UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

USP / IFQSC / SBI

8-2-000516

A ESTRUTURA MATEMÁTICA DAS TEORIAS DE GAUGE

JOSÉ EDUARDO MARTINHO HORNOS

Trabalho apresentado ao Instituto de Física e Química de São Carlos, USP, para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Juan José Giambiagi

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

SÃO CARLOS — 1980

INDICE

HISTÓRICO E AGRADECIMENTOS

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I - Elementos de Álgebra Tensorial e Exterior

CAPÍTULO II - Elementos de Topologia

CAPÍTULO III - Topologia Diferencial

CAPITULO IV - Geometria Afim e Rimaniana

CAPITULO V - Fibrados associados a variedades

CAPÍTULO VI - Grupos de Lie

CAPITULO VII - O dicionário de Yang e Wu

CAPITULO VIII - A teoria dos espaços fibrados

CAPITULO IX - Equivalência entre espaços fibrados

CAPITULO X - Fibrados principais e associados. A teoria das conexões.

CONCLUSÕES

BIBLIOGRAFIA

HISTÓRICO E AGRADECIMENTOS

Como tudo na vida essa dissertação tem uma história. Nosso objetivo inicial não visava propriamente a "Estrutura Matemática das Teorias de Gauge" mas sim, num primeiro movimento o estudo das forças soliton-soliton, e num segundo passo a generalização do método desenvolvido por Rajaraman[21] para a "interação instanton-instanton.

No entanto o impacto geométrico causado pelo estudo das teorias de Gauge consubstanciado na profunda semelhança formal entre as regras de transformação dos campos de Gauge e aquelas das conexões da relatividade geral foram decisivos no desenvolvimento de nosso trabalho. Nosso primeiro contacto com a bibliografia matemática foi a partir do pioneiro livro "Vector bundles in Mathematical Physics) de Robert Hermann escrito em 1970.

Naquele momento o ceticismo em relação à utilização dos sofisticados métodos da geometria diferencial contemporânea em física era muito maior do que o é, hoje. A "perversidade" ideológica citada pelo próprio Hermann no congresso de Salamanca[24] causava (e ainda causa!) profundas barreiras entre os físicos e os matemáticos.

Hoje creio que o processo de incorporação da "nova" matemática com a física é irreversível. Em todas as áreas as estruturas matemáticas da geometria diferencial e algébrica tem-se mostrado esclarecedoras e profícuas.

A discussão da mecânica clássica, principalmente no que

tange a quantização de sistemas vinculados ganha uma nova vida a partir da teoria de Frobenius e do conceito de distribuição. A própria termodinâmica somente se esclarece com a utilização das "formas diferenciais". O mesmo ocorre com a teoria das interações, uma vez que qualquer que seja sua natureza (gravitacionais, fracas,eletromagnéticas e fortes) podem ser formuladas a partir das conexões a Ehresmann num fibrado principal.

Como conclusão acredito que toda essa matemática apesar de limitada a discussão estrutural das teorias científicas da física deve jogar um papel central no desenvolvimento da ciência moderna. Evidentemente que o conduto principal será fornecido pela experiência, entretanto a própria experiência é suscitada pela reflexão teórica. Creio que os curriculos dos cursos de física terão que ser modificados a nível de graduação e pós-graduação, uma vez que a formação matemática oferecida aos profissionais em física limita-se a quase que exclusivamente a matemática do século passado.

Da mesma forma a pesquisa em matemática deve se extender às aplicações em física que em termos de abstração nada devem a nenhum outro ramo da matemática. Por tudo isso vale a pena o grande esforço em direção a matemática moderna. A física com sua capacidade de trilhar a incerteza e a matemática ampliando as possibilidades teóricas serão uma única disciplina.

Agradeço aos meus companheiros, pela lucidez, pelo incentivo e principalmente pela ação disciplinadora que me impuseram.

Agradeço ao professor J.J. Giambiaggi cuja orientação transcendeu em muito o plano da ciência, pela solidariedade, pelo companheirismo, pela orientação segura, experiente e não castrati

va que ofereceu durante todo esse trabalho. Todos os elementos positivos desse trabalho são de sua responsabilidade.

Agradeço aos professores Gilberto Loibel e Luis Favaro do Departamento de Matemática de São Carlos, pelo incentivo, pelas informações cedidas e pela paciência.

Agradeço ao professor Roberto Lobo co-responsável dos acertos desse trabalho, pelo incentivo e pela paciência ao ouvir meus seminários.

Agradeço a grande maioria dos companheiros de meu departamento, funcionários, alunos e professores.

INTRODUÇÃO

Um dos problemas candentes da Física Teórica atual, consiste na determinação de uma estrutura teórica, (em contraposição a uma fenomenologia) capaz de elucidar a natureza das interações fortes. Na verdade não estamos frente a um problema, mas sim frente a um conjunto de questões que, quando articuladas revelam uma complexidade qualitativamente diferente daquelas que a geraram.

Em primeiro lugar, os dados experimentais das colisões fortes, parecem apontar para a destruição de um dos conceitos (talvez preconceitos) mais estáveis da física: a linearidade. Ao abandonarmos a linearidade multiplicam-se a diversidade e a beleza dos fenômenos possíveis, bem como nossa incapacidade de compreendê-los. Um mundo não linear permite a existência de objetos como solitons e instantons, mas por outro lado sepulta uma parte considerável de nossos conhecimentos matemáticos em equações diferenciais de difícil solução. Em fenômenos não lineares, da mesma forma que na vida, pequenas causas podem gerar efeitos imensos e a união de dois fatos nos oferece um fato inteiramente novo. A velha teoria da perturbação, cansada e impotente, abandona o centro do cenário.

A segunda classe de problemas surge com a quantização de teorias não lineares, tanto a nível da própria interpretação do significado da quantização como na forma de fazê-la. O velho esquema de considerar a não linearidade uma perturbação já não mais funciona; a não linearidade engendra dentro de si um conjunto de fenômenos inacessíveis à técnica perturbativa usual, e que só estão sendo conhecidos a partir de uma metodologia de *quantização* radicalmente diferente da usual: o método de Feynman das integrais

de trajetória.[22]

Finalmente se coloca a questão da hamonização da estrutura teórica da física atual, o velho sonho de Einstein. Como se encaixa nossa futura teoria das interações fortes com as demais áreas da física? É possível unificar nosso conhecimento relativo às interações gravitacionais, fracas, fortes e eletromagnéticas ? Um estudo comparativo do conjunto das interações pode nos fornecer uma *pista* para uma teoria das colisões fortes?

A história do conhecimento da natureza inerte se fez com a geometria, e a geometria reflete em nossa consciência a natureza do mundo real. Sustentamos então, que a história do conhecimento natural aponta no sentido de uma geometrização crescente do conhecimento. A geometria é a base da experimentação e só a partir dela podemos nos libertar da formalidade lógica e ganhar alguma intuição do mundo real.

Comecemos por Newton, sua Mecânica se inspira na geometria de Euclides (evidentemente o problema de sabermos se isso era um elemento consciente na mente de Newton é puramente metafísico), as componentes daquilo que ele não sabia serem vetores, seu tempo absoluto, são elementos de uma geometria rude: o substrato geométrico é passivo, inerte e não interfere no substrato material. A matéria interfere na matéria instantaneamente e a distância, através da categoria *força*. Sua *geometrodinâmica* é morta e global.

Com a Mecânica Quântica, o infinito se instala pela primeira vez de modo confortável na Física: a diversidade dos fenômenos quânticos exige a concepção de objetos matemáticos de dimensão infinita, os espaços de Hilbert. Entretanto é com a Relatividade Geral que a geometrização do conhecimento abre espaço e se

concretiza definitivamente. Na geometrodinâmica de Einstein o substrato geométrico tem vida, se move ao sabor da dinâmica material, à influencia e, é por ela influenciado. Sua geometria é local, diferencial; seus triângulos são exóticos: os ângulos somados podem nos fornecer vários números diferentes. O conceito de força, cansado e impotente abandona o centro do cenário.

Esses avanços radicalizaram um problema que o próprio Newton já tinha sentido: a utilização de sistemas de coordenadas; o problema de Newton foi resolvido a partir do conceito de vetor, (que ele não conhecia) mas a Relatividade Geral colocava no palco, personagens mais complicados, os tensores. Mesmo assim a utilização de coordenadas mantinha a Física escondida num emaranhado de índices que até hoje provocam calafrios em nossos estudantes . Elie Cartan precisa ser lembrado, pois a partir de seus trabalhos conseguimos nos desembaraçar da camisa de força dos sistemas de coordenadas; Cartan conseguiu dar aos tensores (antisimétricos) interpretações geométricas simples, surgiram as formas diferenciáveis.

O eletromagnetismo pode ser colocado na forma tensorial mais foi a partir de um *truque* que ele revelou sua essência; e o truque consistia em introduzir uma nova entidade o potencial vetor, que apesar de *inaccessível* a experimentação simplificava a solução das equações de Maxwell. A introdução do vetor potencial gerava no entanto algumas ambiguidades; a partir de vários potenciais vetor distintos obtinhamos fenômenos físicos idênticos. Weyl[18] certamente não gostava de truques pois foi a partir de seus trabalhos que se revelaram mais claramente a natureza das ambiguidades que tantos problemas causavam à quantização do campo eletromagné-

tico. Ele mostrou que o conjunto dos campos de gauge que originavam a mesma física podiam ser transformados um no outro a partir de transformações, as transformações de gauge. E foi mais além, a introdução do potencial vetor nas equações de movimento do eletron de uma maneira, *adequada*, permitia o entendimento das interações eletromagnéticas entre os eletrons.

Estamos frente então à primeira teoria de Gauge: a eletrodinâmica; temos um campo fundamental para o eletron dado por uma equação livre, a equação de Dirac. Se introduzimos na equação de Dirac o potencial vetor, adicionando às derivadas parciais, suas componentes, a teoria resultante nos dá os eletrons interagindo eletromagneticamente ou na versão quantizada os eletrons em interação, medeados pelos fotons. O campo de Gauge começa a andar com suas próprias pernas e começa realmente a voar, com a indicação de Bohm-Aharonov[16] (verificada experimentalmente por Chambers[17]) de que o tensor de Faraday não continham toda a informação necessária para a compreensão do movimento eletrônico na presença de um campo magnético. (Isto numa região multiplamente conexa). Esse fato deu um novo alento às teorias de Gauge e o próximo passo foi dado por Salam e Weinberg que, num procedimento análogo ao da eletrodinâmica, unificaram as interações fracas às eletromagnéticas. Isso dava às teorias de Gauge uma nova dimensão: a universalidade.

Assim a procura de uma teoria das interações fortes era inspirada pelas teorias de Gauge e coube a Yang e Mills[19] a tarefa de fornecer um primeiro modelo de Gauge para as interações fortes. Esse modelo tinha um campo fundamental para o movimento dos nucleons e um campo de Gauge para os pions que medeavam as interações.

Apesar do modelo ter sido substituido mais tarde por um modelo de quarks e gluons[20], ele teve alguns méritos inquestionáveis; em primeiro lugar porque o grupo de simetria responsável pelas transformações de Gauge era mais complicado uma vez que a comutatividade não se verificava no grupo; além disso Yang e Mills exibem alguns aspectos da teoria similares à Relatividade Geral: a introdução de derivadas covariantes, tensores de curvatura, conexões, etc.

Parecia então que as teorias de Gauge seriam as estruturas capazes de fornecer uma visão unificada das interações, no entanto a gravitação parecia marginalizada; mas não estava. Yang em sua análise da Relatividade Geral mostra que num certo sentido ela se comporta como uma teoria de Gauge. Mas afinal quais são os aspectos mais fundamentais das teorias de Gauge? Essa pergunta foi parcialmente respondida por Wu e Yang que em 1975[15] mostraram que a estrutura matemática das teorias de Gauge não apresentavam nenhuma novidade, pois tinham sido concebidas há muitos anos pelos matemáticos da topologia diferencial em especial Chern e Stenrood[2]. Mas ainda, tais teorias podiam ser interpretadas geometricamente a partir da teoria dos espaços fibrados e de uma forma livre das coordenadas a partir do formalismo das formas diferenciáveis.

Conseguiamos então um forte candidato para a teoria das interações fortes, a *Cromodonâmica Quântica*,[20] uma teoria de Gauge onde o campo fundamental descreve quarks interagindo via um campo de Gauge cujos quanta são os gluons. O próximo passo seria a quantização dessas teorias de Gauge e a comparação com os dados experimentais, no entanto a complexidade das teorias de Gauge dificultou e dificulta a obtenção de soluções mesmo a nível clássico.

Se os métodos de quantização usuais, eram relativamente ineficientes pois desembocavam de uma forma ou de outra num esquema perturbativo, uma esperança se abria com as integrais de trajetória. E observou-se então que o conhecimento de algumas soluções clássicas, não do modelo original Minkovskiano mas sim da versão Euclidiana, permitia a obtenção de resultados semi-clássicos aproximados mão não perturbativos. Um modelo mais simples do que a Cromodinâmica Quântica, o modelo original de Yang e Mills na versão Euclidiana tornou possível a obtenção dessas soluções: os instantons.[2,3] Começamos a estudar os instantons, suas propriedades e sua essência e viu-se, que a presença de instantons estava ligada a uma lei de conservação radicalmente distinta das leis usuais ; ao invés de serem advindas das simetrias da lagrangiana via mecanismo de Noether, decorriam das propriedades topológicas do espaço das soluções; eram as leis de conservação topológicas. Hoje sabemos que essas propriedades topológicas também já foram estudadas, de um ponto de vista puramente matemático, por Pontryagrin para os monopolos de t'Hooft e por Chern para o modelo de Yang Mills e são na verdade classes características associadas a espaços fibrados.

Finalisando, vale ressaltar que as teorias de Gauge, isto é, as teorias de espaços fibrados, permitem uma interpretação para as interações fortes de tipo dual como em relatividade geral, onde o campo de Gauge faz o papel da curvatura do substratum geométrico, definindo a dinâmica material.[11]

Nesse trabalho desenvolveremos os conceitos matemáticos mínimos necessários à compreensão da estrutura matemática das teorias de Gauge. Como método aceitamos conviver com uma série de im

precisões advindas de uma exposição pouco rigorosa e superficial de um número bastante grande de conceitos matemáticos. A justificativa dessa decisão está em nossa intenção de escrever um texto acessível a físicos, que em geral, tem uma formação bastante primária no tocante à geometria moderna. Além disso em nosso estudo sempre nos deparamos com dois caminhos: o da profundidade e o da extensão; escolhemos sempre o segundo, objetivando chegar rapidamente às aplicações. Além disso, textos completos e profundos sobre o tema existem, desde o livro de Stenrood até textos mais modernos[1]. Mesmo na literatura recente em física, começam a surgir artigos de revisão.

Iniciamos nosso trabalho discutindo os conceitos básicos de álgebra tensorial e exterior. Nos munimos então de um método algébrico capaz de gerar uma álgebra tensorial e uma álgebra exterior a partir de um espaço vetorial abstrato. Um conceito central desse capítulo é o de produto exterior.

Iniciamos então, no segundo capítulo, o estudo dos objetos matemáticos fundamentais, os átomos que nos permitiram compor nossa molécula básica: o espaço fibrado. Definimos um espaço topológico, arena natural das aplicações contínuas. Estudamos então suas propriedades mais importantes.

No terceiro capítulo, sofisticamos nosso espaço topológico munindo-o de uma estrutura diferenciável. Esse espaço topológico enriquecido é uma variedade diferenciável, objeto adequado para o estabelecimento da diferenciação. Estamos no nível da topologia diferenciável. Nesse capítulo definimos um vetor contravariante tangente e então geramos algébricamente campos tensoriais. Estudamos ainda a derivação e integração sobre variedades.

O capítulo IV condensa dois saltos de qualidades, um em direção a uma geometria afim (com paralelismo) e outro em direção a uma geometria Rimaniana (com métrica). O paralelismo só é possível se sofisticarmos ainda mais nossa variedade, definindo sobre ela uma conexão. A passibilidade de medir tamanho de vetores exige um segundo enriquecimento: a métrica.

O capítulo V representa o coroamento dos primeiros quatro capítulos, nele começamos o estudo dos espaços fibrados simples: o fibrado tangente e o fibrado dos referenciais lineares. Esse capítulo finaliza a geometria necessária para o estudo da gravitação e para nós representa um laboratório teórico.

O capítulo VI se preocupa com o estudo dos grupos de Lie, apresentamos também as equações de Maurer-Cartan.

Começamos então uma segunda fase, cujo objetivo são as teorias de Gauge. O capítulo VII é uma revisão do artigo de Yang e Wu onde procuramos motivas o estudo dos fibrados exibindo o *Dicionário de Yang e Wu*, onde se estabeleceu pela primeira vez a conexão entre a física das teorias de Gauge e a geometria dos espaços fibrados. São discutidos os problemas decorrentes da existência de monopolos, bem como a experiência de Bohm Ahoronov.

No Capítulo VIII expomos o conceito de espaços fibrados iniciando de uma maneira intuitiva para depois formalizar esse conceito. Nesse capítulo oscilamos em três níveis: o da teoria dos conjuntos (isomorfismos), o da topologia (homeomorfismos) e o da geometria diferencial (difeomorfismos).

O conceito de equivalência de espaços fibrados joga um papel fundamental no estudo dos números quânticos topológicos e

portanto na discussão de soluções euclidianas de ação finita (instantons). Os pontos centrais desse capítulo são os teoremas da equivalência e construção (Stenrood), bem como os conceitos de fibrado associado e fibrado principal.

No último capítulo nos dedicamos ao estudo das conexões em espaços fibrados, uma vez que, tanto o potencial vetor como a conexão Einsteiniana, são conexões em fibrados principais.

Concluimos recapitulando os aspectos centrais das teorias de Gauge e exibindo alguns elementos de ligação entre a teoria das conexões em espaços fibrados e as teorias de Gauge, a saber a interpretação do potencial vetor como uma 1-forma conexão, bem como a identificação do tensor de Faraday à curvatura principal.

Uma interpretação rigorosa e axiomática das teorias de Gauge fogem do alcance desse trabalho. Algumas tentativas nesse sentido se encontram citadas na bibliografia.

Expusemos também no fim desse trabalho, uma bibliografia comentada que permita a localização rápida dos textos complementares à leitura desse trabalho e que melhor se adapte às preferências de cada um.

CAPÍTULO I

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA TENSORIAL E EXTERIOR

1. Motivação

Neste capítulo introduziremos os conceitos básicos da álgebra tensorial e da álgebra exterior, antes porém cabe uma justificativa da inclusão desse tópico e de nossos objetivos com ele. Os conceitos de tensor e de forma diferenciável, não são indispensáveis à descrição das leis da física, elas podem ser descritas usando-se sistemas particulares de coordenadas. O próprio Newton em sua formulação da Mecânica Clássica, não se referia a vetores, mas apenas às suas componentes; entretanto a utilização dos tensores permite uma descrição das leis da física, livre de sistemas de coordenadas, exibindo o caráter físico de tais leis, antes escondido num emaranhado de índices e símbolos. Da mesma maneira o formalismo das formas diferenciáveis além de nos libertar das coordenadas, permite uma interpretação geométrica mais profunda das leis da física. No caso de teorias complexas como a Teoria de Yang-Mills, a Relatividade Geral e mesmo o eletromagnetismo clássico, esse procedimento é ainda mais vantajoso, pois nos fornece uma base intuitiva mais ampla.

Nosso objetivo nesse capítulo e nos seguintes é exatamente expor suscintamente essa linguagem formal.

Apesar de nossa preocupação central estar concentrada nas aplicações, escolhemos um método de exposição, inicialmente puramente algébrico, para depois aplicar a artilharia algébrica às variedades diferenciáveis.

quadridimensionais, substrato geométrico das teorias geralmente relativisticas. Isto por três motivos básicos: primeiro um argumento pedagógico: preferimos separar duas classes de problemas, uma advinda da manipulação das formas e dos tensores, outra originada da articulação de tensores ao longo de variedades. O segundo argumento está ligado ao fato de que o conceito primitivo de vetor, como uma flecha unindo dois pontos do plano (ou dois eventos do espaço-tempo) deve ser reelaborado afim de ser aplicado ao estudo das superfícies (ou ao estudo do espaço-tempo curvo). Finalmente apesar da natureza restrita das teorias de Gauge, elas manifestam efeitos de curvatura induzidos pelos campos de Gauge.

Trabalharemos então, com objetos abstratos, sem nenhum significado geométrico ou físico, cuja concreticidade reside em nossa capacidade de realizar operações algébricas com eles, a saber a adição e a multiplicação por escalar. Estaremos frente a espaços vetoriais abstratos, de dimensão finita sobre o corpo dos números reais. Não nos preocuparemos aqui com os vetores de dimensão infinita usados na Mecânica Quântica, apesar de muitos conceitos aqui desenvolvidos serem aplicáveis a tais espaços. A segunda restrição, isto é, o fato do corpo de escalares ser real, deverá ser abandonada, quando isto for necessário. Os conceitos básicos utilizados são os conceitos de conjunto, aplicação entre conjuntos, operações algébricas entre elementos, e só. Somente com esses poucos elementos poderemos falar em linearidade, tema central desse capítulo.

2. Vetores contravariantes

Estudaremos as propriedades de um espaço vetorial $\mathbb{E}$ de dimensão n, sobre o corpo real, seus elementos serão denotados por letras latinas minúsculas e denominados vetores contravariantes. Em tais espaços pode-se falar em base, isto é um conjunto de n-vetores e_k, $k = 1,\ldots,n$ tais que todo vetor V de $\mathbb{E}$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores de base, simbolicamente:

$$(1)\quad V = V^k e_k \qquad \text{(convenção de Einstein)}$$

onde V^k, $k = 1,\ldots,n$ são números reais.

Em tais espaços vetoriais não existe em princípio, uma norma, quer dizer uma regra, que associe a cada vetor V um número real não negativo, dito norma ou comprimento de V, quando isso acontecer o espaço vetorial é dito normado; da mesma forma não existe em $\mathbb{E}$ um produto escalar, que associa a cada par de vetores de $\mathbb{E}$ um número real, quando isso acontece o espaço vetorial é dito Euclidiano. Os espaços Euclidianos são normados (com a norma induzida pelo produto escalar), mas a recíproca não é verdadeira. Não assumiremos, por enquanto, nenhuma dessas estruturas, nossos espaços vetoriais são os mais simples possíveis sem produto escalar ou norma(*).

(*) Nesses espaços não podemos falar nos conceitos geométricos, como o de perpendicularidade, ângulo, etc...

A razão do termo "contravariante" está ligado ao fato de que num espaço vetorial existem muitas bases diferentes, de forma que podemos escolher uma outra base $\tilde{e}_k$, $k=1,\dots,n$, e expressar o mesmo vetor V, em relação à nova base:

$$(2) \quad V = \tilde{V}^k \tilde{e}_k$$

Os vetores e_k podem ser expressos em função dos vetores $\tilde{e}_k$, pois também são vetores de $\mathbb{E}$:

$$(3) \quad e_k = \Lambda^m_k \, \tilde{e}_m$$

Agora, substituindo (3) em (1) e comparando com (2) vemos que $\tilde{V}^k = \Lambda^k_m \, V^m$, de modos que:

$$(4) \quad V^k = \Lambda^{-1\,k}_{\;\;m} \, \tilde{V}^m$$

Vemos então que se a antiga base e_k , se expressa em função da nova base de uma maneira (isto é através da matriz Λ), as componentes de V, na base e_k se transformam de forma contrária (isto é através de Λ^{-1}), isto justifica o termo *contravariante*.

Podemos da mesma forma considerar outros espaços vetoriais, digamos $\mathbb{F}$, e também compará-los. A forma natural de compará-los é através de uma aplicação que leve elementos de um, no outro e também que preserve a estrutura linear adquirida pelos espaços a partir da adição e multiplicação por escalar, nele definidos. Muitas vezes conseguimos estabelecer relações lineares biunívovas entre dois espaços, diremos então que eles são isomorfos; para espaços de dimensão finita, será o caso em que eles tem a mesma dimensão. Assim todos os espaços n-dimensionais são

identificados entre si e identificados ao popular $\mathbb{R}^n$: o espaço vetorial das n-uplas de números reais. No entanto os isomorfismos dependeram de escolhas de bases, o que dá à identificação um elemento de arbitrariedade. Quando isso não acontece, quer dizer o isomorfismo não depende de nenhuma convenção, diremos que os espaços são canonicamente isomorfos. Evidentemente se conhecemos as propriedades de um espaço vetorial, podemos conhecer as propriedades de todos os espaços canonicamente isomorfos a êle.

3. Vetores covariantes

Vamos agora construir uma segunda categoria de objetos: os vetores covariantes; um vetor covariante sobre o espaço vetorial $\mathbb{E}$, nada mais é do que uma aplicação linear que associa a cada vetor contravariante de $\mathbb{E}$ um número real, denotaremos por letras gregas aos vetores covarientes. Simbolicamente escrevemos $\omega : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$. Frequentemente reserva-se o nome de forma linear para as aplicações lineares com imagens reais. Observemos a natureza completamente distinta dos vetores contravariantes e covariantes, os primeiros foram definidos a priori, enquanto que os segundos são formas lineares. Podemos enfocar os vetores covariantes como máquinas lineares, em cuja entrada se coloca um vetor contravariante e que produz na saída um número real.

Podemos agora formar o conjunto de todos os vetores covariantes e sobre esse conjunto definir as operações de adição e multiplicação por escalar

$$\omega + \gamma\,(\ ) = \omega(\ ) + \gamma(\ ) \qquad \omega, \gamma \text{ - formas lineares}$$

$$[a.\omega](\ ) = a.\,\omega(\ ) \qquad a \text{ - número real}$$

Tais operações dão ao conjunto dessas máquinas lineares uma estrutura de espaço vetorial real n-dimensional, denominado espaço dual e denotado $\mathbb{E}^*$. Como todo espaço vetorial podemos falar em bases para o espaço dual, bastando tomar n-máquinas lineares (máquinas lineares, formas lineares, vetores covariantes) independentes. Usualmente trabalha-se com uma base particular para os vetores covariantes denominada base dual, que denotaremos e^k, $k=1,\dots,n$, que tem a seguinte propriedade:

$$e^k(e_m) = \delta^k_m$$

Claramente tal definição é uma convenção; poderiamos ter definido a base dual de outra forma qualquer. Mas tal convenção estabelece um isomorfismo entre $\mathbb{E}$ e seu dual $\mathbb{E}^*$, da seguinte forma: dado um vetor de $\mathbb{E}$, expandimos tal vetor relativamente à uma base e_k de $\mathbb{E}$; a seguir procuramos a base dual $\mathbb{E}^*$ e montamos uma máquina linear usando as componentes do vetor relativamente à base. Exemplificando: se $V = 2e_1 + 3e_2 + 12e_3$ então $\omega = 2e^1 + 3e^2 + 12e^3$.

Evidentemente tal isomorfismo não é canônico. Assim $\mathbb{E}$ e seu dual $\mathbb{E}^*$ são isomorfos (tem mesma dimensão), entretanto o isomorfismo não é canônico de modos que devemos considerar os vetores covariantes e contravariantes como categorias distintas.

O mesmo não acontece porém se $\mathbb{E}$ é um espaço vetorial Euclidiano, isto é, existe em $\mathbb{E}$ uma forma bilinear simétrica, que associa a cada par de vetores de $\mathbb{E}$ um número real; denotemos g(,) tal forma bilinear. Agora se temos um vetor V de $\mathbb{E}$ podemos construir uma forma linear introduzindo V numa das entradas da máquina linear g(,). O fato de V ser introduzido na pri-

meira ou na segunda entrada é irrelevante, pois a saída é a mesma; g(,) é simétrica. Associamos assim, a cada $v \in \mathbb{E}$ um elemento g(v,) de $\mathbb{E}^*$.

Podemos agora realizar o procedimento inverso: partimos de um vetor covariante w( ) e procuramos um vetor V tal que colocado numa das entradas de g, digamos na primeira reproduza w; w( ) = g(v,). Pode-se mostrar que tal valor existe e é único. Assim quando o espaço vetorial de partida $\mathbb{E}$, é Euclidiano, os vetores contravariantes e covariantes são identificáveis canonicamente de forma que a distinção entre eles não é importante , eles são na verdade dois aspectos do mesmo todo.

Podemos agora repetir esse procedimento (de construir o dual) tomando o dual do dual, $\mathbb{E}^{**}$, isto é as máquinas lineares em cuja entrada vai um vetor covariante e em cuja saída vem um número. Pode-se mostrar que isso não nos leva a nenhum lugar: para espaços de dimensão finita $\mathbb{E}^{**}$ é canonicamente isomorfo a $\mathbb{E}$, tal propriedade é dita reflexicidade(3).

Finalizando, justificamos o uso da palavra "covariante" observando que quando mudamos a base de $\mathbb{E}$:

$$\tilde{e}_k = \Lambda^m_k e_m$$

A base dual sofre uma modificação da forma

$$\tilde{e}^k = \Lambda^{-1}{}^k_m e^m$$

De modos que as componentes de uma forma $\omega = \omega_k e^k$ deverão se modificar da forma

$$\tilde{\omega}_k = \Lambda^m_k \omega_m$$

---

(3) Em espaços de dimensão infinita, isso não ocorre; a menos que tenhamos estruturas topológicas, adicionadas às estruturas algébricas.

Que é exatamente contrária à forma contravariante, daí o nome covariante. Usaremos sempre a convenção útil dos símbolos em cima e embaixo.

4. Tensores covariantes

Definimos um vetor covariante, como sendo uma forma linear sobre um espaço vetorial $\mathbb{E}$, podemos agora generalizar esse conceito definindo formas multilineares sobre $\mathbb{E}$. Assim um tensor covariante de ordem p é uma aplicação multilinear que associa a cada p-upla de vetores de $\mathbb{E}$, um número real, ou ainda uma máquina linear onde se introduz p vetores numa ordem definida obtendo-se um número real.

O conjunto de todos os tensores de ordem p constitui um espaço vetorial de dimensão n^p, que será denotado $\otimes^p \mathbb{E}^*$ (o motivo da notação deverá ficar claro a seguir).

Definimos agora o produto tensorial de um tensor de ordem p, por um tensor de ordem q da seguinte forma: se w(, , , , ,) é a máquina linear de p entradas e se α(, , ,) é a máquina de q entradas, o produto tensorial será:

$$[\omega \otimes \alpha]\underbrace{(,,,,..)}_{p+q \text{ ENTRADAS}} = \omega(,,..) \cdot \alpha(,,,)$$

Então por exemplo, a partir de dois tensores de primeira ordem podemos formar um tensor de segunda ordem. Agora, será que todos os tensores de segunda ordem podem ser escritos como produto tensorial de dois tensores de primeira ordem? A resposta é negativa, nem todos os tensores se decompõe num produto tensorial; tensores com essas propriedades são ditos decomponíveis.

Listaremos agora algumas das propriedades do produto

tensorial, que podem ser facilmente verificadas:

$$\omega \otimes (\alpha_1 + \alpha_2) = \omega \otimes \alpha_1 + \omega \otimes \alpha_2$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2) \otimes \omega = \alpha_1 \otimes \omega + \alpha_2 \otimes \omega$$
$$\partial(\omega \otimes \alpha) = (\partial\omega) \otimes \alpha = \omega \otimes (\partial\alpha)$$
$$\alpha_1 \otimes (\alpha_2 \otimes \alpha_3) = (\alpha_1 \otimes \alpha_2) \otimes \alpha_3$$
$$\alpha \otimes \omega \neq \omega \otimes \alpha$$

Estamos agora em condições de construirmos bases para os tensores covariantes de ordem p, a partir da base dual, em outras palavras: todo tensor covariante de ordem p pode ser escrito na forma:

$$\omega = \omega_{k_1 k_2 \ldots k_p} \, e^{k_1} \otimes e^{k_2} \otimes \ldots \otimes e^{k_p}$$

As mudanças de coordenadas para os tensores covariantes de ordem p são completamente análogas às dos vetores covariantes.

5. Tensores contravariantes e mixtos

Nesse estágio parece que perdemos a dualidade, pois não temos tensores contravariantes. Para obtê-los, primeiro consideremos uma forma linear $\bar{v}$ definida em $\mathbb{E}^*$, com imagens em $\mathbb{R}$; ora, o conjunto de tais formas é exatamente $\mathbb{E}^{**}$, que como já dissemos é canonicamente idêntico a $\mathbb{E}$, de modo que nossa forma $\bar{v}$ na verdade é um elemento de $\mathbb{E}$. Em outras palavras, os vetores contravariantes podem ser entendidos como formas lineares sobre o espaço dual.

Generalizando essas idéias, definimos um tensor contravariante de ordem p como sendo uma forma p-multilinear sobre $\mathbb{E}^*$ e indicamos o conjunto de todos os tensores contravariantes

pelo símbolo $\overset{p}{\otimes} \mathbb{E}$. Tal como os tensores covariantes, os contravariantes podem ser expandidos na forma:

$$\omega = \omega^{k_1 k_2 \cdots k_p} e_{k_1} \otimes e_{k_2} \otimes \cdots \otimes e_{k_p}$$

Podemos falar também em tensores mixtos, digamos p-covariantes e q-contravariantes; para isto basta tomarmos formas multilineares definidas no $\mathbb{E}^p \otimes \mathbb{E}^{*q}$, que podem ser expandidos na forma:

$$\omega = \omega^{k_1 k_2 \cdots k_q}_{p_1 p_2 \cdots p_p} e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_q} \otimes e^{p_1} \otimes \cdots \otimes e^{p_p}$$

6. Tensores covariantes alternados ou p-formas

Dentre os tensores covariantes existe uma classe deles de reelevância para as aplicações em geometria diferencial, bem como em física, são os tensores covariantes alternados que tem a seguinte propriedade: mudam de sinal quando alternados dois de seus argumentos, mantendo os demais fixos, isto é:

$$\omega(V_1, \ldots, V_k, \ldots, V_m, \ldots) = -\omega(V_1, \ldots, V_m, \ldots, V_k, \ldots)$$

Denotaremos o sub-conjunto de $\overset{p}{\otimes} \mathbb{E}^*$ constituido somente pelos tensores covariantes alternados por $\Lambda^p \mathbb{E}^*$; os tensores covariantes alternados são denominados p-formas e constituem um espaço vetorial de dimensão $\binom{n}{p}$. Essa última afirmação tem como consequência que sobre um espaço de dimensão m, não podemos definir n+1 - formas, o máximo que conseguimos são n-formas, constituindo-se o espaço $\Lambda^n \mathbb{E}^*$, unidimensional.

Uma maneira de conseguirmos formas alternadas consiste no processo de antisimetrização de tensores, isto é, seja w um tensor de ordem p, seja uma permutação dos números 1,2,...p;

podemos definir uma p-forma à partir do p-tensor da seguinte maneira:

$$A_{S}(\omega)(V_1,\dots,V_p) = \frac{1}{p!}\sum_{\gamma\in S_p} \operatorname{sinal}\gamma \cdot \omega(V_{\gamma(1)}\dots V_{\gamma(p)})$$

onde S_p é o conjunto de todas as permutações possíveis de 1,2,...,p. Por exemplo com p = 3, temos p! = 6, $S_p = \{(123),(132),(231),(213),(312),(321)\}$ de modo que

$$A_S(\omega)(V_1V_2V_3) = \frac{1}{6}\left[\omega(V_1V_2V_3) - \omega(V_1V_3V_2) - \omega(V_2V_1V_3) + \omega(V_2V_3V_1) + \omega(V_3V_1V_2) - \omega(V_3V_2V_1)\right]$$

Se quisermos agora definir uma operação entre p-formas, temos que levar em conta que o produto tensorial de uma p-forma por uma q-forma <u>não</u> é uma p+q-forma, pois a forma p+q multilinear, não é necessariamente alternada. Não temos outro caminho a não ser antisimetrizar o produto tensorial. Definimos então o produto exterior de duas formas alternadas como sendo:

$$\omega\wedge\alpha = \frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!}\, A_S(\omega\otimes\alpha)$$

onde ω é uma k-forma e α uma ℓ-forma.

