PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

ISABELA RUIZ CAVALCANTI DE CARVALHO

O USO DA LINGUAGEM PARA ENSINAR FRAÇÕES NA TRANSIÇÃO DO QUINTO PARA O SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

SÃO PAULO

2022

ISABELA RUIZ CAVALCANTI DE CARVALHO

O USO DA LINGUAGEM PARA ENSINAR FRAÇÕES NA TRANSIÇÃO DO QUINTO PARA O SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (PPGE-FE-USP), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Educação.

Área de Concentração: Educação Científica, Matemática e Tecnológica

Orientadora: Profa. Dra. Raquel Milani

SÃO PAULO

2022

Catalogação da Publicação
Ficha elaborada pelo Sistema de Geração Automática a partir de dados fornecidos pelo(a) autor(a)
Bibliotecária da FE/USP: Nicolly Soares Leite - CRB-8/8204

Ruiz Cavalcanti de Carvalho, Isabela

Ru O USO DA LINGUAGEM PARA ENSINAR FRAÇÕES NA TRANSIÇÃO DO QUINTO PARA O SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL / Isabela Ruiz Cavalcanti de Carvalho; orientadora Raquel Milani. -- São Paulo, 2022.

151 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Educação Científica, Matemática e Tecnológica) -- Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Linguagem. 2. Matemática. 3. Frações. 4. Transição escolar. 5. Ensino Fundamental. I. Milani, Raquel, orient. II. Título.

CARVALHO, I. R. C. **O USO DA LINGUAGEM PARA ENSINAR FRAÇÕES NA TRANSIÇÃO DO QUINTO PARA O SEXTO ANO DO ENSINO**. 2022. 151 p. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Educação Científica, Matemática e Tecnológica) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

Aprovado em: 18/11/2022

Banca Examinadora

Profa. Dra. Raquel Milani

Instituição: Universidade de São Paulo

Julgamento: Aprovado

Prof. Dr. David Pires Dias

Instituição: Universidade de São Paulo

Julgamento: Aprovado

Profa. Dra. Patrícia Linardi

Instituição: Universidade Federal de São Paulo

Julgamento: Aprovado

AGRADECIMENTOS

A Deus, por conduzir toda minha vida, ser minha força nos momentos mais difíceis e por me conceder a graça de concluir tanto a graduação quanto o Mestrado na USP.

A Nossa Senhora, em especial, na sua apresentação como das Graças, por interceder por mim durante todo esse processo.

A minha querida mãe, por todo apoio desde os anos escolares, por sempre me incentivar a buscar mais e ser melhor, por cada carinho nos momentos de desespero, pela paciência nos momentos em que precisava me dedicar a este trabalho e, especialmente, por todo amor e carinho ao longo de toda a minha vida

Ao meu noivo Leonardo, pelo apoio, amor e carinho que me dá desde a graduação, pela força e incentivo nos momentos em que achei que não daria conta de terminar meus objetivos, pela paciência nos momentos em que precisava me dedicar a este trabalho, pelas milhares de vezes em que pedia para ler este texto, pela força quando a vida pessoal estava querendo me derrubar e especialmente sempre me apoiar nos meus sonhos e nunca me deixar desistir.

Ao meu irmão, Felipe, minha cunhada Patrícia e minha sobrinha Maria Clara, por se preocuparem comigo, compreenderem minhas ausências e serem presentes em minha vida ao longo de todos esses anos.

Aos meus avós Salvador e Teresinha, por sempre terem sido uma família incrível para mim e que do jeitinho deles apoiavam e comemoravam todas as minhas conquistas. Hoje não temos mais convívio físico, mas as lembranças são eternas.

Aos meus sogros e colegas de profissão, por cada conversa e cada leitura sobre a minha pesquisa e pela paciência nos momentos em que me ausentei para me dedicar a este trabalho.

Aos demais familiares e amigos, pelo apoio e incentivo.

A Raquel, por ter sido uma excelente professora durante a graduação e uma orientadora melhor ainda durante este trabalho, paciente, carinhosa e que soube entender todas as adversidades que passei durante o processo, sem me deixar desistir.

A minha colega e parceira de mestrado Flávia por todo apoio, carinho, parceria, conversas longas ao telefone, opiniões sobre o trabalho e incentivo ao longo de todos esses anos.

Às escolas onde a pesquisa foi realizada e aos professores que participaram desta pesquisa pela parceria e colaboração.

A todos que fizeram parte desta etapa em minha vida.

O correr da vida embrulha tudo, a vida é assim: esquenta e esfria, aperta e daí afrouxa, sossega e depois desinquieta. O que ela quer da gente é coragem.

ROSA, J. G. Grande sertão: veredas. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

CARVALHO, I. R. C. **O USO DA LINGUAGEM PARA ENSINAR FRAÇÕES NA TRANSIÇÃO DO QUINTO PARA O SEXTO ANO DO ENSINO**. 2022. 151 p. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Educação Científica, Matemática e Tecnológica) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

Nesta pesquisa, buscamos compreender como professores da transição do quinto para o sexto ano utilizam a linguagem e os simbolismos próprios da matemática e uma linguagem mais próxima ao cotidiano dos alunos durante o ensino de frações. Utilizamos como principal referencial teórico as ideias de Machado (2011) sobre Matemática e Língua Materna quando o autor discute as características de dualidade e de impregnação entre elas. Além disso, recorreremos também aos conceitos de Santos (2015) sobre o ensino de matemática no Ensino Fundamental, de Gómez-Granell (2003) sobre a aquisição da linguagem matemática e de Milani (2017) sobre o diálogo em educação matemática. A metodologia de pesquisa deste trabalho é do tipo qualitativa e teve como instrumentos de produção de dados entrevistas com três professores do quinto ano e três do sexto ano de três escolas diferentes, além da observação de algumas aulas sobre frações desses docentes. Como este trabalho aborda um conteúdo específico da matemática, as frações, realizamos também um estudo teórico sobre as principais ideias de frações que são trabalhadas durante o Ensino Fundamental e sobre qual é a indicação de conteúdos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o quinto e o sexto ano. Após a produção de dados, optamos por escrever episódios sobre as situações mais relevantes relacionadas aos objetivos desta pesquisa. Apresentamos cada um desses momentos através da descrição do que aconteceu nas aulas e depois elaboramos uma breve análise a partir do nosso referencial teórico. Ao longo dos episódios pudemos perceber como o uso de desenhos e de materiais concretos pode contribuir com a impregnação mútua entre Língua Materna e Matemática. Também pudemos observar situações em que existiu a dualidade entre técnica e significado, além dos elementos de um efetivo diálogo. Observamos as diferenças entre o ensino de frações nos dois anos escolares aqui estudados, como a formação do docente, suas experiências e o uso da Língua Materna podem influenciar nesse aspecto da educação.

Palavras-chave: Linguagem. Matemática. Frações. Transição escolar. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

CARVALHO, I. R. C. **THE USE OF LANGUAGE TO TEACH FRACTIONS IN THE TRANSITION FROM THE FIFTH TO THE SIXTH YEAR OF ELEMENTARY SCHOOL.** 2022. 151 p. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Educação Científica, Matemática e Tecnológica) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

In this research, we seek to understand how teachers in the transition from the fifth to the sixth grade use the language and symbolism of mathematics and a language closer to the students' daily lives during the teaching of fractions. We use Machado's (2011) ideas on Mathematics and Mother Tongue as the main theoretical framework when the author discusses the characteristics of duality and impregnation between them. In addition, we will also use the concepts of Santos (2015) on the teaching of mathematics in Elementary School, of GómezGranell (2003) on the acquisition of mathematical language and of Milani (2017) on dialogue in mathematics education. The research methodology of this work is qualitative and had as data production instruments interviews with three teachers of the fifth year and three of the sixth year from three different schools, in addition to the observation of some classes on fractions of these teachers. As this work deals with a specific content of mathematics, fractions, we also carried out a theoretical study on the main ideas of fractions that are worked during Elementary School and on what is the indication of contents of the National Common Curricular Base (BNCC) for the fifth and the sixth year. After the production of data, we chose to write episodes about the most relevant situations related to the objectives of this research. We present each of these moments through the description of what happened in the classes and then we elaborate a brief analysis from our theoretical framework. Throughout the episodes we could see how the use of drawings and concrete materials can contribute to the mutual impregnation between Mother Tongue and Mathematics. We were also able to observe situations in which there was a duality between technique and meaning and elements of an effective dialogue. We observed the differences between the teaching of fractions in the two school years studied here, as the teacher's training, their experiences and the use of the Mother Tongue can influence this aspect of education.

Keywords: Language. Mathematics. Fractions. School Transition. Elementary School.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – CONSTRUÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA

1.1 – Percurso da Pesquisadora

Ao longo de minha[1] formação em Licenciatura em Matemática, pude observar algumas situações que chamaram minha atenção para a transição do quinto para o sexto ano do Ensino Fundamental. Durante um mesmo ano, realizei um estágio remunerado não obrigatório em um colégio particular da cidade de São Paulo, trabalhando com alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e estudantes do Ensino Médio e um estágio curricular obrigatório de minha graduação, agora com alunos do 3º ano do Ensino Fundamental em uma escola da rede pública estadual de São Paulo.

Durante a realização desses estágios, o que também chamou minha atenção e, motivou o desenvolvimento deste trabalho, foi o fato de que assuntos como o tema da transição escolar do quinto para o sexto ano, a conscientização e o preparo dos professores para lidar com alunos de idades diferentes, passaram despercebidos ou até mesmo não foram discutidos durante minha formação acadêmica.

Tendo em vista que o professor licenciado, de uma forma geral, irá trabalhar com alunos que em sua maioria têm entre 10 e 18 anos, uma faixa etária repleta de mudanças físicas, psíquicas, comportamentais etc. Assim, professor dessa fase escolar poderia ter uma maior consciência sobre essas transformações.

Além disso, é importante que o professor compreenda quem são os seus alunos, conheça sua trajetória acadêmica e aproxime sua prática docente da realidade deles. Indo ao encontro dessa ideia, Freire (1997, p.53) afirma que “Procurar conhecer a realidade em que vivem nossos alunos é um dever que a prática educativa nos impõe: sem isso não temos acesso à maneira como pensam, dificilmente então podemos perceber o que sabem e como sabem.” Nesse trecho,

[1] Utilizaremos nesse breve início do texto e na parte final do capítulo 7 a primeira pessoa do singular somente para fazer referência às experiências pessoais da autora. No restante do texto, optamos pela primeira pessoa do plural.

Freire deixa claro que acredita ser importante conhecer seus alunos e suas realidades porque essas são formas de acompanhar o aprendizado dos alunos e se aproximar deles.

Essas foram as principais questões observadas e que motivaram o meu trabalho de conclusão de curso de licenciatura em Matemática. O projeto foi desenvolvido ao longo de um ano e intitulado de “Afetividade, crescimento, linguagem e currículo: aspectos da transição do quinto para o sexto ano do Ensino Fundamental” (CARVALHO, 2018).

Durante os estudos para o desenvolvimento desse projeto, pudemos perceber que existem diferentes aspectos presentes na transição escolar do quinto para o sexto ano do Ensino Fundamental. Alguns deles são: a afetividade, envolvendo diretamente a relação professor-aluno, já que a partir do sexto ano os alunos terão um professor para cada disciplina, o que geralmente não acontece até o quinto ano, assim o professor passa a ser responsável por uma matéria e não mais pela turma, como acontecia até o quinto ano; o crescimento, já que comumente essa fase escolar ocorre em uma idade em que os alunos estão saindo da infância e entrando na adolescência, uma etapa de desenvolvimento que demanda mudanças na postura da escola e da família, mas que nem sempre acontecem ao mesmo tempo para todos os alunos; a questão curricular, referente às dificuldades dos alunos e a continuidade dos conteúdos entre esses dois anos escolares e a linguagem que, dependendo do professor, pode ser muito diferente de um ano para o outro. Todos esses aspectos podem se tornar dificuldades para os alunos lidarem quando ingressam no sexto ano e se ocorrem juntas tornam a transição escolar, que deveria ser como a de outros anos, ainda mais complexa.

Apesar de ser um trabalho desenvolvido durante um ano, existem muitas questões que envolvem essa transição escolar e nem todas elas foram profundamente estudadas. Deste modo, é importante continuar estudando como ocorre essa transição escolar e quais são seus principais aspectos, a fim de contribuir para que isso ocorra da forma mais sutil e adequada possível. Como a linguagem foi um dos aspectos que mais chamaram minha atenção ao longo de minhas experiências de estágio, optamos por dedicar o estudo com mais atenção a esse aspecto neste novo trabalho, mantendo o foco na transição escolar citada.

Durante minhas experiências pessoais, pude perceber que nos Anos Iniciais, a linguagem utilizada pelos professores costumava ser mais coloquial, com o uso de um vocabulário mais conhecido pelos alunos, situação que pode aproximar o professor de seus estudantes. Já nos Anos Finais, mais especificamente nas aulas de Matemática, a linguagem utilizada pelo professor, geralmente era mais específica de sua disciplina, podendo até ser considerada mais técnica, ou seja, comumente o professor utilizava em aula um vocabulário mais característico de Matemática, o que pode ocasionar um afastamento entre professor e aluno se essa linguagem e esse vocabulário não forem conhecidos e entendidos pelos alunos.

A Matemática é uma disciplina que possui simbolismos próprios e uma linguagem específica e mais abstrata, com o uso de um vocabulário que normalmente não é utilizado pelos alunos. Sobre essa questão, Gómez-Granell (2003, p.260) diz que "(...) o conhecimento matemático é profundamente dependente de uma linguagem específica, de caráter formal, que difere muito das linguagens naturais". Essa diferença entre as linguagens pode ser um desafio para o professor que ensina essa disciplina, o que torna relevante estudar o uso de diferentes linguagens em sala de aula. Neste trabalho, adotaremos linguagem coloquial para a linguagem presente no cotidiano fora da escola dos alunos a qual Gómez-Granell (2003) se refere como linguagens naturais e que Machado (2011) chama de Língua Materna. Quanto à linguagem específica e formal da matemática, chamarei de linguagem matemática.

Portanto, é desejável que o professor de Matemática do sexto ano tenha consciência sobre as diferenças presentes nessa transição escolar para que faça melhores escolhas em relação à linguagem que utiliza em sala de aula com seus alunos. Seja na forma de se relacionar com os alunos, de ensinar ou de usar seu vocabulário matemático em sala de aula. Quando esse professor toma consciência sobre a fase de transição que seu aluno está passando, ele se torna mais capacitado para entender as dificuldades que o estudante está enfrentando e reconhecer quais são os conhecimentos que esse já possui. Esse é o movimento de ir até onde o outro está, que é discutido por Milani (2017), ao abordar o conceito de diálogo entre professor e alunos. Essas reflexões são importantes para que o docente possa aprimorar o seu trabalho em sala de aula.

Com a intenção de facilitar as análises sobre o uso da linguagem e de vocabulários específicos por professores em sala de aula, optamos por delimitar nossa pesquisa a partir de um conteúdo matemático, facilitando também a comparação entre os dois anos escolares estudados. Assim, escolhemos o tema de frações por ser um assunto presente no conteúdo de matemática tanto no quinto como no sexto ano, por estar muito presente no cotidiano das pessoas e por ser muitas vezes considerado pelos alunos um “bicho de sete cabeças”. Além disso, ao olhar para a linguagem a partir desse tema, será possível analisar se existe alguma peculiaridade no ensino de frações que leve o aluno a ter essa impressão negativa sobre esse assunto matemático. Assim, este trabalho terá como foco a linguagem utilizada pelos professores para ensinar frações no quinto e no sexto ano do Ensino Fundamental.

1.2 – Questão de pesquisa e objetivos

Tendo em vista o que foi apresentado até aqui, o problema desta pesquisa é o uso da linguagem matemática e da linguagem coloquial pelos professores para ensinar frações durante o quinto e o sexto ano do Ensino Fundamental. E a pergunta norteadora deste trabalho é: como a linguagem matemática e a linguagem coloquial são utilizadas pelos professores do quinto e do sexto ano para ensinar frações?

Esta pesquisa tem como objetivo principal *compreender* como os professores da transição aqui estudada utilizam a linguagem e os simbolismos próprios da matemática e uma linguagem mais próxima ao cotidiano dos alunos durante o ensino de frações. Para isso, definimos os objetivos específicos descritos a seguir.

Com base nas diferenças entre a linguagem matemática, mais abstrata e específica, e a linguagem coloquial, neste trabalho pretendemos primeiramente *identificar* e *analisar* a linguagem e o vocabulário utilizados pelos professores do quinto e do sexto ano nas aulas de matemática, mais especificamente no ensino de frações. Assim, poderemos destacar quais as semelhanças e quais as diferenças entre a linguagem que esses professores utilizam nas aulas de Matemática.

Também pretendemos *analisar* como o professor escolhe a linguagem e o vocabulário que irá utilizar com os alunos durante as aulas de matemática. Com isso, temos o objetivo de compreender se o docente faz essa opção com base no conteúdo e a necessidade de seu aprofundamento ou não, com base no seu conhecimento sobre a bagagem e o nível de maturidade dos alunos.

A partir disso, poderemos *analisar* se existem diferenças no ensino das principais ideias de fração no sexto ano, quando comparado com o quinto ano. Um aspecto que pode mudar nesse caso é que a partir do sexto ano o professor pode utilizar uma linguagem um pouco mais abstrata, com a intenção de ensinar frações com um maior aprofundamento ou se ele utiliza apenas o vocabulário de frações que os alunos aprenderam até o quinto ano.

Por fim, pretendemos *perceber* de que maneira a mudança na linguagem e no vocabulário utilizado pelo professor reflete na relação entre docente e discentes, no interesse dos alunos pelas aulas de matemática e no entendimento de determinados conceitos de frações. Uma forma de perceber esse último é a partir das dúvidas dos alunos durante as aulas, identificando se essas questões estão relacionadas aos termos utilizados em aula ou aos conceitos próprios de frações.

Tendo claro esses objetivos, o passo seguinte desta pesquisa foi a realização de uma revisão de literatura que será apresentada no próximo capítulo. O terceiro capítulo traz os resultados de nossos estudos de referencial teórico e nele apresentamos as ideias de Machado

(2011) sobre a relação entre a Matemática e a linguagem coloquial, chamada por ele de Língua Materna; de Santos (2015) sobre o ensino de matemática no Ensino Fundamental; de Gómez-Granell (2003) sobre a aquisição da linguagem matemática; e de Milani (2017) sobre o diálogo em educação matemática. O capítulo seguinte apresenta a metodologia de pesquisa utilizada nesta pesquisa, o contexto em que ela foi realizada, com destaque para os desafios de se realizar um trabalho durante a pandemia de covid-19, a descrição das escolas em que a pesquisa foi realizada e também a cronologia dos instrumentos de coleta de dados. O quinto capítulo traz nossos estudos sobre frações e suas principais ideias e também sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que norteia o currículo no Brasil. Já o último capítulo é dedicado a apresentação dos episódios das aulas que observamos e das entrevistas que realizamos, além da análise de cada um desses momentos de coleta de dados. Em seguida, apresentamos nossas considerações finais, estabelecendo relação com os objetivos aqui antes apresentados.

CAPÍTULO 2 - REVISÃO DE LITERATURA

O interesse em abordar o tema da linguagem na transição do quinto para o sexto ano no ensino de frações se deu depois dos estudos realizados para o trabalho de conclusão de curso da pesquisadora. Para que pudéssemos nos familiarizar com o tema, fizemos estudos preliminares sobre esse assunto e apresentaremos neste capítulo.

Inicialmente, buscamos textos que abordassem pelo menos um dos três aspectos: linguagem, transição escolar ou frações. Outro critério que utilizamos para os dois primeiros, era de materiais que estivessem relacionados à Matemática. Além disso, alguns conhecidos durante a minha formação também foram utilizados nessa pesquisa.

Dessa maneira, o artigo "Noção de função quadrática na transição entre a educação básica e o ensino superior", de Ribeiro, Dias e Figueiredo (2020) fez parte da nossa revisão bibliográfica. Esse texto, assim como o nosso, expõe os estudos sobre um determinado assunto da matemática durante uma transição escolar. Nele, as autoras fazem uma análise sobre como a função quadrática é estudada tanto na Educação Básica como no Ensino Superior, mais especificamente sobre quais conceitos desse conteúdo podem ser mobilizados pelos alunos ingressantes dos cursos de Engenharia.

De acordo com os referenciais teóricos por elas estudados, as autoras criaram uma grade de análise a fim de entender como o conteúdo de funções quadráticas eram apresentados em materiais didáticos tanto da Educação Básica, como do Ensino Superior. Para isso, foram selecionados um livro didático do 9° ano do Ensino Fundamental, um do 1° ano do Ensino Médio e o livro adotado na disciplina de Matemática Instrumental dos cursos de Engenharia, considerados na pesquisa.

Como resultados, o artigo apresenta que as noções de funções quadráticas que foram desenvolvidas ao longo do 9° ano do Ensino Fundamental foram revisitadas e ampliadas durante o 1° ano do Ensino Médio. Além disso, as tarefas do Ensino Superior resgatavam as noções vistas ao longo da Educação Básica e com aplicações que envolvem a articulação com outros conteúdos já previamente estudados. Outro aspecto que nos chamou a atenção diz respeito a ênfase dada pelo texto a importância de se considerar e trabalhar com os conhecimentos prévios dos alunos, o que pode motivar os estudantes durante esse processo de aprendizagem.

Apesar de ser um artigo sobre um conteúdo matemático diferente do estudado aqui e com um método de pesquisa distinto, o texto apresenta algumas análises sobre a linguagem coloquial presente nos livros didáticos e sobre os conteúdos que podem ser mobilizados ao longo dos anos pelos estudantes, como faremos neste trabalho. Além disso, esses aspectos foram analisados durante uma transição escolar, o que se assemelha ao que foi feito nesta pesquisa.

Nos estudos preliminares deste trabalho, também utilizamos uma dissertação intitulada "Sobre a linguagem dos professores nas aulas de matemática: práticas de uma professora do sexto ano de uma escola pública", de Seabra (2017). Nessa pesquisa, o autor analisa a linguagem de uma professora de matemática do sexto ano. De acordo com o que é apresentado, esse ano escolar foi escolhido justamente por se tratar de uma fase de transição em que os alunos passam por mudanças físicas e psicológicas. Além disso, esse é um momento em que muitos aspectos escolares mudam também, como o número de professores e a organização escolar. Essas são algumas das questões que motivaram também a escolha dessa transição escolar como tema para esta pesquisa. Outra similaridade com a dissertação de Seabra é o estudo sobre o uso da linguagem pelo professor de matemática, o que também será feito neste trabalho.

Em sua pesquisa, Seabra (2017) acompanhou uma professora da rede municipal de Belo Horizonte que era responsável pelas turmas de sexto ano na escola escolhida. Para realizar o estudo, primeiro o autor realizou observações em todas as turmas da professora e depois escolheu uma das salas de sexto ano para realizar um acompanhamento mais detalhado. Ao todo, Seabra observou 34 aulas nessa turma, realizou registros em seu caderno de campo e filmagens de alguns desses momentos de aprendizagem.

Para analisar a linguagem utilizada pela professora em suas aulas, o autor usou como referencial Morgan (1996) que afirma que as relações entre autor e leitor podem ser consideradas através do uso de pronomes pessoais, uso de vocabulário matemático especializado e formas convencionais de linguagem (como imperativos e expressões de certeza e autoridade). A partir dessa teoria, Seabra analisa alguns momentos das aulas de matemática observadas. Vale destacar que esses episódios analisados eram sobre *sudoku*, que a professora tinha o hábito de resolver com os alunos, mas também sobre frações, que também é o assunto matemático escolhido para ser estudado nesta pesquisa.

Como resultados, Seabra (2017) afirmou que percebeu que a linguagem do professor trouxe elementos que o auxiliaram a entender as posições do aluno, do professor e do conhecimento matemático. Com isso, ele disse que teve a oportunidade de refletir mais sobre a linguagem oral que utiliza em sala de aula com seus alunos. Para finalizar, o autor apresentou seu produto educacional, um texto direcionado a professores de Matemática.

Também estudamos o artigo "Concepções de professores que ensinam matemática sobre números fracionários, suas experiências e as implicações em suas práticas na 5ª série[2] do ensino fundamental" de Machado e Menezes (2008) também aborda o tema de frações no 6° ano, assim como Seabra (2017). A principal diferença entre eles é que no primeiro esse tema é estudado sob o ponto de vista das concepções dos professores sobre o tema de frações, enquanto no segundo é a linguagem do professor que ensina matemática no sexto ano e algumas das aulas analisadas são sobre frações.

[2] Após a Lei nº 11.274 de 6 de fevereiro de 2006 que altera o artigo 32 da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) de 1996, as antigas 4ª e 5ª série passaram a se chamar 5° e 6° ano, respectivamente.

O artigo de Machado e Menezes (2008) traz algumas considerações interessantes sobre o ensino de frações, como por exemplo a aprendizagem mecânica desse assunto que pode ser explicada pela dificuldade que alguns professores têm em trabalhar a real compreensão desse conceito; destaca que esse é um tema importante na vida acadêmica e cotidiana dos alunos; e sobre como a compreensão do assunto pode ser favorecida no ensino contextualizado. Essas considerações são interessantes pois expõe aspectos importantes que envolvem o ensino e aprendizado de frações, tema de estudo desta pesquisa.

O artigo traz os resultados de pesquisa das autoras que teve como principais referenciais teóricos a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) e a Transposição Didática de Chevallard (1991). A metodologia de pesquisa foi a Metodologia Interativa, que englobava entrevistas semiestruturadas, observação participante e Círculo Hermenêutico-Dialético (CHD). Durante a análise dos dados, as autoras apresentaram os perfis dos professores que participaram da pesquisa, com área de formação, idade e tempo de serviço como professor de um modo geral e como docente do 6° ano.

Também consideramos para nosso estudo o texto "Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série", de Silva (2005). Nele, a autora apresenta a sua tese de doutorado que consistiu em um projeto de formação continuada para professores de matemática sobre a temática de números fracionários.

A primeira parte do texto de Silva, traz os resultados de pesquisa de Garcia (2003) e Sallan (2001) que apresentam dados sobre formação de professores sobre números fracionários, Godino e outros (2003) que descrevem dois microprogramas interativos para o estudo dos números fracionários e fazem uma análise das características didáticas e também o *The Rational Number Project* que é um grupo de pesquisa fundado em 1979, que se dedica a estudar questões a respeito da aprendizagem de números racionais.

Em seguida, o texto trata a problemática de pesquisa que é dividida em três frentes. A primeira traz a reflexão sobre o ensino de números fracionários, a segunda é sobre a relação professor-aluno no processo de ensino e aprendizagem de números fracionários, trazendo diferentes aspectos que envolvem essa relação e por último o texto apresenta reflexões sobre a formação continuada de professores e o questionamento de como ela pode influenciar no cotidiano docente.

A metodologia de pesquisa do trabalho de Silva (2005) é a de pesquisa-ação, já que ela realizou seu estudo a partir de uma formação ministrada por ela mesma. Para coletar e analisar os dados, a autora trabalhou com questionários que foram respondidos pelos professores participantes da formação, observações durante os encontros entre a formadora e os docentes, análise dos documentos escritos pelos professores durante a formação e mapas conceituais que foram realizados pelos professores antes e depois da formação para comparação.

Ao apresentar seus estudos, inicialmente, a autora faz uma análise das terminologias existentes sobre o tema de frações com a intenção de justificar a escolha feita pelo termo números fracionários e apresenta também a origem da palavra fração e suas diferentes traduções que ligam esse termo à ideia de números quebrados em diferentes idiomas.

Depois disso, a autora apresenta um breve estudo da gênese de número fracionário e justifica sua escolha de apoiar seus estudos na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard. Por último, ela desenvolve uma organização matemática para a formação sobre as concepções que são comumente trabalhadas nas aulas de ensino fundamental sobre números fracionários. As concepções apresentadas pela autora são: parte-todo; de medida; de quociente; de razão; de operador. Essa parte do texto chamou tanto a nossa atenção que deu origem a uma das seções deste nosso trabalho.

Silva (2005) ao apresentar suas análises detalha primeiramente seu dispositivo experimental. Para isso, inicialmente é feita a caracterização do projeto de formação, depois da escola escolhida, dos professores participantes e apresenta detalhadamente cada uma das seis etapas da formação. Ao organizar suas análises, primeiro a autora fala sobre a formação de um modo geral e depois, mais especificamente de acordo com a organização feita com o problema de pesquisa na primeira parte do texto.

Assim, inicialmente a autora apresenta as análises feitas sobre as concepções dos professores sobre números fracionários. Para isso, ela começa construindo um quadro comparativo para analisar os mapas conceituais feitos pelos professores antes da formação em si e após a formação, apresentando comparações.

Em seguida, ela aborda as concepções dos professores sobre seus alunos. Nesse sentido, ela retoma que os professores tinham como concepção que seus alunos não entendiam e não aprendiam frações, mas que como já dito, os docentes se surpreenderam negativamente com os próprios conhecimentos sobre números fracionários o que pode fazer com que eles mudem as concepções que tinham sobre seus alunos.

