

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS**

**EFEITOS DE CONFINAMENTO EM**  
**UM GÁS DE BOSONS MAGNETIZADO**

José Pedro Rino

( Trabalho apresentado ao Instituto de Física e  
Química de São Carlos, USP, para a obtenção  
de título de Mestre em Física ).

Orientador :

Dr. Sylvio Goulart Rosa Jr.

**DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS**

**São Carlos, dezembro de 1977**

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

EFEITOS DE CONFINAMENTO EM  
UM GÁS DE BOSONS MAGNETIZADO

José Pedro Rino

(Trabalho apresentado ao Instituto  
de Física e Química de São Carlos,  
USP, para a obtenção de título de  
Mestre em Física).

Orientador:

Dr. Sylvio Goulart Rosa Jr.

BANCA EXAMINADORA:

Dr. Sylvio Goulart Rosa Jr. (orientador)

Dr. Rene Ayres de Carvalho (IFQSC-USP)

Dr. David Kojima (UFSCAR)



DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS  
São Carlos, dezembro de 1977

A

Lúcia e Tiago

Este trabalho foi realizado com o apoio financeiro do CNP<sub>q</sub> .

## AGRADEÇO

ao Prof. Sylvio Goulart Rosa Jr., meu orientador nesta dissertação, por sua participação e orientação;

ao Prof. Anibal Omar Caride, por seu estímulo ao meu ingresso na carreira científica;

aos professores da Universidade Federal de São Carlos, por minha formação básica;

a meus pais, pelo constante apoio;

a José Antonio Eiras e José Roberto Ruggiero, amigos constantes;

a Lúcia, por sua compreensão e apoio;

aos colegas do Departamento de Física, por sua amizade e contribuição neste trabalho.

## RESUMO

São investigadas, utilizando-se a distribuição grande canônica, as modificações introduzidas nas propriedades termodinâmicas e magnéticas de um sistema de bosons confinado por um potencial harmônico cilindricamente e esfericamente simétrico.

O sistema apresenta condensação de B.E. somente no limite de confinamento fraco e a causa desta transição é devido a não homogeneidade do sistema, além da dependência da função densidade de estados próximos da energia mínima. Para este limite de confinamento fraco, são analisados ainda os limites de campo magnético forte ou fraco, apresentando comportamentos distintos, podendo ser comparados com o sistema de May ou com o sistema de gás ideal não confinado e com campo magnético nulo (sistema livre).

A ordem da transição é analisada constatando-se não ser de primeira ordem.

O calor específico mostra uma descontinuidade finita na temperatura de transição.

Abaixo desta temperatura de transição, o sistema apresenta uma magnetização espontânea, valendo então a lei B-H.

## ABSTRACT

The modifications introduced in the thermodynamic and magnetic properties of a bosons system which is limited by a spherical and cylindrically harmonic potential are investigated, using the grand canonical distribution.

The system presents B.E. condensation only in the weak confinement limit and the cause of this transition is due to the non-homogeneity of the system in addition to the dependence of the density function of states near the minimum energy level. About this weak confinement limit, the limits of the strong or weak magnetic field are analysed too.

The limit of the strong or weak magnetic field show distinctive behavior and they may be compared with the May's system or with the non-confined system of the ideal gas and with the null-magnetic field (free system).

The order of this transition is analysed and it is verified as not being of the first order.

The specific heat present a finite discontinuity in the transition temperature.

Below this transition temperature, the system presents a spontaneous magnetization thus satisfying the B-H law.

## INDICE

Agradecimentos .....	I
Resumo .....	II
Abstract .....	III
CAPÍTULO I - Introdução .....	1
CAPÍTULO II - Sistema tridimensional com confinamento de simetria cilíndrica .....	6
CAPÍTULO III - Sistema bidimensional com confinamento harmônico de simetria cilíndrica .....	31
CAPÍTULO IV - Sistema tridimensional com confinamento harmônico de simetria esférica .....	38
CAPÍTULO V - Conclusão e Sugestões para trabalhos futuros	40
Apêndice A .....	42
Apêndice B .....	44
Apêndice C .....	47
Apêndice D .....	49
Apêndice E .....	54
Apêndice F .....	56
Apêndice G .....	58
Bibliografia .....	60



## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Dentro da vasta área de estudo sobre transição de fase , existe uma classe de sistemas que apresentam este fenômeno e podem ser tratados exatamente devido ao fato de não ser relevante a interação entre as partículas.

Os sistemas de bosons ideais constituem essa classe.

Após S.N. Bose (1924) desenvolver um novo método, a "estatística de Bose", utilizado na derivação da fórmula de Planck para a radiação do corpo negro, e A. Einstein aplicá-la a um sistema de gás ideal de partículas massivas, os sistemas de bosons têm sido alvo de constante interesse.

F. London rederivou a condensação de B.E. definida como uma ocupação macroscópica de um estado particular e estimou a região de temperatura onde os efeitos quânticos tornam-se importantes. Sugeriu também uma conexão entre a condensação de B.E. e a superfluidez do  $\text{He}^4$  .

Moskalenko, Blatt e Casella (1962), independentemente , estudaram a possibilidade de existir a condensação de B.E. em excitons (par eletron-buraco).

Mais recentemente, no estudo das linhas de emissão do CdSe, a linha de emissão mais intensa foi explicada, supondo-se a existência de uma condensação de B.E. dos excitons.

Devido ao fato dos sistemas de bosons serem altamente dependentes da dimensão e de campos externos, vários são os critérios encontrados na literatura que proíbem ou não a condensação de B.E..

Para um sistema de gás ideal tridimensional não confinado, Schafroth (1955), mostrou que um campo magnético uniforme externo destrói a condensação.

Contudo May (1965) demonstrou que para sistemas de dimensões maiores do que quatro, a condensação aparece mesmo quando o campo magnético uniforme externo está presente.

Para sistemas infinitos e homogêneos, Hohenberg apontou a proibição da condensação para uma a duas dimensões. Com relação a sistemas infinitos, mas não homogêneos, através de dois exemplos (gás ideal de bosons 1-D num campo gravitacional e gás ideal de bosons 2-D em rotação, Widon (1968) mostrou que a quebra da invariância translacional do sistema, devido a campos externos, introduz a condensação nestes sistemas.

Rehr e Mermin (1970), reestudando os exemplos de Widon, propuseram que a condensação ocorre, não porque o sistema é não homogêneo, mas sim porque a densidade de partículas torna-se divergente em alguma região do sistema.

Os sistemas de bosons são também altamente dependentes de efeitos de borda ou fronteira.

Uma maneira simples e matematicamente exata de se discutir estes efeitos, foi sugerida por Darwin (1930), no estudo do dia magnetismo de eletrons, através de um caso especial em que o gás é confinado por um potencial harmônico.

Dash, Schick e Campbell (1971), usando o confinamento harmônico para sistemas bidimensionais de filmes de  $\text{He}^4$  sem campo magnético, observaram a existência de uma transição de B.E.. É interessante notar que a densidade de partículas é sempre finita, contra -

riando o critério proposto por Rehr e Marmin.

Motivados por esses interesses, propusemo-nos a explorar o modelo de confinamento de Darwin para sistemas de bosons livres (gás ideal de bosons) sob a influência de um campo magnético uniforme externo. Mostraremos casos onde ocorrem a condensação de B.E. para sistemas de duas e tres dimensões com confinamento harmônico.

Notamos que o efeito da dimensionalidade no modelo de Darwin é marcante. Para melhor observar isto, discutiremos:

1. Sistema 3-D confinado por um potencial harmônico cilindricamente simétrico com campo magnético (de agora em diante denominado sistema 3D-2d)
2. Sistema 2-D confinado por um potencial harmônico cilindricamente simétrico com campo magnético (2D-2d)
3. Sistema 3-D confinado por um potencial harmônico esféricamente simétrico com campo magnético (3D-3d).

Fazemos o estudo em que o potencial harmônico torna-se arbitrariamente grande ou pequeno (mola forte ou fraca).

O sistema 2D-2d com  $B=0$  foi estudado por Dash, Schick e Campbell. Em nosso caso, o estudo desse sistema, com mola fraca, resultou numa transição de B.E. somente para campos fracos. Tanto a mola forte como o campo forte destroem a condensação deste sistema.

Para os sistemas 3D-2d e 3D-3d o limite de mola forte também destrói a condensação, que só ocorre para mola fraca, qualquer que seja o campo. Para cada um dos sistemas, calculamos primeiro a função de partição de uma partícula e tomamos o limite de

mola fraca, que corresponde à aproximação semi-clássica da função de partição.

Através de uma transformada inversa de Laplace pode-se obter a densidade de estados. O cálculo dessa densidade é importante porque nos possibilita prever a presença de um condensado e entender as aproximações de campo fraco ou forte.

Podemos observar também que, na função de partição, a dependência no campo magnético é a mesma que a obtida por Schafroth e May. Com isto, é de se esperar que as propriedades magnéticas também tenham as mesmas formas funcionais.

Um outro fato importante é que, no limite de confinamento fraco, a mola modifica a função de partição numa potência de  $\beta (= 1/KT)$  diferente, comparada com o sistema livre (gás ideal de bosons). Assim, podemos fazer uma correspondência da dimensão deste sistema com os sistemas não confinados ( $k = 0$ ). Desta análise, podemos concluir, por exemplo, que o sistema 2D-2d, no limite de mola fraca, está relacionado com um sistema não confinado de dimensão quatro.

Podemos então esperar expressões para a energia média, o número de partículas e o calor específico de forma semelhante aos resultados já apresentados na literatura.

Usando o método desenvolvido por S.G. Rosa Jr. e W.T. Grandy Jr., obteremos o potencial termodinâmico de um sistema de partículas (que nada mais é que o logaritmo da grande função de partição) usando uma representação integral (inversa de Mellin) para a função logaritmo.

A partir do potencial termodinâmico,  $\Omega(\mu, k, B, T)$  podemos

obter a entropia, a energia média, o calor específico e a magnetização por derivação parcial de  $\Omega$  .

Nos capítulos seguintes fazemos o estudo dos sistemas somente com confinamento fraco, por apresentarem condensação de B.E. No apêndice, estudaremos o limite de confinamento forte.

CAPÍTULO II  
SISTEMA TRIDIMENSIONAL COM CONFINAMENTO  
DE SIMETRIA CILINDRICA

1. A FUNÇÃO DE PARTIÇÃO

Consideremos um gás de bosons livres de carga  $-e$ , massa  $m$ , confinado por um potencial harmônico bidimensional  $V(\vec{r}) = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2)$  e sob a influência de um campo magnético externo uniforme  $\vec{B} = B \hat{z}$ .

Escolhendo o gauge cilíndrico para o potencial vetor  $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{B}{2} (-y, x, 0)$ , a hamiltoneana clássica de um boson livre é

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{eB}{2mc} (x p_y - y p_x) + \frac{1}{2} \left( \frac{e^2 B^2}{4mc^2} + k \right) (x^2 + y^2) . \quad (1.1)$$

Com a introdução da frequência de Larmor  $\omega_L = \frac{eB}{2mc}$  e da frequência de Larmor modificada  $\Omega_L = (\omega_L^2 + \omega_0^2)^{1/2}$ , onde  $\omega_0^2 = k/m$ , e mais a substituição do momento  $\vec{p}$  pelo operador  $-i\hbar \nabla$ , obtemos a hamiltoneana quântica de uma partícula:

$$H = - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - i\hbar \omega_L \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} m \Omega_L^2 (x^2 + y^2) . \quad (1.2)$$

Sendo  $\psi_j$  as auto funções e  $E_j$  os auto valores de  $H$ , a função de partição de uma partícula pode então ser calculada através de

$$Z(\beta) = \sum_j e^{-\beta E_j} . \quad (1.3)$$

Seguindo o procedimento feito por Felderhof e Roval, podemos diagonalizar a hamiltoneana (1.2) com a introdução das seguintes coordenadas normais

$$a_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \frac{m\Omega_L}{\hbar} \right)^{1/2} (x \mp iy) + \frac{i}{2(\hbar m\Omega_L)^{1/2}} (p_x \mp ip_y) \quad (1.4)$$

as regras de comutação de  $a_{\pm}$  e  $a_{\pm}^+$ , lembrando que

$$[p_i, p_j] = [x_i, x_j] = 0 ; [p_i, x_j] = -i\hbar \delta_{ij} ,$$

são

$$[a_{\pm}, a_{\mp}] = [a_{\pm}^+, a_{\mp}^+] = [a_{\pm}^+, a_{\mp}] = 0$$

$$[a_{\pm}, a_{\pm}^+] = 1 .$$

Desta forma a hamiltoneana (1.2), em termos dos operadores  $a_{\pm}^+$  e  $a_{\pm}$ , pode ser escrita como:

$$H = \hbar\omega_+ (a_+^+ a_+ + \frac{1}{2}) + \hbar\omega_- (a_-^+ a_- + \frac{1}{2}) + \frac{p_z^2}{2m} \quad (1.5)$$

onde introduzimos

$$\omega_{\pm} = \Omega_L \pm \omega_L .$$

Os auto valores são agora facilmente obtidos

$$E_{n_+, n_-, p_z} = \hbar\omega_+ (n_+ + \frac{1}{2}) + \hbar\omega_- (n_- + \frac{1}{2}) + \frac{p_z^2}{2m} . \quad (1.6)$$

Com os níveis de energia, a função de partição é facilmente determinada por soma direta

$$Z(\beta) = \sum_{n_+, n_-, p_z} e^{-\beta E_{n_+, n_-, p_z}} = \frac{L}{4\lambda} \frac{1}{\sinh\left(\beta \frac{\hbar\omega_+}{2}\right)} \frac{1}{\sinh\left(\beta \frac{\hbar\omega_-}{2}\right)} \quad (1.7)$$

onde  $\lambda = \left(\frac{2\pi\beta\hbar^2}{m}\right)^{1/2}$  é o comprimento de onda térmico.

