UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA INTERAGINDO COM UM CAMPO ESCALAR

NELSON KATSUYUKI SATO

Dissertação apresentada ao Instituto de Física e Química de São Carlos, USP, para obtenção do título de Mestre em Física Básica.

Orientador: Prof.Dr. Silvestre Ragusa

[redacted]

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

São Carlos

- 1984 -

BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS - USP
FÍSICA

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE ____

NELSON KATSUYUKI SATO

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 05 DE JULHO DE 1984.

COMISSÃO JULGADORA:

Dr. SILVESTRE RAGUSA - Orientador

Dr. VALÉRIO KURAK

Dr. ABRAHAM H.ZIMERMAN

BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS - USP
FÍSICA

Aos meus pais,

à Betty e

à Pá

Agradecimentos

Ao professor Dr. Silvestre Ragusa que me orientou neste trabalho, por seus ensinamentos e dedicação.

A todos os professores que contribuiram à minha formação.

Aos amigos Giomal, Marcos, Umbelino , Pedro e outros pelas proveitosas discussões.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

ÍNDICE

RESUMO..... I

ABSTRACT II

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO II - NUCLEON NUM CAMPO ESCALAR..... 3

2.1 - Equação do campo escalar..... 3
2.2 - Equação de movimento do nucleon 4
2.3 - Tensor energia-momentum do campo 8
2.4 - Tensor energia-momentum da partícula em interação com o campo 10

CAPÍTULO III - NUCLEON COM SPIN E DIPOLO NO CAMPO ESCALAR..... 13

3.1 - Obtenção da equação de movimento da carga nucleônica pelo método dos momentos de Papapetrou 13
3.2 - Extensão para o caso de um nucleon com spin e dipolo nucleônico..... 18

CAPÍTULO IV - BALANÇO DE ENERGIA E VETOR DE POYNTING MESÔNICO..... 28

CAPÍTULO V - EMISSÃO DE RADIAÇÃO MESÔNICA 30

5.1 - Potenciais de Lienard-Wiechert mesônico..... 30
5.2 - Potência de radiação emitida 32

CAPÍTULO VI - FORÇA DE REAÇÃO DE RADIAÇÃO 34

6.1 - 1º Método - Potência emitida 34
6.2 - 2º Método - Modelo clássico do nucleon 35

CAPÍTULO VII - CONCLUSÃO 41

APÊNDICE I - EQUAÇÃO DO CAMPO ESCALAR E TENSOR ENERGIA-MOMENTUM 43

I.1 - Equação do campo escalar 43

I.2 - Tensor energia-momentum 44

APÊNDICE II - FUNÇÃO DE GREEN RETARDADA 46

APÊNDICE III - OBTENÇÃO DAS RELAÇÕES PARA $\partial\phi/\partial t$ e $\vec{\nabla}\phi$..... 50

BIBLIOGRAFIA 52

RESUMO

As equações de movimento de uma partícula (nucleon) interagindo com um campo escalar (mesônico) são obtidas pelo método dos momentos do tensor energia-momentum, de Papapetrou.

Depois de um estudo detalhado do campo de radiação mesônico estabelecemos a expressão da força de reação de radiação do campo sobre a partícula.

ABSTRACT

The equations of motion of a particle (nucleon) interacting with a escalar (mesonic) field are derived by the energy-momentum tensor moments method of Papapetrou.

After a detailed study of the mesonic radiation field we establish a expression of the reactive radiation force of the field upon the particle.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Neste trabalho consideraremos as equações de movimento de uma partícula, que chamaremos nucleon, interagindo com um campo escalar clássico que denominaremos mesônico. Além da massa e carga nucleônica o nucleon é suposto ter spin e momento de dipolo nucleônico. Um tal sistema foi já estudado por Harish Chandra[1] que determinou as equações de movimento pelo método que Dirac[2] elaborou e aplicou no caso do eletron, calculando o fluxo do tensor energia-momentum e do momentum angular através de um tubo fino contendo a linha de universo da partícula. Como no caso de Dirac, um argumento de simplicidade é utilizado para justificar as contribuições das bases do tubo.

Na primeira parte de nosso trabalho atacamos a questão da determinação das equações de movimento pelo método dos momentos do tensor energia-momentum. Este método foi introduzido por Fock[3] e elaborado por Papapetrou[4] para descrever o movimento De uma partícula com spin num campo gravitacional. Esse método foi também utilizado recentemente[5] para a obtenção das equações de movimento de uma carga não-abeliana com spin num campo de Yang-Mills. Além de possibilitar a obtenção das equações de movimento de um modo direto e simples, o método dos momentos permite também obter a expressão do tensor energia-momentum e da corrente nucleônica da partícula e também de seus momentos. Esta parte do trabalho está elaborada nos capítulos 2 e 3.

Com o objetivo de incluir efeitos de reação de radiação mesônica nas equações de movimento elaboramos, capítulos 4 e 5, um estudo sistemático do campo de radiação mesônico de há muito conhecido nas suas propriedades gerais[6,7]. Desenvolvemos nosso estudo sistemático paralelamente ao do campo eletromagnético, de Landau-Lifshitz[8]. Do balanço de energia do campo em interação com as partículas obtemos a expressão de fluxo de energia (Vetor de Poynting) mesônico e determinamos em seguida a emissão de radiação por cargas aceleradas.

A terceira e a última parte deste trabalho é devotada à obtenção da força de reação de radiação mesônica do campo sobre a partícula (nos restringimos aqui a um nucleon com ape

nas massa e carga). Essa força é obtida de duas maneiras distintas. A primeira baseia-se na expressão da potência da radiação emitida pela partícula, que pelo princípio da conservação de energia implica numa força reativa sobre a mesma. O segundo método consiste em calcular a força que cada uma das partes de um nucleon extenso exerce sobre dada parte do mesmo, como elaborado por Lorentz[9] no seu modelo clássico do eletron.

CAPÍTULO II

NUCLEON NUM CAMPO ESCALAR

2.1-Equação do Campo Escalar

Nosso objetivo é estudar o movimento de uma partícula, que chamaremos nucleon, interagindo com um campo escalar incluindo a força de reação de radiação, a exemplo do caso do eletron interagindo com o campo eletromagnético. Chamaremos g à carga nucleônica da partícula que interage com o campo escalar. O campo é descrito pela função escalar $\phi(\vec{x}, t)$ satisfazendo, fora da distribuição de carga nucleônica, a equação de onda livre

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi(\vec{x}, t) = 0. \qquad (2.1)$$

Esta equação no caso estático se reduz à equação de Laplace ($\nabla^2 \phi = 0$).

Vejamos agora a equação na presença de matéria nucleônica com densidade ρ. Chamando dg à quantidade de carga nucleônica contida no elemento de volume dV em movimento, temos

$$\rho = \frac{dg}{dV} \quad . \qquad (2.2)$$

No caso particular de uma carga puntiforme g localizada em $\vec{z}(t)$, vale a relação

$$\rho(\vec{x}, t) = g\delta(\vec{x} - \vec{z}(t)) \ . \qquad (2.3)$$

No caso eletromagnético comparece do lado direito de (2.1) o termo $4\pi\rho_e$, onde ρ_e é a densidade de carga elétrica. Lembremos que tanto ρ_e como ϕ_e da eletrodinâmica, são componentes temporais de quadrivetores. No nosso caso ϕ é um escalar e portanto em vez de ρ deverá comparecer a densidade de carga medida no repouso que é um escalar, aliás invariante. Chamaremos essa densidade de $\bar{\rho}$ e a equação do campo $\phi(\vec{x}, t)$ na presença de matéria nucleônica toma a forma abaixo

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi(\vec{x}, t) = -4\pi\bar{\rho}\,. \qquad (2.4)$$

O sinal de menos do lado direito de (2.4) reflete o comportamento atrativo das forças, ao contrário do que ocorre na eletrodinâmica (com as cargas de mesmo nome).

Designado por $d\bar{V}$ o elemento de volume medido no sistema de repouso da carga dg em movimento com velocidade $\vec{v}$ temos, da contração de Lorentz,

$$dV = \sqrt{1 - v^2/c^2}\; d\bar{V}\quad . \qquad (2.5)$$

Como a carga é um invariante, temos a relação

$$\bar{\rho} = \frac{dg}{d\bar{V}} = \rho\sqrt{1 - v^2/c^2}\,. \qquad (2.6)$$

Com isto a (2.4) pode ser escrita sob a forma

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi(\vec{x}, t) = -4\pi\rho(\vec{x}, t)\sqrt{1 - \frac{v^2(x,t)}{c^2}}\,. \qquad (2.7)$$

Nessa equação $\vec{v}(\vec{x}, t)$ é a velocidade do elemento que no instante t está passando pelo ponto $\vec{x}$.

2.2 - Equação de Movimento do Nucleon

A lagrangeana relativística de uma partícula livre

com massa m e velocidade $\vec{v}$ é

$$L_o = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{2.8}$$

Fàcilmente verificamos que a energia e o momentum canônico calculados com esta lagrangeana, reproduzem as conhecidas expressões relativísticas. Temos:

$$\vec{p} = \frac{\partial L_o}{\partial \vec{v}} = \frac{m\ \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{2.9}$$

e

$$\mathcal{E} = \vec{p}\,.\,\vec{v} - L_o = \frac{m\ c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{2.10}$$

As equações de Euler-Lagrange são

$$\frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}}\ . \tag{2.11}$$

Estas equações asseguram que $\vec{p}$ e $\mathcal{E}$ são constantes de movimento.

Para incluir a interação da partícula de carga g com o campo ϕ, adicionaremos ao termo $-mc^2$ em (2.8) o escalar $-g\phi$. Com isto a lagrangeana da partícula em interação com o campo é

$$L = -(mc^2 + g\phi)\ \sqrt{1 - v^2/c^2}\ . \tag{2.12}$$

O momentum canônico fica

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = (m + g\phi/c^2)\ \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ . \tag{2.13}$$

De (2.11) e (2.12) resulta a seguinte equação de movimento para a partícula

$$\frac{d}{dt}\ \frac{m\ \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -\frac{g}{c^2}\ \frac{d}{dt}\ \frac{\phi\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - g\sqrt{1 - v^2/c^2}\ \vec{\nabla}\phi. \tag{2.14}$$

O lado direito desta equação é a força que atua na partícula. Temos

$$\frac{d}{dt}\frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \vec{F} \tag{2.15}$$

onde

$$\vec{F} = -\frac{g}{c^2}\frac{d}{dt}\frac{\phi\,\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - g\sqrt{1-v^2/c^2}\;\vec{\nabla}\phi\,. \tag{2.16}$$

Para baixas velocidades a (2.14) se reduz à

$$m\,\dot{\vec{v}} = -\frac{g}{c^2}\frac{d}{dt}\phi\vec{v} - g\vec{\nabla}\phi\,. \tag{2.17}$$

O lado direito desta equação é o análogo da força de Lorentz.