A última análise feita por Silva (2005) é sobre as possíveis mudanças provocadas pelas ações formativas. Nesse momento, ela apresenta que durante o processo de formação já era possível perceber algumas mudanças, já que eles mesmos citavam que procuravam fazer mudanças em suas atividades didáticas. Além disso, houve também mudanças nas concepções pessoais dos docentes e que eles também externalizavam durante a formação.

Para finalizar, a autora traz considerações fazendo uma retomada das principais ideias apresentadas até então, resgatando o que foi estudado para organizar a formação e as análises. Ela também traz uma sugestão da importância que teria um mediador de área na escola que poderia proporcionar momentos como o dessa formação para os professores, podendo trazer mudanças benéficas e significativas no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Outro texto que chamou nossa atenção e que aborda o tema de frações é “Criança pode aprender frações. E gosta!”, de Nunes (2003). Inicialmente, a autora fala sobre a percepção que as pessoas têm sobre esse tema da matemática e destaca o fato de que é comum que elas não saibam relacionar as frações com conhecimentos e situações cotidianas. Sobre isso, cabe destacar:

> Sempre que eu falava de usar o conhecimento das pessoas e trabalhar a representação desse conhecimento na escola para que o conhecimento avançasse mais como uma nova maneira de representar, muitas professoras me perguntavam: "Terezinha, e as frações? Fração é um bicho de sete cabeças, não tem na vida diária, não podemos usar conhecimentos de frações da vida diária". (NUNES, 2003, p. 120)

Em seu texto, Nunes destaca que o aluno não pode só aprender quais as regras desse assunto, ele precisa entender qual a lógica e o raciocínio que estão por trás dos conceitos. Assim, quando o aluno for resolver um problema que envolva frações, ele não irá só usar a regra que ele aprendeu, ele poderá pensar e raciocinar para identificar qual a situação e resolvê-la da melhor forma possível.

A autora então, começa discutir sobre como acredita que o ensino de frações para crianças possa ser feito. Para isso, ela fala sobre três ideias principais sobre o tema e depois, expõe como ela realizou um projeto de ensino com uma turma de alunos. Depois de citar as suas principais ideias para o ensino de frações para crianças, a autora começa a contar como ela organizou esses conceitos para desenvolvê-los com as crianças com quem trabalhou. Para realizar o projeto, a autora dividiu os alunos em pequenos grupos em que discutiam os problemas sobre frações, chegavam a uma resposta e depois apresentavam as respostas para os demais alunos da turma.

Ao longo de seu texto, Nunes mostra algumas diferenças entre o "ensino tradicional" [3] de frações para crianças e a forma como ela acredita que isso possa ser ensinado. Seu modo de ensino é baseado no fato de que existem muitas situações em que as frações são usadas no

[3] Entendemos por ensino tradicional aquele em que o professor é o único detentor do conhecimento e que em sala, o docente realiza explicações no quadro e que posteriormente há resolução e correção de exercícios, havendo então pouca ou nenhuma interação entre professor e alunos.

cotidiano e por isso as crianças podem aprender esse tema a partir de situações que elas conhecem. Para ela, também é importante fazer a relação entre o conceito de divisão e o conceito de fração. Além disso, a notação deve aparecer como consequência do processo de aprendizagem e não como uma regra “sem sentido”.

Dessa maneira, a autora apresenta em seu texto uma forma diferente da tradicional de ensinar frações, que envolve muitos conceitos importantes na matemática e no ensino de frações. Pelas suas observações os alunos mostraram-se bastante interessados em aprender esse assunto e aparentaram ter gostado dessa forma de trabalhar com frações, o que mostra que essa pode ser uma boa metodologia de ensiná-las para crianças.

CAPÍTULO 3 – REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo é dedicado ao referencial teórico que utilizamos no desenvolvimento desta pesquisa. Como nosso objetivo inicial está diretamente relacionado com a linguagem utilizada por professores para ensinar sobre frações, abordaremos neste capítulo as ideias conceituais a respeito da linguagem no ensino da Matemática e mais a frente dedicamos um capítulo somente ao tema de frações. Além disso, dedicamos a última seção deste capítulo a um breve estudo a respeito do diálogo em educação matemática, porque acreditamos que esse é um momento em que a linguagem está presente e que pode interferir na aprendizagem.

Como realizamos diversos estudos sobre a linguagem no ensino de Matemática, optamos por dividir este capítulo em seções dedicadas às principais ideias de cada um dos autores que mais chamou nossa atenção. Na primeira parte, apresentaremos as ideias de Machado (2011) sobre a relação entre a Matemática e a linguagem coloquial, chamada por ele de Língua Materna. O autor discute as características de dualidade e de impregnação entre elas, o que apresenta uma relação direta com o objeto de estudo deste trabalho. Depois, abordaremos as ideias de Santos (2015) sobre o ensino de matemática no Ensino Fundamental trazendo algumas considerações sobre a dualidade entre procedimentos e técnicas e sentido e significado e além de discutir sobre a linguagem nesse processo de ensino. A terceira seção traz as ideias de Gómez-Granell (2003) sobre a aquisição da linguagem matemática e apresentando um debate sobre a predominância da sintática ou da semântica. A última seção apresenta as ideias de Milani (2017) sobre o diálogo em educação matemática, destacando a importância de o professor tentar compreender de que lugar os alunos estão falando, com a intenção de melhor auxiliar a aprendizagem deles.

3.1 – Matemática e Língua Materna

Como apresentado anteriormente, este trabalho terá como principal referencial teórico as ideias de Nilson José Machado apresentadas no livro “Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua". Isso porque, nele o autor aborda a questão da dualidade entre a Matemática e a língua utilizada pelas pessoas, chamada por Machado de Língua Materna. Como nosso estudo é justamente sobre a linguagem utilizada por professores nas aulas de matemática, acreditamos que essa é a escolha ideal para iniciar os estudos sobre o tema.

Para discutir essa dualidade, Machado (2011) apresenta primeiro algumas ideias sobre o senso comum e a Matemática a partir de alguns *slogans* popularmente conhecidos sobre a matemática, que geralmente expressam ideias negativas e de distanciamento com relação a essa disciplina. Depois, o autor apresenta algumas considerações mais gerais tanto sobre a língua materna como também sobre a matemática, para então estabelecer uma relação entre as duas que segundo ele deve ser de impregnação mútua. Além disso, o autor também aborda algumas práticas pedagógicas em que essa impregnação acontece. Assim, apresentaremos agora com mais detalhes as principais ideias de Machado (2011), dando mais destaque para a impregnação mútua entre língua materna e matemática já que este é o nosso principal foco de estudo.

Quando fala sobre o senso comum e a Matemática, o autor aborda o bom senso e os *slogans*, salientando que é importante utilizar o bom senso para diferenciar o que são *slogans* do que realmente é verdade. Ainda com relação a isso, o autor apresenta cinco frases que comumente são ditas pelas pessoas a respeito da matemática, que são: "A Matemática é exata"; "A Matemática é abstrata"; "A capacidade para a Matemática é inata"; "A Matemática justifica-se pelas aplicações práticas"; "A Matemática desenvolve um raciocínio". Ele também argumenta que cada uma dessas proposições possui um caráter genérico e utiliza alguns exemplos para justificar que apesar de serem populares, muitas vezes elas não condizem com a realidade da matemática.

Para tratar especificamente da impregnação entre a Matemática e a língua materna, Machado (2011, p. 96) define que: "Estamos designando por Língua Materna a primeira língua aprendida, que coincide quase sempre, em nosso caso, com o português" e apresenta algumas das funções da língua como expressar e comunicar o pensamento, o que leva a discussão se a língua é um código ou um sistema de representação.

Para Machado (2011), a língua não pode ser entendida como um código porque qualquer código é menos complexo do que a mais simples das línguas. Cabe ressaltar então que nesse caso o autor está se referindo à língua falada, já que a língua escrita pode ser entendida como um código. Sobre as relações entre a língua falada e a língua escrita, Machado afirma que ao redor do mundo a língua em sua forma oral, possui papel fundamental no aprendizado da forma escrita e considera que a escrita representa e constrói novos significados que geralmente não são acessíveis à língua falada.

Já com relação aos sistemas de representação, para o autor, eles são concebidos como um mapeamento da realidade e por isso, a língua falada pode ser considerada como um sistema de representação da realidade. Mais do que isso, o autor considera que o aprendizado da Língua Materna, seja na forma escrita ou na forma oral, é um processo de construção de um sistema de representação da realidade.

Ainda sobre essa questão da língua como um código ou como um sistema de representação, Machado destaca que quando a escrita é considerada como um código, uma transcrição da língua oral, o que se dá é a construção de um sistema alternativo a partir de um sistema de representação já existente. Nesse caso, a aprendizagem da escrita se dá sem qualquer alteração de natureza semântica no conhecimento de quem está aprendendo. Já quando se considera a escrita como um sistema de representação da realidade, há uma relação entre a técnica e o significado, o que permite a criação de novos sentidos para os termos da língua, seja ela oral ou escrita.

Com relação às funções da Matemática, o autor destaca que diferentemente da língua, ela não é construída a partir de uma base conhecida anteriormente, segundo Machado (2011, p. 101): “A Matemática erige-se desde os primórdios, como um sistema de representação original;(...)”. Isso porque a Matemática não tem como base nenhum outro conhecimento e entendê-la significa também fazer um mapeamento da realidade assim como acontece com a Língua Materna. Para o autor, a Matemática não está relacionada somente com a aprendizagem de técnicas para manipular símbolos, mas também com o desenvolvimento de outras capacidades como a interpretação, a análise e a sintetização, entre outros. Desse modo, assim como a Língua Materna, a Matemática também é um sistema de representação da realidade, porém sem a presença de uma oralidade própria.

É a partir da ideia de que a Matemática não possui uma língua falada própria que Machado defende a importância da Língua Materna oral para a Matemática e consequentemente uma relação de dependência mútua entre as duas. Quando aborda essa questão, Machado afirma que a aprendizagem inicial do alfabeto e dos números se dá como se os dois sistemas fossem totalmente independentes, o que na opinião do autor não é verdade. Ele ainda ressalta que essa dependência mútua é tão presente que muitas vezes ela acaba passando despercebida o que pode levar a esse equívoco de que elas são totalmente separadas. Ainda sobre essa relação entre a Língua Materna e Matemática, Machado afirma que:

> (...) o trânsito de termos da Matemática para a Língua Materna e vice-versa tem características radicalmente distintas do que ocorre entre a Matemática e qualquer outro setor do conhecimento. (...) o caso da interação entre a Matemática e a Língua Materna é absolutamente singular. Ele pode ser caracterizado como uma verdadeira relação de complementaridade, de troca, e não apenas como uma prestação de serviços por parte da Matemática. (MACHADO, 2011, p. 104)

Assim, o autor destaca que essa relação entre a Língua Materna e Matemática possui características diferentes de outras, porque há complementaridade e troca. Como já dito, é uma dependência mútua, ou seja, a Matemática auxilia a Língua Materna, mas o inverso também acontece. Para melhor explicar isso e por uma feliz coincidência, Machado usa conceitos de frações para explicar essa dependência, como apresentaremos agora.

Segundo o autor, quando se está em uma discussão e diz que se deve chegar a um "denominador comum", é fácil perceber que a ideia é de que se chegue a uma conclusão, uma ideia em que ambas as partes concordem para que a discussão se encerre. Esse é um caso em que se usa a Matemática para auxiliar a Língua Materna. Já quando se está ensinando sobre as denominações de frações nas aulas de Matemática, é necessário a utilização da Língua Materna para chamá-las de décimos, sétimos, quartos e metades. Assim, percebe-se que essa é uma relação recíproca, ou seja, ambas as partes se auxiliam para se desenvolverem e para que quem a interpreta consiga entender o sentido da situação.

Machado também desenvolve uma discussão entre o oral e o escrito. Primeiro, ele aborda a questão da oralidade a qual muitas vezes se refere como fala e diz que ela sempre foi considerada decisiva para a expressão e a comunicação das pessoas e é a forma dominante da língua. Como exemplo, temos as histórias que são contadas oralmente de geração em geração e as lendas.

O autor também destaca o prestígio da escrita e dá como exemplo a situação da escola em que a oralidade continua desempenhando um papel fundamental, porém quando se pensa em avaliação o papel mais importante é o da escrita. Sobre isso, Machado (2011, pp. 108-109) afirma que "Em particular, no que se refere à Língua Materna, o fato de os alunos chegarem à escola expressando-se oralmente sem dificuldades, no exercício de suas atividades cotidianas, parece compelir ainda mais à supervalorização da escrita como produto básico da atividade escolar." Assim, é possível pensar que o fato de as avaliações acontecerem principalmente na forma escrita é uma consequência dessa ideia de que a escrita é um resultado esperado dos anos que as crianças passam na escola.

Segundo o autor, todo conhecimento que os alunos trazem quando chegam à escola são expressos somente através da forma falada e que este será o suporte para o desenvolvimento da escrita pelas crianças. Então, a oralidade desempenha um papel singular na aprendizagem da língua escrita. Para concluir, Machado (2011, p. 110) afirma que a ideia não é priorizar o oral ou o escrito, mas que “(...) os papéis que desempenham na comunicação e expressão são, ambos, fundamentais e insubstituíveis.”

Ainda na discussão sobre o oral e o escrito, o autor se dedica a abordar sobre o oral em Matemática. Para isso, ele afirma que a Matemática é uma linguagem formal que não possui oralidade e um sistema simbólico exclusivamente escrito. A partir daí, é explicado o que são as linguagens formais e suas características que não abordaremos neste texto por não se tratar dos nossos objetivos.

Para Machado, a Matemática é um sistema de representação que deve ultrapassar o formalismo e como não possui uma oralidade própria é necessário que seu ensino se dê através do uso da oralidade da Língua Materna. Sobre essa necessidade de empréstimo de uma língua para a fala em Matemática, o autor afirma que

> Assim, se no ensino da Língua Materna a fala é o natural suporte de significações para inflar os balões dos signos escritos, funcionando como um degrau intermediário na passagem do pensamento à escrita, no caso do ensino da Matemática a inexistência de uma oralidade própria não possibilita alternativas senão as seguintes: circunscrevê-lo aos limites da aprendizagens de uma expressão escrita, abdicando-se da expressão oral, o que parece tão natural quanto abdicar do uso das pernas para caminhar; ou então fazê-lo comungar decisivamente com a Língua Materna, compartindo sua oralidade e, em decorrência, impregnando-se dela de uma forma essencial. (MACHADO, 2011, p. 114)

Assim, a partir de uma comparação com o ensino da Língua Materna, o autor afirma que no caso da Matemática a ausência de uma oralidade própria torna praticamente obrigatório o compartilhamento da oralidade da Língua Materna o que gera uma impregnação mútua entre ambas. Essa relação de empréstimo da oralidade para a Matemática pode auxiliar na aprendizagem dos conceitos da disciplina, porque também no ensino dessa disciplina a fala funciona como um intermediário entre o pensamento e a escrita e consequentemente auxilia no entendimento das ideias da Matemática.

Segundo Machado, uma das principais discussões sobre o ensino de Matemática diz respeito ao embate entre o uso de um sistema de signos predominantemente técnicos e o que privilegie o significado dos elementos envolvidos. Existem pessoas que defendem que a aprendizagem de signos técnicos deve ser somente o suficiente para pessoas que não serão especialistas nesse assunto, entendam o básico dos conceitos e outros que defendem que o mais importante é a compreensão global dos assuntos por aqueles que estão aprendendo.

Porém, para o autor, a questão entre a técnica e o significado não é uma questão dicotômica, mas sim uma questão de ênfase ou de prioridade. Isto é, em determinado momento da aprendizagem será necessário que os alunos aprendam mais sobre as técnicas e os signos técnicos, porém em outros o significado e o sentido do conhecimento abordado serão mais importantes. Ele ainda destaca que para muitos estudiosos da área, na aprendizagem de Matemática o ideal é que inicialmente se ensine sobre os signos técnicos e as técnicas para depois abordar uma compreensão mais profunda do tema. E assim, é possível perceber que as questões entre técnica e significado não são triviais, mas a ideia dessa seção é justamente a partir disso, discutir novamente a importância da impregnação entre Matemática e Língua Materna.

Ao abordar alguns fatos básicos sobre signos, Machado afirma que a semiótica, o estudo sobre os sistemas dos signos apresenta três níveis de abordagem: o sintático, o semântico e o pragmático, porém não os apresentaremos com mais detalhes aqui porque não é o foco deste trabalho. Para o autor, os signos da Língua Materna já possuem um significado, mesmo os mais simples deles como os monemas, já no caso da Matemática e em outras linguagens formais, os signos nada significam, senão o que eles expressam através de relações. Assim, temos que uma língua formalizada se reduz a uma estrutura sintática que muitas vezes não possui significado e sentido, fazendo dela passível de interpretação.

Em seguida, Machado apresenta a metáfora do usuário que diz respeito a situações em que os alunos aprenderiam a apenas utilizar a Matemática assim como aprendem a manusear um eletrodoméstico ou um carro. Ou seja, eles aprenderiam apenas a como lidar com a Matemática, como saber fazer funcionar os algoritmos, mas sem um significado mais profundo e sem uma compreensão mais ampla dos processos de desenvolvimento que levam a determinado resultado.

Assim, o autor defende que a metáfora do usuário não é o cenário ideal para a aprendizagem de Matemática. Como alternativa, ele apresenta a metáfora do fabricante, situação em que os envolvidos possuem uma clara compreensão de cada etapa do processo de produção e quando pensado sob o ponto de vista da aprendizagem da Matemática, o aluno teria o conhecimento de cada um dos passos do algoritmo para chegar a um determinado resultado.

Em seguida, Machado diz que muitas das dificuldades com o ensino da Matemática podem ser consequência de colocar os alunos na condição de usuário ao invés de fabricante o que pode influenciar negativamente na construção do conhecimento. O autor afirma ainda que existe uma proximidade entre técnica e significado e que cabe à Matemática dar o passo decisivo no sentido da aproximação das estratégias desenvolvidas no caso da Língua Materna.

Retomando a ideia inicial de que se deve ensinar primeiro a técnica para depois abordar os conceitos no sentido de dar significado a eles, Machado concorda com a precedência da técnica. Porém, destaca que a aprendizagem da Língua Materna é diferente da Matemática porque nas linguagens formais a técnica está relacionada à utilização enquanto a parte semântica do aprendizado diz respeito à aplicação ou à verificação.

O autor também argumenta que se a precedência da técnica for vista como um procedimento sistemático o resultado pode não ser benéfico. Isso acontece porque o processo de aprendizagem pode não ser linear com o início na prática cega e o final na consciência da ação realizada e sim como um sistema de retroalimentação, segundo Machado (2011, p. 124) “a técnica alimenta o significado que alimenta a técnica... e assim por diante.”

Ao abordar a complementaridade entre Língua Materna e Matemática, o autor afirma que a primeira é tida geralmente como analítica e associada às ideias qualitativas enquanto a segunda é associada à síntese e às situações quantitativas. Machado destaca que é habitual o senso comum associar a Matemática aos números e às relações quantitativas, porém quando se trata de compreender que resultados qualitativos da Topologia também fazem parte da Matemática, a maioria das pessoas reluta em aceitar essa ideia. Assim, podemos perceber que Machado defende que não é possível associar a Matemática apenas a situações quantitativas porque ela também apresenta resultados qualitativos.

O autor ainda expõe que geralmente as pessoas acreditam que a Matemática é o lugar da unidade enquanto a Língua Materna é o da diversidade. Porém, novamente são apresentados exemplos em que a Matemática representa diversidade e a Língua Materna a unidade, o que o leva a concluir que elas não são nem uma coisa e nem a outra. Como Machado (2011, p. 133) afirma "(...) parece claro que tanto a Língua como a Matemática desenvolvem-se simultaneamente em ambos os sentidos, o da unidade e o da diversidade, em um permanente e indissociável processo de ir e vir cuja dinâmica importa cada vez mais investigar." E explica ainda, como fez com a técnica e o significado, que na Matemática há uma ênfase na unidade, enquanto na Língua Materna o destaque é na diversidade, mas isso não exclui o fato de que ambas possuem ideias de diversidade e de unidade.

Todas essas ideias encaminham para a conclusão da existência de uma complementaridade entre a Matemática e a Língua Materna e segundo Machado (2011, p. 134): "A compreensão desse fato é absolutamente fundamental para evitar a tentação de superação das dificuldades com o ensino através do elogio entusiasmado de qualquer um dos dois sistemas, em detrimento do outro.", encaminhando novamente para importância da impregnação mútua entre a Matemática e a Língua Materna.

Assim, de um modo geral temos que Machado apresenta algumas questões de dualidade entre a Língua Materna e a Matemática. Como, por exemplo, a primeira ser considerada pelo senso comum como qualitativa enquanto a segunda é considerada quantitativa. Ou então, a primeira ser associada à diversidade enquanto a segunda é associada à unidade. E a partir daí que o autor discute sobre a complementaridade entre elas já que em muitos momentos uma auxilia na compreensão da outra e elabora então a essencialidade da impregnação entre ambas.

Utilizaremos então as ideias de que Língua Materna e Matemática são complementares e que sua impregnação mútua é essencial para analisar as entrevistas e observações que realizamos nesta pesquisa e assim estudar com maior profundidade a linguagem utilizada por professores para ensinar frações em turmas de quinto e de sexto ano do Ensino Fundamental respeitando as peculiaridades dessa transição.

3.2 – Ensinar e aprender Matemática no Ensino Fundamental

Outro texto que aborda a importância da linguagem no ensino de Matemática e que fez parte de nosso referencial teórico é de Santos (2015) e foi intitulado “Ensinar e aprender Matemática no Ensino Fundamental”. Nele, há uma análise sobre o Ensino Fundamental, mais especificamente sobre como se dá o ensino e a aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental.

Santos (2015) destaca os objetivos do ensino de Matemática na escola, aqui vamos destacar dois deles: o primeiro é o aluno realizar a construção de ferramentas conceituais e práticas necessárias para o exercício da cidadania, já o segundo é quando o estudante consegue desenvolver habilidades relacionadas ao pensamento, ao raciocínio lógico-matemático e a leitura, interpretação, compreensão de situações cotidianas em que exista Matemática.

A matemática como linguagem e como comunicação também é um aspecto destacado pelo autor. Segundo ele, a matemática desenvolve uma linguagem própria, mas também é um meio de comunicação e uma ferramenta que descreve e intervém no mundo social, cultural e físico, além de ser um suporte para que outras ciências se desenvolvam.

Para Santos, todos esses papéis da matemática, podem gerar algumas preocupações quanto ao ensino dessa matéria principalmente com relação ao conflito entre priorizar a linguagem e os significados da matemática ou os procedimentos e técnicas. Sobre isso, cabe destacar:

> Por um lado, há práticas escolares predominantes que enfatizam de modo restritivo a função formal das noções, da linguagem e dos processos matemáticos, daí priorizar o trabalho com procedimentos, técnicas, com algoritmos, definições e utilização de problemas padronizados e exercícios repetitivos. Por outro lado, há também as práticas que se esforçam em levar em conta um significado referencial para as situações, os problemas e para a linguagem matemática, (...). (SANTOS, 2015, p. 46)

No trecho acima, o autor ilustra as diferenças entre o ensino que prioriza trabalhar com procedimentos e técnicas e o ensino que trabalha com problemas de situações práticas com os conceitos e a linguagem da matemática. Porém priorizar um ou outro tipo de ensino pode ter também seus pontos negativos. Sobre o trabalho centrado em procedimentos e técnicas o autor afirma que ele tem levado aos alunos a conseguir manipular as técnicas e simbolismos próprios da Matemática sem que entendam as lógicas e regras por traz dessa manipulação.

Porém, Santos também fala sobre situações em que o ensino é exclusivamente focado nos conceitos específicos da matemática e na sua linguagem, destacando que ele pode:

> (...) ter como consequência privá-los do acesso ao simbolismo matemático e às suas regras de notação inerentes ao processo de aquisição das ideias matemáticas e a raciocínios de caráter mais amplo, que transcendam o contexto imediato da situação vivenciada e que o aprendizado em Matemática pode proporcionar. (SANTOS, 2015, p. 46)

Assim, é possível concluir que tanto priorizar só procedimentos e técnicas, como priorizar somente os conceitos matemáticos e sua linguagem possuem aspectos positivos e negativos. Por isso, Santos (2015, p. 47) afirma que um dos desafios de ensinar Matemática no Ensino Fundamental é: “(...) articular a abordagem dos aspectos conceituais e semânticos da Matemática com os aspectos relacionados com a linguagem matemática e suas regras para promover a aprendizagem dos alunos.”

Assim, para o autor, a articulação entre o ensino de procedimentos e técnicas e o voltado mais para conceitos matemáticos é uma boa metodologia de ensino porque propõe uma aprendizagem diversificada e trabalha com o aluno a forma de resolver o problema, mas também o conceito que está por trás dessa resolução. Ainda sobre essa articulação das duas formas de ensino e como realizá-la, Santos destaca:

> Isto significa que é necessário ir além dos procedimentos informais e intuitivos do aluno em relação às noções matemáticas e à resolução de problemas para que ele vá se familiarizando e se apropriando de uma linguagem, de processos formais e estruturas matemáticas que podem dizer respeito a situações particulares, mas que, pelo seu caráter geral, constituem ferramentas para compreender outras ideias e resolver diferentes tipos de problemas em quaisquer outros contextos, bem como organizar e articular noções de diferentes domínios da Matemática também de um ponto de vista lógico-formal. (SANTOS, 2015, p. 47)

Depois dessas propostas, o autor discute o sentido e o significado dos objetos de estudo em Matemática. Para ele, os sentidos e significados na relação dos alunos com a Matemática podem ser gerados em situações de caráter prático-utilitário, por uma dúvida ou por situações investigativas. Sobre essa discussão de sentido e significado Santos apresenta que:

> O exame das práticas atuais do ensino de Matemática revela resultados insatisfatórios na aprendizagem do aluno, e que indicam sua incapacidade de atribuir significado às noções, à linguagem e aos processos trabalhados na escola, bem como sua incapacidade de utilizar a Matemática fora da escola. (SANTOS, 2015, p. 49)

A partir desse trecho pode-se afirmar que, para o autor, é necessário melhorar o ensino de Matemática no Brasil. Isso porque os alunos deveriam conseguir atribuir sentido e significado para os conceitos e procedimentos matemáticos que aprendem na escola e mais do que isso, eles deveriam ser capazes de relacionar o que estudam em sala de aula com as situações cotidianas em que a Matemática possa estar presente.

Ainda sobre essa relação a ser melhorada dos alunos com Matemática, Santos aborda a questão da dificuldade que alguns estudantes têm com essa disciplina e que pode levar ao desinteresse e a aversão dos alunos. De acordo com o autor:

> (...) dificuldades que provocam desinteresse e aversão, que podem ser resultado de uma experiência em que foi solicitado memorizar ou a repetir procedimentos incompreensíveis ou, ao contrário, de uma experiência em que, por fatores de diferentes tipos, não houve, na aula, condições para que dúvidas e dificuldades dos alunos, ou mesmo a intenção do professor, sequer ficassem explícitas ou fossem consideradas na aula. (SANTOS, 2015, p. 49)

Tomando todas essas ideias de ensinar com procedimentos e técnicas, ensinar os conceitos e a linguagem Matemática, fazer o aluno aprender com sentido e significado e refletir sobre as dificuldades, desinteresse e aversão dos alunos com a disciplina, o autor também apresenta uma discussão sobre como a Matemática pode ser ensinada. Sobre isso:

> A concepção de que o trabalho com Matemática na escola deva articular o conhecimento conceitual e o conhecimento da linguagem e os processos matemáticos para resolver problemas de forma significativa permite sistematizar alguns pontos, (...), que configuram numa perspectiva metodológica para a construção de relação que desperte o interesse do aluno dos diferentes anos do Ensino Fundamental pela Matemática e que promova sua aprendizagem. (SANTOS, 2015, p. 52)

No trecho acima, o autor retoma que é importante que exista uma articulação entre o ensinar os conceitos e linguagem matemática; e ensinar os procedimentos e técnicas. Para isso, Santos sistematiza alguns pontos principais que explicitaremos a seguir.

O primeiro aspecto citado por Santos (2015) diz respeito a um caminho possível para promover situações de aprendizagem que motivem os alunos a aprender, a procurar uma solução para a situação e fazer uma investigação, e, para ele, esse caminho é através da resolução de problemas. Já no segundo, o autor defende que um mesmo conceito matemático seja trabalhado em diferentes situações-problema e que também se trabalhe com os alunos situações problemas em que existam mais de um conceito matemático que possa ser desenvolvido. O próximo aspecto é sobre o aprofundamento progressivo dos conteúdos de Matemática.

Isso pode ser notado durante os anos do Ensino Fundamental. Por exemplo, o conceito de fração está presente em diferentes anos escolares, mas é possível perceber que há um aprofundamento no conceito conforme o aluno avança para um novo ano escolar. Segundo Santos (2015, p. 55), um determinado conteúdo pode ser um objetivo de ensino tanto no quinto como no sexto ano do Ensino Fundamental: "(...) indicando que se trata de um conteúdo que será trabalhado em cada biênio, não de modo repetido, mas aprofundando-se os aspectos conceituais, as situações a serem trabalhadas, de um ano para outro.". Isso proporciona aos alunos que as noções sejam desenvolvidas em um maior espaço de tempo e com mais aprofundamento. Já o último aspecto, segundo Santos, é sobre a importância da avaliação como parte do processo de ensino e aprendizagem e deve ser dinâmico e estruturante, já que essa também faz parte do processo, e por isso deve ser um momento em que aluno também possa aprender.