1.1 - Limite de confinamento fraco - ( $\omega_0 \rightarrow 0$ )

Neste caso, as frequências são aproximadas por

$$\omega_- \approx \frac{\omega_0^2}{2\omega_L} \ll 1$$

e

$$\omega_+ \approx 2\omega_L$$

resultando para a função de partição

$$Z(\beta) = \frac{L}{\lambda} \frac{1}{(\beta\hbar\omega_0)^2} \frac{\beta\hbar\omega_L}{\sinh(\beta\hbar\omega_L)} \quad (1.8)$$

Este mesmo resultado pode ser obtido, quando se faz uma aproximação semi-clássica na energia. Quando  $\omega_0 \rightarrow 0$  temos que o espectro de energia de um oscilador tende ao contínuo. O somatório em  $n_-$  pode ser expandido em série de potências de  $\hbar$ , sendo o ter-



mo de potência zero a função de partição clássica de uma partícula.

## 2. O POTENCIAL TERMODINÂMICO

Neste segundo ítem, calculamos o potencial termodinâmico  $\Omega(k, B, T, \mu, L)$  através de uma representação integral (inversa de Mellin) para a função logaritmo.

A função grande partição é

$$Z(\beta, L, k, B, N) = e^{-\beta\Omega} \quad (2.1)$$

onde

$$\ln Z = -\sum_j \ln \left[ 1 - e^{-\beta(E_j - \mu)} \right]$$

sendo  $\mu$  o potencial químico,  $\beta = 1/KT$  e  $E_j$  o espectro de energia.

Então

$$\Omega = KT \sum_j \ln \left[ 1 - e^{-\beta(E_j - \mu)} \right] \quad (2.2)$$

A representação integral para a função logaritmo é

$$\ln \left[ 1 - e^{-\beta(E_j - \mu)} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\pi \cos \pi t}{t \sin \pi t} e^{\beta\mu t} e^{-\beta E_j t} dt$$

onde  $0 < c < 1$ .

Deste modo o potencial termodinâmico (2.2), após a troca da ordem de soma e integração, torna-se

$$\Omega = KT \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\pi \cos \pi t}{t \operatorname{sen} \pi t} e^{\beta \mu t} \sum_j e^{-\beta E_j t} dt \quad (2.3)$$

ou seja, o potencial termodinâmico é uma transformada integral da função de partição de uma partícula

$$Z(\beta t) = \sum_j e^{-\beta t E_j} .$$

A característica fundamental da equação (2.3) é a separação completa do problema dinâmico (totalmente incorporado no termo  $Z(\beta t)$ ) da estatística obedecida pelas partículas (associada ao termo  $\cos \pi t$ ). Assim, o termo  $Z(\beta t)$  contém todas as consequências de tamanho, forma, dimensionalidade e influência de campos externos.

#### 2.1 - Limite de confinamento fraco

Substituindo a função de partição (1.8) na expressão geral para o potencial termodinâmico (eq. (2.3)), obtemos:

$$\Omega = \frac{L}{\lambda} KT \frac{\beta \epsilon_L}{(\beta \hbar \omega_0)} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\pi \cos \pi t}{t^{5/2} \operatorname{sen} \pi t} \frac{e^{\beta \mu t}}{\operatorname{senh}(\beta t \epsilon_L)} dt \quad (2.4)$$

Impondo a relação  $\mu < \hbar \Omega_L^*$ , o contorno pode ser fechado à direita do eixo imaginário.  $\Omega$  pode então ser escrito em função dos resíduos calculados nos polos do integrando (2,4) que ficam à di-

---

\* Apêndice A

reita do caminho C (veja figura 1).

Estas singularidades são provenientes do termo  $\text{sen}^{-1} \pi t$  e estão localizadas no semi eixo real positivo, nos pontos  $1, 2, 3, \dots, j, \dots$ .

Usando o teorema de Cauchy e com o auxílio do teorema

$$\text{Res} \left\{ \frac{f(z)}{g(z)} \right\} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \quad (2.5)$$

válido para polos simples, obtemos para o potencial termodinâmico

$$\Omega = -KT \frac{L}{\lambda} \frac{\beta \epsilon_L}{(\beta \hbar \omega_0)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{\beta \mu j}}{j^{5/2} \text{senh}(\beta j \epsilon_L)} \quad (2.6)$$

A partir de (2.6), podemos calcular facilmente outras funções termodinâmicas de interesse, tais como

$$N = - \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right|_{T, B, k, L} = \frac{L}{\lambda} \frac{\beta \epsilon_L}{(\beta \hbar \omega_0)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{\beta \mu j}}{j^{3/2} \text{senh}(\beta j \epsilon_L)} \quad (2.7)$$

e

$$m = - \left. \frac{\partial \Omega}{\partial B} \right|_{T, \mu, L, k} = \frac{L}{\lambda} \frac{\beta \epsilon_L \mu_0}{(\beta \hbar \omega_0)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta j (\epsilon_L - \mu)}}{j^{7/2}} \left( \frac{2j}{-e^{-2\beta j \epsilon_L}} \right) \left[ \frac{1}{\beta \epsilon_L} - j \text{cotgh} \beta j \epsilon_L \right] \quad (2.8)$$

Comparando estes resultados com os obtidos por May para um sistema n-dimensional não confinado na presença de campo magné

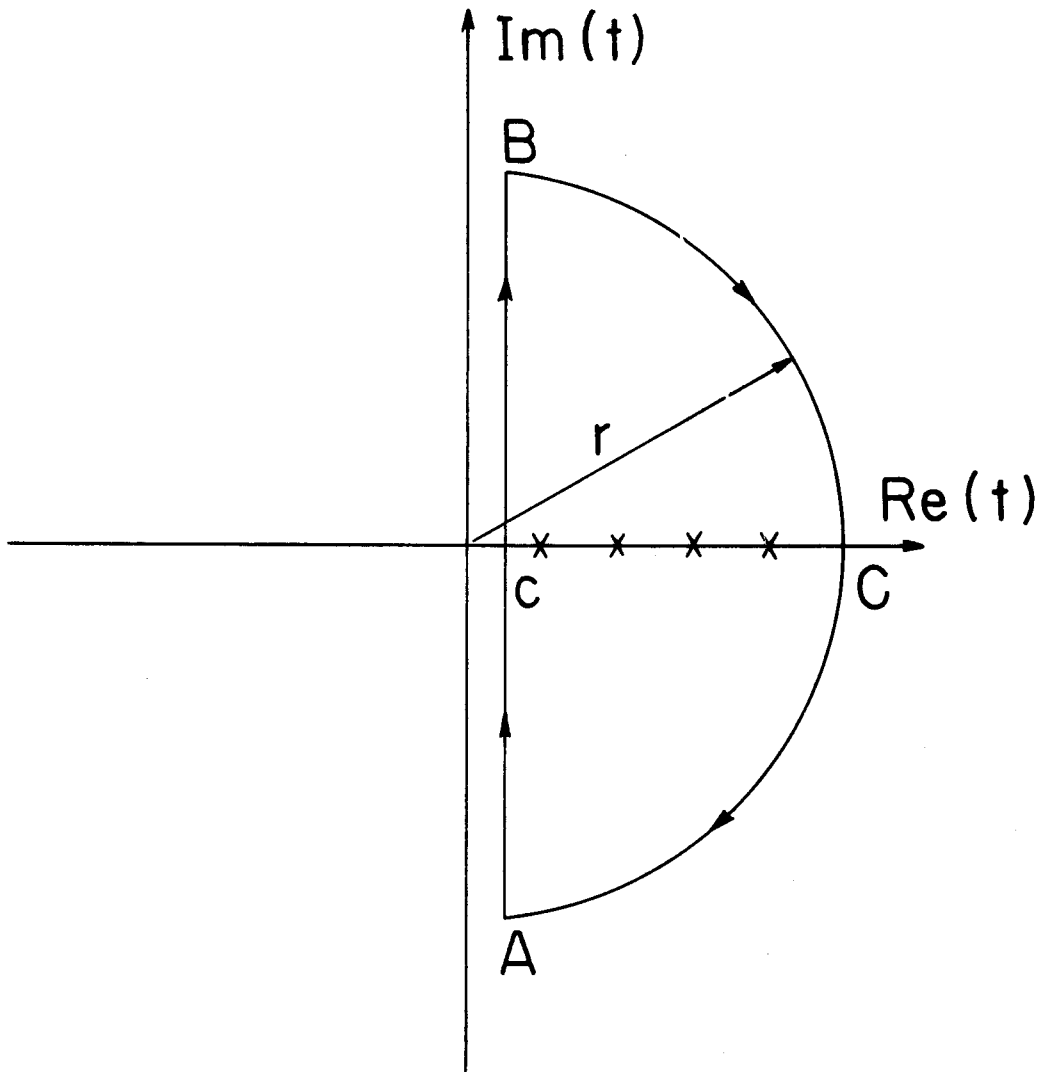


Figura - 1

tico,

$$\Omega_{\text{May}} = - \frac{KT V}{\lambda^n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta j (\epsilon_L - \mu)}}{j^{\frac{n}{2} + 1}} \left( \frac{2j \beta \epsilon_L}{1 - e^{-2j \beta \epsilon_L}} \right) \quad (2.6a)$$

$$N_{\text{May}} = \frac{V}{\lambda^n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta j (\epsilon_L - \mu)}}{j^{n/2}} \left( \frac{2j \beta \epsilon_L}{1 - e^{-2j \beta \epsilon_L}} \right) \quad (2.7a)$$

$$m_{\text{May}} = \frac{V}{\lambda^n} \mu_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta j (\epsilon_L - \mu)}}{j^{\frac{n}{2} + 1}} \left( \frac{2j \beta \epsilon_L}{1 - e^{-2j \beta \epsilon_L}} \right) \left[ \frac{1}{\beta \epsilon_L} - j \operatorname{cotgh} \beta j \epsilon_L \right] \quad (2.8a)$$

notamos que as equações do sistema 3D-2d estão relacionadas com as do sistema de dimensão 5 de May.

Estudando a convergência da série (2.7a) May mostrou que a condensação ocorre para sistemas de dimensões maiores do que quatro. Vemos, portanto, que o sistema confinado 3D-2d apresenta a condensação de B.E..

Dentro deste limite de confinamento fraco, é possível ainda fazer um estudo em que o campo magnético seja fraco ou forte ( $\beta \epsilon_L \ll 1$  e  $\beta \epsilon_L \gg 1$ ). Para isto fazemos uma separação em dois sub-ítem 2.1.a e 2.1.b onde obtemos as expressões para  $\Omega, N$  e  $m$ , tratando-as no ítem 3 de forma mais detalhada.

2.1.a - *Campo fraco* ( $\beta \epsilon_L \ll 1$ )

Ao tomarmos o limite de campo fraco\*, obtemos para (2.6), (2.7) e (2.8)

$$\Omega = - \frac{L}{\lambda} \frac{KT}{(\beta \hbar \omega_0)^2} F_{7/2} [\beta (\epsilon_L - \mu)] \quad (2.9)$$

$$N = \frac{L}{\lambda} \frac{1}{(\beta \hbar \omega_0)^2} F_{5/2} [\beta (\epsilon_L - \mu)] \quad (2.10)$$

$$m = - \frac{L \mu_0}{\lambda (\beta \hbar \omega_0)^2} \frac{\beta \epsilon_L}{3} F_{3/2} [\beta (\epsilon_L - \mu)] \quad (2.11)$$

respectivamente, potencial termodinâmico, número de partículas e momento magnético dos estados excitados do sistema.

Se definirmos  $\mu' = -(\epsilon_L - \mu)$  como sendo um novo potencial químico, fica bastante clara a semelhança das equações acima com as equações de um sistema livre de dimensão 5. Este relacionamento do sistema confinado com o sistema livre aparecerá muito nítido no cálculo das funções termodinâmicas.

2.1.b - *Campo forte* ( $\beta \epsilon_L \gg 1$ )

Neste limite, as equações (2.6), (2.7) e (2.8) juntamente com as propriedades das funções de B.E\*\*, resultam em:

$$\Omega = - \frac{2L \epsilon_L}{\lambda (\beta \hbar \omega_0)^2} F_{5/2} [\beta (\epsilon_L - \mu)] \quad (2.12)$$

---

\* Apêndice B

\*\* Apêndices B e C

$$N = \frac{2L \beta \epsilon_L}{\lambda (\beta \hbar \omega_0)^2} F_{3/2} [\beta (\epsilon_L - \mu)] \quad (2.13)$$

$$m = \frac{2L \mu_0}{\lambda (\beta \hbar \omega_0)^2} \left\{ F_{5/2} [\beta (\epsilon_L - \mu)] - \beta \epsilon_L F_{3/2} [\beta (\epsilon_L - \mu)] \right\} \quad (2.14)$$

Notemos que o limite de campo forte "muda" a "dimensão" do sistema, já que podemos relacioná-lo com um sistema livre de dimensão 3.

### 3. PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS E MAGNÉTICAS

Neste ítem, fazemos um estudo detalhado da entropia, energia média, calor específico e magnetização.