Pode-se demonstrar as seguintes propriedades para as p-formas (ou formas exteriores):

$$\alpha\wedge(\omega_1+\omega_2) = \alpha\wedge\omega_1 + \alpha\wedge\omega_2$$
$$(\omega_1+\omega_2)\wedge\alpha = \omega_1\wedge\alpha + \omega_2\wedge\alpha$$
$$(a\omega)\wedge\alpha = \omega\wedge(a\alpha) = a(\omega\wedge\alpha)$$
$$(\omega\wedge\alpha)\wedge\beta = \omega\wedge(\alpha\wedge\beta) = \omega\wedge\alpha\wedge\beta$$

De uma maneira análoga à usada para o produto tensorial, pode-se mostrar que o produto exterior de 1-formas gera uma base para as p-formas. Assim uma p-forma gnérica pode ser escrita como:

$$\omega = \omega_{k_1 \ldots k_p} \, e^{k_1} \wedge e^{k_2} \wedge \ldots \wedge e^{k_p}$$

com $k_1 \ldots k_p = 1, \ldots, n$ e $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$

Isso justifica a utilização do símbolo $\overset{p}{\wedge} \mathbb{E}^*$ para o espaço das p-formas. A título de exemplo, calcularemos o produto exterior de duas 1-formas

$$\omega = \omega_k \, e^k \quad , \quad \alpha = \alpha_k \, e^k$$

então

$$\omega \wedge \alpha = \frac{(1+1)!}{1!\,1!} \, A_S(\omega \otimes \alpha)$$

mas

$$A_S(\omega \otimes \alpha)(u, v) = \frac{1}{2}\left[\omega(u)\,\alpha(v) - \omega(v)\,\alpha(u)\right]$$

logo

$$\omega \wedge \alpha = \begin{vmatrix} \omega(u) & \alpha(u) \\ \omega(v) & \alpha(v) \end{vmatrix}$$

CAPÍTULO II

ELEMENTOS DE TOPOLOGIA

1. Motivação

Dados dois conjuntos de qualquer espécie ou natureza, podemos conceber naturalmente a existência de aplicações entre elementos desses conjuntos. Assim o conceito de conjunto, é exatamente aquele necessário e suficiente para que possamos precisar o conceito intuitivo de *relação entre objetos*. Por outro lado a prática humana revela uma outra qualidade das relações entre objetos: a continuidade. Assim por exemplo as estrelas se espalham pelo céu, de uma forma descontínua, enquanto que as águas se espraiam *continuamente* nos oceanos. Se trabalhamos somente com conjuntos, somos incapazes de precisar o conceito de aplicação contínua, isto porque a idéia de continuidade pressupõe uma análise local, isto é, uma análise que não se baste tão somente com a investigação de um objeto, mas que indague também sobre suas vizinhanças.

O conceito de espaço topológico é o conceito necessário e suficiente para que possamos precisar o conceito de continuidade. Assim a estrutura de espaço topológico é a estrutura que devemos adendar a conjuntos, para que possamos definir aplicações contínuas entre eles. Deveremos precisar então o conceito de vizinhança de um ponto. No capítulo III realizaremos um movimento análogo ao que estamos aqui realizando, só que nosso objetivo será o estabelecimento da idéia de suavidade e seremos levados então, à idéia de variedade diferenciável.

O conjunto em que a experiência do cotidiano é mais fértil é o espaço geométrico tridimensional. Esse espaço, pode ser identificado ao conjunto das ternas de números reais, relativamente a um ponto fixo do espaço; além disso, podemos falar em vetores que se originam desse ponto fixo e se estendem a qualquer ponto do espaço. A partir daí, estabelecemos uma regra para classificar esses vetores, isto é, um produto escalar. Precisando o produto escalar, damos aos vetores do R^3, uma estrutura de espaço de Hilbert.

A partir da estrutura de Hilbert, temos um critério para definir o tamanho de um vetor, como sendo a raiz quadrada do produto escalar dele por ele mesmo. Assim obtivemos uma norma, e nosso espaço é dito normado ou de Banach. Os espaços de Hilbert constituem uma classe particular entre os espaços normados. Podemos ir além, e a partir da norma de um vetor definir a distância entre dois pontos do R^3, como sendo a norma da diferença dos vetores que localizam os pontos em questão.

O espaço passa a ser *metrizável*, isto é, a métrica (induzida pela norma) permite que digamos quão longe um ponto está do outro. Os espaços métricos, são categorias ainda mais gerais. Com uma métrica podemos facilmente estudar as vizinhanças de um ponto e definir a continuidade de uma aplicação entre espaços métricos. Os espaços topológicos são objetos muito mais gerais (estruturas mais pobres); todo espaço métrico é um espaço topológico com a topologia induzida pela métrica, mas a recíproca não é verdadeira.

Por exemplo, no R^3 podemos falar em bolas abertas de

vários tamanhos, e a partir delas construir conjuntos abertos em geral, combinando a união (finita ou infinita) e a intersecção (finita) de bolas abertas. Além disso, podemos falar em interior, exterior e fronteira de um conjunto. Tudo isso é no R^3 propiciado pela existância da métrica. Mas existem os espaços topológicos, onde mesmo na ausência da métrica, esses conceitos podem ser estabelecidos.

Do ponto de vista histórico, a topologia, como muitos outros ramos da matemática, nasceu da geometria. No entanto, a análise topológica difere da análise geométrica no seguinte sentido: enquanto a geometria se preocupa com o estudo da forma, tamanho, etc., de objetos geométricos (como um toro, triângulo, etc) a topologia vai focalizar sua atenção somente em algumas das propriedades dos objetos geométricos. Por exemplo, de um ponto de vista geométrico, duas esferas de tamanhos diferentes, são objetos distintos, da mesma forma que um quadrado e uma circunferência são radicalmente diversos. A topologia abstrai da geometria a forma e a dimensão; do ponto de vista topológico tanto duas esféras de tamanhos diferentes, com um quadrado e uma circunferência são objetos equivalentes, no sentido de poderem ser transformados um no outro. Leibniz denominava a análise topológica por *Analysis Situs*, numa referência a preocupação topológica em analisar apenas a *situação relativa* dos elementos que compõem um objeto geométrico.

Com o decorrer do tempo, a topologia foi se despreendendo da geometria e organizando-se enquanto disciplina autonoma, *aplicável*, inclusive a outros ramos da matemática. Os principais nomes desse movimento são, Riemann , Cantor , Poin-

caré , Bolzano , Hausdorff e outros, que culminou com a criação do conceito de espaço topológico. Se nas aplicações necessitamos também do conceito de *suavidade* (diferenciabilidade), teremos de dotar nossos espaços topológicos de estruturas mais ricas, construindo variedades diferenciáveis. Todos os objetos matemáticos usados em física (até hoje) possuem estruturas mais complexas, no entanto, as propriedades topológicas desses objetos ganham um relevo, cada vez maior nos últimos anos.

Nesse capítulo, faremos uma revisão dos conceitos elementares da topologia, culminando com o conceito de *conectividade* que joga um papel central na classificação das soluções clássicas não dissipativas das teorias de Gauge, e portanto na determinação dos números topológicos.

2. Espaços topológicos

Consideremos um conjunto qualquer M, de elementos denotados por p. Diremos que M é dotado de uma estrutura topológica se existirem uma família F[M] de subconjuntos de M, tal que:

(1) $M \in F[M]$ e $\emptyset \in F[M]$

(2) A união de conjuntos de F(M) ainda está em M

(3) A intersecção de um número finito de conjuntos de F(M) ainda é um elemento de F(M).

Diremos que a família F(M) estrutura o conjunto M num espaço topológico (M,F(M)). Evidentemente, um conjunto pode ser munido de várias estruturas topológicas, como por exemplo a situação que encontramos no estudo das funções, que inicialmente é

efetuado a partir do conceito de convergência pontual, (induzido por uma topologia forte) para depois ser generalizado através da introdução da convergência em média (induzido por uma topologia fraca), que permite a discussão das distribuições. Quando não houver possibilidade de confusão, denotaremos o espaço topológico (M,F(M)), pelo mesmo símbolo que caracteriza o conjunto.

Os conjuntos da família F(M) são denominados abertos e seus complementares são conjuntos ditos fechados. Os axiomas de dualidade da teoria dos conjuntos implicam que os conjuntos fechados devem obedecer às propriedades:

(1') M e ϕ são fechados

(2') A união finita de fechados é fechada

(3') A intersecção de fechados é fechada.

Usa-se frequentemente a expressão *vizinhança aberta de um ponto* para denominar um aberto que contém o ponto.

Exemplos de espaços topológicos, são os espaços métricos (todos), pois se num espaço está definida uma distância, isto é, uma aplicação[1] que associa a cada par de pontos um número real positivo ou nulo, podemos definir bolas abertas. A seguir definimos os abertos do espaço métrico como sendo conjunto, tais que, qualquer um de seus pontos pertence a alguma bola aberta nele contida.

Além disso, sempre podemos definir uma topologia num conjunto qualquer, procedendo de duas maneiras extremas: conside

---

(1) Essa aplicação deve ser sempre positiva, a não ser que os dois pontos coincidam, ser simétrica e obedecer o axioma triangular (Kolmogorof / Fomin pag. 51)

rando todos os seus subconjuntos como abertos ou considerando apenas o próprio conjunto e o vazio como abertos. Conjuntos de funções também constituem exemplos de espaços topológicos. A definição de um topologia num conjunto depende dos objetivos que temos com ele. Por exemplo, em espaços funcionais, frequentemente trabalhamos com topologias fracas, afim de generalizar operações sobre funções.

Com a definição de uma estrutura topológica podemos também discutir as propriedades de um subconjunto U de M. Por exemplo, ele pode ser um aberto, um fechado ou nem aberto nem fechado. Além disso podemos precisar a idéia intuitiva de interior de um conjunto U qualquer, como sendo constituído pelos pontos de U que admitem uma vizinhança totalmente contida em U. Se um conjunto é aberto, seu interior coincide com si próprio, mas se U não é aberto seu interior consiste no maior conjunto aberto contido em U. Então determinar o interior consiste numa operação de tomar sua maior parte aberta . Analogamente o exterior de um conjunto é o conjunto constituído pelo interior do complemento de U. Definimos agora por exclusão a fronteira de U, como sendo constituída pelos pontos que não estão nem no interior, nem no exterior de U. Um conjunto que pode ser associado a U, e que de uma maneira é um processo oposto a escolha do interior é o *fecho* de U. Chamamos então fecho de U e denotamos [U] ao conjunto constituído pelos pontos de M, tais que em toda vizinhança aberta existe pelo menos um ponto de U.

3. Continuidade

Vamos considerar agora uma função real $f:M \to R$ e cons-

truir o conceito de continuidade de uma aplicação real.

Se trabalhamos com aplicações entre espaços métricos, digamos $g:E \to F$, podemos dizer que g é contínua num ponto $e \in E$, se para toda bola aberta de raio ϵ que contenha g(e), existe em correspondência uma bola aberta de raio δ, que contém e, e cuja imagem em F está totalmente contida na vizinhança de g(e). Simbolicamente "g é contínua em $e \in E$ se dado $\epsilon > 0$, arbitrário

$$\exists \delta > 0 \,/\, d(e', e) < \delta \Rightarrow d(g(e'), g(e)) < \epsilon$$

Nos espaços topológicos, não existem uma métrica, mas a idéia de vizinhança é bem definida. Diremos então que uma aplicação $f:M \to R$ é contínua, no ponto p se dada uma vizinhança arbitrariamente pequena de f(p), existir uma vizinhança de p, tal que todos os seus pontos são levados por f, na vizinhança de f(p). Essa definição generaliza a continuidade em espaços topológicos.

O passo seguinte é definirmos uma aplicação contínua de um espaço topológico M, num espaço topológico N, e a definição é mutatis mutandis, a mesma que a anterior. Um teorema bastante último, na demonstração da continuidade de aplicações entre espaços topológicos e que inclusive pode servir de definição alternativa de aplicação contínua é o seguinte: uma aplicação é contínua se e somente se a anti-imagem de um conjunto aberto qualquer é um conjunto aberto. Simbolicamente, $f:M \to N$, contínua, V aberto de $N \to f^{-1}(V)$ é aberto de M.

Demonstraremos esse teorema a fim de familiarizar o leitor com o pensamento topológico. Assumimos então que $f:M \to N$, seja contínua e que U_N seja aberto de N e iremos mostrar que $U_M = f^{-1}(U_N)$ é um conjunto aberto. Para isso temos que mostrar que

dado um ponto $p \in U_M$, existe uma vizinhança V_p totalmente contida em U_M. Para isso basta tomarmos uma vizinhança $V_{f(p)}$ em U_N, essa vizinhança sempre existe, pois U_N é aberto. Como f é aberto existe uma vizinhança correspondente em M, contida em U_M. Logo U_M é aberto.

Agora admitamos que $f^{-1}(U_N)$ seja aberto, para toda vizinhança U_N de N. Tomando uma vizinhança de um ponto f(p), digamos $V_{f(p)}$, resulta que $f^{-1}(V_{f(p)})$ contém p, é aberta e tem sua imagem coincidente com $V_{f(p)}$, logo f é contínua.

4. Comparando espaços topológicos

De posse de aplicações contínuas podemos comparar espaços topológicos. Consideremos então dois espaços topológicos M e N e uma aplicação contínua $f:M \to N$. Essa aplicação leva de uma certa forma à topologia de N para M, pois a anti-imagem de abertos de N, são abertos em M. Assim a utilização de aplicações contínuas com inversa contínua, não estraga as propriedades topológicas dos espaços, muito pelo contrário, ela preserva as características topológicas dos conjuntos de N. Assim, por exemplo, o interios, fronteira, etc., de um conjunto U de N são levados no interior, fronteira, etc. de $f^{-1}(U)$ em M.

Agora o inverso não ocorre, isto é, abertos de M não são levados em abertos de N. Podemos então, por exemplo, imaginar a aplicação contínua que leva todos os pontos de um espaço topológico M num único ponto de N.

Afim de nos desvencilhar-mos dessas surpresas exigimos que f seja contínua, inversível e de inversa contínua; nessas condições diremos que f é um homeomorfismo (não confunda com ho-

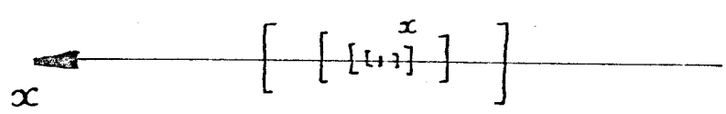
momorfismo , que é um conceito algébrico). Assim, os isomorfis - mos entre conjuntos, preservam a identificabilidade enquanto que os homeomorfismos preservam também as propriedades topológicas dos espaços. Dois espaços homeomorfos são nesse sentido semelhantes, no tocante à continuidade. No capítulo III definiremos uma transformação análoga para a diferenciabilidade: o difeomorfismo.

5. Enumerabilidade

Uma coisa desagradável no estudo da topologia, é o fato de que o conhecimento da estrutura topológica requer o conhecimento de todos os abertos do espaço, o que sem dúvida é complicado, pois as topologias úteis tem uma infinidade de abertos.

Um problema semelhante aparece quando trabalhamos com espaços vetoriais: a listagem de todos os vetores de um espaço , é tarefa frequentemente impossível. Nesse caso, o problema é solucionado através da utilização de bases.

Em topologia, procedemos de maneira análoga considerando bases para uma topologia, isto é, uma família $\{U_\alpha\}, \alpha \in \mathcal{I}$ de abertos de M com a propriedade de que todo aberto de M, possa ser expresso como união de abertos da família. Como exemplo, consideremos a reta real e consideremos a família de abertos $U(x, 1/n)$ constituída pelos intervalos abertos centrados em x de raio $\frac{1}{n}$, para n = 1,2,3,... e para todo x.

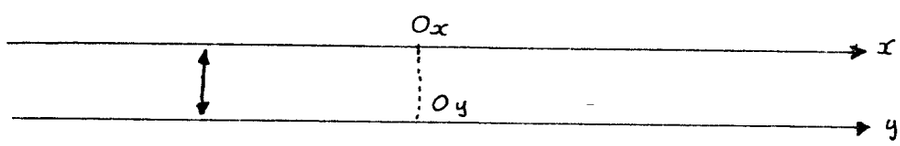


Essa família constitui uma base para a topologia induzida em R, pela métrica usual. Outro exemplo pode ser construído, tomando apenas as vizinhanças centradas nos números racionais. A diferença é que a primeira base tem um número muito grande de elementos, enquanto que a segunda é enumerável.

São de particular interesse os espaços topológicos que admitem uma base enumerável. Os espaços métricos nem sempre admitem base enumerável.

6. Separação

Outra propriedade bastante interessante e que de uma certa forma viola nossa intuição (advinda dos espaços métricos) é a separabilidade. Consideremos a velha reta real, e nela tomemos dois pontos p e q, é evidente que sempre podemos determinar duas pequenas vizinhanças de p e q que tenham intersecção vazia. Mas nem sempre isso ocorre. Por exemplo, considere - mos duas retas reais, conforme a figura:



Identifiquemos então os pontos das retas que tenham coordenadas negativas; com esse procedimento obtemos um novo espaço topológico. Agora analisemos dois pontos distintos, o zero da reta x e o zero da reta y. Será possível determinarmos uma vizinhança aberta do zero de x e uma vizinhança aberta do zero de y que tenham intersecção vazia? A resposta é não. Esse espaço é um espaço não Hausdorffiano.

Dizemos então que um espaço topológico é separado.

ou de Hausdorff, se dois de seus pontos quaisquer admitem vizinhanças, com intersecções vazias.

7. Compacticidade

Muitas vezes trabalhamos com coberturas de espaços topológicos, isto é, famílias de abertos M_α tais que sua união reproduz o espaço M. Agora as coberturas em geral tem um número muito grande de abertos, são em geral não enumeráveis. Quando o espaço topológico é enumerável, sempre será possível extrair de cada cobertura, uma sub-cobertura enumerável.

Existem espaços métricos que podem ser cobertos por um número finito de abertos com diametro menor do que um número arbitrariamente pré-fixado. Por exemplo uma casca esférica. Já para o plano isso não é possível. Essa noção pode ser generalizada para espaços mais gerais, isto é espaços topológicos, através da noção de compacidade. Diremos então que um espaço topológico é compacto se toda cobertura sua admitir, uma sub-cobertura finita. Se a separação e a existência de base enumerável são muito pouco restritivas, a compacticidade é excessivamente restritiva: nem um plano constitui um compacto. Vamos então relatar essa definição considerando espaços topológicos localmente compactos, isto é, um espaço topológico M é localmente compacto se todos os seus pontos admitem vizinhanças compactas. O plano por exemplo, é localmente compacto, mas não é compacto. É claro que espaços compactos são localmente compactos.

Existe ainda uma qualificação de espaços topológicos que tem grande aplicação na descrição do espaço tempo: os

espaços paracompactos. Para defini-los consideremos uma cobertura (possivelmente infinita) que localmente seja finita, isto é, todo ponto tem uma (pequena) vizinhança que intercepta um número finito de elementos da cobertura, tal cobertura é denominada localmente finita. Espaços paracompactos são aqueles que podem não admitir sub-coberturas finitas, mas sempre admitem refinamentos localmente finitas.

8. Conectividade

Vamos agora construir um novo adjetivo para nossos espaços topológicos que qualifique quando dois pontos podem ser ligados entre si. Essa é uma tarefa simples, basta considerarmos duas bolas abertas disjuntas do $\mathbb{R}^3$, para vermos que esta é uma situação típica, em que não existe um caminho entre os dois pontos. Diremos então que um espaço topológico é conexo, se ele não puder ser expresso como uma união de abertos disjuntos.

Mas, existem espaços topológicos muito conexos e pouco conexos, por exemplo, o plano é conexo e além disso tem uma propriedade interessante: toda curva fechada no plano pode ser continuamente deformada num ponto. Já se eliminarmos um ponto (e será esse o caso, nas aplicações) ainda obtemos um objeto conexo, mas suas curvas fechadas não podem ser todas deformadas num ponto; as curvas que envolvem uma e mais vezes o ponto abstraído, não colapsam.

Na verdade podemos classificar as curvas fechadas no plano furado, da seguinte forma; as 0-curvas, são aquelas que não envolvem o ponto; as n-curvas se enrolam n vezes, num sentido em torno do ponto, enquanto que as -n-curvas se enrolam n vezes no sentido oposto. Assim o espaço de todas as curvas fechadas do plano se parte em classes de equivalência e o número dessas classes dá uma medida da conectividade do espaço topológico.

Afim de precisarmos essas idéias, temos que definir o que seja deformação contínua de duas curvas. Comecemos então definindo uma curva sobre um espaço topológico M, como sendo uma aplicação $\lambda : \mathbb{R} \to M$ contínua; uma curva fechada é uma aplicação $\lambda : [0,1] \to M$ tal que $\lambda(0) = \lambda(1)$.

Agora diremos que duas curvas λ^0 e λ^1 são homotópicas, isto é, deformáveis entre si, se existir uma aplicação contínua $h : [0,1] \times [0,1] \to M$, $h(t,s) \to h(t,s)$ tal que $h(t,0) = \lambda^0(t)$ e $h(t,1) = \lambda^1(t)$, essa aplicação é denominada homotopia. Podemos colocar as coisas de uma forma um pouco diferente, observando que uma curva fechada pode ser definida como sendo uma aplicação $\lambda : S^1 \to M$, onde S^1 é a circunferência unitária. Uma homotopia é então uma aplicação $h : S^1 \times [0,1] \to M$

É fácil verificarmos que a homotopia define uma relação de equivalência no espaço de todas as curvas fechadas de um espaço topológico. Dessa forma fica esse espaço dividido em classes de equivalência, cada classe de equivalância constituída por curvas deformáveis entre si. O conjunto dessas classes é denominado primeiro grupo de homotopia de M e é denotado $\pi_1(M)$. Para o plano π_1 só tem um elemento; para o plano furado $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = \mathbb{Z}$.

Diremos então que um espaço topológico é simplesmente conexo se ele só tem uma classe de homotopia. As classes de homotopia são extremamente importantes quando os espaços topológicos são grupos.

CAPÍTULO III

TOPOLOGIA DIFERENCIAL

Este capítulo é dedicado ao estudo das variedades diferenciáveis, suas propriedades mais importantes, os campos tensoriais sobre as variedades etc. Definiremos uma variedade tendo como objetivo precisar a idéia intuitiva de "suavidade"; Da mesma forma que o conceito de espaço topológico é o conceito necessário e suficiente para o estabelecimento da idéia de continuidade, o conceito de variedade é o equivalente para a diferenciabilidade.

Após precisarmos o conceito de variedade, estabeleceremos a noção de vetor tangente a uma curva na variedade. Teremos então um espaço vetorial em cada ponto da variedade: o espaço tangente. No Capítulo I aprendemos a gerar espaços tensoriais a partir de um espaço vetorial, de forma que podemos construir algebricamente campos tensoriais sobre uma variedade.

Esses campos tensoriais não podem em geral serem diferenciados de uma forma independente das coordenadas, somente conseguimos uma diferenciação independente das coordenadas se nos restringimos aos tensores alternados. Definiremos então o diferencial exterior de uma p-forma diferenciável. Além da diferenciação exterior introduziremos a derivada de Lie que pode ser aplicada a

qualquer campo tensorial.

Analogamente vamos expor os conceitos fundamentais da teoria da integração de formas diferenciáveis que culmina com o teorema generalizado de Stokes.

Nesse capítulo trataremos com conceitos válidos para uma variedade diferenciável qualquer, isto é, trabalharemos a nível da topologia diferencial. No próximo capítulo sofisticaremos nossas variedades de forma a poder estabelecer a idéia de paralelismo e métrica.

VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Já analisamos o conceito de espaço topológico, que como vimos, é o espaço natural para o estabelecimento do conceito de continuidade. Desejamos agora definir o conceito de diferenciabilidade e para isso os espaços topológicos não bastam, eles são estruturas muito pobres. A estrutura de variedade diferenciável é justamente aquela necessária e suficiente, para o estabelecimento da diferenciabilidade.

Nosso método será o de transferir para as variedades os conceitos que podem ser definidos num espaço de Banach, isto é um espaço normado e completo. No caso analisado aqui, o espaço de Banach será o R^m, de forma que nossas variedades são m-dimensionais e reais. Mas podemos ter variedades de dimensão infinita e complexas.

O conceito intuitivo de variedade diferenciável é o de superfície regular imersa. Uma superfície regular de dimensão m

imersa no R^n, é um subconjunto do R^n que pode ser colocado em correspondência local com o R^m. Como exemplo podemos tomar uma reta, hélice, circunferência que são superficies unidimensionais imersas no R^3. Um plano, toro, cilindro, esfera ou faixa de Möbius, são bidimensionais. Já subconjuntos abertos do R^3, são superfícies tridimensionais.

Por outro lado, existem várias maneiras de realizarmos a imersão* de uma reta no R^3, e de uma maneira geral, de uma variedade m-dimensional no R^n. Agora é intuitivo que as propriedades geométricas "intrínsecas" não dependem da forma particular de se realizar a imersão. Assim a topologia diferencial procura eliminar todas as propriedades que dependem da imersão. Nesse sentido nossa definição de variedade diferencial, não fará nenhuma referencia a imersão e como concretamente a geometria acessível a nossos sentidos é imersa no R^4, essa definição é a de uma variedade abstrata.

Pode-se conceber também variedades que não sejam subconjuntos de pontos do R^n. Como exemplo, o conjunto de todas as retas que passam por um ponto constitui uma variedade diferenciavel bidimensional denominada plano projetivo. Da mesma forma os grupos de Lie, são variedades diferenciáveis de classe C^∞.

Os problemas de imersão, sempre preocuparam os geometras; por exemplo os três exemplos de variedades unidimensionais, que demos tem características de imersão diferentes. A reta, não se curva, nem se torce, ela é chata e pode ser imersa no R^1; já a

---

* Existem na geometria dois conceitos distintos, o de imersão e o de mergulho. Rigorosamente estamos tratando com mergulhos.

circunferencia necessita do R^2, como conjunto de imersão, isso se dá porque ela é "curva", num certo sentido. Finalmente a hélice só cabe no próprio R^3; além de curva ela é "torta" também. Esses conceitos podem ser precisados, associando-se uma curvatura e uma torção as variedades.

O problema fundamental da imersão foi resolvido por H. Whytney, com o célebre teorema da imersão, que leva seu nome. Whytney mostrou que toda variedade m-dimensional pode ser imersa, pelo menos no R^{2m+1}. Para algumas variedades especiais, podemos realizar imersões em dimensões menores, mas no caso geral não. Com isso podemos olhar as variedades abstratas, como variedades concretas de algum R^n (com n grande), relativamente a uma dada imersão.

Outra propriedade que queremos resguardar é a independencia das grandezas definidas sobre uma variedade, dos sistemas de coordenadas. As coordenadas aparecem a partir da identificação local de uma variedade m-dimensional como o R^m. Essa identificação pode ser feita de várias maneiras e as grandezas importantes, são aquelas que independem da identificação específica realizada. Vamos então construir o conceito de variedade visando precisar a idéia de função diferenciavel sobre uma variedade.

A primeira tentativa nesse sentido seria a de identificar globalmente os pontos de um conjunto M a pontos do R^m, isto é, definir uma aplicação $\Phi: M \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Poderiamos então associar a cada função $f: M \to R$ uma outra função $f \circ \Phi^{-1}$ definida no R^m com imagens reais. Diriamos então que f é diferenciavel de classe C^r se $f \circ \Phi^{-1}$ for diferenciavel de classe C^r.

Esse raciocínio é correto, pois para funções do R^m em R a diferenciabilidade está bem definida, a partir do conceito de distancia do R^m. Assim de uma certa forma "descemos" para o R^m, os problemas de M. Essa definição apresenta um problema inicial: outra pessoa poderia tomar uma identificação local distinta, Φ' e obter uma função $f \circ \Phi'^{-1}$ que talvez não fosse diferenciavel.

Além desse problema se apresenta outro mais grave: várias superfícies suaves não podem ser identificadas globalmente com o plano. Alguns exemplos são a faixa de Möbius e a esfera. Isso nos leva a desistir de uma análise global e mergulharmos numa reflexão local.

Definimos então uma variedade diferenciavel (coordenatizada) M de dimensão m e classe C^k, com atlas $\{M_\alpha, \Phi_\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, como sendo a estrutura $(M, M_\alpha, \Phi_\alpha, \mathcal{A})$ com as seguintes propriedades: /ATLAS/

(i) $\{M_\alpha\}$ é uma cobertura de M, ie $M = \bigcup_\alpha M_\alpha$

(ii) $\Phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo de U_α em $\Phi_\alpha(U_\alpha)$, aberto.

(iii) As funções $f_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : \Phi_\beta(M_\alpha \cap M_\beta) \longrightarrow \Phi_\alpha(M_\alpha \cap M_\beta)$ são de classe C^k.

As funções Φ_α são denominadas funções coordenadas, ou simplesmente coordenadas; as vizinhanças M_α são as vizinhanças coordenadas e as funções $f_{\alpha\beta}$ são as mudanças de coordenadas (Figura 1.2).

A condição (i) garante que todo ponto esteja em pelo menos um dos abertos ; a condição (ii) garante que fixada a vizinhança

coordenada de um ponto, ele tenha uma única coordenada e (iii) garante a diferenciabilidade de uma função relativamente a um atlas. De fato, consideremos uma função $f: M \to R$, podemos dizer que ela é diferenciavel de classe C^r, $r \leq k$ no ponto $x \in M$, se a função $f \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow R$ for diferenciavel de classe C^r. Essa definição é consistente no atlas, pois se x pertence também a M_β teremos (Figura 1.3):

$$f \circ \phi_\beta^{-1} = (f \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ f_{\alpha\beta}$$

de forma que $f \circ \phi_\beta^{-1}$ também é de classe C^r (para $r \leq k$, onde k é a classe de variedade).

Essas considerações são extremamente importantes, quando a variedade necessariamente tem que ser recoberta por mais de um aberto, como por exemplo a casca esférica que necessita de 2 mapas locais (Figura 1.4).

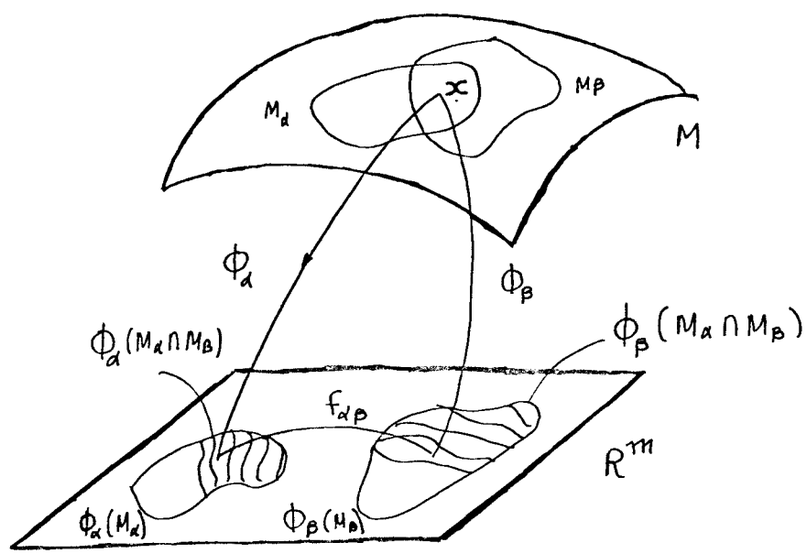


FIGURA 1.2

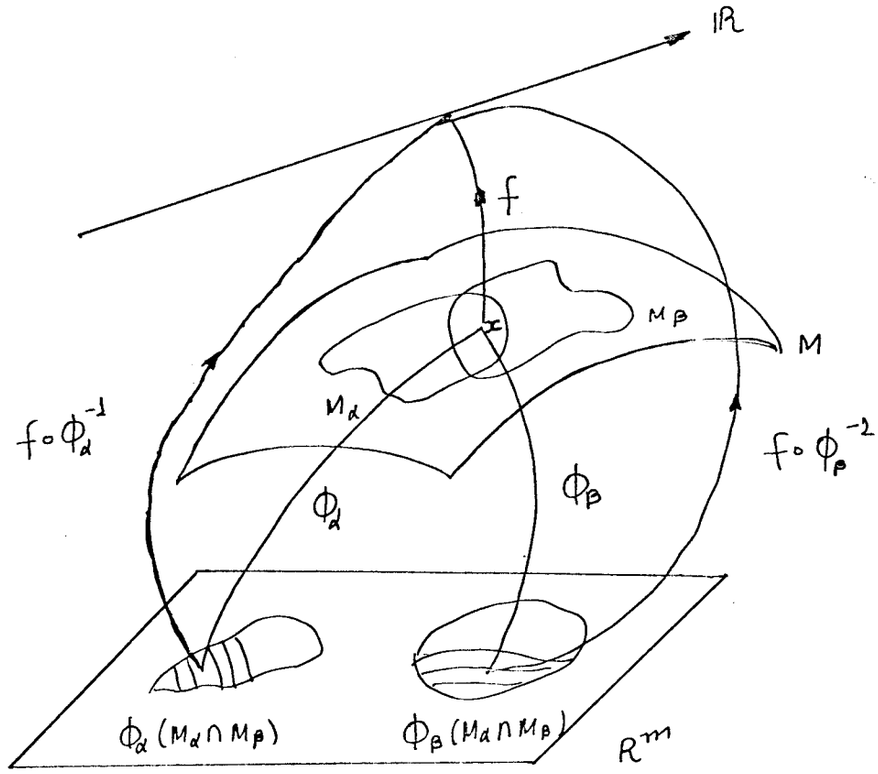
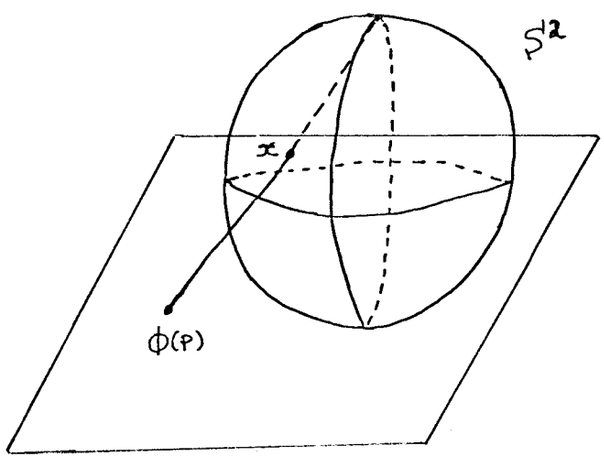


FIGURA 1.3



O polo norte da esfera não fica identificado com nenhum ponto, pela projeção estereográfica. Devemos tomar um novo plano, contendo o polo norte, e realizar uma segunda projeção.

FIGURA 1.4

Nesse caso dada uma função real (e como veremos mais adiante, um campo tensorial qualquer) ela não pode ser expressa num único sistema de coordenadas, em toda a variedade; e necessariamente teremos duas funções do R^m, representando a mesma função real f, numa região $M_\alpha \cap M_\beta$ a saber elas são $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ e $f \circ \phi_\beta^{-1}$. Nesse caso é fundamental O conhecimento das funções de transição $f_{\alpha\beta}$. Na verdade podemos trabalhar com as componentes dessa aplicação $f_{\alpha\beta}$ do R^m em si próprio; chamando x_α^k, $k=1,\dots,m$ os pontos de $\phi_\alpha(M_\alpha \cap M_\beta) \subset \mathbb{R}^m$ e x_β^k os pontos de $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, teremos m funções reais

$$
\begin{aligned}
x_\alpha^1 &= f_{\alpha\beta}^1(x_\beta^1,\dots,x_\beta^m) \\
&\vdots \\
x_\alpha^m &= f_{\alpha\beta}^m(x_\beta^1,\dots,x_\beta^m)
\end{aligned}
$$

Essa aplicação $f_{\alpha\beta}$ é na verdade um difeomorfismo de classe C^k do R^m; denotando por diff $[\phi_\beta(M_\alpha \cap M_\beta), \phi_\alpha(M_\alpha \cap M_\beta), k]$ o grupo de todos os difeomorfismos possíveis, vemos que uma mudança de coordenadas associa a cada ponto $p \in M_\alpha \cap M_\beta$ um difeomorfismo do grupo.

Além disso é fácil ver que se p pertence a $M_\alpha \cap M_\beta \cap M_\gamma$ as mudanças de coordenadas obedecem a

$$f_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma}$$

de forma que $f_{\alpha\beta}^{-1} = f_{\beta\alpha}$ (estamos tomando $f_{\alpha\alpha}$ igual ao difeomorfismo identidade).

Finalizando observemos que o fato de $f_{\alpha\beta}$ ser inversível, significa que sua matriz Jacobiana definida por

$$g_{\alpha\beta}^{km} = \frac{\partial}{\partial x_\beta^m} f_{\alpha\beta}^k$$

é não singular, pertencendo portanto ao grupo GL(m,R). Além disso teremos a propriedade

$$g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma}$$

onde o produto do lado direito é o produto usual entre matrizes.

Variedades Diferenciaveis são Espaços Topológicos

Antes de mostrar que essa estrutura induz em M, uma estrutura de espaço topológico, temos que fazer algumas considerações sobre as coordenadas de uma variedade.

Notando em primeiro lugar, que nossa definição esta presa a utilização de um atlas, isto é as duas estruturas $\{M, M_\alpha, \phi_\alpha, \mathcal{A}\}$ e $\{M, M_{\bar\alpha}, \phi_{\bar\alpha}, \bar{\mathcal{A}}\}$ são variedades coordenatizadas distintas. No entanto, o que há de distinto nelas é unicamente a utilização de sistemas locais diferentes. Queremos encontrar algum critério para dizermos que elas são a mesma variedade.