Segundo Santos (2015, pp. 55-56), todos esses aspectos sobre o ensino de Matemática têm como principal objetivo: "(...) que os alunos desenvolvam a capacidade de resolver problemas, de raciocinar matematicamente, de representar e comunicar os significados construídos, com uma atitude de interesse pela Matemática e de confiança na sua capacidade de aprender." Retomando assim, que é importante que os alunos saibam utilizar os procedimentos e técnicas, saibam também os conceitos matemáticos por trás das situações-problema, tenham um aprendizado com sentido e significado e saibam reconhecer e utilizar sua aprendizagem de matemática em situações cotidianas.

Assim, o autor destaca primeiro os objetivos do ensino de Matemática durante o Ensino Fundamental. Depois, aborda a discussão da dualidade entre ensino que priorize a técnica e os simbolismos próprios da Matemática e o que aborde mais os conceitos e a linguagem, assim como fez Machado (2011). Outro aspecto que é discutido pelos dois autores diz respeito a abordagem de sentido e significado no ensino de Matemática. Santos (2015) também apresenta algumas formas de estabelecer uma articulação entre técnica e conceito e sentido e significado o que também foi feito por Machado através de alguns exemplos práticos.

3.3 – A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado

Gómez-Granell (2003) também apresenta algumas considerações a respeito da linguagem matemática e do ensino dessa disciplina na escola. A autora destaca inicialmente que uma possível explicação para as pessoas considerarem a linguagem matemática abstrata e incompreensível é o fato de a matemática possuir um caráter mais abstrato do que outras áreas. Ela também afirma, assim como Machado (2011), que a matemática é profundamente dependente de uma linguagem específica e formal que se difere muito das linguagens coloquiais, chamadas pela autora de linguagens naturais.

Sobre a linguagem matemática e a linguagem natural, Gómez-Granell apresenta uma breve definição de cada uma delas quando afirma que:

> A linguagem matemática envolve a "tradução" da linguagem natural para uma linguagem universal formalizada, permitindo a abstração do essencial das relações matemáticas envolvidas, bem como o aumento do rigor gerado pelo estrito significado dos termos. Na linguagem natural, o sentido das palavras é muito mais vago e impreciso; termos como comprido, estreito, largo, pequeno, grande, muito etc., que fazem parte da linguagem natural para expressar magnitudes, não se aplicam numa linguagem formalizada. (GÓMEZ-GRANELL, 2003, p. 260)

Assim, a autora acredita que a linguagem matemática está mais relacionada às abstrações das relações matemáticas para uma linguagem mais universal enquanto a linguagem natural possui um sentido mais amplo e sem muita precisão. É a partir dessa definição da linguagem matemática que ela entende porque tradicionalmente o ensino da matemática tem como objetivo o ensino de sua linguagem já que esta possui um caráter tão formal.

Gómez-Granell também apresenta uma discussão entre a predominância dos aspectos sintáticos e semânticos no ensino da matemática, algo muito parecido com o que fez Machado (2011) quando discutiu a técnica e o significado. Sobre a predominância dos aspectos sintáticos, isto é, da ênfase do ensino de matemática nas técnicas e nas regras de resolução, a autora explica a origem desse fato e suas consequências:

> As concepções formalistas a que nos referimos anteriormente foram, no passado, predominantes entre os matemáticos e influenciaram o ensino da matemática de tal modo que este se baseou muito mais na manipulação sintática de símbolos e regras do que no significado dos mesmos. (...) Vários trabalhos demonstram que boa parte dos erros que os alunos cometem deve-se ao fato de terem aprendido a manipular símbolos de acordo com determinadas regras, sem se deterem no significado dos mesmos. (GÓMEZ-GRANELL, 2003, pp. 264-265)

Assim, a autora destaca que por muito tempo se destacou mais o formalismo no ensino da matemática, priorizando a manipulação de símbolos e a aprendizagem da linguagem matemática e de suas abstrações. Porém, muitas pesquisas demonstram que grande parte dos erros dos alunos está relacionado ao fato que eles dominam as técnicas, mas não os significados, ou seja, eles sabem como resolver os exercícios, porém apresentam um entendimento limitado do que estão fazendo.

É a partir disso que Gómez-Granell apresenta então suas considerações sobre a predominância dos aspectos conceituais e semânticos. Como já dito, somente a predominância da técnica pode gerar prejuízos na aprendizagem dos alunos e por isso, é interessante entender qual o papel dos conceitos e da semântica no ensino da matemática. Sobre isso a autora afirma que

> O importante é que os alunos entendam ou construam o significado dos conceitos matemáticos. Isto é, trata-se de entender o significado das operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão), do número fracionário ou decimal, da proporcionalidade, das relações geométricas, das transformações algébricas etc. Tanto nos trabalhos realizados com a aquisição de conceitos como nos de resolução de problemas admite-se que as crianças manifestam, desde idades muito precoces, procedimentos e formas próprias de raciocínio,

> de caráter não-formal – portanto, diferentes daqueles que a matemática propõe e ensina na escola –, que lhes permite ir construindo progressivamente os significados matemáticos. (GÓMEZ-GRANELL, 2003, p. 267)

Desse modo, ela destaca não só a importância dos significados nos diferentes conteúdos matemáticos como também como isso pode acontecer através da aquisição de conceitos ou mesmo da resolução de problemas. Para a autora, com essas ferramentas, os alunos podem utilizar suas próprias formas de raciocínio e com isso construir os significados matemáticos das questões que estiverem tentando resolver. Ainda sobre isso, ela fala sobre como a manipulação de materiais concretos, de representações próprias, de desenhos e da linguagem natural pode ajudar os alunos a entender os conceitos matemáticos.

Ainda sobre a matemática e destacando o desenvolvimento dessa área, Goméz-Granell (2003, p. 269) afirma que "(...) tanto na invenção da notação numérica como na progressiva procura de uma linguagem formal ocorre um processo de interação entre as formas icônicas e não-icônicas, entre linguagem natural e formal.". Assim, a autora aborda a importância da interação entre a linguagem natural e a formal o que vai ao encontro às ideias de Machado (2011) que defende a impregnação mútua entre a Língua Materna e a Matemática.

É importante essa interação porque quando se prioriza só a sintática ou somente a semântica no ensino da matemática existem algumas questões que podem gerar prejuízos na aprendizagem dos alunos. Gómez-Granell explica quais são

> As orientações que dão prioridade aos aspectos de caráter sintático apresentam o problema de que os alunos aprendem a manipular símbolos segundo uma série de regras que não entendem. (...) As tendências mais conceituais, por sua vez, apresentam o problema de que a compreensão do significado de uma operação ou de uma transformação mediante o uso de procedimentos intuitivos e situações concretas não garante o acesso aos símbolos abstratos da aritmética e, sobretudo, da álgebra. (GÓMEZ-GRANELL, 2003, p. 273)

Portanto, priorizar somente sintática ou semântica parece não ser o melhor caminho no ensino da matemática. Para tentar solucionar isso, ou seja, para que se desenvolva não só a sintática como a semântica, a autora apresenta como caminho o domínio da linguagem matemática porque isso implica o conhecimento de ambas. Sobre isso, Goméz-Granell conclui ainda que “Finalmente, não se pode esquecer que aprender uma linguagem não é aprender uma série de regras e sim adquirir um grau de competência comunicativa que permita usar tal linguagem adequadamente.”.

Assim, similar às ideias de Machado (2011) e Santos (2015), segundo Gómez-Granell, para que o ensino de matemática seja efetivo, não se pode priorizar somente a sintática ou somente a semântica, pelo contrário, é preciso que aos dois aspectos estejam presentes nesse processo de ensino. Além disso, quanto à questão da linguagem, para a autora é importante que o aluno domine a linguagem matemática, mas mais ainda que exista uma interação entre a linguagem matemática e a língua natural, assim como a impregnação mútua entre Língua Materna e Matemática sugerida por Machado (2011).

3.4 – O diálogo como Movimento de Ir até Onde o Outro Está

Tendo em vista que nosso tema de pesquisa envolve o ensino de um determinado conceito matemático, consideramos importante também estudar não só a linguagem que o professor utiliza em sala, mas também o diálogo estabelecido entre professor e alunos nesses momentos de aprendizagem. Para isso, utilizaremos as ideias de diálogo de Milani (2017).

Ao abordar as possibilidades de conversas que acontecem nas aulas de matemática entre professor e aluno, Milani diz que elas podem ser um diálogo, um discurso expositivo do professor, um “padrão sanduíche”, ou uma adivinhação. Explicando melhor, discurso expositivo é quando somente o professor fala, já o “padrão sanduíche” é, quando o professor faz perguntas fatuais que os alunos respondem e o último é quando os alunos tentam adivinhar a resposta que o professor espera.

A autora destaca também a importância de que os alunos expliquem suas ideias para que o professor as conheça, possibilitando assim que as utilize para desenvolver suas atividades em sala de aula. Milani (2017, p.38) considera ainda que “Ouvir os alunos é uma ferramenta poderosa para compreender o que eles dizem, mostram, sentem e fazem nas tarefas matemáticas.”

Então, para que o professor possa ouvir o que os alunos estão dizendo, é importante que ele se atente a estabelecer uma comunicação a partir do diálogo, já que no discurso expositivo apenas o professor fala e no padrão sanduíche e na adivinhação o aluno apenas responde o que lhe é perguntado. Pensando no diálogo em um processo de ensino de um conteúdo específico, como é o caso da Matemática, Milani explica essa ideia:

> Quando se considera o conhecimento que professor e alunos têm a respeito de um conteúdo específico, uma relação assimétrica entre eles é estabelecida: o professor tem mais conhecimento científico sobre esse conteúdo que os alunos. O diálogo, porém, não pode ser influenciado por essa relação. Professor e alunos estão em contato, e o que se deseja é que haja uma relação interpessoal igualitária. Assim, promover a igualdade no diálogo não significa negar a diversidade e as diferenças, mas, sim, saber lidar com as mesmas, de forma justa. O professor pode convidar os alunos para participarem de um diálogo, e para que ele ocorra os alunos devem aceitar esse convite. (MILANI, 2017, p. 40)

Assim, para que se estabeleça um diálogo entre o professor e os seus alunos é sim importante considerar que o docente tem mais conhecimento sobre o assunto, mas a forma como o professor lida com ela deve ser de modo que torne o diálogo convidativo aos alunos. Para que isso aconteça, Milani afirma que é importante que o professor seja coerente em relação ao que pensa e faz, tenha empatia ao tentar entender o ponto de vista dos alunos e tenha consideração para aceitar as ideias do aluno, dialogando sem tentar mudar quem ele é.

Além disso, a autora afirma que existem três ações que são importantes que o professor realize durante os diálogos em suas aulas. O primeiro deles é a escuta ativa, que segundo Milani (2017, p. 38) pode envolver “Um olhar atento, uma expressão facial que represente interesse pela fala do outro e um balançar afirmativo da cabeça [que] acolhem os discursos dos alunos.”. A autora também considera que ao realizar a escuta ativa, o professor pode notar algumas diferenças entre o que o aluno diz e o que ele pensa. E é a partir daí que ele pode realizar a segunda ação que é o estranhamento, que é justamente quando o professor não entende o que o aluno está dizendo e tenta compreender a ideia dele. Para isso, é necessário que o professor realize a terceira ação, o descentramento. Segundo Milani:

> Quando se busca compreender o que o outro diz, é preciso que se tente olhar para o que foi dito com os olhos de quem o disse. Para tanto, é necessário fazer perguntas para uma melhor compreensão e dar suporte, verbal ou não, à fala do outro. (...) Parece que enquanto existir esse *estranhamento* e certo incômodo com a diferença, o movimento de ir até onde o outro está continua. (MILANI, 2017, p. 49, grifo da autora)

Assim, o professor ao realizar a escuta ativa, o estranhamento e o descentramento, ele pode construir com os alunos um diálogo melhor pois é capaz de ouvir com mais cuidado o que eles estão falando e tenta entender suas falas a partir de um ponto de vista diferente. A partir dessas considerações, Milani define que

> Diálogo é uma forma de interação entre professor e alunos, engajados em uma atividade de aprendizagem, em que a fala e a escuta ativa são compartilhadas, ideias são discutidas e a compreensão do que o outro diz é fundamental. Essa perspectiva de diálogo em educação matemática tem como base uma postura política que acredita que não pode haver a fala dominada por apenas uma das partes, mas, sim, compartilhada entre as partes. (MILANI, 2017, p. 50)

Portanto, o processo de diálogo é uma interação entre o professor e os seus alunos, mas ela também o define como um processo de movimento em direção ao outro em que há a demonstração de interesse pelo que o outro está a dizer. Além de interação, o diálogo pode ser considerado um processo de encontro entre diferentes ideias. Para a autora, é a partir disso que o professor pode perceber o que os alunos já compreendem e o que eles já aprenderam. Por fim, Milani (2017, p. 50) afirma que no diálogo não há um perdedor e um vencedor, “O que há é movimento, ou seja, a tentativa de compreender o que o outro diz, entrando em ação a escuta ativa, o estranhamento e o descentramento.”, retomando assim as ações importantes para que o diálogo aconteça.

Assim, para Machado (2011), Santos (2015) e Gómez-Granell (2003) é importante nas aulas de matemática que exista um equilíbrio entre a priorização de técnica e significado. Além disso, para Machado e Gómez-Granell, a linguagem matemática e a linguagem mais coloquial, Língua Materna, estão relacionadas e são mutuamente dependentes especialmente nas aulas de matemática. Complementando isso, Milani (2017) apresenta os elementos do diálogo e podemos refletir que quando essa comunicação entre professor e aluno acontece nas aulas de matemática, podemos identificar uma situação em que existe a impregnação entre Língua Materna e Matemática. Após os estudos deste referencial teóricos, iniciamos as atividades de coleta de dados e por isso, apresentamos no capítulo seguinte nossa metodologia de pesquisa, complemento-a com o contexto, a descrição das escolas e professores, além da cronologia deste trabalho.

CAPÍTULO 4 – METODOLOGIA

Neste capítulo, abordaremos a metodologia de pesquisa adotada neste trabalho, a partir de quatro seções. Na primeira, são apresentadas as etapas metodológicas realizadas no desenvolvimento deste trabalho. A seção seguinte contém a descrição dos caminhos percorridos e as dificuldades encontradas até a definição dos locais e dos participantes da pesquisa, além de explicar o que foi idealizado no início do projeto e o que foi possível de realizar. A terceira seção, apresenta uma breve descrição das escolas e dos professores que participaram desta pesquisa. Já a última seção foi destinada à explicação, em ordem cronológica, do desenvolvimento dos instrumentos de coleta utilizados nesta pesquisa.

4.1 – A Metodologia

Existem diferentes métodos de pesquisa em Educação, Alonso (2006, p.8) expõe suas ideias sobre os métodos quantitativos e qualitativos de pesquisa, sobre este último, a autora afirma que “[...] veio, da sociologia como interpretação, levou ao desenvolvimento de métodos qualitativos, visando a entender a lógica de processos e estruturas sociais, a partir de análises em profundidade de um ou poucos casos particulares.” Assim, como o interesse desta pesquisa é entender as estruturas e os processos que levam os professores a utilizarem a linguagem coloquial ou a linguagem formal matemática para ensinar frações na transição escolar do quinto para o sexto ano, a metodologia de pesquisa que será utilizada neste trabalho é a qualitativa.

No caso específico da metodologia idealizada para esta pesquisa, as primeiras atividades realizadas foram os estudos teóricos sobre linguagem e ensino de Matemática; sobre as ideias de frações; e do currículo de Matemática sobre frações indicado para o quinto e o sexto ano do Ensino do Ensino Fundamental, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que serão descritos ao longo do próximo capítulo.

Em seguida, realizamos a procura e o contato com escolas próximas à cidade de São

Paulo, que tivessem na mesma instituição turmas de quinto e sexto ano do Ensino Fundamental, cujos professores demonstrassem o interesse em participar do desenvolvimento de nossa pesquisa. Descreveremos na seção seguinte o percurso para encontrarmos escolas e professores para este trabalho. Com isso definido, os procedimentos seguintes foram a realização de entrevistas com esses profissionais e a observação de suas aulas sobre o tema de frações, essa ordem tinha como objetivo comparar o que os professores disseram e o que eles fazem em sala de aula. Ambos os procedimentos metodológicos foram feitos com o consentimento dos docentes e da direção pedagógica das escolas.

As entrevistas foram do tipo semiestruturadas, Alves-Mazzotti (2004, p. 168) explica como são essas entrevistas: "Nestas, também chamadas focalizadas, o entrevistador faz perguntas específicas, mas também deixa que o entrevistado responda em seus próprios termos." Optamos por esse tipo de entrevista porque com ela, foi possível realizar as perguntas que são importantes para alcançar os objetivos desta pesquisa, mas também facilitou para que o entrevistado tivesse a liberdade de responder com suas próprias palavras, aproximando a entrevista de uma conversa informal. O roteiro que utilizamos está no Apêndice A.

Os professores foram entrevistados de forma virtual pelo software ZOOM e as gravações foram realizadas com o consentimento dos participantes. Durante a conversa, perguntamos a esses docentes qual a visão deles sobre o uso de um vocabulário específico de Matemática com seus alunos, como eles equilibram a linguagem formal com a linguagem cotidiana, quais aspectos do uso dessas linguagens eles consideram importante e se eles têm conhecimento de como isso pode influenciar na relação professor-aluno e nas dificuldades dos alunos durante as aulas. Especificamente, aos professores do quinto ano, perguntamos se há a intenção de saber qual mudanças fariam em suas aulas, se fossem ensinar frações para alunos do sexto ano, com a intenção de notar se haveria diferença com o repertório utilizado nas aulas do quinto ano. Com o mesmo intuito, também criamos uma pergunta específica aos professores do sexto ano, indagando a eles se eles mudariam algo em suas aulas se fossem ensinar frações para turmas no quinto ano.

Algumas das observações foram realizadas de forma presencial e outras de forma on-line, além disso não obtivemos autorização para gravar as aulas. Durante esses momentos, o objetivo era notar quais os termos específicos de matemática, os professores do quinto e do sexto ano utilizam para ensinar frações. Foram observados quais os exemplos que os professores dão, se eles usam contextos e figuras, como chocolate e pizza, como eles abordam determinados conceitos que envolvem frações, entre outros. A intenção era conhecer qual o repertório que utilizam para ensinar esse conteúdo matemático e destacar semelhanças e diferenças entre os termos que são utilizados no quinto e no sexto ano do Ensino Fundamental. As observações, as entrevistas e o formulário de entrevista foram orientados a partir do referencial teórico estudado.

Assim, temos como dados desta pesquisa as gravações das entrevistas realizadas com professores de quinto e de sexto ano do Ensino Fundamental de uma mesma escola e as observações que realizamos em algumas das aulas desses docentes sobre o tema de frações. Com base na metodologia que utilizamos neste estudo, no referencial teórico estudado e nos dados que coletamos, optamos por criar episódios que irão descrever as situações observadas que mais chamaram nossa atenção para então realizar algumas reflexões e análises que relacionem o que foi observado com as principais ideias teóricas estudadas e com os objetivos deste trabalho.

4.2 – Encontrando o Contexto de Pesquisa

De acordo com o apresentado anteriormente, após os estudos dos referenciais teóricos, iniciamos a busca por escolas que estivessem dispostas a participar de nossa pesquisa. Porém, como esta pesquisa teve início em fevereiro de 2020, o primeiro obstáculo que encontramos foi o início e desenvolvimento da pandemia de COVID-19[4] que trouxe mudanças na dinâmica escolar do país, como a mudança das aulas de presenciais para remotas, e alterou o planejamento e a organização desta pesquisa. A ideia inicial era de que realizássemos as observações e as entrevistas nas escolas, o ambiente de trabalho desses professores. Porém, devido às restrições sanitárias, todas as entrevistas foram realizadas de forma virtual, algumas observações aconteceram de forma remota e outras presencialmente.

Uma das grandes dificuldades para pesquisadores da área de educação é o aceite de escolas e docentes. No caso específico deste trabalho, dentro da procura por escolas para nossa pesquisa, o primeiro critério era encontrar instituições que tivessem turmas de quinto e de sexto ano do Ensino Fundamental, já que um dos principais objetos deste estudo é essa transição escolar. O segundo critério era de encontrar escolas de diferentes redes de ensino, com a intenção de observar múltiplas situações pedagógicas. Como essa pesquisa foi desenvolvida majoritariamente na cidade de São Paulo, há três diferentes redes de ensino que poderiam participar da pesquisa, as escolas públicas, que podem ser estaduais ou municipais; e as escolas privadas.

Com esses critérios definidos, iniciamos a procura por escolas que aceitassem participar desta pesquisa. Buscamos primeiro por escolas que fossem próximas a residência da autora, porém naquele momento muitas escolas estavam fechadas devido a situação sanitária em que o mundo se encontrava, dificultando nosso trabalho. Outro empecilho foi o fato de que na cidade de São Paulo, a grande maioria das escolas estaduais divide os anos do Ensino Fundamental, isto é, algumas só tem os Anos Iniciais[5] enquanto outras somente os Anos Finais[6]. Por isso, concentramos nossa busca em escolas municipais e privadas da cidade.

[4] A Organização Mundial de Saúde (OMS) declarou pandemia de covid-19 no dia 11 de março de 2020.
[5] Turmas de 1° a 5° ano.
[6] Turmas de 6° a 9° ano.

A partir disso, as tentativas de contato foram feitas a partir de pessoas conhecidas que trabalhavam nessas escolas ou que poderiam nos indicar nas instituições. Algumas escolas disseram que não poderiam receber pesquisadores, outras que não os recebiam e com isso, nossa busca foi se tornando cada vez mais difícil. Apenas uma escola municipal que atendia aos nossos critérios aceitou a parceria. Ainda a partir de conhecidos, o único contato com a rede privada que conseguimos foi em outra cidade, Mogi das Cruzes – São Paulo. Como ainda assim gostaríamos de ter outra escola, para ter mais dados, então continuamos nossa busca e encontramos uma escola de aplicação de uma universidade localizada na cidade de São Paulo. Diferentemente do que previmos essa escola pode ser considerada uma escola estadual e é assim que vamos identifica-la daqui em diante. Todas as escolas possuem turmas de quinto e sexto ano do Ensino Fundamental, conseguimos o contato de um professor de quinto ano e um de matemática do sexto ano de cada uma das instituições e a autorização da direção e dos docentes para a realização desta pesquisa.

4.3 – Descrição das escolas participantes da pesquisa

Apesar da maior parte das observações ter acontecido de maneira virtual, consideramos importante apresentar algumas informações a respeito das escolas participantes de nossa pesquisa. Como já apresentado, realizamos nossa pesquisa em três escolas, duas na cidade de São Paulo e uma na cidade de Mogi das Cruzes. Assim, apresentaremos agora uma breve descrição dessas escolas e dos professores que participaram desta pesquisa.

A escola municipal em que realizamos esta pesquisa está localizada na cidade de São Paulo. Essa é uma instituição que possui somente turmas de Ensino Fundamental, abrangendo do primeiro ao nono ano, atendendo assim nossos critérios. Pelo que pudemos perceber, as turmas dos Anos Iniciais têm aulas pela manhã enquanto as dos Anos Finais têm aulas a tarde e apesar de termos ido observar aulas presencialmente nesta escola, como não iremos fazer a descrição do espaço físicos das outras escolas, também não faremos desta. Nessa instituição, por opção própria, as turmas de quinto ano possuíam apenas um professor generalista, responsável por ensinar as disciplinas de Português, Matemática, História, Geografia e Ciências, enquanto as turmas de sexto ano possuíam um docente para cada uma dessas disciplinas, sendo chamado de especialista. Assim, ao estabelecer parceria com essa escola, conseguimos o contato de um dos professores das três turmas de quinto ano e do professor de matemática que lecionava para as duas turmas de sexto ano.

A outra escola da cidade de São Paulo em que realizamos nossa pesquisa foi uma estadual. Essa instituição oferece Ensino Fundamental (Anos Iniciais e Finais) e Ensino Médio. Como nesse caso não realizamos observação presencial, não iremos descrever o espaço físico da escola. Ao entrar em contato com a instituição tivemos nossa solicitação prontamente atendida pela sua direção e com isso, conseguimos o contato com os professores responsáveis por ensinar matemática em turmas de quinto e sexto ano do Ensino Fundamental. Cabe ressaltar aqui que nessa escola, não há apenas uma professora generalista na turma de quinto ano, mas sim duas, sendo que uma é responsável pelas aulas de Português, História e Geografia, enquanto a outra é responsável pelas aulas de Matemática e Ciências. Como nosso interesse era apenas nas aulas de Matemática, entramos em contato somente com a professora responsável por essa disciplina.

Já a escola localizada em Mogi das Cruzes é da rede particular de ensino. Essa é uma instituição que oferece desde a Educação Infantil até o Ensino Médio e que possui um ensino bilíngue. Como as observações que realizamos nas aulas dessa escola ocorreram de forma remota, não iremos descrever aqui seu espaço físico. Quando fizemos contato com a direção da escola para tentar uma parceria fomos bem acolhidos pelos responsáveis e assim conseguimos os contatos das professoras de matemática das turmas de quinto e sexto ano do Ensino Fundamental. Nessa escola, assim como na anterior, há mais do que uma professora no quinto ano, uma responsável por Matemática e Ciências e a outra por Português, História e Geografia. Assim, a escola nos disponibilizou o contato da professora de Matemática do sexto ano e da responsável pela disciplina no quinto ano. Outra questão que pudemos observar é que lá só existia uma turma de quinto e uma de sexto ano.

4.4 – Cronologia dos instrumentos de produção de dados

Depois que selecionamos as escolas e conseguimos as autorizações dos professores e dos corpos diretivos das escolas, iniciamos as fases de entrevistas. Durante os meses de maio a agosto de 2021, através do software ZOOM realizamos e gravamos as entrevistas com os seis docentes selecionados, sendo dois de cada uma das escolas já citadas. Para orientar esse momento, utilizamos um formulário de entrevista, do tipo semiestruturada, que foi elaborado com base nos estudos dos referenciais teóricos e que foi testado em duas entrevistas do tipo piloto antes de ser aplicado com esses professores. O formulário utilizado está no apêndice deste trabalho.

Simultaneamente às entrevistas, começamos o período de observação às aulas que aconteceu de agosto a outubro de 2021. A escolha por esse período de observação deu-se de acordo com as informações fornecidas incialmente pelos professores sobre quando eles iriam abordar o tema de frações em suas aulas, já que um dos focos deste trabalho é acompanhar o ensino deste assunto na transição do quinto para o sexto ano. Essas informações foram confirmadas com os docentes ao longo dos meses para que nos organizássemos e pudéssemos estar presentes nessas aulas.

Porém, quando entramos em contato com a professora do quinto ano da escola estadual de São Paulo no mês de setembro de 2021, descobrimos que a professora não estava mais trabalhando nessa instituição e que por isso não poderia mais nos ajudar nesta pesquisa. Em seguida, entramos em contato com a direção da escola para saber mais sobre a nova professora e sobre a possibilidade de que ela participasse de nossa pesquisa, mas infelizmente a resposta da escola foi de que a nova professora não poderia participar deste projeto.

Como já tínhamos realizado a entrevista com a professora que saiu da escola, tentamos conversar sobre a possibilidade de apenas observar as aulas da nova docente responsável pelas aulas, mas ainda assim não foi possível. Dado o andamento das outras observações, sabendo que geralmente essa é a época do ano em que os professores costumam ensinar e dada nossa dificuldade em encontrar escolas em que os professores do quinto e do sexto ano pudessem participar de nossa pesquisa, optamos por seguir utilizando os dados coletados da Escola de Aplicação. Assim, sobre essa instituição, tivemos as entrevistas com os professores dos dois anos escolares aqui estudados, porém, as observações foram realizadas somente com a turma do sexto ano do Ensino Fundamental e aconteceram de forma online pelo aplicativo Google Meet. Como a observação foi de apenas uma das turmas da transição estudada, optamos por não usar os dados das entrevistas e da observação em nossas análises.

Sobre as outras instituições, todas as observações foram possíveis de serem realizadas. Na escola da cidade de Mogi das Cruzes as observações nas turmas de quinto e sexto ano foram realizadas de forma remota também através do software ZOOM, porém não obtivemos autorização para gravar essas aulas. Por isso, tudo que for contado aqui referente a essas observações serão dados a partir de anotações realizadas e de lembranças desses momentos. As primeiras aulas observadas aconteceram de maneira híbrida, isto é, alguns alunos acompanhavam a aula de casa e outros estava na escola. Durante as últimas aulas, a maioria dos alunos assistiu às aulas presencialmente e por isso, os alunos foram divididos em duas salas, uma turma estava com a professora e a outra com a assistente, sendo que a professora reveza de sala de acordo com a dinâmica da aula.