#### 3.1 - Confinamento fraco e campo fraco ( $\omega_0 \ll \omega_L$ e $\beta \epsilon_L \ll 1$ )

De (2.9) e (2.10) temos

$$\Omega = - \frac{L}{\lambda} \frac{KT}{(\beta \hbar \omega_0)^2} F_{7/2} [\beta (\epsilon_L - \mu)]$$

$$N = \frac{L}{\lambda} \frac{1}{(\beta \hbar \omega_0)^2} F_{5/2} [\beta (\epsilon_L - \mu)]$$

Como a densidade de estados é zero para  $\epsilon = \epsilon_L$  e as expressões foram obtidas transformando-se soma em integral, devemos incluir nas expressões acima a contribuição do estado fundamental, a saber

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{L}{\lambda} \frac{KT}{(\beta \hbar \omega_0)^2} F_{7/2} \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right] \quad (3.1)$$

$$N = N_0 + \frac{L}{\lambda} \frac{1}{(\beta \hbar \omega_0)^2} F_{5/2} \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right] \quad (3.2)$$

onde

$$\left. \begin{aligned} \Omega_0 &= KT \ln \left[ 1 - e^{-\beta (\epsilon_L - \mu)} \right] \\ N_0 &= \frac{1}{e^{\beta (\epsilon_L - \mu)} - 1} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

O caráter monótono decrescente das funções de B.E. somado à restrição sobre o potencial químico ( $-\infty < \mu \leq \epsilon_L$ ) impõe a existência de um número máximo de partículas na equação (2.10), dado por

$$N_c = \frac{L}{\lambda (\beta \hbar \omega_0)^2} F_{5/2}(0) \quad (3.4)$$

onde fizemos  $\mu = \epsilon_L$ .

Na situação em que o número total de partículas presentes no sistema for maior do que  $N_c$ , certamente haverá uma fração não desprezível de partículas no estado condensado.

Alternativamente, podemos definir uma temperatura crítica  $T_c = T_c(N, \epsilon_L, k, L)$  por

$$N = \frac{L}{(\hbar \omega_0)^2} \left( \frac{mK}{2\pi \hbar^2} \right)^{1/2} K^2 T_c^{5/2} F_{5/2}(0) \quad (3.5)$$



A grandeza  $\frac{L}{(\hbar\omega_0)^2} \left(\frac{mK}{2\pi\hbar^2}\right)^{1/2} K^2$  pode ser reescrita em termos de uma temperatura característica  $T_0$ , de um sistema confinado sem campo magnético (veja apêndice F).

Assim, (3.5) resulta em

$$T_c = T_0$$

ou seja, a temperatura crítica do sistema é independente do campo magnético no limite de campo fraco.

Substituindo (3.5) em (3.2),

$$N = N_0 + N \left(\frac{T}{T_c}\right)^{5/2} \frac{F_{5/2}[\beta(\epsilon_L - \mu)]}{F_{5/2}(0)} \quad (3.6)$$

Para  $T > T_c$ , ajustamos  $\mu$  de forma que a contribuição do segundo termo não seja maior do que o número de partículas do sistema, ou seja,  $\mu < \epsilon_L$ .

Neste caso, o primeiro termo de (3.6) é desprezível frente ao segundo. Com isto, temos

$$F_{5/2}[\beta(\epsilon_L - \mu)] = \left(\frac{T_c}{T}\right)^{5/2} F_{5/2}(0) \quad (3.7)$$

que é a equação que determina o potencial químico  $\mu$  como função da temperatura, do número de partículas ( $T_c$ ), da magnitude da energia do estado fundamental e do confinamento ( $T_c$ ).

Por outro lado, para  $T < T_c$ ,  $\mu \approx \epsilon_L$  e portanto

$$N_{exc} = N \left(\frac{T}{T_c}\right)^{5/2} \quad (3.8)$$

e

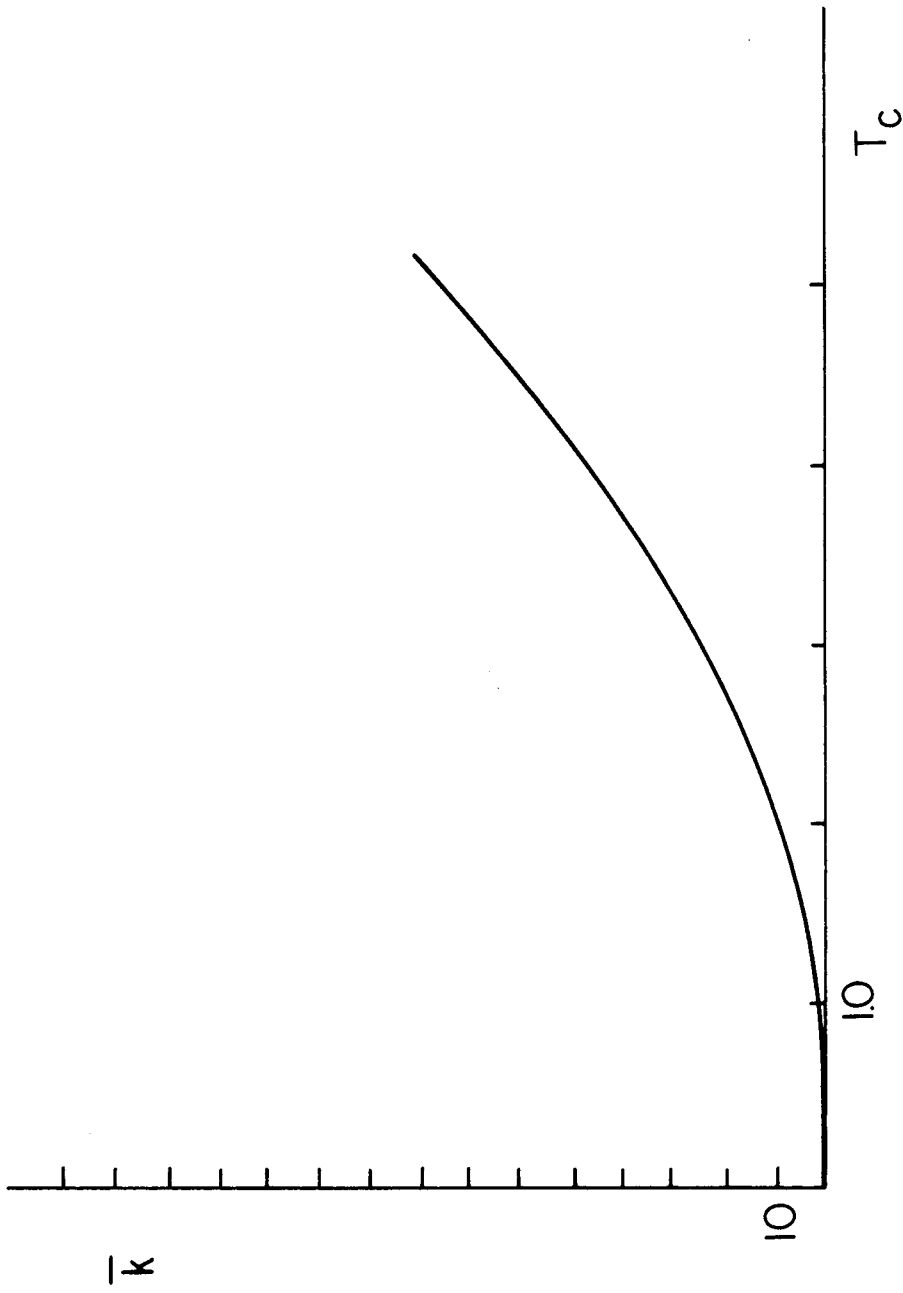


Figura - 2 Dependência da temperatura crítica com a constante

de mola  $\bar{k} = \frac{N\hbar}{Lm K^2 \left(\frac{mK}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}} k = T_c^{5/2} F_{5/2}(0)$

$$N_0 = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{5/2} \right] \quad (3.9)$$

Este último resultado mostra a semelhança com um sistema de gás ideal livre de dimensão 5. A diferença está na dependência da temperatura crítica  $T_c(k, B, N, L)$ .

A ocupação macroscópica do estado fundamental tem como consequência um comportamento termodinâmico diverso daquele observado, quando  $T > T_c$ . Isto é, as grandezas termodinâmicas, como função da temperatura, têm dois ramos: abaixo e acima de  $T_c$ .

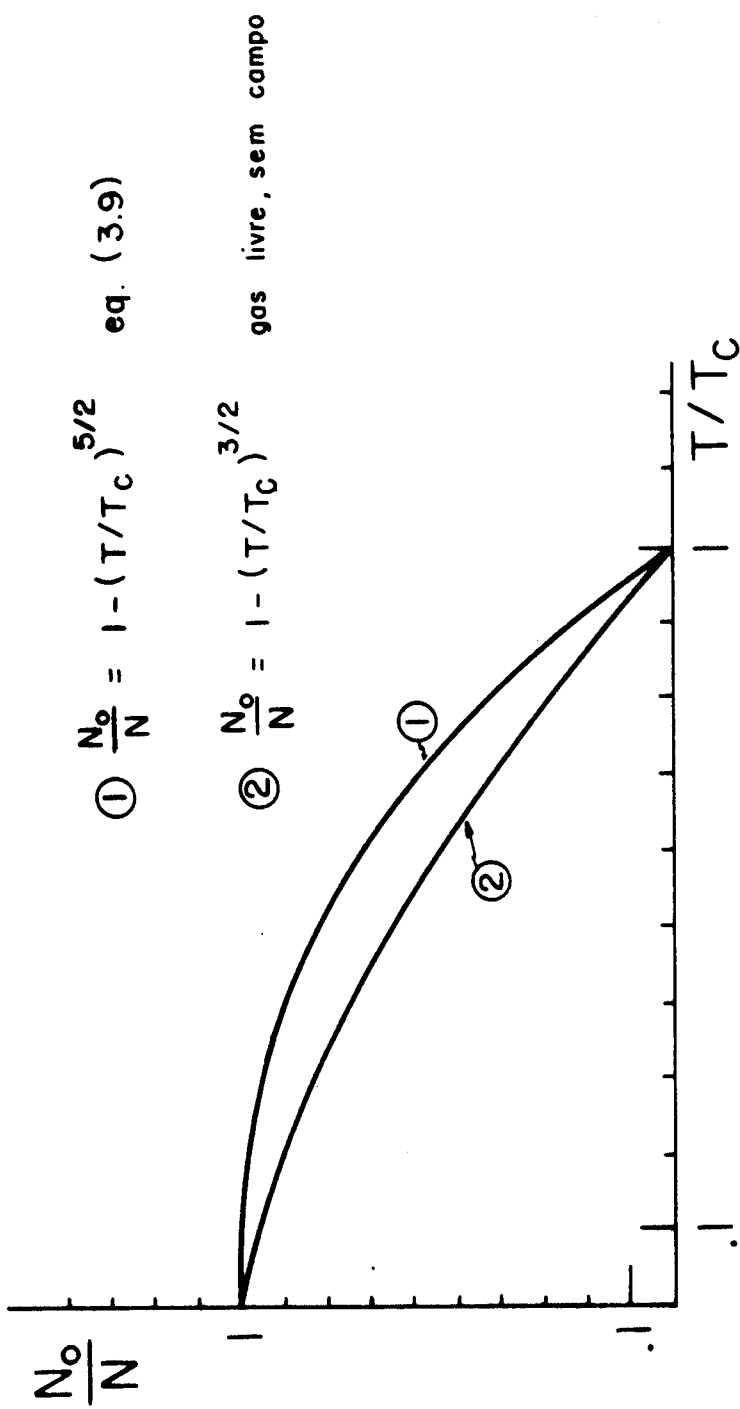
Como passo intermediário no cálculo do calor específico, calculamos a entropia  $S(T, \mu, L, B, k)$  e a energia média  $E(T, L, k, B, \mu)$  do sistema. Assim,

$$S = - \left. \frac{\partial \Omega}{\partial T} \right|_{L, \mu, k, B} \quad (3.10)$$

$$E = N\mu + \left. \frac{\partial (\Omega\beta)}{\partial \beta} \right|_{L, \mu, k, B} \quad (3.11)$$

Estas funções são facilmente obtidas e após substituir (3.5), obtemos

$$S = \frac{NK}{F_{5/2}(0)} \left( \frac{T}{T_c} \right)^{5/2} \left[ \frac{7}{2} F_{7/2}[\beta(\epsilon_L - \mu)] + \beta(\epsilon_L - \mu) F_{5/2}[\beta(\epsilon_L - \mu)] \right] \quad (3.12)$$



**Figura 3** - Número de partículas condensadas como função da temperatura. A curva (1) é obtida da eq.(3.9) . A curva (2) é o resultado de um gás de bosons ideal livre.

$$E = \frac{5}{2} NKT \left( \frac{T}{T_C} \right)^{5/2} \frac{F_{7/2} [\beta (\epsilon_L - \mu)]}{F_{5/2} (0)} + N \epsilon_L \quad (3.13)$$

Assim para os dois intervalos de temperatura  $T > T_C$  e  $T < T_C$ , usando a notação de F. London,  $E^+$  e  $E^-$ , temos:

Para  $T < T_C$ ,  $\mu \approx \epsilon_L$  e  $N = N_0 + N_{exc}$  (Neste intervalo é necessário considerar tanto as partículas do estado condensado como as do estado excitado)

$$E^- = \frac{5}{2} NKT \left( \frac{T}{T_C} \right)^{5/2} \frac{F_{7/2} (0)}{F_{5/2} (0)} + \epsilon_L N \quad (3.14)$$

Para  $T > T_C$ ,  $N_0$  é desprezível frente a  $N_{exc}$  e então  $N \approx N_{exc}$

$$E^+ = \frac{5}{2} NKT \frac{F_{7/2} [\beta (\epsilon_L - \mu)]}{F_{5/2} [\beta (\epsilon_L - \mu)]} + \epsilon_L N \quad (3.15)$$

Nas expressões acima, os primeiros termos são os de um gás livre 5-D e a presença do termo  $\epsilon_L N$  é devido à translação dos níveis de energia pelo campo magnético.