A potência da força sobre a partícula é $\vec{F}\,.\,\vec{v}$. Da equação de movimento (2.15) temos, após uma derivação por partes, o resultado usual

$$\vec{F}\,.\,\vec{v} = \frac{d}{dt}\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,. \tag{2.18}$$

Esta nada mais é do que a expressão do Teorema das forças vivas. Comparece do lado direito da Equação a derivada temporal do que chamamos energia cinética da partícula.

Usando (2.16) em (2.18) e a relação

$$\vec{v}\,.\,\vec{\nabla}\phi = \frac{d\phi}{dt} - \frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{2.19}$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = -g\frac{d}{dt}\frac{\phi}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + g\sqrt{1-v^2/c^2}\;\frac{\partial\phi}{\partial t}\,. \tag{2.20}$$

Este resultado pode também ser obtido da expressão da energia total da partícula

$$E = \vec{P}.\vec{v} - L \quad . \tag{2.21}$$

Usando (2.12) e (2.13) nesta expressão temos

$$E = \frac{mc^2 + g\phi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad . \tag{2.22}$$

Empregando agora a relação

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} \tag{2.23}$$

segue a (2.20).

As equações de movimento (2.14) e da potência (2.20) podem ser englobadas numa única equação covariante no espaço-tempo. O quadrado do elemento de arco descrito pela partícula é,

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{r}^2 = c^2dt^2(1 - v^2/c^2) \quad . \tag{2.24}$$

Logo

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad . \tag{2.25}$$

Multiplicaremos agora, (2.14) e (2.20) por dt/ds e introduziremos as seguintes quantidades:

$$u^\alpha = (u^0, u^i) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \quad . \tag{2.26}$$

e

$$\partial^\alpha = (\partial^0, \partial^i) = (\frac{\partial}{c\partial t}, -\vec{\nabla}) \tag{2.27}$$

u^α é a quadrivelocidade da partícula.

Deste modo as mencionadas equações podem ser agrupadas na equação

$$\frac{d}{ds}(mc\, u^\alpha) = -g \frac{d}{cds}(\phi u^\alpha) + \frac{g}{c}\, \partial^\alpha \phi \ . \tag{2.28}$$

Do lado esquerdo de (2.28) temos a derivada do que chamamos quadrivetor energia-momentum da partícula e do lado direito temos o quadrivetor força, isto é,

$$mc \frac{du^\alpha}{ds} = F^\alpha \tag{2.29}$$

onde

$$F^\alpha = -\frac{g}{c} \frac{d}{ds}(\phi u^\alpha) + \frac{g}{c}\, \partial^\alpha \phi \ . \tag{2.30}$$

De (2.26) vemos que a quadrivelocidade satisfaz a relação $u^\alpha u_\alpha = 1$ e, portanto $u_\alpha du^\alpha/ds = 0$. De (2.29) concluimos então que o quadrivetor força satisfaz $F^\alpha u_\alpha = 0$. Esta relação é satisfeita por (2.30).

Encontraremos a seguir as leis da conservação para energia e momentum do sistema constituído de partículas nucleônicas e campo.

2.3 - Tensor Energia-momentum do Campo

A equação de Euler-Lagrange para o campo escalar é (vide apêndice I-1)

$$\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \ , \tag{2.31}$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade de lagrangeana e estamos usando a notação

$$\phi^{\alpha} = \partial^{\alpha}\phi \ . \tag{2.32}$$

A densidade de lagrangeana que reproduz (2.1) via (2.31) é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \partial^{\alpha}\phi \ \partial_{\alpha}\phi \ . \tag{2.33}$$

Em analogia com a mecânica a densidade de energia do campo é expresso pela relação

$$\mathcal{H} = \dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \mathcal{L} \ . \tag{2.34}$$

Usando a (2.33) resulta a seguinte expressão para (2.34)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{c^2} + (\vec{\nabla}\phi)^2\right) \ . \tag{2.35}$$

Como $\mathcal{L}$ não depende explicitamente das coordenadas x^{α}, resulta de (2.31) a seguinte equação (vide apêndice I-2)

$$\partial_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.36}$$

onde

$$T^{\alpha\beta} = \phi^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\beta}} - g^{\alpha\beta} \mathcal{L} \tag{2.37}$$

é o tensor energia-momentum do campo. Esta denominação vem do fato de que a componente zero-zero deste tensor coincide com a densidade de energia do campo, isto é, $\mathcal{H} = T^{00}$.

Integrando a (2.36) em todo o espaço e notando que o termo da divergência espacial se anula no infinito temos

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int T^{\alpha 0}\, dV = 0 \quad . \tag{2.38}$$

Daqui concluímos que a integral da $T^{\alpha 0}$ é uma constante de movimento. Para $\alpha = 0$ tal constante é a energia do campo e para $\alpha = i$ a constante é identificada com o momentum do campo. O quadrivetor momentum-energia do campo é

$$P^{\alpha} = \frac{1}{c}\int T^{\alpha 0}\, dV \quad . \tag{2.39}$$

De acordo com (2.33) e (2.37) o Tensor energia - momentum para o campo escalar fica

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\{\phi^{\alpha}\phi^{\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\phi^{\lambda}\phi_{\lambda}\} \quad . \tag{2.40}$$

2.4 - Tensor Energia-momentum da Partícula em Interação com o Campo

Vamos chamar σ à densidade de massa, $\sigma = dm/dV$. A densidade de massa medida no repouso indicaremos por $\bar{\sigma}$. O quadrivetor energia-momentum da partícula é $p^{\alpha} = mcu^{\alpha}$ e a sua densidade é $\sigma c u^{\alpha} = \bar{\sigma} c u^{\alpha} u^{0}$. Esta quantidade é a componente $\alpha, 0$ do tensor

$$\frac{\overset{\circ}{t}{}^{\alpha\beta}}{c} = \bar{\sigma}\; c\; u^{\alpha} u^{\beta} \tag{2.41}$$

e $\overset{\circ}{t}{}^{\alpha\beta}$ é chamado tensor energia-momentum da partícula[8].

Queremos mostrar que o momentum e a energia do campo mais da partícula em interação com ele são conservados. Da 4 - divergência de (2.40) resulta

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\{(\partial_\beta\phi^\alpha)\phi^\beta + \phi^\alpha\partial_\beta\phi^\beta - (\partial^\alpha\phi_\lambda)\phi^\lambda\} = \frac{1}{4\pi}\phi^\alpha\,\partial_\beta\partial^\beta\phi . \quad (2.42)$$

Na ausência de cargas temos a (2.1), isto é, $\partial_\beta\partial^\beta\phi = 0$ o que nos leva ao resultado (2.36). Na presença de cargas o campo satisfaz à equação (2.4), isto é, $\partial_\beta\partial^\beta\phi = -4\pi\bar{\rho}$. Portanto a (2.42) fica

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = -\bar{\rho}\phi^\alpha = -\bar{\rho}\,\partial^\alpha\phi . \quad (2.43)$$

Antes de calcular a 4-divergência de $\overset{\circ}{t}{}^{\alpha\beta}$ notemos que $\bar{\sigma}c\mu^\beta$ é o quadrivetor densidade de corrente de massas e portanto $\partial_\beta(\bar{\sigma}c\mu^\beta) = 0$ é a equação de continuidade de massas. Temos então

$$\partial_\beta \overset{o}{t}{}^{\alpha\beta} = cu^\alpha\,\partial_\beta(\bar{\sigma}cu^\beta) + \bar{\sigma}c^2u^\beta\partial_\beta u^\alpha = \bar{\sigma}c^2u^\beta\partial_\beta u^\alpha . \quad (2.44)$$

Lembrando que

$$u^\beta\partial_\beta u^\alpha = \frac{dx^\beta}{ds}\,\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{d}{ds}u^\alpha \quad (2.45)$$

e empregando a equação de movimento (2.28), segue que

$$\partial_\beta \overset{o}{t}{}^{\alpha\beta} = g\,\frac{\bar{\sigma}}{m}\{-\frac{d}{ds}(\phi u^\alpha) + \partial^\alpha\phi\} . \quad (2.46)$$

Temos a relação $\bar{\rho}/\bar{\sigma} = g/m$ tanto no caso puntiforme como no caso de uma distribuição contínua de carga e massa proporcionais. Nessas condições temos, usando a (2.45),

$$\partial_\beta \overset{o}{t}{}^{\alpha\beta} = -\bar{\rho}u^\beta\partial_\beta(\phi u^\alpha) + \bar{\rho}\partial^\alpha\phi . \quad (2.47)$$

Efetuando uma derivação por partes no primeiro termo do último membro e usando a equação de continuidade de cargas $\partial_\beta(\bar{\rho}u^\beta) = 0$,

tem-se o resultado

$$\partial_\beta \overset{o}{t}{}^{\alpha\beta} = -\partial_\beta(\bar{\rho}\phi u^\alpha u^\beta) + \bar{\rho}\partial^\alpha\phi \ . \tag{2.48}$$

Esta relação pode ser escrita sob a forma

$$\partial_\beta t^{\alpha\beta} = \bar{\rho}\ \partial^\alpha\ \phi \tag{2.49}$$

onde

$$\begin{aligned} t^{\alpha\beta} &= \overset{o}{t}{}^{\alpha\beta} + \bar{\rho}\,\phi\, u^\alpha u^\beta \\ &= (\bar{\sigma}c^2 + \bar{\rho}\phi)\ u^\alpha u^\beta \end{aligned} \tag{2.50}$$

é o tensor energia-momentum da partícula em interação com o campo.

Comparando (2.49) com(2.43) obtemos a relação

$$\partial_\beta(T^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta}) = 0 \ . \tag{2.51}$$

Integrando em todo o espaço temos

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int (T^{\alpha o} + t^{\alpha o})\ dV = 0 \ . \tag{2.52}$$

Esta expressão mostra que a energia e o momentum do campo mais da partícula em interação com ele são conservados.

No próximo capítulo vamos introduzir o método de Fock-Papapetrou[3,4] para a equação de movimento da carga, o qual, será depois utilizado para obtermos a equação de movimento da partícula com spin e momento de dipolo.

CAPÍTULO III

NUCLEON COM SPIN E DIPOLO NO CAMPO ESCALAR

3.1 - Obtenção da Equação de Movimento da Carga Nucleônica pelo Método dos Momentos de Fock-Papapetrou[3,4]

O método introduzido por Fock-Papapetrou[3,4] consiste em obter a equação de movimento de uma partícula através dos momentos do tensor energia-momentum da mesma. Aplicaremos este método ao nosso caso. É óbvio que partindo da expressão de $t^{\alpha\beta}$, equação (2.50), a integração de (2.49) no volume do sistema conduz à equação de movimento (2.28) que afinal foi o ponto de partida.

Como ponto de partida postularemos agora a conservação de energia e momentum total do sistema expresso na (2.52), com a equação de divergência-associada (2.51). O tensor energia-momentum da matéria, $t^{\alpha\beta}$, é agora suposto simétrico mas desconhecido.