Na escola municipal de São Paulo, a primeira observação se deu numa turma de sexto ano e ocorreu de forma online através do aplicativo Google Meet, porque neste momento o professor da turma ainda estava afastado porque era do grupo de risco da COVID-19. As demais observações ocorreram presencialmente, porque se deram em um momento em que os professores já estavam lecionando na escola e os alunos voltaram a frequentar o ambiente escolar, porém divididos em duas turmas, sendo que uma metade dos alunos assistia às aulas em uma semana e o restante assistia às mesmas aulas na semana seguinte. As observações aconteceram em diferentes períodos do dia porque a turma de quinto ano tinha aulas de manhã enquanto as turmas de sexto ano tinham aulas à tarde. Nessa escola também não obtivemos autorização para gravar as aulas e por isso tudo que for contado aqui será a partir de anotações realizadas no momento das observações e de lembranças da observadora.

Assim, apresentamos neste capítulo que a metodologia utilizada foi qualitativa, incluindo entrevistas e observações. Descrevemos também o contexto, as dificuldades que enfrentamos, as escolhas que fizemos, as escolas e professores que participaram desta pesquisa. Por fim, apresentamos a cronologia do desenvolvimento e da coleta de dados deste trabalho. No próximo capítulo, apresentaremos as principais ideias que frações que estão presentes na escola e também algumas considerações sobre a Base Nacional Comum Curricular, especialmente com relação ao conteúdo de frações, sem deixar de lado análises gerais e reflexivas sobre esse documento.

CAPÍTULO 5 - FRAÇÕES

Como um dos focos de nosso estudo é o ensino de frações, neste capítulo, iremos apresentar os estudos que realizamos a respeito desse tema. Para melhor organizar, dividimos o conteúdo em duas partes. Na primeira, apresentaremos nosso estudo sobre o assunto, trazendo as principais ideias desse conceito que estão presentes na educação básica, a partir das ideias de Druck (2005) e Silva (2005), além de apresentar as relações entre essas ideias.

Em seguida, abordaremos a BNCC (2017), documento que norteia o currículo da educação básica no Brasil. Nessa parte, apresentaremos suas considerações sobre a transição do quinto para o sexto ano do Ensino Fundamental e quais são os conteúdos programáticos relacionados a frações nos anos escolares aqui estudados.

5.1 – Ideias de frações

A fim de estudar a linguagem utilizada por professores para ensinar frações em turmas de quinto e de sexto ano do Ensino Fundamental é importante primeiro entender como se dá o estudo de frações de modo geral e mais especificamente nesses anos escolares. Para compreender melhor as ideias de frações e suas dificuldades, tomaremos como base dois textos.

Ao iniciarmos os estudos sobre o tema de frações, notamos que muitos autores apresentam diferentes denominações para as ideias de frações. Alguns autores utilizam uma fundamentação teórica específica e chamam de conceitos de frações ou então de concepções de frações, como Silva (2005). E há também aqueles que não apresentam uma classificação específica, como Druck (2005). Sabendo da importância que entender e explicar frações têm para o nosso trabalho, tornou-se necessário que fizéssemos uma escolha quanto a nomenclatura que utilizaríamos e iniciamos uma pesquisa em um dicionário quanto ao significado dos termos conceito, concepção, ideia e sentidos. Optamos por procurar o significado das palavras porque nossa intenção não é estudar teoricamente cada um dos termos, nem os utilizar como teoria, mas sim como o nome para o que vamos estudar sobre frações.

O Minidicionário da Língua Portuguesa, de Aurélio Buarque de Holanda Ferreira (7ª edição, 2004) contém os seguintes verbetes: *Conceito: Pensamento, ideia. Concepção: Ato ou efeito de conceber. Ideia: Opinião, conceito. Sentidos: Faculdades intelectuais.*

Assim, a partir do que encontramos ao procurar esses termos em um dicionário, optamos por utilizar o termo ideia, para descrever alguns assuntos de frações que vamos estudar com mais profundidade neste capítulo. Além disso, também de acordo com o dicionário, vamos utilizar a partir daqui as palavras sentido(s), ideia(s), conceito(s) e concepção(ões) como sinônimos.

O primeiro texto escolhido foi "Frações: uma análise de dificuldades conceituais" da Professora Iole de Freitas Druck[7]. Druck (2005) apresenta em seu texto uma análise das principais dificuldades conceituais no ensino e na aprendizagem de frações, destacando o conceito de fração; a relação de equivalência entre frações; e o significado das quatro operações fundamentais no universo das frações. Sobre o que é apresentado em seu texto, a autora destaca:

> Procuramos aqui discutir os problemas conceituais envolvidos nos tópicos citados, colocar algumas pistas de como enfrentá-los e, sobretudo, deixar claro que a superação destas dificuldades ilumina o caminho do aprendizado duradouro e significativo das frações. Pretendemos contribuir com subsídios para a reflexão sobre o conteúdo "frações" e para uma prática docente em sala de aula que leve em conta as dificuldades mencionadas. (DRUCK, 2005, p.1)

---

[7] Iole de Freitas Druck é professora aposentada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Como o intuito deste trabalho é estudar sobre o ensino de frações de maneira mais geral quanto ao conteúdo, vamos destacar aqui apenas a parte do texto de Druck em que é abordado o conceito de fração. Para descrever o conceito de fração, a autora primeiramente apresenta uma definição geral do conceito de fração e depois duas classificações para a fração, são elas: Fração como relação parte-todo; e Fração como quociente indicado, como razão ou como número racional.

O outro texto selecionado foi a tese de Maria José Ferreira Da Silva, intitulada de "Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série" e mais especificamente o capítulo 3 dessa tese. Nesse capítulo, a autora destaca o seu interesse em estudar sobre números fracionários que é também um dos principais interesses do nosso trabalho e que pode ser justificado por Post, Behr e Lesh[8] quando afirmam:

> Por várias razões os conceitos de números racionais estão entre os mais importantes conceitos que a criança experienciará durante seus anos de pré-secundário. [...] Sob uma perspectiva psicológica a compreensão de número racional proporciona um solo rico no qual as crianças podem desenvolver e expandir as estruturas mentais necessárias para continuar seu desenvolvimento intelectual. De um ponto de vista matemático, a compreensão de número racional é a fundação sobre a qual as operações algébricas básicas apoiar-se-ão mais tarde (POST, BEHR, LESH, 1982, p. 1 apud SILVA, 2005, p. 103-104)

Além disso, escolhemos esse capítulo porque nele Silva apresenta e explica quais são as concepções de frações que são trabalhadas na educação básica. Para isso, a autora definiu e caracterizou na seguinte ordem as concepções de frações: parte-todo, medida, quociente, razão e operador. Neste estudo, consideramos importante manter a ordem de apresentação das

---

[8] POST, Thomas, BEHR, Merlyn, LESH, Richard. Interpretations of Rational Number Concepts. In: Mathematics for Grades 5-9. Reston, Virginia: L. Silvey & Smart (Eds.). 1982, p. 59-72. Disponível em http://education.umn.edu/rationalnumberproject , acessado em 16/03/2004.

concepções escolhida por Silva já que ela inicia falando sobre a concepção de parte-todo que normalmente é utilizada nas primeiras tarefas sobre frações e depois apresenta as outras concepções sempre explicitando que é possível estabelecer relações entre elas.

Como o objetivo principal desta pesquisa é compreender como os professores do quinto e do sexto ano do Ensino Fundamental utilizam a linguagem e os simbolismos próprios da matemática e uma linguagem mais próxima ao cotidiano dos alunos durante o ensino de frações, consideramos importante conhecer quais são as concepções de frações trabalhadas na educação básica, como elas se interrelacionam e qual a relação delas com a linguagem utilizada pelos professores para ensinar frações na transição do quinto para o sexto ano.

Assim, apresentaremos abaixo as principais concepções de frações que são trabalhadas na educação básica, tomando como base o texto de Druck e a tese de Silva. Além de utilizar os termos que as autoras utilizam para denominar cada uma das concepções, iremos mesclar ao longo do desenvolvimento do texto as ideias apresentadas por ambas, de modo a abordar simultaneamente o que cada autora descreve sobre cada uma das situações apresentadas.

Fração como parte-todo

A primeira ideia de fração abordada por Druck em seu texto também é o primeiro abordado por Silva em sua tese e é denominada de parte-todo. Essa ideia normalmente é mobilizada durante as primeiras tarefas que os alunos fazem quando começam a estudar sobre frações. Essa ideia emerge da ação de dividir uma grandeza em partes de quantidades iguais se a grandeza for discreta ou então dividi-las em partes de tamanhos iguais (equivalentes) se a grandeza for contínua.

Por exemplo, para grandezas discretas podemos pensar em dividir 15 balas para 5 crianças. Neste caso, cada uma das crianças receberia 3 balas, ou seja, quantidades iguais de bala. Já para grandezas contínuas podemos pensar na situação de um chocolate dividido em 15 pedaços (quadradinhos) que deve ser distribuído para 5 crianças. Nesta situação, cada criança receberá um pedaço correspondente a 3 quadradinhos que não necessariamente estão fisicamente separados e por isso, podemos considerar que cada uma das crianças receberá o mesmo tamanho de pedaço da barra de chocolate. Em ambos, o número fracionário correspondente é 3/15 ou 1/5.

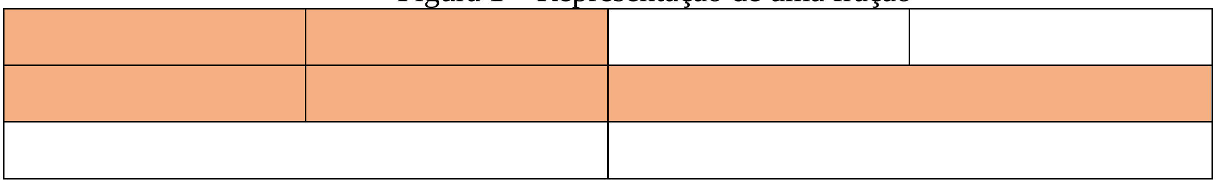
Segundo Silva, para trabalhar em aula com a ideia de parte-todo a única técnica usada é a dupla contagem, isto é, contar o número de partes em que a grandeza foi dividida, que será o denominador e depois o número de partes que está sendo considerada e que será o numerador da fração. Ao abordar essas ideias, a autora dá algumas sugestões de como usar essa dupla contagem para introduzir os termos de numerador e denominador, já que o denominador é aquele que dá o nome a fração (meio, terço, quarto etc.).

Um exemplo dessa introdução é desenhar um retângulo dividido em quatro partes com três partes pintadas, escrever com os alunos a fração $\frac{3}{4}$, dizer que o 3 é numerador, o 4 é o denominador e se lê a fração como três quartos. Assim, o procedimento da dupla contagem nada mais é do que contar o número de partes em que o inteiro foi dividido e quantas partes foram pintadas ou selecionadas, ou seja, a contagem dos elementos é feita duas vezes. Caso seja uma coleção de objetos, primeiro se é contado o número de objetos e depois os que foram selecionados (pintados ou retirados).

Porém, Silva destaca que o recurso da dupla contagem apresenta alguns problemas, como por exemplo quando a fração representar um número maior do que um inteiro, ou quando a figura não estiver dividida em partes iguais. Sobre o caso de frações que representam um número maior que um inteiro, podemos dar como exemplo duas barras divididas em cinco partes, com 8 partes pintadas e que representam a fração $\frac{8}{5}$. Nesse caso, a ideia é que cada uma das barras represente um inteiro dividido em cinco partes. Porém, com o recurso da dupla contagem, é possível que os alunos contêm 10 partes ao invés de 5 e escrevam a fração $\frac{8}{10}$, cometendo um equívoco.

Outro caso é quando as figuras não estão divididas em tamanhos iguais, como na Figura 1.

Figura 1 – Representação de uma fração

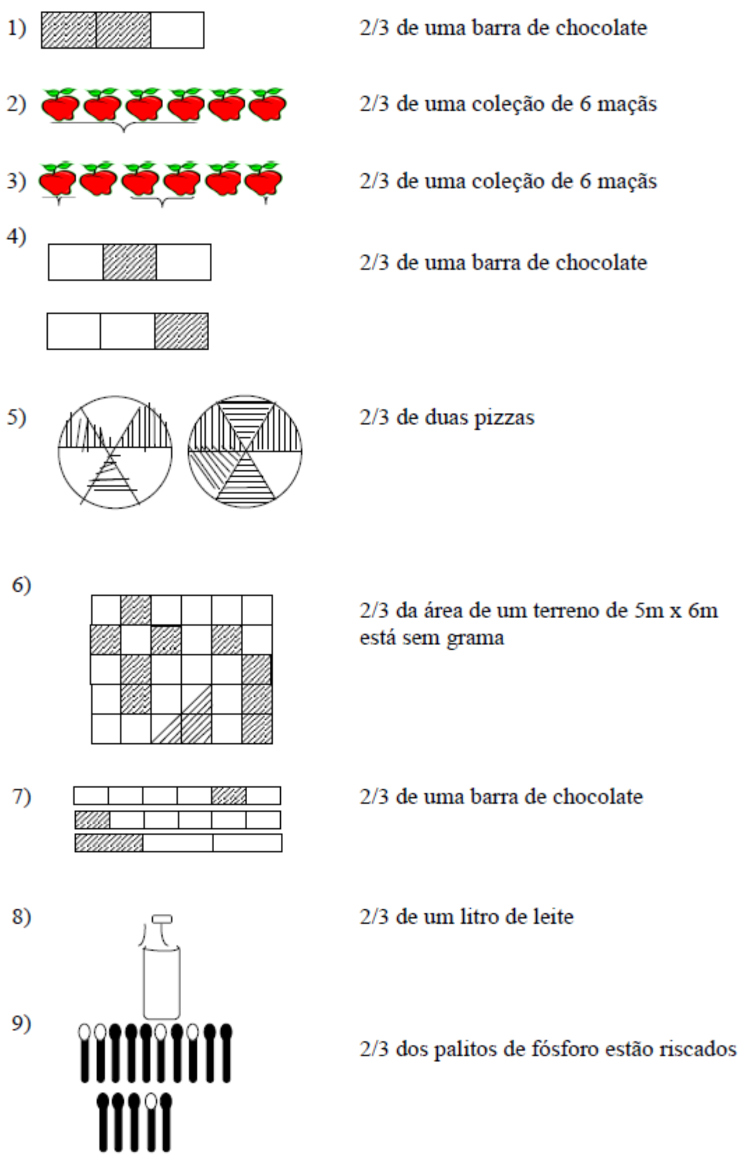


Fonte: Desenho elaborado pela autora.

De acordo com a Figura 1, a correta representação fracionária é $\frac{6}{12}$ mas, é comum que alguns alunos, utilizando o recurso da dupla contagem, afirmem de maneira inadequada que a representação correta seria $\frac{5}{9}$. Nesse último caso, a sugestão de Silva é que os alunos consigam reconfigurar a figura para que ela fique com partes de tamanhos iguais. Ainda sobre a ideia de parte-todo, a autora fala que trabalhar com os alunos situações como calcular ¼ de 15 objetos faz com que os alunos mobilizem e desenvolvam novas técnicas para resolver esse tipo de problema o que é enriquecedor para a aprendizagem dos alunos.

Na parte de seu texto em que trata sobre frações como parte-todo, Druck (2005) apresenta diversos exemplos de situações que envolvem a fração $\frac{2}{3}$, com diferentes tipos de grandezas (diretas e contínuas) e com diferentes tipos de representação. E a autora defende que trabalhar com esses diferentes tipos de situações é importante para aprendizagem dos alunos porque assim eles serão capazes de compreender melhor o conceito geral de fração e suas diferentes ideias. Segue abaixo uma imagem extraída do texto de Druck com as representações da fração $\frac{2}{3}$.

Figura 2 – Representações da fração $\frac{2}{3}$.



Fonte: Druck (2005).

A partir disso, a autora destaca que:

> Por meio desses exemplos quero chamar a atenção para o fato de que os três ingredientes fundamentais, usualmente empregados para conceituar fração,

> apresentam dificuldades para serem devidamente compreendidos no grau de generalidade exigido para que o conceito matemático não seja deturpado. São eles:
> - Unidade ou todo;
> - Partes da unidade;
> - Igualdade entre as partes. (DRUCK, 2005, p. 3)

Sobre isso, é importante destacar as considerações da autora sobre a conceituação de fração. Para ela, a principal dificuldade é ensinar esses conceitos de modo que os alunos entendam, mas sem que exista incoerência com o que é fundamentado pela matemática. Para que essa conceituação ocorra de forma correta, Druck destaca que a base para ensino e aprendizagem de frações é: a unidade ou o todo; as partes da unidade e a igualdade entre as partes.

A unidade diz respeito ao inteiro, ou seja, ao elemento (grandezas contínuas) ou ao conjunto de elementos (grandezas discretas) que será dividido em partes. Por exemplo, nos itens 1, 4 e 7 da Figura 2 a unidade é a barra de chocolate, ou seja, um elemento. Já nos itens 2 e 3 da mesma figura, a unidade é representada por seis maçãs, ou seja, um conjunto de elementos. As partes da unidade se referem a quantidade de partes em que a unidade (ou o inteiro) foi dividido. No caso das barras de chocolates dos itens 1, 4 e 7 da Figura 2, nem todas as barras foram divididas na mesma quantidade de partes. Nos itens 1 e 4, as barras foram divididas em três partes iguais e no item 7, as barras foram divididas em seis partes iguais. Já a igualdade entre as partes se refere ao fato de que em toda representação de fração deve estar explícito que as partes foram divididas em tamanhos iguais, para grandezas contínuas ou em quantidades iguais, para grandezas discretas.

Fração como medida

Outra ideia abordada por Silva é o de fração como medida. Para explicar sobre esse conceito a autora optou por abordar questões que envolvessem apenas medidas de comprimento. Antes de continuar a discussão de como a autora aborda essa ideia é importante esclarecer a representação formal de fração. Segundo Druck (2005):

> Os livros didáticos de Matemática geralmente apresentam uma definição como a que segue para uma fração $\frac{p}{q}$, priorizando normalmente este aspecto na introdução do conceito: *A notação $\frac{p}{q}$ representa a fração ou pedaço correspondente a p partes de uma unidade ou todo que foi dividido em q partes iguais.* (DRUCK, 2005, p. 1)

Assim, tomando essa definição da notação $\frac{p}{q}$ podemos então retomar a discussão feita por Silva de fração como medida. Para a autora, as situações que envolvem a concepção de medida envolvem três objetos: a reta numérica ou o esquema de medida; a subunidade $(\frac{1}{b})$ que envolve a ideia de "em quantas partes a minha unidade foi dividida"; e o resultado da medição $(\frac{a}{b})$ dialogando então com a definição apresentada por Druck (2005) e que envolve a unidade, as partes da unidade e a igualdade entre as partes.

Como já abordado, para Silva, a subunidade seria a divisão da unidade, ou seja, o número de partes em que o inteiro foi dividido, é possível então fazer uma relação entre essa ideia de medida e o de parte-todo. Sobre a concepção de fração como medida, a autora salienta ainda que essa ideia, diferentemente da anterior, ela auxilia no trabalho com números maiores do que um inteiro e assim permite o desenvolvimento com os alunos os conceitos de fração imprópria e número misto.

Além disso, a ideia de fração como medida também auxilia o professor a trabalhar com a ordenação dos números de forma geral e na reta numérica, com a adição e a subtração de frações com denominadores iguais e com a introdução da equivalência de frações, que são algumas das competências e habilidades indicadas na BNCC.

Um exemplo para a ideia de fração como medida é a medição de objetos que pode ser realizada com uma tira de papel ou instrumentos de medida, como a régua e que farão o papel do inteiro ou da unidade nesse caso unidade de medida. Esse tipo de atividade possibilita aos alunos a reflexão sobre a necessidade de números que representem quantidades diferentes do inteiro. Além disso, quando a unidade é uma tira de papel fica mais fácil que o aluno consiga enxergar e representar as partes da fração, como $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, por exemplo. Nesse tipo de atividade, a unidade é o instrumento de medida, como a tira de papel ou a régua e as partes vão depender do objeto que for medido. E, justamente porque um objeto será medido, a fração que representa essa medição está diretamente relacionada à ideia de fração como medida.

O fracsoma, como da Figura 3 abaixo, é um material educacional que pode ser utilizado para trabalhar com a ideia de fração como medida. No material abaixo, temos uma tira branca e com o número 1, que representa a unidade. As tiras seguintes, são partes do inteiro, como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$. Para trabalhar a ideia de fração como medida, já vimos que precisamos de um instrumento de medida, no caso do fracsoma a tira branca pode ser utilizada como instrumento de medida, quando o tamanho do objeto a ser medido for maior do que uma unidade ou um inteiro (a tira branca), os alunos podem usar as tiras coloridas para descobrir o comprimento total desse objeto. Ele também pode ser utilizado para trabalhar com a adição e subtração de frações com denominadores iguais, dialogando com o que foi abordado por Silva sobre a relação entre a fração como medida e essas operações com frações.

Figura 3 - Fracsoma

Fonte: Laboratório de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Em seu texto, Druck (2005) não aborda diretamente a ideia de fração como medida, porém, como já exposto acima, a autora destaca a importância de que os conceitos de unidade ou todo, partes da unidade e igualdade entre partes. A ideia de fração como medida dialoga bastante com o esclarecimento dos conceitos de unidade, já que se usa um instrumento de medida como unidade e com as partes da unidade porque para medir objetos que não cabem nos inteiros da unidade, é necessário dividi-la em partes e então, pode se trazer a discussão da importância da igualdade entre as partes.

Fração como quociente

A fração como quociente é uma das ideias de fração que Druck traz em seu texto, porém de forma associada a fração como razão e como número racional. Como nossa intenção aqui é deixar claro as ideias mais discutidas sobre fração na educação básica, vamos dedicar essa seção às considerações das duas autoras sobre fração como quociente, ou como Druck chama, quociente indicado.

Quando aborda a ideia de fração como quociente, Druck (2005, p. 4, grifo da autora) fala sobre a ordem em que os conteúdos são ensinados na educação básica: "... primeiro é introduzida a *divisão* de números naturais; em série posterior *frações* são trabalhadas; mais adiante ainda, aparecem as *razões*; os *números racionais* comparecem ao final. Normalmente o próximo conteúdo é abordado sem nenhuma indicação sobre como se relaciona com o(s) anterior(es)." Ou seja, os conteúdos de divisão, frações, razões e números racionais geralmente aparecem de forma separada e sem deixar claro a relação entre eles. Porém, a autora traz em seu texto os significados das palavras divisão, quociente, fração e razão, extraídos de um dicionário para tentar esclarecer as diferenças e semelhanças entre esses conceitos e a ideia que é comum à maioria deles é a divisão. Sobre o fato de que a divisão está diretamente relacionada à ideia geral de fração, Druck destaca que:

> De fato, reexaminando os exemplos de frações discutidos anteriormente, ou outros, podemos nos dar conta da presença, implícita ou explícita, de divisões, repartições, subdivisões ou outras formas concretas ou mentais de visualizar um pedaço de um todo como uma determinada fração. Assim uma idéia da divisão está realmente na base do conceito de fração. Ao repartir dois pães por três crianças, cada uma receberá 2/3 de pão. Ou seja, a quantidade de pão recebido é o resultado de 2 (pães) divididos por 3 (crianças) – portanto um

> quociente. É assim natural que a fração 2/3 (o número que expressa tal quantidade, a quantifica) indique o quociente entre os números 2 e 3. Observemos ainda que essa “naturalidade” só se apresenta em modelos onde temos mais de um todo para ser repartido, mesmo que o resultado não seja uma fração imprópria. (DRUCK, 2005, p. 5)

Assim, no trecho acima, a autora ilustra, a partir de um exemplo, uma situação em que a fração pode ser entendida como um quociente, ou seja, como o resultado de uma divisão. Mais do que isso, Druck destaca que é comum em muitas situações que a fração possa ser entendida como o resultado de uma divisão.

A ideia de fração como quociente também está diretamente relacionada aos conceitos de unidade, partes da unidade e igualdade entre partes. Isso porque, quando se pensa em uma divisão, a ideia central é que um número, o dividendo na divisão ou o numerador na fração que representam a(s) unidade(s), será(ão) dividida(s) por outro número, o divisor da divisão ou o denominador da fração e representam as partes da(s) unidade(s) e o resultado será o quociente ou a representação da fração. E quando se realiza a operação de divisão está implícito de que a divisão deverá ser uma repartição da(s) unidade(s) em partes iguais.

Já Silva, quando aborda a ideia de fração como quociente, destaca exatamente a relação entre a fração e a divisão. Para a autora, uma fração $\frac{a}{b}$, pode indicar que a foi dividido em b partes iguais. E a divisão $a \div b$ também indica que a foi dividido em b partes iguais. Portanto, é possível assim, entender por que a ideia de fração como quociente é válida, já que a fração e a divisão são conceitos que podem ser diretamente relacionados.

Ainda sobre a ideia de fração como quociente, a autora destaca que podemos pensar na divisão como partitiva, em que ela representa o valor de cada parte, mas também por cotas, ou seja, em que ela indicar uma quantidade de partes possíveis. Sobre a divisão partitiva, podemos pensar em um inteiro dividido em quatro partes e assim, cada parte representaria $\frac{1}{4}$ daquele inteiro inicial. Já a divisão por cotas, podemos pensar encontrar o número de crianças para distribuir 4 chocolates de modo que cada uma das crianças receba o equivalente a $\frac{1}{4}$ do total de barras de chocolate. Nesse caso, uma resposta possível seria 4 crianças e cada uma das crianças receberia uma barra de chocolate.

Quando aborda essa ideia, a autora dá como exemplos algumas tarefas que envolvem situações práticas, como a distribuição de uma quantidade de pizzas para uma quantidade de pessoas ou então de chocolates. Para explicar melhor sobre essa ideia, apresentaremos a seguir duas tarefas explicitadas pela autora. A primeira delas, segundo Silva (2005, p. 122, grifo da autora é: "**Tarefa 1:** Quanto cada pessoa receberá de pizza se distribuirmos igualmente cinco pizzas entre quatro pessoas." Essa é uma tarefa do tipo de distribuir igualmente *a* objetos em um número *b* de partes. Já sobre a divisão por cotas, Silva (2005, p. 123, grifo da autora) apresenta a seguinte tarefa: "**Tarefa 1:** Quantas crianças receberão chocolate, se distribuirmos três chocolates, igualmente, de tal forma que cada uma receba 3/5?" Nessa tarefa, é necessário descobrir qual a quantidade de crianças possível para que se faça a divisão de 3 chocolates entre elas e cada uma delas receba $\frac{3}{5}$.

Essas tarefas envolvem diretamente a ideia de divisão, conteúdo já conhecido pelos alunos quando eles começam a aprender sobre frações. Isso facilita a mobilização da ideia de fração como quociente pelos alunos e, pode auxiliar na introdução de os números que não representam apenas uma unidade, ou seja, que não são inteiros. Sobre esse sentido, Silva não destaca, mas é importante salientar, como recém dito, que ela também nos permite trabalhar com números maiores do que um inteiro, com a adição e subtração de frações com denominadores iguais e com a introdução da equivalência de frações, assim como a concepção de medida.

Fração como razão

Tanto Silva como Druck trazem a ideia de fração como razão em seus textos, porém Druck (2005, p. 5) não se aprofunda nesse assunto e apresenta uma justificativa para isso "O conceito de razão é mais abstrato do que o de fração como relação parte-todo. Talvez se possa dizer que ele seja um passo de abstração intermediário entre esse último e o conceito de número racional. Deixarei essa discussão para uma outra ocasião.”

Por outro lado, Silva dedica uma seção de sua tese para abordar a ideia de fração como razão e diz que essa ideia é uma comparação entre medidas de duas grandezas, mas que não tem relação com partições e que nem sempre se associa com a ideia de quociente. Para a autora, razão é uma comparação, mas nem sempre de dois números, ela pode ser uma proporcionalidade ou então uma equivalência e é uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas. Para Silva, quando se trabalha com a concepção de razão, tivermos a fração $\frac{a}{b}$, é importante que o aluno compreenda que qualquer mudança no número a fará com que o número b também mude, e por isso, essa ideia pode ser usada para trabalhar com o conceito de equivalência de frações.

Para explicar melhor sobre a ideia de razão, a autora explica que podem ser trabalhadas situações de todo-todo, parte-parte e parte-todo. Para Silva (2005, p. 125), as situações de todo-todo são: “... quando compara as quantidades de dois inteiros;” e um exemplo dessas situações é quando há ampliação ou redução de imagens. Um exemplo de tarefa desse tema é dado por Silva (2005, p. 125, grifo da autora): “**Tarefa 1**: Determinar a razão de ampliação e de redução entre as figuras A e B.” Nesse tipo de tarefa, pode ser dado aos alunos duas imagens de um mesmo objeto, porém de tamanhos diferentes e os alunos devem determinar a razão de ampliação ou redução da figura. Para isso, primeiro eles precisam concluir se a imagem aumentou ou reduziu de tamanho para depois determinar quantas vezes maior ou menor a figura ficou.