O calor específico é agora facilmente determinado. Para um número médio de partículas  $N$  fixado, a dependência na temperatura do potencial químico pode ser eliminada através de (3.7).

Assim, para  $T < T_C$ , temos que  $\mu \approx \epsilon_L$  e  $N = \text{fixo}$  e então

$$C^- = \left. \frac{\partial E^-}{\partial T} \right|_{L,k,B} = \frac{35}{4} NK \left( \frac{T}{T_C} \right)^{5/2} \frac{F_{7/2} (0)}{F_{5/2} (0)} \quad (3.16)$$

Para  $T > T_C$ , de maneira análoga

$$C^+ = \left. \frac{\partial E^+}{\partial T} \right|_{L,k,B} = \frac{35}{4} NK \frac{F_{7/2}[\beta(\epsilon_L - \mu)]}{F_{5/2}[\beta(\epsilon_L - \mu)]} - \frac{25}{4} \frac{F_{5/2}[\beta(\epsilon_L - \mu)]}{F_{3/2}[\beta(\epsilon_L - \mu)]} \quad (3.17)$$

O valor clássico de Dulong-Petit  $C^+ = \frac{5}{2} NK$  é obtido de (3.17) notando-se que

- a) para temperaturas muito altas,  $T \gg T_C$ ,  $-\beta\mu \gg 1$  ;
- b) o caráter assintótico das funções de B.E.

$$F_\sigma(\alpha) \approx e^{-\alpha}, \quad \text{onde } \alpha = -\beta\mu \quad .$$

A dependência em  $\mu$  nas equações (3.16) e (3.17) pode ser eliminada através de (3.7) e da representação em série das funções de B.E.. O resultado numérico de tais operações pode ser visto na figura 4.

A característica interessante mostrada pelo calor específico é a existência de uma descontinuidade finita em  $T = T_C$ ,

$$\begin{aligned} \Delta C &= C^- - C^+ \\ &= \frac{25}{4} NK \frac{F_{5/2}(0)}{F_{3/2}(0)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

descontinuidade esta independente de qualquer uma das variáveis do sistema.

Notemos também que a entropia (eq. (3.12)) está de acordo com a 3a. lei da termodinâmica;  $S \rightarrow 0$  quando  $T \rightarrow 0^\circ K$ , ou seja, a fase condensada (que é a única existente em  $T = 0^\circ K$ ) tem entropia

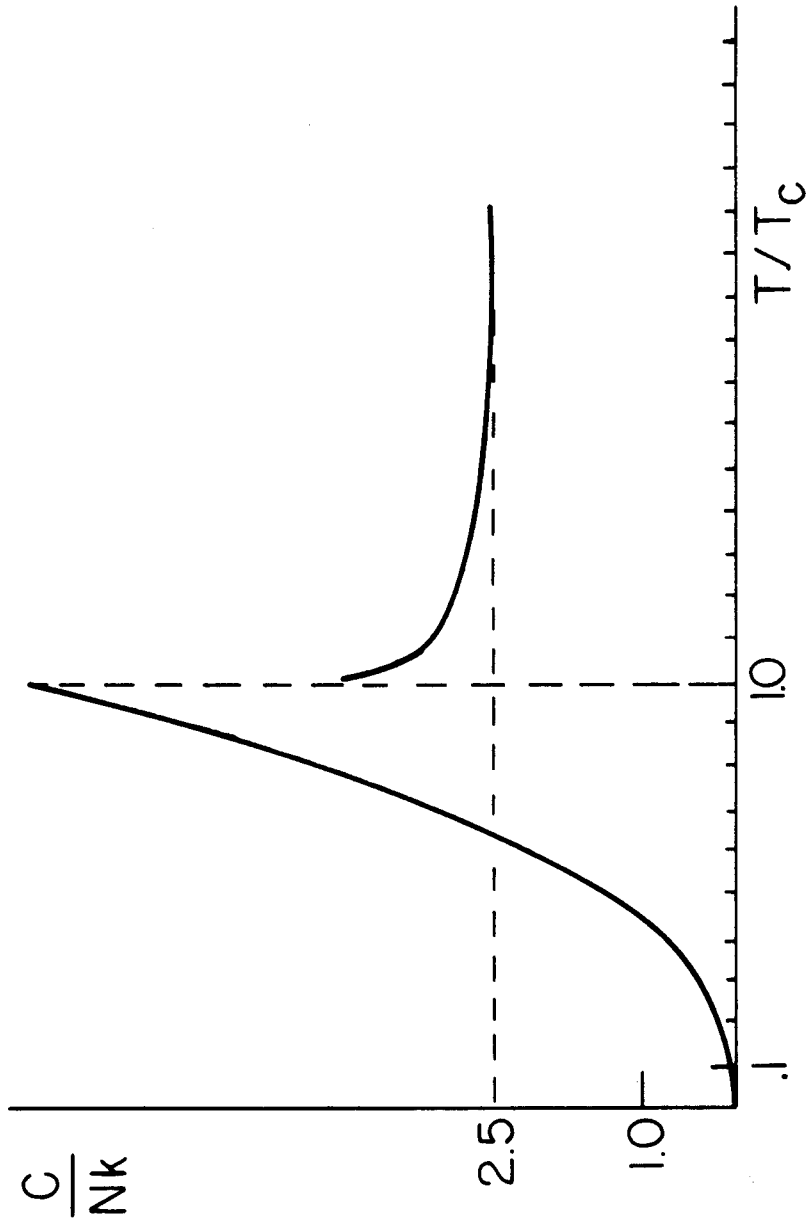


Figura 4 - Curva do calor específico com L, K, B constantes (Mola fraca e campo fraco).

nula.

De (3.12) temos, para os dois intervalos de temperatura

$$S^- = \frac{7}{2} NK \left( \frac{T}{T_C} \right)^{5/2} \frac{F_{7/2}(0)}{F_{5/2}(0)} \quad (3.19)$$

e

$$S^+ = \frac{7}{2} NK \frac{F_{7/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)]}{F_{5/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)]} + NK \beta(\epsilon_L - \mu) \quad (3-20)$$

Assim, em  $T = T_C$ ,  $\mu \approx \epsilon_L$  e então

$$\Delta S = S^+ - S^- = 0 \quad (3-21)$$

ou seja, a entropia é contínua em  $T = T_C$ .

Mas de (3.18) temos uma descontinuidade finita na derivada segunda do potencial termodinâmico. Usando o critério de Ehrenfest, vemos que tal transição de fase é de segunda ordem.

O momento magnético para este sistema de mola fraca e campo fraco é dado por (2.11).

Novamente, para os dois intervalos de temperatura, temos

$$m^- = - \frac{L}{\lambda (\beta \hbar \omega_0)^2} \frac{\beta \epsilon_L \mu_0}{3} F_{3/2}(0) \quad (3.22)$$

$$m^+ = - \frac{L}{\lambda (\beta \hbar \omega_0)} \frac{\beta \epsilon_L \mu_0}{3} F_{3/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)] \quad (3.23)$$

Como  $D(\epsilon) = 0$  quando  $\epsilon = \epsilon_L$ , a contribuição do estado fundamental não foi levada em conta em (3.22). Assim, devemos acres-



centar o termo

$$m_0 = - \frac{\partial \Omega_0}{\partial B} = -\mu_0 N_0$$

na expressão de magnetização.

Portanto, para  $T < T_c$ , o momento magnético total é

$$m^- = -\mu_0 N \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{5/2} \right] + \frac{\beta \epsilon_L}{3} \left( \frac{T}{T_c} \right)^{5/2} \frac{F_{3/2}(0)}{F_{5/2}(0)} \right\} \quad (3.24)$$

Colocamos novamente abaixo a equação obtida por May para a magnetização, neste mesmo limite de  $\beta \epsilon_L \ll 1$

$$m_{\text{May}} = -\mu_0 N \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{n/2} \right] + \frac{\beta \epsilon_L}{3} \left( \frac{T}{T_c} \right)^{n/2} \frac{\zeta\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\zeta(n/2)} \right\}$$

onde  $n$  é a dimensão do sistema e  $\zeta(z)$  é a função zeta.

Tal comparação, lembrando que  $F_\sigma(0) = \zeta(\sigma)$ , vem confirmar o que foi dito na introdução deste trabalho.

Temos pois um sistema estritamente diamagnético. Observe mos contudo que abaixo de  $T_c$  o estado fundamental contribui com uma magnetização espontânea para o sistema, que continua a existir, mesmo na ausência de campo magnético aplicado.

Estes fatos indicam que, para este sistema, vale a lei B-H, dada por

$$\left. \begin{array}{l} B = H - H_c \\ B = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} H > H_c \\ H < H_c \end{array} \quad (3.25)$$

com  $H_C = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^{5/2} \right]$  ou seja, a magnetização espontânea devido ao estado fundamental, "cria" um campo magnético de expulsão. A outra contribuição de (3.24) é somente um pequeno termo diamagnético devido aos bosons não condensados.

### 3.2 - Confinamento fraco e campo forte ( $\omega_0 \ll \omega_L$ e $\beta \epsilon_L \gg 1$ )

Neste caso, temos de (2.12) e (2.13), onde já levamos a contribuição do estado fundamental

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{2L \epsilon_L}{\lambda (\beta \hbar \omega_0)^2} F_{5/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)] \quad (3.26)$$

$$N = N_0 + \frac{2L \beta \epsilon_L}{\lambda (\beta \hbar \omega_0)^2} F_{3/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)] \quad (3.27)$$

De maneira análoga àquela feita no ítem anterior, (a restrição sobre o potencial químico juntamente com as propriedades das funções de B.E.), temos que existe um número crítico de partículas dado por

$$N_C = \frac{2L \beta \epsilon_L}{\lambda (\beta \hbar \omega_0)^2} F_{3/2}(0)$$

Quando o número total de partículas presentes no sistema for maior do que  $N_C$ , haverá uma fração não desprezível de partículas no estado fundamental, mostrando a existência de um condensado.

Podemos definir uma temperatura crítica  $T_C(N, \beta, B, k)$ , em vez de  $N_C$ , por

$$N = \frac{2L \epsilon_L}{(\hbar\omega_0)^2} \left( \frac{mK}{2\pi\hbar^2} \right)^{1/2} K T_C^{3/2} F_{3/2}(0) \quad (3.28)$$

Eliminando o termo dependente da mola e tamanho em termos de uma temperatura característica do sistema sem campo magnético (apêndice F), podemos escrever a temperatura crítica  $T_C$  como

$$\frac{T_C}{T_0} = \left[ \frac{F_{5/2}(0)}{2 \frac{\epsilon_L}{KT_0} F_{3/2}(0)} \right]^{2/3} < 1 \quad (3.29)$$

ou seja, a temperatura crítica deste sistema confinado na presença de campo forte é menor do que a temperatura crítica do sistema confinado sem campo magnético.

Pode-se dizer que o campo magnético diminui a temperatura crítica.

Com o auxílio da expressão para a temperatura crítica, reescrevemos a equação para o número de partículas:

$$N = N_0 + N \left( \frac{T}{T_C} \right)^{3/2} \frac{F_{3/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)]}{F_{3/2}(0)} \quad (3.30)$$

Pelo mesmo argumento usado anteriormente temos para  $T > T_C$

$$F_{3/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)] = \left( \frac{T_C}{T} \right)^{3/2} F_{3/2}(0) \quad (3.31)$$

e para  $T < T_C$ ,  $\mu \approx \epsilon_L$

$$N_{exc} = N \left( \frac{T}{T_C} \right)^{3/2} \quad (3.32)$$

$$N_0 = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^{3/2} \right] \quad (3.33)$$

Novamente podemos visualizar a semelhança destes resultados (eq. (3.32) e (3.33)) com os resultados de um sistema livre tri dimensional. Tal fato decorre da semelhança entre as funções densidade de estados destes sistemas para baixas energias.

A entropia e energia média, seguindo o procedimento anterior, são dadas por

$$S = \frac{NK}{F_{3/2}(0)} \left( \frac{T}{T_C} \right)^{3/2} \left\{ \frac{5}{2} F_{5/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)] + \beta(\epsilon_L - \mu) F_{3/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)] \right\} \quad (3.34)$$

e

$$E = \frac{NKT}{F_{3/2}(0)} \left( \frac{T}{T_C} \right)^{3/2} \left\{ \frac{3}{2} F_{5/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)] + \beta(\epsilon_L - \mu) F_{3/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)] \right\} + \mu N \quad (3.35)$$

Assim, para  $T < T_C$ ,  $\mu \approx \epsilon_L$

$$E^- = \frac{3}{2} NKT \left( \frac{T}{T_C} \right)^{3/2} \frac{F_{5/2}(0)}{F_{3/2}(0)} + \epsilon_L N \quad (3.36)$$

e para  $T > T_C$ ,  $N \approx N_{exc}$

$$E^+ = \frac{3}{2} NKT \frac{F_{5/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)]}{F_{3/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)]} + \epsilon_L N \quad (3.37)$$

Estas equações vêm confirmar o comentário já feito com relação à semelhança deste sistema com um sistema tridimensional. Do mesmo modo, o termo  $\epsilon_L N$  é somente a energia potencial adquirida devido à translação dos níveis de energia.