Em seguida mostraremos que partindo deste postulado de conservação obtêm-se a equação de movimento do sistema e também a forma do seu tensor energia-momentum.

Das equações de campo resulta a (2.43) que substituída na equação de divergência (2.51) nos dá a (2.49), isto é

$$\partial_\beta t^{\alpha\beta} = \bar{\rho}\ \partial^\alpha \phi\ . \tag{3.1}$$

Consideramos o sistema como sendo extenso com volume V. No fim dos cálculos tomaremos o limite de V tendendo a zero que caracterizará uma partícula.

OBS: Neste capítulo estamos usando o sistema de unidades em que $c \equiv 1$.

Integrando a (3.1) no volume V do sistema obtemos

$$\frac{d}{dt} \int t^{\alpha o}\, dV + \int \frac{\partial}{\partial x^i}\, t^{\alpha i}\, dV = \int \bar{\rho}\, \phi^\alpha\, dV\ . \tag{3.2}$$

Pelo teorema de Gauss o segundo termo no primeiro membro pode ser convertido numa integral de superfície onde se anula $t^{\alpha\beta}$. Deste modo obtemos

$$\frac{d}{dt}\int t^{\alpha o}\, dV = \int \bar{\rho}\, \phi^{\alpha}\, dV. \tag{3.3}$$

Ao lado da equação de divergência (3.1) vamos considerar a que resulta para $x^{\beta}t^{\alpha\lambda}$. Obtemos facilmente que

$$\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}(x^{\beta}t^{\alpha\lambda}) = t^{\alpha\beta} + x^{\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\, t^{\alpha\lambda} = t^{\alpha\beta} + x^{\beta}\,\bar{\rho}\,\phi^{\alpha}. \tag{3.4}$$

Integrando esta expressão no volume do sistema e notando que o termo da divergência espacial se anula obtemos a equação

$$\frac{d}{dt}\int x^{\beta}t^{\alpha o}\, dV = \int t^{\alpha\beta}dV + \int x^{\beta}\,\bar{\rho}\,\phi^{\alpha}\, dV. \tag{3.5}$$

Vamos escolher um ponto de referência do sistema X^{β}, que pode ser o seu centro de massa como será discutido adiante. Chamando δx^{β} a distÂncia do ponto x^{β} a X^{β} temos

$$x^{\beta} = X^{\beta} + \delta x^{\beta}. \tag{3.6}$$

Essa escolha está sendo feita a tempos iguais, isto é $X^{o} = x^{o}$ ou $\delta x^{o} = 0$. No fim dos cálculos tomaremos o limite δx^{β} tendendo a zero.

Substituindo (3.6) em (3.5) e usando a equação (3.3) tem-se

$$\frac{d\,X^{\beta}}{dt}\int t^{\alpha o}\, dV + \frac{d}{dt}\int \delta\, x^{\beta}\, t^{\alpha o}\, dV = \int t^{\alpha\beta}dV + \int \bar{\rho}\,\delta\, x^{\beta}\,\phi^{\alpha}\, dV. \tag{3.7}$$

Vamos agora fazer a expansão de $\phi^{\alpha}(x)$ em torno de X, isto é

$$\phi^{\alpha}(x) = \phi^{\alpha}(X) + \phi^{\alpha\beta}(X)\ \delta x_{\beta} + \ldots \tag{3.8}$$

onde $\phi^{\alpha\beta} = \partial^{\alpha}\partial^{\beta}\phi$.

Na ordem zero as equações (3.3) e (3.7) ficam respectivamente:

$$\frac{d}{dt}\int t^{\alpha o}\, dV = \phi^{\alpha}\int \bar{\rho}\ dV \tag{3.9}$$

$$\int t^{\alpha\beta}\, dV = \frac{d\ X^{\beta}}{dt}\int t^{\alpha o}\, dV\ . \tag{3.10}$$

Na equação (3.9) já se pode reconhecer a equação de movimento da partícula. A (3.10) permitirá, como veremos, obter a expressão de $t^{\alpha\beta}$. Antes de continuarmos vamos introduzir a quadrivelocidade do ponto X(s), onde s é o elemento de arco. Temos

$$\mathbf{u}^{\beta} = \frac{d\ X^{\beta}}{ds}\ . \tag{3.11}$$

Notemos que $\mathbf{u}^{o} = dt/ds$ e que pela (2.25) e (2.6) temos $\bar{\rho} = \rho/\mathbf{u}^{o}$. Vamos também introduzir a notação:

$$\int t^{\alpha\beta} dV = \frac{M^{\alpha\beta}}{\mathbf{u}^{o}} \tag{3.12}$$

e

$$\int \rho\, dV = g\ . \tag{3.13}$$

Com isto as equações (3.9) e (3.10) são reescritas sob a forma:

$$\frac{d}{ds}\ \frac{M^{\alpha o}}{u^{o}} = g\,\phi^{\alpha} \tag{3.14}$$

$$M^{\alpha\beta} = M^{\alpha o}\ \frac{u^{\beta}}{u^{o}}\ . \tag{3.15}$$

Vemos que a equação (3.15) permite obter $M^{\alpha o}$ em termos de u^{α}. Colocando $\alpha = 0$ em (3.15) e usando a simetria de $M^{\alpha\beta}$ temos

$$M^{\beta o} = \frac{M^{oo}}{uo}\ u^{\beta}\ . \tag{3.16}$$

Substituindo (3.16) em (3.14) obtemos

$$\frac{d}{ds}\ \left(\frac{M^{oo}}{(u^{o})^{2}}\ u^{\alpha}\right) = g\,\phi^{\alpha}\ . \tag{3.17}$$

Desenvolvendo o primeiro membro temos

$$\left(\frac{d}{ds}\ \frac{M^{oo}}{(u^{o})^{2}}\right)\ u^{\alpha} + \frac{M^{oo}}{(u^{o})^{2}}\ \frac{d}{ds}\ u^{\alpha} = g\,\phi^{\alpha}\ . \tag{3.18}$$

Temos que $u^{\alpha}u_{\alpha} = 1$ e, portanto, $u_{\alpha}\,du^{\alpha}/ds = 0$. Contraindo então (3.18) com u_{α} temos

$$\frac{d}{ds}\ \frac{M^{oo}}{(u^{o})^{2}} = g\ u_{\alpha}\phi^{\alpha} = g\ \frac{d\phi}{ds}\ . \tag{3.19}$$

É facil mostrar que **g** é uma constante como consequência da equação de continuidade para a corrente nucleônica $J^{\alpha} = (\rho\ ,\ \rho\vec{v})$, temos

$$\partial_{\alpha}J^{\alpha} = 0\ . \tag{3.20}$$

Integrando no volume do sistema e usando o teorema de Gauss, segue que a integral de superfície se anula em virtude de $\vec{J} = \rho\vec{v}$ se anular na mesma. Logo

$$\frac{d}{dt}\int \rho dV = 0 \tag{3.21}$$

e, portanto

$$g = \int \rho \, dV = \text{constante} . \tag{3.22}$$

consequentemente concluimos de (3.19) que

$$\frac{M^{00}}{(u^0)^2} - g\phi = \text{constante} = m . \tag{3.23}$$

Esta constante identificamos como sendo a massa do sistema. Substituindo $M^{00}/(u^0)^2$ desta equação em (3.17) obtemos

$$\frac{d}{ds}(m + g\phi)\, u^\alpha = g\,\phi^\alpha \tag{3.24}$$

ou

$$\frac{d}{ds} mu^\alpha = -g\,\frac{d}{ds}(\phi u^\alpha) + g\,\phi^\alpha . \tag{3.25}$$

Reobtemos deste modo a equação de movimento (2.28).

Voltemos agora à equação (3.15) que, usando (3.16), pode ser escrita sob a forma

$$M^{\alpha\beta} = \frac{M^{00}}{(u^0)^2}\, u^\alpha u^\beta . \tag{3.26}$$

Substituindo $M^{00}/(u^0)^2$ dado por (3.23) e retornando à notação (3.12) temos

$$u^0 \int t^{\alpha\beta}\, dV = (m + g\phi(X))\, u^\alpha u^\beta . \qquad (3.27)$$

Consequentemente resulta a expressão

$$t^{\alpha\beta} = (m + g\phi(x))\, \delta\,(x - X)\, \frac{u^\alpha u^\beta}{u^0} =$$

$$= (\sigma + \rho\phi)\, \frac{u^\alpha u^\beta}{u^0} \qquad (3.28)$$

ou

$$t^{\alpha\beta} = (\bar{\sigma} + \bar{\rho}\phi)\, \mu^\alpha \mu^\beta . \qquad (3.29)$$

Este é o tensor energia-momentum da partícula em interação com o campo, como havíamos mostrado anteriormente, equação (2.50). Estas considerações ilustram a potência do método. Veremos no próximo parágrafo como ficam as equações do movimento, quando em (3.8) retemos também o termo de primeira ordem em δx^α.

3.2 - Extensão para o caso de um Nucleon com Spin e Dipolo Nucleônico

Substituindo (3.8) em (3.3) temos, em até primeira ordem, que

$$\frac{d}{dt} \int t^{\alpha o}\, dV = \phi^\alpha \int \bar{\rho}\, dV + \phi^{\alpha\beta} \int \delta x_\beta\, \bar{\rho}\, dV . \qquad (3.30)$$

Fazendo a mesma substituição em (3.5) e usando a equação acima encontramos

$$\frac{dX^\beta}{dt} \int t^{\alpha o} dV + \frac{d}{dt} \int \delta x^\beta t^{\alpha o}\, dV = \int t^{\alpha\beta} dV + \phi^\alpha \int \delta x^\beta \bar{\rho}\, dV . \qquad (3.31)$$

Usando (3.11) e (3.13) as equações anteriores ficam respectivamente

$$\frac{d}{ds}\int t^{\alpha o}\, dV = g\,\phi^{\alpha} + \phi^{\alpha\beta}\int \delta x_{\beta}\,\rho\, dV \qquad (3.32)$$

$$u^{\beta}\int t^{\alpha o}\, dV + \frac{d}{ds}\int \delta x^{\beta}\, t^{\alpha o} dV = u^{o}\int t^{\alpha\beta} dV + \phi^{\alpha}\int \delta x^{\beta}\rho\, dV. \qquad (3.33)$$

Notemos que o primeiro termo no segundo membro de (3.33) pode ser eliminado se subtrairmos desta equação a que se obtem trocando os índices α com β. O resultado obtido com esta operação é

$$u^{\beta}\int t^{\alpha o}\, dV - u^{\alpha}\int t^{\beta o}\, dV + \frac{d}{ds}\int (\delta x^{\beta} t^{\alpha o} - \delta x^{\alpha} t^{\beta o})\, dV =$$

$$= \phi^{\alpha}\int \delta x^{\beta}\rho dV - \phi^{\beta}\int \delta x^{\alpha}\rho dV\ . \qquad (3.34)$$

Vamos agora introduzir as seguintes notações:

$$p^{\alpha} = \int t^{\alpha o}\, dV\ , \qquad (3.35)$$

$$D^{\alpha} = \int \delta x^{\alpha}\rho\, dV \qquad \text{e} \qquad (3.36)$$

$$S^{\alpha\beta} = \int (\delta x^{\alpha} t^{\beta o} - \delta x^{\beta} t^{\alpha o})\, dV\ . \qquad (3.37)$$

D^{α} é o quadrivetor momento de dipolo e $S^{\alpha\beta}$ o tensor de spin (momentum angular interno) do sistema.