Já as situações de parte-parte são definidas por Silva (2005, p. 125) como: “... quando compara as quantidades de duas partes de um inteiro ou partes de dois inteiros, ...”. Essas situações têm como exemplos a questão de dada uma razão, determinar quantidades; relações proporcionais de aumento e redução; e também de determinar uma razão entre grandezas discretas. Um exemplo dessas situações é dado por Silva (2005, p. 126, grifo da autora): "**Tarefa 4:** Determinar a razão entre açúcar e farinha numa receita de bolo que utiliza duas xícaras de açúcar para três de farinha." Segundo a autora, as situações de parte-parte podem ou não mobilizar a ideia de número fracionário, no caso da aqui citada, ela não mobiliza nem o conceito de número fracionário, nem a de quociente, mas sim a de proporcional para aumento ou redução da receita do bolo.

Porém, Silva (2005, p. 126, grifo da autora) também apresenta uma situação em que a razão pode se relacionar a frações como na "**Tarefa 5**: Se para fazer uma jarra de refresco utilizamos 3 copos de suco para 12 copos de água, qual a razão de suco para água?" Isso acontece porque nesse caso os alunos podem concluir que $\frac{1}{4}$ da jarra é composta de suco, ou então que $\frac{3}{4}$ da jarra são compostos de água. Nesse caso ocorre a mobilização de fração como uma razão, já que a razão de suco para o total de líquido na jarra pode ser representada pela fração $\frac{1}{4}$.

As últimas situações da ideia de fração como razão abordadas por Silva envolvem a ideia de probabilidade e de relação entre grandezas de naturezas diferentes. Um exemplo é apresentado por Silva (2005, p. 129, grifo da autora) na: "**Tarefa 13:** Ao lançar um dado qual é a probabilidade de se obter um seis?". Nessa atividade, a probabilidade que é a resposta do exercício pode ser representada na forma de uma fração, mas também representa uma razão, como todas as probabilidades. No caso, a razão é entre sair o número seis e sair todos os números possíveis do dado.

E sobre a relação entre grandezas de naturezas diferentes, Silva (2005, p. 129, grifo da autora) dá como exemplo a: "**Tarefa 14:** Comparar a quantidade de ovos e a quantidade de farinha em uma receita de bolo." Neste exemplo, a quantidade de ovos é uma grandeza discreta, enquanto a quantidade de farinha é uma grandeza contínua, portanto nessa questão são apresentadas grandezas de naturezas diferentes. Além disso, a comparação entre essas grandezas indica uma razão e pode ser representado com uma fração, fazendo com que os alunos mobilizem a ideia de fração como uma razão.

Silva aponta ainda alguns tipos de questões que envolvem a ideia de razão: determinar uma razão, determinar um valor desconhecido e comparar razões. Esses tipos de questões podem ser relacionados com alguns exemplos de situações. Nesse sentido, a autora dá como exemplos situações que trabalham com porcentagem, escala, densidade demográfica, velocidade média e equivalência entre duas razões, esta última pode se apresentar na forma de regra de três.

Como são diversas as situações que podem trabalhar com a ideia de razão, exemplificaremos abaixo apenas algumas dessas situações. Um exemplo para trabalhar o conceito de razão é a densidade demográfica, que indica a relação (ou razão) entre a população de determinado local e a superfície desse território. Assim, ela é, geralmente, definida como $densidade\ demográfia = \frac{Total\ de\ habitantes}{Área}$ e, portanto, é mais um exemplo que relaciona a razão com uma representação na forma de fração. Outro exemplo que é muito trabalhado envolve a ideia de porcentagem. Se dizemos, por exemplo, que 40% dos alunos de uma escola são meninos, podemos dizer que a razão de meninos naquela sala é de 40 meninos a cada 100 alunos e podemos representar essa razão como a fração $\frac{40}{100}$.

Fração como operador

A última ideia que vamos apresentar aqui é a de fração como operador. Para Silva, esse conceito se refere às situações em que a fração atua sobre uma quantidade e a modifica produzindo uma nova quantidade. A autora apresenta ainda oito tipos de questões que envolvem a fração como um operador. A primeira questão é sobre transformar grandezas pela ação de um operador fracionário e que pode auxiliar na introdução de multiplicação de frações. Um exemplo apresentado por Silva (2005, p. 134, grifo da autora) é a: "**Tarefa 1:** Construir um quadrado cujo lado tenha $\frac{2}{3}$ da medida do lado do quadrado dado." Nessa atividade, os alunos devem medir o lado do quadrado dado e encontrar qual é o número (ou medida) que representa $\frac{2}{3}$ dessa medida. Assim, a fração $\frac{2}{3}$ atuou como um operador na medida do lado do quadrado dado.

A segunda questão é sobre transformar grandezas pela ação de dois operadores fracionários e também pode auxiliar na introdução de multiplicação de frações. Uma tarefa que envolve essa questão é apresentada por Silva (2005, p. 137, grifo da autora) na: "**Tarefa 4:** Se a capacidade de $\frac{3}{5}$ de um recipiente é de 36 litros, qual a capacidade do recipiente?" Nessa tarefa os alunos devem trabalhar com a ideia de a partir dos $\frac{3}{5}$, encontrar quantos litros correspondem a capacidade total do recipiente. Uma das maneiras de resolver essa situação é encontrando qual é a quantidade que corresponde a $\frac{1}{5}$ do recipiente para então encontrar a capacidade total. Essa é uma situação que é inversa a anterior. Nesse caso, a fração $\frac{3}{5}$ corresponde a apenas uma parte do total e deve-se calcular qual o total, já no exemplo anterior a fração $\frac{2}{3}$ corresponderia a parte do que se queria calcular.

Outra situação apresentada por Silva e que envolve a fração como um operador é sobre determinar o operador que faz uma certa transformação, como por exemplo, situações de receitas em que você tenha menos quantidade de ingredientes que o necessário e que por isso, precise reduzir a receita, então será necessário descobrir o número de vezes em que a receita deve ser diminuída.

Um outro exemplo que envolve a ideia de fração é sobre a comparação de operadores e que também pode ser utilizada para trabalhar com a equivalência de frações, observe na figura abaixo o quadro 5 que é apresentado por Silva:

Figura 4 – Quadro de equivalência de operadores

Estado Inicial	Operador	Estado Final
12	$\frac{2}{3}$	8
12	$\frac{4}{6}$	8
12	$\frac{8}{12}$	8

Fonte: Silva (2005).

Nessa imagem, temos estado inicial, operador e estado final. Para ilustrar melhor podemos pensar na seguinte situação: Maria tem 12 balas e irá dividir $\frac{2}{3}$ dessas balas com seus primos, qual a quantidade de balas que ela irá compartilhar com eles? Nessa situação, 12 balas é chamado por Silva de estado inicial, ou seja, a quantidade inicial, e o operador é $\frac{2}{3}$. Para continuar o exercício pode-se perguntar aos alunos o que aconteceria se compartilhasse com os primos $\frac{4}{6}$ ou então $\frac{8}{12}$ das balas. A resposta então seria a mesma, independente do operador: 8 balas, que Silva chama de estado final. Essa é uma situação em que se pode trabalhar com a comparação de operadores, mas também com a equivalência de frações.

Outra situação trazida por Silva em seu texto diz respeito a comparação entre estados iniciais e finais. Para exemplificar podemos continuar na situação da Maria e pensar em três possibilidades diferentes: Maria tem 12, 15 e 18 balas para dividir $\frac{2}{3}$ dessas balas com seus primos. Nesse caso, as respostas seriam 8, 10 e 16, respectivamente. Assim, mantivemos o operador nas três situações, porém mudamos o estado inicial e consequentemente o estado final. Ao fazer uma comparação entre os estados iniciais e finais, os alunos podem encontrar a seguinte equivalência: $\frac{12}{8} = \frac{15}{10} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$, possibilitando mais uma situação para trabalhar com a equivalência de frações.

Em seguida, Silva traz uma situação em que é preciso determinar o operador que desfaz uma ação. Para exemplificar, podemos pensar novamente na situação inicial de Maria, com algumas adaptações. Maria tinha uma quantidade de balas e deu 8 dessas balas para seus primos, essa quantidade representa $\frac{2}{3}$ da quantidade de balas que Maria tinha, quantas balas ela tinha incialmente? Nessa situação, os alunos devem encontrar qual o número que representa $\frac{1}{3}$ das balas, dividindo 8 por 2, resultando em 4. Depois, basta que eles multipliquem 4 por 3, chegando no resultado 12. Porém, realizar esses cálculos é o mesmo que multiplicar o número fornecido no enunciado, pelo inverso de $\frac{2}{3}$ que é $\frac{3}{2}$. Assim, esse tipo de atividade com o uso da ideia de fração como operador pode ser utilizado para trabalhar com as ideias de multiplicação de frações, inverso e consequentemente divisão de frações.

Outra situação que Silva apresenta em seu texto é sobre determinar o operador que substitui a ação de vários operadores. Um exemplo para essa situação pode ser: Maria tem 12 balas e vai dividir $\frac{2}{3}$ dessas balas para seus primos, João e Pedro, de modo que cada um receba $\frac{1}{2}$ do total de balas que ela compartilhou com eles. Quantas balas cada um deles irá receber? Para resolver essa situação, os alunos primeiro devem calcular quantas balas Maria irá dividir com seus primos que como já vimos são 8 balas. Depois, os alunos precisam calcular que $\frac{1}{2}$ das 8 balas irá para cada um dos primos, assim cada um receberá 4 balas. Porém, nessas situações, os alunos podem pensar também que cada um receberá "a metade de dois terços", ou seja, $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$, encontrando como resposta a fração $\frac{1}{3}$, e quando eles calcularem $\frac{1}{3}$ de 12 balas, chegarão na mesma resposta, 4 balas. Essa é mais uma situação em que a ideia de fração como operador pode ser utilizada para trabalhar com a multiplicação de frações.

E a última questão que Silva apresenta para falar sobre a ideia de fração como operador é sobre determinar a porcentagem de uma quantidade, ela apresenta o seguinte: "**Tarefa:** Quantos alunos, de uma classe com 50 alunos, jogam vôlei se sabemos que 10% dos alunos da classe praticam esse esporte?”. Nessa tarefa, os alunos vão utilizar a porcentagem 10% como um operador da quantidade 50. Porém, é possível que os alunos transformem essa porcentagem na fração $\frac{1}{10}$ ou $\frac{10}{100}$ e acabem utilizando a ideia de fração como operador.

5.2 – A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo, um currículo base para toda a Educação Básica do país. Ele foi originado a partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), no seu artigo 8°, inciso IV, diz que cabe à União:

> estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum. (BRASIL, 1996)

Já em 1998 houve uma primeira versão de um documento que tinha como função nortear os currículos, eram os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Segundo Passos e Nacarato (2018, p. 122): “(...) esse documento não tinha um caráter prescritivo e controlador das práticas dos professores, sua proposta era apoiar as discussões e os projetos nas escolas.”. Assim, esses documentos foram a referência de currículo nacional por quase duas décadas tanto na elaboração de materiais didáticos como de matrizes de referência das provas nacionais, como Prova Brasil e Provinha Brasil.

Após esse primeiro documento, o governo brasileiro passou a organizar outras ações que auxiliassem na melhoria da aprendizagem dos alunos e na qualidade do ensino. Uma dessas iniciativas foi o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) em que a alfabetização passou a ser compreendida também sob a perspectiva do letramento. Sobre esse documento e sua abordagem da Matemática, Passos e Nacarato (2018, p.123) afirmam que “Foi a primeira vez que um documento oficial fez referências ao letramento em Matemática.” Além disso, o PNAIC trazia uma educação Matemática que valorizava os conhecimentos prévios dos alunos e que os auxiliasse a ler e entender o mundo ao seu redor. Essas novas ideias sobre o ensino de Matemática foram acompanhadas de programas de formação continuada de professores na intenção de que eles as conhecessem e pudessem usá-las em sala de aulas.

Porém, paralelamente a esse desenvolvimento se iniciaram as discussões de elaboração da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) prevista a partir do Plano Nacional de Educação (Lei n°13.005/2014):

> Meta 2: universalizar o ensino fundamental de 9 (nove) anos para toda a população de 6 (seis) a 14 (quatorze) anos e garantir que pelo menos 95% (noventa e cinco por cento) dos alunos concluam essa etapa na idade recomendada, até o último ano de vigência deste PNE.
> Estratégias:
> [...]
> 2.2) pactuar entre União, Estados, Distrito Federal e Municípios, no âmbito da instância permanente de que trata o § 5º do art. 7º desta Lei , a implantação dos direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento que configurarão a base nacional comum curricular do ensino fundamental;" (BRASIL, 2014)

Assim, a Base é um documento que tem por objetivo nortear os currículos e as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas do Brasil. Para fins de aprovação, o documento foi dividido em dois, um para a Educação Infantil e Ensino Fundamental e o outro para o Ensino Médio. Aqui será discutido sobre o primeiro, homologado em dezembro de 2017. O documento aprovado, na verdade, é a quarta versão do texto. Sobre a elaboração desse documento, Passos e Nacarato descrevem que

> Na primeira versão, elaborada em 2015, embora não da forma como a sociedade educacional desejaria, contou com a participação dos pesquisadores em Educação Matemática. Essa versão passou por leituras críticas de pesquisadores e especialistas, bem como foi disponibilizada para consulta pública, em que os professores de todo país poderiam opinar sobre o documento. (...) A segunda versão, divulgada em 2016, levou em consideração a consulta pública, as recomendações e sugestões de pareceristas críticos e dos representantes de sociedades científicas. Com a nova constituição do Ministério da Educação após o impeachment da presidenta Dilma Rousseff, a equipe elaboradora foi destituída e outra, constituída por especialistas convidados e por representantes de grupos empresariais, como a Fundação Lemann, elaborou a terceira versão que foi enviada ao Conselho Nacional de

> Educação no início de 2017 e aprovada em dezembro, com algumas modificações, gerando a versão definitiva. (PASSOS E NACARATO, 2018, p. 124)

Assim, é presente até os dias de hoje os questionamentos a respeito da elaboração desse documento, especialmente no que diz respeito aos seus objetivos. Isso porque, na versão homologada, uma parcela dos autores é composta por representantes de grupos empresariais, atendendo também a seus próprios interesses. Além disso, os professores, principais interessados e que utilizam o material, não participaram da finalização do documento.

Também existem questionamentos a respeito da interpretação do documento, já que existem atualmente algumas propostas que diminuem a autonomia do professor, como planos de aula disponibilizados online por grandes empresas. Novamente, grandes grupos empresariais interferem na dinâmica de sala de aula, indicando o conteúdo, o roteiro de aula, o controle de tempo, as questões a serem feitas aos alunos e como avaliar o desempenho deles. Ideias como essa são contrárias ao que se entende pelo ensino de Matemática.

Quando comparamos o que é apresentado pelo PNAIC e pela BNCC algumas diferenças merecem destaque, como é o caso do letramento matemático. Segundo Passos e Nacarato:

> Se nos documentos do PNAIC a concepção de alfabetização na perspectiva do letramento se apoiava nos estudos na área da língua materna, considerando a ampla produção brasileira no campo do letramento, com estudos de pesquisadoras como Angela Kleimann, Magda Soares e Roxane Rojo, na BNCC a concepção de letramento matemático é retirada da Matriz de Avaliação de Matemática do Pisa 2012. (PASSOS E NACARATO, 2018, p. 127)

A concepção de letramento para a BNCC está diretamente relacionada às competências e habilidades, ou seja, a capacidade individual de cada aluno. Já no PNAIC essa ideia estava mais relacionada à coletividade, aos contextos práticos, sociais e históricos, além de uma articulação com outras áreas do conhecimento. Assim, concordamos com as ideias de Passos e Nacarato (2018, p. 131) quando afirmam que "(...) a BNCC avançou ao introduzir novos conteúdos, mas da forma como o fez, não dá subsídios ao professor que não tem uma formação específica para ensinar Matemática e que, o modo como as habilidades foram redigidas dificilmente serão por ele compreendidas.”

Além das questões mais curriculares, consideramos importante destacar aqui um pouco do histórico recente da criação desse documento. Como já apresentamos anteriormente o próprio PNE sugere a criação de um documento com orientações para o currículo no âmbito nacional. Assim, de acordo com Bigode (2019), o Ministério da Educação e Cultura (MEC) criou em 2012:

> (...) um grupo de trabalho sobre Direitos à Aprendizagem e ao Desenvolvimento que produziu o documento *Direitos à Aprendizagem e ao Desenvolvimento na Educação Básica: Subsídios ao currículo nacional*, publicado em julho de 2014, apresentado oficialmente em fevereiro de 2015 e engavetado em seguida. Sem quaisquer explicações do MEC. (BIGODE in: CÁSSIO, F.; CATELLI, R. (orgs.)., pp. 123-124)

Desta maneira, temos que inicialmente o documento criado não tinha como objetivo ser uma normativa curricular e sim ser uma orientação para o país todo. Do ponto de vista histórico, é preciso lembrar também que no ano de 2015 também de teve início o processo de *impechment* e que segundo Bigode pode ter influenciado nessa decisão do MEC. Isso porque, após esse acontecimento, um novo documento foi criado, agora com forte participação de grupos empresariais. Diferentemente do processo acima descrito, a agora primeira versão da base foi criada em menos de três meses, o que pode levar ao questionamento de entender se o processo foi de criação ou de tradução de um documento já existente. De acordo com Bigode (2019, p. 127) há um: “(...) alto grau de semelhança da base de Matemática com o currículo australiano (ACARA) e com a base norte-americana (Common Core).”

Com base nisso, também existe a discussão de que a participação pública não ocorreu da maneira com que foi divulgada, pelo contrário foi baixa a participação e com pouca interatividade. Do ponto de vista do conteúdo, segundo o autor a base é uma união entre as bases norte-americana e australiana, tanto no modelo de códigos que engessa os conteúdos como nos próprios conteúdos. Sobre isso, Bigode (2019, p. 129) ainda afirma que “A maioria dos especialistas em Educação Matemática convidados pelo MEC para fazer a leitura crítica da BNCC de Matemática se posicionou contrariamente, e não apenas a partes do documento, mas principalmente aos princípios gerais que o estruturam e o orientam.”. Mesmo com as críticas, o documento foi mantido, teve algumas mudanças até a versão final, mas apenas cosméticas, nada que mudasse a estrutura e a ideia central tão criticada.

Assim, como o documento foi aprovado e é válido em todo território nacional, utilizamo-lo como referencial em alguns momentos deste trabalho. Justamente por isso, consideramos importante apresentar algumas considerações sobre o histórico do seu processo de criação e também sobre o seu conteúdo, sob o ponto de vista de especialistas na aula.

A BNCC e as transições escolares

A BNCC apresenta conteúdos, competências e habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo da vida escolar dos alunos desde a Educação Infantil até o Ensino Médio. Além disso, ele traz contextualizações a respeito de cada uma das etapas da educação básica abordadas no documento. As explicações dadas no texto servem para um primeiro momento de compreensão sobre as características e preocupações a das diferentes transições escolares da vida dos alunos, em especial, a do quinto para o sexto ano do Ensino Fundamental, aqui estudada.

O documento possui uma seção dedicada ao Ensino Fundamental, onde se discute sobre como esse período escolar é uma etapa de transição entre a infância e a adolescência, marcada por mudanças físicas, cognitivas, afetivas, sociais, emocionais etc. Além disso, o documento divide essa fase do ensino em duas etapas: os Anos Iniciais, do 1° ao 5° ano; e os Anos Finais, do 6° ao 9° ano. Essa divisão é facilmente notada no cotidiano escolar, seja pela mudança na composição do corpo docente, de um ensino unidocente para um pluridocente, seja na mudança de escola, como acontece na rede estadual de ensino de São Paulo, quando passa do quinto para o sexto ano, normalmente os alunos trocam de escola, mas continuam na mesma rede de ensino.

Durante sua vida escolar, os alunos passam por diferentes transições entre as fases de ensino e a BNCC traz algumas considerações sobre elas em seu conteúdo. A primeira mudança citada é da Educação Infantil para o Ensino Fundamental. Sobre esse momento, o documento destaca:

> A BNCC do **Ensino Fundamental – Anos Iniciais**, ao valorizar as situações lúdicas de aprendizagem, aponta para a necessária **articulação com as experiências vivenciadas na Educação Infantil**. Tal articulação precisa prever tanto a **progressiva sistematização** dessas experiências quanto o desenvolvimento, pelos alunos, de **novas formas de relação** com o mundo, novas possibilidades de ler e formular hipóteses sobre os fenômenos, de testá-las, de refutá-las, de elaborar conclusões, em uma atitude ativa na construção de conhecimentos. (BRASIL, 2017, pp. 55 e 56, grifos do autor)

Então, as articulações de experiências são importantes para diminuir as diferenças entre essas duas etapas e evitar uma descontinuidade de ensino, com destaque para as atividades lúdicas que são comuns na Educação Infantil e podem aparecer também nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Segundo o documento, nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, os alunos devem desenvolver uma relação de múltiplas linguagens e, mais especificamente, aprender sobre o uso social da linguagem da matemática. Os estudantes nessa fase também podem passar por processos de percepção, compreensão e representação para a apropriação dos signos matemáticos, ampliando seus conhecimentos sobre essa área. Para os professores que vão trabalhar com essa faixa etária, é importante que considerem os interesses manifestados pelas crianças. E, durante as metodologias de ensino devem ocorrer a progressão do conhecimento por consolidação das aprendizagens anteriores e ampliação das práticas de linguagem. Tudo isso, buscando amenizar as diferenças da transição da Educação Infantil para o Ensino

Fundamental, mas sem diminuir a importância do desenvolvimento e da aprendizagem dos alunos.

Sobre a transição dos Anos Iniciais para os Anos Finais do Ensino Fundamental, objeto aqui estudado, a Base argumenta que é importante que exista uma continuidade entre essas duas fases escolares.

> Além desses aspectos relativos à aprendizagem e ao desenvolvimento, na elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas devem ainda ser consideradas medidas para assegurar aos alunos um percurso contínuo de aprendizagens entre as duas fases do Ensino Fundamental, de modo a promover uma maior integração entre elas. (BRASIL, 2017, p. 57)

Assim, é necessário que as escolas tenham ações que aproximem o quinto e o sexto ano, a fim de diminuir as diferenças dessa transição, tornando o ensino um processo ininterrupto nessa fase escolar. Para o documento, esse período escolar é marcado por diversas mudanças, como a do professor generalista, nos Anos Iniciais, para o professor especialista, nos Anos Finais, o que pode propiciar exigências diferentes entre esses docentes e isso pode ser sentido pelos alunos. Há também diferenciações dos componentes curriculares nessa etapa escolar. Sobre essas mudanças, a Base destaca que: "Realizar as necessárias adaptações e articulações, tanto no 5º quanto no 6º ano, para apoiar os alunos nesse processo de transição, pode evitar ruptura no processo de aprendizagem, garantindo-lhes maiores condições de sucesso. (BRASIL, 2017, p. 57)

Aqui, é retomada a ideia de que é importante que ocorram articulações entre os professores do quinto e do sexto ano, mas também adaptações curriculares a fim de que a aprendizagem dos alunos se dê de forma contínua, o que pode melhorar a qualidade do ensino nessa fase escolar.

Para a Base, os Anos Finais do Ensino Fundamental são um período marcado por desafios de maior complexidade para os alunos, com destaque para o fato de que cada disciplina se torna cada vez mais específica com o passar dos anos. Sobre isso, o documento afirma:

> Tendo em vista essa maior especialização, é importante, nos vários componentes curriculares, retomar e ressignificar as aprendizagens do Ensino Fundamental – Anos Iniciais no contexto das diferentes áreas, visando ao aprofundamento e à ampliação de repertórios dos estudantes. (BRASIL, 2017, p. 58)

Nesse trecho, a base destaca mais uma vez a importância da continuidade entre o quinto e o sexto ano, argumentando sobre a importância de retomar e ressignificar os conteúdos do 5° ano durante o 6° ano. Para que depois, possa ser feito um aprofundamento dos conceitos de cada disciplina.

Segundo a BNCC, durante os Anos Finais do Ensino Fundamental, os alunos estão entrando na adolescência, uma fase marcada por intensas mudanças decorrentes de transformações biológicas, psicológicas, sociais e emocionais. Sobre isso, cabe destacar: "Nesse período de vida, como bem aponta o Parecer CNE/CEB nº 11/2010, ampliam-se os vínculos sociais e os laços afetivos, as possibilidades intelectuais e a capacidade de raciocínios mais abstratos." (BRASIL, 2017, p.58). Assim, é importante que os professores dessa faixa etária tenham conhecimento sobre esse período da vida dos alunos, para compreender melhor os estudantes. Ainda sobre isso, o documento argumenta que os adolescentes estão em desenvolvimento e por isso, é importante que existam práticas diferenciadas a fim de contemplar a particularidade de cada um dos alunos no momento da aprendizagem.

Como foi dito na Base, nessa fase escolar, como os alunos estão entrando na adolescência, é nessa fase que eles serão capazes de desenvolver raciocínios mais abstratos. Isso é importante para a aprendizagem de matemática, tendo em vista que com o desenvolvimento de seus conteúdos, essa área desenvolve raciocínios complexos e muitas vezes abstratos, como é o caso da Álgebra, que estuda generalizações matemáticas por meio de equações e possui símbolos específicos. Mas, vale lembrar que os adolescentes são sujeitos que estão em desenvolvimento e, por isso, as mudanças de linguagem e de formalização em matemática devem ocorrer de forma gradual.

Cabe destacar ainda que a BNCC discute a questão da comunicação em sala de aula e mais especificamente sobre a relação entre os professores e os alunos, o documento destaca que os alunos dessa transição escolar passam por mudanças nessa fase da vida, a adolescência. E esse momento: “(...) requer dos educadores maior disposição para entender e dialogar com as formas próprias de expressão das culturas juvenis, (...)” (BRASIL, 2010 apud BRASIL, 2017). A partir disso, é possível concluir a importância de o professor tentar aproximar sua linguagem em sala de aula da linguagem de seus alunos, que são jovens e muitas vezes possuem um vocabulário mais específico. Essa tentativa de aproximação pode ser uma forma de aprimorar a comunicação entre professores e alunos na sala de aula. No que diz respeito à matemática, essa mudança na comunicação é válida, mas cabe destacar que o professor não pode deixar de ensinar aos seus alunos os conceitos e a linguagem específica da matemática. Por isso, é importante que o professor apresente os conteúdos matemáticos com linguagem mais coloquial, mas também utilize a linguagem mais específica. Ou seja, o professor deve tentar conciliar a linguagem matemática com uma linguagem mais conhecida pelos alunos. Então, quando o docente tenta equilibrar uma comunicação que o aproxime de seus alunos com o uso dos símbolos e dos significados matemáticos em suas aulas, ele pode contribuir para a aprendizagem em sala de aula.

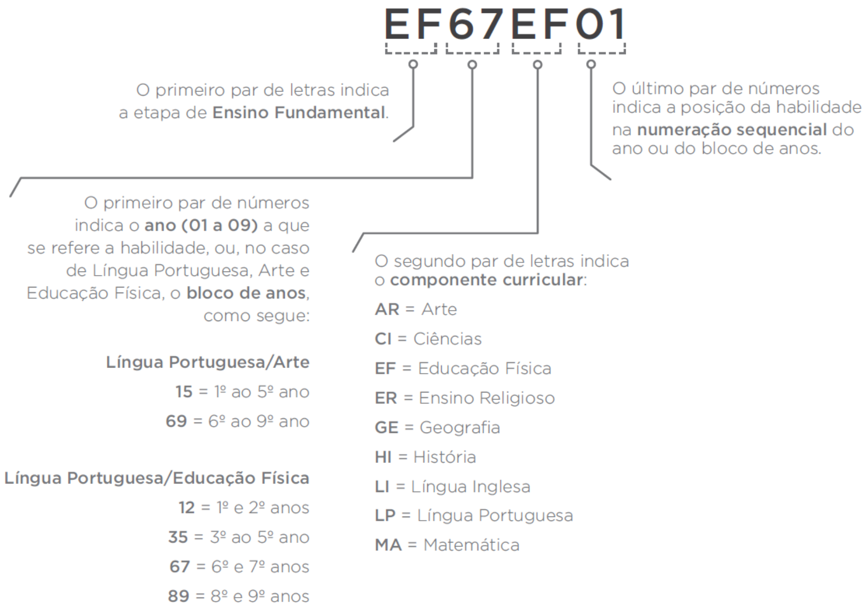
A organização curricular de Matemática na BNCC

Antes de fazer uma análise dos conteúdos de Matemática indicados pela BNCC para o Ensino Fundamental, é importante entender como o documento está organizado. Cada uma das disciplinas é chamada de componente curricular. Dentro de cada um desses, os conteúdos serão divididos em unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades. Segundo a Base:

> Para garantir o desenvolvimento das competências específicas, cada componente curricular apresenta um conjunto de **habilidades**. Essas habilidades estão relacionadas a diferentes **objetos de conhecimento** – aqui entendidos como conteúdos, conceitos e processos –, que, por sua vez, são organizados em **unidades temáticas**. (BRASIL, 2017, p. 28, grifos do autor)

Cada uma das habilidades que são apresentadas na BNCC, para melhor organização e entendimento, recebe um código alfanumérico, de acordo com as orientações abaixo:

Figura 5 – Definição das habilidades em código alfanumérico.



Fonte: Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017, p.30)

Uma das divisões importantes que a Base faz é chamada de unidade temática. Em Matemática, são cinco unidades temáticas para o Ensino Fundamental, elas se referem a algumas áreas de estudo específicas da matemática. A primeira é chamada de Números e é definida como: “A unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades.” (BRASIL, 2017, p. 266). Esse é um tema muito comum de apresentação inicial das ideias da matemática para os alunos.