O calor específico segue, dado por

$$C^- = \frac{15}{4} NK \left( \frac{T}{T_C} \right)^{3/2} F_{5/2}(0) \quad (3.38)$$

$$C^+ = \frac{15}{4} NK \frac{F_{5/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)]}{F_{3/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)]} - \frac{9}{4} NK \frac{F_{3/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)]}{F_{1/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)]} \quad (3.39)$$

De maneira análoga, o valor clássico de Dulong-Petit é

$$C^+ = \frac{3}{2} NK$$

Em  $T = T_C$

$$\Delta C = C^- - C^+ = \frac{9}{4} NK \frac{F_{3/2}(0)}{F_{1/2}(0)} \quad (3.40)$$

Como  $F_{1/2}(0) \rightarrow \infty$ , vemos que o calor específico é contínuo na temperatura de transição. De (3.34) temos que  $S \rightarrow 0$  quando  $T \rightarrow 0^\circ K$ , satisfazendo a 3a. lei da termodinâmica.

Em  $T = T_C$ ,  $\Delta S = S^+ - S^- = 0$ , ou seja, a entropia é contínua

na temperatura de transição. Sabemos então, com certeza, que esta transição de fase não é de primeira ordem, pois não existe calor latente envolvido na transição.

O momento magnético é dado por (2.14). Nos limites de  $T > T_C$  e  $T < T_C$  temos, respectivamente:

$$m^+ = \frac{2L \mu_0}{\lambda (\beta \hbar \omega_0)^2} \left\{ F_{5/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)] - \beta \epsilon_L F_{3/2} [\beta(\epsilon_L - \mu)] \right\} \quad (3.41)$$

$$m^- = -\mu_0 N \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^{3/2} \right] - KT \left( \frac{T}{T_C} \right)^{3/2} \left[ \frac{F_{5/2}(0)}{F_{3/2}(0)} - \beta \epsilon_L \right] \right\} \quad (3.42)$$

onde já incluímos a contribuição do estado fundamental em (3.42).

O mesmo comportamento daquele observado no item (3.1), equações (3.23) e (3.24), é o que se observa nas equações (3.41) e (3.42) valendo pois os mesmos comentários feitos anteriormente.

CAPÍTULO III  
SISTEMA BIDIMENSIONAL COM CONFINAMENTO HARMÔNICO  
DE SIMETRIA CILINDRICA

1. A FUNÇÃO DE PARTIÇÃO

Consideremos agora um gás bidimensional de bosons livres de carga  $-e$ , massa  $m$ , confinado por um potencial harmônico  $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$  e sob a influência de um campo magnético uniforme  $\vec{B}$  na direção normal ao plano do sistema.

Como as partículas do sistema tem um grau de liberdade a menos com relação ao sistema anterior (não movimento na direção  $\hat{z}$ ) sua hamiltoniana é a mesma do sistema tratado no Capítulo II excluindo-se o termo  $p_z^2/2m$ , ou seja,

$$H = \hbar\omega_+ \left( a_+^\dagger a_+ + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_- \left( a_-^\dagger a_- + \frac{1}{2} \right) \quad (1.1)$$

onde as grandezas  $a_\pm$  e  $\omega_\pm$  são as mesmas já definidas na página 7.

Os níveis de energia seguem dados por

$$E(n_+, n_-) = \hbar\omega_+ \left( n_+ + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_- \left( n_- + \frac{1}{2} \right) \quad (1.2)$$

A função de partição é obtida de maneira análoga:

$$Z(\beta) = \frac{1}{4} \frac{1}{\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega_+}{2}\right)} \frac{1}{\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega_-}{2}\right)} \quad (1.3)$$

Como consequência da hamiltoniana (1.1) ser a mesma hamiltoniana (II-1.5), a menos de  $p_z^2/2m$ , temos que (1.3) também é a mesma função de partição (II-1.7) relativa ao movimento no plano. O termo  $L/\lambda$  é devido ao grau de liberdade na direção  $\hat{z}$ .

No limite de confinamento fraco a expressão (1.3) reduz-se à:

$$Z(\beta) = \frac{\beta \epsilon_L}{(\beta \hbar \omega_0)^2 \sinh(\beta \epsilon_L)} \quad (1.4)$$

## 2. O POTENCIAL TERMODINÂMICO

Fazendo uso do formalismo desenvolvido no Capítulo II, e com a função de partição do ítem anterior, podemos estudar o potencial termodinâmico  $\Omega(k, B, T, \mu)$  deste sistema bidimensional. Faremos novamente um estudo para o caso de confinamento fraco, podendo ser fraco ou forte o campo magnético.

### 2.1 - Limite de confinamento fraco

De (II-2.3), (II-2.7), e (1.4), mais o teorema de Cauchy resulta, para o potencial termodinâmico, número de partículas e momento magnético.

$$\Omega = - \frac{KT}{(\beta \hbar \omega_0)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta \epsilon_L e^{\beta \mu j}}{j^2 \sinh \beta j \epsilon_L} \quad (2.1)$$

$$N = - \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \frac{1}{(\beta \hbar \omega_0)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta \epsilon_L e^{\beta \mu j}}{j \sinh(\beta j \epsilon_L)} \quad (2.2)$$



$$m = - \frac{\partial \Omega}{\partial B} = \frac{\mu_0}{(\beta \hbar \omega_0)^2} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{\beta \mu j}}{j^2 \sinh \beta j \epsilon_L} \left[ 1 - \beta \epsilon_L j \operatorname{coth} \beta j \epsilon_L \right] \right\} \quad (2.3)$$

A equação (2.2) pode ser reescrita como:

$$N = \frac{1}{(\beta \hbar \omega_0)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 \beta \epsilon_L}{j} \frac{e^{-\beta j (\epsilon_L - \mu)}}{(1 - e^{-2j \beta \epsilon_L})} \quad (2.2a)$$

Com o mesmo método usado no apêndice E para estudar a convergência de uma série, encontramos que:

$$F_1 [\beta (\epsilon_L - \mu)] \leq N \leq MQ F_1 [\beta (\epsilon_L - \mu)]$$

ou seja, no limite de campo forte a série (2.2a) diverge logaritmicamente e, portanto, este sistema também não apresenta a condensação.

Observemos que as equações deste sistema confinado estão relacionados com as de May (eq. II-2.6a, II-2.7a e II-2.8a) como se fosse um sistema de dimensão 4. Temos então um caso que não apresenta a condensação de B.E. e que é o limite do critério estudado por May.

#### 2.1.a - Campo fraco

Procedendo de maneira análoga à do Capítulo II, item 2.1.a (apêndice B), obtemos:

$$\Omega = - \frac{KT}{(\beta \hbar \omega_0)^2} F_3 [\beta (\epsilon_L - \mu)] \quad (2.4)$$

$$N = \frac{1}{(\beta \hbar \omega_0)^2} F_2 [\beta (\epsilon_L - \mu)] \quad (2.5)$$

$$m = - \frac{\mu_0 \beta \epsilon_L}{3 (\beta \hbar \omega_0)^2} F_1 \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right] \quad (2.6)$$

A série  $F_2(\alpha)$  da equação (2.5) é limitada na origem (apêndice C), existindo então um número crítico de partículas, e portanto, uma condensação.

Tal sistema está relacionado com um sistema livre de di mensão 4. Estes resultados já eram esperados, pois vimos que a função de partição deste sistema confinado é a mesma função de partição do sistema 3D-2d, exceto pelo termo  $L/\lambda$ . Ou seja, a dependência em  $\beta$  do sistema 2D-2d é 1/2 menor daquela do sistema 3D-2d. Como o sistema 3D-2d está relacionado com um sistema livre de dimensão 5, o sistema 2D-2d se relaciona com um sistema livre de dimensão 4.

Os resultados de Dash, Campbell e Shick (2D-2d e  $B=0$ ) para o potencial termodinâmico e número de partículas, no limite de volume infinito, coincidem com as expressões (2.4) e (2.5) acima.

### 3. PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS E MAGNÉTICAS

Do ítem (2.1.2), vimos que o sistema 2D-2d no limite de campo fraco apresenta o fenômeno da condensação.

Com isto podemos definir novamente um número crítico de partículas através de (2.5) por

$$N_c = \frac{1}{(\beta \hbar \omega_0)^2} F_2(0) \quad (3.1)$$

onde  $\mu \approx \epsilon_L$ .

Ao invés de  $N_c$ , podemos definir uma temperatura crítica  $T_c = T_c(N, B, k)$

$$N = \left( \frac{k}{\hbar \omega_0} \right)^2 T_c^2 F_2(0) \quad (3.2)$$

Assim, na situação em que  $T < T_c$  ( $N > N_c$ ), existirá um número não desprezível de partículas no estado fundamental, ou seja,

$$N = N_0 + N \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \frac{F_2 [\beta (\epsilon_L - \mu)]}{F_2 (0)} \quad (3.3)$$

Quando  $T > T_c$ , o número de partículas excitadas é, no máximo, o número de partículas do sistema ( $\mu < \epsilon_L$ ) e então

$$F_2 [\beta (\epsilon_L - \mu)] = \left( \frac{T_c}{T} \right)^2 F_2 (0) \quad (3.4)$$

que determina  $\mu$  como função de  $N, B, k$  e  $T$ .

Por outro lado, para  $T < T_c$ ,  $\mu \approx \epsilon_L$

$$N_{exc} = N \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \quad (3.5)$$

$$N_0 = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (3.6)$$

Novamente aqui, podemos ver que a relação formal deste sistema com o sistema livre 4D é perfeita.

Seguindo o procedimento dado no capítulo II, calculamos a seguir, para os dois intervalos de temperatura ( $T > T_c$  e  $T < T_c$ ) a entropia, a energia média, o calor específico e o momento magnético.

De II-3.9 e 2.4 obtemos para a entropia

$$S = \left( \frac{K}{\hbar \omega_0} \right)^2 K T^2 \left\{ 3F_3 [\beta (\epsilon_L - \mu)] + \beta (\epsilon_L - \mu) F_2 [\beta (\epsilon_L - \mu)] \right\} \quad (3.7)$$

A energia média segue dada por (II-3.11)

$$E = \left( \frac{K}{\hbar \omega_0} \right)^2 KT^2 \left\{ 2F_3 \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right] + \beta (\epsilon_L - \mu) F_2 \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right] \right\} + \mu N \quad (3.8)$$

Assim, para  $T < T_c$  e  $T > T_c$

$$E^- = 2NKT \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \frac{F_3(0)}{F_2(0)} + \epsilon_L N \quad (3.9)$$

$$E^+ = 2NKT \frac{F_3 \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right]}{F_2 \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right]} + \epsilon_L N \quad (3.10)$$

como tinha de ser, já que o sistema 2D-2d se relaciona com o sistema livre 4D.

De (3.9) e (3.10),  $C^-$  e  $C^+$  são facilmente obtidos

$$C^- = 6NK \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \frac{F_3(0)}{F_2(0)} \quad (3.11)$$

e

$$C^+ = 6NK \frac{F_3 \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right]}{F_2 \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right]} - 4NK \frac{F_2 \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right]}{F_1 \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right]} \quad (3.12)$$

De maneira idêntica àquela do capítulo II o valor clássico de Dulong-Petit é

$$C^+ = 2NK$$

De (3.11) e (3.12) podemos observar que, para  $T = T_c$

$$\Delta C = C^- - C^+ = 4NK \frac{F_2(0)}{F_1(0)} \quad (3.13)$$

Mas como  $F_1(0) \rightarrow \infty$ , logaritmicamente, vemos que o calor específico é contínuo em  $T_c$ .

O cálculo de  $\Delta S = S^- - S^+$  mostra-nos também uma continuidade. A 3a. lei da termodinâmica é verificada novamente.

Como  $\Delta S = 0$ , não existe calor latente envolvido na transição, ou seja, esta transição de fase não é de 1a. ordem.

O momento magnético é dado por (2.6) que para os dois intervalos de temperatura, já levando em conta a contribuição do estado fundamental, nos dá:

$$m^+ = - \frac{\mu_0 \beta \epsilon_L}{3(\beta \hbar \omega_0)^2} F_1[\beta(\epsilon_L - \mu)] \quad (3.14)$$

$$m^- = \lim_{\mu \rightarrow \epsilon_L} \left\{ \frac{-\mu_0}{e^{\beta(\epsilon_L - \mu)} - 1} - \frac{\mu_0 \beta \epsilon_L}{3(\beta \hbar \omega_0)^2} \ln \left[ 1 - e^{-\beta(\epsilon_L - \mu)} \right] \right\} \quad (3.15)$$

onde podemos visualizar os mesmos comportamentos daqueles observados para o sistema 3D-2d, já que a diferença entre os dois é somente o grau de liberdade na direção  $\hat{z}$ , mas a dependência com o campo magnético é a mesma.

CAPÍTULO IV  
SISTEMA TRIDIMENSIONAL COM CONFINAMENTO HARMÔNICO  
DE SIMETRIA ESFÉRICA

1. A FUNÇÃO DE PARTIÇÃO

Como último caso, estudaremos, neste capítulo, o confinamento harmônico de simetria esférica.

Este sistema é constituído de bosons de carga  $-e$ , massa  $m$ , confinado por um potencial  $V(\vec{r}) = 1/2 k(x^2 + y^2 + z^2)$  sob a influência de um campo magnético  $\vec{B} = B \hat{z}$ .

A hamiltoneana de uma partícula desse sistema é

$$H = \hbar\omega_+ \left( a_+^\dagger a_+ + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_- \left( a_-^\dagger a_- + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_0 \left( a_0^\dagger a_0 + \frac{1}{2} \right) \quad (1.1)$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{m\omega_0}{\hbar} \right)^{1/2} z + \frac{i p_z}{\sqrt{2} (m\hbar\omega_0)^{1/2}}$$

Os níveis de energia seguem, dados por

$$E(n_+, n_-, n_0) = \hbar\omega_+ \left( n_+ + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_- \left( n_- + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_0 \left( n_0 + \frac{1}{2} \right) \quad (1.2)$$

A função de partição pode ser obtida de maneira análoga

$$Z(\beta) = \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega_+}{2}\right)} \frac{1}{\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega_-}{2}\right)} \right] \frac{1}{\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right)} \quad (1.3)$$

ou seja, a mesma função de partição III-1.3 mais a contribuição do movimento na direção  $\hat{z}$ , movimento este que não "vê" o campo  $\vec{B}$ .