Nesse sentido imaginemos que dois observadores fazem medidas geométricas usando atlas distintos e, que num certo momento seus atlas se confundem, de forma que um observador começa a usar os mapas do outro, e vice-versa. Isso corresponde na verdade a trabalhar com uma "nova" variedade com um atlas que é a união de ambos os atlas:

A pergunta que se coloca é a seguinte: os observadores concordam em suas afirmações sobre a diferenciabilidade de funções

reais? Isto é, esse novo atlas, ainda é um atlas verdadeiro?

Para responder a essa questão temos que analisar o que ocorre em vizinhanças da forma $M_{\bar{\alpha}} \cap M_{\alpha}$, pois nas demais a diferenciabilidade estará garantida por cada um dos atlas. Nessa região teremos novas mudanças de coordenadas dadas por

$$g_{\alpha\bar{\alpha}} = \phi_{\alpha} \circ \phi_{\bar{\alpha}}^{-1}$$

Então se essas mudanças de coordenadas forem difeomorfismos de classe C^r, a união dos atlas, ainda será um atlas e nossos observadores, não terão problemas.

Isso motiva-nos a uma definição: Diremos que dois atlas são compatíveis, se a união deles ainda for um atlas, e diremos que duas variedades coordenatizadas são equivalentes, se seus atlas forem compatíveis. Definimos agora uma variedade sem coordenadas, como sendo a classe de equivalencia definida no conjunto de todas as variedades coordenatizadas pela relação de equivalencia acima descrita. As variedades coordenatizadas são consideradas como representantes da variedade nos diversos sistemas de coordenadas.

Podemos agora exibir a topologia de M, considerando um representante especial de M, aquele obtido juntando-se todos os atlas possíveis de M, esse atlas é denominado atlas maximal.

A topologia em M é obtida então considerando como aberto, todos os mapas do atlas maximal. Em relação a essa topologia as funções coordenadas são homeomorfismos.

Faremos ainda uma restrição as nossas variedades exigindo que elas sejam paracompactas, quando consideradas, como espaços

topológicos. Isso porque, como veremos a integração sobre variedades exigirá a existencia de uma família $f_\alpha : M \to \mathbb{R}$ de funções reais sobre a variedade, associada a cada atlas (U_α, ϕ_α) tais que:

(i) $0 \leq f_\alpha \leq 1$ em M $\forall \alpha$

(ii) O fechamento do conjunto definido em M constituido pelos pontos onde f_α não se anula deve estar contido em U_α.

(iii) $\sum_\alpha f_\alpha = 1$ em M.

Essas funções são denominadas partição da unidade e sua existencia só é garantida em variedades paracompactas ;pode-se demonstrar que uma variedade é paracompacta se e somente se ela é localmente compacta de Hausdorff e com base enumeravel. Assumiremos então que nossas variedades tem todos esses qualificativos.

Encerrando nossa definição, observemos que poderiamos ter adotado outra linha para a definição de variedade, partindo desde logo, dum espaço topológico M e exigindo então que as ϕ_α, fossem homeomorfismos e mantendo também a diferenciabilidade de $\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta$. Ambas aproximações conduzem ao mesmo objeto matemático.

ORIENTABILIDADE

Quem nunca cortou uma tira de papel para brincar com uma faixa de Móbius, está em boa hora de fazê-lo e é estranho observar que alguem que parte de um ponto, para depois de uma volta sobre a faixa retornar ao mesmo ponto, de ponta cabeça. Assim uma faixa de Móbius não temos um critério para definir o "em cima" e o "em baixo". Um elétron que se move sobre uma faixa de Móbius muda naturalmente seu spin. Se tomamos a ainda mais exótica garrafa de

Klein , vemos que nada distingue os pontos de fora dos de dentro.

Superfícies com essas características são ditas não-orientaveis. A orientabilidade de uma variedade fica garantida se conseguimos obter pelo menos um atlas tal que os determinantes das matrizes Jacobianas das transformações de coordenadas sejam todos positivos isto é $\det g_{\alpha\beta} > 0$. Todas nossas variedades serão supostas orientaveis.

BORDO

O conceito de bordo é bastante intuitivo, por exemplo se tomamos meia casta esférica e andamos sobre ela, numa certa altura chegamos a sua fronteira; já com o plano isso não ocorre.

Definimos uma variedade com bordo . substituindo na definição de variedade o conjunto R^m pelo conjunto

$$H_m = \{(x^1, \ldots, x^m) \in R^m / x^1 \leq 0\}$$

A fronteira da variedade será então uma outra variedade tal que $\partial M = \{x \in M / \phi_\alpha(\ ) = (0, x^2, \ldots, x^m)$. Alguns exemplos sugerem que

$$\partial \partial M = 0$$

para toda variedade M.

CAMPOS EM VARIEDADES

Agora vamos associar a cada ponto p, da variedade diferenciavel M, de classe C^m, um espaço vetorial m-dimensional, denominado espaço tangente a M, no ponto p e denotado $T(M)_p$. Definido o espaço vetorial tangente, utilizaremos nossa artilharia algebrica desenvolvida no capítulo I, para obter o espaço cotangente, dos vetores covariantes (formas lineares) e assim podemos via produto tensorial, construir o espaço dos tensores p-covariantes e q-contravariantes tangente e variedade no ponto p.

Nesse sentido o primeiro conceito a ser trabalhado é o conceito de função real definida em M, $f: M \to \mathbb{R}$. Denotaremos por F(M) ao conjunto de todas as funções reais sobre M. Podemos definir a adição em F(M) e multiplicação por um número real, tomando

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Além dessas operações podemos definir uma multiplicação

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

que dota F(M), de uma estrutura algébrica.

Podemos definir, como vimos, uma função real de classe C^k em M, de uma forma independente das coordenadas, isto é invariante em relação ao grupo de transformações $\mathrm{diff}\, \mathbb{R}^m$. Assim para nós o símbolo F(M) representara o conjunto de todas as funções reais sobre M, de classe C^∞. (A partir daqui assumiremos que tudo é C^∞).

Outro conceito que iremos definir, é o de curva de classe C^k sobre M, considerando a aplicação $\lambda: \mathbb{R} \to M$ que associa a $t \in R$, o ponto $\lambda(t) \in M$. Usando o sistema de coordenadas $x^d: M \to \mathbb{R}$ $d = 1, \ldots, m$ obtemos uma curva $x^d(\lambda(t))$ no R^m . Diremos que λ é de classe C^k, se a curva coordenada $x^d(\lambda(t))$ for de classe C^k . É imediato verificar que essa definição é invariante a diff R^m .

Agora consideremos um ponto uma função real $f: M \to \mathbb{R}$ e uma curva $\lambda: \mathbb{R} \to M$. Assumimos que $f \in F(M)$, ie é de classe C^∞; o ponto x corresponde a $t = t_0$. Vamos definir a derivada da primeira da função f ao longo da curva λ , no ponto $x = \lambda(t_0)$, considerando a função:

$$f \circ \lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

que é uma função da reta sobre a reta definindo:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right)_\lambda \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}(f \circ \lambda)\Big|_{t=t_0}$$

Nossa definição não faz nenhuma referencia a sistemas de coordenadas, logo é invariante relativamente a diff R^m . Se no entanto usamos um sistema de coordenadas x^k, podemos exprimir f em termos dos x^k . A curva λ será dada em coordenadas por $x^k(\lambda(t))$, de modo que temos

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right)_\lambda \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}\left(x^k \circ \lambda\right)_{t=t_0} \frac{\partial f}{\partial x^k}\Big|_{x=\lambda(t_0)}$$

Tomemos como caso particular, as m-curvas de M, definidas

pelo sistema de coordenadas $x^k : M \to \mathbb{R}$, da seguinte forma:

$$\lambda^u : \mathbb{R} \to M \qquad \lambda^u = (x^u)^{-1}$$

A derivada de uma função f em torno dessas curvas especiais será $\partial f / \partial x^k$. Logo nosso resultado anterior mostra que a derivada de uma função em torno de uma curva qualquer, pode ser expressa como uma combinação linear das derivadas da mesma função ao longo, das curvas coordenadas de M.

Definimos agora o vetor contravariante ao longo da curva λ no ponto $x = \lambda(t_0)$, como sendo o operador que associa a cada valor de uma função no ponto x de M, a derivada da função ao longo de λ no ponto x. Denotaremos tal objeto, pelo símbolo

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right)_\lambda \Big|_{t=t_0}$$

Os vetores constituem uma base para o espaço vetorial tangente a variedades no ponto p, de forma que todo vetor tangente a M em x pode ser escrito como

Acionamos agora a artilharia algébrica do cap. I para obtermos tensores de todos os tipos no ponto x de M. Uma base para o espaço dos tensores de tipo em x é obtida pelo produto tensorial:

Assim as operações como a adição, o produto exterior, contrações, etc... podem ser todas realizadas localmente nos espaços tensoriais tangentes. Observemos que essa base para os tensores é gerada

pelo sistema de coordenadas e porisso mesmo é denominada base natural ou coordenada. Temos então uma base em todos os pontos onde está definido o sistema de coordenadas.

Um campo tensorial sobre M representa uma aplicação que associa a cada ponto da variedade um tensor de determinado tipo, assim um tensor se escreve relativamente a base natural definida numa região de M como Exigimos ainda que as funções sejam diferenciáveis. Denotaremos por e aos conjuntos dos tensores e das formas respectivamente.

COMPARANDO VARIEDADES

Nesta seção, inicialmente vamos definir o conceito de aplicação diferenciavel entre duas variedades. A idéia central consiste em, a partir da estrutura local da variedade, generalizar a definição de diferenciabilidade de uma função definida em uma variedade com imagens na reta. Como decorrência da existência de uma aplicação , mostraremos que essa aplicação induz uma

aplicação φ^* que leva campos de tensores covariantes de N, em campos de tensores covariantes de M e induz também uma aplicação φ_* que leva tensores contravariantes de M em tensores contravariantes de N. Lembrando que uma forma diferenciavel nada mais é do que um tensor covariante anti-simétrico, Vemos que a cada forma de N, corresponderá uma forma de M. Essas aplicações são lineares e em geral não inversíveis.

APLICAÇÕES ENTRE VARIEDADES

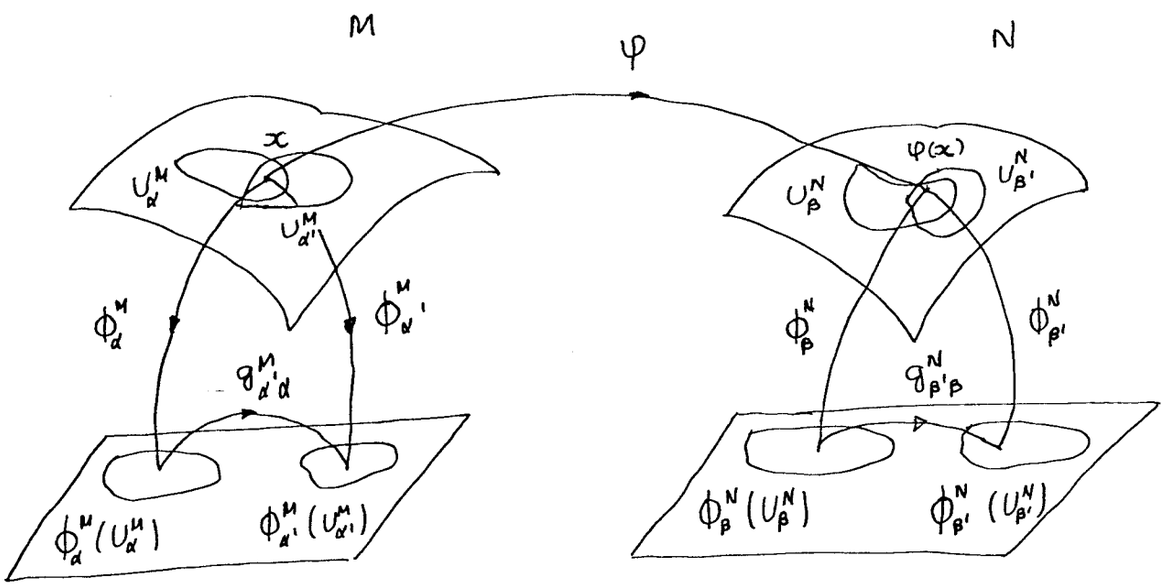
Como vimos, a estrutura de variedade diferenciavel, nos permitiu dividir o conjunto de todas as funções reais definidas sobre a variedade, em classes de diferenciabilidade. De fato diziamos que a função $f: M \to \mathbb{R}$ era de classe C^r se a aplicação $f \circ \phi_\alpha^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ era de classe C^r (e esse conceito é preciso no $\mathbb{R}^n$). Se ao invés de uma função, tinhamos uma aplicação de M num R^m, procediamos de maneira completamente análoga, trabalhando com as componentes das funções. Agora vamos classificar as aplicações que levam os pontos de uma variedade M, de dimensão m e classe C^r em pontos de uma variedade N, de dimensão n e classe C^s.

De fato seja $\varphi: M \to N$ e seja $x \in M$ que é levado em $\varphi(x) \in N$. Seja $\{\phi_\alpha^M, U_\alpha^M\}$, $\alpha \in \mathcal{J}$ uma atlas de M e $\{\phi_\beta^N, U_\beta^N\}$, $\beta \in \mathcal{B}$, atlas de N. Note que $\phi_\alpha^M: U_\alpha^M \subset M \longrightarrow \phi_\alpha^M(U_\alpha^M) \subset \mathbb{R}^m$ e $\phi_\beta^N: U_\beta^N \subset N \longrightarrow \phi_\beta^N(U_\beta^N) \subset \mathbb{R}^n$; além disso as funções coordenadas são difeomorfismos.

Agora observemos que φ, induz uma nova aplicação $\varphi_{\beta\alpha}^{IND}: \phi_\alpha^M(U_\alpha^M) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \phi_\beta^N(U_\beta^N) \subset \mathbb{R}^n$ dada por:

$$\varphi^{IND}_{\beta\alpha} = \phi^N_\beta \circ \varphi \circ \phi^{M\,-1}_\alpha$$

Diremos que a aplicação φ é de classe C^k, com $k < r, s$ se essa aplicação induzida for de classe C^k. Evidentemente se tomarmos outras coordenadas locais em torno de x e $\varphi(x)$, vamos obter novas aplicações induzidas, mas a diferenciabilidade de uma é garantida pela diferenciabilidade de outra, a partir da diferenciabilidade das funções de transição (veja figura); de forma que o conceito definido é invariante a mudanças de coordenadas. Observe que φ não é necessariamente inversível e se o for sua inversa não é necessariamente diferenciavel.



FUNÇÕES EM N GERAM FUNÇÕES EM M

De fato, seja $\varphi: M \to N$ e seja $f: N \to R$; podemos associar a função $f \in F(M)$ ($F(M)$ denota a algebra das funções sobre M) uma nova função denotada $\varphi^* f$ de F(M) da seguinte forma:

$$(\varphi^* f)(x) = (f \circ \phi)(x) \qquad \forall p \in M$$

Isso define um operador, $\varphi^*: F(N) \to F(M)$ linear, uma vez que

$$[\varphi^*(\lambda f + \mu g)](x) = (\lambda f + \mu g) \circ \varphi \ (x)$$

$$= (\lambda (\varphi^* f) + \mu (\varphi^* g))(x)$$

isto é $\quad \varphi^*(\lambda f + \mu g) = \lambda(\varphi^* f) + \mu (\varphi^* g)$

Interpretando f como um tensor covariante de ordem zero ou como uma 0-forma, vemos que, pelo menos para ordem zero, formas de N implicam em formas em M.

VETORES CONTRAVARIANTES DE M GERAM VETORES CONTRAVARIANTES EM N

Isso pode ser visto da seguinte maneira: seja x um ponto de M, $T(M)_x$ o espaço tangente e X , um vetor de $T(M)_x$. A aplicação φ leva o ponto x , num ponto $\varphi(x) \in N$, onde existe o espaço tangente $T(N)_{\varphi(x)}$. Se construirmos uma curva $\lambda(t)$, passando por x , em M, teremos também uma outra curva $\bar{\lambda}(t) = \phi(\lambda(t))$ em M , que passa por $\varphi(x)$. Agora associamos ao vetor tangente a curva $\lambda(t)$ no ponto x, o vetor tangente a curva $\bar{\lambda}(t)$ no $\varphi(x)$.

Assim se X é um vetor qualquer de $T(M)_x$ seu correspondente $\varphi_* X$ em $T(N)_{\varphi(x)}$ é o operador que associa ao valor de uma função $f: N \to R$ no ponto $\varphi(x)$, a quantidade resultante da aplicação do operador X, na função $\varphi^* f: M \to R$, isto é

$$(\varphi_* X)(f) = X(\varphi^* f) \quad \forall f \in F(N)$$

UMA NOTAÇÃO COMUM É $\varphi_* = d\varphi$.

TENSORES COVARIANTES DE N GERAM TENSORES COVARIANTES EM M

Consideremos agora um tensor covariante $\omega(\ldots)$ no ponto $\varphi(x)$ em N; definimos um novo tensor covariante $\varphi^*\omega(\ldots)$ no ponto $x \in M$ da seguinte forma:

$$\varphi^*\omega(X, \ldots, Y) = \omega(\varphi_* X, \ldots, \varphi_* Y)$$

Em outras palavras o valor do tensor covariante (ou da forma) numa coleção de vetores de $T(M)_x$ é obtido levando-se esses vetores para $T(N)_{\varphi(x)}$, através de φ_* e depois aplicando-se a forma ω.

TENSORES CONTRAVARIANTES EM M GERAM TENSORES CONTRAVARIANTES EM N

De uma forma análoga, se T(,...,) é um tensor contravariante, isto é em suas entradas, colocamos 1-formas, definimos

$$\varphi_* T(\omega, \ldots, \gamma) = T(\varphi^*\omega, \ldots, \varphi^*\gamma)$$

Juntando essas idéias, no caso em que φ é um difeomorfismo, podemos transportar tensores mixtos de uma variedade para outra.

CURVAS INTEGRAIS ASSOCIADAS A CAMPOS VETORIAIS

Mostraremos agora que dado um campo vetorial $\mathfrak{X}$ sobre uma variedade M, podemos associar a cada ponto x_0 de M, uma curva $x(t)$, denominada curva integral do campo vetorial $\mathfrak{X}$ com ponto inicial x_0.

Antes porém vale frizar alguns aspectos do conceito de curva. Definimos uma curva como sendo uma aplicação de um aberto real em M. Essa definição não é equivalente a definição de curva como um subconjunto de pontos. Uma curva contem não só as informações referentes ao lugar geométrico de seus pontos, mas também informações referentes a forma como foi parametriza.

Consideremos uma curva $x : R \to M$ de classe C^k; podemos conseguir uma nova curva $\bar{x} : R \to M$, a partir de um difeomorfismo qualquer $\theta : R \to R$, tomando:

$$\bar{x}(t) = (x \circ \theta)(t)$$

Ambas as curvas descrevem os mesmos pontos, mais podem ter campos vetoriais distintos. Isso significa que o vetor tangente a curva x , no ponto x_0 pode ser diferente do vetor tangente a curva $\bar{x}$. Essa liberdade de escolha do vetor tangente, está ligada a possibilidade de tomarmos intensidades e sentido diferentes.

Uma imagem física bastante interessante consiste em imaginar o movimento de uma partícula sobre uma superfície interpretando o parâmetro da curva como sendo o tempo. Cada parametrização representa uma dinâmica diferente para o movimento; uma pode ser descrita a baixa velocidade enquanto que a outra a alta velocidade.

Mesmo se preescrevemos o campo de velocidades, ainda podemos ter uma família de curvas distintas, que difiram por transformações em seus parâmetros. Isto é duascurvas da forma: $x(t)$ e $\bar{x}(t) = x(t-t_0)$ são curvas que tem velocidades tangentes identicas. A diferença cinemática é que na primeira curva a partícula sai de x_0, quando o tempo é zero, enquanto que na segunda x_0 é alcançado no tempo t_0.

Da mesma maneira curvas cujos parâmetros sejam ligados por transformações lineares, correspondem a escolhas diferentes de unidades para o tempo e pontos iniciais distintos.

Agora imaginemos que fixamos um campo vetorial X em M. Agora tomamos um ponto x_0 de M e imaginemos que uma partícula parte de x_0 mantendo sempre sua velocidade coincidente com os vetores do campo. Esse processo define de forma única, uma curva parametrizada, denominada curva integral do campo vetorial X, no ponto x_0.

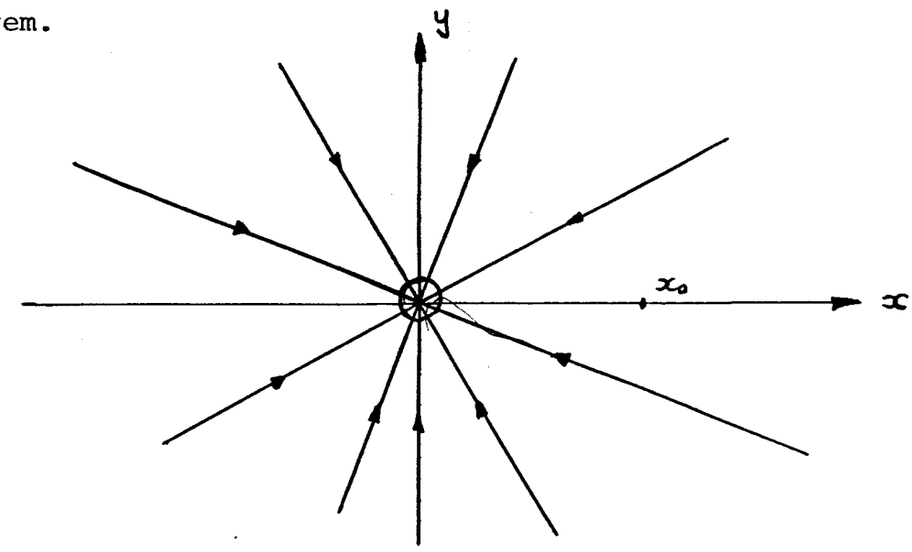
A unicidade pode ser vista escrevendo-se a equação que define a curva $x^k(t)$

$$\frac{d}{dt} x^k(t) = X^k\left(x^1(t), \dots, x^m(t)\right)$$

Esse sistema é um sistema de equações diferenciais de primeira ordem (em geral não linear) e que portanto gera uma única solução, uma vez fixado o ponto inicial $(x^1(0), \dots, x^m(0))$.

Na verdade o teorema da unicidade garante a existencia local de uma curva integral, isto é garante a existencia de uma única curva $x:(-\epsilon,\epsilon) \to M$ com $x(0) = X_o$, cujo vetor tangente coincide com o campo vetorial X pré-fixado. A unicidade significa que se $\bar{x}:(-\bar{\epsilon},\bar{\epsilon}) \to M$ é outra curva com as mesmas características então x e $\bar{x}$ coincidem na intersecção de seus domínios.

Em muitas situações um campo vetorial não admite uma curva integral definida para todo t. Basta considerarmos por exemplo um campo radial que convirja para a origem com $1/r^2$. Devido a singularidade devemos considerá-lo como definido no plano a menos da origem.



A curva integral com início em x_o é $y(t) = 0 \ \forall t$ e $x(t) = \left[x_o^3 - 3t\right]^{1/3}$ para $-\infty < t < x_o^3/3$ e evidentemente não pode ser extendida a todo intervalo real ($x_o^3/3$ é o tempo em que a partícula "chega" na singularidade).

As propriedades das curvas integrais podem ser estudadas a partir da noção de subgrupo a um parametro de transformações diferenciavel sobre uma variedade.

Consideremos então a variedade M e seja diff M o conjunto de todos os difeomorfismos de M. Tal conjunto tem uma estrutura de grupo (não abeliano) definida pela composição de dois difeomorfismos. Um subgrupo a um parametro consiste num homomorfismo do grupo aditivo dos números reais em diff(M), isto é numa aplicação

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \operatorname{diff} M \qquad t \longrightarrow \varphi_t$$

tal que $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$

Tais subgrupos induzem de uma maneira natural campos vetoriais sobre M, bastando para isso definirmos o campo X no ponto x_o como sendo tangente a curva $x(t) = \varphi_t(x_o)$ em $t = 0$ (note que por definição $\varphi_o(x_o) = x_o$).

A questão que se coloca agora é a recíproca: dado um campo vetorial X suas curvas integrais se identificam com subgrupos a um parametro? A resposta é em geral negativa pois a exigência de ser um subgrupo é global e como vimos nem sempre as curvas integrais existem globalmente.

Definimos então um grupo <u>local</u> a um parametro como sendo uma aplicação que associa a cada $t \in (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ uma aplicação φ_t definida num aberto U de M com imagens noutro aberto $\varphi_t(U)$ de M satisfazendo $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t \circ \varphi_s(x)$ com $t, s, t+s$ em $(-\epsilon, \epsilon)$ e x em U. Da mesma forma que antes tal grupo local induz um campo vetorial em U.

Estamos agora em condições de enunciar o teorema de Picard:

"Seja X um campo vetorial sobre M então para todo x_o e M existe um grupo local (φ_t, ϵ, U) que induz o campo X".

Quando o grupo é global, isto é, φ_t é definido para todo t o campo vetorial é denominado completo. Pode-se mostrar que campos sobre variedades compactas são sempre completos.

O DIFERENCIAL EXTERIOR

Nosso objetivo agora é generalizar o conceito usual de diferencial de uma função real (o-forma). Essa generalização obviamente deve reproduzir o diferencial usual no caso das o-formas, além de ser um operador linear e independente do sistema de coordenadas.

Consideremos então o espaço vetorial das p-formas diferenciaveis definidas sobre a variedade M de dimensão m, denotado $\Lambda^p(M)$. Tomemos ainda uma p-forma ω de $\Lambda^p(M)$ que pode ser escrita da seguinte forma, relativamente a base definida por um sistema x^k de coordenadas de M:

$$\omega = \sum_{k_1}{}' \cdots \sum_{k_p}{}' \omega_{k_1,\ldots,k_p}\, dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_p} \qquad (1)$$

$$k_1 < \cdots < k_p$$

Definimos agora uma nova forma denominada diferencial exterior de ω e denotada $d\omega$, como sendo o elemento de $\Lambda^{p+1}(M)$ dado por:

$$d\omega = \sum_{k_1}{}' \cdots \sum_{k_p}{}' d\omega_{k_1,\ldots k_p} \wedge dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_p} \qquad (2)$$

$$k_1 < \cdots < k_p$$

Lembrando que

$$d\omega_{k_1,\ldots k_p} = \frac{\partial \omega_{k_1\ldots k_p}}{\partial x^k}\, dx^k \qquad (3)$$

temos

$$d\omega = \sum_{k_1}{}' \cdots \sum_{k_p} \sum_{k} \frac{\partial \omega_{k_1 \ldots k_p}}{\partial x^k} \, dx^k \wedge dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_p} \tag{4}$$

$$k_1 < \ldots < k_p$$

Observemos que a soma em K não está vinculada de forma que as p+1-formas $dx^k \wedge dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_p}$ não são linearmente independentes. A título de exemplo consideremos formas sobre uma variedade quadridimensional. Se M é uma função real f, seu diferencial exterior é

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^k} \, dx^k \tag{5}$$

de forma que as componentes da forma "diferencial exterior" são as derivadas parciais de f. Se temos agora uma 1-forma:

$$A = A_k \, dx^k \tag{6}$$

teremos o diferencial

$$dA = \frac{\partial A_k}{\partial x^n} \, dx^n \wedge dx^k \tag{7}$$

observando que na soma dupla da expressão acima $dx^n \wedge dx^k = -dx^k \wedge dx^n$ temos

$$dA = \sum_{n<k}{}' \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^n} - \frac{\partial A_n}{\partial x^k} \right) dx^n \wedge dx^k \tag{8}$$

Para uma 2-forma

$$F = \sum_{k_1 < k_2}{}' F_{k_1 k_2} \, dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \tag{9}$$

vem

$$dF = \sum_{k}' \sum_{\substack{k_1 \\ k_1 < k_2}}' \sum_{k_2}' \frac{\partial F_{k_1 k_2}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \tag{10}$$

Tomando apenas os termos independentes temos

$$dF = \sum_{k_1}' \sum_{k_2}' \sum_{\substack{k_3 \\ k_1 < k_2 < k_3}}' \left[\frac{\partial F_{k_1 k_2}}{\partial x^{k_3}} + \frac{\partial F_{k_2 k_3}}{\partial x^{k_1}} - \frac{\partial F_{k_1 k_3}}{\partial x^{k_2}} \right] dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge dx^{k_3} \tag{11}$$

Observemos que as componentes de F em (9) são: F_{12} , F_{13} , F_{14} F_{23} , F_{24} , F_{34} , . Usualmente reescrevemos (9), definindo $F_{21} = -F_{12}$, etc. Na forma

$$dF = \frac{1}{3!} \sum_{k_1}' \sum_{k_2}' \sum_{k_3}' \left[F_{k_1 k_2, k_3} + F_{k_2 k_3, k_1} + F_{k_3 k_1, k_2} \right] dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge dx^{k_3} \tag{12}$$

De forma que (11) fica:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{k_1}' \sum_{k_2}' F_{k_1 k_2} \, dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \tag{13}$$

A linearidade do operador derivada exterior é garantida pela linearidade do diferencial usual, enquanto que a independencia das coordenadas advem da antisimetria do produto cruzado (observe que se definimos o diferencial exterior substituindo o produto cruzado pelo produto tensorial perdemos a independencia das coordenadas). Duas propriedades decorrem imediatamente da definição

$$d^2 = 0 \tag{14}$$

$$d(\omega \wedge \gamma) = d\omega \wedge \gamma + (-1)^p \, \omega \wedge d\gamma \tag{15}$$

onde ω é uma p-forma.

Construimos então um operador linear

$$d : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{p+1}(M) \qquad 0 \leq p \leq m \tag{16}$$

Notemos que d não é uma transformação sobrejetiva; existem p+1-formas que não são imagens de p-formas pelo operador diferencial. A imagem que d faz de $\Lambda^p(M)$ em $\Lambda^{p+1}(M)$ é denotada $B^{p+1}(M)$ e seus elementos são ditos formas exatas de $B^{p+1}(M)$ ou cobordos

$$d\left[\Lambda^p(M)\right] = B^{p+1}(M) \tag{17}$$

então uma p+1-forma exatas pode ser obtida diferenciando-se alguma p-forma.

Além disso d não é uma transformação injetiva; existem várias p-formas que são levadas na mesma p+1-forma de $\Lambda^{p+1}(M)$. Denominamos espaço das p-formas fechadas, ao núcleo da transformação d, isto é ao conjunto de todas as p-formas que são levadas na forma nula de $\Lambda^{p+1}(M)$. Esse espaço será denotado $Z^p(M)$ e seus elementos são chamados formas fechadas ou cociclos

$$d^{-1}(0) = Z^p(M) \tag{18}$$

As equações 18 e 19 definem em cada um dos espaços $\Lambda^p(M)$ os sub-espaços $B^p(M)$ e $Z^p(M)$. Observe que (13) implica em:

$$B^p(M) \subset Z^p(M) \tag{19}$$

Um problema importante consiste na determinação da "quantidade" de formas fechadas, mas não exatas em uma variedade.

Essa questão é resolvida no caso em que M é uma sub-variedade do R^m pelo lema de Poincaré:

> "Se em M existe um ponto tal que todos os demais possam ser ligados a esse ponto por retas, então não existe forma fechada em M, que não seja EXATAS"

Uma situação em que M não tem essa propriedade (quando existe tal ponto M é dita estrelada relativamente ao ponto) foi dada no Capítulo VI.

Essas propriedades podem ser sintetizadas nos grupos de Cohemologia associados a uma variedade. Para construi-los consideremos primeiramente os grupos abelianos, $Z^p(M,+)$ e $B^p(M,+)$ obtido dos sub-espaços vetoriais $Z^p(M)$ e $B^p(M)$ usando-se a adição de p-formas como operação do grupo. Definimos agora uma relação R de equivalencia em $Z^p(M,+)$ da seguinte forma

$$\omega \overset{R}{\sim} \alpha \quad se \quad \omega - \alpha \in B^p(M) \qquad \omega, \alpha \in Z^p(M)$$

Essa relação de equivalencia divide $Z^p(M)$ em classes de equivalencia. Assim a classe de equivalencia $[\omega]$, aqui representada pela p-forma , consiste no conjunto de todas as p-formas fechadas que diferem de ω, por uma forma exata.

Podemos extender a adição a esse conjunto de classes definindo:

$$[\omega] + [\alpha] = [\omega + \alpha]$$

Essa operação define uma estrutura de grupo no conjunto das classes de equivalencia de ordem p, cujo elemento identidade é

$[0] = B^p(M)$

Esse grupo é denominado grupo de cohemologia de ordem p, associado a M e denotado

$$H^p(M) = Z^p(M) / B^p(M)$$

Da mesma forma como extendemos a adição, podemos extender a multiplicação por um número real dando uma estrutura de espaço vetorial real a $H^p(M)$.

A dimensão de $H^p(M)$ é denominada número de Betti de ordem p. O conhecimento dos grupos de Cohomologia é bastante importante no estudo das propriedades de M e tem consequencias no estudo dos números topológicos.

Estamos agora em condições de escrever equações para formas em M, como por exemplo: dada uma p+1-forma F sobre M determine as p-formas A de $\Lambda^p(M)$ tais que F = dA. O que queremos então é determinar o conjunto $d^{-1}(F)$.

O primeiro caso a ser analisado é o caso em que $F \notin B^{p+1}(M)$; nessas condições não existe nenhuma p-forma A, isto é $d^{-1}(F) = \emptyset$.

Se $F \in B^{p+1}(M)$, $d^{-1}(F) \neq \emptyset$ e se A_1 e $A_2 \in d^{-1}(F)$ temos

$$F = dA_1 = dA_2 \Rightarrow d(A_2 - A_1) = 0$$

logo $A_2 - A_1 \in Z^p(M)$.

Note que isso não significa necessariamente que $A_2 - A_1 \in B^p(M)$ o que só ocorrerá se $H^p(M) = \{[0]\}$.

A DERIVADA DE LIE

Consideremos um campo vetorial X, pré-fixado numa variedade M e seja φ_t o subgrupo local a um parametro gerado por X . φ_t é um difeomorfismo local, de forma que a aplicação φ_{t*} é bem definida e pode ser usada para transportarmos um vetor arbitrário de um ponto a outro. Denominaremos derivada de Lie do campo vetorial Y ao longo do campo vetorial X ao novo campo vetorial $L_X Y$ dado por

$$L_X Y \equiv \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[Y - \varphi_{t*} Y \right]$$

Essa definição pode ser imediatamente generalizada para um tensor T qualquer e seguem trivialmente da definição as seguintes propriedades para a derivada de Lie:

(i) L_X é linear, preserva o tipo dos tensores e preserva contrações

(ii) $L_X f = X(f)$

(iii) $L_X(S \otimes T) = L_X S \otimes T + S \otimes L_X T$

Vamos mostrar agora que para um campo vetorial , vale a relação

$$(L_X Y)(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

o que motiva a notação

$$L_X Y = [X, Y]$$

Para isso consideremos um sistema de coordenadas x^u em M

e calculemos as componentes do campo vetorial $L_X Y$ no referencial definido por esse sistema. Temos $X = X^u \partial/\partial x^u$, $Y = Y^u \partial/\partial x^u$ e por definição

$$(L_X Y)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[Y(x) - d\varphi_t(\bar{x})(Y(\bar{x})) \right]$$

onde $\bar{x} = \varphi_t^{-1}(x) = \varphi_{-t}(x)$. Tomando componentes temos

$$(L_X Y)^u(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[Y^u(x) - (d\varphi_t(\bar{x})(Y(\bar{x})))^u \right]$$

$$= - \frac{d}{dt} (\varphi_{t*} Y)^u(x) \Big|_{t=0}$$

mas

$$(\varphi_{t*} Y)^u(x) = \frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^r}(\bar{x})\, Y^r(\bar{x}) \qquad \text{então}$$

$$(L_X Y)^u(x) = - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^r}(\bar{x}) \right]_{t=0} Y^r(x) - \frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^r}(x) \frac{d}{dt} Y^r(\bar{x}) \Big|_{t=0}$$

agora

$$- \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^r}(\bar{x}) \right] = - \frac{\partial}{\partial x^r} X^u$$

e

$$- \frac{d}{dt} Y^r(\bar{x}) = \frac{\partial Y^r}{\partial x^u} X^u$$

então

$$(L_X Y)^u = \frac{\partial Y^u}{\partial x^r} X^r - \frac{\partial X^u}{\partial x^r} Y^r$$

o que demonstra nosso resultado.