Com isto as equações (3.32) e (3.34) podem ser reescritas sob a forma:

$$\frac{dp^{\alpha}}{ds} = g\phi^{\alpha} + \phi^{\alpha\beta} D_{\beta} \qquad (3.38)$$

$$\frac{dS^{\alpha\beta}}{ds} = p^{\alpha} u^{\beta} - p^{\beta} u^{\alpha} + D^{\alpha} \phi^{\beta} - D^{\beta} \phi^{\alpha} . \qquad (3.39)$$

Estas são as equações de movimento do nucleon com momento de dipolo e spin. Essas equações coincidem com as obtidas por Harish-Chandra[1] pelo método introduzido por Dirac[2], de cálculo do fluxo do tensor energia-momentum através de um fino tubo ao longo da linha de universo da partícula, na sua teoria clássica do eletron.

A (3.38) e (3.39) são equações aproximadas no caso de um corpo extenso. São equações exatas para uma partícula puntiforme com spin e dipolo nucleônico definida como sendo o limite do caso extenso com o volume ou δx^{α} tendendo a zero e, ρ e $t^{\beta o}$ tendendo a infinito de tal modo que as integrais (3.35), (3.36) e (3.37) sejam finitas.

Considerando que ρ e D^{α} são conhecidos, as grandezas incógnitas são: p^{α}, u^{α} e $S^{\alpha\beta}$, totalizando $4 + 4 + 6 = 14$ variáveis. O número de equações são 10, 4 de (3.38) e 6 de (3.39), de modo que faltam 4 equações para obter soluções únicas às grandezas incógnitas. Essas quatro equações subsidiárias estão condicionadas a escolha do particular ponto X^{α}. Escolheremos X^{α} de tal modo que $S^{\alpha o} = 0$ no referencial de repouso. Como $\delta x^{o} = 0$ concluimos de (3.37) e (3.6) que X^{α} tem então a seguinte expressão

$$X^{\alpha} = \frac{\int x^{\alpha} t^{oo} \, dV}{\int t^{oo} \, dV} . \qquad (3.40)$$

Como vemos a escolha $S^{\alpha o} = 0$ é equivalente a escolha de X^{α} como sendo o centro de energia ou massa do sistema. A escolha $S^{\alpha o} = 0$ no referencial de repouso é num sistema qualquer expresso pela relação

$$u_{\alpha} S^{\alpha\beta} = 0 . \qquad (3.41)$$

A (3.41) estabelece um conjunto de 4 equações que, com (3.38) e (3.39) dão as 14 equações e consequentemente so

luções únicas para as grandezas p^{α}, u^{α} e $S^{\alpha\beta}$. Está então completamente determinado o movimento do sistema.

Vamos agora determinar as expressões do tensor energia-momentum e do seu primeiro momento. Encontraremos também a da densidade de corrente do sistema.

Consideremos além das equações (2.1) e (2.4), a que resulta para $x^{\alpha}x^{\beta}t^{\lambda\nu}$. Temos a relação

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(x^{\alpha}x^{\beta}t^{\lambda\nu}) = x^{\beta}t^{\lambda\alpha} + x^{\alpha}t^{\lambda\beta} + x^{\alpha}x^{\beta}\bar{\rho}\,\phi^{\lambda} . \qquad (3.42)$$

Integrando-a no volume do sistema e notando que o termo de divergência espacial se anula encontramos

$$\frac{d}{dt}\int x^{\alpha}x^{\beta}t^{\lambda o}\,dV = \int x^{\beta}t^{\lambda\alpha}dV + \int x^{\alpha}t^{\lambda\beta}dV + \int x^{\alpha}x^{\beta}\bar{\rho}\,\phi^{\lambda}\,dV . \qquad (3.43)$$

Efetuando a substituição (3.6) e empregando a equação (3.5) obtemos

$$\frac{dX^{\alpha}}{dt}\int x^{\beta}t^{\lambda o}\,dV + \frac{d}{dt}\int \delta x^{\alpha}x^{\beta}t^{\lambda o}\,dV =$$

$$= \int x^{\beta}t^{\lambda\alpha}\,dV + \int \delta x^{\alpha}t^{\lambda\beta}\,dV + \int \delta x^{\alpha}x^{\beta}\bar{\rho}\,\phi^{\lambda}\,dV . \qquad (3.44)$$

Fazemos agora a mesma substituição (3.6), para x^{β} e usamos a expansão (3.8). A seguir empregamos a equação (3.7) obtendo em primeira ordem a expressão

$$\frac{dX^{\alpha}}{dt}\int \delta x^{\beta}t^{\lambda o}\,dV + \frac{dX^{\beta}}{dt}\int \delta x^{\alpha}t^{\lambda o}\,dV = \int \delta x^{\alpha}t^{\lambda\beta}dV + \int \delta x^{\beta}t^{\lambda\alpha}dV . \qquad (3.45)$$

Introduzindo a notação

$$M^{\alpha\beta\lambda} = u^{o}\int \delta x^{\alpha}t^{\beta\lambda}\,dV \qquad (3.46)$$

BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS - USP
FÍSICA

e empregando $u^\alpha = dX^\alpha/ds = u^o d X^\alpha/dt$ a (3.45) toma a forma

$$\frac{u^\alpha}{u^o} M^{\beta\lambda o} + \frac{u^\beta}{u^o} M^{\alpha\lambda o} = M^{\alpha\lambda\beta} + M^{\beta\lambda\alpha}. \qquad (3.47)$$

Ao lado desta equação podemos escrever duas outras expressões que obtemos pela permutação dos índices λ com α e λ com β, isto é:

$$\frac{u^\lambda}{u^o} M^{\beta\alpha o} + \frac{u^\beta}{u^o} M^{\lambda\alpha o} = M^{\lambda\alpha\beta} + M^{\beta\alpha\lambda} \qquad (3.48)$$

e

$$\frac{u^\alpha}{u^o} M^{\lambda\beta o} + \frac{u^\lambda}{u^o} M^{\alpha\beta o} = M^{\alpha\beta\lambda} + M^{\lambda\beta\alpha}. \qquad (3.49)$$

Antes de prosseguirmos, notemos que de (3.37) e (3.46) tem-se a igualdade

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{u^o}(M^{\alpha\beta o} - M^{\beta\alpha o}) . \qquad (3.50)$$

Notemos também que $M^{\alpha\beta\lambda} = M^{\alpha\lambda\beta}$. Usando estes dois fatos na equação que resulta da adição de (3.47) com (3.48) seguido da subtração de (3.49) encontramos

$$M^{\beta\alpha\lambda} = \frac{u^\beta}{2}\left(\frac{M^{\alpha\lambda o}}{u^o} + \frac{M^{\lambda\alpha o}}{u^o}\right) + \frac{1}{2} S^{\beta\lambda} u^\alpha + \frac{1}{2} S^{\beta\alpha} u^\lambda . \qquad (3.51)$$

Como $\delta x^o = 0$ temos $M^{o\alpha\beta} = 0$. Então colocando $\beta = 0$ na relação acima segue que

$$M^{\alpha\lambda o} + M^{\lambda\alpha o} = S^{\lambda o} u^\alpha + S^{\alpha o} u^\lambda . \qquad (3.52)$$

Substituindo este resultado em (3.51) temos

$$M^{\beta\alpha\lambda} = \frac{1}{2}\ \frac{S^{\lambda o}}{u^o}\ u^\alpha u^\beta + \frac{1}{2}\ \frac{S^{\alpha o}}{u^o}\ u^\lambda u^\beta + \frac{1}{2}\ S^{\beta\lambda} u^\alpha + \frac{1}{2}\ S^{\beta\alpha} u^\lambda . \tag{3.53}$$

Encontramos assim o primeiro momento ($M^{\alpha\beta\lambda}$) em função das variáveis tensor de spin e quadrivelocidade do sistema. Podemos agora obter a forma do tensor $M^{\alpha\beta}$. Empregando as notações (3.12), (3.36) e (3.46) a (2.33) pode ser reescrita como segue

$$M^{\alpha\beta} = M^{\alpha o}\ \frac{u^\beta}{u^o} + \frac{d}{ds}\ \frac{M^{\beta\alpha o}}{u^o} - \phi^\alpha\ D^\beta . \tag{3.54}$$

De (3.53) temos:

$$M^{\beta\alpha o} = \frac{S^{\alpha o}}{\alpha}\ u^\beta + \frac{S^{\beta o}}{\alpha}\ u^\alpha + \frac{S^{\beta\alpha}}{\alpha}\ u^o \tag{3.55}$$

e

$$M^{\beta oo} = S^{\beta o}\ u^o . \tag{3.56}$$

Colocando $\alpha = 0$ em (3.54) e usando (3.56) tem-se

$$M^{\beta o} = \frac{M^{oo}}{u^o}\ u^\beta + \dot{S}^{\beta o} - \phi^o D^\beta , \tag{3.57}$$

onde $\dot{S}^{\beta o} = dS^{\beta o}/ds$.

Substituindo-se este e (3.69) em (3.68) encontramos finalmente que

$$M^{\alpha\beta} = \frac{u^\beta}{u^o}\ (M^{oo}\ \frac{u^\alpha}{u^o} + \dot{S}^{\alpha o} - \phi^o D^\alpha) + \frac{1}{2}\ \frac{d}{ds}(S^{\alpha o}\frac{u^\beta}{u^o} + S^{\beta o}\ \frac{u^\alpha}{u^o})$$

$$+ \frac{1}{2}\ \dot{S}^{\beta\alpha} - \phi^\alpha\ D^\beta . \tag{3.58}$$

De (3.12) vemos que $t^{\alpha\beta}$ é igual ao lado direito des

ta expressão multiplicada pela função $\delta(x - X)/u^0$.

Encontraremos agora a densidade de corrente do sistema. Como ponto de partida consideraremos a equação de continuidade $\partial_\alpha \mathcal{J}^\alpha = 0$, com $\mathcal{J}^\alpha$ desconhecido.

Integrando esta equação no volume do sistema e notando que o termo de divergência espacial se anula, segue que

$$\int \mathcal{J}^0 \, dV = \int \rho \, dV = \text{constante} = g \qquad (3.59)$$

que é a carga do sistema.