No limite de confinamento fraco (1.3) se reduz à

$$Z(\beta) = \frac{2 \beta \epsilon_L}{(\beta \hbar \omega_0)^3 \sinh(\beta \epsilon_L)} \quad (1.4)$$

que é justo  $Z(\beta)$  dado por III-1.4, acrescido do grau de liberdade referente à direção  $\hat{z}$ ,  $2/\beta \hbar \omega_0$ .

A análise de II-1.9, III-1.4 e IV-1.4 nos mostra um mesmo comportamento para o movimento no plano x-y, que contém toda a contribuição do campo magnético, diferindo somente no modo de a partícula se mover na direção  $\hat{z}$ . Assim, temos que, para os sistemas 3D-2d; 2D-2d e 3D-3d, a contribuição nesta direção  $\hat{z}$  é  $L/\lambda$ , 1 e  $2/\beta \hbar \omega_0$ , respectivamente. Ou seja, a dependência em  $\beta$  de  $Z(\beta)$  é o produto de  $(\beta \hbar \omega_0)^{-2} \beta \epsilon_L \sinh^{-1} \beta \epsilon_L$  comum a todos os sistemas pelo termo  $\beta^{-1/2}$ , 1 e  $\beta^{-1}$  para os sistemas 3D-2d, 2D-2d e 3D-3d, respectivamente, referente ao grau de liberdade na direção  $\hat{z}$ .

As funções termodinâmicas do sistema 3D-3d estarão relacionadas com as funções termodinâmicas de um sistema livre com dimensão 6, já que (1.4) tem uma potência  $\beta^{-1/2}$  maior do que (II-1.9).

As propriedades magnéticas também serão as mesmas, visto que a dependência no campo magnético é idêntica.

## CAPÍTULO V

### 1. CONCLUSÃO

Interessados no problema da condensação de B.E. propusemo-nos a estudar que efeitos o confinamento harmônico de Darwin pode introduzir num gás de bosons magnetizados.

Nos capítulos anteriores, verificamos que a condensação só ocorre para confinamento fraco, (regime semi-clássico). Os limites de campo fraco ou forte apresentaram uma outra modificação interessante relacionada com a "dimensão" do sistema, "dimensão" esta relacionada com um sistema de bosons livres (sistema de bosons ideais não confinado e campo magnético nulo).

Como a dependência no campo magnético é a mesma que a obtida por Schafroth e May (o confinamento somente introduz a condensação), estes sistemas tratados aqui exibem (ao menos qualitativamente) as mesmas propriedades magnéticas e termodinâmicas de um supercondutor.

Observamos também que o critério para a condensação de Rehr e Mermin é falho, já que a densidade de partículas não é localmente divergente. A não homogeneidade do sistema, como sugeriu Widon, além da dependência da função densidade de estados  $D(\epsilon)$  nas vizinhanças da energia mínima  $\epsilon_L$  parece ser a razão da existência de condensação.

A razão de podermos relacionar os sistemas confinados harmonicamente com os sistemas de bosons livres sem campo magnético, está no fato de as funções densidade de estados serem proporcionais a  $\epsilon^{1/2}$  (ver apêndice D). Para os sistemas confinados, temos que os níveis de energia são todos afetados pelo campo magnético, contribuindo para a energia média com o termo  $N\epsilon_L$ .

Finalizando, como o campo magnético é uniforme, somente as partículas carregadas limitadas a se moverem no plano xy serão influenciadas pelo campo magnético. Com isto, todos os sistemas, 3D-2d, 2D-2d e 3D-3d, terão os mesmos comportamentos magnético e termodinâmico, pois eles só diferem no grau de liberdade da direção paralela ao campo aplicado.



## 2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

2.1 - Uma complementação deste trabalho será a de estudar o comportamento magnético e termodinâmico para os sistemas com confinamento forte.

2.2 - Os sistemas de gás de fermions magnetizado confinado harmonicamente roda como um todo em torno do eixo paralelo ao campo, no limite clássico.

Um outro problema será o de verificar se este mesmo comportamento aparece para o gás de bosons magnetizado.

2.3 - Como extensão, através do cálculo do propagador a baixas temperaturas, poder-se-á verificar se o gás ainda roda como um todo.

2.4 - Temos visto que a condensação de B.E. é altamente sensível à dimensionalidade do sistema, campos externos, isotropia é interação entre as partículas. Uma variação deste trabalho será o de estudar quais modificações serão introduzidas ao se tomar o confinamento anisotrópico, isto é  $V(\vec{r}) = 1/2 k_x x^2 + 1/2 k_y y^2$ .

APÊNDICE A

CONDIÇÃO SOBRE O POTENCIAL QUÍMICO PARA A  
UTILIZAÇÃO DO MÉTODO

Devemos estudar qual relação deve ser satisfeita pelo potencial químico, campo magnético e intensidade de confinamento para que se possa fechar o contorno à direita ou esquerda do eixo imaginário a fim de usarmos o teorema de Cauchy.

Para isto analisamos o comportamento do módulo da integral

$$I = - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{L \pi \cos \pi t}{4 \lambda t^{3/2} \operatorname{sen} \pi t} \frac{e^{\beta \mu t}}{\operatorname{senh}(t\theta_+) \operatorname{senh}(t\theta_-)} dt$$

onde

$$\theta_+ = \frac{\beta \hbar \omega_+}{2} \quad e \quad \theta_- = \frac{\beta \hbar \omega_-}{2} .$$

Queremos saber qual a condição para que a integral vá a zero no arco BCA (fig. 1) à medida em que R se torna arbitrariamente grande.

Denotando o número complexo t pelo seu módulo (o próprio R) e seu argumento ( $\phi$ )

$$t = R e^{i\phi} = R [\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi]$$

e majorando cada termo do integrando conforme abaixo, temos:

$$\left| \frac{1}{\operatorname{sen} \pi t} \right| = \left| \operatorname{cosec} \pi t \right| \leq C_1 e^{-\pi R |\operatorname{sen} \phi|}$$

$$|t^{-3/2}| = R^{-3/2}$$

$$|e^{\beta \mu t}| = C_2 e^{\beta \mu R \cos \phi}$$

$$\left| \frac{1}{\sinh t \theta_+} \right| = |\operatorname{cosech} t \theta_+| \leq C_3 e^{-\theta_+ R} |\cos \phi|$$

$$\left| \frac{1}{\sinh t \theta_-} \right| = |\operatorname{cosech} t \theta_-| \leq C_4 e^{-\theta_- R} |\cos \phi|$$

$$|\cos \pi t| \leq C_5 e^{\pi R} |\sin \phi| \quad .$$

Assim

$$I = - \frac{L}{8\lambda} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{C_1 C_2 C_3 C_4 C_5}{R^{3/2}} \exp \left\{ (\beta\mu - \theta_+ - \theta_-) R \cos \phi \right\} d\phi$$

Como  $\cos \phi$  é sempre positivo neste limite de integração para que  $I \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow \infty$ , é necessário que

$$\beta\mu - \theta_+ - \theta_- \leq 0$$

ou seja

$$\mu \leq \frac{1}{\beta} [\theta_+ + \theta_-]$$

portanto

$$\mu \leq \hbar \left[ \omega_L^2 + \omega_O^2 \right]^{1/2} = \hbar \Omega_L \quad .$$

APÊNDICE B

LIMITE DE CAMPO FRACO E FORTE PARA O POTENCIAL TERMODINÂMICO

Os potenciais termodinâmicos correspondentes aos sistemas 3D-2d, 2D-2d e 3D-3d são respectivamente

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{3D-2d} &= \frac{-LKT}{\lambda(\beta\hbar\omega_0)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta \epsilon_L}{j^{5/2}} \frac{e^{\beta\mu j}}{\sinh(\beta j \epsilon_L)} \\ \Omega_{2D-2d} &= \frac{-KT}{(\beta\hbar\omega_0)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta \epsilon_L}{j^2} \frac{e^{\beta\mu j}}{\sinh(\beta j \epsilon_L)} \\ \Omega_{3D-3d} &= \frac{-2KT}{(\beta\hbar\omega_0)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta \epsilon_L}{j^3} \frac{e^{\beta\mu j}}{\sinh(\beta j \epsilon_L)} \end{aligned} \right\} \quad (B-1)$$

que podem ser reescritos em termos de uma fórmula geral dada por:

$$\Omega = - \frac{Z_1 \epsilon_L}{(\beta\hbar\omega_0)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{\beta\mu j}}{j^\sigma \sinh(\beta j \epsilon_L)} \quad (B-2)$$

onde os parâmetros  $\sigma$  e  $Z_1$  são respectivamente a dimensão com a qual o sistema está relacionado (comparado com um sistema livre) dividido por dois ( $\sigma = d/2$ ) e a função de partição relativa a direção  $\hat{z}$ , ou seja:  $L/\lambda$  para o sistema 3D-2d, 1 para o sistema 2D-2d e  $2/\beta\hbar\omega_0$  para o sistema 3D-3d.

Como já foi apontado o sistema 3D-2d relaciona-se com um sistema livre 5D, o sistema 2D-2d relaciona-se com um sistema livre 4D e o sistema 3D-3d relaciona-se com um sistema livre 6D.

Como  $2\beta \epsilon_L j > 0$  sempre  $\rightarrow e^{-2\beta j \epsilon_L} < 1$  sempre e então

$$\left[1 - e^{-2\beta j \epsilon_L}\right]^{-1} = 1 + e^{-2j\beta \epsilon_L} + e^{-4j\beta \epsilon_L} + \dots = \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-2j\beta \ell \epsilon_L}$$

Assim, após a troca de somatório, a equação (B-2) pode ser escrita como

$$\Omega = - \frac{2 Z_1 \epsilon_L}{(\beta \hbar \omega_0)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta j [(2\ell+1) \epsilon_L - \mu]}}{j^\sigma}$$

ou em termos das funções de B.E.

$$\Omega = - \frac{2 Z_1 \epsilon_L}{(\beta \hbar \omega_0)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} F_\sigma \left[ \beta [(2\ell+1) \epsilon_L - \mu] \right] \tag{B-3}$$

A expressão acima é exata. Estudaremos os limites de interesse, a saber de campo fraco e campo forte.

B.a - Campo fraco - Fórmula de Euler-Maclaurin

Seja  $f(x)$  tendo suas  $2n$  primeiras derivadas contínuas no intervalo  $(a,b)$ . Divida o intervalo em  $m$  partes iguais e seja  $h = \frac{b-a}{m}$ . Então para algum  $\theta$ ,  $|\theta| > 0$ , dependendo de  $f(x)$  em  $(a,b)$  nós temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(a+kh) = \frac{1}{h} \int_a^b f(t) dt + \frac{1}{2} [f(b) + f(a)] + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k} \left\{ f(b) - f(a) \right\} + \frac{h^{2n}}{(2n)!} B_{2n} \sum_{k=0}^{m-1} f(a+kh+\theta h) \tag{B.a_1}$$

Sabendo (B.a<sub>1</sub>) (fórmula de soma de Euler-Maclaurim) e mais o fato de que as funções de B.E. (F<sub>σ</sub>(α)) são analíticas para 0 ≤ α < ∞, a série da equação (B-3) pode ser reescrita como:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} F_{\sigma} \left[ \beta \left[ (2\ell+1) \epsilon_L - \mu \right] \right] = \int_0^{\infty} F_{\sigma} \left[ \beta \left[ (2x+1) \epsilon_L - \mu \right] \right] dx + \\ + \frac{1}{2} F_{\sigma} \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right] + \frac{\beta \epsilon_L}{6} F_{\sigma-1} \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right] + \dots$$

mas

$$\int_0^{\infty} F_{\sigma} \left[ \beta \left[ (2x+1) \epsilon_L - \mu \right] \right] dx = \frac{1}{2 \beta \epsilon_L} F_{\sigma+1} \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right].$$

Isto pode ser visto através das propriedades das funções de B.E. (apêndice C).