INTEGRAÇÃO EM VARIEDADES

Terminamos esse capítulo com uma rápida referencia a integração em variedades. O objeto adequado para a integração numa variedade M de dimensão m é uma m-forma diferenciavel ω. Se temos um sistema de coordenadas x^{μ}, podemos escrever ω na forma $\omega = \omega_{1\ldots m}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$ e se R é uma região descrita por esse sistema podemos colocar

$$\int_R \omega = \int_{\bar{R}} \omega_{1\ldots m}\, dx^1 \ldots dx^m$$

onde $\bar{R}$ é a região do R^m correspondente a R pelo sistema de coordenadas.

Para definirmos globalmente a integração somos obrigados a lançar mão de uma partição da unidade (que existem para variedades para compactas, com certeza), f_α e definir

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_{\phi_\alpha(M_\alpha)} f_\alpha\, \omega_{1\ldots m}\, dx^1 \ldots dx^m$$

onde M_α é uma cobertura de M e ϕ_α uma carta local. Pode-se mostrar que essa definição independe das coordenadas e da partição da unidade usada (veja por exemplo Hawking e Ellis).

O resultado central para integração é o teorema generalizado de Stokes que pode assim ser enunciado

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

onde ∂M é o bordo de M e ω é uma m-1 forma arbitrária. Esse resultado fornece o conjunto dos teoremas clássicos de integração (demonstração e detalhes em cálculus on Manifolds-Spivak).

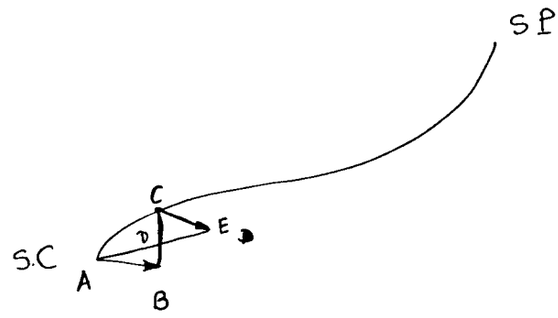


FIGURA V.1

O passo seguinte consiste em obter a geodésia que une B a C e nela marcar o ponto médio (lançando mão do parametro afim); esse ponto é o ponto D; da Figura V.1. Finalmente percorremos a geodésia que passa por A e D, para obter o ponto E, situado a uma "distancia" de D que é a mesma distancia de D a A. O vetor paralelo no ponto C é aquele cuja extremidade é o ponto E. Repetindo esse processo realizamos o transporte paralelo até B.

Devemos frizar que não dispomos de nenhuma métrica é só falamos em "distancia" ao longo de uma cruva graças ao parametro afim.

Se sabemos realizar o transporte paralelo podemos realizar a derivada covariante de um campo vetorial V(p) ao longo de um vetor W tangente a variedade no ponto. Basta considerarmos um trecho local de curva tangente a W no ponto p. Chamemos essa curva λ (Figura V.2).

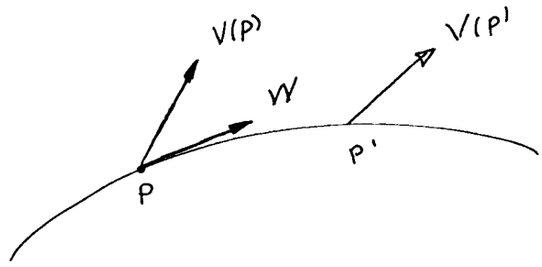


FIGURA V.2

Agora se σ_0 é o parametro do ponto p, tomamos um ponto p' de parametro $\sigma_0+\epsilon$. Em p' o campo vetorial V, assume o valor V(p').

Finalmente transportamos paralelamente o vetor V(p') para o ponto p, fazemos a subtração com V(p), dividimos por ϵ e passamos ao limite. O resultado é a derivada covariante de V ao longo de W. Simbolicamente escrevemos:

$$\nabla_W V = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{V(\sigma_0+\epsilon)_{\substack{\text{TRANSPORTADO} \\ \text{PARA P}}} - V(\sigma_0)}{\epsilon} \right]$$

O leitor interessado em maiores detalhes pode consultar o Box 10.2 do livro de Misner Thorne e Wheeler.

Realizaremos neste capítulo o caminho inverso definindo primeiramente a conexão linear, para chegar finalmente na noção de Geodésia.

CONEXÕES LINEARES EM VARIEDADES

Seja M uma variedade diferenciavel de classe C^R e de

CAPÍTULO IV

GEOMETRIA AFIM E RIEMANNIANA

INTRODUÇÃO

O capítulo anterior foi dedicado as propriedades mais gerais que envolvem as variedades diferenciais. Estudamos as variedades e os campos tensoriais nela definidos; vimos ainda a possibilidade de definir uma operação de integração, bem como a diferenciação exterior e a derivada de Lie. A diferenciação exterior é um processo restrito aos tensores antisimétricos, enquanto que a derivada de Lie, tem propriedades pouco locais.

Assim, somente com as ferramentas da topologia diferencial, já podemos estabelecer equações diferenciadas relacionando formas diferenciaveis, do tipo "uma forma é o diferenciavel exterior de outra". Mas tudo isso é extremamente limitado para as aplicações em física onde conceitos como os de Geodésia, paralelismo, curvatura, etc. são importantes.

Nesse capítulo introduziremos uma estrutura adicional as variedades diferenciaveis, de modo a permitir o estabelecimento de um processo de diferenciação aplicável a qualquer tensor, e que seja invariante a mudanças de coordenadas. Essa diferenciação é a

diferenciação covariante. A partir dela seremos capazes de definir o transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva, e então estabelecer sem dificuldades a idéia de Geodésia.

A estrutura adicional é denominada conexão linear afim e a idéia central é exatamente estabelecer uma conexão entre os espaços tangentes em diferentes pontos.

Essas idéias podem ser colocadas de cabeça para baixo, assumindo a existencia de um critério para a determinação das Geodésias; isso significa, que dado um ponto da variedade em um vetor do espaço tangente nesse ponto, sabemos determinar uma família de curvas parametrizadas, cujos parametros diferem por uma transformação linear. O parametro dessas curvas é denominado parametro afim e serve para comparar distancias entre dois pontos da mesma geodésia.

Lembrando que as variedades são localmente exemplares do R^m e usando a noção de Geodésia, podemos transportar paralelamente um pequeno vetor. A fim de ilustrar essas idéias, consideremos nossas variedades como sendo a superfície da terra. Queremos transportar um vetor de uma cidade, digamos São Carlos, a outra, por exemplo São Paulo; tudo isso ao longo da Washington Luiz-Anhanguera. Suponhamos ainda que o vetor seja de pequeno tamanho de forma que ele se confunda com um risco saindo de São Carlos e alcançando as cercanias. Chamamos de A uma das extremidades do vetor (em São Carlos) e de B sua outra extremidade. Tomamos agora um ponto C na curva em questão (na rodovia) próxima de A (Figura V.1).

A noção de proximidade ao longo da curva $\lambda(\sigma)$ que liga A a B, pode ser estabelecida a partir do parametro da curva.

dimensão m e seja $\otimes^r_s(M)$ o conjunto de todos os campos tensoriais r-vezes contravariantes e s-vezes covariantes sobre M, munido das operações de adição de dois tensores e multiplicação de um tensor por um número real (isto é $\otimes^r_s(M)$ constitui um espaço vetorial real de dimensão). Denotemos também por $\otimes(M)$ o conjunto de todos os tensores munidos da multiplicação tensorial.

O conceito de diferencial associa a cada função real f, um campo vetorial covariante df que expresso na base dx^a tem a forma

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^a} dx^a$$

e que quando aplicado num vetor $\mathcal{X} = \mathcal{X}^b \frac{\partial}{\partial x^b}$ dá:

$$df = \mathcal{X}^a \frac{\partial f}{\partial x^a}$$

Se consideramos f, como sendo um campo tensorial de $\otimes^0_0(M)$ e df pertencendo a $\otimes^0_1(M)$ vemos que o diferencial estabelece uma correspondencia entre um campo tensorial de ordem zero e um campo covariante, isto é

$$d : f \in \otimes^0_0(M) \longrightarrow df \in \otimes^0_1(M)$$

Vamos agora generalizar essa definição introduzindo um campo de operadores sobre M, denominado conexão, que associa a cada campo vetotial contravariante, um novo campo tensorial uma vez contravariante e uma vez covariante, isto é, definimos o campo operacional linear como sendo

$$\nabla : \otimes^1_0(M) \longrightarrow \otimes^1_1(M) \qquad \nabla : \mathcal{X} \longrightarrow \nabla\mathcal{X}$$

A imagem que a conexão faz do campo vetorial $\mathcal{X}$ é denominada derivada covariante de $\mathcal{X}$. Note que a exigencia de que $\nabla\mathcal{X}$ seja um tensor mixto, significa que duas entradas suas sejam lineares em cada ponto do espaço tangente e em cada ponto do espaço cotangente.

Calculando a derivada covariante de $\mathcal{X}$, $\nabla\mathcal{X}$, em cada ponto de um campo vetorial contravariante $\mathcal{Y}$ obtemos um campo vetorial contravariante $\nabla_{\mathcal{Y}}\mathcal{X} = \nabla\mathcal{X}(\mathcal{Y},\ )$ denominado derivada covariante de $\mathcal{X}$ ao longo do campo $\mathcal{Y}$. Podemos também calcular a derivada covariante de $\mathcal{X}$, nos pontos de um campo covariante ω e obter um campo covariante; finalmente podemos fazer ambas as coisas para obter a função real.

A exigencia de que $\nabla\mathcal{Y}$ seja um tensor mixto significa que ele é linear em cada ponto do espaço tangente e cotangente de forma que se temos campos da forma $f\mathcal{X}+\bar{f}\bar{\mathcal{X}}$ e $g\omega+\bar{g}\bar{\omega}$ teremos:

$$\nabla\mathcal{Y}\,[f\mathcal{X}+\bar{f}\bar{\mathcal{X}},\omega] = f\,\nabla\mathcal{Y}(\mathcal{X},\omega) + \bar{f}\,\nabla\mathcal{Y}(\bar{\mathcal{X}},\omega)$$

$$\nabla\mathcal{Y}\,[\mathcal{X},g\omega+\bar{g}\bar{\omega}] = g\,\nabla\mathcal{Y}(\mathcal{X},\omega) + \bar{g}\,\nabla\mathcal{Y}(\mathcal{X},\bar{\omega})$$

para quaisquer funções reais $f,\bar{f}$ e $g,\bar{g}$, campos contravariantes $\mathcal{X}$ e $\bar{\mathcal{X}}$ e covariantes ω e $\bar{\omega}$.

A linearidade do operador ∇ significa que se ∇ atua num campo da forma $\alpha\mathcal{Y}+\bar{\alpha}\bar{\mathcal{Y}}$, onde α e $\bar{\alpha}$ são <u>reais</u> teremos:

$$\nabla(\alpha\mathcal{Y}+\bar{\alpha}\bar{\mathcal{Y}}) = \alpha\nabla\mathcal{Y}+\bar{\alpha}\nabla\bar{\mathcal{Y}}$$

Ainda exigiremos que ∇ tenha propriedades em relação ao produto de uma função por um campo vetorial:

$$\nabla(f\otimes Y) = df\otimes Y + f\otimes \nabla Y$$

Como o produto tensorial entre um tensor de $\otimes^0_0$ e um tensor de $\otimes^0_1$ coincide com a multiplicação usual, essa expressão significa que

$$\nabla(f\otimes Y) = df\otimes Y + f\,\nabla Y$$

isto é esse operador generaliza a diferencial e satisfaz a regra de Leibnitz.

Para conhecermos uma conexão, temos que saber que imagem ela faz de um campo vetorial Y qualquer; para isso será suficiente tomarmos uma base local E_c e calcular ∇E_c. E como ∇E_c é um tensor mixto ele pode ser expandido na base $E_a\otimes E_b$. Teremos então

$$\nabla E_c = \Gamma^a{}_{bc}\, E^b\otimes E_a$$

Essas m^3 funções reais assim definidas, definem uma única conexão linear, e não tem caráter tensorial. De fato tomando novas bases $\bar{E}^A$ e $\bar{E}_A$ podemos escrever

$$\nabla \bar{E}_C = \bar{\Gamma}^A{}_{BC}\, \bar{E}^B\otimes \bar{E}_A$$

Essa mudança de base é definida pelas matrizes α^A_a, β^a_A dada por:

$$\bar{E}^A = \alpha^A_a\, E^a \quad ; \quad \bar{E}_A = \beta^a_A\, E_a \quad \text{com} \quad \beta^a_A = (\alpha^{-1})^a_A$$

teremos

$$\bar{\Gamma}^A{}_{BC} = \alpha^A_a\, \beta^B_b\, \beta^c_c\, \Gamma^a{}_{bc} + \alpha^A_a\, \beta^b_B\, E_b(\alpha^a_c)$$

de forma que o segundo termo quebra o caráter tensorial da conexão.

Se por outro lado temos duas conexões ∇ e $\tilde{\nabla}$ na mesma variedade podemos tomar a diferença entre as duas $\nabla - \tilde{\nabla}$ e obter um genuíno campo tensorial sobre M.

Para obtermos a forma clássica das leis de transformação da derivada covariante basta tomarmos

$$\bar{x}^A = \bar{x}^A(x^1, \dots, x^m)$$
$$x^a = x^a(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m)$$

de modo que

$$\bar{E}^A = d\bar{x}^A = \frac{\partial \bar{x}^A}{\partial x^a} dx^a = \frac{\partial \bar{x}^A}{\partial x^a} E^a$$

então

$$\alpha^A_a = \frac{\partial \bar{x}^A}{\partial x^a} \quad e \quad \beta^a_A = \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^A}$$

Do ponto de vista prático nos interessa calcular as componentes do tensor mixto derivada covariante em função das componentes de um campo Y dado. Tomemos então $Y = Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ e $\nabla Y = Y^k_{;m} \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^m$ então:

$$\nabla Y = \nabla\left(Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = Y^k \nabla\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) + dY^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}$$

mas

$$\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \Gamma^m{}_{nk}\, dx^n \otimes \frac{\partial}{\partial x^m}$$

e

$$dY^k = \frac{\partial Y^k}{\partial x^m} dx^m$$

logo

$$Y^k_{;m} = \frac{\partial Y^k}{\partial x^m} + \Gamma^k_{mn} Y^n$$

Finalmente podemos generalizar essa operação de modo a obter a derivada covariante de um tensor de qualquer espécie impondo que:

(1) $\nabla : \otimes^r_s(M) \longrightarrow \otimes^r_{s+1}(M)$ linear

(2) $\nabla f = df$

(3) $\nabla(T \otimes S) = \nabla T \otimes S + T \otimes \nabla S$

(4) $\nabla(\text{contração de } T) = \text{contração de } \nabla T$

Com essas propriedades podemos calcular a derivada covariante de qualquer tensor. Para obter as componentes da derivada covariante de um tensor qualquer, calcularemos inicialmente ∇E^b, a partir da relação

$$\nabla(E_a \otimes E^b) = \nabla E_a \otimes E^b + E_a \otimes \nabla E^b$$

então

$$\nabla(E_a \otimes E^b) = \Gamma^m{}_{na} E_m \otimes E^n \otimes E^b + E_a \otimes \nabla E^b$$

como ∇E^b é um tensor, podemos por $\nabla E^b = \hat{\Gamma}^b{}_{mn} E^m \otimes E^n$

Logo

$$\nabla(E_a \otimes E^b) = \Gamma^m{}_{na} E_m \otimes E^n \otimes E^b + \hat{\Gamma}^b{}_{mn} E^m \otimes E^n \otimes E^a$$

contraindo esse tensor temos

$$\hat{\Gamma}^b{}_{mn} = -\Gamma^b{}_{mn}$$

logo

$$\nabla E^b = -\Gamma^b{}_{mn} E^m \otimes E^n$$

Tomamos agora um tensor de $\otimes^1_1(M)$, da forma $T = T^k{}_m E^m \otimes E_k$

e procuremos sua derivada $\nabla T = T^k{}_{m;n}\, E_k \otimes E^m \otimes E^n$

$$\nabla T = T^k{}_m\, \nabla E^m \otimes E_k + T^k{}_m\, E^m \otimes \nabla E_k + d\, T^k{}_m \otimes E^m \otimes E_k$$

Usando as expressões obtidas anteriormente temos

$$T^k{}_{m;n} = \frac{\partial}{\partial x^n} T^k{}_m + T^k{}_{ns}\, T^s{}_m - \Gamma^s{}_{nm}\, T^k{}_s$$

e essa regra se generaliza trivialmente para tensores de ordem mais alta.

O SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DA CONEXÃO: TRANSPORTE PARALELO E GEODÉSIAS

A definição que demos na seção anterior para uma conexão foi dada pela primeira vez por Koszul. Historicamente as componentes da conexão foram introduzidas por Christoffel antes da axiomatização de Koszul, a partir do estudo de variedades Riemanianas; a preocupação era o estabelecimento de uma derivação covariante. Coube a Levi-Civita e Ricci uma interpretação geométrica da conexão a partir do transporte paralelo de vetores ao longo de uma curva.

Consideremos então uma curva $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \to M$ com $\gamma(0) = P_0$ e seja X_{P_0} um vetor tangente a M no ponto P_0. Consideremos agora um campo vetorial $X = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, e calculemos o tensor mixto $\nabla X = X^k{}_{;m}\, dx^m \otimes \partial/\partial x^k$. Se aplicamos esse tensor num vetor situado num ponto, obtemos um vetor no mesmo ponto; assim podemos construir um campo de vetores ao longo da curva γ, exigindo que $\nabla_{\dot\gamma} X = 0$, isso nos dá o sistema de equações

$$\frac{d}{dt} X^k(t) + \Gamma^k{}_{mn}(t) \frac{dx^m}{dt} X^n(t) = 0$$

O teorema da existencia e unicidade de equações diferenciais nos diz que existe um único campo $\mathcal{X}$ ao longo de γ obedecendo essas equações e sujeito a condição inicial $\mathcal{X}(t=0) = \mathcal{X}_{p_0}$. O vetor $\mathcal{X}(t)$ é dito paralelo a $\mathcal{X}_{p_0}$, no ponto $p=\gamma(t)$.

Uma solução formal para essas equações pode ser obtida, analogamente ao que ocorre em mecânica quântica, a partir do operador P, ordenação temporal de Dyson. Para vermos isso consideremos a forma matricial dessas equações definindo uma matriz c(t), mxm dada por $C^k_n(t) = -\Gamma^k_{mn}(t)\dot{x}^m(t)$; observe que a conexão e a curva determinam integralmente C. Considerando agora as componentes do campo como um vetor coluna temos:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{X}(t) = C(t)\,\mathcal{X}(t)$$

Integrando, vem

$$\mathcal{X}(t) = P\left[\exp\int_{t_0}^{t} C(t')\,dt'\right]\mathcal{X}(t_0)$$

onde P ordena o produto de matrizes colocando os tempos posteriores a esquerda e a exponencial é definida pela expanção em série. O operador

$$C_\gamma = P\left[\exp\int_{t_0}^{t} C(t')\,dt'\right]$$

associa linearmente os vetores de $T(M)_{\gamma(t_0)}$ com vetores de $T(M)_{\gamma(t)}$. E aqui temos a razão do termo <u>conexão linear</u>, C_γ conecta linearmente os planos tangentes ao longo da curva.

Consideremos agora o conjunto de todos os operadores C_γ para curvas fechadas passando por um ponto $p_0 \in M$, denotamos C_{p_0} . Dados dois operadores de C_{p_0} , digamos C_{γ_1} e C_{γ_2} , definimos um

novo operador $C_{\gamma_1} * C_{\gamma_2}$ da seguinte forma

$$C_{\gamma_1} * C_{\gamma_2} = C_{\gamma_1 * \gamma_2}$$

onde

$$\gamma_1 * \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Da mesma maneira definimos

$$(C_{\gamma_1})^{-1} = C_{\gamma_1^{-1}} \quad \text{onde} \quad \gamma_1^{-1}(t) = \gamma(1-t)$$

Essas duas leis conferem a C_{P_0} uma estrutura de grupo, denominado "grupo de holonomia da conexão ∇ no ponto P_0".

Podemos agora definir uma geodésia como sendo uma curva tal que seus vetores velocidades são transporte paralelo um dos outros, isto é $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ (na verdade $\dot\gamma$ está definido somente ao longo de γ de modo que não podemos calcular sua derivada covariante. Isso se resolve extendendo-se $\dot\gamma$ para um aberto e mostrando que o resultado independe da extensão), teremos então as equações

$$\ddot{x}^k(t) + \Gamma^k_{mn}\, \dot{x}^m \dot{x}^n(t) = 0$$

que determinam as geodésias.

TORÇÃO E CURVATURA

A existencia de uma conexão permite que definamos um operador que associa a cada par de campos contravariantes um campo contravariante. Esse operador é denominado operador de torção e é definido pela relação:

$$T[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

O operador de torção gera um tensor de tipo $\binom{2}{1}$ que generaliza o conceito usual de torção para curvas do . Assim as componentes do tensor de torção relativamente a uma referencia movel E^K e E_K é definido por

$$T^A{}_{BC} = E^A \left[T \left[E_B, E_C \right] \right]$$

Se o referencial é um referencial natural, teremos

$$T^A{}_{BC} = dx^A \left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^B}} \partial/\partial x^C - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^C}} \partial/\partial x^b \right] = \Gamma^a{}_{bc} - \Gamma^a{}_{cb}$$

o que exibe o caráter tensorial do tensor de torção.

Um caso de particular importancia é o caso em que uma conexão gera um tensor de torção nulo; este é o caso de todas as conexões geradas por uma métrica rimaniana. O anulamento da torção significa que as componentes da conexão relativamente a um referencial natural são simétricas em relação aos índices inferiores.

Outro operador gerado pela conexão é o operador de curvatura que associa a cada terna de campos contravariantes, um novo campo contravariante a partir de

$$R(XY)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - R_{[XY]} Z$$

O operador de curvatura também gera um tensor de tipo $\binom{3}{1}$, cujas componentes são

$$R^a{}_{bcd} = E^a \left(R(E_b, E_c) E_d \right)$$

O anulamento do tensor de curvatura mostra que o espaço em questão é "chato" e implica na comutatividade da derivação covariante.

A expressão para o tensor de curvatura em relação a um referencial natural é:

$$R^a{}_{bcd} = \frac{\partial}{\partial x^c}\Gamma^a{}_{db} - \frac{\partial}{\partial x^d}\Gamma^a{}_{cb} + \Gamma^a{}_{cf}\Gamma^f{}_{db} - \Gamma^a{}_{dbf}\Gamma^f{}_{cb}$$

Além disso ele tem as simetrias

$$R^a{}_{bcd} = -R^a{}_{bdc}$$

$$R^a{}_{bcd} + R^a{}_{dbc} + R^a{}_{cdb} = 0$$

$$R^a{}_{bcd;e} + R^a{}_{bec;d} + R^a{}_{bdc;e} = 0$$

Essa última relação é denominada identidade de Bianchi. Um tensor derivado do tensor de curvatura é importante nas aplicações é o tensor de Ricci:

$$R_{bd} = R^a{}_{bad}$$

AS EQUAÇÕES DE ESTRUTURA DE CARTAN

Vamos obter nesta seção as equações estruturais de Cartan que implicam em condições de integrabilidade para a torção e a curvatura. Faremos os cálculos em detalhe, uma vez que, na bibliografia essas equações ou são obtidas em contextos complicados ou são obtidas de uma forma obscura.

Como vimos dada uma variedade diferenciavel, cada uma de suas cartas locais fornece uma base para o espaço tangente num ponto, bem como uma base para o espaço cotangente. Se as coordenadas são denotadas por x^a, $a=1,\dots,m$ a base canonica para os vetores contravariantes é denotada $\partial/\partial x^a$ e a base dual dx^a. Cartan chama

tais bases de referenciais naturais, em contraposição a diferenciais móveis, E^A e E_A que não decorrem necessariamente de um sistema local de coordenadas e portanto são mais gerais.

Introduziremos também três formas diferenciaveis associadas, a conexão, a torção e a curvatura que comporão as equações de Cartan. A 1-forma conexão é definida como

$$\omega^A_C = \Gamma^A_{BC} E^B \qquad A,B = 1,\dots,m$$

relativamente ao referencial movel E^C. Na verdade estamos frente a uma família de m^2 1-formas que podem ser colocadas na forma matricial $\omega = (\omega^A_B)$. Diremos então que a matriz ω, cujos elementos são 1-formas, é a matriz 1-forma associada a conexão ∇.

Essa matriz permite uma expressão sintética para a lei de transformação da conexão quando se passa de um referencial movel para outro. Tomemos então dois referenciais E^A e e^a ligados pelas transformações

$$E^A = \Sigma^A_a e^a \qquad E_A = (\Sigma^{-1})^a_A e_a$$

Os Γ's se transformam como

$$\tilde{\Gamma}^A_{BC} = \Sigma^A_a \Sigma^{-1\,b}_B \Sigma^{-1\,\gamma}_C \Gamma^a_{b\gamma} + \Sigma^A_a \Sigma^{-1\,b}_B e_b (d\Sigma^{-1\,a}_C)$$

isso dá a seguinte lei para os ω's

$$\tilde{\omega}^A_C = \Sigma^A_a \Sigma^{-1\,\gamma}_C \omega^a_\gamma + \Sigma^A_a (d\Sigma^{-1\,a}_C)$$

ou na forma matricial

$$\tilde{\omega} = \Sigma \omega \Sigma^{-1} + \Sigma\, d\Sigma^{-1}$$

A 2-forma torção é definida como:

$$\Upsilon^A = \Pi^A{}_{BC} \frac{E^B \wedge E^C}{2}$$

O caracter tensorial da torção implica na lei de transformação

$$\tilde{\Upsilon}^A = \Sigma^A_B \Upsilon^B \quad \text{ou} \quad \tilde{\Upsilon} = \Lambda \Upsilon$$

Finalmente definimos a 2-forma matricial de curvatura

$$\Omega^A{}_C = R^A{}_{DEC} \frac{E^D \wedge E^E}{2}$$

E analogamente teremos

$$\tilde{\Omega} = \Sigma \omega \Sigma^{-1}$$

A primeira equação de Cartan relaciona a 2-forma vetorial torção, com a 1-forma matricial curvatura. Para obtê-la escrevemos as componentes da torção em termos da conexão

$$\Pi^A{}_{BC} = \Gamma^A{}_{BC} - \Gamma^A{}_{CB} - E^A [E_B, E_C]$$

logo

$$\Upsilon^A = \left[\Gamma^A{}_{BC} - \Gamma^A{}_{CB} - E^A [E_B, E_C]\right] \frac{E^B \wedge E^C}{2}$$

$$= \Gamma^A{}_{BC} E^B \wedge E^C - \frac{1}{2} E^A [E_B, E_C] E^B \wedge E^C$$

Introduzindo a conexão 1-forma temos

$$\Upsilon^A = \omega^A_C \wedge E^C - \frac{1}{2} E^A [E_B, E_C] E^B \wedge E^C$$

O segundo nessa expressão pode ser calculado se tomamos um referencial natural

$$E^A = \Lambda^A_a \, dx^a$$

$$E_B = (\Lambda^{-1})^b_B \frac{\partial}{\partial x^b}$$

então

$$-\frac{1}{2} E^A [E_B, E_C] E^B \wedge E^C = -\frac{1}{2} \Lambda^A_\alpha \Lambda^B_\beta \Lambda^C_\gamma \, dx^\alpha \left[\Lambda^{-1\,\bar\beta}_{\;\;B} \frac{\partial}{\partial x^{\bar\beta}}, \Lambda^{-1\,\bar\gamma}_{\;\;C} \frac{\partial}{\partial x^{\bar\gamma}} \right] dx^\beta \wedge dx^\gamma$$

mas

$$\left[\Lambda^{-1\,\bar\beta}_{\;\;B} \frac{\partial}{\partial x^{\bar\beta}}, \Lambda^{-1\,\bar\gamma}_{\;\;C} \frac{\partial}{\partial x^{\bar\gamma}} \right] = \Lambda^{-1\,\bar\beta}_{\;\;B} \frac{\partial}{\partial x^{\bar\beta}} \Lambda^{-1\,\bar\gamma}_{\;\;C} \frac{\partial}{\partial x^{\bar\gamma}} - \Lambda^{-1\,\bar\gamma}_{\;\;C} \frac{\partial}{\partial x^{\bar\gamma}} \Lambda^{-1\,\bar\beta}_{\;\;B} \frac{\partial}{\partial x^{\bar\beta}}$$

logo

$$-\frac{1}{2} E^A [E_B, E_C] E^B \wedge E^C = -\frac{1}{2} \Lambda^A_\alpha \Lambda^B_\beta \Lambda^C_\gamma \, dx^\beta \wedge dx^\gamma \left[\Lambda^{-1\,\bar\beta}_{\;\;B} \frac{\partial}{\partial x^{\bar\beta}} \Lambda^{-1\,\bar\gamma}_{\;\;C} \delta^\alpha_{\bar\gamma} - \Lambda^{-1\,\bar\gamma}_{\;\;C} \frac{\partial}{\partial x^{\bar\gamma}} \Lambda^{-1\,\bar\beta}_{\;\;B} \delta^\alpha_{\bar\beta} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} dx^\beta \wedge dx^\gamma \left[\Lambda^A_\alpha \Lambda^B_\beta \Lambda^C_\gamma \Lambda^{-1\,\bar\beta}_{\;\;B} \frac{\partial}{\partial x^{\bar\beta}} \Lambda^{-1\,\alpha}_{\;\;C} - \Lambda^A_\alpha \Lambda^B_\beta \Lambda^C_\gamma \Lambda^{-1\,\bar\gamma}_{\;\;C} \frac{\partial}{\partial x^{\bar\gamma}} \Lambda^{-1\,\alpha}_{\;\;B} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} dx^\beta \wedge dx^\gamma \left[\Lambda^A_\alpha \Lambda^C_\gamma \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Lambda^{-1\,\alpha}_{\;\;C} - \Lambda^A_\alpha \Lambda^B_\beta \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \Lambda^{-1\,\alpha}_{\;\;B} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} dx^\beta \wedge dx^\gamma \left[-\frac{\partial}{\partial x^\beta} \Lambda^A_\alpha \delta^\alpha_\gamma + \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \Lambda^A_\alpha \delta^\alpha_\beta \right]$$

$$= +\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Lambda^A_\alpha \, dx^\beta \wedge dx^\gamma - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \Lambda^A_\alpha \, dx^\alpha \wedge dx^\gamma$$

Fazendo $\gamma = \beta$ no segundo termo

$$(E^B \wedge E^C) - \frac{1}{2} E^A [E_B, E_C] = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Lambda^A_d \, dx^d \wedge dx^\beta$$

e logo

$$-\frac{1}{2} E^A [E_B, E_C] (E^B \wedge E^C) = dE^A$$

obtemos então a primeira equação estrutura de Cartan

$$\Upsilon^A = \omega^A_C \wedge E^C + dE^A$$

ou matricialmente

$$\Upsilon = \omega \wedge E + dE$$

Procedendo de uma forma análoga obtemos a segunda equação de Cartan

$$\Omega^A_B = \omega^A_C \wedge \omega^C_B + d\omega^A_B$$

ou

$$d\Omega = \omega \wedge \omega + d\omega$$

A diferenciação das equações de Cartan nos dá equações de integrabilidade.

$$d\Upsilon^A = \Lambda^A_B \wedge E^B - \omega^A_B \wedge \Upsilon^B$$

$$d\Omega^A_B = \Omega^A_C \wedge \Omega^C_B - \omega^A_C \wedge \Omega^C_B$$

Pode-se mostrar que para uma variedade rimaniana, essa última equação nos dá as identidades usuais de Bianchi.

O TENSOR MÉTRICO

Numa variedade, mesmo que equipada com uma conexão, não é possível medirmos comprimentos de curvas ou intensidades de vetores. Para que isso seja possível devemos equipá-la com um tensor métrico que é um tensor covariante, de segunda ordem, simétrico. Denotaremos por g a tal tensor e por $g^{\mu\nu}$ suas componentes relativamente a base dx^{μ}, isto é, $g = g_{\mu\nu}\, dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}$. O modulo de um vetor $X \in T(M)_x$ será escrito $\|X\| = (|g(X,X)|)^{1/2}$ e o comprimento da curva $\lambda(t)$ será

$$L = \int_{t_A}^{t_B} \|\partial/\partial t\|\, dt$$

onde $\frac{\partial}{\partial t}$ é o vetor tangente a $\lambda(t)$ no ponto t.

O tensor métrico é dito não-degenerado se $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$. Quando isso ocorre essa matriz pode ser invertida e utilizada para levantar e abaixar índices das componentes dos tensores fornecendo assim um isomorfismo entre entidades covariantes e contravariantes.

Um resultado importante, consequencia do teorema da inércia da algebra multilinear é que todo tensor métrico pode ser localmente colocado na forma

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

com $\frac{m+s}{2}$ termos positivos e $\frac{m-s}{2}$ termos negativos. O número s é denominado sinal do tensor métrico.

Uma métrica é dita definida positiva se s = m e Lorentziana se s = m-2. A existência de uma métrica Lorentziana gera a

classificação usual dos vetores tangentes, em tipo espaço, tempo e nulos.

Métricas positivas sempre existem em variedades paracompactas, mas o mesmo não ocorre com métricas lorentzianas. A obstrução topologica para a existência de métricas lorentzianas e o anulamento da classe de Euler (veja Hawkiwg-Ellis, por exemplo).

Se existe uma métrica em M então existe uma única conexão definida pela relação $\nabla g = 0$, isto é, a conexão que preserva o comprimento dos vetores no deslocamento paralelo. A relação entre as componentes da conexão e da métrica é a relação usual

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^c} g_{ab} + \frac{\partial}{\partial x^b} g_{ac} - \frac{\partial}{\partial x^a} g_{bc}\right]$$

e é uma decorrencia imediata de $\nabla g = 0$.

Finalmente observamos que o inverso não é verdadeiro, isto é a existência de uma conexão não implica na existência de nenhum tipo de métrica. Isto significa que a conexão é uma estrutura mais primária enquanto que a métrica uma estrutura mais sofisticada.

CAPÍTULO V

FIBRADOS ASSOCIADOS A VARIEDADES

Nesse capítulo construiremos dois espaços fibrados associados a uma dada variedade: o fibrado vetorial tangente e o fibrado dos referenciais lineares. Esses dois fibrados tem a mesma base M e mesmo grupo estrutural GL(m.R); a fibra do fibrado tangente é o R^m enquanto que a fibra do fibrado dos referenciais lineares é o próprio grupo GL(m.R). Quanto aos espaços totais teremos uma variedade de dimensão 2m, denotada T(M) e denominada "espaço total do fibrado tangente" e uma variedade de dimensão m(m+1) denotada L(M) e denominada "espaço total do fibrado dos referenciais lineares". Esses dois fibrados guardam uma profunda relação entre si: ambos tem as mesmas funções de transição. O fibrado dos referenciais lineares é o fibrado principal associado ao fibrado vetorial tangente. Muitas vezes cometeremos um abuso de linguagem confundindo a estrutura de espaço fibrado com o espaço total dessa estrutura.

O leitor que não conhece a definição de espaço fibrado tem duas alternativas: realizar uma primeira leitura desse capítulo antes de estudar o Capítulo VI, para depois realizar uma segunda leitura ou realizar uma primeira leitura do Capítulo VI antes

de estudar esse capítulo, para depois realizar uma segunda leitura do Capítulo VI. Os fibrados descritos aqui são pedagogicamente importantes pois servem de protótipos de espaços fibrados; a compreensão de fibrados mais complexos é bastante simplificada se ganhamos experiencia e intuição com o fibrado tangente e seu fibrado principal associado.

Nosso método será o de construir duas novas variedades, os espaços totais T(M) e L(M), que contem não só a informação relativa a variedade M, mas também a informação relativa aos campos vetoriais sobre M e relativa aos referenciais de M. Identificaremos os campos vetoriais de M a "seções" do fibrado tangente e os referenciais de M a "seções" do fibrado dos referenciais lineares. Esse método permite uma discussão relativa a existencia de campos vetoriais não nulos e sistemas de referencia em M. Além disso veremos que se M é dotada de uma conexão afim, isso permitirá uma interpretação geométrica simples da conexão: ela divide cada espaço tangente a T(M) ou L(M) em cada ponto, numa componente horizontal e numa componente vertical.

Do ponto de vista físico essa idéia unifica de uma certa maneira as interações gravitacionais e eletromagnéticas. Essa unidade não se dá dentro da proposta de Einstein, de determinar uma variedade espaço temporal, cuja conexão (definida pela métrica) fosse determinada pelas interações gravitacionais e eletromagnéticas conjuntamente. O que podemos afirmar é que tanto a presença de massa como a presença de cargas tem como consequencia geométrica a divisão dos espaços totais em componentes horizontais e verticais. No entanto os espaços totais são diferentes em ambos os

casos, como também são diferentes os grupos e as fibras.