Vejamos a equação que resulta para $x^\alpha \mathcal{J}^\beta$. Temos que

$$\partial_\beta x^\alpha \mathcal{J}^\beta = \mathcal{J}^\alpha \quad . \qquad (3.60)$$

Integrando no volume que contém o sistema temos

$$\frac{d}{dt} \int x^\alpha \rho \, dV = \int \mathcal{J}^\alpha \, dV \quad . \qquad (3.61)$$

Substituindo (3.6) nesta, obtemos

$$\frac{d X^\alpha}{dt} g + \frac{d}{dt} \int \delta x^\alpha \rho \, dV = \int \mathcal{J}^\alpha \, dV \quad . \qquad (3.62)$$

Usando $u^\alpha = dX^\alpha/ds$ e a (3.36) podemos escrever

$$\int \mathcal{J}^\alpha \, dV = g \frac{u^\alpha}{u^0} + \frac{\dot{D}^\alpha}{u^0} \quad . \qquad (3.63)$$

Desta equação segue que, para uma partícula com carga e dipolo, o quadrivetor densidade de corrente é da forma

$$\mathcal{J}^\alpha = g \frac{u^\alpha}{u^0} \delta(\vec{x} - \vec{X}) + \frac{\dot{D}^\alpha}{u^0} \delta(\vec{x} - \vec{X}) \quad . \qquad (3.64)$$

Além da convecção $\bar{\rho}\, u^{\alpha}$ temos também a derivada do dipolo.

Vejamos agora em que condições podemos conseguir expressões simples para o momentum p^{α} da partícula e seu spin $S^{\alpha\beta}$.

Notemos inicialmente que, como $\delta x^{o} = 0$ segue que $D^{o} = 0$. Portanto

$$u_{\alpha} D^{\alpha} = 0 \qquad (3.65)$$

pois é nulo no sistema do repouso. Desta igualdade temos como consequência que, $\dot{u}_{\alpha} D^{\alpha} = -u_{\alpha} \dot{D}^{\alpha}$. No sistema do repouso $\dot{D}^{o} = 0$. Logo

$$\mathbf{u}_{\alpha} \dot{D}^{\alpha} = 0 \quad . \qquad (3.66)$$

Vamos agora contrair a equação (3.39) com $\mathbf{u}_{\alpha}$ e usar a (3.65). Deste procedimento encontramos a seguinte relação para $\mathbf{p}^{\beta}$

$$\mathbf{p}^{\beta} = (\mathbf{u}_{\alpha} \mathbf{p}^{\alpha})\, \mathbf{u}^{\beta} - \dot{\phi}\, D^{\beta} - \mathbf{u}_{\alpha} \dot{S}^{\alpha\beta} . \qquad (3.67)$$

Contraindo esta com $\dot{\mathbf{u}}_{\beta}$, a (2.38) com $\mathbf{u}_{\alpha}$ e a seguir adicionando-as encontramos, após usar a (3.66), que

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{u}_{\alpha} p^{\alpha}) = g\dot{\phi} + \dot{\phi}^{\beta} D_{\beta} - \dot{\mathbf{u}}_{\beta} \mathbf{u}_{\alpha} \dot{S}^{\alpha\beta} \quad . \qquad (3.68)$$

Esta equação pode ser escrita na seguinte forma

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{u}_{\alpha} \mathbf{p}^{\alpha} - g\phi - D_{\alpha}\phi^{\alpha}) = -\dot{D}_{\beta}\phi^{\beta} - \mathbf{u}_{\alpha} \dot{\mathbf{u}}_{\beta} \dot{S}^{\alpha\beta}. \qquad (3.69)$$

Derivando (3.41) temos que $\dot{\mathbf{u}}_{\alpha} S^{\alpha\beta} = -\mathbf{u}_{\alpha} \dot{S}^{\alpha\beta}$, o qual nos permite escrever

$$u_\alpha \dot{u}_\beta \dot{S}^{\alpha\beta} = -\dot{u}_\alpha \dot{u}_\beta S^{\alpha\beta} = 0, \qquad (3.70)$$

pois a contração de um tensor simétrico com um antissimétrico se anula. Deste modo o último termo de (3.69) é nulo.

Vamos agora supor que a partícula tem módulo de spin e do momento de dipolo constante, isto é:

$$S_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = \text{constante} \qquad (3.71)$$

e

$$D_\alpha D^\alpha = \text{constante} \ . \qquad (3.72)$$

De (3.71) resulta que $S_{\alpha\beta} \dot{S}^{\alpha\beta} = 0$. Portanto, contraindo (3.39) com $S_{\alpha\beta}$ e usando também (3.41) resulta, da arbitrariedade de $\phi^\alpha_{;}$

$$D_\alpha S^{\alpha\beta} = 0 \ . \qquad (3.73)$$

Desta relação temos $D_\alpha \dot{S}^{\alpha\beta} = \dot{D}_\alpha S^{\alpha\beta}$ e de (3.72)temos $D_\beta \dot{D}^\beta = 0$. Portanto contraindo (3.39) com $D_\alpha \dot{D}_\beta$ e usando também (3.65) e (3.66), resulta

$$D_\alpha D^\alpha \dot{D}_\beta \phi^\beta = 0 \ . \qquad (3.74)$$

Daqui concluimos que

$$\dot{D}_\beta \phi^\beta = 0 \ . \qquad (3.75)$$

Com esta relação e a (3.70) a (3.48) nos fornece

$$u_\alpha p^\alpha - g\phi - D_\alpha \phi^\alpha = \text{constante} = m \ . \qquad (3.76)$$

A constante m é identificada com a massa do sistema. Essa equação nos dá o valor de $u_\alpha p^\alpha$ que substituido em (3.67) nos dá a seguinte expressão para p^α

$$p^\alpha = (m + g\phi + D_\beta \phi^\beta) u^\alpha + u_\beta \dot{S}^{\alpha\beta} - \dot{\phi} D^\alpha \ . \qquad (3.77)$$

De (3.41) e (3.73) resulta que o spin é perpendicular tanto ao dipolo como a velocidade, isto é, temos a relação

$$S^{\alpha\beta} = K \, \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} D_\mu u_\nu \ . \qquad (3.78)$$

É fácil verificarmos por contração com $S_{\alpha\beta}$ que K é uma constante como consequência de (3.71) e (3.72).

As equações (3.77) e (3.78) coincidem com as expressões de Harish-Chandra[1], que, em vez de como fizemos, usa a (3.78) para a demonstração de (3.77).

CAPÍTULO IV

BALANÇO DE ENERGIA E VETOR DE POYNTING MESÔNICO

A densidade de energia do campo está escrita em (2.35)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{c^2} + (\vec{\nabla}\phi)^2\right). \qquad (4.1)$$

Vejamos agora como varia com o tempo a energia do campo na presença de cargas nucleônicas. Seja W a energia do campo contido em um dado volume. Sua derivada é

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\int \mathcal{H} dV = \int \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\dot{\phi}\ddot{\phi}}{c^2} + \vec{\nabla}\phi.\vec{\nabla}\dot{\phi}\right) dV \qquad (4.2)$$

ou

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi}\int \vec{\nabla}.(\dot{\phi}\vec{\nabla}\phi)dV + \frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{\ddot{\phi}}{c^2} - \nabla^2\phi\right)\dot{\phi}dV. \qquad (4.3)$$

Pelo teorema de Gauss a primeira integral pode ser convertida no fluxo através da superfície do seguinte vetor

$$\vec{S} = -\frac{1}{4\pi}\dot{\phi}\vec{\nabla}\phi \quad . \qquad (4.4)$$

Empregando a equação do campo (2.7) na última integral de (4.3) obtemos

$$\frac{dW}{dt} = -\int \rho\sqrt{1 - v^2/c^2}\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\,dV - \oint \vec{S}\,.\,\hat{n}\,dA\,. \qquad (4.5)$$

Vamos considerar a situação na qual as cargas nucleônicas presente no sistema são puntuais. Neste caso a primeira integral em (4.5) ficará expressa por uma soma sobre todas as cargas. A seguir empregamos a equação da potência (4.20) para cada carga. O resultado final é

$$\frac{d}{dt}\left(W + \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} + \sum_i \frac{g_i \phi}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}\right) = -\oint \vec{S}\,.\,\hat{n}\,dA\,. \qquad (4.6)$$

A esquerda desta equação comparece a variação da energia total do sistema (campo, partículas e interação) no volume considerado, por unidade de tempo. Da conservação de energia segue que $\vec{S}$ é a quantidade de energia que atravessa a superfície por unidade de área e tempo. A essa quantidade denominaremos vetor de Poynting mesônico.

No próximo capítulo calcularemos o campo devido a uma carga nucleônica em movimento. Do resultado obtido e da definição do vetor de Poynting (4.4) determinaremos em seguida a expressão não relativística da potência de radiação mesônica emitida pela carga.

CAPÍTULO V

V - EMISSÃO DE RADIAÇÃO MESÔNICA

5.1 - Potenciais de Lienard Wiechert Mesônico

Neste parágrafo vamos obter a solução da equação do campo escalar na presença de cargas. A equação do campo é, de acordo com (2.4),

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi(\vec{x}, t) = -4\pi\,\bar{\rho}(\vec{x}, t)\,. \qquad (5.1)$$

A solução desta equação será obtida pelo método da função de Green. De (5.1) ϕ pode ser escrito sob a forma

$$\phi(\vec{x}, t) = \int G(\vec{x}t, \vec{x}'t')\,\bar{\rho}(\vec{x}', t')\,dV'\,dt' \quad , \qquad (5.2)$$

onde a função G, chamada função de Green, satisfaz a equação diferencial

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) G(\vec{x}t, \vec{x}'t') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t') \qquad (5.3)$$

e a condição

$$G(\vec{x}t, \vec{x}'t') = 0 \quad \text{para} \quad t' > t. \qquad (5.4)$$

Esta condição define a função de Green retardada. Pelo procedimento usual (vide apêndice *II*) a solução de (5.3) sujeita a condição (5.4) é

$$G(\vec{x}t, \vec{x}'t') = \frac{\delta(t - t' - R/c)}{R} \quad , \qquad (5.5)$$

onde $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$.

Substituindo na equação (5.2) temos

$$\phi(\vec{x}, t) = -\int \frac{\delta(t - t' - R/c)}{R} \bar{\rho}\,(\vec{x}', t')\, dV'\, dt' \,. \quad (5.6)$$

Resolvendo a integral em t' e introduzindo ρ encontramos

$$\phi(\vec{x}, t) = -\int \frac{\rho(\vec{x}', t - R/c)}{R} \sqrt{1 - v^2/c^2}\; dV', \quad (5.7)$$

onde agora $\vec{v}$ é calculado no instante retardado.