Assim, nesta aproximação de campo fraco, resulta para (B-3)

$$\Omega = - \frac{KT Z_1}{(\beta \hbar \omega_0)^2} F_{\sigma+1} \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right] + O(\epsilon_L) \quad (B.a_2)$$

B.b - *Campo forte*

Neste limite, a equação B-3 pode ser escrita como:

$$\Omega = - \frac{2 Z_1 \epsilon_L}{(\beta \hbar \omega_0)^2} \left\{ F_{\sigma} \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right] + F_{\sigma} \left[ \beta (3\epsilon_L - \mu) \right] + F_{\sigma} \left[ \beta (5\epsilon_L - \mu) \right] + \dots \right\}$$

Usando a propriedade b do apêndice C temos:

$$\Omega = - \frac{2 Z_1 \epsilon_L}{(\beta \hbar \omega_0)^2} \left\{ F_{\sigma} \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right] + O \left[ e^{-(3\epsilon_L - \mu) \beta} \right] \right\} \quad (B.b_1)$$

que em primeira aproximação é

$$\Omega = - \frac{2 Z_1 \epsilon_L}{(\beta \hbar \omega_0)^2} F_{\sigma} \left[ \beta (\epsilon_L - \mu) \right] \quad (B.b_2)$$

APÊNDICE C

PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES DE BOSE-EINSTEIN

As funções de B.E. são definidas como:

$$F_{\sigma}(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{\infty} \frac{y^{\sigma-1} dy}{e^{y+\alpha} - 1} \equiv \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\sigma} e^{-j\alpha}$$

onde  $\Gamma(\sigma)$  é a função gama de argumento  $\sigma$ .

a - são funções monótonas decrescentes na variável  $\alpha$

b - comportam-se assintoticamente como  $e^{-\alpha}$ , independentemente de  $\sigma$ , no limite em que  $\alpha \gg 1$

c - para  $\alpha < 1$  e  $\sigma > 0$ , não inteiro

$$F_{\sigma}(\alpha) = \alpha^{\sigma-1} \Gamma(1-\sigma) + \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^j \frac{\zeta(\sigma-j)}{j!}$$

onde  $\zeta(\sigma) \equiv F_{\sigma}(0)$  é a função zeta.

d - para  $\alpha < 1$  e  $\sigma = m \geq 2$ ,  $m =$  inteiro

$$F_{\sigma}(\alpha) = \frac{(-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m-1} - \ln \alpha \right) + \sum_{\substack{j=0 \\ \neq m-1}}^{\infty} \frac{(-\alpha)^j \zeta(m-j)}{j!}$$

e - 
$$\frac{\partial F_{\sigma}(\alpha)}{\partial \alpha} = - F_{\sigma-1}(\alpha)$$

f - são limitadas na origem se  $\sigma > 1$  e divergem se  $\sigma \leq 1$ . Alguns valores utilizados foram:

$$F_{3/2}(0) = 2,6124$$

$$F_{5/2}(0) = 1,3415$$

$$F_{7/2}(0) = 1,1267$$

g - para  $\sigma = 1$

$$F_1(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^{\infty} \frac{dy}{e^{y+\alpha} - 1} = -\ln[1 - e^{-\alpha}]$$

h - para  $\sigma = 0$

$$F_0(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(0)} \int_0^{\infty} \frac{y^{-1} dy}{e^{y+\alpha} - 1} = \frac{1}{e^{\alpha} - 1}$$



APÊNDICE D

DENSIDADE DE ESTADOS

A densidade de estados pode ser obtida, conhecendo-se a função de partição pois

$$Z(\beta) = \int_{E_{\min}}^{\infty} D(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} d\epsilon \quad (D.1)$$

ou

$$Z(\beta) = \int_0^{\infty} \theta(E - E_{\min}) D(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} d\epsilon \quad ; \quad E_{\min} > 0 \quad (D.2)$$

onde

$$\theta(\epsilon) = \begin{cases} 0 & \text{para } \epsilon < 0 \\ 1 & \text{para } \epsilon > 0 \end{cases}$$

é a função de grau.

Assim, através de (D.2), vemos que a função densidade de estados pode ser obtida através de uma transformada inversa de Laplace da função de partição.

Faremos, neste apêndice, somente o cálculo detalhado de  $D(\epsilon)$  para o sistema 3D-2d sendo, para os outros sistemas (2D-2d e 3D-3d), o mesmo procedimento deste que segue.

A energia mínima do sistema 3D-2d no limite de mola fraca é

$$E_{\min} = E_0 = \hbar\omega_L = \epsilon_L$$

Através de (II-1.9) e (D.2) temos que

$$\frac{L}{\lambda} \frac{1}{(\beta\hbar\omega_0)^2} \frac{e^{-\beta\epsilon_L}}{\sinh(\beta\epsilon_L)} = \int_0^{\infty} \theta(\epsilon - E_0) D(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} d\epsilon \quad (D.3)$$

Podemos escrever (II-1.9) como sendo o produto de duas funções de partição: uma dependendo do confinamento e a outra do campo, ou seja

$$Z(\beta) = Z_K(\beta) \cdot Z_B(\beta)$$

onde

$$Z_K(\beta) = \frac{L}{(\hbar\omega_0)^2} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{1}{\beta^{1/2}} \quad (D.4)$$

e

$$Z_B(\beta) = \frac{\epsilon_L}{\beta [\sinh \beta \epsilon_L]} \quad (D.5)$$

Usando o teorema da convolução, temos que:

$$Z_K(\beta) Z_B(\beta) = \int_0^\infty \theta(\epsilon - \epsilon_L) \int_0^\epsilon D_K(\epsilon - t) D_B(t) dt e^{-\beta\epsilon} d\epsilon \quad (D.6)$$

onde

$$Z_K(\beta) = \int_0^\infty D_K(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} d\epsilon$$

$$Z_B(\beta) = \int_0^\infty D_B(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} d\epsilon$$

e então

$$D_K(\epsilon) = L^{-1} \left\{ Z_K(\beta) \right\} = \frac{L}{(\hbar\omega_0)^2} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{\epsilon^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} \quad (D.7)$$

e

$$D_B(\epsilon) = L^{-1} \left\{ Z_B(\beta) \right\} = 2 \epsilon_L \sum_{j=0}^{\infty} \theta[\epsilon - (2j+1)\epsilon_L] \quad (D.8)$$

A convolução (D.6) resulta então em

$$\theta \left[ \epsilon - (2j+1)\epsilon_L \right] D(\epsilon) = \int_0^\epsilon D_k(\epsilon-t) D_B(t) dt$$

$$= \frac{4 \epsilon_L L}{(\hbar\beta\omega_0)^2} \left( \frac{mK}{2\pi\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \max_{j=0}^{\infty} \epsilon - (2j+1)\epsilon_L^{1/2}$$

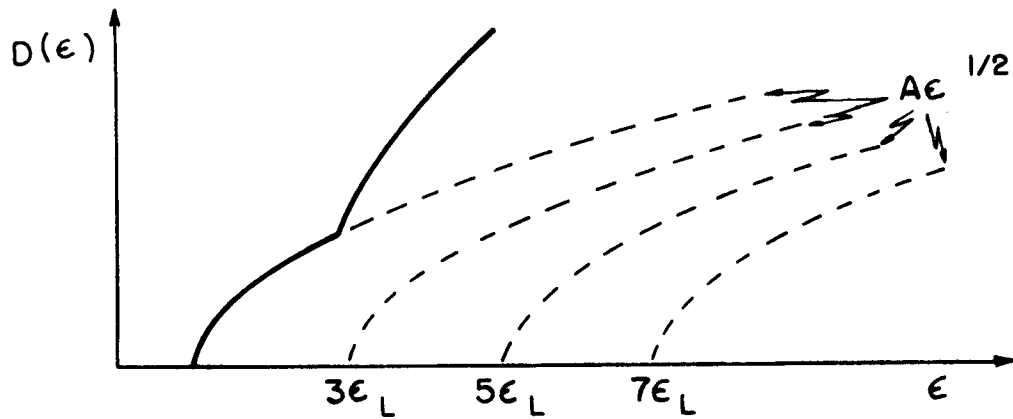
(D.9)

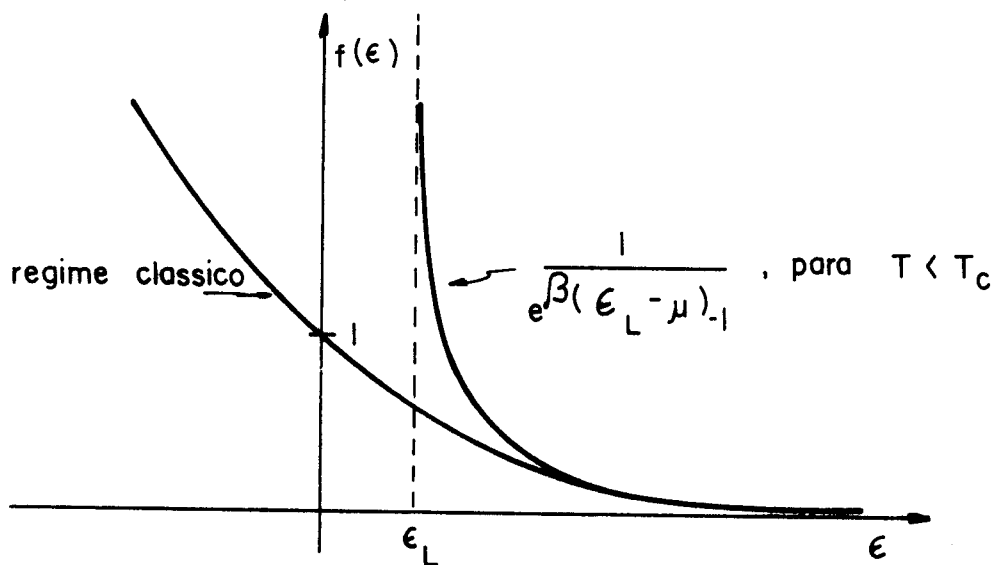
onde o máximo do somatório é para que  $\epsilon - (2j+1)\epsilon_L > 0$  sempre, pois  $D(\epsilon)$  é real.

Através de (D.9) e da função distribuição de B.E., temos por exemplo, o número de partículas do sistema dado por

$$N = \int_{\epsilon_L}^{\infty} D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \quad (D.10)$$

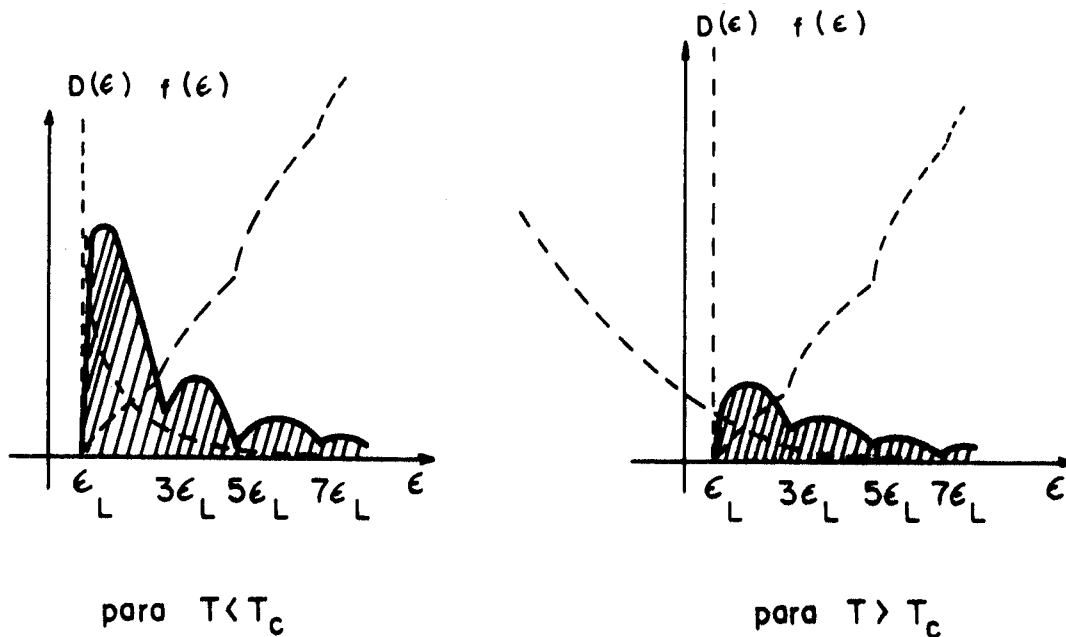
$D(\epsilon)$  e  $f(\epsilon)$  são curvas conhecidas e estão esquematizadas abaixo





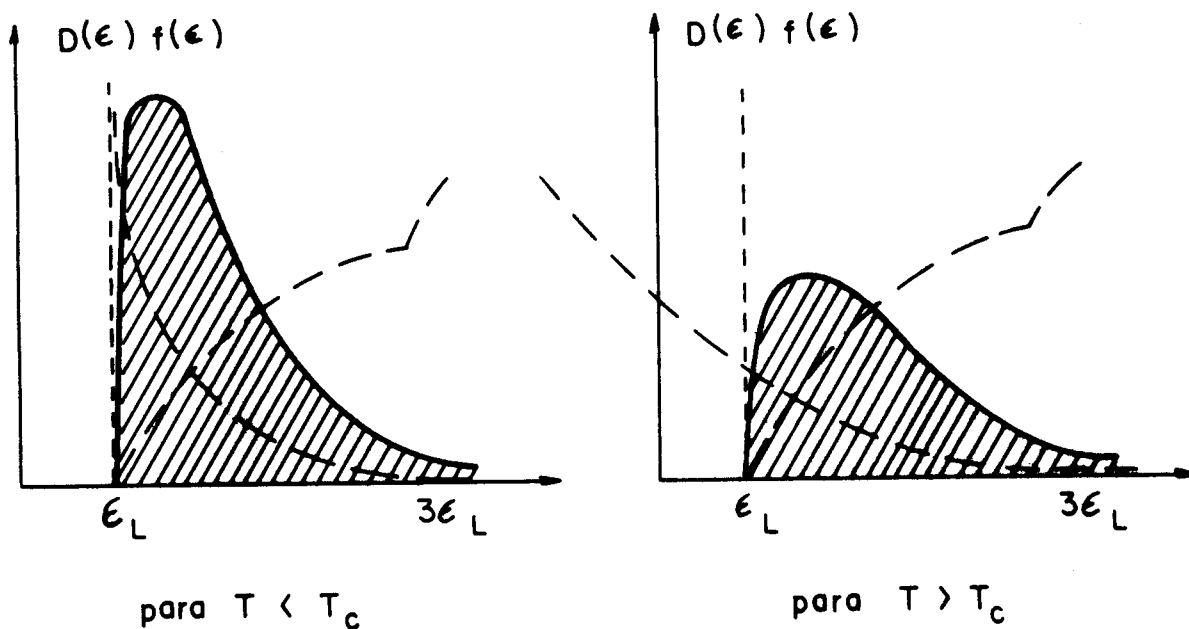
Sabendo-se as curvas  $D(\epsilon)$  e  $f(\epsilon)$  temos facilmente  $D(\epsilon) f(\epsilon)$ , que está esquematizado abaixo e de (D.10) temos que a área sob a curva  $D(\epsilon) f(\epsilon) \times \epsilon$  nos dá o número de partículas do sistema.