CONSTRUINDO O ESPAÇO TOTAL DO FIBRADO TANGENTE

Tomemos uma variedade diferenciavel M, de dimensão m e classe C^k munida de um atlas $\{M_\alpha, \phi_\alpha, \alpha\}$; denotamos por $T(M)_p$ o espaço dos vetores tangentes a M no ponto p. Na vizinhança M temos as coordenadas x_α^b de um ponto p e as coordenadas V_α^b de um vetor $V \in T(M)_p$ relativamente a base $\partial/\partial x_\alpha^b$.

Construimos agora o espaço de objetos da forma (p,v) onde p é um ponto de M e v é tangente a M em p. Esse espaço é denotado T(M) e denominado espaço total fibrado tangente a variedade M:

$$T(M) = \{(p,v)/p \in M \text{ e } v \in T(M)_p\}$$

Mostraremos agora que T(M) é uma variedade diferenciavel de dimensão 2m e de classe C^k.

A primeira tarefa é exibir uma cobertura para T(M); consideremos então os conjuntos

$$T(M_\alpha) = \{(p,v)/p \in M_\alpha \text{ e } v \in T(M_\alpha)_p\}$$

Evidentemente se verifica

$$T(M) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} T(M_\alpha)$$

de forma que nessa família é realmente uma cobertura de T(M).

Agora associamos a cada ponto (p,v) de T(M) uma 2m- upla dada por (x_α^b, V_α^b) onde x_α^b é a coordenada de p e V_α^b as coordenadas de V relativamente a $\partial/\partial x_\alpha^b$. Essa relação estabelece um

isomorfismo local com o R^{2m}. Finalmente observemos que se (p,v) $T(M_\alpha) \cap T(M_\beta)$ teremos as mudanças de coordenadas

$$x^k_\alpha = f^k_{\alpha\beta}(x^1_\beta, \dots, x^m_\beta) \qquad k = 1, 2, \dots, m$$

$$V^k_\alpha = g^{kn}_{\alpha\beta}(x^1_\beta, \dots, x^m_\beta)\, V^n_\beta \qquad n = 1, \dots, m$$

onde $g_{\alpha\beta}$ é a matriz Jacobiana de f e é uma aplicação de classe C^{k-1}. Obtivemos então a nova variedade T(M) que como toda variedade admitira seus espaços tangentes, seus campos tensoriais, etc. é o que iremos estudar em seguida.

CAMPOS TENSORIAIS EM T(M)

Fixemos desde já nossa notação: p,q são pontos de M, V e W são vetores tangentes a M e a, b são pontos de T(M).

Como em toda variedade podemos considerar curvas sobre T(M), como sendo aplicações que levam números reais em pontos de T(M). Denotaremos por $\Sigma(t)$ uma curva em T(M). Podemos também considerar funções reais sobre T(M) e definir o espaço $T(T(M))_a$ dos vetores tangentes a T(M) no ponto a como sendo formado pelos operadores que associam a cada função real sua derivada ao longo da curva em um ponto.

Utilizando coordenadas podemos exprimir os pontos de T(M) através de 2m-uplas de forma $(x^1, \dots, x^m, V^1, \dots V^m)$ o que acarreta uma base $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial V^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial V^m}$ em $T(T(M))_a$, de forma que um vetor qualquer de $T(T(M))_a$ pode ser expresso por

$$\Lambda = \Lambda^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \Lambda^m \frac{\partial}{\partial x^m} + \Lambda^{m+1} \frac{\partial}{\partial V^1} + \dots + \Lambda^{2m} \frac{\partial}{\partial V^m}$$

Utilizando a artilharia algébrica descrita no Capítulo I, podemos gerar tensores de todos os tipos em cada espaço tangente.

Uma aplicação naturalmente definida entre as variedades T(M) e M é a projeção $\pi : T(M) \to M$ definida da seguinte forma:

$$\pi(a) = \pi(p, v) = p \quad \forall p \in M \quad e \quad v \in T(M)_p$$

Evidentemente essa aplicação não é inversível de forma que para dado ponto p de M existe um conjunto $\pi^{-1}(p)$ de pontos de T(M) que são projetados em p:

$$\pi^{-1}(p) = \{ a \in T(M) \mid \pi(a) = p \}$$

ou

$$\pi^{-1}(p) = \{ (p, v) \mid v \in T(M)_p \}$$

esse conjunto é denominado fibra de π no ponto p. Observemos que todas as fibras $\pi^{-1}(p)$ são isomorfas entre si e isomorfas ao R^m.

Como já vimos a existencia de uma aplicação entre variedades permite que transportemos vetores de uma, na outra. Assim se Λ é um vetor em $a \in T(M)$, podemos obter um vetor V_Λ em $p = \pi(a) \in M$, tal que

$$V_\Lambda (f) \big|_p = \Lambda \, (f \circ \pi) \big|_a$$

Essa aplicação $\pi_* : T(T(M))_a \to T(M)_{\pi(a)}$ leva o vetor $\Lambda = \Lambda^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \Lambda^{2m} \frac{\partial}{\partial v^m}$ no vetor $V = V^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, V^m \frac{\partial}{\partial x^m}$. Isso pode ser visto considerando Λ como sendo o vetor tangente a curva $\Sigma'(t)$ no ponto a. A curva $\Sigma(t)$ significa uma prescrição da forma $(\lambda(t), V(t))$ isto é, uma curva $\Sigma'(t)$ representa uma curva

$\lambda(t)$ em M munida de um campo vetorial V(t). Quando projetamos $\Sigma'(t)$ em M obtemos curva $\lambda(t)$, de forma que se Λ é $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\Sigma'}$, V será $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\lambda}$. Em termos de coordenadas isto significa que

$$\pi_* : (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m, \Lambda^{m+1}, \ldots, \Lambda^{2m}) \longrightarrow (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)$$

Essas operações são muitas vezes denominadas "abaixamento"; podemos então "abaixar" os pontos e as curvas de T(M) obtendo de uma forma única pontos e curvas em M; da mesma forma podemos "abaixar" um vetor Λ de T(M) obtendo um vetor Λ^V de M. Isso se faz perdendo-se alguma informação; uma curva em T(M) contem a informação geométrica de uma curva em M e ainda a prescrição de um campo vetorial em cada ponto da curva.

Isso nos permite construir em cada ponto a de T(M) um sub-espaço vetorial de $T(T(M))_a$ denotado V_a e denominado sub-espaço vertical de $T(T(M))_a$. Esse sub-espaço é gerado pelos m-vetores $\frac{\partial}{\partial v^h}$; a denominação vertical decorre do fato que esses vetores quando projetados em M (por π_*) correspondem ao vetor nulo de $T(M)_p$:

$$\pi_* \left[\left.\frac{\partial}{\partial v^h}\right)_a \right] = \left.\vec{0}\right)_{\pi(a)}$$

Isso justifica o termo vertical.

Poderiamos tentar uma operação inversa: o "levantamento" de curvas e campos vetoriais; mas essa operação não é únivoca. Mostraremos agora que quando a variedade M esta munida de uma conexão existe um critério para realizar o "levantamento".

O SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DA CONEXÃO

Suponhamos agora que a variedade M é equipada com uma conexão ∇. Tomemos então uma curva $\lambda(t)$ sobre M, passando pelo ponto p em t = 0. Podemos associar a essa curva $\lambda(t)$ de M uma única curva $\bar{\zeta}(t)$ em T(M) passando pelo ponto (P_0, V_0) de T(M), transportanto paralelamente V ao longo de λ. Se $V(t) = V^k(t)\frac{\partial}{\partial x^k}$ é o vetor paralelo a V_0 em p(t) ele obedece a equação

$$\frac{DV^k(t)}{Dt} = \frac{dV^k}{dt} + \Gamma^k_{\bar{m}n}\frac{dx^{\bar{m}}}{dt}V^n = 0$$

De forma que a curva $\bar{\zeta}(t)$ tem coordenadas $(x^k(t), V^k(t))$; a derivada ao longo de $\bar{\zeta}(t)$ será

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\bar{\zeta}} = \frac{dx^k}{dt}\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{dV^k}{dt}\frac{\partial}{\partial V^k}$$

de forma que

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\bar{\zeta}} = \frac{dx^{\bar{m}}}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\bar{m}}} - \Gamma^k_{\bar{m}n}V^n\frac{\partial}{\partial V^k}\right]$$

Esse processo define um novo sub-espaço de $T(T(M))_a$ denotado H_a e denominando sub-espaço horizontal que é gerado pelos m-vetores:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\bar{m}}} - \Gamma^k_{\bar{m}n}V^n\frac{\partial}{\partial V^k} \qquad \bar{m} = 1, \ldots, m$$

Assim a presença de uma conexão define em cada ponto de T(M) o sub-espaço dos vetores horizontais. Nos próximos capítulos usaremos essa ideia para definir conexões em fibrados principais.

O FIBRADO DOS REFERENCIAIS LINEARES

Seja M uma variedade suave de dimensão m e seja L(M) o conjunto dos pares ordenados (x,E) onde x e M e E = (E_1..., Em) é uma m-upla de vetores literalmente independentes tangentes M, no ponto x.

Denotaremos por $\pi : L(M) \to M$ a aplicação $\pi(x, E) = x$. O espaço L(M) tem uma estrutura diferenciavel de dimensão m(M+1). Isso pode ser visto considerando-se os comjuntos $\pi^{-1}(M_\alpha)$, onde M_α são cartas de M e as aplicações $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(M_\alpha) \to \mathbb{R}^{m(m+1)}$ que associam a $(x, E) \in \pi^{-1}(M_\alpha)$ o elemento $(x^1, \ldots, x^m, E^1_1, \ldots E^m_m)$ do $\mathbb{R}^{m(m+1)}$ onde $(x^1 \ldots x^m)$ são as coordenadas de x e os E^ν_μ são definidos por

$$E_\mu = E^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

A estrutura L(M), M, π, $GL(m\mathbb{R})$ é uma fibração principal o que pode ser verificado diretamente da definição. Essa fibração é denominada "fibrado dos referenciais lineares".

Uma secção do fibrado dos referenciais lineares de uma variedade consiste numa associação de um referencial ou base a cada ponto da variedade. A existência de secções não nulas em nenhum ponto para o fibrados dos referenciais nem sempre se verifica. O exemplo típico é $L(S^2)$ que não admite secção não nula em nenhum ponto. O do L(M) admite uma secção a variedade M é dita paralelizável; exemplos de variedades paralelizáveis são os grupos de Lie.

Se M está munida com uma métrica de sinal S, podemos definir um subfibrado dos referenciais ortonominais (relativamente

à métrica). O grupo estrutural desse subfibrado seria o subgrupo $O(\frac{m+s}{2}, \frac{m-s}{2})$ formado pelas matrizes do $GL(m,\mathbb{R})$ tais que

$$A_{\mu r} G_{rd} A_{\beta d} = G_{\mu\beta}$$

onde G é a matriz

$$\mathrm{diag}\ (\underbrace{1, 1, \ldots 1}_{\frac{m+s}{2}}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{\frac{m-s}{2}})$$

Da mesma forma que para o fibrado tangente, pode-se mostrar que a existência de uma conexão em M divide o espaço tangente a L(M) em componentes horizontais e verticais.

CAPÍTULO VI

TEORIA DOS GRUPOS DE LIE

1. INTRODUÇÃO

O conceito de grupo aparece como o instrumento matemático adequado à descrição das simetrias de um sistema físico. É o que ocorre por exemplo quando estudamos os grupos cristalográficos; tais grupos são muitas vezes grupos finitos e as únicas coisas que nos interessam são as propriedades algébricas desses objetos.

Já o conceito de variedade diferenciável gera um sistema dinamico; isto ocorre quando procuramos as curvas integrais de um dado campo vetorial sobre a variedade.

Os grupos de Lie são objetos matemáticos que combinam essas duas propriedades de uma forma consistente. Eles são grupos de um ponto de vista algébrico e variedades diferenciaveis do ponto de vista topologico. Além disso as operações do grupo, isto é, a multiplicação de dois elementos e a inversão são diferenciaveis.

Assim todos os conceitos desenvolvidos no estudo das variedades diferenciaveis podem ser aplicados aos grupos de Lie. Teremos então campos tensoriais de todos os tipos sobre um grupo de Lie, bem como os operadores como a derivada de Lie, o diferen

exterior, etc...

A combinação de ambos aspectos, algébricos e topológicos gera um objeto suficientemente rico para descrever a noção de grupo de Gauge da teoria dos campos, que é nosso objeto nesse trabalho.

As idéias desenvolvidas nesse capítulo não são, a menos da nova linguagem, novas para os físicos teóricos. Elas surgem quando estudamos os grupos "contínuos" como o grupo de Lorentz ou o grupo SU(2) da teoria de Yang-Mills. Tais grupos aparecem como grupos de transformações do espaço-tempo ou do espaço dos spins isotópicos, isto é eles aparecem "atuando" em variedades (na verdade espaços vetoriais). Falamos então em "transformações infinitesimais" em "geradores", nas "constantes de estrutura", etc.. Tais idéias utilizadas com alguma imprecisão mas com um significado físico e operacional inequívoco em física ganharão nesse capítulo um significado geométrico preciso.

Finalisamos essa introdução observando que apesar de nossa teoria ser desenvolvida abstratamente, nas aplicações utilizaremos os grupos matriciais clássicos como o SU(m), SO(m) e outros.

2. GRUPOS E SUBGRUPOS DE LIE

Um grupo G é um grupo de Lie se ele estiver munido de uma estrutura diferenciavel suave tal que as aplicações

$$\begin{aligned} \mu &: G \times G \longrightarrow G \qquad & \mu(g,h) &= gh \\ i &: G \longrightarrow G \qquad & i(g) &= g^{-1} \end{aligned} \tag{1}$$

forem suaves.

Existem, para cada g e G, duas aplicações particularmente úteis no estudo dos grupos de Lie, a translação a esquerda por g, denotada Lg e a translação a direita Rg.

$$L_g : G \to G \qquad L_g(h) = gh$$
$$R_g : G \to G \qquad R_g(h) = hg \tag{2}$$

As propriedades de grupo implicam nas seguintes propriedades para as translações:

$$L_{g_1} \circ L_{g_2} = L_{g_1 g_2}$$
$$R_{g_1} \circ R_{g_2} = R_{g_2 g_1}$$
$$L_{g_1} \circ R_{g_2} = R_{g_2} \circ L_{g_1} \tag{3}$$
$$L_e = R_e = \text{IDENTIDADE}$$

A definição de grupo de Lie, garante que as translações Lg e Rg sejam difeomorfismos, além disso temos

$$L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$$
$$R_g^{-1} = R_{g^{-1}} \tag{4}$$

As derivadas dLg e dRg das translações obedecem propriedades análogas a (3) e (4). Isso sugere uma notação simplificada extremamente útil nos cálculos e que consiste em escrever

$$dL_g(h)(X_h) = g \cdot X_h \quad e \quad dR_g(h)(X_h) = X_h \cdot g \tag{5}$$

As derivadas da multiplicação e da inversão podem ser expressas em termos das translações:

$$dm(g,h)(X_g, Y_h) = dR_h(g)(X_g) + dL_g(h)(Y_h) \tag{6}$$

$$di(g)(X_g) = -(dL_{g^{-1}} \circ dR_{g^{-1}})(g)(X_g) \tag{7}$$

A primeira relação decorre imediatamente da regra de Leibnitz (Nomizu e Kobayashi, pag. 11). A segunda pode ser verificada notando-se que a aplicação

$$g \longmapsto m(g, i(g))$$

é a aplicação constante que associa a todo g a identidade, logo sua derivada é nula, e usando (6) temos:

$$dR_{i(g)}(g)(X_g) + dL_g(i(g)) \cdot (di(g)(X_g)) = 0$$

isto é

$$dR_{g^{-1}} + dL_g \circ di_g = 0$$

o que demonstra (7).

Diremos que um subgrupo H de G é um subgrupo de Lie se ele estiver munido de uma estrutura diferenciavel relativamente a qual a restrição m_H e i_H da multiplicação e da inversão dos elementos de H sejam suaves. Isso garante que H também seja um grupo de Lie, mas não necessariamente uma subvariedade de G. Uma outra definição mais restritiva será exigir que H fosse também uma subvariedade. Entretanto ela exclui alguns subgrupos importantes denominados subgrupos a um parametro, que em geral não são subvariedades.

Um subgrupo a um parametro é uma aplicação $\alpha : \mathbb{R} \to G$ satisfazendo

$$\alpha(s+t) = \alpha(s) \cdot \alpha(t) \tag{8}$$

Note que isso implica em

$$\alpha(0) = e \tag{9}$$

$$\alpha(-t) = \alpha(t)^{-1} \tag{10}$$

A comparação de dois grupos de Lie se faz através de um homomorfismo suave, isto é, uma aplicação $\phi : G \to H$ suave e que satisfaz

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$$

Assim os subgrupos a um parametro são homomorfos ao grupo (de Lie) aditivo dos números reais.

O resultado central para a investigação dos subgrupos de um grupo de Lie foi obtido por E. Cartan e estabelece que todo subgrupo fechado (topologicamente) de um grupo de Lie é subgrupo de Lie e também uma subvariedade.

Num grupo de Lie existe um elemento previlegiado, a identidade e. Denotaremos por g ao espaço vetorial tangente a G, na identidade. Ele será chamado algebra de Lie do grupo G; a razão da terminologia ficará clara nas próximas secções.

3. EXEMPLOS

Como exemplos vamos analisar os grupos matriciais e para isso fixamos nossa notação denotando $M(m,\mathbb{R})$ e $M(m,\mathbb{C})$ aos espaços vetoriais das matrizes mxm reais e complexas, respectivamente. Tais espaços vetoriais são variedades de uma maneira natural; um sistema de coordenadas pode ser obtido fixando-se uma base. $M(m,\mathbb{R})$ tem dimensão m^2 enquanto que $M(m,\mathbb{C})$ tem dimensão $2m^2$ enquanto

variedade real ou m^2 enquanto variedade complexa.

Além disso enquanto espaços vetoriais tem seus espaços tangentes em qualquer de seus pontos coincidentes com si próprios. O mesmo ocorre com os espaços cotangentes:

$$T(M(m,\mathbb{R}))_g = T^*(M(m,\mathbb{R}))_g = M(m,\mathbb{R})$$

A aplicação

$$(g_1, g_2) \longmapsto g_1 g_2$$

pode ser definida em M(m,C) ou $M(m,\mathbb{R})$ e é uma aplicação bilinear:

$$M(m,\mathbb{K}) \times M(m,\mathbb{K}) \longrightarrow M(m,\mathbb{K}) \qquad [\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}]$$

e portanto uma aplicação C^∞. A mesma situação ocorre para as aplicações Lg e Rg, que também são aplicações lineares. Como o diferencial de uma aplicação linear coincide com si própria podemos escrever

$$dLg(h)(X) = g \cdot X$$

$$dRg(h)(X) = X \cdot g$$

independente do ponto h. Observe que o produto do lado esquerdo dessas equações é o produto matricial uma vez que identificamos um vetor tangente com uma matriz de $M(m,\mathbb{K})$.

Uma aplicação fundamental para a definição dos grupos matriciais é a função determinante.

$$\det: M(m,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

O determinante de uma matriz é uma função polinomial dos elementos da matriz e como função polinomial uma função C^{∞}.

O grupo matricial mais amplo é o $GL(m, \mathbb{R})$ formado pelas matrizes inversíveis:

$$GL(m,\mathbb{R}) = \{ g \in M(m,\mathbb{R}) \,/\, \det g \neq 0 \} = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$$

é um aberto de $M(m\,\mathbb{R})$ pois o conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ é aberto e det é contínua. Isto significa que $GL(m\,\mathbb{R})$ é uma subvariedade de $M(m\,\mathbb{R})$ cujo atlas é a restrição do atlas de $M(m\,\mathbb{R})$ em $GL(m\,\mathbb{R})$.

A diferenciabilidade do produto matricial é garantida uma vez que esse produto é C^{∞} em $M(m\,\mathbb{R})$ e portanto também o será em toda subvariedade de $M(m\,\mathbb{R})$. A aplicação $g \to g^{-1}$ também é classe C^{∞} pois

$$(g^{-1})_{ij} = \frac{C(g)_{ij}}{\det g}$$

onde $C(g)_{ij}$ é a matriz dos cofatores de g. Tanto $C(g)_{ij}$ como de det g são funções polinomiais, logo C^{∞} e seu quociente também será C^{∞} pois $\det g \neq 0$.

Com isso mostramos que $GL(m\,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

Além disso como $GL(m\,\mathbb{R})$ é um aberto de $M(m\,\mathbb{R})$ então

$$T(GL(m,\mathbb{R}))_g = M(m,\mathbb{R})$$

Como segundo exemplo tomemos o grupo especial linear SL(m, $\mathbb{R}$):

$$SL(m,\mathbb{R}) = \det^{-1}\{1\}$$

Esse grupo é um subgrupo fechado de GL(m, $\mathbb{R}$) e pelo teorema de Cartan é um subgrupo de Lie. A razão é que det é contínua e $\{1\}$ é fechado em R.

Vamos agora determinar que tipo de matrizes formam o espaço tangente ao SL(m $\mathbb{R}$) na origem.

Para isso consideremos uma curva g: $(-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow SL(m,\mathbb{R})$ tal que g(0) = e. Para essa curva teremos

$$\det g(t) = 1 \qquad \forall t$$

logo

$$\frac{d}{dt} \det g(t) = 0$$

isso significa que

$$\frac{\partial}{\partial g_{ik}} \det g \cdot \frac{d}{dt} g_{ik}(t) = 0$$

em particular, isso se verifica para t = 0; mas para t = 0 temos

$$\frac{\partial}{\partial g_{ik}} \det g \Big|_{t=0} = \delta_{ik}$$

logo concluimos que

$$\frac{d}{dt} g_{kk}(t) \Big|_{t=0} = 0$$

Assim o espaço tangente $T(SL(m\ \ ))_e$ é constituido pelas

matrizes de traço nulo. Isso significa que a dimensão de $SL(M\,\mathbb{R})$ é m^2-1 emquanto que a dimensão de $SL(m\,\mathbb{C})$ é $2m^2-1$, considerado como variedade real.

Outro grupo de importancia é o grupo ortogonal $O(m)$

$$O(m) = \{ g \in GL(\mathbb{R}, m) \;/\; g^t = g^{-1} \}$$

Mostraremos que ele é um grupo de Lie, via teorema de Cartan, mostrando que é um fechado. Para isso basta considerar a aplicação

$$I : GL(\mathbb{R}, m) \longrightarrow GL(\mathbb{R}, m) \qquad \text{tal que}$$

$$I(g) = g^t \cdot g \qquad \text{então temos}$$

$$O(m) = I^{-1}\{e\}$$

e como $\{e\}$ é fechado em $GL(m\,\mathbb{R})$ segue que $O(m)$ é subgrupo fechado.

Da mesma forma podemos considerar uma curva $g(t)$ com t $(-\epsilon, \epsilon)$ e $g(0) = e$. Ele deve satisfazer

$$g^t(t)\, g(t) = e$$

$$\left(\frac{dg}{dt}\right)^t_{t=0} g(0) + g(0)^t \left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

o que nos mostra que $T(O(m))_e$ é constituido apenas pelas matrizes antissimétricas.

O grupo $O(m)$ não é conexo pois seus elementos satisfazem $\det g = \pm 1$. A componente conexa do $O(m)$ é denotado $SO(m)$

$$SO(m) = O(m) \cap SL(m\,\mathbb{R})$$

O grupo unitário U(m) e o grupo unitário especial SU(m) são os análogos complexos aos grupos O(m) e SO(m). A demonstração de que eles são grupos de Lie é completamente análoga. A seguir tabelamos os resultados.

G	$T(G)_e$	dim G (real)	Conexão
$GL(m\,\mathbb{C})$	$M(m\,\mathbb{C})$	$2m^2$	não
$GL(m\,\mathbb{R})$	$M(m\,\mathbb{R})$	m^2	não
$SL(m\,\mathbb{C})$	traço nulo	$2m^2-2$	sim
$SL(m\,\mathbb{R})$	traço nulo	m^2-1	sim
U(m)	anti-hermitianas	m^2	sim
O(m)	anti-simétricas	m(m-1)/2	não
SU(m)	anti-hermitianas com traço nulo	m^2-1	sim
SO(m)	anti-simétricas	m(m-1)/2	sim

Grupo de spin Sp

Grupo de Lorentz

4. A APLICAÇÃO EXPONENCIAL

Seja $\xi \in T(G)_e = \mathfrak{g}$. Existem muitas curvas em G que passam por e, e tais que sua derivada na identidade reproduz o vetor ξ. Entretanto existe um único subgrupo a um parametro $\alpha : \mathbb{R} \to G$, tal que $\alpha(0) = e$ e $\dot{\alpha}(0) = \xi$. (Para demonstração veja Greud, Halperin, Vanstone, Vol. II, pag. 32). A existência e unicidade é garantida localmente pelo teorema de Picard (Auslander e Mackenzie, pag. 78),

enquanto que o caracter global decorre da estrutura de Lie.

Denotaremos então, por $\alpha_\xi(t)$ a esse único subgrupo a 1 parametro gerado por $\xi \in \mathfrak{g}$. Definimos agora a aplicação exp: $\mathfrak{g} \to G$ colocando

$$\exp \xi = \alpha_\xi(1)$$

Vamos mostrar agora, que

$$\exp t\xi = \alpha_\xi(t)$$

De fato provemos que

$$\alpha_\xi(ts) = \alpha_{t\xi}(s)$$

Como ambos são subgrupos a um parametro, e como

$$\frac{d}{ds}\alpha_\xi(ts)\Big|_{s=0} = t\frac{d}{dst}\alpha_\xi(ts)\Big|_{ts=0} = t\xi = \frac{d}{ds}\alpha_{t\xi}(s)\Big|_{s=0}$$

então segue a igualdade. Fazendo s = 1 obtemos o resultado desejado.

A razão da utilização do símbolo exp é que para grupos matriciais, essa aplicação coincide com a exponenciação usual de matrizes. Note-se ainda que a propriedade exp(A+B) = expA · expB, não se verifica em geral.

5. CAMPOS VETORIAIS EM GRUPOS DE LIE

O conjunto $\mathcal{X}(G)$, de todos os campos vetoriais definidos em G, tem uma estrutura de espaço vetorial real de dimensão infinita. Entretanto o fato novável é que para grupos de Lie, $\mathcal{X}(G)$

possui um subespaço vetorial n-dimensional formado por campos de invariança definida, que é isomorfo ao espaço tangente $\mathfrak{g}$.

Diremos então que um campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ é invariante a esquerda (analogamente a direita) se

$$L_{g*} X = X \qquad \forall g \in G$$

Denotaremos por $\mathfrak{X}^L(G)$ e $\mathfrak{X}^R(G)$ ao conjunto formado pelos campos invariantes a esquerda e a direita, respectivamente.

$\mathfrak{X}^L(G)$ e $\mathfrak{X}^R(G)$ são subespaços vetoriais, isto porém a soma e a multiplicação por número real de campos invariantes ainda é um campo invariante. Além disso podemos associar a cada $\xi^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ o elemento $\xi = \xi^L(e) \in \mathfrak{g}$. Reciprocamente se $\xi \in \mathfrak{g}$ podemos construir o elemento $\xi^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ colocando

$$\xi^L(g) = g.\xi \quad \text{(analogamente} \quad \xi^R(g) = \xi.g)$$

Isto significa que tanto $\mathfrak{X}^L(G)$ como $\mathfrak{X}^R(G)$ são isomorfos a $\mathfrak{g}$. Assim podemos sempre raciocinar com esses campos, como sendo vetores de $\mathfrak{g}$.

Os campos invariantes a esquerda ou a direita são completos. Isto significa que para cada campo ξ^L ou ξ^R existe, para cada g e G, um subgrupo a um parametro $\phi_t^{\xi^L}(g)$ que gera o campo ξ^L (ou ξ^R); tal subgrupo tem a forma

$$\phi_t^{\xi^L}(g) = g.\exp t\xi = R_{\exp t\xi}(g)$$

$$\phi_t^{\xi^R}(g) = \exp t\xi . g = L_{\exp t\xi}(g)$$

Além da estrutura de espaço vetorial de $\mathfrak{X}(G)$, existe

também uma estrutura algébrica definida pelo colchete de Lie. Vamos mostrar que $\mathcal{X}^L(G)$ e $\mathcal{X}^R(G)$ são subalgebras de $\mathcal{X}(G)$. Temos então que mostrar que

$$L_{g*}[\xi^L, \eta^L] = [\xi^L, \eta^L] \quad e \quad R_{g*}[\xi^R, \eta^R] = [\xi^R, \eta^R]$$

De fato, por definição

$$[\xi^L, \eta^L] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[\eta^L - R_{\exp t\xi *}\eta^L\right]$$

então

$$L_{g*}[\xi^L, \eta^L] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[L_{g*}\eta^L - L_{g*}(R_{\exp t\xi *}\eta^L)\right]$$

Como η^L é invariante a esquerda e L e R comutam, obtemos o resultado. (A demonstração para os campos invariantes a direita é completamente análoga).

Outro resultado expressivo é que campos invariantes a esquerda e a direita comutam:

$$[\xi^L, \eta^R] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[\eta^R - R_{\exp t\xi *}\eta^R\right] = 0$$

uma vez que η^R é invariante a direita.

Como $\mathfrak{g}$ é isomorfo a $\mathcal{X}^L(G)$ e $\mathcal{X}^R(G)$ e como $\mathcal{X}^L(G)$ e $\mathcal{X}^R(G)$ são algebras de Lie, podemos definir duas estruturas de algebra de Lie em $\mathfrak{g}$, colocando:

$$[\xi, \eta]^L \equiv [\xi^L, \eta^L](e)$$

$$[\xi, \eta]^R \equiv [\xi^R, \eta^R](e)$$

A relação entre essas duas algebras é dada por

$$[\xi,\eta]^L = -[\xi,\eta]^R$$

De fato

$$[\xi^L,\eta^L] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\eta^L - R_{\exp t\xi *}\eta^L\right]$$

mas $\eta^L = -i_*\eta^R$, então

$$[\xi^L,\eta^L] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[-i_*\eta^R + R_{\exp t\xi *}\, i_*\eta^R\right]$$

mas

$$R_g \circ i = i \circ L_{g^{-1}}$$

Então

$$[\xi^L,\eta^L] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[-i_*\eta^R + i_*\, L_{\exp -t\xi *}\eta^R\right]$$

Fazendo $t \to -t$ vem

$$[\xi^L,\eta^L] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[i_*\eta^R - i_*\, L_{\exp t\xi *}\eta^R\right] = i_*\left[\xi^R,\eta^R\right]$$

Assim se $[\xi^R,\eta^R] = \Delta^R$, então

$$[\xi^L,\eta^L] = i_*\Delta^R = -\Delta^L$$

o que demonstra a afirmação.

A REPRESENTAÇÃO ADJUNTA

Além das translações, existe outro difeomorfismo importante nos grupos de Lie, que é a conjugação $Cg(h) = g.h.g^{-1}$. Sua derivada, $dCg(h)$, leva $T(G)_h$ em $T(G)_{ghg^{-1}}$. Em particular $dCg(e)$: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Denotaremos $dCg(e)$ por $\mathrm{ad}g$: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que será denominada aplicação adjunta de g.

A aplicação adjunta tem as propriedades

(i) $\mathrm{ad}_{g_1 g_2} = \mathrm{ad}_{g_1}.\mathrm{ad}_{g_2}$

(ii) $\mathrm{ad}_{g^{-1}} = (\mathrm{ad}_g)^{-1}$

(iii) $\mathrm{ad}_g.\ [\xi,\eta] = [\mathrm{ad}_g\ ,\ \mathrm{ad}_g\eta]$

(iv) $g \exp t\ g^{-1} = \exp t\ \mathrm{ad}_g$

que podem ser verificadas, diretamente da definição. Isso significa que a associação $g \to \mathrm{ad}_g$ fornece uma representação de G, por operadores lineares que atuam em g, isto é uma representação por matrizes quadradas n x n.

Consideremos agora a derivada da aplicação adjunta

(Essa passagem decorre do fato de (g) ser um espaço vetorial). Em particular

A ATUAÇÃO DE GRUPOS DE LIE EM VARIEDADES

Diremos que um grupo de Lie G atua como um grupo de transformações, a direita, numa variedade P, se existe uma aplicação diferenciavel $R: G \times P \to P$ com as seguintes propriedades

(i) $R(e,p) = P \quad \forall p \in P$; e = identidade

(ii) $R(g_1 g_2, p) = R(g_1, R(g_2, P)) \quad \forall p \in P,\ g_1, g_2 \in G$

Notação: $R(g,p) = gp$.

A desvantagem dessa notação é que quando omitimos a referencia a aplicação R não fica manifesta a possibilidade de termos várias atuações distintas de um grupo numa variedade. Por outro lado ela é extremamente adequada nos cálculos.

Diremos que a atuação é efetiva se

$$R(g,p) = P \quad \forall p \in P \Rightarrow g = e$$

O significado dessa propriedade pode ser elucidado observando-se que a atuação de G em P implica na associação de uma aplicação $R_g: P \to P$ para cada elemento de G; a aplicação R_g é dada por

$$R_g(P) = R(g,P) = gP$$

Essa aplicação é diferenciavel e inversível com inversa R_g^{-1} de forma que sua inversa é diferenciavel. Isso significa que R_g é um difeomorfismo de P em P. O conjunto de difeomorfismos (P) de todos os difeomorfismos de P em P constitui um grupo relativamente a operação de duas aplicações.

A propriedade (i) garante que à identidade de G esteja associada a identidade de diff(P). A propriedade (ii) garante que

$g \to R_g$ seja um homomorfismo. Assim essa relação define uma "representação" de G por transformações de P em P.

A atuação efetiva significa que o único elemento de G que é levado na identidade de diff (P) é a identidade de G.

Diremos que a atuação é livre ou sem pontos fixos se

$$R(g,P) = P \quad \text{para algum} \quad p \in P \Rightarrow g = e$$

Isto significa que nenhuma das transformações R_g tem ponto fixo ($g \neq e$, evidentemente).

É importante notarmos também que a atuação define uma aplicação de G em P para cada ponto de p, isto é $p \mapsto R^p$ onde R^p: $G \to P$ / $R^p(g) = R(g,P) = gP$. A imagem dessa aplicação em P é denominada órbita de G no ponto P e é uma subvariedade de P.

Como R^p é diferenciavel, podemos transportar um vetor de $T(G)_g$ para $T(G)_{gP}$, usando o diferencial dR^p.

Seja agora $\xi \in \mathfrak{g}$, isto é ξ^L é um campo invariante a esquerda sobre G. Denominaremos campo fundamental ξ^* definido em P, associado a ξ, ao campo vetorial

$$\xi^*(P) = dR^p(e)(\xi)$$

Consideremos agora o elemento $\mathrm{ad}\, g^{-1}(\xi)$ de $\mathfrak{g}$. Esse campo invariante a esquerda tem o valor em e

$$[\mathrm{ad}\, g^{-1}(\xi)]^L(e) = dC_{g^{-1}}(e)(\xi)$$

onde C_g: $G \to G$ $\quad C_g(h) = ghg^{-1}$.

O campo fundamental a ele associado será

$$[\mathrm{ad}\, g^{-1}(\xi)]^{*} = dR^{p}(e)\,[d(g^{-1})(e)(\xi)] = d(R^{p}\circ(g^{-1}))(e)(\xi)$$

Por outro lado consideremos o campo $dR_g\xi^{*}$, seu valor em p é

$$\begin{aligned}(dR_g\xi^{*})(p) &= dR_g(g^{-1}p)\,(\xi^{*}(g^{-1}p)) \\ &= dR_g(g^{-1}p)\,(dR^{g^{-1}p}(\xi)) \\ &= d(R_g\circ R^{g^{-1}p})(e)\,(\xi)\end{aligned}$$

e como

$$R_g\circ R^{g^{-1}p} = R^{p}\circ I_{g^{-1}}$$

segue-se que

$$[\mathrm{ad}\, g^{-1}(\xi)]^{*} = dR_g\,\xi^{*}$$

como acabamos de demonstrar

Vamos mostrar agora que se ξ $\mathfrak{g}$ é não nulo, e se G atua livremente, então ξ^{*} não se anula em nenhum ponto. Para isso observemos que, podemos definir, alternativamente, ξ^{*} através de

$$\begin{aligned}\xi^{*}(p) &= \frac{d}{dt}\left(p\exp t\xi\right)_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\,R(p,\exp t\xi)\Big|_{t=0}\end{aligned}$$

Para que a derivada se anule teremos que ter

$$R(p,\exp t\xi) = p \quad \forall t$$

o que é incompatível com a atuação livre.

Com isso mostramos na verdade que $dR^p(e)$ é uma aplicação injetora.

Isto significa que a imagem que ela faz de $T(G)_e$ tem a dimensão de G. Chamaremos então V_p ao espaço vetorial de dimensão m, a mesma que G, constituido por todos os campos fundamentais nesse ponto. Cada um dos V_p é isomorfo a algebra de Lie G.

