$$

Os demais termos de $i(b^*xby - bxb^*y)$ são:

$$\frac{(2\mu-1)\mu(w+w')}{4m^4} \left[\frac{w+w'}{2}\right] (1-\cos^2\theta) - \frac{(2\mu-1)(\mu-1)}{16m^5} (w+w')\ ww'\ \cos\theta -$$

$$- \frac{2\mu-1}{8m^3} \mu(\mu-1)(w+w') \left[\frac{w'^3}{2w} - \frac{w^3}{w'} \right] (1-\cos^2\theta) - \frac{\mu^4}{16m^4} (w+w')^2(1-\cos^2\theta) +$$

$$+ \frac{\mu^3}{8m^4} (w+w')\, w'\cos\theta\, (1 - \cos^2\theta)$$

$$- \frac{\mu^3(\mu-1)}{16m^5} \left[\frac{1}{w} + \frac{1}{w'} \right] w^4 \cos\theta (1-\cos^2\theta) \frac{\mu^2}{4m^4} (w^2+ww')(1-\cos^2\theta) +$$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)}{8m^5} w^2 w' \cos\theta (1-\cos^2\theta) + (w'^2 w - w^2 w') \cos\theta\, (1-\cos^2\theta) -$$

$$- \frac{\mu^2(\mu-1)}{4m^5} \left[\frac{w^4}{w'} (1-\cos^2\theta) + \left(\frac{w^3}{2} - \frac{w'^3}{2} \right) (1-\cos^2\theta) \right] + \frac{\mu^2(\mu-1)}{16m^5} (w+w') w w' (1-\cos^2\theta).$$

(A V , 14)

B I B L I O G R A F I A

1. W. Thirring , Phil. Mag. 41 , 1193 (1950)
2. F. E. Low , Phys. Rev. , 96 , 1428 (1954)
3. R. Capps , Phys. Rev. , 106 , 1031 (1957)
4. A. M. Baldin, a) Paper at Conference on Elementary Particles, Padua - Venice , 1957
   b) Nucl. Phys., 18 , 310 (1960)
5. V. Singh , Phys. Rev. Letters, 19 , 730 (1967)
6. A. Klein, Phys. Rev. , 99 , 998 (1955)
7. V. I. Gol'dansky et al, Sov. Phys. JETP, 11, 1223 (1960)
8. V. S. Barashenkov and H. J. Kaiser, Fortschr. Phys. 10, 33 (1962)
9. A. Pais, Nuovo Cimento, 53A , 433 (1968)
10. G. F. Leal Ferreira and S. Ragusa, Nuovo Cimento 65A, 607 (1969)
11. L. L. Foldy, Phys. Rev. 87 , 688 (1952)
12. G. Salzman, Phys. Rev. 99 , 973 (1955)
13. V. A. Petrun'kin, Sov. Phys. JETP, 13 , 808 (1961)
14. V. K. Fedyanin, Sov. Phys. JETP, 15 , 720 (1962)
15. S. Gasiorowcz, Elementary Particle Physics, John Wiley & Sons,
16. J. L. Powell, Phys. Rev. 75 , 32 (1949)
17. V. Singh, Phys. Rev., 165 , 165 (1968)