Quando tomamos  $\beta \epsilon_L \ll 1$ , temos que o espaçamento entre os níveis de energia é pequeno e então  $D(\epsilon) f(\epsilon)$  é da forma



ou seja, a soma de todas as áreas sob a curva nos dá o número total de partículas que em primeira aproximação é o primeiro termo da fórmula de soma de Euler-Maclaurim.

Agora, quando tomamos o limite  $\beta \epsilon_L \gg 1$ , o espaçamento entre os níveis de energia é bastante grande e resulta então para  $D(\epsilon) f(\epsilon)$



ou seja, o número de partículas é praticamente a área sob o primeiro intervalo, o que significa a aproximação feita no apêndice B.

Este primeiro intervalo é dado por  $f(\epsilon)$ . A  $\epsilon^{1/2}$ , onde o parâmetro  $A$  está relacionado com a mola e o campo. Fica bastante clara agora a relação deste sistema para com o sistema livre, onde a origem foi transladada de  $\epsilon_L$ .

APÊNDICE E

LIMITE DE CONFINAMENTO FORTE

Fazemos, neste apêndice, um estudo sobre a convergência da série obtida, quando se calcula o número de partículas do sistema no limite de confinamento forte.

Através da função de partição exata e do método desenvolvido, podemos calcular o potencial termodinâmico e consequentemente o número de partículas do sistema.

Faremos o cálculo em particular para o sistema 3D-2D, podendo de maneira análoga ser feito para os outros dois sistemas. Assim, de II-1.8 e II-2.4 obtemos

$$\Omega = - \frac{KT}{4\lambda} \frac{L}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{\beta\mu j}}{j^{3/2}} \frac{1}{\sinh\left(\frac{\beta j \epsilon_+}{2}\right)} \frac{1}{\sinh\left(\frac{\beta j \epsilon_-}{2}\right)} \quad (E.1)$$

e

$$N = - \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \frac{L}{4\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{\beta\mu j}}{j^{1/2}} \frac{1}{\sinh\left(\frac{\beta j \epsilon_+}{2}\right)} \frac{1}{\sinh\left(\frac{\beta j \epsilon_-}{2}\right)} \quad (E.2)$$

que pode ser reescrito como

$$N = \frac{L}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta j \left(\frac{\epsilon_+}{2} + \frac{\epsilon_-}{2} - \mu\right)}}{j^{1/2}} \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta j \epsilon_+}} \right) \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta j \epsilon_-}} \right) \quad (E.3)$$

O estudo da convergência de (E.3) pode ser feito como segue:

Como as funções  $(1 - e^{-\beta j \epsilon_+})^{-1}$  e  $(1 - e^{-\beta j \epsilon_-})^{-1}$  são monótonas decrescentes e com  $\beta \epsilon_+$  e  $\beta \epsilon_-$  não nulos, existem M e Q tais que para  $j \gg 1$

$$\left(1 - e^{-\beta j \epsilon_+}\right)^{-1} \ll M$$

e

$$\left(1 - e^{-\beta j \epsilon_-}\right)^{-1} \ll Q, \text{ para todo } j > 1$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{L}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta j \left(\frac{\epsilon_+}{2} + \frac{\epsilon_-}{2} - \mu\right)}}{j^{1/2}} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta j \epsilon_+}}\right) \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta j \epsilon_-}}\right) &\ll \\ &\ll MQ \frac{L}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta j \left(\frac{\epsilon_+}{2} + \frac{\epsilon_-}{2} - \mu\right)}}{j^{1/2}} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Por outro lado

$$F_{1/2} \left[ \beta (E_0 - \mu) \right] \ll \frac{L}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta j (E_0 - \mu)}}{j^{1/2}} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta j \epsilon_+}}\right) \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta j \epsilon_-}}\right), \quad (\text{E.5})$$

$$E_0 = \frac{\epsilon_+}{2} + \frac{\epsilon_-}{2}$$

De (E.4) e (E.5) temos então que o número de partículas (eq. (E.3)) é tal que

$$F_{1/2} \left[ \beta (E_0 - \mu) \right] \ll N \ll MQ F_{1/2} \left[ \beta (E_0 - \mu) \right] \quad (\text{E.6})$$

Mas das propriedades das funções de B.E. (apêndice C), temos que  $F_{1/2}(\alpha) \rightarrow \infty$  para  $\alpha \rightarrow 0$ , ou seja o número de partículas do sistema diverge, quando o potencial químico está próximo do seu valor máximo ( $\mu = E_0$ ), mostrando pois a ausência de condensação.

APÊNDICE F

SISTEMA DE BOSONS IDEAIS CONFINADO POR UM POTENCIAL  
HARMÔNICO NA AUSÊNCIA DE CAMPO MAGNÉTICO

Um estudo detalhado de um sistema de gás de bosons ideais, confinado harmonicamente sem campo magnético, foi feito por Dash , Campbell e Shick no estudo de filmes bidimensionais de  $He^4$  .

Para este sistema, a hamiltoneana é

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} k(x^2 + y^2) \quad (F.1)$$

ou

$$H = - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (x^2 + y^2) \quad (F.2)$$

Resolvemos aqui o sistema 3D-2d sendo idêntica a resolução para os dois outros sistemas (2D-2d e 3D-3d).

Os níveis de energia são os níveis de energia de dois osciladores harmônicos mais a energia de partícula livre na direção  $\hat{z}$ .

$$E = \hbar\omega_0 \left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_0 \left(n_y + \frac{1}{2}\right) + p_z^2/2m \quad (F.3)$$

A função de partição, por soma direta, segue dada por

$$Z(\beta) = \frac{L}{4\lambda} \left[ \frac{1}{\sinh \frac{\beta\hbar\omega_0}{2}} \right]^2 \quad (F.4)$$

que no limite de mola fraca torna-se

$$Z(\beta) = \frac{L}{\lambda} \left( \frac{1}{\beta\hbar\omega_0} \right)^2 \quad (F.5)$$



O potencial termodinâmico, usando o formalismo desenvolvido nos capítulos anteriores é

$$\Omega = - \frac{L}{\lambda} \frac{KT}{(\beta \hbar \omega_0)^2} F_{7/2} [-\beta \mu] \quad (\text{F.6})$$

O número de partículas de maneira análoga

$$N = \frac{L}{\lambda (\beta \hbar \omega_0)^2} F_{5/2} [-\beta \mu] \quad (\text{F.7})$$

De (F.7) podemos definir uma temperatura crítica  $T_0 = T_0(k, N, L)$ , já que este sistema condensa, (o fato de  $F_{5/2}(0)$  ser finito garante-nos a afirmação feita), por

$$N = \frac{L}{(\hbar \omega_0)^2} \left( \frac{mK}{2\pi \hbar^2} \right)^{1/2} K^2 T_0^{5/2} F_{5/2}(0) \quad (\text{F.8})$$

Notemos que  $\frac{L}{(\hbar \omega_0)^2} K^2$  é uma grandeza que está relacionada com o volume do sistema. Ou seja, um termo ligado à geometria do sistema, definindo-o univocamente. Através de (F.8), podemos então definir uma temperatura característica deste sistema confinado harmonicamente por

$$\frac{L}{(\hbar \omega_0)^2} \left( \frac{mK}{2\pi \hbar^2} \right)^{1/2} K^2 = N \left[ T_0^{5/2} F_{5/2}(0) \right]^{-1} \quad (\text{F.9})$$

Um último comentário é feito sobre o relacionamento deste sistema com um sistema livre. Através de (F.6) e (F.7) vemos que este sistema se relaciona com um sistema livre 5D.

Estes resultados podem ser generalizados, como foi feito no apêndice B, para os sistemas 2D-2d e 3D-3d.

APÊNDICE G

REGIME CLÁSSICO - MAGNETIZAÇÃO

Através de (B.2), podemos obter o número de partículas e a magnetização de maneira geral para os sistemas 3D-2d, 2D-2d e 3D-3d, sendo as justificativas dadas no apêndice B e nos capítulos anteriores igualmente aplicadas aqui. Assim temos que:

$$\Omega = - \frac{Z_1 \epsilon_L}{(\beta \hbar \omega_0)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{\beta \mu j}}{j^\sigma \sinh \beta j \epsilon_L} \quad (G.1)$$

$$N = \frac{Z_1 \beta \epsilon_L}{(\beta \hbar \omega_0)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{\beta \mu j}}{j^{\sigma-1} \sinh \beta j \epsilon_L} \quad (G.2)$$

$$m = \frac{Z_1 \beta \epsilon_L \mu_0}{(\beta \hbar \omega_0)^2} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{\beta \mu j}}{j^\sigma \sinh(\beta j \epsilon_L)} \left[ \frac{1}{\beta \epsilon_L} - j \operatorname{cotgh} \beta j \epsilon_L \right] \right\} \quad (G.3)$$

No regime clássico, altas temperaturas,  $-\beta \mu \gg 1$  e então podemos tomar somente o primeiro termo da série que dará a contribuição predominante. Assim,

$$N = \frac{Z_1}{(\beta \hbar \omega_0)^2} \frac{\beta \epsilon_L e^{\beta \mu}}{\sinh \beta \epsilon_L}$$

$$\frac{e^{\beta \mu}}{\sinh \beta \epsilon_L} = \frac{N (\beta \hbar \omega_0)^2}{Z_1 \beta \epsilon_L} \quad (G.4)$$

A magnetização segue dada por

$$m = \frac{z_1 \beta \epsilon_L \mu_0}{(\beta \hbar \omega_0)^2} \frac{e^{\beta \mu}}{\sinh \beta \epsilon_L} \left[ \frac{1}{\beta \epsilon_L} - \operatorname{cotgh} \beta \epsilon_L \right] \quad (\text{G.5})$$

que após eliminar a fugacidade através de (G.4) resulta em

$$m = N \mu_0 \left( \frac{1}{\beta \epsilon_L} - \operatorname{cotgh} \beta \epsilon_L \right) \quad (\text{G.6})$$

independente do fato de o sistema ser 3D-2d, 2D-2d ou 3D-3d, como tinha que ser.

A equação (G.6) pode ser escrita

$$m = -N \mu_0 L(\beta \epsilon_L)$$

onde

$$L(\beta \epsilon_L) = \operatorname{cotgh} \beta \epsilon_L - \frac{1}{\beta \epsilon_L}$$

é a função de Langevin, representando uma resposta diamagnética do sistema.

Notemos também que o termo  $(\beta \hbar \omega_0)^{-2}$  tem dimensão de área, e que, portanto,  $z_1 (\beta \hbar \omega_0)^{-2}$  define um "volume" dependendo da mola e temperatura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - LONDON, F. - Superfluids. Dover, New York, 1964, V.2.
- 2 - HOHEMBERG, P.C. - Existence of Long-Range Order in One and two Dimensions. Physics Review 158, 383, (1967).
- 3 - WIDON, A. - Superfluid Phase Transition in One and Two Dimensions. Physics Review 176, 254, (1968).
- 4 - CAMPBELL, C.E.; DASH, J.G. e SCHICK, M. - Effects of Lateral Substrate Fields on Helium Monolayers. Physical Review Letters 26, 966, (1971).
- 5 - REHR, J.J e Mermin, N.O - Condensation of the Rotating Two Dimensional Ideal Bose Gas. Physical Review 1B, 3160, 1970.
- 6 - ABRAMOWITZ, M. and STEGON, I.A., ed. - Handbook of Mathematical functions. Dover, N.Y.
- 7 - FELDERHOF, B.V. e RAVAL, S.P. - Diamagnetism of a Confined Electron gás. Physica 82A, 151 (1975).
- 8 - FELÍCIO, J.R.D. de - Propriedades Magnéticas de Gás de Elétrons Confinado. São Carlos, USP, 1977 - Tese de Mestrado - USP - IFQSC.
- 9 - DARWIN, C.G. - The Diamagnetism of the Free Electrons. Proc. Camb. Philos. Soc. 27, 86 (1930).
- 10 - ROSA Jr., S.G. e GRANDY Jr., W.T. - The Magnetic Properties of Ideal Quantum Gases. Rev. Bras. de Física 3, 537, (1973)
- 11 - MAY, R.M. - Magnetic Properties of Charged Ideal Quantum Gases in n Dimensions. J. Math. Physics 6, 1462 (1965)
- 12 - SCHAFROTH, M.R. - Super conductivity of a Charged Ideal Bose Gas. Physical Review 100, 463 (1955).
- 13 - GRADSHTEYN, I.S. and RYZHIK, I.M. - Table of Integral, Series and Product. N.Y. Academic Press (1965).

- 14 - MOSKALENKO, S.A. - Reversible Optico-Hydrodynamic Phenomena in a Non ideal Exciton Gas. Soc. Phys. Solid State 4, 199 (1962).
- 15 - BLATT, J.M.; BÖER, W. e BRANDT, W. - Bose - Einstein Condensation of Excitons. Physical Review, 126, 1691 (1962).
- 16 - CASELLA, P.C. - On the Possibility of Observing a Bose-Einstein Condensation of Excitons in CdSe and CdS. Journ. Phys. Chem. Solids, 24, 19 (1963).
- 17 - IORIATTI Jr., L.C. - Efeitos de uma Impureza Delta Atrativa nas Propriedades Termodinâmicas de um gás ideal de Bose em uma Dimensão. São Carlos, USP, 1976 - Tese (Mestrado) USP - IFQSC.