Podemos conseguir uma base para cada um desses espaços transportando a base da algebra de Lie para eles. Pode-se mostrar ainda que o colchete de Lie é preservado nessa operação.

A EQUAÇÃO ESTRUTURAL DE MAURER-CARTAN

As formas invariantes a esquerda definidas num grupo de Lie tem a propriedade de quando calculadas em campos também invariantes a esquerda reproduzirem funções constantes em G. Consideremos então uma p-forma ω invariante a esquerda e p-campos $X_1, \ldots, X_p$ também invariantes ; podemos escrever

$$(L_x^* \omega)(g)(X_1 \ldots X_p) = \omega(xg)(dL_x(X_1) \ldots dL_x(X_p))$$
$$= \omega(xg)(X_1 \ldots X_p)$$

Fazendo $g = e$ e usando a invariança de ω temos:

$$\omega(x)((X_1)_x, \ldots (X_p)_x) = \omega(e)(X_{1e}, \ldots, X_{pe})$$

o que mostra a invariança.

As 1-formas invariantes são denominadas formas de Maurer-Cartan e para elas podemos escrever as equações de Maurer-Cartan. Antes porém, vamos obter um resultado válido em geral para quaisquer formas.

Seja ω uma 1-forma definida sobre M e X, Y campos vetoriais; o diferencial exterior de ω satisfaz a:

$$d\omega(X,Y) = \frac{1}{2}\{X(\omega(Y)) - Y\omega(X) - \omega([X,Y])\}$$

Para demonstrar essa relação tomamos uma base e sua base dual, de forma que possamos escrever

$$X = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad Y = Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \omega = \omega_k dx^k$$

O diferencial de ω é $d\omega = \omega_{k,m}\, dx^m \wedge dx^k$, de forma que calculado em (X,Y) dá

$$d\omega(X,Y) = \frac{1}{2}\, \omega_{k,m}\, (X^m Y^k - X^k Y^m)$$

Por outro lado temos,

$$X(\omega(Y)) = X^k \omega_{m,k} Y^m + X^k \omega_m Y^m_{,k}$$

Além disso

$$[X,Y]f = (X^k Y^m_{,k} - Y^k X^m_{,k}) \frac{\partial f}{\partial x^m}$$

logo

$$\omega[X,Y] = \omega_m (X^k Y^m_{,k} - Y^k X^m_{,k})$$

Juntando esses resultados temos:

$$X(\omega(Y)) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]) = (X^m Y^k - X^k Y^m)\, \omega_{k,m}$$

o que demonstra nossa afirmativa.

Sejam agora $\mathcal{B}_n$ uma base para a álgebra de Lie de G e sejam ω_m uma base para as 1-formas Maurer-Cartan satisfazendo $\omega_m(X^k) = \delta^k_m$ (isso é possível pois $\omega(X)$ é constante em G). Usando a expressão para o diferencial de uma 1-forma obtemos as equações estruturais de Maurier-Cartan:

$$d\omega^k(X_m, X_n) = -\frac{1}{2}\, c^k_{mn}\, \omega^m \wedge \omega^n$$

Finalmente vamos considerar formas que assumem valo - res na álgebra de Lie, $\mathcal{G}$. Elas podem ser escritas como

$$\omega = \omega^k \, \xi_k$$

onde ξ_k é base de $\mathcal{G}$ e ω^k são formas reais. A equação de Maurer -Cartan pode então ser enunciada

$$d\omega\,(X,Y) = -\frac{1}{2}\,\omega([X,Y])$$

Dentre todas as formas de Maurer-Cartan, existe uma priviliegiada denominada forma canônica e denotada . É aquela tal que

$$\Theta(\xi) = \xi \qquad \forall\, \xi \in \mathcal{G} \,.$$

Essa forma será fundamental para teorias das conexões em espaços fibrados.

CAPÍTULO VII

UMA PAUSA: O DICIONÁRIO DE YANG E WU

Neste capítulo, vamos rever alguns aspectos da eletrodinamica, que indicam a adequação da matemática dos espaços fibrados. Seguiremos de perto as idéias de Yang e Wu; discutiremos inicialmente a eletrodinamica clássica, para depois introduzir os efeitos quanticos.

O ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO

Historicamente, o eletromagnetismo clássico juntamente com a mecanica Newtoniana, constituem o primeiro, e o mais simples exemplo de uma teoria de Gauge. As leis da eletrodinamica clássica (EC), são descritas por dois sistemas acoplados de equações diferenciais; o primeiro deles é constituido pelas equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \tag{1A}$$

$$\nabla \times \mathbb{E} + \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = 0 \tag{1B}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = 4\pi \rho \tag{1C}$$

$$\nabla \times \mathbb{B} - \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} = 4\pi \mathbb{J} \tag{1D}$$

onde a densidade de cargas $\rho(\mathbf{r}) = \sum e_k \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k)$ e a densidade de correntes $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_k \dot{\mathbf{r}}_k \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k)$ são as "fontes" dos campos. Estamos tomando $c=1$ e e_k, $k=1,\ldots,N$ são as cargas das partículas, supostas pontuais.

O segundo sistema de equações são as equações de Newton--Lorentz (NL):

$$\frac{d}{dt}\left(m_k \dot{\mathbf{r}}_k\right) = e_k \left(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}}_k \times \mathbf{B}\right) \tag{2}$$

que definem a dinamica das partículas.

A propriedade que nos interessa discutir aqui, é o caráter local dessa teoria. A fim de simplificar nossa discussão vamos "desacoplar" as equações (1) e (2), considerando o movimento de uma pequena carga de prova sob a ação de campos gerados por fontes externas, cuja dinamica não se modifica devido a presença de carga de prova.

O conceito de localidade significa que o movimento da partícula de prova nas vizinhanças de um ponto do espaço e num intervalo dado de tempo, depende unicamente do valor das grandezas nessa vizinhança e nesse intervalo de tempo. Em outras palavras, o movimento de uma partícula numa região espaço-temporal não depende do valor dos campos elétrico e magnético em regiões longíquas e, ou em tempos passados ou futuros. O cálculo, dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sintetiza localmente, a ação global das cargas.

Outro aspecto da teoria é sua estrutura de "Gauge", que foi percebida a partir da observação de que as equações (1A) e (1B) admitem como solução geral (numa região simplesmente conexa, como veremos!) os campos:

$$\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A} \tag{3A}$$

$$\mathbb{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} \tag{3B}$$

onde ϕ e $\mathbb{A}$ são campos contínuos, denominados campos de Gauge. A introdução dos campos de Gauge, foi primeiramente realizada, como um artifício matemático capaz de simplificar (pelo menos do ponto de vista formal) as equações de Maxwell. De fato, substituindo 3A e 3B em 1C e 1D obteremos as "equações de Maxwell" para $\mathbb{A}$ e Φ:

$$-\nabla^2 \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbb{A} = 4\pi \rho \tag{4A}$$

$$-\nabla^2 \mathbb{A} + \frac{\partial^2 \mathbb{A}}{\partial t^2} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbb{A} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 4\pi \mathbb{J} \tag{4B}$$

Entretanto não podemos dizer que a descrição do eletromagnetismo em termos de $\mathbb{A}$ e Φ é equivalente a descrição em termos de $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$. Isto porque, dado um sistema de cargas e correntes a determinação de $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$ é univoca, o mesmo não ocorrendo com $\mathbb{A}$ e ϕ. De fato se consideramos novos campos de Gauge $\tilde{\mathbb{A}}$ e $\tilde{\phi}$ obtidos de $\mathbb{A}$ e ϕ através das relações:

$$\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A} + \nabla \alpha \tag{5A}$$

$$\tilde{\phi} = \Phi - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tag{5B}$$

Ainda teremos os mesmos valores $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$, por mais complicada que seja o campo escalar α.

Isso significa que podemos dividir o espaço de todos os campos de Gauge possíveis, em classes, onde cada classe é constituida por todos os campos de Gauge que geram os mesmos campos

elétrico e magnético. Essa invariança de Gauge evidentemente, não se manifesta experimentalmente, uma vez que $\mathbb{A}$ e Φ não comparecem explicitamente nas equações (1) e (2).

O ELETROMAGNETISMO QUANTICO

Suponhamos agora que as fontes dos campos são clássicas, mas que no movimento da partícula de prova, os efeitos quanticos são significativos. Podemos então manter as equações (1), na versão clássica e substituir as equações (NL) pela versão quantizada. Isso se faz a partir de uma formulação Hamiltoniana das equações de movimento, adendadas às regras de quantização de Heisenberg.

Escrevemos então uma lagrangiana que reproduza (2):

$$\mathcal{L} = \frac{m\mathbb{V}^2}{2} - e\Phi + e\,(\mathbb{V}.\mathbb{A}) \tag{6}$$

O fato fundamental é o aparecimento dos campos de Gauge na lagrangiana. Assim os campos de Gauge, apesar de não observáveis, surgem como uma necessidade conceitual à formulação variacional e portanto indispensáveis a interpretação mecânico-quantica do eletromagnetismo. Note-se que a lagrangiana (5) não é Gauge invariante, apesar das equações de movimento o serem. De fato, realizando uma transformação de Gauge, teremos:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + e\,\frac{\partial \alpha}{\partial t} + e\,\mathbb{V}.\nabla\alpha \tag{7}$$

Prosseguindo, calculamos o momento conjungado, para encontrar:

$$p = m\mathbb{V} + e\mathbb{A} \tag{8}$$

e a hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\mathbb{P} - e\mathbb{A})^2 + e\Phi \tag{9}$$

Da mesma forma que $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$ não é Gauge invariante.

Estamos em condições agora de escrever as equações, introduzindo os operadores $\mathbb{P}$ e $\mathbb{r}$. Trabalhando na representação espacial teremos:

$$\left[\frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla - e\mathbb{A})^2 + e\Phi\right]\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi \tag{10}$$

Esse resultado, merece algumas indagações. Primeiro para se simplificar, tomemos um Gauge, no qual Φ se anula (isso é sempre possível). Nesse Gauge a equação de movimento de uma partícula num campo é obtida substituindo-se na equação de uma partícula livre, as derivadas espaciais por $\nabla - \frac{ie}{\hbar}\mathbb{A}$. Essa substituição gera a lembrança do procedimento análogo efetuado na Teoria Geral da Relatividade (TGR), onde as derivadas usuais são adendadas de conexões, necessárias a fim de corrigirmos as operações realizadas sobre variedades Rimanianas. As derivadas covariantes aparecem na TGR como consequencia da curvatura do espaço-tempo. Evidentemente, o mesmo não ocorre aqui, pois a estrutura do espaço-tempo é Euclidiana. Então, o que se curva? Ou alguma coisa se curva?

Outra observação é que, em princípio, (10) não é Gauge invariante, para que (10) permanece invariante devemos realizar transformações locais, na fase da função de onda, tomando:

$$\bar{\Psi} = \left(\exp -\frac{ie\alpha}{\hbar}\right)\Psi \tag{11}$$

Com isso mantemos a invariança. Podemos colocar o

problema de outra forma, tomando (11) como princípio (isto é, assumindo que a função de onda deve ser invariante a transformações locais de fase) e obtendo como necessidade a introdução do campo compensador de Gauge.

A EXPERIÊNCIA DE BOHM-AHORONOV

Estamos agora prontos para discutir o papel diferente que cumprem os campos de Gauge na teoria clássica e na teoria quantica, observado pela primeira vez por Bohm e Ahoronov e verificado experimentalmente por Chambers.

Eles consideraram uma região cilindrica do espaço, de raio R, onde existe um campo magnético constante B, gerando um fluxo, $\Omega = \pi R^2 B$. Sobre essa região incide um feixe eletronico que é espalhado e detectado por um anteparo (Figura VII.1)

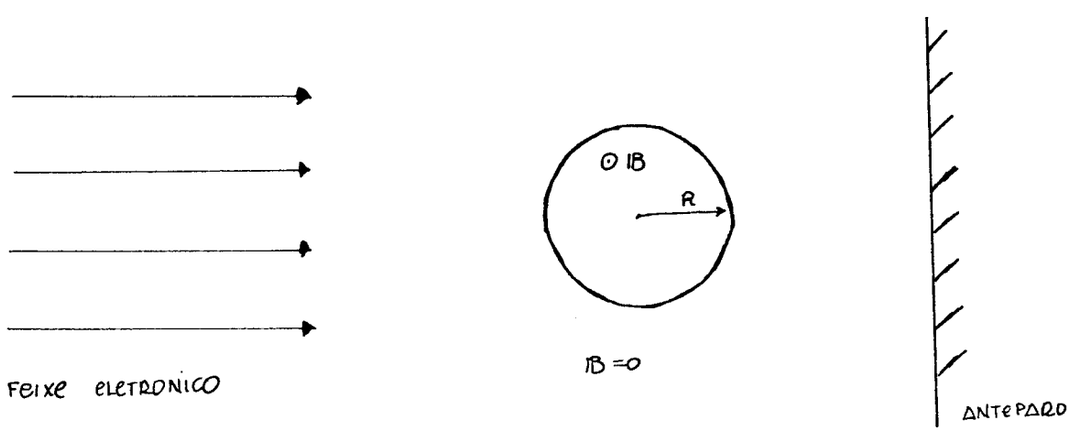


FIGURA VII.1

Nessa experiência, não desejamos que os elétrons "entrem" na região onde o campo magnético é não nulo. Temos duas alterna-

vas: recobrir a região cilindrica de material que impessa a penetração dos elétrons, ou teoricamente, fazer R tender a zero, aumentando a intensidade do campo magnético de forma que o fluxo , permaneça constante. Quais seriam as previsões clássica e quantica dessa experiência?

Classicamente, nenhum efeito eletromagnético é detectado fora da região cilindrica, uma vez que nessa região os campos se anulam de forma que a força de Lorentz também se anula.

Quanticamente, as coisas são diferentes pois o elétron quantico se espraia probabilisticamente por todo espaço. Dessa forma ele sente as propriedades topológicas do espaço, que nesse caso é a perda de conectividade simples (por menor que seja o valor de R), gerada pela abstração da região cilindrica. O cálculo de Bohm e Ahronov mostra que o efeito observável depende da grandeza

$$\Phi = \exp \frac{ie}{\hbar c} \Omega \qquad (12)$$

Posto isso parece que teremos de abandonar a esperança de construirmos uma eletrodinamica local. Mesmo que a nuvem eletronica seja impedida de entrar numa região, ela "percebe" a presença de campo magnético, ou se quisermos a deformação topológica gerada pela abstração da dada região.

Existe porém uma outra forma de enfoque que preserva a "localidade", mas isso a custa da introdução (com um relevo ainda maior) dos campos de Gauge. Essa idéia se realiza notando-se que fora do cilindro os campos magnético e elétrico são nulos, mas, os campos de Gauge necessariamente não o serão; o teorema de Stokes nos mostra que a integral de linha do potencial vetor em torno do

cilindro deve ser igual ao fluxo magnético. Como exemplo podemos propor a seguinte forma para o potencial vetor:

$$\mathbb{A} = \frac{\Omega}{2\pi r}\hat{\phi} \qquad \Omega = \oint \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} \tag{13}$$

Essa experiencia levou Yang e Wu a reflexão de qual seria, a "entidade" adequada a descrição do eletromagnetismo numa região. A experiencia de Bohm-Ahronoy mostra que $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$ não contêm localmente toda a informação necessária. Por outro lado $\mathbb{A}$ contêm informações não mensuráveis. Yang e Wu propõe como grandeza fundamental um "fator de fase não integravel", isto é um funcional que associa a cada trajetória do espaço tempo, uma fase dada por:

$$\Phi(\Gamma) = \exp \frac{ie}{\hbar c}\int_{\Gamma} A_\mu \, dx^\mu \tag{14}$$

outra grandeza possível seria, não o fator de fase (14), mas a fase:

$$\frac{ie}{\hbar c}\int_{\Gamma} A_\mu dx^\mu \tag{15}$$

A idéia inicial é trabalhar com fatores de fase em torno de curvas fechadas, mas o formalismo é simplificado tomando-se curvas quaisquer que se iniciam num ponto P indo até Q:

$$\Phi_{QP} = \exp \frac{ie}{\hbar c}\int_{P}^{Q} A_\mu dx^\mu \tag{16}$$

A razão de abandonarmos (15), que também é Gauge invariante, se Γ é fechada, é a seguinte: imaginemos que se realiza a experiencia de Bohm Ahronov primeiro com um campo que gere um fluxo Ω e depois com um fluxo dado por $\bar{\Omega} = \Omega + \frac{2\pi n \hbar c}{e}$ $n = 0, \pm 1, \ldots$ etc.

Teremos então as funções de onda Ψ e $\bar{\Psi}$ e os campos de Gauge $\mathbb{A}$ e $\bar{\mathbb{A}}$. Iremos mostrar que $(\Psi, \mathbb{A})$ e $(\bar{\Psi}, \bar{\mathbb{A}})$ podem ser ligados por uma transformação univoca e contínua de Gauge.

De fato, devemos encontrar uma função univoca e contínua g, tal que:

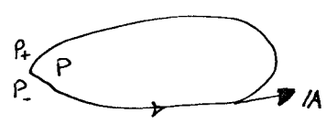
$$\bar{\Psi} = g\,\Psi \tag{17A}$$

$$\bar{\mathbb{A}} = \mathbb{A} + i e^{-1} \hbar\, \nabla g\, g^{-1} \tag{17B}$$

$$g = \exp - \frac{i e \alpha}{\hbar} \tag{17C}$$

A existencia da função g é garantida pela (17B), uma vez que $\bar{\mathbb{A}}$ e $\mathbb{A}$ são campos irrotacionais, na região. O problema surge porque em geral g, dado pela (17B) não é uma função univoca. De fato integranto (17B) em torno de uma curva fechada teremos:

$$\oint \bar{\mathbb{A}} \cdot d\mathbb{r} - \oint \mathbb{A} \cdot d\mathbb{r} = \alpha(P_+) - \alpha(P_-) \tag{18}$$



o lado esquerdo de (18) tem em geral, um valor qualquer, mas em nosso caso ele vale:

$$\bar{\Omega} - \Omega = \frac{2\pi n \hbar c}{e} \tag{19}$$

Logo α é plurivoca, e seu valor na segunda folha de Riemann é:

$$\alpha(P_+) = \alpha(P_-) + \frac{2\pi n \hbar c}{e} \tag{20}$$

Interessante é notar que, mesmo assim, g é unívoca, pois

$$g(P_+) - g(P_-) = \exp -\frac{i\,\alpha(P_+)}{\hbar} - \exp -\frac{ie\,\alpha(P_-)}{\hbar} \tag{21}$$

$$= \exp -\frac{i\,\alpha(P_-)}{\hbar}\left[\exp -2\pi n i - 1\right]$$

$$= 0$$

Logo as duas situações são Gauge transformaveis e portanto as duas experiencias darão mesmos resultados. Em termos de fatores de fase (sobre curvas fechadas), observemos que: as fases são diferentes nas duas situações, o mesmo não ocorrendo com os fatores de fase. Então a fase ainda contem muita informação; a informação necessária e suficiente está nos fatores de fase.

Sintetizando as idéias discutidas até agora, podemos dizer que:

(1) Os campos de Gauge são necessários para uma formulação Newtoniana de ED.

(2) Os campos de Gauge são necessários para uma formulação Hamiltoniana clássica.

(3) A MQ, é formulada a partir de um formalismo hamiltoniano clássico.

(4) Numa região multiplamente conexa onde $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$ são nulos, ainda temos efeitos eletromagnéticos.

(5) Se queremos uma teoria local devemos trabalhar com os campos de Gauge.

(6) $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$ não contêm toda informação local necessária. A_μ e $ie/\hbar c \int A_\mu dx^\mu$ tem informação excedente. O justo, é o fator de fase (14), que é Gauge invariante.

(7) Trabalharemos com o fator de fase (16), por simplicidade, que se transforma da seguinte forma, quando submetido à uma transformação de Gauge:

$$\tilde{\Phi}_{OP} = g^{-1}(O)\, \Phi_{OP}\, g(P) \tag{22}$$

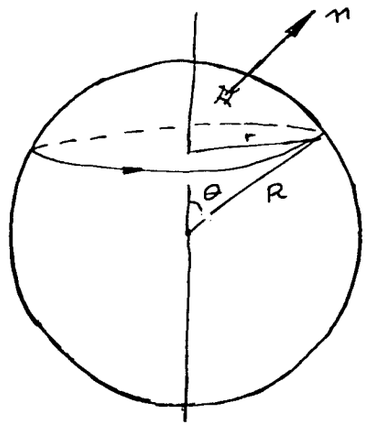
MONOPOLOS MAGNÉTICOS

Agora veremos de nossos fatores de fase ainda são úteis, em situações complexas. Como por exemplo na presença de um monopolo magnético de intensidade e_M, imóvel na origem. Nosso primeiro passo, é calcular o campo magnético desse sistema. A situação é análoga ao caso eletrostatico:

$$\mathbb{B} = \frac{e_m \hat{\mathbb{r}}}{r^2} \tag{23}$$

Agora devemos calcular o potencial vetor. Imaginemos então a região do espaço, denotada M, constituida de todo o espaço com excessão da origem, onde se encontra o monopolo. Em M, $\nabla_0 \mathbb{B} = 0$, de forma que podemos encontrar um $\mathbb{A}$ tal que $\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$, certo? Errado. Pode-se mostrar, pelo teorema de Poinicaré, que $\nabla_0 \mathbb{B} = 0$ implica na existencia de $\mathbb{A}$, somente quando a região é topologicamente bem comportada (Região Estrelada). Em nosso caso, a não existencia de $\mathbb{A}$ pode ser demonstrada, aplicando-se o Teorema de Stokes, na situação descrita na Figura.

Fig. 21A outra página



$r = R\cos\theta$

Deve-se verificar a identidade

$$\oint \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_S \mathbb{B}\cdot\mathbb{n}\, dS \tag{24}$$

O lado direito de (24) pode ser facilmente calculado, dando

$$\oint_S \mathbb{B}\cdot\mathbb{n}\, dS = \int_0^{\theta}\int_0^{2\pi} \frac{g}{R^2} R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi = 2\pi(1-\cos\theta) \tag{25}$$

De forma que, esse resultado mostra que quando $\theta = 0$, o fluxo é nulo, uma vez que a superfície se reduz ao polo norte da calota; quando $\theta = \pi$ o fluxo é o fluxo total $4\pi g$, uma vez que a superfície é toda a calota. Mas esses resultados não são compatíveis com o lado esquerdo de (24). Quando $\theta \to 0$ a curva, na qual integramos, tende a um ponto e, como A deve ser finito, sua integral se anula e não temos problemas. Mas quando $\theta \to \pi$, a curva também colapsa em um ponto (o polo sul) de forma que se A é finito, sua circuitação se anula contradizendo (24)

Assim na presença de monopolos, não nos é possível encontrar campos de Gauge não singulares. As singularidades são "necessárias" para que se verifique o teorema de Stokes. Como exemplo podemos tomar $\mathbb{A}$ da forma:

$$\mathbb{A}_{I} = \frac{g}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\,(1-\cos\theta)\,\hat{\phi} \tag{26}$$

que é singular, na linha $\theta = \pi$, ou então:

$$\mathbb{A}_{II} = -\frac{g}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\,(1+\cos\theta)\,\hat{\phi} \tag{27}$$

que é singular em $\theta = 0$. Ambos os campos tem rotacional nulo, mas nenhum é contínuo em todo espaço. O problema de tais singularidades é que elas constituem linhas que atravessarão nossa região M de forma que nos é impossível definir os fatores de fase quando a curva em questão interceptar as linhas de singularidade.

Observando (26) e (27) notamos que numa região dada por:

$$M_{I}: \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 + \delta \quad ; \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad , \; r > 0 \tag{28}$$

A_{I} é não singular; e numa região dada por

$$M_{II}: \quad \frac{\pi}{2} - \delta < \theta \leq \pi \quad , \quad 0 \leq \phi < 2\pi \quad r > 0 \tag{29}$$

A_{II} é não singular (veja Figura VII.2A e VII.2B).

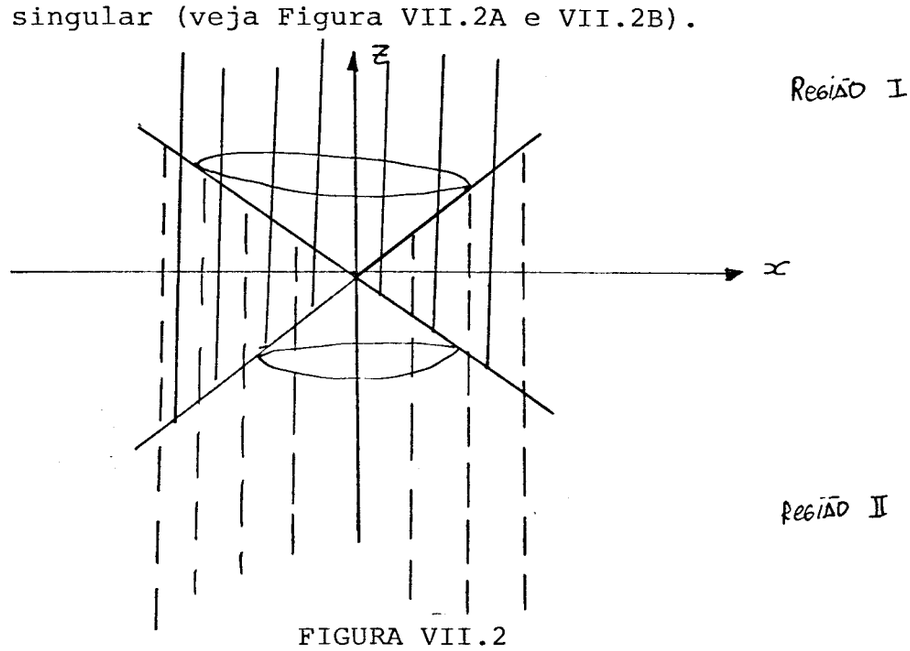
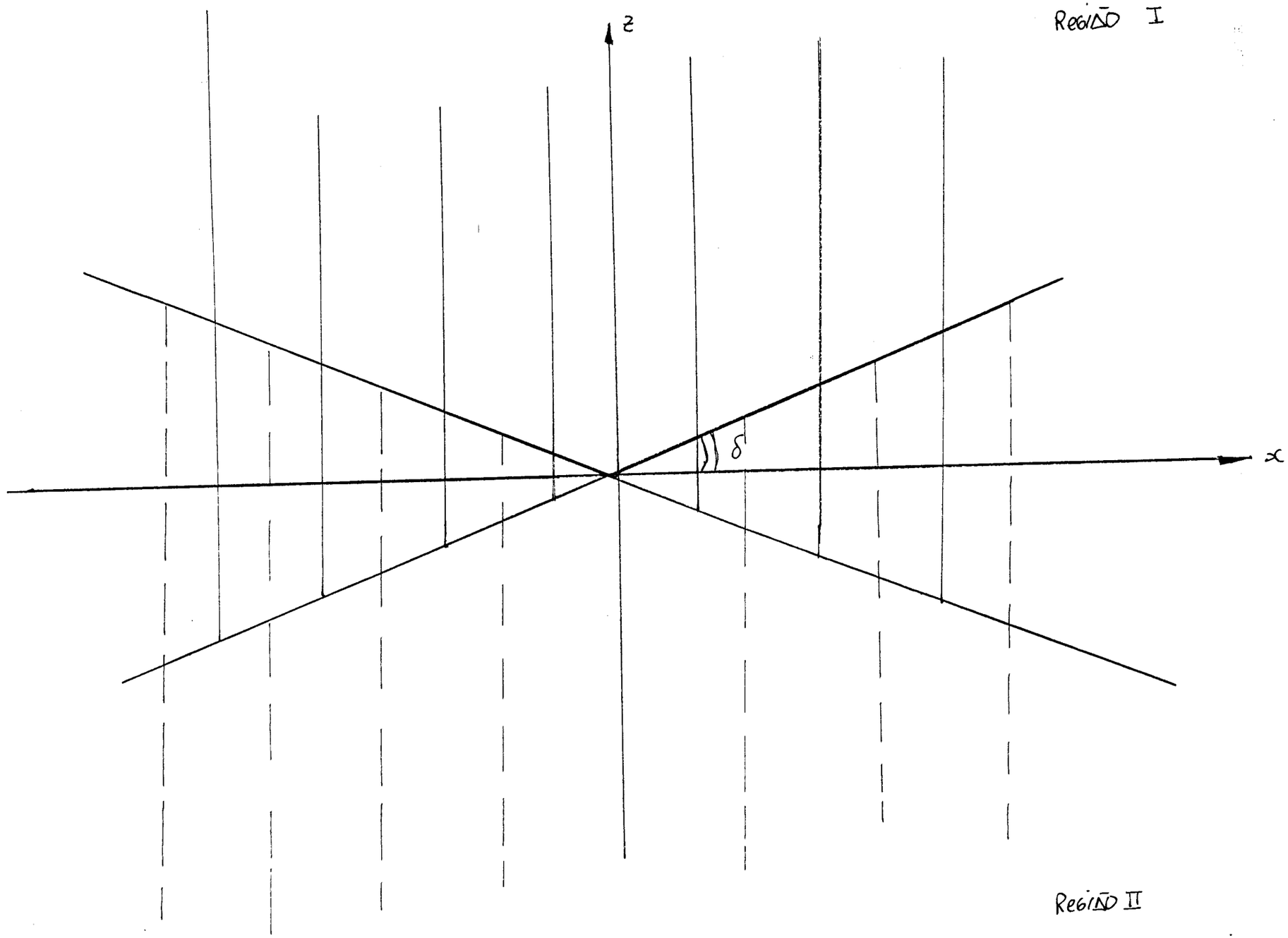


FIGURA VII.2


REGIÃO I
z
δ
x
REGIÃO II

Em outras palavras, não é possível encontrarmos campos de Gauge adequados a região toda, mas localmente, sempre podemos exibir um campo de Gauge contínuo.

A situação é de certa forma análoga a encontrada em matemática, no estudo das superfícies, ou em física na TGR. Existem superfícies como a esfera, a faixa de Möbius, etc. que não podem ser descritas globalmente através de um único sistema de coordenadas. A solução encontrada é tomarmos dois sistemas de coordenadas, que numa dada região se entrelaçam. Esse procedimento introduz uma ambiguidade na descrição de um ponto na região comum dos dois sistemas, o que não causa nenhum problema geométrico ou físico desde que as coordenadas estejam relacionadas por transformações diferenciaveis, uma vez que a geometria e a física são independentes do sistema de coordenadas (veja definição de variedades diferenciaveis). Além disso esses problemas só ocorrem em variedades curvas; um plano pode ser sempre descrito por um sistema global de coordenadas.

Voltamos então a pergunta que colocamos no começo do texto, na discussão do acoplamento eletromagnético mínimo. Se, notadamente o espaço-tempo é chato, o que se curva? E mais, quais são as "transformações de coordenadas" aqui? E, coordenadas de que variedade?

Yang e Wu observaram que, em certas condições a ambiguidade da existencia de dois valores para o potencial vetor num mesmo ponto do espaço, na região intermediária $M_I \cap M_{II}$, pode ser fisicamente imensuravel. Isso será verdade se pudermos encontrar uma transformação de Gauge, tal que $\mathbb{A}_I$ e $\mathbb{A}_{II}$ sejam Gauge-transformaveis.

Isso significa que:

$$\mathbb{A}_{I} = \mathbb{A}_{II} + \nabla\alpha$$

ou ainda

$$\nabla\alpha = \frac{2g}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\,\hat{\phi} \tag{30}$$

Uma solução para essa equação é:

$$\alpha = 2g\phi \qquad 0 \leq \phi < 2\pi \tag{31}$$

De modo que a transformação de Gauge em questão é:

$$g_{II} = \exp -\frac{2ieg}{\hbar}\,\phi \tag{32}$$

No entanto α , dado por (31) não é um univoco, quando atravessamos a linha $\theta = 0$; ou perdemos a continuidade, pois $\alpha(0_-) = 0$, $\alpha(0_+) = 2\pi$ ou preservamos a continuidade perdendo a univocidade.

O mesmo ocorrerá com $g_{I\ II}$ a menos que:

$$\frac{2eg}{\hbar} = n \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \tag{33}$$

que é a regra de Dirac, para a quantização do monopolo.

Sintetizamos nossas idéias mostrando que:

(1) A existencia de monopolos impede a existencia de campos de Gauge contínuos em todo espaço.

(2) Podemos tomar uma "cobertura" para o espaço-tempo e conseguir campos de Gauge contínuos em cada "vizinhança".

(3) Ficamos com ambiguidades na definição dos campos de

Gauge, na interface de duas vizinhanças.

(4) Essas ambiguidades não são acessiveis a experiência se os monopolos são quantizados, segundo Dirac.

Finalizamos esse capítulo exibindo o dicionário de Yang -Wu de forma a motivar o leitor para o que segue.

Guage field terminology	Bundle terminology
gauge (or global gauge)	principal coordinate bundle
gauge type	principal fiber bundle
gauge potential b_μ^k	connection on a principal fiber bundle
S_{ba} (see Sec. V)	transition function
phase factor ϕ_{QP}	parallel displacement
field strength $f_{\mu\nu}^k$	curvature
source[a] J_μ^K	?
electromagnetism	connection on a $U_1(1)$ bundle
isotopic spin gauge field	connection on a SU_2 bundle
Dirac's monopole quantization	classification of $U_i(1)$ bundle according to first Chern class
electromagnetism without monopole	connection on a trivial $U_i(1)$ bundle
electromagnetism with monopole	connection on a nontrivial $U_i(1)$ bundle

[a] I.e., electric source. This is the generalization (see Ref.3) of the concept of electric charges and currents.

CAPÍTULO VIII

A TEORIA DOS ESPAÇOS FIBRADOS

1. Introdução

No capítulo VI, analisamos uma estrutura típica de espaço fibrado: o fibrado vetorial tangente à uma variedade diferenciável. Nesse capítulo, vamos expor suscitamente os aspectos essenciais da teoria geral dos fibrados. O fibrado tangente é suficiente para a compreensão da estrutura matemática da Teoria Geral da Relatividade, no entanto as teorias de Gauge exigem a utilização de espaços fibrados mais complicados, cujas fibras são espaços vetoriais complexos e cujo grupo estrutural é um grupo de Lie. Iniciaremos nossa exposição investigando os produtos cartesianos, que constituem os espaços fibrados mais primitivos; uma série de conceitos serão introduzidos na discussão dos produtos cartesianos, para depois serem generalizados. Num segundo passo discutiremos os fibrados triviais, isto é, aqueles que são globalmente isomorfos aos produtos cartesianos; tais fibrados cobrem uma gama bastante grande das aplicações nas teorias de Gauge. O terceiro passo consiste na introdução dos fibrados não triviais, aqueles localmente isomorfos aos produtos cartesianos e que correspondem nas aplicações a existância de monopolos. O último passo corresponde à introdução de sistemas de coordenadas locais, bem como de um grupo estrutural atuando sobre as fibras.

Devemos ressaltar que apesar da teoria dos fibrados ter sido construída a cerca de 40 anos, ainda persiste alguma confusão quanto à terminologia a ser usada, devendo o leitor estar preparado

para encontrar frequentemente na bibliografia especializada, variações terminológicas. Na próxima secção daremos as noções preliminares, cujo objetivo é ativar nossa intuição geométrica, indispensável às aplicações físicas.

Podemos trabalhar somente com fibrados diferenciáveis, que são construídos a partir de variedades diferenciáveis. Esse procedimento é restritivo pois podemos perfeitamente construir fibrados mais gerais a partir de espaços topológicos. Entretanto além dos fibrados diferenciáveis serem os utilizados nas aplicações, podemos facilmente modificar nossas definições de forma englobar os fibrados topológicos.