Esta expressão descreve o potencial retardado de uma dada distribuição de carga nucleônica $\rho(\vec{x}, t)$. No caso de uma partícula com carga nucleônica g e com velocidade $\vec{v} = d\vec{z}/dt$, a densidade de carga é descrito pela (2.3) que usando (2.6) nos dá a seguinte expressão para $\bar{\rho}$

$$\bar{\rho}\,(\vec{x}, t) = g\delta(\vec{x} - \vec{z}(t)) \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad . \quad (5.8)$$

Substituindo essa densidade de carga na expressão (5.6) e integrando no volume obtemos

$$\phi\,(\vec{x}, t) = -g \int \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{|\vec{x} - \vec{z}(t')|}\; \delta(t - t' - |\vec{x} - \vec{z}(t')|/c)\, dt' \,. \quad (5.9)$$

Para integrar em t' façamos a mudança de variável

$$\tau = t' + R/c \quad , \quad R = \vec{x} - \vec{z}(t') \,. \quad (5.10)$$

Com isto temos

$$\frac{d\tau}{dt'} = 1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{Rc} \quad . \quad (5.11)$$

Expressando a (5.9) em função da nova variável a integral é facilmente resolvida. O resultado encontrado é

$$\phi(\vec{x}, t) = -g \left. \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c}} \right|_{t' = t - R/c} \qquad (5.12)$$

Esta expressão é análoga à dos potenciais de Lienard-Wiechert que aparece na eletrodinâmica. Nós o denominaremos de potencial de Lienard-Wiechert mesônico.

5.2 - Potência de Radiação Emitida

Vamos determinar a emissão por radiação de uma carga nucleônica em movimento. Restringiremos nosso cálculo à baixas velocidades ($v \ll c$) e à zona de radiação. A potência emitida é a integral de superfície do vetor de Poynting (3.4) no qual comparecem as derivadas primeiras do campo $\phi(\vec{x}, t)$ da equação (4.12). Pelo procedimento usual conhecido na eletrodinâmica calculamos as derivadas de ϕ com o seguinte resultado (ver apêndice III)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g \frac{\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}}}{Rc} \qquad (5.13)$$

e

$$\vec{\nabla}\phi = -g \frac{\hat{n}}{R^2} + g \frac{(\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}})}{Rc^2} \hat{n} \quad , \qquad (5.14)$$

onde $\hat{n} = \vec{R}/R$.

Substituindo estas derivadas na expressão do vetor de Poynting (4.4) e notando que o termo proporcional a $1/R^3$ não contribui para a integral na zona de radiação podemos escrever, no infinito,

$$\vec{S} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\phi}{\partial t}\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{4\pi}g^2\frac{(\hat{n}\cdot\dot{\vec{v}})^2}{R^2c^3}\hat{n} \quad . \tag{5.15}$$

A potência total emitida é então

$$P = \oint \vec{S}\cdot\hat{n}\,dA = \frac{1}{4\pi c^3}g^2\oint(\hat{n}\cdot\dot{\vec{v}})^2\,d\Omega \quad . \tag{5.16}$$

onde $d\Omega$ é a diferencial de ângulo sólido. Essa integral é facilmente calculada, resultando

$$\oint(\hat{n}\cdot\dot{\vec{v}})^2\,d\Omega = \frac{4\pi}{3}\dot{v}^2 \quad . \tag{5.17}$$

Levando este resultado em (5.16) segue a seguinte expressão para a potência de radiação emitida pelo nucleon em movimento

$$P = \frac{1}{3}g^2\frac{\dot{v}^2}{c^3} \quad . \tag{5.18}$$

A potência mesônica é proporcional ao quadrado da aceleração, como no caso da eletromagnética na qual, aliás comparece o fator dois terços em vez do um terço presente em (5.18). Pela conservação de energia a potência irradiada acarreta uma perda de energia da partícula, o que implica numa força reativa sobre ela. Pela forma da potência mesônica tal força será proporcional a derivada da aceleração como no caso eletromagnético. Calcularemos esta força no próximo capítulo.

CAPÍTULO VI

VI - FORÇA DE REAÇÃO DE RADIAÇÃO

Neste capítulo será calculada a força de reação de radiação por dois métodos: o da potência emitida e o de Lorentz, isto é cálculo direto da força partindo de um nucleon extenso.

6.1 - Método da Potência Emitida

Esse método segue da conservação de energia. De acordo com a expressão (5.27) a energia perdida na unidade de tempo por um nucleon em movimento é

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{1}{3c^3} g^2 \dot{v}^2 \quad . \tag{6.1}$$

Esta perda de energia implica numa força reativa $\vec{F}_r$ sobre o nucleon. A potência dessa força é

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}_r \cdot \vec{v} \quad . \tag{6.2}$$

Dessas equações segue, após uma derivação por partes, que

$$\vec{F}_r \cdot \vec{v} = - \frac{1}{3c^3} g^2 \frac{d}{dt} (\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}) + \frac{1}{3c^3} g^2 \ddot{\vec{v}} \cdot \vec{v} . \tag{6.3}$$

Quando tomamos a média no tempo o primeiro termo do lado direito desta equação se anula por que é uma derivada total, de modo que o trabalho médio por unidade de tempo é

$$\vec{F}_r \cdot \vec{v} = \frac{1}{3c^3} g^2 \ddot{\vec{v}} \cdot \vec{v} \quad . \tag{6.4}$$

Daqui segue a seguinte expressão para $\vec{F}_r$

$$\vec{F}_r = \frac{1}{3c^3} g^2 \ddot{\vec{v}} \quad . \tag{6.5}$$

Essas considerações são heurísticas. Entretanto a força pode ser calculada diretamente da reação do campo sobre a partícula como veremos a seguir.

6.2 - Modelo Clássico do Nucleon

Um outro método para se obter a força de reação do campo é o cálculo direto das forças que as partes de um nucleon extenso exerce entre si, como elaborado por Lorentz no seu modelo clássico do eletron. Para este propósito o nucleon é considerado com dimensões finitas. Nosso modelo do nucleon consiste numa esfera rígida com distribuição de carga esfèricamente simétrica, analogamente ao modelo de Lorentz para o caso do eletron.

Nosso objetivo é calcular a força total que esta distribuição exerce sobre si mesma, para isto calcularemos a força $d\vec{F}'$ que atua num elemento dg' da distribuição e depois integraremos sobre todo o sistema. Nosso cálculo será não relativístico, isto é, desprezaremos termos proporcionais a velocidade na expressão da força. Nessas condições a força em dg' é, de acordo com (2.16),

$$d\vec{F}'' = -\frac{dg'}{c^2}\phi'\dot{\vec{v}}' - dg'\vec{\nabla}'\phi' \quad . \tag{6.6}$$

Nesta expressão ϕ' é o potencial devido a distribuição no ponto $\vec{x}'$ onde está a carga dg' no instante t e com velocidade igual a $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}', t)$. Sua expressão é, de acordo com (4.7),

$$\phi' = \phi'(\vec{x}', t) = -\int \frac{\rho(\vec{x}, t - R/c)}{R}\sqrt{1 - v^2/c^2}\, dV. \tag{6.7}$$

onde $\vec{v}$ que aqui é a velocidade de $dg = \rho dV$ é calculado no ponto $\vec{x}$ no instante retardado e $\vec{R} = \vec{x}' - \vec{x}$.

Como estamos considerando as cargas com baixas velocidades a distribuição de carga não muda muito durante o tempo R/c e podemos expandir $\rho\sqrt{1 - v^2/c^2}$ em série de potências desse parâmetro até dada ordem. De outro modo, como estamos considerando o sistema com pequenas dimensões o retardo não é muito importante.

Expandindo $\rho\sqrt{1 - v^2/c^2}$ obtemos para ϕ' a expressão

$$\phi'(\vec{x}', t) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \frac{1}{c^n} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int (-R)^{n-1} \rho(\vec{x}, t)\sqrt{1 - v^2/c^2}\, dV. \tag{6.8}$$

(as derivadas temporais podem evidentemente serem colocadas fora da integral). Nessa expressão $\vec{v}$ é a velocidade calculada no ponto $(\vec{x}, t)$. Iremos supor que a distribuição só tem movimento de translação, sem rotação. Nesse caso todos os elementos da carga tem a mesma velocidade, isto é, $\vec{v}$ é independente da posição e a(6.8) torna-se

$$\phi(\vec{x}', t) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \frac{1}{c^n} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\sqrt{1 - v^2/c^2} \int (-R)^{n-1} \rho dV\right). \tag{6.9}$$

O primeiro termo da expansão é

$$\phi^{(o)} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \int (-R)^{-1} \rho dV = - \int \frac{\rho}{R} dV + O(V^2). \tag{6.10}$$

O segundo termo, $n = 1$, é na ordem c^{-3}

$$\phi^{(1)} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{1 - v^2/c^2} \int \rho dV\right) = - \frac{\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}}{c^3} g . \tag{6.11}$$

O terceiro termo é até c^{-3}, usando a equação da continuidade e o teorema de Gauss,

$$\phi^{(2)} = - \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R\rho dV = \frac{1}{2c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int R \vec{\nabla} . (\rho\vec{v})\, dV =$$

$$= - \frac{1}{2c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{\nabla} R . \vec{v}\rho dV . \tag{6.12}$$

Usando novamente a equação da continuidade em $\partial\rho/\partial t$ e o teorema de Gauss, na expressão acima, obtemos

$$\phi^{(2)} = - \frac{1}{2c^2} \int \vec{\nabla} R . \dot{\vec{v}}\rho dV - \frac{1}{2c^2} \int \vec{\nabla} (\vec{\nabla} R . \vec{v}) . \rho\vec{v}\, dV. \tag{6.12a}$$

O quarto termo, n=3, é na ordem c^{-3}

$$\phi^{(3)} = \frac{1}{6c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int R^2\,\rho dV = \frac{1}{6c^3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int(\vec{\nabla}\,R^2).\rho\vec{v}\,dV. \qquad (6.13)$$

Substituindo (6.10) em (6.6) obtemos

$$\frac{d\vec{F}^{(o)}}{dg'} = \frac{\dot{\vec{v}}}{c^2}\int\frac{\rho}{R}\,dV - \int\frac{\rho\vec{R}}{R^3}\,dV. \qquad (6.14)$$

A contribuição de (6.11) é de ordem superior, isto é, c^{-5}. A (6.12a) contribui com

$$\frac{d\vec{F}^{(2)}}{dg'} = \frac{1}{2c^2}\vec{\nabla}'\int\vec{\nabla}\,R\,.\,\dot{\vec{v}}\rho dV + \frac{1}{2c^2}\vec{\nabla}'\int\vec{\nabla}(\vec{\nabla}R\,.\,\vec{v}).\rho\vec{v}\,dV + O(c^{-4}). \qquad (6.15)$$

A (6.13) dá a contribuição

$$\frac{d\vec{F}^{(3)}}{dg'} = -\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\vec{\nabla}'(\vec{\nabla}\,R^2\,.\,\rho\vec{v})\,dV + O(c^{-5})\ . \qquad (6.16)$$

Integrando estas expressões em $dg' = \rho dV'$ e somando as teremos a força total sobre o sistema. Como a distribuição de carga é esfèricamente simétrica a integração do último termo em (6.14) se anula. A do último termo da (6.15) também se anula, pois o integrando muda de sinal quando trocamos as variáveis de integração e usamos o fato de que $\vec{\nabla}f(R) = -\vec{\nabla}'f(R)$. Ficamos então com o seguinte resultado

$$\vec{F} = \frac{\dot{v}}{c^2}\iint\frac{\rho\rho'}{R}\,dV\,dV' + \frac{1}{2c^2}\iint\rho'dV'\vec{\nabla}'(\dot{\vec{v}}\,.\,\vec{\nabla}R)\,\rho\,dV\ -$$

$$-\frac{1}{6c^3}\iint\rho'\,dV'\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\nabla}'(\vec{\nabla}R^2\,.\,\rho\vec{v})\,dV\ . \qquad (6.17)$$

Pela simetria da distribuição a componente i do integrando da segunda integral contém o fator

$$\partial'_i \, \partial_j \, R \, \dot{v}_j = -\partial_i \, \partial_j \, R \, \dot{v}_j = -\frac{1}{3} \, \delta_{ij} \nabla^2 R \, \dot{v}_j = -\frac{2}{3} \, \frac{\dot{v}_i}{R} \quad . \qquad (6.18)$$

Com isto o segundo termo de (6.17) é igual ao primeiro com o fator -1/3.