A segunda unidade temática que a BNCC apresenta é a Álgebra, definida como:

> A unidade temática **Álgebra**, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão,

> representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. (BRASIL, 2017, p. 268)

Esse é o tema da matemática que envolve o desenvolvimento do pensamento algébrico, não necessariamente a realização de operações algébricas, mas a compreensão, representação e análise dos alunos dos conceitos desse assunto.

A Geometria é a terceira unidade temática citada pelo documento:

> A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. (BRASIL, 2017, p. 269)

Esse é um tema que envolve o entendimento dos alunos sobre o espaço e as formas geométricas, desenvolvendo nos alunos noções do mundo físico e podendo desenvolver a interdisciplinaridade com os estudantes.

A quarta unidade temática é chamada de Grandezas e medidas, que segundo a Base:

> As medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade. Assim, a unidade temática Grandezas e medidas, ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas –, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.). Essa unidade temática contribui ainda para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico. (BRASIL, 2017, p. 271)

Esse tema envolve os temas anteriores de Números, Álgebra e Geometria e pode ser uma forma de os alunos entenderem melhor esses assuntos. Também é um tema importante para que o aluno compreenda melhor o mundo em que vive, já que envolve temas cotidianos como as medidas de tempo, de massa e de comprimento.

A quinta e última unidade temática recebe o nome de Probabilidade e estatística, definida como:

> A incerteza e o tratamento de dados são estudados na unidade temática Probabilidade e estatística. Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. (BRASIL, 2017, p. 271)

Essa é uma temática muito presente atualmente, o conhecimento sobre análise de dados é importante para a formação de cidadãos críticos e com conhecimentos sobre o mundo atual.

Para cada unidade temática, a BNCC descreve alguns objetos de conhecimento e para cada objeto de conhecimento há uma ou mais habilidades que devem ser desenvolvidas pelo aluno durante o aprendizado daquele assunto. A Figura 6 ilustra como as unidades temáticas, os objetos de conhecimento e as habilidades são apresentadas pela base para cada disciplina e para cada ano escolar presente no documento.

Figura 6 – Unidades temáticas, objetos do conhecimento e habilidades de Matemática – 5° ano.

MATEMÁTICA – 5º ANO

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Números	Sistema de numeração decimal: leitura, escrita e ordenação de números naturais (de até seis ordens)	**(EF05MA01)** Ler, escrever e ordenar números naturais até a ordem das centenas de milhar com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal.
	Números racionais expressos na forma decimal e sua representação na reta numérica	**(EF05MA02)** Ler, escrever e ordenar números racionais na forma decimal com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal, utilizando, como recursos, a composição e decomposição e a reta numérica.
	Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica	**(EF05MA03)** Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.
	Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência	**(EF05MA04)** Identificar frações equivalentes. **(EF05MA05)** Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.
	Cálculo de porcentagens e representação fracionária	**(EF05MA06)** Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
	Problemas: adição e subtração de números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita	**(EF05MA07)** Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
	Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais	**(EF05MA08)** Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
	Problemas de contagem do tipo: "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?"	**(EF05MA09)** Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.
Álgebra	Propriedades da igualdade e noção de equivalência	**(EF05MA10)** Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. **(EF05MA11)** Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
	Grandezas diretamente proporcionais Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais	**(EF05MA12)** Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros. **(EF05MA13)** Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

Fonte: Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017, pp. 292 e 293)

O ensino de frações na transição do 5° para o 6° ano segundo a BNCC

Para entender melhor como ocorre a transição dos Anos Iniciais para os Anos Finais do Ensino Fundamental sob o aspecto curricular, foi escolhido fazer uma análise do conteúdo de frações, segundo a Base Nacional Comum Curricular. Esse é um assunto, muitas vezes, chamado de "bicho de sete cabeças", ele pode até ser considerado polêmico. É comum que nos Anos Iniciais os alunos tenham curiosidade em aprender sobre frações porque já ouviram alguém falar sobre o assunto e nos Anos Finais os alunos não gostarem, talvez por aprenderem muitos cálculos ou algumas regras que muitas vezes parecem sem sentido, não agregando significado à aprendizagem. Por isso, esse foi o tema escolhido, para que se possa observar se existe ou não alguma peculiaridade nesse tema durante essa transição que possa levar os alunos a não gostarem ou a sentirem mais dificuldade com esse tema.

Sobre o ensino de frações, é importante ressaltar que em linguagem coloquial, podemos dizer que os números fracionários fazem parte do conjunto dos números racionais, podendo ser representados como frações ou como números decimais. A fim de facilitar a comparação entre os conteúdos de frações do quinto e do sexto ano, vamos dividir o seu ensino em seis aspectos. Essa divisão foi feita a partir de algumas ideias de Terezinha Nunes (2003) em seu texto "Criança pode aprender frações. E gosta!" e na ordem em que comumente esses assuntos são trabalhados nas escolas. Os aspectos são: identificação, escrita, comparação, equivalência, porcentagem e cálculos.

A identificação se refere a habilidade do aluno em identificar as representações de números fracionários e a saber representar as frações. A escrita é a habilidade dos alunos de escrever as frações, seja com símbolos matemáticos ou por extenso. Já a comparação é a habilidade de comparar as frações, em relação a saber qual é maior e qual é menor. Para isso, é comum que os alunos transformem as frações em frações equivalentes, ou seja, transformar uma fração em outra de mesmo valor, essa transformação é a habilidade de escrever a equivalência de frações. A porcentagem é a habilidade de transformar em porcentagem os números fracionários e de transformar as frações em porcentagens. E os cálculos se referem a realização das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com números fracionários.

Para a análise de conteúdos que será feita aqui, optou-se por não considerar as definições e classificações da BNCC de competências, habilidades e objetos de conhecimento. Esses termos irão aparecer ao longo deste texto, mas com o sentido denotativo dessas palavras.

Para o ensino de frações no quinto ano do Ensino Fundamental, a Base recomenda as seguintes habilidades:

> (EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.

> (EF05MA04) Identificar frações equivalentes.
>
> (EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.
>
> (EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
>
> (EF05MA07) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
>
> (EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. (BRASIL, 2017, p. 293)

Em resumo, a BNCC recomenda as habilidades de identificar e escrever frações a partir do conceito de divisão e da ideia de parte/todo; identificar frações equivalentes; fazer comparações entre números racionais, seja na representação decimal ou fracionária e relacioná-los a pontos na reta numérica; e associar as porcentagens de 10%, 25%, 50%, 75% e 100% às suas respectivas frações.

Já no sexto ano, o documento recomenda que o ensino de frações trabalhe com as seguintes habilidades:

> (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
>
> (EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
>
> (EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.

> (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
>
> (...)
>
> (EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. (BRASIL, 2017, p. 299)

Sintetizando as ideias da Base, as habilidades de fração do 6° ano são: identificação de frações equivalentes, a partir da ideia de divisão e de parte de um inteiro, para que o aluno possa compreender, comparar e ordenar as frações; o reconhecimento de números racionais tanto na representação fracionária, como na representação decimal, além de estabelecer relações entre essas representações e relacioná-los a pontos na reta numérica; resolver cálculos de fração de uma quantidade; resolver cálculos de adição e subtração com frações; resolver problemas de porcentagem, com base na proporcionalidade, onde o aluno pode usar os números fracionários.

Assim, pode-se perceber que a relação entre o conceito de divisão e as frações, isto é, interpretar a fração como a representação ou como o resultado de uma divisão é uma ideia que está presente no ensino de frações tanto no quinto como no sexto ano. Por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$ pode ser interpretada como a representação ou como o resultado da divisão $1 \div 2$. A diferença é que no quinto ano essa ideia de divisão é usada para identificar e escrever frações, enquanto no sexto ano ela é usada para identificar frações equivalentes, ou seja, que são representadas por algarismos diferentes, mas representam o mesmo número.

O que também aparece nos dois anos aqui estudados é a ideia de que a fração é uma representação de parte/todo, ou seja, a parte de um inteiro. Por exemplo, a fração $\frac{3}{8}$ pode ser a representação de 3 pedaços de uma pizza que tem 8 pedaços, ou seja, 3 partes de um inteiro que foi dividido em 8 partes. Porém, no sexto ano essa ideia é usada para identificar frações equivalentes, já no quinto ano ela é usada para identificar e escrever frações.

A representação de números racionais como fracionários ou como decimais é o conceito de que qualquer número racional pode ser escrito na forma de fração ou na forma de um número decimal. Um exemplo disso é a fração $\frac{3}{4}$ ela pode ser representada pelo número decimal $0{,}75$ e ambas são representações de um número racional. Essa ideia está presente nos dois anos aqui estudados, mas com abordagens diferentes. No quinto ano essas duas representações aparecem na comparação entre números decimais, então o aluno pode passar o número de uma representação para a outra para poder fazer comparações entre eles. Já no sexto ano, o aluno precisa identificar a representação de fração e de decimal como um número racional e saber relacionar esses números a pontos na reta numérica.

A porcentagem é sempre um valor de um total, normalmente o total é o 100, e ele se refere a algo. Por exemplo, podemos dizer que 7% da população brasileira vive em situação de extrema pobreza, ou seja, 7 em cada 100 brasileiros vivem nessa situação. Então, a porcentagem é também a representação da parte de um todo. A porcentagem também pode ser representada como um número decimal ou como uma fração. No caso da fração $\frac{3}{4}$, já dissemos que ela corresponde ao número decimal $0{,}75$, mas também é a porcentagem 75%. Esse assunto também aparece nos dois anos aqui estudados, mas com algumas diferenças. No quinto ano o aluno aprende a fazer uma relação entre a representação de um número na forma de porcentagem e sua representação fracionária, como foi feito acima com 75% que equivale ao decimal $0{,}75$ e a fração $\frac{75}{100}$ e, usando a equivalência, o aluno chega à fração $\frac{3}{4}$. Já no sexto ano esse conceito aparece na resolução de problemas com porcentagens.

As habilidades de identificar e escrever frações, ou seja, olhar o desenho de um inteiro dividido em seis partes com duas partes pintadas, entender que isso pode ser representado na forma de fração como $\frac{2}{6}$ é uma abordagem do tema que só apareceu como conteúdo do quinto ano. Já as operações de adição e subtração de frações que representam números positivos, como diz a Base, só aparecem no conteúdo do sexto ano. Nesse caso, o aluno deverá conseguir fazer contas como $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$ ou então como $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, esses cálculos não aparecem como conteúdo do quinto ano.

Assim, com a intenção de conhecer mais sobre o tema de frações e suas principais abordagens na educação, apresentamos neste capítulo as principais ideias de frações, foram elas parte-todo, medida, quociente, razão e operador. Depois, abordamos a BNCC, apresentando um breve histórico de sua origem, desenvolvimento e contexto, além de apontar o que o documento traz sobre transições escolares e também sobre frações, especialmente no quinto e no sexto ano do Ensino Fundamental. Com base em tudo que foi apresentado até aqui, o capítulo seguinte traz os episódios que criamos a partir dos dados coletados nas entrevistas e observações que realizamos, complementados de nossas análises.

CAPÍTULO 6 – DADOS E ANÁLISES

Neste capítulo, iremos apresentar algumas situações que chamaram a nossa atenção durante as observações que realizamos no desenvolvimento desta pesquisa. Para melhor organizar as informações, dividimos cada uma das situações que vamos destacar em episódios. A intenção ao selecionar esses eventos era de que pudéssemos relacionar os acontecimentos que observamos e anotamos a cada um dos objetivos de nosso trabalho.

Antes de cada um dos episódios, apresentamos um breve contexto da escola em que ele aconteceu e da dinâmica que observamos antes da aula em si. Depois disso, fazemos a descrição do episódio em si, explicando ao leitor como se deu o desenvolvimento daquele momento da aula que selecionamos. Em seguida, apresentamos também uma breve análise dos aspectos que mais chamaram nossa atenção, relacionando-os às ideias dos referenciais teóricos que estudamos. Ao final deste capítulo, apresentamos também algumas ideias originadas a partir de uma reflexão sobre os episódios que aqui descrevemos. Vamos aos episódios!

6.1 – Episódio 1

Sobre o episódio...

O episódio inicial que vamos apresentar se refere a um momento de uma aula de matemática do 6° ano de uma escola municipal da cidade de São Paulo. Devido a pandemia de covid-19, as aulas estavam ocorrendo de forma remota e online. Segundo o professor dessa turma, o ensino remoto na escola teve três momentos diferentes quanto a participação dos alunos nas aulas.

O primeiro momento foi de março a outubro de 2020, quando a maior parcela da população estava em casa, de quarentena e aproximadamente 25% dos alunos entravam e participavam das aulas online e faziam as atividades propostas pelo professor. Em outubro de

2020, os professores que não eram do grupo de risco voltaram a dar aulas presenciais, mas o professor dessa turma permaneceu online e a participação dos alunos nas aulas online caiu para apenas 15% dos alunos. Esse momento durou até julho de 2021, quando os professores que já tinham tomado as duas doses da vacina voltaram a dar aulas presenciais e poucos professores permaneceram em casa, com isso os alunos praticamente pararam de assistir às aulas online porque estavam na escola.

É nesse contexto que o episódio que vamos descrever está inserido. Com isso, a aula que assistimos só teve a presença de um aluno, a quem vamos chamar de aluno 1 e do professor que vamos chamar de professor A. Outra consideração importante a se fazer é que apesar dos esforços, a gravação da aula não foi autorizada e por isso, tudo que será descrito aqui é fruto de nossas memórias após assistirmos essa aula e das anotações que fizemos durante a observação.

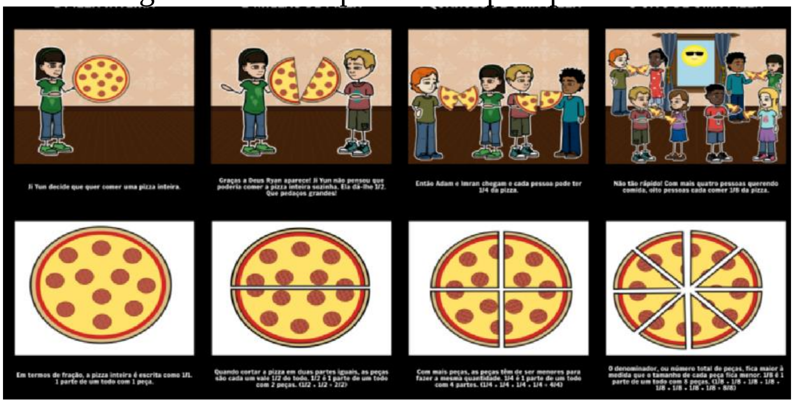
Episódio 1: "Melhorei a pergunta!"

A aula observada foi um momento de introdução do conteúdo de frações e o professor A utilizou como material didático uma apresentação de slides que ele mesmo preparou e a disponibilizou para a nossa pesquisa. Esse material possuía conteúdos teóricos sobre o tema e exercícios práticos, isto é, questões objetivas e contextualizadas para que os alunos pratiquem as ideias trabalhadas em aula sobre frações.

Para começar a aula, o professor apresentou uma possível origem das frações e algumas de suas principais ideias. Em seguida, ele mostrou uma tira de quadrinhos como um exemplo de situações em que encontramos frações no dia a dia. Esse material continha imagens em que eram realizadas a divisão de uma pizza entre crianças, de modo que fossem encontradas diferentes partes da pizza, ou seja, de modo com que os alunos concluíssem que cada pedaço da pizza era a representação de diferentes frações. Durante essa atividade, o professor A sempre pedia a participação do aluno através de perguntas sobre os desenhos apresentados. Dentre as muitas situações de diálogo entre o professor e o aluno, destacamos um momento específico da apresentação desse desenho em quadrinhos e que chamou a nossa atenção, dando origem a este episódio, intitulado de “Melhorei a pergunta!”.

Para melhor ilustrar a situação que vamos descrever, colocaremos aqui abaixo o desenho em quadrinhos que fez parte do contexto desse diálogo:

Figura 7 – Slide apresentado pelo professor em aula



Fonte: Material fornecido pelo professor A.

Nessa situação, o professor foi contando ao aluno o que estava nos quadrinhos: uma menina tinha uma pizza e como estava sozinha tinha a pizza só para ela, podendo representar essa situação com a fração 1/1 que também representa um inteiro. Depois, chegou um colega e então ela teve que dividir a pizza com ele. Nesse momento, o professor perguntou ao aluno em quantos pedaços a pizza deveria ser dividida e depois qual deveria ser a fração da pizza que cada uma das pessoas receberia. O professor repetiu as perguntas para a chegada de mais dois e mais quatro amigos. Quando o professor contou ao aluno sobre a chegada de mais duas pessoas na situação, ele perguntou ao aluno qual a parte da pizza que cada um dos amigos receberia e o professor esperava como resposta 1/4, porém o aluno respondeu 4.

Após algumas tentativas de repetir a mesma pergunta, como a resposta do aluno também foi a mesma, o professor reformulou a questão algumas vezes. Dentre elas, ele perguntou “O que representa a parte da pizza que cada um dos amigos irá receber?”; e “Em quantas partes a pizza foi dividida?". Depois dessa última reformulação, ele disse: "Agora eu melhorei a pergunta!". E foi então que o aluno manteve a resposta inicial "4", mas dessa vez, como o professor reformulou a pergunta, a resposta apresentada estava correta.

Análise do episódio 1

O acontecimento acima citado nos chamou bastante atenção, porque entendemos que nessa situação o professor fez uma pergunta que tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista da língua portuguesa estava correta. Já a resposta apresentada pelo aluno não era a correta para a pergunta formulada pelo professor, o aluno estava respondendo a outra pergunta, nesse sentido, a resposta dada pelo aluno se a indagação fosse sobre o número de partes em que a pizza deveria ser dividida para que todos os amigos presentes recebessem um pedaço.

Foi essa falta de correspondência entre a pergunta elaborada pelo professor e a resposta dada pelo aluno que mais chamou nossa atenção, porque ilustra um contexto em que Matemática e Língua Materna se fazem presentes mutuamente, uma dando sentido à outra. Para Machado (2011), ambas possuem uma impregnação mútua em que uma auxilia na compreensão e no desenvolvimento da outra e vice-versa. Nesse sentido, podemos entender que a Língua Materna utilizada pelo professor para formular a pergunta e pelo aluno para entender a questão proposta não foi suficiente. Isso porque a Língua Materna utilizada pelo professor para a realização da pergunta estava impregnada do conceito matemático a ser trabalhado, "o que representa a parte da pizza que cada um dos amigos vai receber?", com a ideia de fração como parte/todo, e o aluno, por ainda não dominar essa ideia, interpretou a pergunta como se o professor tivesse dito: "em quantas partes preciso dividir essa pizza?" , questão que envolve apenas a operação de divisão.

Tendo isso em vista, podemos apontar essa situação como um exemplo de acontecimentos em que tanto professor como aluno poderiam tomar consciência sobre a impregnação mútua entre Língua Materna e Matemática com a intenção de aprimorar esse processo de aprendizagem de Matemática a partir do uso melhor e mais consciente da Língua Materna nas aulas dessa disciplina.

Porém, quando o professor diz “Agora melhorei a pergunta!” podemos concluir que o professor teve uma compreensão de que o aluno não estava entendendo o que ele estava perguntando e que por isso reformulou sua pergunta. Assim, nessa situação, o professor faz o movimento de ir até onde o outro está, nesse caso aluno, como o discutido por Milani (2017). Através também dessa reformulação, temos mais um exemplo de que a Língua Materna é uma ferramenta importante para a compreensão dos alunos nas aulas de Matemática já que o professor a utiliza para reelaborar a pergunta, alterando o vocabulário e a linguagem dessa questão.

Além disso, podemos usar alguns dados da entrevista que realizamos com esse professor para tentar entender o motivo da dificuldade do professor em se fazer claro para o aluno e em alterar a pergunta para melhorar o entendimento do aluno. Mais especificamente, nesse caso vamos refletir sobre a formação acadêmica desse docente. Isso porque ele nos contou que sua primeira formação e seu mestrado são da área de química, mas que também cursou licenciatura em matemática.

Não nos cabe aqui fazer considerações a respeito da formação acadêmica de nenhum dos docentes entrevistados, porém, podemos levantar a hipótese de que o fato de esse professor possuir uma formação mais voltada para a área de química e menos para a de matemática pode sim contribuir para que ele tenha dificuldades quando for se comunicar em suas aulas. Isso porque, pudemos perceber ao longo da entrevista que o professor possui uma preferência maior pela área de química e interpretamos que ele acabou estudando licenciatura em matemática para tentar se aprofundar mais na área em que já estava dando aulas. Podemos refletir então que o professor não possui uma proximidade tão grande com a matemática o que pode influenciar no vocabulário matemático dominado por esse docente.

Outro aspecto da entrevista que chamou nossa atenção diz respeito às experiências desse professor com os diferentes anos escolares, sobre isso disse: “Fiquei muito tempo só no Ensino Médio. Voltei a trabalhar com o Ensino Fundamental, agora em 2018. Eu tinha dado aula para o Ensino Fundamental em 98, 99, na Matemática. Na época ainda como estudante. E nunca mais eu tinha tido contato com o Ensino Fundamental.” Assim, podemos considerar que outro ponto que pode influenciar na dinâmica das aulas desse professor é a pouca experiência dele com aulas de Matemática para turmas do Ensino Fundamental. Isso porque, a falta de contato com alunos dessa faixa etária pode contribuir para a dificuldade na comunicação e no entendimento com os alunos que pudemos observar nessa aula.

Sobre o convívio com os alunos mais novos, principalmente do sexto ano, o professor contou durante a entrevista que teve que se adaptar para dar aulas para essas turmas e que sentiu muita dificuldade quando começou a ter contato com os alunos dessas turmas, considerando até não dar mais aulas para essa idade. Ainda sobre as turmas do sexto ano, o docente disse “Porque assim, eu acho que a linguagem que eles têm da Matemática é muito pobre, muito fraca, você me entendeu?!”. Podemos perceber então que ele demonstrou saber que a linguagem que ele conhece da Matemática é diferente da linguagem Matemática que os alunos do sexto ano conhecem. Nesse sentido, um caminho possível para transpor essa barreira da linguagem é o uso da Língua Materna que usualmente é uma linguagem mais comum entre professor e alunos, independente da faixa etária e utilizá-la como forma de ampliar o conhecimento da turma sobre a linguagem matemática parece uma boa solução para situações como essas.

Quando perguntamos ao professor se ele sentia alguma dificuldade para ensinar matemática, novamente ele retomou a dificuldade dos alunos com a linguagem matemática, ele disse “Porque assim, eles não têm uma linguagem apropriada, uma linguagem matemática apropriada do que você espera por exemplo de um aluno de sexto a nono ano. Eles têm uma dificuldade muito grande com a linguagem." Nesse momento, ele contou que quando começou a dar aulas para as turmas de sexto ano, ele se preocupou em tomar conhecimento sobre as provas de avaliação externa e que tentou basear suas aulas nessas atividades. Porém, os alunos sentiram dificuldades com termos simples como adição e subtração, segundo ele, os alunos só conheciam os termos "continha de mais" e "continha de menos". Por isso, ele contou que tem se dedicado a trabalhar em desenvolver o conhecimento dessa linguagem diferente com os alunos.

Ainda durante a entrevista perguntamos ao professor qual/quais seriam os termos que ele achava que mais utilizava quando ensinava frações. Sobre isso, ele respondeu que acreditava que as palavras eram: razão, inteiro, proporção e o quanto um é maior que o outro. Neste episódio, pudemos observar quais foram as palavras que ele mais utilizou nessa aula e para melhor organizar esses dados, optamos por grifá-las ao longo deste texto. E as palavras que destacamos foram: pizza, pedaço/parte.

Assim, temos que os termos que o professor achava que mais utilizava em suas aulas de frações acabaram não aparecendo ou pouco aparecendo, como é o caso de inteiro. Quanto às palavras que apareceram muitas vezes na aula podemos dizer que pizza pode ter aparecido por ser um termo que estava presente no quadrinho apresentado pelo professor. Porém, o uso do quadrinho e também da pizza podem ilustrar uma tentativa do professor de trazer para suas aulas elementos que fazem parte do cotidiano dos alunos, como uma forma de tentar envolver mais os alunos e de chamar a atenção deles para o tema de frações.

Já os termos pedaço/partes também apareceram diversas vezes durante a aula observada e descrita neste episódio. Sobre isso, podemos dizer que de acordo com o que estudamos no capítulo de frações, essas palavras são muito comuns nas aulas de frações e talvez por isso tenham aparecido com essa frequência, demonstrando também um conhecimento do professor sobre esse vocabulário mais específico para as aulas de frações. Cabe destacar também que para Druck (2005), os conceitos de unidade ou o todo; as partes da unidade e a igualdade entre as partes são parte fundamental do ensino de frações. Nesse sentido, é positivo que o termo partes apareça diversas vezes nas aulas desse tema, porém, é importante que nas situações envolvendo partes, se saiba exatamente qual é o inteiro. Ou seja, é importante que se aborde e se desenvolva em aula os três aspectos citados por Druck.

Na situação das perguntas sobre a pizza deste episódio, o professor poderia trabalhar com essas questões por meio de formulações de perguntas que levassem os alunos a refletir sobre qual é o inteiro em questão. Por exemplo, nesse caso, o professor poderia questionar “em quantas partes a pizza (nosso inteiro) foi dividida?” e a reposta seria quatro. Em seguida, também poderia perguntar aos alunos o que aconteceria se os tamanhos fossem diferentes. Essas são algumas possibilidades de caminhos distintos ao que ocorreu nessa aula, relembrando que nossa intenção aqui não é julgar o trabalho de nenhum docente, mas sim, propiciar um momento de reflexão com produção de sugestões.

6.2 – Episódio 2

Sobre o episódio 2

O segundo episódio se refere a um momento de uma aula de matemática do 5° ano de uma escola particular da cidade de Mogi das Cruzes. Devido a pandemia de COVID-19, a aula foi assistida de forma remota, porém a professora responsável pela turma nos explicou que a turma possui 27 alunos que foram divididos em duas salas devido ao distanciamento social necessário. Porém, alguns alunos ainda estavam assistindo às aulas de forma remota. Para que todos os alunos pudessem acompanhar a explicação da professora, a escola transmitia, através do software ZOOM, as aulas para os alunos que optaram por ficar em casa. Com essa finalidade, havia uma câmera na sala em que a professora estava que era transmitida para a outra sala e para os alunos. Foi por esse meio que conseguimos também assistir às suas aulas.

Devido a essa dinâmica, pouco conseguimos ouvir do que os alunos disseram, por isso, iremos nos referir a eles de forma coletiva mesmo e chamaremos a docente responsável por essa aula de professora B. Antes da apresentação do episódio, cabe destacar que apesar de nossos esforços, também nessa escola, não conseguimos autorização para que gravássemos as aulas dessa professora e por isso, assim como o que ocorreu no episódio anterior, tudo que é apresentado a seguir é fruto de nossas memórias após assistirmos essa aula e das anotações que fizemos durante a observação.

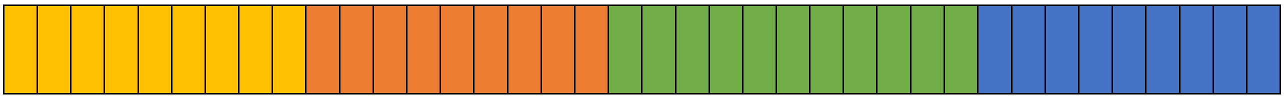
Episódio: Comparando frações de mesmo denominador

Este episódio diz respeito a primeira aula que observamos da professora B e pudemos perceber que ela estava corrigindo exercícios que envolviam o sentido de fração como operador. Durante essa atividade, alguns pontos de fala da professora chamaram nossa atenção e iremos abordá-los a seguir.

Assim, a professora começou a aula corrigindo alguns exercícios que tinha passado como lição da casa na aula anterior. Durante essa correção, a professora retomava com os alunos a leitura das frações do enunciado de diferentes maneiras. Um dos exercícios era “Quanto é $\frac{1}{2}$ de 6?”, nesse caso a professora destacou que a leitura da fração desse enunciado é “Um meio, metade, né gente?!”. Em outras situações como essa, mas com números diferentes, a professora lia o enunciado da questão, parava antes da fração e perguntava: “Como a gente lê isso mesmo?” e a maioria dos alunos respondia corretamente. Novamente, como não conseguíamos ouvir com clareza, não podemos afirmar que todos responderam corretamente e não conseguimos saber também se existiu resposta incorreta e qual seria.

Um outro momento que chamou nossa atenção foi durante a correção do seguinte exercício: “Quanto é $\frac{1}{4}$ de 36?”. Nesse caso, a professora B usou a lousa e desenhos para resolver a questão. Ela disse que o número 36 é o valor do *inteiro* da situação e desenhou uma barra e a dividiu em 36 partes, destacando que as *partes* deveriam ser perfeitamente iguais. A partir daí, a professora B convidou os alunos a pensarem em como dividir essa barra em 4 *partes*, a fim de encontrar o correspondente a fração $\frac{1}{4}$ e retomou com os alunos que eles deveriam dividir a barra em 4 *partes* de mesmo tamanho. No caso desse exercício, a docente os orientou a fazerem a divisão 36:4 que tem como resultado 9. Ou seja, para calcularmos $\frac{1}{4}$ de 36, os alunos deveriam fazer a divisão de 36 por 4 e encontrariam como resultado 9. Para melhor entender essa ideia, observe a Figura 8.