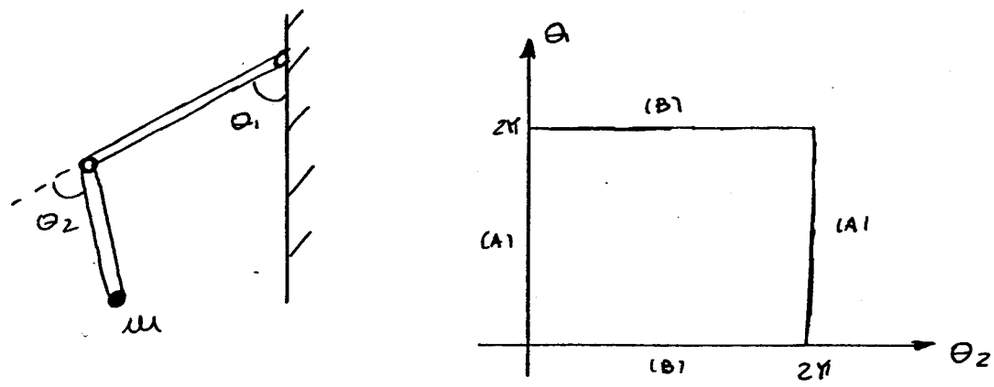
2. PRODUTOS cartesianos

Uma PRODUTO cartesiano é construída unificando-se dois conjuntos, que de uma certa forma sintetiza as propriedades dos conjuntos originais. Mais precisamente seja M e F dois conjuntos, M denominado espaço base, e F fibra (tais definições são usualmente utilizadas quando os conjuntos M e F tem estruturas de espaço topológico). Definimos agora um novo conjunto B, denominado espaço total, da seguinte forma:

$$B = \{(p,v) / p \in M \text{ e } v \in F\} = M \times F$$

Como exemplo consideremos M, como sendo uma circunferência de raio qualquer e F, um segmento de reta, o resultado será um cilindro. Se F ainda é uma circunferência, o produto cartesiano nos fornecerá um toro ao invés do cilindro. Do ponto de vista físico o toro pode ser considerado como o espaço das confi

gurações de um sistema dinâmico. Para isso basta considerarmos o movimento de uma partícula num plano, inculado por um pêndulo duplo (figura 1). O sistema é descrito por dois ângulos θ_1 e θ_2 que podem variar no intervalo $[0,2\pi]$, com as extremidades identificadas, quer dizer 0 e 2π descrevem a mesma configuração.



O espaço das configurações pode ser visto na figura IV-2, onde os lados do quadrado denotados pela mesma letra são identificados. Assim, identificando primeiro dois dos lados e depois os restantes obtemos um toro (figura IV-3).

3. Fibras, secções e aplicações fibradas

Existem duas aplicações naturalmente associadas às estruturas cartesianas, que são as projeções cartesianas:

$$\pi_M : B \to M \;/\; \pi_M(p,v) = p$$

$$\pi_F : B \to F \;/\; \pi_F(p,v) = v$$

Tomemos um cilindro (figura IV-4), π_M projeta os pontos do cilindro na circunferência do plano perpendicular a seu eixo (para o toro veja figura IV-3). Se tomamos um ponto p , qualquer da base podemos construir o conjunto $\pi_M^{-1}(p) = \{(p,v) / v \in F\}$, outra maneira de definir esse conjunto seria: $\pi_M^{-1}(p) = \{b \in B / \pi_M(b) = p\}$.

Se tomamos V arbitrário na fibra F, construimos $\pi_F^{-1}(V)$. No caso do cilindro $\pi_M^{-1}(p)$ é um segmento vertical de reta e $\pi_F^{-1}(V_0)$ uma circunferência.

FIG. IV-3

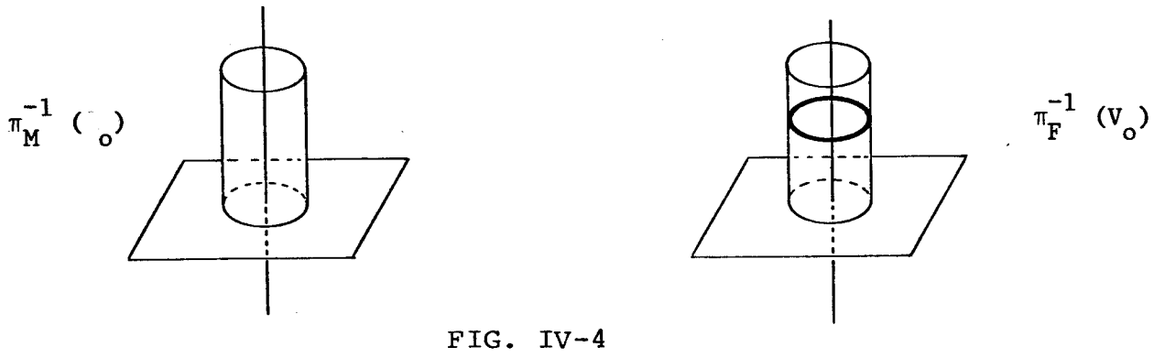


FIG. IV-4

Vemos então que colecionando-se as imagens inversas tanto num caso como no outro reobtemos o cilindro: *espetando-se os segmentos de reta com as* <u>*fibras*</u> $\pi_M^{-1}(p)$ *formamos um feixe que é o cilindro* ou emplilhamos as fibras $\pi_F^{-1}(V)$ para obter o cilindro (figura IV-5). Esses exemplos motivam a seguinte definição: seja $\pi: B \to M$ uma aplicação contínua, chamamos fibra de M no ponto p ao conjunto $\pi^{-1}(p) = \{ b \in B \,/\, \pi(b) = p \}$.

FIG. IV-5

É importante notarmos que as fibras $\pi_M^{-1}(\ )$ são todas idênticas e coincidem com a fibra F. (No caso das estruturas cartesianas existe uma simetria entre M e F de forma que poderíamos ter chamado M de fibra e F de base, no entanto nos espaços fibrados mais complicados isso não ocorre, isso justifica previlegiarmos a proseção π_M do espaço total na base; (a partir daqui, mos o índice M e não mais utilizaremos π_F).

Podemos agora construir aplicações contínuas da base no espaço total, $f:M \to B$, cujo gráfico $\{b \in B / \exists\ , b = f(\ )\}$ é um subconjunto de B.

Uma aplicação desse tipo é denominada uma secção do produto cartesiano ($B = M \times F, \pi, M$) de fibra F se

$$f(x) \in \pi^{-1}(x) \qquad \forall x \in M$$

ou

$$\pi(f(x)) = x \qquad \forall x \in M$$

A maneira de compararmos pois produtos cartesianos é através de homomeomorfismos entre os espaços totais $\phi : B \to B'$ Podemos ter homeomorfismos que associam os pontos b de $\pi^{-1}(x)$ a pontos $b' \in \pi^{-1}(x')$ isto é que levem a fibra $\pi^{-1}(x)$ integralmente na fibra $\pi^{-1}(x')$. Existem então aplicações que podem destruir a estrutura de fibras, enquanto existem,

outras que a mantem intactas (na pior das hipóteses embaralhadas). Isso motiva a seguinte definição: dizemos que uma aplicação $\phi: B \to B'$ entre as estruturas cartesianas $\overset{(B,M,\pi)}{\phi: B \to B'}$ de fibras F e (B',M',π') de fibras F', é fibra-preservantes se ela leva homeomorficamente as fibras de um ponto $p \in M$ num ponto $p' \in M'$.

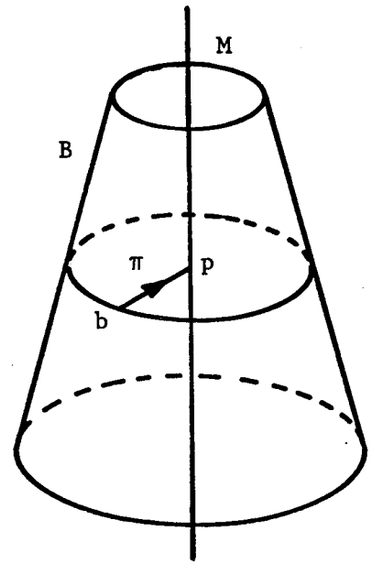
Uma consequência importante dessas idéias é a seguinte: se construirmos um homeomorfismo entre os espaços totais das estruturas cartesianas (B,M,π) de fibra F e (B',M',π') de fibra F' isso estabelece um homeomorfismo entre as bases M e M' das estruturas cartesianas. Isso pode ser visto da seguinte forma f leva a fibra de um ponto $p \in M$ na fibra $p' \in M'$ logo a relação $g: M \to M'$ associa a cada p o ponto p'.

Sintetizamos agora nossos resultados; construimos estruturas cartesianas (B,M,π,F), $B = M \times F$, discutimos as fibras e aprendemos a comparar estruturas cartesianas diferentes usando aplicações fibra-preservantes. Definimos também as secções de uma estrutura cartesiana. As estruturas cartesianas são exemplos mais simples de espaços fibrados.

4. Fibrados triviais

Estamos agora em condições de considerar objetos complicados como um tronco de cone, faixa de mobius ou uma esfera que não são estruturas cartesianas, mas alguns deles se *assemelham* a estruturas cartesianas. Inicialmente consideremos um tronco de cone, de altura unitária, e seja M o intervalo unitário da reta e $\pi: B \to M$ a projeção dos pontos do tronco de cone em seu eixo (figura IV-9), finalmente F denominara a circunferência unitária.

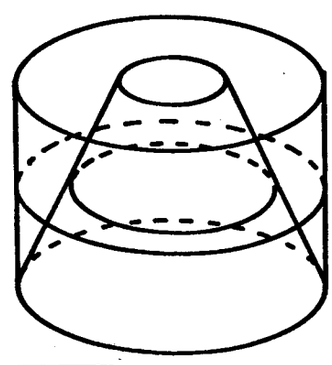
FIG. IV-9



$B \neq M \times F$

Agora consideremos a aplicação $\psi: M \times F \to B$ construída da seguinte forma*: $M \times F$ é um cilindro de raio unitário, colocamos o tronco de cone dentro do cilindro, associamos então (homeomorficamente) a cada ponto do cilindro o ponto do tronco de cone definido pela intersecção de reta que contém o ponto do cilindro e é perpendicular à sua superfície com a superfície do tronco (figura IV-10). Mostramos então que existe uma transformação que leva $B' = M \times \gamma$ em B de forma homeomófica. Além disso $\pi^{-1}(p)$ é levado por ψ em $\pi^{-1}(p)$.

FIG. IV-10



(*) Muitas vezes trabalharemos com transformações de B em $M \times F$.

Em outras palavras existe um homeomorfismo fibra-preservante entre a estrutura (B, M, π, F) e a estrutura cartesiana (B', M, π', F), $B' = M \times F$ mais ainda o homeomorfismo $\psi : B' \to B$ é global, isto é, leva globalmente o cilindro no tronco de cone. O tronco de cone é um fibrado trivial.

Estamos prontos agora para generalizar nossas idéias, e definir um espaço fibrado trivial:

Diremos que a estrutura (B, M, π, F) onde B e M e F são espaços topológicos quaisquer e π é uma sobrejeção contínua de B em M, constitui um espaço fibrado trivial com espaço total B, base M, fibra F e projeção π se existir um homeomorfismo $\psi : M \times F \to B$ que leve as fibras da projeção cartesiana de $M \times F$ em F num ponto $P_0 \in M$, na fibra de π num ponto P_1. (Em uma palavra ψ é fibra-preservante).

Uma primeira consequência de nossa definição é que as fibras da projeção π de nosso espaço fibrado, são todas homeomorfas a fibra F, isto é para cada ponto $p \in M$ existe um homeomorfismo de $\pi^{-1}(p)$ em F, construído da seguinte forma:

(i) Dado $b \in \pi^{-1}(p)$, utilizamos ψ^{-1} para levar b em (p, v); obtemos assim a imagem v de b

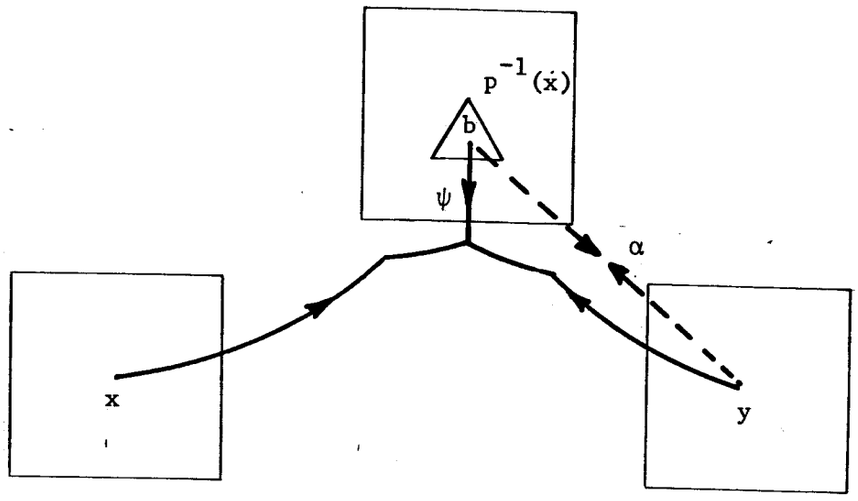
(ii) Dado $v \in F$, somos levados por ψ em b. Em outras palavras se $\alpha : \pi^{-1}(p) \to F$ temos $\psi^{-1}(b) = (p, \alpha(p))$

Uma secção de nosso fibrado trivial é uma aplicação $f : M \to B$ tal que $\pi(f(p)) = p$. Observe que, das conclusões anteriores, podemos associar a cada secção f uma *secção local* $\hat{f} : M \to F$ da seguinte forma

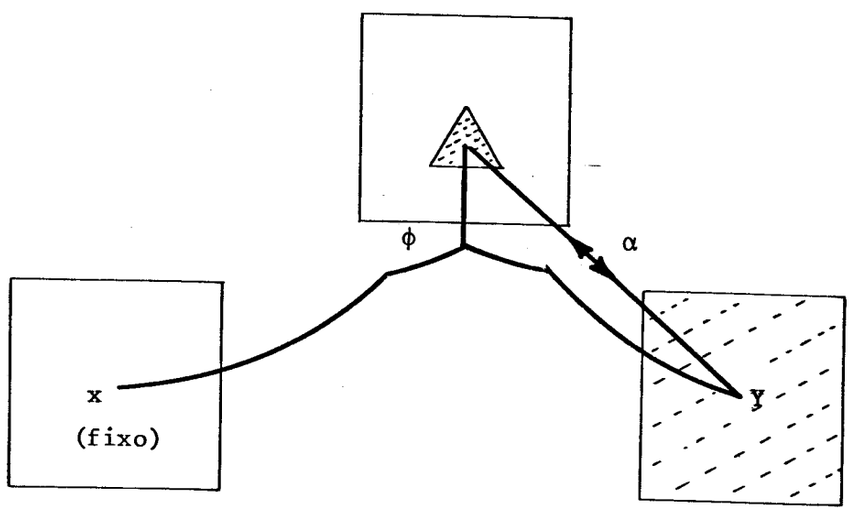
(i) f leva p em $b \in \pi^{-1}(p)$, isto é $f(p) = b \in \pi^{-1}(p)$

(ii) ψ^{-1} leva $b \in \pi^{-1}(p)$ em $(p, d(p))$, logo $\hat{f}$ leva p em $d(p)$

~~(iii) logo $\hat{f}$ associa a cada p~~, um $\alpha(p) \in F$



(A) α é o "braço" direito de ψ



(B) Para x fixo α leva $p^{-1}(x)$ homeomorficamente em Y

FIG. IV-11

Finalmente podemos comparar dois fibrados triviais (B, M, F, π) e (B', M', F', π'), utilizando um homeomorfismo $h: B \to B'$. Da mesma forma que antes, isso implica na existência de um homeomorfismo entre as bases $\bar{h}: M \to M'$.

Como último exemplo, analisemos a faixa de Mobius. Ela é obtida fazendo com que um segmento *gire* em torno de uma circunferência, de forma que ele inverta sua orientação durante um ciclo ou então podemos visualizá-la como construída a partir de um retângulo, onde se identifica os lados de forma inversa . É intuitivo que a faixa de Mobius não é uma estrutura cartesiana e nem homeomorfa à estrutura cartesiana. A mudança de orientação de segmento gerador, destrói a continuidade da identificação global. A faixa de Mobius não é um fibrado trivial. Por outro lado um trecho da faixa de Mobiùs, nada mais é do que um trecho de retângulo de modos que podemos identificar localmente a faixa de Mobius com um produto cartesiano. A faixa de Mobius é um fibrado não trivial.

A esfera constitui um contra-exemplo típico de um espaço fibrado: nem ao menos localmente ela se identifica a um produto cartesiano (se retirarmos os polos Norte e Sul, as coisas mudam de figura!) Na próxima secção daremos as definições rigorosas, dos temas que aqui foram tratados intuitivamente.

Até aqui abordamos os espaços fibrados de maneira intuitiva, tanto do ponto de vista das aplicações em física, como também de um ângulo geométrico-intuitivo. Agora daremos uma definição rigorosa de um espaço fibrado, partindo de definições preliminares e excessivamente abrangentes, até chegarmos a uma defi

nição adequada às aplicações em física. Nesse caminho, não podemos contornar articulações matemáticas complexas e abstratas inerentes à teoria e que refletem o nível de complexidade das interações fortes. Observamos ainda que, na bibliografia da área, muitas vezes encontraremos estruturas diferentes com o mesmo nome e estruturas idênticas com nomes diferentes. Seguiremos aproximadamente a nomenclatura de Stenrood, evidentemente com as traduções necessárias, mesmo que duvidosas.

5. Espaços fibrados coordenatizados

Consideremos um espaço topológico M denominado espaço base, munido de uma cobertura por conjuntos abertos M_k, com $k \in K$; consideremos também outro espaço topológico F, denominado fibra, e um terceiro denotado E e denominado espaço total. Seja também $\pi: E \to M$ uma sobrejeção contínua denominada projeção. Diremos que esses espaços topológicos e a projeção se estruturam num espaço fibrado coordenatizado, se existirem um conjunto de aplicações contínuas, denotadas ϕ_R e denominadas funções coordenadas, que levem o produto cartesiano de cada vizinhança coordenada M_R pela fibra F, no subconjunto $\pi^{-1}(M_R)$ do espaço total, constituído por todos pontos de E que são levados em M por π simbolicamente temos:

$$\phi_R : M_R \times F \longrightarrow \pi^{-1}(M_R) \subset E$$

Além disso exigimos que:

$$\pi(\phi_R(p,v)) = p \quad p \in M \text{ e } v \in F$$

A figura IV-15 ilustra a situação:

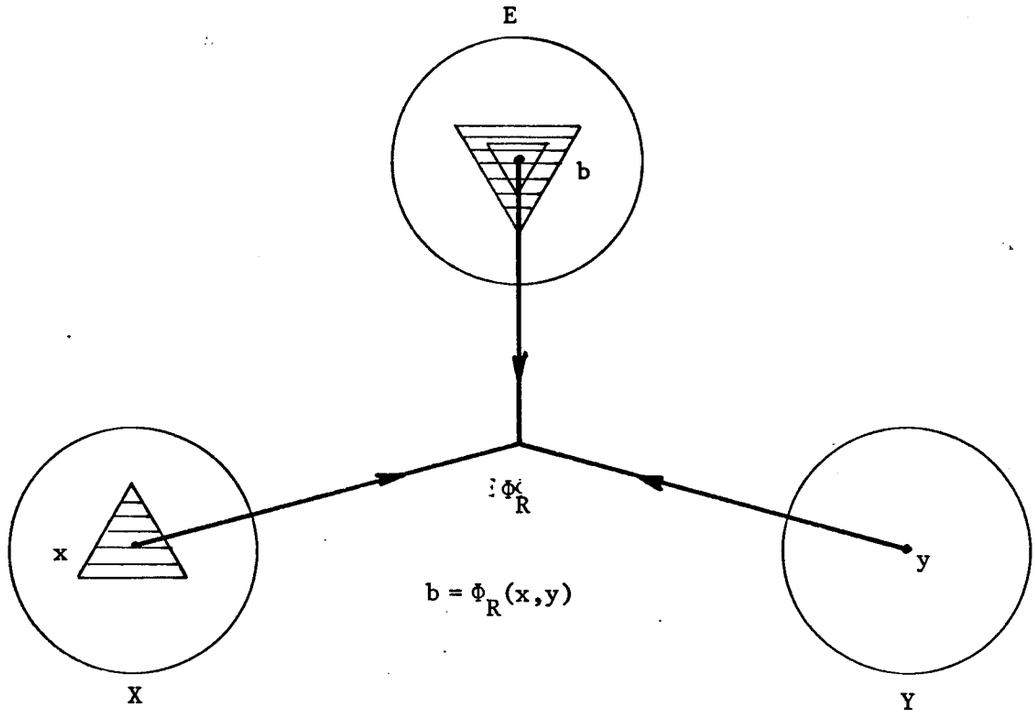


FIG. IV-15 - Os tres círculos simbolizam E.X e Y. O triângulo interno a X simboliza X_R; o triângulo achurrado em preto interno a E simboliza $p^{-1}(X_R)$. O triângulo azul é $p^{-1}(x)$.

Essa definição visa garantir uma identificação local do espaço total com o produto cartesiano $M_R \times F$. O espaço total E aparece com um conteúdo geométrico intrínseco, podendo seus pontos serem expressos através de coordenadas. Mostraremos então que todo ponto de E pode ser associado um par ordenado (p,v) de $M \times F$, e que a todo par (p,v) corresponde um elemento de E.

Consideremos então um par (p,v) ; temos duas alternativas: ou p pertence a apenas uma vizinhança coordenada, digamos M_R ou ele pertence a mais de uma vizinhança, digamos M_R e M_m No caso em que p pertence a uma única vizinhança, obtemos de forma única o correspondente do par (p,v) em E usando a função coordenada associada à vizinhança M_R , simbolicamente escrevemos:

. Agora se p pertence a mais que uma vizinhança, o elemento de E corresponde ao par (p,v) não é univocamente determinado pois, temos duas alternativas: utilizamos a função coorde-

nada associada à vizinhança M_ℓ , para encontrar $b=\phi_\ell(p,v)$ ou alternativamente usamos ϕ_m e obtemos $\phi_m(b,v)$

Consideremos o processo inverso, isto é, a partir do conhecimento de um ponto $b \in E$, queremos encontrar o par (p,v) . O primeiro passo é usando projeção π , determinar $p=\pi(b)$; conhecendo-se p localizamos a ou as vizinhanças a qual ele pertence; conhecidas as vizinhanças utilizamos a ou as funções coordenadas, que são inversíveis, para obter $(p,v)=\phi_\ell^{-1}(b)$, assim obtemos v e reobtemos p . Se por outro lado p pertence a duas vizinhanças teremos $(p,v) \in \phi_\ell^{-1}(b)$ e $(p,v')=\phi_m^{-1}(b)$. Denotaremos pelo símbolo $\phi_{\ell p}^{-1}$ essa função que dado b nos permite obter v ; tal função é muitas vezes denominada projetor, pois a semelhança de π , ela projeta E sobre F. No entanto existem diferenças fundamentais entre a projeção e os projetores, isto porque a determinação de v , pressupõe primeiramente a determinação de p e depois a escolha de uma vizinhança. Assim, a projeção sobre a fibra é local e não será unívoca se p pertencer a mais de uma vizinhança.

Sintetizando as idéias desenvolvidas até aqui, vimos que a definição de espaço fivrado coordenatizado permite a identificação local dos pontos de E com pontos de $M \times F$; no entanto essa identificação é ambígua no sentido de não ser unívoca, sempre que tratarmos pontos do espaço base que for recoberto por duas vizinhanças.

A idéia agora é relacionar os dois valores distintos de v , associados ao mesmo b de E. Lembrando que $v=\phi_{\ell p}^{-1}(b)$ e que $v'=\phi_{mp}^{-1}(b)$ podemos escrever $b=\phi_{\ell p}(v)$ e então temos final -

mente: $V' = \phi^{-1}_{mp}\left[\phi_{kp}(V)\right]$. Denotaremos por $g_{mk}(p) = \phi^{-1}_{mp} \circ \phi_{kp}$ essa função e, será denominada função de transição. A função de transição pode ser considerada sob dois aspectos: para p fixo e k fixos, ela é um homeomorfismo sobre a fibra F e portanto um elemento do grupo Hom(F) . Por outro lado, se deixarmos variar obteremos uma coleção de elementos em Hom(F).

Encerramos aqui nossa definição preliminar de espaço fibrado coordenatizado. A idéia central que motivará nossa próxima definição está ligada à ambiguidade da identificação local dos pontos do espaço total com o produto cartesiano da base pela fibra, decorrente da existência de duas coberturas que recobrem o mesmo ponto da base. A única exigência de nossa definição é que as coordenadas na fibra se relacionem através de um homeomorfismo; essa restrição porém é excessivamente fraca para as aplicações em matemática e em física. A definição de espaço fibrado dada é portanto demasiada geral. E o motivo é que o grupo de homeomorfismos é muito abrangente. Em física as ambiguidades não são benvindas a menos que dependam de uma convenção e sejam portanto inobserváveis.

Em nossa próxima definição exigiremos que as funções de transição sejam elementos de um grupo menor: um grupo de Gauge G, simbolicamente $g_{km}(p) \in G$. Além disso, exigiremos também que as funções de transição sejam funções contínuas de $p \in M_k \cap M_m$

Analisaremos agora a propriedade fundamental das funções de transição. Pasa isso admitamos que um ponto p da base pertença a tres vizinhanças coordenadas digamos M_k , M_m e M_n,

teremos então tres funções de transição distintas: g_{km}, g_{mn} e g_{kn} ; da prórpia definição das funções de transição é fácil vermos que $g_{km} = g_{kn}\, g_{nm}$

Essa propriedade será usada posteriormente na construção de espaços fibrados a partir das funções de transição. Algumas decorrências imediatas são:

Terminamos essa secção resumindo nossa definição final de *espaço fibrado coordenatizado com grupo estrutural.*

ESPAÇO TOTAL	: espaço topológico E.
ESPAÇO BASE	: espaço topológico M munido de uma cobertura M_k , $k \in K$, de abertos.
FIBRA	: espaço topológico F.
GRUPO ESTRUTURAL	: grupo topológico G que atua continuamente e efetivamente como um grupo de transformação sobre a fibra.
PROJEÇÃO	: sobrejeção contínua $\pi : E \to M$
FUNÇÕES COORDENADAS	: homeomorfismo $\phi_k : M_k \times F \to \pi^{-1}(M_k)$ tais que: $\pi(\phi_k(p,v)) = p$
FUNÇÕES DE TRANSIÇÃO	: $g_{km}(p)$ tais que: g_{km} continua na variável p , $g_{km} \in G$

Terminamos denotando de forma definitivamente um espaço fibrado coordenatizado com grupo estrutura da seguinte forma: $(E, M, F, \pi, G, K, M_k, \phi_k)$

6. Espaços fibrados

Na secção anterior definimos um espaço fibrado com

grupo estrutural com um dado sistema de coordenadas; o sistema de coordenadas era composto pela estrutura indexada e pelas funções coordenadas: M_α, ϕ_α, K . Agora parece bastante intuitivo, que os aspectos geométricos (a rigor topológicos) de dois espaços fibrados que difiram na indexação de suas coberturas ou então tenham coberturas distintas ou ainda tenham apenas funções coordenadas diferentes, devem ser indênticos. A situação é semelhante a que encontramos no estudo das variedades, em conexão com seus vários sistemas de coordenadas, as propriedades geométricas são independentes de um sistema de coordenadas. A superfície existe mesmo antes do conceito de coordenadas. Aqui adotamos o caminho de definir os fibrados referentes a um sistema de coordenadas. Afim de definirmos um objeto livre de coordenadas, teremos que lançar mão de conceito de equivalância estrita.

Consideremos então dois fibrados coordenatizados (a partir daqui omitiremos muitas vezes a plavra espaço e a frase "com grupo estrutural") que só difiram pelos sistemas de coordenadas, digamos $(E, M, F, \gamma, G, M_\alpha, K, \phi_\alpha)$ e $(E, M, F, \gamma, G, N_\beta, J, \varphi_\beta)$; com esses elementos podemos construir um novo fibrado coordenatizado, utilizando simultaneamente os dois sistemas de coordenadas: $(E, M, F, G, \gamma, M_\alpha, N_\beta, K, J, \phi_\alpha, \varphi_\beta)$. A questão que se coloca é: essa estrutura ainda é um fibrado? Ou em outras palavras os dois sistemas de coordenadas podem ser usados simultaneamente? Eles são compatíveis?

O único problema que iremos encontrar será nas regiões comuns a uma vizinhança M_α com uma vizinhança N_β . Nas demais regiões as propriedades requeridas são garantidas pelo fato das estruturas de partida serem fibrados. Nessa região teremos uma

nova função de transição $\bar{g}_{kj}$ dada por:

$$\bar{g}_{kj} = \phi^{-1}_{kp} \cdot \phi_{jp}$$

o que temos que exigir é que essa nova função de transição seja realmente uma função de transição, isto é, seja uma função contínua de p para $p \in M_k \cap N_j$ e seja um elemento de G.

Nessas condições dizemos que os dois fibrados coordenatizados são estritamente equivalentes.

Agora definimos um espaço fibrado como sendo o conjunto de todos os espaçod fibrados coordenatizados. Assim os espaços fibrados não se referem a sistemas particulares de coordenadas. Do ponto de vista conceitual esses objetos são importantes nas aplicações em matemática ou mesmo em física, uma vez que queremos teorias livres da subjetividade advindas, da escolha de coordenadas. Agora do ponto de vista da manipulação formal , trabalharemos sempre com a representação de um fibrado num dado sistema de coordenadas, isto é, trabalharemos com espaços fibrados coordenatizados.

Uma maneira mais elegante de expormos, a mesma idéia é considerarmos o conjunto de todos os fibrados coordenatizados de mesma base, fibra, grupo, espaço total e projeção e nele definir a equivalencia restrita. O espaço fibrado (sem coordenadas) aparece então como uma classe de fibrados equivalentes , (no sentido restrito).

CAPITULO IX

EQUIVALÊNCIA ENTRE ESPAÇOS FIBRADOS

No capítulo anterior chegamos ao conceito de espaço fibrado, eliminando a dependência de sistemas de coordenadas a partir da definição de uma relação de equivalência (restrita) que dividiu o espaço do fibrado coordenado em classes de equivalência: os espaços fibrados. Nesse capítulo pretendemos definir uma relação de equivalência entre espaços fibrados (sem coordenadas) de modo a poder classificá-los. O caminho que adotaremos é definir uma nova relação de equivalância entre fibrados coordenados, que seja mais ampla que a equivalência restrita (evidentemente se dois fibrados coordenados forem equivalentes no sentido restrito, também o serão no sentido amplo, entretanto a recíproca não é verdadeira). Veremos também que em dois fibrados equivalentes mantêm uma relação entre suas funções de transição (Teorema da Equivalência). Terminamos o capítulo enunciando o teorema da equivalência, para uma demonstração veja Stenroup. Tendo definido uma nova e ampla relação de equivalência entre fibrados coordendos, diremos que dois espaços fibrados são equivalentes se todas as representações (num sistema de coordenadas) de um forem equivalentes às representações do outro.

1. Aplicações Fibra-preservantes

O modo usual de compararmos espaços topológicos, estudar suas diferenças e semelhanças, é através de aplicações

contínuas, de modo a garantir que a aplicação preserve as estruturas topológicas. Se trabalharmos com espaços fibrados temos que levar em conta, que eles tem uma estrutura interna mais rica: localmente eles se comportam como estruturas cartesianas. Isso se reflete na *fibração* do espaço total, realizada pela projeção, que estabelece uma correspondência homeomorfica entre as fibras e a fibra. Iremos comparar então, dois espaços fibrados, a partir de aplicações contínuas que não destruam a estrutura de fibras.

Consideremos então dois espaços fibrados (coordenados) $(E, M, F, G, \pi, M_R, \phi_R, K)$ e $(\tilde{E}, \tilde{M}, F, G, \tilde{\pi}, \tilde{M}_\phi, \tilde{\phi}_\phi, J)$ com espaços totais, base, projeção e estruturas locais diferentes, mas de mesma fibra e grupo.

Diremos então que uma aplicação: $h: E \to \tilde{E}$ entre espaços totais dos fibrados é fibra-preservante se:

(i) h for contínua

(ii) $h_p = h|_{F_p}$ com $F_p = \pi^{-1}(p)$

for um homorfismo entre a fibra F_p de π num ponto p e a fibra $F_{\tilde{p}}$ de $\tilde{\pi}$ num ponto $\tilde{p}$.

Note que não exigimos a inversibilidade global de h (ela não é um homeomorfismo de E em $\tilde{E}$), mas apenas localmente ela é inversível, com inversa contínua. Por outro lado (ii) significa que as fibras de um fibrado são levadas nas fibras do outro. A estrutura de fibras é preservada.

2. A aplicação induzida

Uma consequência decorrente da estrutura de espaço

fibrado é que se relacionamos os espaços totais por meio de uma aplicação fibra-preservante, as bases dos fibrados também ficam naturalmente relacionadas. Em outras palavras a existência de $h: E \to \tilde{E}$, fibra-preservante implica na existência de uma aplicação contínua $\bar{h}: M \to \tilde{M}$ entre as bases. A aplicação $\bar{h}$, denominada aplicação induzida pela aplicação fibra-preservante, pode ser vista da seguinte maneira: tomamos um ponto $p \in M$ a partir dele localizamos a fibra F_p de π no ponto p utilizamos então h para determinar a imagem $F_{\tilde{p}}$ de F_p em $\tilde{E}$; projetando $F_{\tilde{p}}$ em $\tilde{M}$, via $\tilde{\pi}$, obtemos $\tilde{p} = \pi\,[F(\tilde{p})]$. Simbolicamente:

$$\tilde{p} = \bar{h}(p) = \tilde{\pi}\,[h(\pi^{-1}(p))]$$

Pode-se mostrar que a aplicação induzida é contínua e que além disso vale a relação : $\bar{h} \circ \pi = \tilde{\pi} \circ h$

o que significa que o gráfico da figura é comutativo.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{E} \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ M \arrow[r, "\bar{h}"] & \tilde{M} \end{tikzcd}$$

Notemos que $\bar{h}$ também não é, em geral, um homeomorfismo, basta tomarmos um exemplo em que h leve todas as fibras de E na mesma fibra $F^{v}_{p_0}$ de $\tilde{E}$. Nesse caso $\bar{h}(p) = \tilde{p}_0$ continua mas não inversível.

3. O fibrado induzido

Vamos analisar agora o que ocorre com as estruturas

locais dos dois fibrados relacionados de forma *fibra-preservante*. Para isso observamos que a imagem inversa que uma aplicação contínua faz de um conjunto aberto, ainda é um conjunto aberto. De forma que, usando $\bar{h}$, podemos construir uma família de abertos N_j em M a partir da família $\tilde{M}_j$ de abertos de $\tilde{M}$

$$N_j = \bar{h}^{-1}(\tilde{M}_j)$$

Assim a aplicação induzida tem a capacidade de induzir uma nova cobertura em M, a cobertura induzida N_j.

Vamos mostrar agora que, a partir de h e $\bar{h}$ podemos induzir em E, um sistema de funções coordenadas $\varphi_j : N_j \times F \to \pi^{-1}(N_j)$ obtidas a partir das funções coordenadas $\tilde{\Phi}_j$ de $\tilde{E}$.

Tomemos então um ponto $p \in N_j$ e um ponto v na fibra e definimos o ponto $\varphi_j(p,v)$ em E, da seguinte forma: usamos $\bar{h}$ para obter $\tilde{p} = \bar{h}(p)$ em $\tilde{M}$, depois de obtido $\tilde{p}$ usamos $\tilde{\Phi}_j$ para obter $\Phi_j(\tilde{p},v)$ em $\tilde{E}$. Agora h, não é inversível mas h_p é um homeomorfismo de forma que h_p^{-1} existe e é contínua, então:

$$\varphi_j(p,v) = h_p^{-1}\left[\tilde{\Phi}_j(\tilde{p},v)\right] \; ; \; \tilde{p} = \bar{h}(p)$$

Da própria definição segue que φ_j, como composta de homeomorfismos é um homeomorfismo, e também

$$\pi\left[\varphi_j(p,v)\right] = p$$

Obtivemos assim um novo (candidato) fibrado: o fibrado induzido $(E, M, \pi, G, F, N_j, \tau, \varphi_j)$ pela aplicação fibra-preservante. Para mostrarmos que E_{IND} é realmente um fibrado temos que mostrar que suas funções de transição:

$$g_{ij}^{IND}(p) = \varphi_{ip}^{-1} \circ \varphi_{jp}$$

são contínuas em p e tem imagens no grupo G. Para isso basta substituirmos em para obter:

$$\varphi_{ij}^{IND}(p) = \tilde{g}_{ij}\,(\bar{h}(p))$$

Logo g_{IND} pertence a G e, é contínua, como composta de funções contínuas.

4. Aplicações fibradas

Como vimos a existência de uma aplicação , fibra-preservante traz como consequência uma nova estrutura local para E. Em certas condições essa estrutura local é estritamente equivalente à estrutura anterior, mas isso não é geral, h pode induzir uma estrutura local, complicada, e assim o fibrado induzido é uma representação de outro espaço fibrado que não E.