De maneira idêntica a componente $\underline{j}$ da integranda do último de (6.17) contém o fator

$$\partial'_i \, \partial_j \, R^2 \, v_j = -2\rho \boldsymbol{v}_i . \qquad (6.19)$$

Concluimos então que $\vec{F}$ tem a seguinte expressão

$$\vec{F} = \mu \dot{\vec{v}} + \frac{1}{3c^3} \, g^2 \, \ddot{\vec{v}} \quad , \qquad (6.20)$$

onde.

$$\mu = \frac{2}{3c^2} \iint \frac{\rho\rho'}{R} \, dV \, dV' \, . \qquad (6.21)$$

O primeiro termo do lado direito de (6.20) é proporcional a aceleração e pode ser agrupado com o termo $m\dot{\vec{v}}$ da equação de movimento (2.15) que no nosso limite não-relativístico é $m\dot{\vec{v}} = \vec{F}$. Com isto m passa ao valor efetivo

$$m_{ef} = m - \mu \quad . \qquad (6.22)$$

Por esse motivo μ é chamado massa nucleônica do sistema e m a massa mecânica do sistema. Temos então uma renormalização da massa do sistema pela interação com o campo, sendo o sinal de menos pelo fato de que as forças são atrativas. Notemos que a energia nucleostática dada pela relação

$$E = -\frac{1}{2} \iint \frac{\rho\rho'}{R} \, dV \, dV' \quad , \qquad (6.23)$$

permite reescrever a (6.21) sob a forma

$$\mu = \frac{4}{3}\frac{|E|}{c^2} . \qquad (6.24)$$

O segundo termo de (6.20) é a força de reação de radiação. Essa é independente da estrutura do sistema e como tal sobrevive no limite em que suas dimensões **d** tendem a zero. Notemos que o primeiro termo da expansão é da ordem d^{-1}. Os termos seguintes da expansão da força e que não estão calculados explicitamente são sucessivamente proporcionais a potência de d, isto é, d, d^2, ..., etc. Se d for pequeno estes termos podem ser desprezados. O caso limite de um nucleon puntiforme isto é, d tendendo a zero a massa nucleônica diverge e o processo de renormalização é definido pelo quesito de que m_{ef} (6.22) é a massa experimental da partícula. Claro isso significa que m, a massa mecânica, é infinita. Se a partícula estiver sujeita a um campo adicional externo ϕ sua equação de movimento, levando em conta a força de reação de radiação, é então

$$m_{ef}\dot{\vec{v}} = -\frac{g}{c^2}\frac{d}{dt}(\phi\vec{v}) - g\,\vec{\nabla}\phi + \frac{1}{3c^3}g^2\,\ddot{\vec{v}}. \qquad (6.25)$$

Facilmente podemos escrever a versão relativística desta expressão. Basta obtermos a versão relativística da força reativa, já que a parte restante,(2.28), está definida com m em vez de m_{ef}. A versão relativística do último termo é

$$F_r^\alpha = \frac{g^2}{3c}\frac{d^2u^\alpha}{ds^2} + B^\alpha \qquad (6.26)$$

com a condição de que as componentes espaciais de B^α vão a zero quando $\vec{v} \to 0$. Daqui resulta que $B^\alpha = K\mu^\alpha$. A função K é agora determinada da condição $F_r^\alpha u_\alpha = 0$ que satisfaz toda quadriforça. Contraindo então (6.26) com u^α obtemos

$$\frac{g^2}{3c}(\ddot{\mu}^\alpha u_\alpha) + K = 0 . \qquad (6.27)$$

Esta equação determina K e portanto B^{α}, que substituido em (6.26) dá o resultado

$$F_r^{\alpha} = \frac{g^2}{3c}\frac{d^2 u^{\alpha}}{ds^2} - \frac{g^2}{3c}(\ddot{u}^{\beta} u_{\beta})\, u^{\alpha} . \qquad (6.28)$$

Juntando esta força na equação (2.28) obtemos a equação de movimento relativística da carga levando em conta a reação de radiação, isto é,

$$\frac{d}{ds}(mcu^{\alpha}) = -\frac{g}{c}\frac{d}{ds}\phi u^{\alpha} + \frac{g}{c}\partial^{\alpha}\phi + \frac{g^2}{3c}\frac{d^2 u^{\alpha}}{ds^2} -$$

$$-\frac{g^2}{3c}(\ddot{u}^{\beta} u_{\beta})\, u^{\alpha} . \qquad (6.29)$$

Nesta equação m é agora a massa experimental do sistema.

CAPÍTULO VII

VII - CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos o movimento de uma partícula interagindo com um campo escalar clássico, chamado mesônico. Do formalismo lagrangeano foram obtidas as equações de movimento da partícula num campo externo. Estas equações foram em seguida generalizadas para o caso de uma partícula com spin e dipolo nucleônico pelo método dos momentos do tensor energia-momentum, método esse elaborado por Fock-Papapetrou no estudo de uma partícula no campo gravitacional. Além de possibilitar a obtenção das equações de movimento de um modo direto e simples o método permitiu calcular também a expressão do tensor energia-momentum e da corrente nucleônica, e de seus momentos, o que evidencia a potência do método. Com o intuito de incluir efeitos do campo da própria partícula, elaboramos um estudo sistemático do campo de radiação mesônico paralelamente ao que é usualmente feito no caso eletromagnético. Com isto foi possível estudar o retardo das ações do campo o que permitiu estudar o modelo clássico do nucleon paralelamente ao eletron de Lorentz analizando as forças que cada uma das partes de um nucleon extenso exerce sobre uma dada delas. Desse estudo resultou a equação de movimento da carga contendo a ação de seu próprio campo.

Como problemas propostos propomos os seguintes:

1) Extensão para o caso em que o campo é massivo, situação na qual um termo proporcional ao potencial estará presente na equação de onda.

2) Obtenção das equações de movimento relativísticas pelo método independente de modelo de Dirac, por ele elaborado no caso do eletron, e que consiste no cálculo do fluxo do tensor energia-momentum através de um tubo ao longo da linha de universo da partícula, evitando porém, o argumento de simplicidade lá utilizado para a contribuição provenientes das bases do cilindro, calculando-as explicitamente.

3) Extensão para o caso de um nucleon com spin e dipolo nucleônico com o cálculo explícito das contribuições do cilindro anteriormente mencionado.

APÊNDICE I

EQUAÇÃO DO CAMPO ESCALAR E TENSOR ENERGIA-MOMENTUM

I.1) Equação do Campo Escalar

Vamos obter A equação do campo escalar pelo princípio da ação mínima. Sem determos no formalismo, como ponto de partida escreveremos a ação para o campo escalar ϕ,

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial^{\alpha}\phi)\, dV\, dt\,, \tag{1}$$

onde a integração é estendida a todo o espaço e entre dois instantes (t_1, t_2) dados. A variação de S usando a notação $\phi^{\alpha} = \partial^{\alpha}\phi$ nos dá

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\, \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{\alpha}}\, \delta\phi^{\alpha}\right) dV\, dt\,. \tag{2}$$

Como

$$\delta\phi^{\alpha} = \delta\frac{\partial\phi}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\, \delta\phi\,, \tag{3}$$

integramos por partes o segundo termo na integral acima. Disto resulta que

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{\alpha}}\right) \delta\phi\, dV\, dt + \int \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{\alpha}}\, \delta\phi\right) dV\, dt\,. \tag{4}$$

A última integral acima pode ser separada em duas partes. A primeira como a integral da derivada temporal e a outra numa integral da divergência. A parte temporal se anula visto que $\delta\phi(\vec{x}, t_1) = \delta\phi\,(\vec{x}, t_2) = 0$. A integral da divergência pode, pelo teorema de Gauss, ser convertido numa integral de superfície. Esta superfície está no infinito onde os campo se anulam. Logo

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha}\right) \delta\phi \; dV\, dt \; . \tag{5}$$

Pelo princípio da ação mínima $\delta S = 0$ e $\delta\phi$ é arbitrário no volume. Consequentemente

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \; . \tag{6}$$

I. 2) Tensor Energia-momentum

Mostraremos que, se $\mathcal{L}$ não depende explicitamente das coordenadas, a equação (2.32) é satisfeita.

Se $\mathcal{L}$ não depende explicitamente das coordenadas, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \phi^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\beta} \cdot \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_\alpha} \; . \tag{7}$$

Usando a (6) no primeiro termo à direita de (7) temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = \phi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\beta} + \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\beta} \; . \tag{8}$$

Como

$$\frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^\beta} \; , \tag{9}$$

a (8) pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\beta}\right) \; . \tag{10}$$

À esquerda desta relação temos a derivada contravariante de $\mathcal{L}$. Com o auxílio do tensor métrico $g^{\alpha\beta}$, onde $g^{00} = -g^{11} =$

$= -g^{22} = -g^{33} = 1$ e $g^{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$, podemos passar à derivada covariante, ou seja

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\beta} \quad . \tag{11}$$

Deste modo a (10) fica

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\beta} - g^{\alpha\beta} \mathcal{L} \right) = 0 \quad . \tag{12}$$

APÊNDICE II

FUNÇÃO DE GREEN RETARDADA

Encontraremos a solução da equação (5.3),

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) G(\vec{x}\, t, \vec{x}'t') = -4\pi\, \delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t'), \tag{1}$$

sujeita à condição (5.4),

$$G(\vec{x}\, t, \vec{x}'t') = 0 \quad \text{para } t' > t. \tag{2}$$

As funções deltas que comparecem à direita de (1) podem ser expressas através da transformada de Fourier

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\, e^{iw(t-t')} d^3k\, dw\,. \tag{3}$$

Notemos que o operador diferencial e as deltas em (1) são invariantes por translações espaço-temporais. Deste modo $G(\vec{x}\, t, \vec{x}'t') = G(\vec{x} - \vec{x}', t - t')$. Seja agora $g(\vec{k}, w)$ a transformada de Fourier de $G(\vec{x} - \vec{x}', t - t')$. Podemos então escrever a transformada inversa sob a forma

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int g(\vec{k}, w)\, e^{i\vec{k}.(\vec{x} - \vec{x}')}\, e^{iw(t-t')} d^3k\, dw. \tag{4}$$

Substituindo esta e (3) em (1) temos

$$g(\vec{k}, w) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{4\pi c^2}{(w - i\epsilon)^2 - (kc)^2}\,. \tag{5}$$

Nesta relação ϵ é um infinitesimal positivo. No desenvolvimento a seguir mostraremos que esta escolha é a que satisfaz à condição (2). Pode-se mostrar que a escolha $\epsilon < 0$ conduz ao resultado que satisfaz à condição $G(\vec{x}-x', t-t') = 0$ para

$t' < t$; ou seja, conduz à função de Green avançada.