Figura 8 – Desenho da divisão



Fonte: Elaborado pela autora.

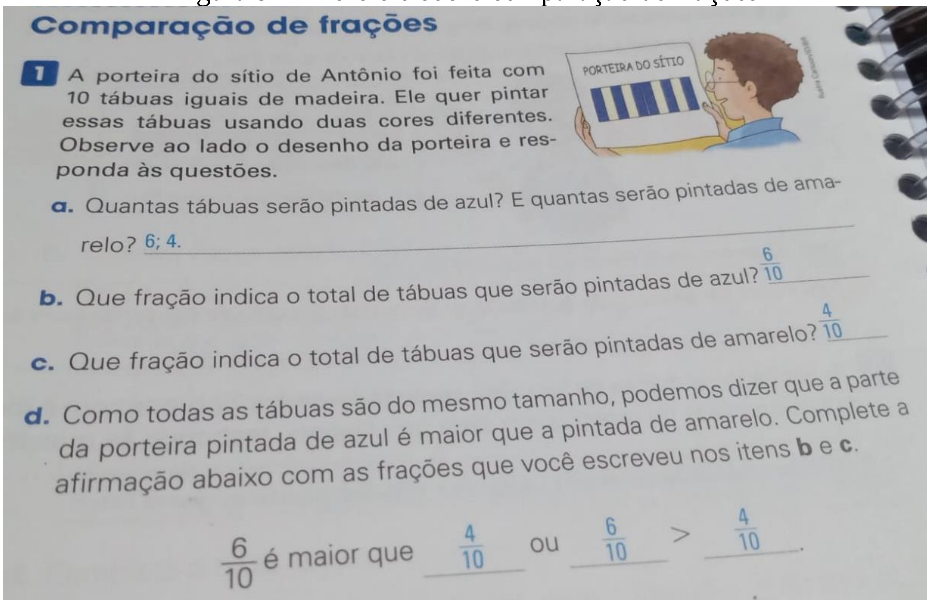
A Figura 8 está dividida em 36 partes e para que os alunos possam encontrar quanto é $\frac{1}{4}$ de 36, precisavam dividir as 36 partes em 4, ficando assim com 9 em cada uma dessas novas partes, como as cores diferentes da figura ilustram. Foi com uma figura parecida com a de cima que a professora explicou a resolução desse exercício.

Além desse, a professora resolveu outros exercícios semelhantes, como por exemplo um que era uma situação-problema que envolvia o cálculo de $\frac{4}{9}$ de 36. Nesse caso, a professora disse: "O *meu inteiro* é o 36 que foi dividido em 9 *partes* e eu *quero* 4". Para resolver, ela os orientou a fazer a divisão 36:9 = 4 e depois o resultado (4), disse para multiplicar por 4, assim ficou 4x4=16 e disse então que $\frac{4}{9}$ de 36 era igual a 16.

Depois da correção de exercícios a professora começou a explicar para a turma sobre a comparação de frações que segundo ela era um conteúdo novo. Antes de explicar conceitualmente, a professora disse "Até agora a *prô dá* o *inteiro* e *quer* o *pedaço*. Hoje, a *prô* *dá* o *pedaço* e *quer* o *inteiro*.” Para iniciar o conteúdo novo, ela começou resolvendo dois exercícios em que as frações possuíam denominadores iguais, para resolver esse tipo de exercício a professora recorreu diversas vezes aos desenhos, principalmente a representação retangular, ou seja, a partir de desenhos de retângulos e da divisão deles em partes de acordo com a fração em questão.

O primeiro exercício que a professora resolveu era uma situação-problema com tábuas iguais que foram pintadas com cores diferentes e envolvia algumas perguntas sobre as frações que representavam essa situação e depois a comparação entre elas, conforme vemos na Figura 9.

Figura 9 – Exercício sobre comparação de frações



Comparação de frações

1 A porteira do sítio de Antônio foi feita com 10 tábuas iguais de madeira. Ele quer pintar essas tábuas usando duas cores diferentes. Observe ao lado o desenho da porteira e responda às questões.

a. Quantas tábuas serão pintadas de azul? E quantas serão pintadas de amarelo? 6; 4.

b. Que fração indica o total de tábuas que serão pintadas de azul? $\frac{6}{10}$

c. Que fração indica o total de tábuas que serão pintadas de amarelo? $\frac{4}{10}$

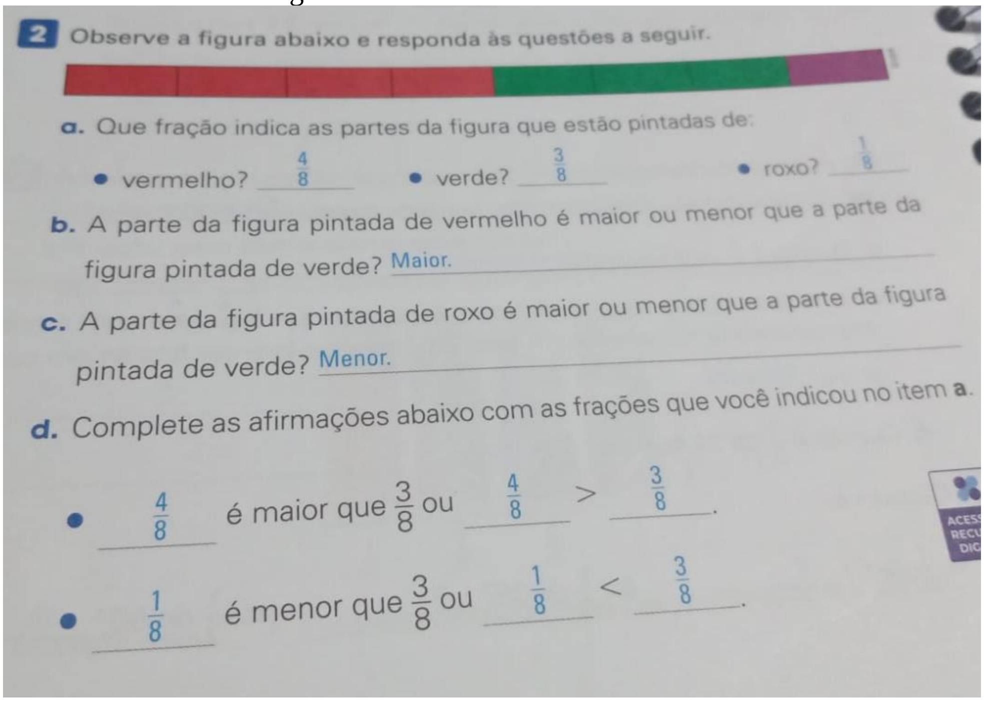
d. Como todas as tábuas são do mesmo tamanho, podemos dizer que a parte da porteira pintada de azul é maior que a pintada de amarelo. Complete a afirmação abaixo com as frações que você escreveu nos itens **b** e **c**.

$\frac{6}{10}$ é maior que $\frac{4}{10}$ ou $\frac{6}{10} > \frac{4}{10}$.

Fonte: Material fornecido pela professora B.

O segundo exercício que a professora resolveu era uma situação problema em que havia uma porteira em que $\frac{4}{8}$ dela foi pintado de vermelho, $\frac{3}{8}$ de verde e $\frac{1}{8}$ de roxo e as perguntas eram quais cores representavam a maior e a menor parte do portão, como vemos na Figura 10.

Figura 10 – Exercício do livro didático



Fonte: Material fornecido pela professora B.

Durante a resolução do primeiro exercício, usando a representação retangular a professora mostrou aos alunos que a resposta correta era $\frac{6}{10} > \frac{4}{10}$ já que a primeira ocupava uma parte maior do *inteiro*, já que ocupava 6 partes enquanto a outra ocupava somente 4. Ela também destacou nesse caso: “Olha lá o *sinalzinho* de maior que.”, fazendo referência ao sinal que colocou como resposta do exercício e apontando para ele na lousa.

Para resolver as duas questões, a professora perguntava aos alunos: “Em quantas *partes* o meu *inteiro* foi dividido?”. Mais especificamente, no segundo exercício, quando fez esse questionamento, antes mesmo deles responderem, ela reforçou que a pergunta associando a palavra *partes* a pedaços e o *inteiro* a porteira. Como já explicamos, não conseguimos ouvir o que os alunos estavam respondendo, porém, devido a fala seguinte da professora, podemos concluir que a maior parte deles falou 8. Isso porque, em seguida ela disse: “O meu *inteiro* é o denominador”, porém, pelo contexto podemos concluir que na verdade não estava se referindo ao *inteiro*, mas a quantidade de *partes* em que o *inteiro* foi dividido. Depois, ela também retomou que das 8 partes, 4 foram pintadas de vermelho, 3 de verde e 1 de roxo, por isso, a maior parte do portão foi pintada de vermelho e a menor de roxo.

Depois desses dois exercícios, a professora disse uma frase aos seus alunos que chamou bastante a nossa atenção: “Quando temos frações com o mesmo denominador, basta olhar para o maior numerador.” Nessa frase, ela estava fazendo uma síntese do conteúdo desenvolvido na parte final da aula e apresentando uma técnica para resolução de problemas que envolvam a comparação de frações. Para finalizar a aula, ela trabalhou com os alunos mais um exercício bem similar ao segundo em que perguntou aos alunos “Em quantas *partes* o meu *inteiro* está dividido?” e “E quantas *partes* eu *peguei* para mim?” e depois de resolver, terminou a aula.

Análise do episódio 2

Durante essa aula, o primeiro fato que chamou nossa atenção foi a professora retomar com os alunos a leitura de frações, o que pode indicar que ela tem conhecimento prévio dos conteúdos estudados anteriormente pelos alunos e que os utiliza para desenvolver novas ideias com eles. Cabe destacar aqui que durante nossa entrevista, a professora B nos contou que também deu aula para esses alunos durante o quarto ano, o que pode facilitar o uso desses conhecimentos prévios porque ela tem certeza do que já foi trabalhado com a turma.

Outro aspecto que merece destaque diz respeito ao momento em que a professora sinaliza que a divisão deveria ser feita em partes perfeitamente iguais. Essa ideia é considerada por Druck (2005) como um dos ingredientes fundamentais para o ensino de frações o que nos leva a refletir que a professora demonstra ter conhecimento do assunto, apresentando-o com ênfase e clareza a seus alunos.

A terceira situação que chamou nossa atenção foi quando ela retomou os procedimentos que fez na resolução dos dois primeiros exercícios sobre comparação de frações, fazendo uma conclusão “Quando temos frações com o mesmo denominador, basta olhar para o maior numerador.”. Podemos dizer que nesse momento, a professora está utilizando a Língua Materna para explicar uma ideia e um conceito da Matemática comprovando a complementaridade entre elas como explicou Machado (2011). Além disso, podemos perceber que durante sua explicação a professora ao utilizar os desenhos e a ideia de parte-todo está priorizando primeiro o significado, ou seja, para ela é importante que inicialmente o aluno compreenda o porquê de uma fração ser maior do que outra para depois utilizar a técnica que é o que ela faz quando fala para considerar o maior numerador. Essa apresentação vai ao encontro as ideias de Machado, de Santos (2015) e de Gómez-Granell (2003), que argumentam sobre a importância de se trabalhar tanto com a técnica como com o significado no ensino de matemática.

Além de observarmos a aula dessa professora, anteriormente realizamos também com ela uma entrevista de forma *online* que foi gravada com autorização. Durante esse momento de conversa inicial, ela nos contou que concluiu sua formação em pedagogia em 2016, mas que não se recorda de aprender sobre frações durante seus estudos. Mais do que isso, ela disse algo que nos marcou de forma muito intensa: “A faculdade que eu fiz não me ensinou nada do que eu vejo dentro da sala de aula, nada.” De acordo com isso, podemos refletir sobre a formação de professores, especialmente sobre os cursos de pedagogia e de licenciatura em matemática.

Na formação do professor generalista, como é o caso da pedagogia, assim como vimos na frase da professora, pode ser comum que o professor não tenha contato com determinado assunto matemático, como é o caso das frações. De acordo com Passos e Nacarato (2018, p. 120), “(...) esses docentes na sua grande maioria, provêm de cursos de formação que deixam sérias lacunas conceituais para o ensino de Matemática.”. Sob o nosso ponto de vista, consideramos que muitas vezes, as frações até são abordadas durante a formação do professor, mas não de maneira com que o docente se sinta preparado para dar aulas sobre esse assunto. Já no caso do professor especialista em matemática, acreditamos ser muito difícil que o futuro professor não tenha tido contato com o ensino de frações, já que sendo números racionais fazem parte dos estudos de conjuntos numéricos. Essa disparidade na formação pode provocar algumas diferenças na forma que esses professores abordam os temas da matemática ensinados tanto no quinto como no sexto ano, ou seja, na transição escolar, foco da nossa pesquisa.

Quando perguntamos a professora se ela acreditava que a matemática possui um vocabulário próprio ela disse que sim e deu alguns exemplos, como o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e Máximo Divisor Comum (MDC). Sobre isso, disse que "Se você interpretar isso daí, tá tranquilo, é fácil né?! Olha, Máximo Divisor, o que divide; Mínimo Múltiplo ..." Essa fala da professora chamou muito a nossa atenção porque demonstrou que é preocupação dela que os alunos entendam os termos que utiliza em sala de aula, mesmo os que estão mais relacionados a matemática e isso possui relação direta com o que observamos na aula descrita neste episódio. Isso porque, como vimos acima, a professora demonstrou durante a aula que é importante que os alunos entendam o que estão fazendo quando realizam operações matemáticas.

Ainda sobre essa linguagem específica da matemática, outra fala que chamou nossa atenção durante a entrevista, foi quando a professora disse "Mas assim, a minha preocupação é que o meu vocabulário, eles consigam entender o meu vocabulário. Eu acho que se eu usar palavras, talvez, muito técnicas (entre aspas técnicas), pode ser mais difícil de eles entenderem.". Nesse momento, novamente, a professora expressou considerar importante o entendimento dos alunos, principalmente em relação a linguagem utilizada para ensinar matemática e essa pode ser uma forma de se estabelecer o diálogo proposto por Milani (2017).

Um último aspecto que chamou nossa atenção durante a entrevista, foi o relato da professora sobre as ferramentas que procura usar durante duas aulas de frações. Ela disse que costuma usar muitos desenhos para representar as situações, que pinta esses desenhos, usa canetas de lousa coloridas e puxa algumas setas no desenho para tentar facilitar o entendimento dos alunos. Nas duas aulas que o observamos, pudemos ver o uso dessas ferramentas e entendemos que sim, isso pode contribuir para a aprendizagem. Cabe então a reflexão se é maior o uso dessas ferramentas por professores do quinto ano do que pelos do sexto ano. Pelo que observamos nesses dois primeiros episódios podemos dizer que sim.

Como um dos nossos objetivos é analisar a linguagem que o professor utiliza em sala de aula para ensinar frações, perguntamos durante a entrevista quais eram as palavras que a professora acreditava que mais utilizava para ensinar frações e ela respondeu que eram: parte, todo e pizza. Quanto aos termos que a professora mais utilizou na aula deste episódio, optamos por destacá-los ao longo do texto e de um modo geral, destacamos as palavras parte (ou pedaço) e inteiro. Para além desses termos, percebemos a utilização de expressões como *meu inteiro*, verbos como *quero, peguei*, *dá, quer* e falas mais afetivas como *prô* e *sinalzinho*.

De acordo com o contexto em que as palavras *parte* e *inteiro* (incluindo *meu inteiro*) apareceram, podemos dizer que a docente as utilizou com a ideia de sempre retomar com os alunos qual era o inteiro, quais eram as partes e qual era a relação entre elas. Esses são os conceitos que são considerados primordiais por Druck (2005) para o ensino de frações. Já em relação aos verbos que aqui destacamos, alguns deles indicam ações concretas e nesse sentido, podemos considerar que o seu uso foi feito com a intenção de aproximar as situações da aula à realidade do aluno. Esse é mais um exemplo de situação em que há uma impregnação entre a Língua Materna e a Matemática, como sugerido por Machado (2011). Já a presença de falas mais afetivas merece destaque porque vai de acordo com o que é esperado de um professor de quinto ano. Isso porque esses docentes geralmente possuem uma convivência maior com os alunos quando comparado com os de sexto ano, o que permite o estabelecimento de uma relação com mais vínculos e consequentemente uma afetividade maior, tanto no trato como na linguagem.

6.3 – Episódio 3

Sobre o episódio 3

Já o terceiro episódio apresenta a comparação entre uma aula de matemática de uma turma do quinto ano e uma aula do sexto ano de uma mesma escola particular da cidade de Mogi das Cruzes. Decidimos realizar essa comparação porque conseguimos assistir a aulas de ambas as turmas sobre as operações de adição e subtração, ou seja, momentos em que o mesmo conteúdo era desenvolvido nos anos de transição que estudamos neste trabalho. Assim, iremos primeiro trazer nossas considerações sobre cada uma dessas aulas para depois esclarecer as relações entre elas.

As aulas que vamos apresentar a seguir são da mesma escola do episódio anterior, por isso, tanto na observação da turma de quinto ano como na de sexto ano, acompanhamos de forma remota através do aplicativo ZOOM. Na turma de quinto ano, como eram muitos alunos, eles estavam divididos em duas salas e a aula era transmitida online para a sala em que a professora não estava e para os alunos que estavam em casa. Já no sexto ano, todos os alunos que foram para a escola estavam na mesma sala com a professora, assim a aula era transmitida somente para os alunos que estavam em casa. Em ambas as turmas, como assistimos de forma remota não conseguíamos ouvir com muita clareza quando os alunos interagiam com a professora e por isso vamos nos atentar somente as falas dela.

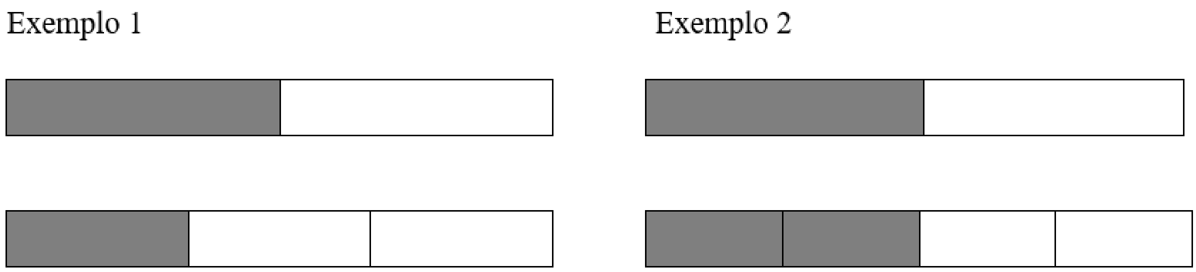
Além disso, como no episódio anterior, não obtivemos autorização para gravar essas aulas e por isso, tudo que é apresentado a seguir é fruto de nossas memórias após assistirmos essa aula e das anotações que fizemos durante a observação. Para melhor organizar esse episódio e respeitando o anterior, chamaremos a docente da turma do quinto ano de professora B, a mesma do episódio 2, e a do sexto ano será denominada de professora C. Já em relação aos alunos sempre iremos nos referir a eles de forma coletiva porque pouco conseguimos ouvir do que eles diziam.

Episódio: técnica e significado – parte I

A aula da turma de quinto ano sobre adição e subtração de frações começou com a professora B chamando a atenção dos alunos para que eles ficassem atentos quando fossem fazer “continhas” com a intenção de diminuir os erros. Ela também perguntou aos alunos: “Como fazemos para somar frações de denominadores diferentes?” e pelo que pudemos ouvir a maioria dos alunos respondeu “MMC[9]” e ela retomava então “Isso mesmo, devemos usar o MMC. E por quê?”. Nesse momento, novamente, pouco conseguimos entender das respostas dos alunos e a professora então concluiu “Para que os denominadores das frações sejam iguais. Para transformar em frações equivalentes.” Essa última frase foi repetida por ela diversas vezes ao longo da aula.

Para começar a explicar como resolver a adição de frações a professora usou como exemplo a seguinte soma: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Para resolver esse exercício a professora perguntou aos alunos “Essas frações são equivalentes?”, nesse momento, o pouco que conseguimos ouviu nos levou a concluir que os alunos não sabiam ao certo responder, e por isso, a professora utilizou desenhos como os da Figura 11 para explicar:

Figura 11 – Desenho feito pela professora



Fonte: Elaborado pela autora.

No exemplo 1 a professora desenhou na parte de cima a representação da fração $\frac{1}{2}$ e na parte de baixo a de $\frac{1}{3}$. A partir da ilustração, a professora B mostrou aos alunos que elas não

[9] Em Matemática, utilizamos MMC como abreviação de Mínimo Múltiplo Comum.

são frações equivalentes já que a primeira representa uma parte maior do inteiro do que a segunda. Já no exemplo 2, ela desenhou na parte da cima novamente a fração $\frac{1}{2}$ enquanto na parte de baixo ela ilustrou a fração $\frac{2}{4}$. A partir desse exemplo, mostrou aos alunos que elas representam a mesma porção ou a mesma parte do inteiro e que por isso elas são equivalentes.

Depois dessa explicação em que a professora B retomou o que são frações equivalentes, ela colocou na lousa sete contas de operações com frações para que os alunos resolvessem. Inicialmente, ela resolveu com os alunos a primeira que era $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$, para isso ela disse aos alunos "Precisamos tornar essas frações equivalentes" e começou encontrando o MMC entre 6 e 4, chegando no resultado 12. Depois ela disse, agora é só a gente "dividir pelo debaixo e multiplicar pelo de cima.". Essa é uma forma de ensinar uma técnica de resolução aos alunos que eles podem tentar memorizar e que consideramos uma "regrinha".

Assim, ela fez com os alunos $12{:}\,6 = 2$, $2.5 = 10$ e depois $12{:}\,4 = 3$, $3.3 = 9$, escreveu as frações $\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{19}{12}$. Em seguida, perguntou aos alunos "Essa é uma fração própria, imprópria ou aparente?", do pouco que conseguimos ouvir, alguns alunos responderam que era imprópria. Em seguida, a professora resolveu na lousa com os alunos a divisão $19{:}\,12 = 1$ e que teve como resto 7, assim ela chegou à conclusão com a turma de que a fração $\frac{19}{12}$ poderia ser escrita como o número misto $1\,\frac{7}{12}$.

Depois desse exercício, a professora ainda resolveu com os alunos o segundo item da lousa que era $\frac{2}{4}+\frac{3}{16}$. Para isso, ela pediu a ajuda de uma aluna específica e perguntou-a "Quais são os denominadores dessas frações?" e a aluna prontamente respondeu "4 e 16!", a docente perguntou em seguida "Iguais ou diferentes" e a menina disse "Diferentes". A partir daí a professora conduziu a resolução resolvendo o MMC e aplicando a "regrinha", chegando na seguinte resolução $\frac{2}{4}+\frac{3}{16}=\frac{8}{16}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16}$. E perguntou então aos alunos, "É uma fração própria, imprópria ou aparente?” e pelo que pudemos ouvir, a maioria deles respondeu corretamente que era uma fração própria.

Assim, nos dois exemplos que resolveu, quando terminou a conta ela perguntou aos alunos se a fração era própria, imprópria ou aparente. Quando a fração era imprópria, ela trabalhava com os alunos como transformar esse resultado em um número misto, através da divisão. Foi após o segundo exercício que um dos alunos perguntou a ela “Porque foi diferente?" e pelo que observamos, a professora B demorou a entender o que o aluno queria dizer com a pergunta. Quando entendeu, explicou que o aluno queria saber por que na primeira, ela alterou o resultado e na segunda ela não mexeu no resultado. A professora então retomou o que é uma fração imprópria dizendo que esta é uma fração em que o numerador é maior que o denominador e por isso é possível “tirar inteiros” dela e assim transformá-las em um número misto, o que não precisava acontecer na fração própria.

Em seguida, a professora deixou um tempo para que os alunos resolvessem os outros itens em sala e o que não desse tempo, ela os orientou a resolver em casa. Para finalizar a aula, a professora B retomou com os alunos a técnica necessária para a resolução de adição e subtração de frações: primeiro fazer o MMC dos denominadores, depois usar a regrinha de divide pelo debaixo e multiplica pelo de cima, em seguida fazer a conta de soma ou subtração com os numeradores e chegar ao resultado, chegando ao resultado se a fração for imprópria é preciso transformar em número misto e se não e for possível, simplificar a fração.

Análise do episódio 3 – parte I

Um dos primeiros pontos que chamou nossa atenção durante essa aula foi quando a professora ensinou aos alunos a “regrinha” de “dividir pelo debaixo e multiplicar pelo de cima.”. Nessa situação, podemos dizer que apesar de ter retomado o conceito de frações equivalentes a professora está priorizando a técnica para resolver operações com frações e que o significado por trás desse mecanismo de resolução pode acabar passando despercebido pelos alunos. Como Machado (2011) destacou é comum que muitas vezes os professores ensinem primeiro a técnica e depois o significado quando estão trabalhando com a Matemática, o que aconteceu nessa situação.

Cabe destacar também que nessa situação a professora até usou desenhos para fazer com que os alunos compreendessem que para somar frações é necessário que elas tenham um denominador comum. Porém, de acordo com o que aqui apresentamos, consideramos que a professora poderia ter continuado a utilizar desenhos para somar frações com denominadores diferentes, como por exemplo com $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Nesse caso, nossa sugestão é que fosse desenhado as duas frações e então sobrepusesse-as, induzindo para que os alunos enxergassem a necessidade da divisão em 6 partes iguais.

Outro momento que chamou nossa atenção foi durante a dúvida do aluno que disse "Porque foi diferente?". Nessa situação, podemos dizer que novamente a professora estava priorizando a técnica na realização das contas e da "simplificação[10]" das frações, porém, a dúvida dos alunos nos leva a questionar se a falta de significado no mecanismo e no resultado foi prejudicial na aprendizagem desse aluno. Isso porque é notável que o aluno não compreendeu o que a professora estava fazendo quando transformou a fração imprópria em um número misto, ou seja, o aluno sabia toda a técnica que deveria ser feita, porém como ele não compreendia o significado, ao nosso ver ele não tinha o conhecimento de quando usar ou não essa técnica de número misto.

Podemos então concluir que só ensinar a técnica não é o suficiente, é necessário que o aluno conheça e domine também o significado daquele mecanismo para então conseguir uma aprendizagem completa. Assim, podemos retomar a ideia da retroalimentação de Machado (2011) em que a técnica alimenta o significado e vice-versa porque nessa situação a ausência

[10] Aqui, estamos chamando de simplificação a transformação de uma fração imprópria em número misto.

do significado pode ter gerado a dúvida do aluno, destacando a necessidade de reconhecer que técnica e significado são complementares.

A escolha de priorizar a técnica pode ter diversos motivos. Segundo Gómez-Granell (2003), o formalismo da técnica foi predominante durante muito tempo no ensino da matemática, o que pode justificar a opção da docente por priorizá-la. Como durante sua entrevista a professora B nos contou ser pedagoga e que esse é o seu segundo ano em sala de aula, também podemos considerar que sua pouca e recente experiência pode ser uma das razões pela qual ela optou por dar mais ênfase a técnica.

Além disso, sua formação tem um caráter mais generalista e isso também pode ter influenciado em sua escolha já que a técnica é uma questão mecânica e muitas vezes de repetição, enquanto o significado pode estar relacionado a um domínio avançado de determinado assunto. Complementando essa ideia e como já explicitado em outro episódio, segundo Passos e Nacarato (2018), é comum que professores de anos iniciais, como é o caso aqui, possuam em suas formações lacunas de conteúdos matemáticos.

Outro possível motivo para que a docente tenha optado por priorizar a técnica é porque didaticamente ela considera que a forma de desenvolver esse tipo de situação é mais importante para os alunos, já que quando eles tiverem que resolver exercícios eles terão que conhecer e dominar essa técnica. Também podemos refletir que a opção pela técnica pode ser consequência de um ensino baseado na repetição de resolução de exercícios, o que vai de encontro ao que observamos neste episódio em que a docente resolveu uma sequência significativa de exercícios. Sobre isso, podemos refletir também que esse foco na técnica nem sempre é benéfico, para Santos (2015), privar os alunos de entender o significado por trás de conteúdos matemáticos, priva-os de conhecer o simbolismo matemático e de suas regras a partir desse processo de entender a matemática.

A partir daqui iremos apresentar o que observamos na aula sobre adição e subtração de frações com denominadores diferentes na turma do sexto ano da mesma escola. Diferentemente da turma anterior, nessa aula a professora C já havia explicado sobre esse conteúdo e por isso a aula começou com a correção de exercícios e como a maioria envolvia situações problemas, ela trabalhou bastante nessa aula com a interpretação dos enunciados.