Se queremos comparar espaços fibrados, devemos nos precaver dessa indução *anômala* exigindo que a aplicação h seja tal que o fibrado induzido seja estritamente equivalente ao interior. Como já vimos isso corresponde a exigir que as funções de transição correspondentes à intersecção de uma vizinhança velha M_k com uma vizinhança nova N_j dada por

$$\bar{g}_{ki} = \phi_{kp}^{-1} \circ \varphi_{ip} \qquad p \in N_i \cap M_k$$

seja contínua em p e seja um elemento de G. A equação pode ser reescrita na forma:

$$\bar{g}_{ki} = \phi_{kp}^{-1} \circ h_p^{-1} \circ \tilde{\varphi}_{ip} \qquad p \in \bar{h}^{-1}(\tilde{M}_i) \cap M_k$$

Chegamos então a uma definição adequada para a comparação de fibrados. Diremos que a aplicação $h: E \to E'$ é uma aplicação fibrada entre $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\gamma}, F, G, \tilde{K}, \tilde{M}_k, \tilde{\phi}_k)$ e $(E, M, \gamma, F, G, K, M_k)$ se:

(i) Ela é fibra-preservante

(ii) O fibrado é induzido é estritamente equivalente a E.

5. Equivalência

Estamos agora em condições de desenvolver o conceito de equivalência entre espaços fibrados, que como veremos joga um papel fundamental na teoria das classes características e portanto, do ponto de vista físico, na determinação dos números topológicos.

Diremos então que dois fibrados coordenados de mesma base, fibra e grupo são equivalentes se existir uma aplicação fibrada entre seus espaços totais tal que a aplicação induzida seja a identidade.

Tomemos então os fibrados coordenados $(E, M, Y, F, G, K, M_k, \phi_k)$ e $(\tilde{E}, \tilde{M}, F, \tilde{Y}, G, \tilde{\gamma}, \tilde{M}_j, \tilde{\phi}_j)$ estritamente equivalentes, e mostremos que eles são equivalentes. Para isso basta tomarmos h, como sendo a identidade, evidentemente $\bar{h}$ também será a identidade de forma que temos que verificar unicamente se a exigência sobre as funções de transição dadas pela se verifica, e como h é a identidade teremos que ter:

$$\bar{g}_{ki} = \phi_{kp}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{ip} \qquad p \in M_k \cap \tilde{M}_j$$

como um elemento de G é contínua em p. Vemos então que essa exigência é exatamente a exigência requerida pela equivalência estrita.

Podemos definir então dois fibrados como sendo equivalentes se todos os fibrados coordenados que representam ambos os fibrados foram equivalentes. Partimos assim o conjunto de todos fibrados coordenados de mesma base, fibra e grupo em classes de equivalância; como já dissemos, a estrutura dessas classes de equivalência terá decorrências físicas importantes.

O TEOREMA DA EQUIVALÊNCIA

O conceito de equivalência coloca uma nova questão para a teoria dos fibrados. Consideremos uma variedade M (que nas aplicações será o espaço tempo quadridimensional) que será utilizada como base de um espaço fibrado; consideremos ainda um grupo G, que age de uma forma definida num espaço F. Quantos espaços fibrados (sem coordenadas) podem ser construídos tomando M como base, F como fibra e G como grupo estrutural? Certamente podemos construir muitos fibrados, pois temos uma liberdade enorme para escolher o espaço total, E, e a projeção $\pi : E \to M$. Por outro lado muitos do fibrados construídos serão equivalentes, de forma que a essência geométrica não consiste em conhecermos todos os fibrados possíveis, mas sim conhecermos somente os fibrados inequivalentes.

Tendo em mente a classificação dos fibrados, temos que responder uma questão preliminar: dados dois fibrados (E,M,G,F,π) e $(E,M,G,F,\tilde{\pi})$, como sabemos se eles são equivalentes?

Para responder a essa questão, estudaremos as consequências da equivalência entre fibrados, estudando um fibrado coordenatizado $(E,M,G,F,U_k,\phi_k\pi|\ ,K)$ que represente (E,M,G,F,π) e outro $(\tilde{E},M,G,F,\tilde{\pi}\ ,U_k\ ,\tilde{\phi}_k\ ,K)$ que represente $(\tilde{E},M,G,F,\tilde{\pi})$. Note que tomamos os dois representantes com mesma cobertura para M e isso é sempre possível, pois se eles tem, inicialmente, coberturas distintas, tomamos novos fibrados cobertos pela união das coberturas.

Agora a equivalência significa que existe entre os espaços totais uma aplicação fibrada $h: E \to \check{E}$, cuja aplicação induzida $\bar{h}: M \to \check{M}$ é a identidade. A primeira consequência desse fato é que as fibras $\pi^{-1}(p)$ são levadas homeomorficamente nas fibras $\check{\pi}^{-1}(p)$ pela aplicação h.

Além disso a equivalência implica numa relação entre as funções de transição $g_{\ell m}$ e $\check{g}_{\ell m}$ dos fibrados. Isto porque o fibrado induzido em M pela aplicação fibrada deve ser estritamente equivalente ao fibrado original. Escrevendo as funções de transição de ambos os fibrados em função das funções coordenadas:

$$g_{\ell m}(p) = \phi^{-1}_{\ell p} \circ \phi_{mp} \qquad p \in M_\ell \cap M_m$$

$$\check{g}_{\ell m}(p) = \check{\phi}^{-1}_{\ell p} \circ \phi_{mp}$$

e relembrando que a equivalência restrita significa que podemos trabalhar com ambos os sistemas locais, temos que exigir que

$$\bar{g}_{\ell m}(p) = \check{\phi}^{-1}_{\ell p} \circ \phi_{mp} \qquad p \in M_\ell \cap M_m$$

seja uma função contínua de p, com valores no grupo G.

Considerando agora um ponto p, que pertença à intersecção de tres vizinhanças podemos escrever:

$$\bar{g}_{\ell m} = \bar{g}_{\ell n} \circ g_{nm} \qquad \bar{g}_{\ell j} = \check{g}_{ji} \circ \bar{g}_{ij}$$

Ajeitando-se os índices e substituindo a segunda expressão na primeira obtemos

$$\bar{g}_{\ell m} = \check{g}_{\ell i} \circ \bar{g}_{in} \circ g_{nm}$$

Agora fazendo $i = m$, $\ell = n$ vem

$$g_{m\ell} = \check{g}_{\ell m}\, \bar{g}_{n\ell n}\, g_{\ell n \ell}$$

multiplicando (a esquerda) por vem

$$g_{n\ell} = \bar{g}^{-1}_{nm} \circ \check{g}_{m\ell} \circ \check{g}_{\ell n}$$

chamado $\lambda_n = \bar{g}^{-1}_{nn}$ temos

$$g_{nk} = \lambda_{nn} \circ \tilde{g}_{nk} \circ \lambda_{kk}^{-1}$$

(Observe que $\bar{g}_{nn}$ relaciona dois elementos da fibra obtidos pela utilização de funções coordenadas distintas, uma é ϕ_n e a outra é a função coordenada induzida).

Podemos enunciar então um teorema:

Uma condição necessária para que dois espaços fibrados sejam equivalentes é que as funções de transição de seus representantes coordenados de mesma cobertura estejam relacionadas na forma ( ), onde $\lambda_{nn} : M_n \to G$ são funções contínuas.

Pode-se mostrar também que essa condição é também suficiente, assumindo que as funções de transição dos fibrados coordenados estão ligadas pela relação ( ), e mostrar que eles são equivalentes exibindo uma aplicação fibrada, cuja aplicação induzida seja a unidade.

CAPÍTULO X

FIBRADOS PRINCIPAIS, ASSOCIADOS E A TEORIA DAS CONEXÕES

FIBRADOS PRINCIPAIS E FIBRADOS ASSOCIADOS

Os conceitos de fibrados principais e associados foram inicialmente introduzidos a partir do teorema da construção de Stenrood que permite que definidas as funções de transição de um espaço fibrado possamos construir um único fibrado com uma fibra determinada na qual o grupo estrutural atua de uma maneira definida. Surge então a possibilidade de construirmos um fibrado espacial, cuja fibra é o próprio grupo que age em si mesmo pela esquerda, que é o fibrado principal.

Adotaremos aqui outro caminho equivalente para definirmos um fibrado principal (Nomizu e Kobayashi) mais simples e suficiente para nossos objetivos.

Diremos então que uma terna $(P, M, G.)$ onde P, M são variedades diferenciáveis e G é um grupo de Lie constitui um espaço fibrado principal de base M, grupo estrutural G e espaço total P se:

(i) G atua à direita, diferenciavelmente e livremente em P

(ii) $M = P/G$

(iii) P é localmente trivial sobre $M \times G$.

A condição (i) significa que se existe um $p \in P$ tal que $pg = P$ então g é a identidade de G.

A condição (ii) significa que M é o conjunto das classes de equivalência de elementos de P definidas pela relação

$$p \sim \tilde{p} \quad se \quad \exists g \in G / \; pg = \tilde{p}$$

Assim, um elemento $x \in M$ é uma classe de equivalência $[p]$ denotada muitas vezes por $[p] = pG$ (p é dito um represente de $[p]$. Notemos que essa propriedade permite que definamos uma projeção canônica $\pi : P \to M$, que associa a cada p sua classe de equivalência $[p]$. A fibra dessa projeção num ponto $x = [p]$ de M consiste então na classe de equivalência

$$\pi^{-1}(x) = \{ pg \mid g \in G \} \qquad \pi(p) = x$$

Segue-se então que se $p \in \pi^{-1}(x)$ então pg também pertence a $\pi^{-1}(x)$.

Finalmente (iii) significa que para cada ponto $x \in M$ existe um aberto U e um difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$. Da forma $\psi(p) = (\pi(p), \varphi(p))$ onde $\varphi(pg) = \varphi(p)g$.

Como exemplo seja $M = \mathbb{R}$ e $G = U(1)$, $P = M \times G$. O espaço topológico base do grupo $U(1)$ dos números complexos unimopulares é a circunferência S^1, de forma que P pode ser visualisado como um cilindro infinito. A ação de G em P pode ser tomada como

$$(x, h) \xmapsto{g} (x, hg)$$

Geometricamente isto significa que a ação de G roda os pontos do cilindro mantendo-os na circunferência definida por uma secção transversal do cilindro que contém o ponto original. Essa atuação

é evidentemente diferenciável e livre.

Da mesma forma fica satisfeita a condição (ii) pois a relação de equivalência identifica os pontos de uma mesma circunferencia transversal, por sua vez identificado a um único ponto do eixo axial do cilindro. Uma trivialização desse fibrado é a aplicação identidade que evidentemente satisfaz (iii).

Outro exemplo importante nas aplicações é obtido considerando-se $M = \mathbb{R}^4$ (possivelmente munido de uma métrica Lorentziana) e $G = SU(2)$; P ainda é $\mathbb{R}^4 \times SU(2)$. A fibra $\pi^{-1}(x)$ de um ponto do $\mathbb{R}^4$ é um exemplar do $SU(2)$, de forma que pictoricamente falamos que a construção do fibrado principal consiste em "pregarmos um exemplar do grupo $SU(2)$ em cada ponta da base".

O espaço total P de um fibrado principal é uma variedade diferenciável de forma que todos os conceitos que podem ser definidos numa variedade existem em P, campos vetoriais, curvas, funções, formas, etc. A novidade é que como P se articula com M através da projeção $\pi : P \to M$, podemos "abaixar" de forma unívoca curvas de P, isto é, se $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to P$ é uma curva de P, então $\pi(\gamma(t))$ é uma curva de M. O mesmo procedimento pode ser realizado para campos vetoriais "abaixados" pela derivada π_* da projeção. Com as formas diferenciáveis ocorre o oposto: elas podem ser levantadas pela aplicação π^*. Em outras palavras: a cada campo vetorial sobre P existe associado um único campo sobre M e a cada p-forma de M existe uma única p-forma de P.

No entanto não existe em princípio uma maneira de "levantarmos" campos e "abaixarmos" formas; isso só será possível quando introduzirmos uma conexão sobre P.

Em cada ponto de p existe um subespaço do espaço $T(P)_p$ tangente e P no ponto p denominado espaço dos vetores verticais, denotado V_p e definido por

$$V_p = \{ X \in T(P)_p \mid d\pi(X) = 0 \}$$

Os vetores verticais são vetores que são destruídos pela ação de derivada da projeção. Outra caracterização de V_p pode ser conseguida se notarmos que as fibras de π em cada ponto x de M são subvariedades de P que são levadas integralmente em x, isto significa que V_p coincide com o espaço tangente a fibra $\pi^{-1}(\pi(p))$, isto é

$$V_p = T(\pi^{-1}(x))_p$$

Como exemplo consideremos um campo vetorial X em P; usando $d\pi$ obtemos um campo $d\pi(X)$ em M. Se X é um campo vertical, seu correspondente em M é o campo nulo. Se ao invés considerarmos uma 1-forma ω em M sua correspondente Ω em P é aquela que leva o vetor $X_p \in T(P)_p$ no número real $\omega(d\pi(p)(X_p))$. Assim a 1-forma levantada aniquila todos os vetores verticais.

FIBRADOS ASSOCIADOS

Vamos mostrar agora que dado um fibrado principal $P(M,G,\pi)$ e uma variedade F na qual G atua deferencialmente pela esquerda, podemos construir um novo espaço fibrado de mesma base e grupo, mas de fibra F, denominado fibrado associado a P de fibra F.

Nosso primeiro passo consiste em definir uma ação de G em PxF à direita que seja diferenciável e livre. Basta para isso, colocarmos

$$(p,f)g \equiv (pg, g^{-1}f)$$

Se existe um par (p_0, f_0) tal que

$$(p_0, f_0)g = (p_0 f_0)$$

necessariamente temos $p_0 = p_0 g$ e como atuação de G em P é livre segue-se que a atuação de G em PxF, também é livre.

Consideramos agora o conjunto E, futuro espaço total do fibrado associado, formado pelas classes de equivalência definidas pela atuação de G em PxF, isto é $E = PxF/G$. Assim os pontos de E são classes de equivalência denotadas $[(pf)]$ onde (p,f) é um dos representantes da classe.

Consideremos ainda a aplicação $\gamma : PxF \to \frac{PxF}{G}$ que leva cada para de PxF na sua correspondente classe de equivalência, isto é $\gamma(p,f) = [(p,f)]$. Temos então a situação dada pelo gráfico

$$\begin{tikzcd} PxF \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E = PxF/G \\ P \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd}$$

Isto permite que construamos uma projeção $\pi_E : E \to M$, dada por $\pi_E(\bar{e}) = \pi \circ \pi_1(\gamma^{-1}(\bar{e}))$. Essa aplicação está bem definida pois se (p,f) e $(\tilde{p}, \tilde{f})$ são dois pontos distintos de $\gamma^{-1}(\bar{e})$, teremos necessariamente $\tilde{p} = pg$ de forma que p e $\tilde{p}$ pertencem à mesma fibra de π.

Pode-se mostrar ainda a trivialidade local, isto é, a existência de um isomorfismo de $\underline{\pi_E^{-1}}(x)$ em $U \times F$, sabendo que $\pi^{-1}(x)$ é difeomorfo a $U \times G$.

TEORIA DAS CONEXÕES EM FIBRADOS PRINCIPAIS

O conceito de conexão foi introduzido pela primeira vez por Christoffel no estudo das variedades rimanianas. Posteriormente Levi-Civitta forneceu uma interpretação geométrica mostrando que a existência de uma conexão permitia o desenvolvimento da idéia de paralelismo. Coube a Koszul a tarefa de axiomatização da teoria das conexões exibindo as propriedades que definem uma conexão. E. Cartan, em sua teoria dos referenciais móveis, introduziu a matriz 1-forma da conexão. Entretnato a generalização do conceito foi possível a partir da teoria dos espaços fibrados e foi realizada por Ehresmann e será dessa generalização que nos ocuparemos neste capítulo.

Nosso objeto básico é então um fibrado principal $P(M,G,\pi)$. O espaço principal P do fibrado é formado por uma família de subvariedades: as fibras. Em cada ponto p de P, temos um subespaço $V_p \subset T(P)_p$ formado pelos vetores verticais. Podemos ainda abaixar vetores de $T(P)_p$ para $T(M)_{\pi(p)}$ usando o diferencial $d\pi$.

Uma conexão em P significa uma maneira de realizarmos o processo inverso, isto é, levantar um vetor tangente a um ponto da base, para um ponto de P pertencente à fibra do referido ponto da base.

Nossa primeira caracterização de uma conexão será como uma aplicação que associa a cada $p \in P$ uma aplicação linear Γ_p definida em $T(M)_{\pi(p)}$ com imagens em $T(P)_p$

$$p \mapsto \Gamma_p \;/\; \Gamma_p : T(M)_{\pi(p)} \to T(P) \text{ é linear}$$

exigimos ainda que ela tenha as propriedades:

(a) $d\pi \cdot \Gamma_p$ = identidade de $T(M)_{\pi(p)}$

Isto significa que se $X_{\pi(p)}$ é um vetor de $T(M)_{\pi(p)}$ que é "levantado" por Γ_p para um vetor $\tilde{X}_p = \Gamma_p(X_{\pi(p)})$, então esse vetor quando "abaixado" por $d\pi$ reproduz $X_{\pi(p)}$, isto é,

(b) $\Gamma_{pg} = dR_g \Gamma_p$

Primeiro observemos que se $p \in \pi^{-2}(\pi(p))$ então, $pg \in \pi^{-2}(\pi(p))$. Suponhamos então que temos um vetor $X_{\pi(p)}$; ele pode ser levantado para o ponto p, através de Γ_p e também pode ser levado a pg através de Γ_{pg}. Obtemos então dois vetores $\Gamma_p(X_{\pi(p)})$ e $\Gamma_{pg}(X_{\pi(p)})$. Agora a aplicação dR_g permite justamente que transportemos $\Gamma_p(X_{\pi(p)})$ para o ponto pg, isto é, $dR_g(p)(\Gamma_p(X_{\pi(p)}))$ é um vetor tangente a pg. A propriedade (b) nos diz que os dois procedimentos são equivalentes. Uma notação mais precisa será

$$\Gamma_{pg}(X_{\pi(p)}) = dR_g(p)(\Gamma_p(X_{\pi(p)})) \qquad \forall\, X_{\pi(p)}$$

Exigimos finalmente que a aplicação $p \to \Gamma_p$ seja C^∞.

Os vetores do conjunto $H_p = \Gamma_p(T(M)_{\pi(p)})$ são denominados vetores horizontais. Inicialmente notemos que H_p é um subespaço vetorial de $T(P)_p$ graças a linearidade de Γ_p. Além disso $V_p \cap H_p = \{0\}$ isto decorre do fato de que a aplicação $d\pi$ restrita a H_p é isomorfismo sobre $T(M)_{\pi(p)}$. Sendo um isomorfismo, ao vetor nulo de $T(M)_{\pi(p)}$ existe somente um vetor de H_p e esse é o vetor nulo; logo nenhum elemento de H_p está em V_p, pois os vetores de V_p são aniquilados por $d\pi$. A dimensão de H_p é m, mesma dimensão da base M, enquanto que a dimensão de V_p é o grau do grupo estrutural,

isso garante que $T(P) = H_p \oplus V_p$.

Temos então outra maneira de caracterizar uma conexão, como uma <u>distribuição</u> sobre P. Esse conceito joga um papel central na teoria de Frobenius e encontra grande aplicação na teoria dos problemas mecânicos vinculados.

Uma distribuição H em P (variedade arbitrária) de dimensão m é uma aplicação que associa a cada $p \in P$ um subespaço m-dimensional H_p de $T(P)_p$. Assim (b) significa que a distribuição H é invariante à direita, isto é $dR_g H_p = H_{pg}$ enquanto que (c) se refere à diferenciabilidade de H.

A partir de uma conexão podemos associar a cada campo vetorial de M um campo vetorial de P, levantando os vetores em cada ponto com a conexão. Esse campo vetorial é denominado levantamento.

Além disso notemos que agora podemos decompor um vetor $X_p \in T(P)_p$ numa parte vertical e numa parte horizontal

$$X_p = h X_p + v X_p$$

Agora iremos caracterizar uma conexão como uma 1-forma com valores na álgebra de Lie do grupo G. Preliminarmente teremos que fazer duas observações que não se prendem especificamente à teoria das conexões.

A primeira nos mostra que se temos um grupo G que age em M pela direita, podemos associar a cada $\xi \in \mathcal{G}$ um campo vetorial, denotado ξ^* definido em P. Isso se faz considerando o subgrupo $\exp t\xi$, a um parâmetro de G, atuando num ponto p. Isso nos dá uma curva sobre P, parametrizada por t e que coincide com p,

para t = 0. Definimos então $\xi^* = \sigma(\xi)$ como sendo o campo vetorial

$$\xi^*(p) = \frac{d}{dt}\, p\exp \xi t \Big|_{t=0}$$

Pode-se mostrar ainda (Nomizu e Kobayashy, Proposition 4.1, pag. 42) que essa aplicação $\xi^* = \sigma(\xi)$ é um homomorfismo algébrico e que se a atuação de é livre então $\sigma(\xi) \neq 0$ se $\xi \neq 0$.

A segunda observação consiste em aplicar essa idéia a um fibrado principal, levando cada $\xi \in \mathcal{G}$ num campo vetorial ξ^* de P, denominado campo fundamental correspondente a G. Vamos mostrar agora que $dR_g(\xi^*)$ é o campo fundamental correspondente a $\mathrm{ad}\, g^{-1}\xi$.

Temos

$$\xi^*(p) = \frac{d}{dt}\left(p\exp \xi t\right)$$

$$dR_g(\xi^*) = \frac{d}{dt}\, p\exp g\xi g^{-1} t$$

$$= \frac{d}{dt}\, p\exp \mathrm{ad}\, g^{-1}(\xi)$$

Temos então uma forma de levar cada $\xi \in G$ em seu campo fundamental. Notemos ainda que ξ^* é um campo vertical pois o caminho $p\exp \xi t$ está totalmente contido numa fibra.

Denominaremos então 1-forma A associada a uma conexão, como sendo uma 1-forma com valores na álgebra de Lie tal que ela associa a cada X de $T(P)_p$ o elemento $\xi \in \mathcal{G}$ tal que $\xi^*(p) = vX$. Uma consequencia dessa definição é que se $X \in H_p$ então $\xi^*(p) = 0$ que implica $A(X) = 0$ pois $\xi = 0$. Assim o espaço horizontal em cada ponto é o núcleo da 1-forma conexão. Outra propriedade da 1-forma conexão e que decorre de nossa segunda observação é:

$$R_g^* \omega = \mathrm{ad}\, g^{-1}\, \omega$$

essa expressão se detalha no seguinte

$$R_g^* \omega(X) = \omega(dR_g(X)) = \mathrm{ad}\, g^{-1}\, \omega(X)$$

CONEXÃO E CURVATURA NUM FIBRADO TRIVIAL

Uma 1-forma genérica A definida em P = MxG com valores em $\mathfrak{g}$ pode ser escrita na forma

$$A(p) = \xi_R \left[A^R_\mu(p)\, dx^\mu + A^h_m(p)\, \xi^m_L \right]$$

onde p = (x,g), ξ_R é uma base de $\mathfrak{g}$, dx^μ é a base covariante natural de M e ξ^m_L são as 1-formas duais dos campos invariantes a esquerda ξ^L_m gerados pelos elementos ξ_R de $\mathfrak{g}$.

O campo fundamental ξ^*, definido em P, associado a $\xi \in \mathfrak{g}$ é definido por

$$\xi^*(p) = \frac{d}{dt}\, p \exp t\xi \Big|_{t=0}$$

No nosso caso particular temos p = (x,g) de forma que

$$\xi^*(p) = \xi_L(g)$$

Uma 1-forma conexão satisfaz

$$A(\xi^*) = \xi \qquad \forall \xi \in G$$

Isso nos dá a seguinte relação:

$$\xi_R A^h_m(p)\, \xi^m_L\, (\xi_L) = \xi$$

o que implica em $A^h_m(p) = \delta^h_m$

Isto significa que o segundo termo da conexão é a 1-forma θ, canonica de Mauner Cartan

$$A = \xi_R A^h_\mu(p)\, dx^\mu + \theta$$

onde

$$\theta = \xi_k \xi^k_L$$

Uma 1-forma conexão deve ser equivariante. A equivariança é trivialmente satisfeita pela forma θ, e quando imposta sobre $\xi_k A^k_\mu dx^\mu$ dá

$$\xi_k A^k_\mu (ph) dx^\mu = ad g^{-1}(\xi_k) A^k_\mu (p) dx^\mu$$

ou ainda

$$\xi_k A^k_\mu (x, gh) = ad g^{-1}(\xi_k) A^k_\mu (x, g)$$

Fazendo g = e temos o resultado

$$\xi_k A^k_\mu (x, h) = ad h^{-1}(\xi_k) A^k_\mu (x, e)$$

Isso define a variação de A^k_μ com h.

Temos então a expressão geral para uma forma conexão

$$A(x, g) = ad g^{-1}(\xi_k) A^k_\mu (x) dx^\mu + \theta$$

Calculemos agora a 2-forma curvatura F, usando a equação estrutural de Cartan

$$F(X, Y) = dA(X, Y) + [A(X), A(Y)]$$

A forma curvatura é horizontal, de maneira que ela necessariamente deve ser da forma

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

onde $F_{\mu\nu}$ tem valores em $\mathfrak{g}$.

Calculemos então

$$F_{\mu\nu} = F(\partial_\mu, \partial_\nu)$$

Primeiro temos

$$d\omega(\partial_\mu, \partial_\nu) = (\partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu)\, \mathrm{ad}\, g^{-2} \mathcal{E}_k$$

Além disso

$$[\omega(\partial_\mu), \omega(\partial_\nu)] = [\mathrm{ad}\, g^{-1} \mathcal{E}_m A^m_\mu, \mathrm{ad}\, g^{-1} \mathcal{E}_n A^n]$$

$$= f^k_{mn} A^m_\mu A^n_\nu\, \mathrm{ad}\, g^{-1} \mathcal{E}_k$$

Logo temos

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu + f^k_{mn} A^m_\mu A^n_\nu)\, \mathrm{ad}\, g^{-1} \mathcal{E}_k$$

que é a expressão familiar das teorias de gauge

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

As conclusões desse trabalho surgem da comparação formal das bem conhecidas teorias de Gauge[26] com a teoria das conexões e Ehresmann num fibrado g-principal, exposta no último capítulo.

Consideremos então uma variedade diferenciável M de classe (a diferenciabilidade de uma variedade não é acessível à experiência) e dimensão quatro, tomada como base para nosso fibrado. M será suposta para compacta, para que existam partições de unidade, bem como conexões em abundância. Se queremos considerar efeitos gravitacionais, devemos considerar M munida de uma métrica pseudo-rimaniana de signatura 2. Se os efeitos gravitacionais não são importantes M é o $\mathbb{R}^4$ com a métrica de Lorentz. Atualmente tem sentido considerarmos M como sendo o espaço euclidiano quadridimensional para a investigação das soluções euclidianas de ação finita, que são significativas no processo de quantização a la Feymann. Se não há efeitos gravitacionais e não há monopolos, M será sempre difeomorfa ao $\mathbb{R}^4$. No entanto a introdução de singularidades (monopolos) força-nos a abstrair os pontos singulares de M de forma que ele passa a ter propriedades topológicas diferentes do $\mathbb{R}^4$ (a abstração de um ponto do $\mathbb{R}^4$ torna seu primeiro grupo de

homotopia não trivial). Os pontos dessa variedade M, básica tem como significado físico o espaço e o tempo.

Consideremos também um grupo de Lie, que deverá variar conforme o tipo de interação. Se $G=U(1)$ estamos frente a eletrodinâmica dos campos escalares carregados, onde mesons interagem através de fotons. Se $G=SU(2)$ trata-se de interação proton-neutron mediada pelo campo de Yang-mills. Se $G=SU(2)$ temos Quark's interagindo com gluons e finalmente $G=O^{++}(3,1)$ nos dá a teoria da gravitação.

Construimos então o fibrado g-principal sobre M, $P(M,G,\pi)$ e denominaremos uma Gauge a cada uma das trivializações locais de P. Se temos duas trivializações numa mesma região a mudança de Gauge se faz através das funções de transição. Como P é g-principal suas secções se identificam a trivializações, de forma que uma Gauge se identifica a uma secção de g.

Construímos também o fibrado vetorial associado, a G cuja fibra é o C^N das n-uplas de números complexos. G atua em C^N pela esquerda. As secções desse fibrado se identificam com os campos fundamentais.

Mínimos P de uma 1-forma conexão A que fornece uma 2-forma curvatura $F=h^*dA$. A conexão A nos fornece componentes, que são formas sobre M com valores em G. Essas componentes dependem da trivialização que se faz de P, isto é são Gauge-dependentes. Ao mudarmos a Gauge as componentes se transformam conforme o exposto no último capítulo, o que coincide com as transformações usuais de Gauge. O mesmo ocorre com as leis de transformação da curvatura. As componentes da curvatura se relacionam com as componentes de

conexão da mesma maneira que os potenciais de Gauge se relacionam com os campos de Gauge. Assim ficam identificados o campo e o potencial de Gauge com a conexão e a curvatura g-principal.

A estrutura geométrica do fibrado g-principal acarreta as igualdades de Bianch's que também se verificam nas teorias de Gauge (são as equações inomogêneas de Maxwell). Assim a conclusão geral é que a estrutura de fibrado g-principal munido de uma conexão é a estrutura adequada para a descrição das interações na natureza. Temos então uma abordagem teórica capaz de traduzir os problemas físicos numa linguagem geométrica.

A primeira grande vantagem dessa aproximação teórica fica no terreno da linguagem. E esse não é um problema trivial na física de hoje e de ontem. A colocação clara de um problema científico, indispensável para a proposição de novas experiências, exige uma linguagem adequada e as teorias das conexões nos dá essa linguagem. Os mais céticos apontariam para a perspectiva de uma grande revolução científica que abandone as teorias de Gauge ou até o próprio método langragiano. Apesar de não ver hoje nenhum indício forte nesse sentido, sustento que as teorias científicas não são obra do acaso e também não saem da cabeça de nenhum gênio por mais inteligente que seja. As teorias científicas se desenvolvem na história humana, num processo de superação que nunca antagoniza rigidamente uma teoria a outra. A própria mecânica clássica pode nos ensinar. Do ponto de vista do conteúdo, a mecânica de Hamilton nada acrescenta ao trabalho de Newton, mas foi o formalismo Hamiltoniano que ofereceu o acúmulo necessário, no plano teórico, para a mecânica quântica.

A segunda vantagem da teoria das conexões é que ela exibe o caráter geométrico das leis da natureza e nesse sentido aponta para o caminho indicado por Einstein. Somente que agora a deformação não se dá mais no plano do espaço tempo e sim do objeto que condensa as propriedades globais das interações: o fibrado principal. A presença das partículas de Gauge (mesons, fotons, gluons), tem como decorrência efeitos de curvatura sobre o fibrado principal.

Alguns problemas e tarefas se colocam. Primeiramente uma investigação mais profunda dessa estrutura matemática; a discussão dos initantons presentes nas teorias de Gauge nos leva diretamente às teorias da homologia-coomologia; e existem vários outros aspectos ainda não explorados, como por exemplo o significado geométrico das correntes.

Agora o que me parece principal é que a geometrização das teorias de Gauge ainda é parcial. Digo isso no sentido de que as equações de movimento não decorrem integralmente da geometria, mas precisam ser impostas ao ad hoc pela definição de uma langragiana. Nesse sentido estão os trabalhos de Doria (já citado) nos quais se procura relacionar as equações de Yang-Mills com o conceito de torção.

Além disso, o problema de quantização da teoria ainda ao menos foi tocado a partir dessa ótica geométrica. Teremos conexões quânticas? Qual a estrutura do espaço das conexões a luz da integração de Feymann? Esse campo parece estar se desenvolvendo a partir das field manifolds, segundo observações recentes do Prof. B. Scrhoer.

Enfim, um mundo novo se abre com a possibilidade de uma interpretação geométrica precisa das interações da natureza. Se essa artilharia vai nos capacitar ou não a compreensão das interações fortes é uma questão aberta. Esse trabalho representa uma primeira fase, no sentido de compreender essa linguagem matemática nova, o próximo passo é verificar sua capacidade de colocar-nos em contato com a realidade.

BIBLIOGRAFIA COMENTADA

A. TEXTOS EM MATEMÁTICA

São inúmeros os textos disponíveis em matemática sobre os tópicos cobertos nessa dissertação, uma vez que cobrem uma das áreas que mais se desenvolveu na matemática contemporânea. Citaremos aqueles textos que mais utilizamos e que contêm também uma orientação bibliográfica mais ampla:

1. KOBAYASHI and NOMIZU - Foundations of Differential Geometry. vol. I. Interscience Publishers, 1969.
   Texto profundo, completo e claro, talvez o melhor livro sobre geometria. Na medida que contêm toda a geometria moderna é bastante sintético e de leitura difícil. É citado como referência básica em quase todos os demais textos.

2. STEENROD, N. - Topology of the Bundles, Princeton Univ. Press, 1951.
   Esse livro é o primeiro texto que expõe o conjunto da teoria dos fibrados, escrito quando a teoria ainda estava a nível de publicações especializadas. Uma leitura difícil, num nível muito mais profundo do que o necessário para as aplicações.

3. SPIVAK, MIKE - Differential Geometry. Vol. I e II Publish or Perish, Inc., 1970.
   Uma obra extensa, completa que tem a vantagem de apresentar os comentários históricos.

4. MACKENZIE, R. e AUSLANDER, L. - Introductions to differentiable manifolds. MacGraw-Hill, 1963.
   Texto canônico da área, não focaliza a teoria das conexões.

5. LIMA, ELON LAGES - Variedades diferenciáveis. IMPA.
   Texto canônico, em português. Literatura acessível na linguagem usada pelos matemáticos brasileiros.

6. LIMA, ELON LAGES - Cálculo tensorial. IMPA, 1965.
Uma exposição abstrata e completa do cálculo tensorial e exterior.

7. SPIVAK, MICHAEL - Calculus on manifolos. W.A. Benjamin, Inc., 1965.
O capítulo 4 desse texto contém uma exposição acessível do conceito de forma diferenciável.

8. CHEVALLEY, GLAUDE - Theory of Lie Grouds. Prinoton University Press, 1946.
Texto fundamental que contém quase todos os resultados demonstrados.

B. TEXTOS EM FÍSICA MATEMÁTICA

9. WESTENHOLZ, C. von - Diferential forms in mathematical physics. North-Holland, 1978.
Texto excelente, ímpar na bibliografia. Contém uma exposição completa da geometria moderna, incluindo a teoria de Frobenius e a cohomologia de De Rham, Leitura fácil e útil. Contém inúmeras aplicações em física.

10. HERMANN, ROBERT - Vector Bundles in mathematical Physics, vol. I. W.A. Benjamin, 1970.
R. Hermann tem sido pioneiro, ao enfatizar a aplicação dos métodos da geometria em física. Entretanto o texto é difícil e ao meu ver confuso.

11. DRECHSLER, W. e MAYER, M.E. - Fiber Bundle Techniques in Gauge Theoriel. Lecture notes in physics, nº 67.
Contém dois ensaios sobre o tema; são trabalhos que fornecem as melhores pistas para a compreensão das ligações com a física. O texto de Drechsler tem a desvantagem de não exibir detalhadamente o campo de Gauge como uma conexão.

12. HAUKING, S.W. e ELLIS, G.F.R. - The large scale structure of space-time. Cambridge, 1973.
Texto excelente, em seu primeiro capítulo cobre toda a geometria clássica, chegando inclusive a teoria dos espaços fibrados.

13. WHEELER, THORNE, MISNER - Gravitation - W.H. Freeman and Company, 1970.
Contém a geometria clássica, com inúmeras gravuras e numa linguagem quase literária.

14. THOMAS, GERALD. H - Introductory lectures on fibre bundles and topology for physicists.
Apostila não publicada. Contém uma exposição fortemente influenciada pelo texto de Stanrood. Gerald H. Thomas. High Energy Physics division. Argonne, Illinois, 60439.

C. OUTROS TEXTOS

15. Wu and YANG - Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of Gauge Fields. Physical Review D, vol. 12, nº 12, 1975.

16. BOHM e AHARONOV - Phys. Rev., 115, 485 (1959).

17. CHAMBERS, R.G. - Phys. Rev. Le H 5, 3 (1960).

18. WEYL, H.Z. - Phys. Rev. 56, 330 (1929).

19. YANG-MILLS - Phys. Rev., 96, 191 (1954).

20. MARCIANO, W. e PAGELS, H. - Physics Reports, vol. 360, nº 3, 1978.

21. RAJAMAN - Inter soliton forces in weak coupling quantum field theories. Pre-print Institute of Science, Bengaiore 560 012. India.

22. RAJARAMAN, R. - Physics Reports, 21, nº 5, 1975 - 227-313.

23. COLEMAN, S. - The use of instantons lectures delivered at the 1977 International School of Subnuclear Physics, Ettore, Majorana.

24. HERMANN Robert - Modern differential geometry in elementary particle physics. Proceedings, Salamanca 1977. Lecture Notes in Physics, nº 77.

25. DORIA, Francisco Antonio - Tese de Livre-Docência. Depto. de Física, UFRJ.

26. GIAMBIAGI, J.J. - Teoria de campos de Gauge, UFSC, 1978.