Substituindo (5) em (4) encontramos

$$G(\vec{R}, \tau) = \frac{c^2}{4\pi^3} \lim_{\epsilon \to 0} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} d^3k \int \frac{e^{iw\tau}\, dw}{(w - i\epsilon)^2 - (kc)^2} , \quad (6)$$

onde

$$\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}' \quad e \quad \tau = t - t' \quad . \quad (7)$$

Consideremos inicialmente a integral em w

$$I(k,\tau) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw\tau}\, dw}{(w - i\epsilon)^2 - (kc)^2} \quad . \quad (8)$$

Notemos que a condição (2) é agora expresso por $I(k, \tau < 0) = 0$. Para resolver a integral acima vamos considerar a seguinte integral no plano complexo $z = w + iy$,

$$\oint_C \frac{e^{iz\tau}\, dz}{(z - i\epsilon)^2 - (kc)^2} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{iw\tau}\, dw}{(w - i\epsilon)^2 - (kc)^2} + \int_{C'} \frac{e^{iz\tau}\, dz}{(z - i\epsilon)^2 - (kc)^2} , \quad (9)$$

onde a região de integração está esquematizada na figura I.

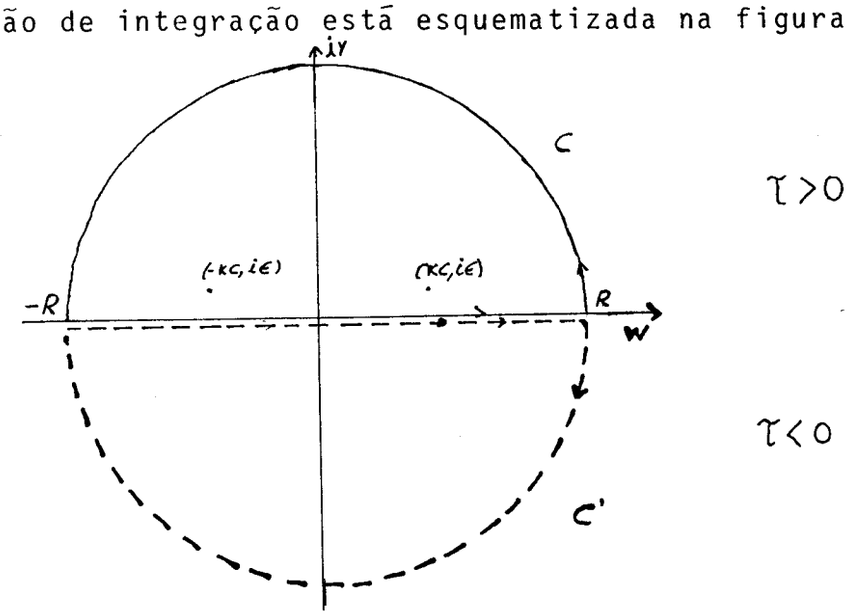

FIG-I. Contorno para o cálculo das integrais em (9).

BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS - USP
FÍSICA

A integral à esquerda de (9) será calculada pelo teorema do resíduo. É fácil de ver que $z = \pm kc + i\epsilon$ são os polos da função. Para $\tau < 0$ esta integral é feita no semiplano inferior sobre a curva pontilhada. Como a função não tem polos nesta região a integral se anula. Na curva C' a última integral em (9) pode ser majorada no limite $R \to \infty$

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{C'} \frac{e^{iz\tau}\, dz}{(z - i\epsilon)^2 - (kc)^2} \leq \lim_{R\to\infty} \left| \int \frac{e^{iz\tau}\, dz}{z^2 - k^2c^2} \right| \leq \lim_{R\to\infty} \frac{\pi R}{|R^2 - k^2c^2|} = 0. \tag{10}$$

Consequentemente

$$I\,(k,\ \tau < 0) = 0 \quad . \tag{11}$$

Para $\tau > 0$ a integração é feita no semiplano superior. É fácil de ver que, como feito em (10), a última integral em (9) se anula na curva C quando $R\to\infty$. Portanto

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw\tau}\, dw}{(w - i\epsilon)^2 - k^2c^2} = \lim_{\epsilon\to 0} 2\pi i \ \mathrm{Res} \left. \frac{e^{iz\tau}}{(z - i\epsilon)^2 - k^2c^2} \right|_{z = \pm kc + i\epsilon} =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{e^{ik\tau c}}{2kc} - \frac{e^{-ik\tau c}}{2kc} \right) = \frac{\pi i}{kc} \left(e^{ik\tau c} - e^{-ik\tau c} \right) \tag{12}$$

ou

$$I(k,\tau) = \frac{\pi i}{kc} \left(e^{ik\tau c} - e^{-ik\tau c} \right) \quad . \tag{13}$$

Consequentemente a (6) fica

$$G(\vec{R},\tau) = \frac{ic}{4\pi^2} \int \left(e^{ik\tau c} - e^{-ik\tau c} \right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \frac{d^3k}{k} =$$

$$= \frac{ic}{4\pi^2} \int \left(e^{ik\tau c} - e^{-ik\tau c} \right) e^{ikR\cos\Theta}\, k\, dk\, \mathrm{sen}\Theta\, d\Theta\, d\phi \ . \tag{14}$$

Integrando no ângulo sólido (sen$\Theta d\Theta d\phi$) encontramos

$$G(\vec{R},\tau) = -\frac{c}{2\pi R}\int_0^{\infty}(e^{ik(\tau c - R)} - e^{ik(\tau c + R)} - e^{-ik(\tau c + R)} +$$

$$+ e^{-ik(\tau c - R)})\, dk \,. \qquad (15)$$

Nos dois últimos termos de (15) efetuamos agora a mudança $k \to -k$. Com isto ficamos com a seguinte integral

$$G(\vec{R},\tau) = \frac{c}{2\pi R}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{ik(\tau c + R)} - e^{ik(\tau c - R)})\, dk. \qquad (16)$$

Integrando segue

$$G(\vec{R},\tau) = \frac{c}{R}\,[\,\delta(\tau c + R) - \delta(\tau c - R)]. \qquad (17)$$

Como $\tau > 0$, temos

$$G(\vec{R},\tau) = -\frac{c}{R}\,\delta(\tau c - R) = -\frac{\delta(\tau - R/c)}{R} \qquad (18)$$

ou, de (7),

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = -\frac{\delta(t - t' - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\,. \qquad (19)$$

APÊNDICE III

OBTENÇÃO DAS RELAÇÕES PARA $\partial\phi/\partial t$ e $\vec{\nabla}\phi$

O potencial de uma partícula é, de acordo com (5.12)

$$\phi(\vec{x},t) = -\frac{g\sqrt{1 - v^2/c^2}}{s}\Bigg|_{t' = t - R/c} , \qquad (1)$$

onde introduzimos as notações

$$s = R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c} \quad \text{e} \quad \vec{R} = \vec{x} - \vec{z}(t') . \qquad (2)$$

Em virtude das grandezas que comparecem a direita de (1) serem calculadas no tempo retardado, $t' = t - R/c$, necessitaremos de algumas relações que demonstraremos a seguir.

Temos

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{R}\frac{\partial t'}{\partial t} . \qquad (3)$$

De $R = c\,(t - t')$ temos $\partial R/\partial t = c(1 - \partial t'/\partial t)$. Logo, deste resultado e de (3), obtemos

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{s} . \qquad (4)$$

Notemos que o tempo retardado t' é também função das coordenadas. Seu gradiente dá

$$\vec{\nabla}t' = -\frac{\vec{\nabla}R}{c} = -\frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}R_{t'=cte} + \frac{\partial R}{\partial t'}\vec{\nabla}t'\right) =$$

$$= -\frac{1}{c}\left(\frac{\vec{R}}{R} - \frac{(\vec{R}\cdot\vec{v})}{R}\vec{\nabla}t'\right) . \qquad (5)$$

Donde obtemos

$$\vec{\nabla} t' = -\frac{\vec{R}}{sc} \quad . \tag{6}$$

A derivada de s no parâmetro t' é

$$\frac{\partial s}{\partial t'} = -\frac{\vec{R} \cdot \vec{V}}{R} + \frac{V^2}{c} - \frac{\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}}}{c} \quad . \tag{7}$$

Para v<<c estas expressões, (4), (6) e (7), se reduzem às

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 \ , \ \vec{\nabla} t' = -\frac{\hat{n}}{c} \quad e \quad \frac{\partial s}{\partial t'} = -R\,\frac{\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}}}{c} \tag{8}$$

onde $\hat{n} = \vec{R}/R$.

Antes de calcularmos as derivadas primeira de ϕ notemos que a derivada de v^2/c^2 é proporcional à v/c e, portanto, se anula para v << c. Deste modo obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi'}{\partial t'}\,\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t'} = \frac{g}{s^2}\,\frac{\partial s}{\partial t'} = -g\,\frac{\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}}}{Rc} \tag{9}$$

e

$$\vec{\nabla}\phi = g\,\frac{\vec{\nabla} s}{s^2} = \frac{g}{s^2}\left(\vec{\nabla} s_{\,t'=cte} + \frac{\partial s}{\partial t'}\,\vec{\nabla} t'\right) =$$

$$= -g\,\frac{\hat{n}}{R^2} + g\,\frac{(\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}})}{Rc^2}\,\hat{n} \ . \tag{10}$$

BIBLIOGRAFIA

01 - Harish-Chandra, Proc. Roy.Soc. 185, 269 (1944).

02 - Dirac, P.A.M., Proc. Roy. Soc. A-167, 148 (1938).

03 - Fock, V.A., J. Phys. U.S.S.R. 1, 81 (1939).

04 - Papapetrou, A., Proc. Roy. Soc. A-209, 248 (1951).

05 - Ragusa, S., Phys. Rev. D-26, 1979 (1982).

06 - G. Wentzel - Quantum Fields of Theory, Intersciense (1949) parte 7.

07 - Kahana, S. and H.R. Coish, Am.J.Phys. 24(4),225 (1956).

08 - Landau, L. e E.M.Lifshitz, Teoria do Campo, Mir(1980), Caps. 3, 4 e 9.

09 - Lorentz, H.A. The theory of Electrons, Dover -(1915) pg. 252.

10 - Pauli W., Pauli Lectures on Physics: Electrodynamics, MIT - Press (1973), parág. 30.