Episódio: técnica e significado – parte II

A primeira questão que a docente corrigiu era uma situação-problema e por isso, destacou que como o enunciado perguntava sobre a quantidade "juntos", os alunos precisavam entender que eles deveriam realizar a adição das frações $\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$ e disse "Não posso utilizar o somatório de *denominadores* diferentes. Precisamos tornar os *denominadores,* que são os números que aparecem embaixo, iguais." e explicou que para isso iria utilizar o MMC. Depois que encontrou o MMC, ela disse "Agora vamos encontrar as frações equivalentes", assim o fez e completou "Com os *denominadores* iguais, agora posso somar os numeradores".

Já o segundo exercício, a professora C disse que era mais simples, porque era um exercício apenas de cálculos, não havia um enunciado para ser interpretado e ele possuía alguns itens com adição e subtração de frações. As contas eram a) $\frac{3}{8} + \frac{1}{6}$; b) $\frac{9}{10} - \frac{1}{4}$; c) $\frac{5}{9} + \frac{2}{6}$. Ela resolveu a primeira conta inicialmente usando o MMC e a "regrinha" de "dividir pelo debaixo e multiplicar pelo de cima", mas depois resolveu a mesma conta, porém utilizando somente a ideia de encontrar frações equivalentes. E completou dizendo "Para somar ou subtrair, a maneira de resolver é a mesma: os *denominadores* precisam ser iguais.". A professora corrigiu então os outros dois itens optando por usar a fração equivalente na resolução.

O terceiro exercício que a professora corrigiu era o seguinte: "No primeiro dia de trabalho, Arnaldo pintou $\frac{1}{8}$ da parede e, no segundo dia, pintou $\frac{3}{8}$ da mesma parede. Avalie se o que ele fala é correto." Abaixo do enunciado havia a imagem de um homem pintando uma parede e acima dele um balãozinho com o seguinte escrito: “Nesses dois dias pintei a metade da parede.”

Assim, durante a correção a professora explicou que os alunos deveriam começar a resolução do exercício fazendo a adição das frações $\frac{1}{8}$ e $\frac{3}{8}$. A professora chegou no resultado $\frac{4}{8}$ e orientou os alunos a simplificar a fração e quando resolveu isso, chegou ao resultado de $\frac{1}{2}$. Como a pergunta do exercício era se a frase de Arnaldo estava correta, a professora perguntou aos alunos “Essa fração é metade?” e ela mesma respondeu “Sim!”. Porém, mesmo sem conseguir ouvir a todos os alunos, pudemos perceber que alguns alunos disseram que não.

Para explicar aos alunos que a resposta correta era sim, a professora C escreveu a fração $\frac{1}{2}$ na lousa e disse aos alunos “O *denominador* indica em quantas partes foi dividido. Em quantas partes?” e os alunos responderam “Duas partes” e então ela retomou que “São duas partes de um todo, o que significa metade desse todo”. Assim, pelo que pudemos perceber os alunos conseguiram entender que a resposta seria sim, porque $\frac{1}{2}$ corresponde a metade. Depois disso, a professora deu tempo para que os alunos resolvessem mais alguns exercícios do livro didático.

Análise do episódio 3 – parte II

Durante essa aula da turma do sexto ano, o que inicialmente chamou nossa atenção foi o fato que apesar de a professora C utilizar o MMC e a “regrinha” de “dividir pelo debaixo e multiplicar pelo de cima”, ela também priorizou o uso das frações equivalentes na resolução de exercícios. Nesse sentido, entendemos que ao utilizar a “regrinha”, a professora está priorizando a técnica e que ao trabalhar com as frações equivalentes ela está fazendo uma tentativa de apresentar aos alunos o significado da técnica. Porém, a partir do que pudemos observar e lembrando que esse é apenas um recorte, já que foi apenas uma aula, consideramos que nessa situação a professora não está efetivamente trabalhando com o significado.

Assim, para uma abordagem mais concreta do significado das operações de adição e subtração de frações, sugerimos que inicialmente ela poderia ter feito desenhos como a professora anterior começou a fazer. Por exemplo, ela poderia desenhar as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ e perguntar aos alunos o que eles fariam para juntar ou somar essas duas partes, sugerindo ou não que eles sobreponham os desenhos. A partir daí, ela questionaria aos alunos como chamar esse novo pedaço, a junção das partes, para então justificar a necessidade de encontrar um denominador comum e de encontrar as frações equivalentes com esse novo denominador. Nesse caso, aí então poderíamos considerar que efetivamente se trabalhou com o significado por trás da técnica e, ilustraria então a complementaridade entre técnica e significado, corroborando com as ideias de Machado (2011), Santos (2015) e Gómez-Granell (2003).

O cuidado da professora em mostrar a resolução dos exercícios pode ter origem em diversas situações, aqui vamos tentar relacioná-lo aos dados que temos. Isso porque durante a entrevista que realizamos, a docente nos contou que possui formação em química, mas que há muitos anos começou a dar aulas de matemática em uma escola estadual e que hoje leciona essa disciplina nessa rede de ensino e na escola particular. Assim, podemos considerar que apesar de sua formação ser diferente da área que leciona, a longa experiência da professora dando aulas de matemática pode ter influenciado na sua escolha em priorizar não só a técnica como também tentar trabalhar com o significado ao abordar as operações com frações.

A segunda situação que nos chamou a atenção foi quando os alunos não entenderam que a fração $\frac{1}{2}$ também pode ser entendida como metade. Nesse momento, podemos ver que a relação entre a Matemática, aqui representada pela fração $\frac{1}{2}$, e a Língua Materna, no que se refere a “metade”, não está clara para os alunos, mas mostra também a necessidade de que ambas estejam impregnadas, já que nesse caso os alunos precisam entender que $\frac{1}{2}$ é metade.

Para resolver essa situação, a professora usou o suporte da Língua Materna durante sua explicação, evidenciando novamente a importância da impregnação entre essa e a Matemática.

Já quando se trata da comparação que nos propusermos a fazer neste episódio, podemos perceber que existe nesse caso uma diferença na forma com que a adição e subtração de frações foram trabalhadas nas turmas do quinto e do sexto ano dessa escola. Isso porque nas turmas de quinto ano, a professora priorizou a técnica e as regras de como resolver essas operações além de trabalhar também com frações próprias, impróprias e aparentes nos resultados dessas contas. Já na turma de sexto ano, a professora apresentou a relação, ainda que mínima, entre a técnica e o significado quando ela explicou mais sobre como resolver com frações equivalentes e usou essa resolução em sua correção de exercícios, além de não trabalhar com as outras representações de frações, como fez a primeira professora.

Além disso, durante a aula de quinto ano a professora trabalhou com exercícios mais práticos, ou seja, onde a conta já estava escrita com Matemática. Já no sexto ano os exercícios envolviam mais situações-problema e consequentemente a interpretação dos enunciados pelos alunos, o que levou a professora a trabalhar mais essa questão durante sua aula.

Cabe citar aqui também que de acordo com o observado e o que escutamos nas entrevistas ambas as professoras possuem um cuidado especial com suas salas justamente por saberem que esse é um período de transição. Isso porque a professora do quinto ano demonstrou um cuidado maior em auxiliar os alunos na organização do caderno e em respeitar o tempo dos alunos no desenvolvimento das atividades em sala. Além disso, ela também priorizou bastante em suas aulas os desenhos, sendo uma forma de representar as situações de frações mais concretamente.

Já a professora do sexto ano, ao explicar sobre as operações com frações demonstrou ter o conhecimento de que os alunos já tiveram contato com esse tema no ano anterior, por isso o abordou de uma forma diferente e com maior aprofundamento no assunto, já que durante as resoluções, ela sempre retomava com os alunos que eles estavam usando frações equivalentes. Também foi possível perceber que a professora trabalhou de forma mais prática com exercícios, usando menos desenhos e resolvendo uma quantidade maior de exercícios por aula.

Esses aspectos também nos levam a perceber que como as ideias apresentadas por Machado (2011), nesse contexto tivemos primeiro a apresentação da técnica e depois do significado, como geralmente acontece. Além disso, as situações que observamos também nos levaram a perceber que técnica e significado não são totalmente independentes, mas que uma contribui para o desenvolvimento da outra. Também pudemos observar que a relação de impregnação entre a Língua Materna e a Matemática se mostraram presentes nas aulas dos dois anos escolares, também corroborando as ideias de Machado.

Como já explicamos, antes de realizarmos as observações das aulas aqui descritas, entrevistamos as duas professoras dessas turmas a fim de conhecê-las um pouco melhor, entender qual a opinião delas sobre o ensino de frações e também de qual forma elas trabalham esse conteúdo. A primeira aula descrita neste episódio é da professora B, a mesma do anterior. Assim, podemos retomar que ela nos contou durante a entrevista que sua formação e experiência são recentes, porém ela demonstrou tanto durante a nossa conversa como durante as aulas que observamos uma preocupação com o entendimento dos alunos.

Outro aspecto que chamou nossa atenção foi quando a docente nos contou que sua formação não ensinou nada do ela via em sala de aula. Retomar esse comentário aqui pode ser útil para tentarmos explicar porque ela optou por priorizar a técnica para trabalhar com a adição e subtração de frações com denominadores diferentes. Isso porque apesar de sabermos que ela tem uma preocupação com o entendimento dos alunos, compreendemos que como ela contato com esse conteúdo, recorrer a técnica parece ser um caminho mais simples e seguro para ensinar esse conteúdo.

Como pudemos observar na aula da professora B deste episódio, provavelmente, o fato de ela não trabalhar com os alunos o significado dessa técnica pode ter gerado as dúvidas que eles apresentaram. Assim, podemos afirmar novamente que priorizar só a técnica parece não ser suficiente para que os alunos aprendam e entendam como fazer essas operações com frações. Além disso, como no episódio anterior havíamos questionado se a falta de abordagem de temas como frações na formação de pedagogia poderia influenciar na aprendizagem dos alunos, temos aqui um exemplo em que isso acontece. Isso porque a docente externou durante a entrevista que sentia falta de ter estudado isso durante sua formação e quando o assunto se tornou uma pouco mais complexo, ela optou por priorizar a técnica e, sob nosso ponto de vista, demonstrou uma certa dificuldade em trabalhar com os significados das "regrinhas".

A professora C também foi entrevistada e durante essa conversa inicial algumas de suas falas chamaram a nossa atenção e por isso, vamos abordá-las abaixo. Ela nos contou que possui licenciatura em química, mas que leciona matemática há mais de 20 anos. Além disso, num momento inicial da conversa, pediu para nos mostrar um site que costuma usar em suas aulas, sejam de matemática ou de química. Ao contar sobre essa ferramenta online que gosta de usar, ela disse o seguinte:

> Aquelas definições engessadas sobre um assunto, muitas vezes já está até obsoleto, né?! A gente precisa trazer uma linguagem nova, chegar ao aluno, de uma maneira diferente, falar a linguagem dele. Se eles são muito dinâmicos, se eles hoje conseguem fazer jogos e tá falando e tá mil coisas ao mesmo tempo, a gente tem que tentar trazer pra eles algo novo, algo da realidade deles. E eu gosto muito de tornar a aula bem lúdica, de facilitar, é lógico que tem uma hora que não tem jeito, tem que realmente partir pra conta, vamos fazer, vamos treinar e vamos entender. Mas, oferecer várias oportunidades é o nosso papel, né?!

Assim, a partir dessa fala da professora, podemos perceber que ela considera importante a forma como vai apresentar os conteúdos aos seus alunos, já demonstra uma preocupação com a linguagem que vai utilizar e também com o conhecimento e a realidade dos alunos, aspectos que fazem parte do objetivo deste trabalho. Além disso, a docente disse que procura trazer elementos lúdicos para sua aula, como jogos, mas que considera importante também trabalhar com cálculos e técnicas em suas aulas. Esse pode ser um exemplo de como nem sempre será possível trabalhar com técnica e significado ao mesmo tempo, já que a professora afirma que em determinados momentos é necessário "partir pra conta", um exemplo de quando é necessário priorizar a conta. Mas também fala sobre a preocupação com a linguagem, com trazer elementos lúdicos, priorizando o significado. Então essa fala pode ser um exemplo de situação em que é possível buscar o equilíbrio entre técnica e significado, como afirma Santos (2012).

Outro momento na conversa com a professora que merece destaque foi quando perguntamos a ela se ela acreditava que a matemática tinha uma linguagem própria e sobre como ela seria. Sobre isso ela respondeu "Acho. Eu acho que muitas vezes uma definição, por exemplo, se você me perguntasse o que é fração, né?! Já pensou eu chegar no aluno e falar: 'Gente, fração é uma parte igual de um todo', sabe?! Até que ponto ele vai: 'Aham, tá'." Ou seja, para ela a matemática possui sim uma linguagem mais específica e que pode dificultar a aprendizagem dos alunos porque ela é muito teórica e eles podem não entender o que está sendo dito, como ela explicou no exemplo de o que é fração.

Posteriormente, ela retomou esse conceito e disse "Eu acho que a matemática é importante também dar uma mudada, trazer ao entendimento do aluno. Pode até sim falar, fração é importante, uma parte igual de um todo. Mas, traduzir isso de uma maneira que ele entenda." Assim, ela explica que é importante sim que os alunos aprendam que fração é a parte de um todo, mas que isso aconteça a partir de situações que façam sentido ao aluno para que ele entenda o porquê disso. Essa situação ilustra que para essa professora é importante que os alunos não só conheçam uma definição matemática, mas também que entendam o sentido do que estão aprendendo.

Também chamou nossa atenção quando a professora falou sobre algumas situações comumente associadas a frações e disse

> Ou então chegar com aquela, que eu não gosto, não sei, aí, levar um chocolate, vamos dividir... Acho que tem que trazer mais do que uma pizza, um chocolate, como a gente vê nos livros, só pizza e chocolate pra ensinar sobre fração, né?! Ele chega lá no terceiro ano, a professora tá falando de fração com pizza e chocolate. Vai pro quarto ano, é pizza e chocolate. Vai no quinto ano, é uma pizza e um chocolate. Meu Deus, ele não aguenta mais, ele acha que fração é o estudo da pizza e do chocolate.

Nesse caso, a docente está questionando o fato de que os exemplos cotidianos relacionados a frações são sempre os mesmos: pizza e chocolate. É comum em matemática que os professores tentem trazer situações do dia a dia dos alunos para tentar engajá-los mais nas aulas e também como forma de dar um sentido a determinada situação ou cálculo. Também já vimos nos outros episódios deste trabalho que pizza e chocolate são realmente os elementos que mais aparecem nesse tipo de situação.

Assim, a partir da fala acima, cabe a reflexão se realmente não existe um uso excessivo dos mesmos exemplos, talvez seja interessante que como professores de matemática busquemos novos exemplos, diferentes e que estejam mais relacionados ao cotidiano dos alunos. Sobre isso, a professora disse: "Então acho que tem que realmente, além de mudar um pouquinho essa, trazer pra realidade, mostrar que a matemática é importante no dia a dia dele, na vida dele, na profissão que ele for escolher..."

Outro questionamento relacionado a fala da docente sobre o uso excessivo de exemplos com pizza e chocolate é sobre o real resultado disso. Isso porque será que o simples uso desses elementos é suficiente para facilitar a aprendizagem dos alunos? Como vimos acima, muitas vezes esses exemplos são usados durante muitos anos e de forma massiva, o que pode atrapalhar a aprendizagem ao invés de ajudar. Mais do que isso, o uso de pizza e chocolate, muitas vezes pode até não ter relação com o cotidiano dos alunos, afinal, não é comum ouvir alguém dizer que comeu $\frac{3}{8}$ da pizza na última sexta-feira.

Como vimos, a professora disse que considera importante trazer exemplos que se adequem a realidade dos alunos e ela dá o seguinte exemplo

> Mostrar a história de como começou o estudo das frações, a necessidade, que os egípcios precisaram para dividir lá e calcular a área. Então, mostrar pro aluno aonde isso é importante, porque se não, realmente, assim ao meu ver, eu acho que fica cansativo e talvez a gente perca o aluno ali por bobeira, e acho que a gente tem que trazer esse aluno pra nós. Então acho realmente que a gente tem que mostrar e tentar mil coisas, eu sempre acho que se o aluno não entendeu eu parto para outra coisa, se não, vamos fazer no concreto, se o aluno ainda tem dificuldade, opções a gente tem muita.

Assim, além do exemplo do uso da história das frações que é um elemento que realmente pode atrair a atenção a atenção dos alunos, a professora também destaca a importância de tornar a aula atrativa e de usar diferentes e incontáveis ferramentas e metodologias, seja para incentivar a participação dos alunos, seja para tirar dúvidas e fazer com que ele realmente entenda aquilo que está aprendendo. Na aula dessa professora e que está descrita neste episódio, pudemos observar que realmente a professora utiliza de diferentes estratégias para explicar a resolução de um mesmo exercício e também que ela se preocupa em fazer com que todos os seus alunos entendam o que ela diz.

Como fizemos em outros episódios, também perguntamos a professora C quais as palavras que ela achava que mais falava durantes suas aulas sobre frações e as respostas foram: numerador, denominador, razão, divisão, proporção. Também destacamos ao longo deste episódio os termos que ela mais utilizou na aula que observamos e o de maior incidência foi denominador. Nesse caso específico, escolhemos só uma palavra porque não encontramos outras que se repetiam um número considerável de vezes.

Quanto a diferença entre o que apareceu na entrevista e na observação, consideramos que isso pode ter acontecido devido a estarmos comparando com uma aula só, de um assunto específico, adição e subtração de frações. Essa também pode ser razão pela qual a palavra denominador apareceu tantas vezes. Isso porque, aulas desse tema geralmente são mais técnicas e operacionais, por isso, muitas vezes palavras como numerador, denominador e MMC podem acabar aparecendo de maneira repetida.

6.4 – Episódio 4

Sobre o episódio 4

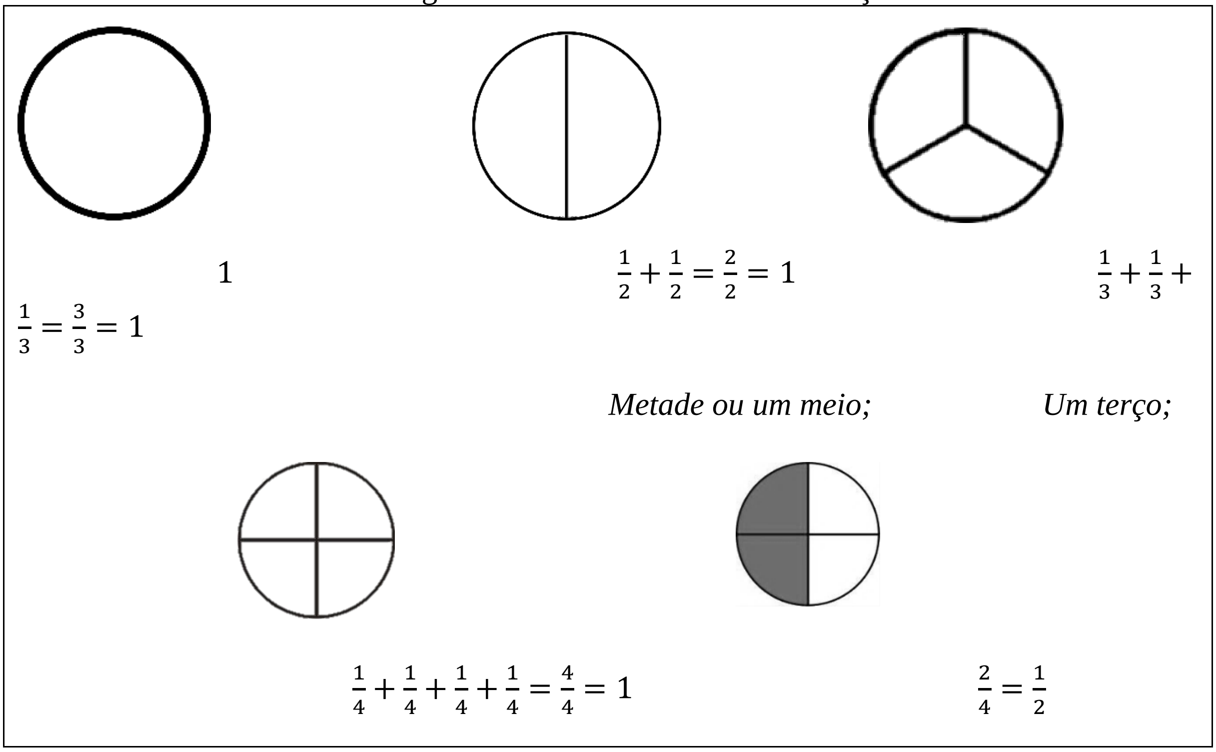
O quarto episódio apresenta a comparação entre duas aulas de matemática do professor de uma turma do quinto ano de uma escola municipal da cidade de São Paulo. Devido à pandemia de covid-19, no momento em que realizamos as observações nessa escola, os alunos estavam divididos em duas turmas e assistiam às aulas de forma presencial em semanas alternadas. Assim, assistimos a duas aulas do professor em semanas diferentes, o que nos propiciou um momento rico de observação. Isso porque assistimos a mesma aula, com o mesmo conteúdo do professor, em dias e com turmas diferentes e assim pudemos analisar as diferenças entre essas aulas e refletir sobre o que pode ter ocasionado essa mudança.

Episódio: como uma mágica!

A aula que observamos em dois dias diferentes era um momento de introdução sobre o conteúdo de frações. Para isso, no primeiro dia, o professor iniciou a aula colocando a tabuada na lousa e fazendo uma divisão não exata, mais especificamente, 50:4. Assim, ele escreveu na lousa a divisão e, utilizando o algoritmo mais conhecido, realizou a operação encontrando como resultado o número 12 e tendo 2 como resto. A divisão não exata é uma situação que pode ser explorada de diferentes maneiras, uma delas é a discussão de o que fazer com as duas unidades que sobraram. Essa pode ser uma maneira de se introduzir as frações, já que se trabalharia com números que não inteiros, sendo “pedaços” de uma ou mais unidades.

Porém, o professor decidiu abordar o conteúdo de frações de outro modo. Assim, depois de fazer a divisão citada, ele escreveu na lousa: “É mais feliz aquele que sabe dividir!” Para falar sobre fração, o docente partiu da ideia da divisão, usou como exemplo uma *geladeira* e orientou os alunos a *dividirem* de uma forma que fosse útil e que as pessoas pudessem usar a geladeira. Em seguida, o professor pediu aos alunos para imaginarem *queijos* e os representou desenhando alguns círculos na lousa. Na Figura 12, representamos os desenhos que o professor fez na lousa e as notações que utilizou, em seguida, explicaremos com mais detalhes como ele conduziu esse momento da aula.

Figura 12 – Desenho na lousa de frações



Fonte: Imagem desenvolvida pela autora.

O professor primeiro desenhou um círculo na lousa e disse aos alunos que aquele era o *queijo*, representando assim um *inteiro* e colocou o número 1 próximo a figura. Depois disso, ele começou a desenhar outros círculos e dividi-los em pedaços. A partir daqui, iremos considerar que o professor idealizou representar em seus desenhos partes de tamanhos iguais, mas que a olho nu não temos como afirmar se estavam milimetricamente iguais ou não. O que podemos afirmar é que os desenhos passam a ideia de que estavam divididos em partes iguais.

O professor então desenhou um novo círculo de tamanho similar ao anterior, dividiu-o em duas partes de tamanhos iguais e disse que cada uma das *partes* era uma metade. Então, escreveu na lousa a fração $\frac{1}{2}$, explicando que essa era a representação numérica de cada uma das *partes* e destacou que cada uma delas poderia também ser chamada de um meio. Em seguida, ele explicou aos alunos na lousa que se juntarmos as duas partes, estaremos somando um meio com um meio, escreveu essa adição com as frações e mostrou que o resultado seria $\frac{2}{2} = 1$ e reforçou com os alunos a ideia de que ao pegar as duas *partes*, eles estariam pegando o círculo todo e por isso é igual a um *inteiro*.

Em seguida, o docente representou novamente um círculo na lousa, dessa vez dividiu-o em três partes iguais, explicou aos alunos que cada uma das *partes* recebe o nome de um terço e escreveu a representação $\frac{1}{3}$. Assim como fez na situação anterior, ele conversou com os alunos sobre o que aconteceria se juntássemos as três *partes* do círculo e anotou na lousa o cálculo que ilustra essa situação, chegando novamente à conclusão de que resulta em um *inteiro*.

O último exemplo que o professor explicou sobre frações foi a partir do desenho de um círculo que dessa vez foi dividido em quatro partes iguais. Ele explicou aos alunos que cada uma dessas *partes* era chamada de um quarto e brincou dizendo que não era o quarto que eles dormiam. Novamente, mostrou a turma a representação numérica que corresponde a cada uma das partes do desenho, nesse caso $\frac{1}{4}$ e conversou com eles sobre o que representaria a união dessas quatro *partes*, concluindo com os alunos seria um *inteiro*.

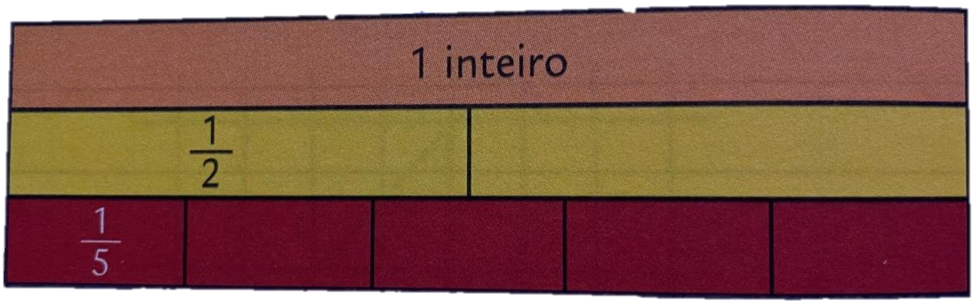
A partir da representação dessa última soma das partes, quando chegou ao resultado $\frac{4}{4}$, o professor disse: "Toda vez que o número de cima é igual ao número de baixo, eu tenho um *inteiro*!". Utilizando a mesma fração e indicando com setas na lousa, ele explicou aos alunos sobre a nomenclatura das partes da fração, disse que o número que estava na parte de cima da fração era chamado de numerador, indicando quantas partes foram selecionadas e o da parte debaixo recebia o nome de denominador e que ele indica em quantas foi dividido.

Para explicar melhor sobre a nomenclatura, o professor pediu aos alunos que imaginassem uma *pizza* e escreveu um traço na lousa para representar a barra que separa os números na representação de uma fração. Em seguida, perguntou aos alunos: "Em quantas *partes* a *pizza* é *dividida*?". Uma parte deles respondeu: "8!" e com isso o professor explicou que deveríamos colocar então esse número no denominador. Então continuou: "E se eu quiser o todo? Se eu quiser comer a *pizza* toda?", nesse momento o professor colocou o número 8 na parte de cima da fração e disse que a resposta correta seria 8, explicando que para comer a *pizza* toda, uma pessoa deveria comer os 8 pedaços da *pizza* e que assim a fração $\frac{8}{8}$ era igual a um *inteiro*.

Ainda sobre a situação das *pizzas*, o professor foi escrevendo na lousa e explicando aos alunos que se uma pessoa comeu dois pedaços, então ela comeu $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$. E perguntou: "Quanto ela já comeu?" e, respondendo, escreveu na lousa $\frac{2}{8}$. Ele então repetiu essa ideia de comer pedaços de *pizza* e encontrou como resultados as frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{4}{8}$. Nessa última, ele utilizou o desenho na lousa para concluir com os alunos que $\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ e também retomou que $\frac{8}{8}=1; \frac{4}{4}=1$ e $\frac{2}{2}=1$.

A partir dessas explicações, o professor pediu aos alunos que abrissem o livro de matemática em uma página que tinha como título "Sequência de atividades 2" e que começassem a resolver os exercícios dessa atividade. O que chamou a atenção nessa situação foi o fato de o livro apresentar aos alunos o desenho de um fracsoma como pode ser visto na Figura 13.

Figura 13 – Representação de um fracsoma



Fonte: Material fornecido pelo professor da turma

Foi possível perceber que de alguma forma, o professor também notou a presença do fracsoma na página e o utilizou para explicar os alunos que "...quando aumenta o número do denominador, o número de *partes*, aí o tamanho da parte fica menor." Enquanto os alunos resolviam os exercícios, pude perceber que a maioria deles estava com dificuldade em um exercício que envolvia a comparação de frações com denominadores diferentes. Umas das questões desse exercício era a seguinte: "Quem é maior: 2/6 ou 1/3?". Muitos alunos respondiam que era 2/6 porque o numerador e o denominador eram maiores do que em 1/3. Percebendo isso, o professor chamou a atenção dos alunos para explicar com todos prestando atenção, foi até a lousa e fez a representação com desenhos das duas frações com a intenção de mostrar que elas eram iguais. Porém, a partir dos comentários que os alunos faziam durante e após a explicação do professor, notei que eles ainda não haviam entendido que não tinha maior nessa situação porque elas eram iguais, ou, matematicamente falando, equivalentes. Após essa explicação, o sinal bateu e a aula acabou.

Após o término da aula, conversei com o professor e ele comentou que teve a mesma percepção que tive, os alunos ainda não tinham compreendido aquela questão. Como durante a entrevista que realizei o professor comentou comigo sobre o quanto era importante para ele que os alunos estivessem entendendo e citou o uso de alguns materiais concretos em suas aulas, comentei com ele que existe um material concreto que auxilia na comparação de frações e ele se mostrou bastante interessado.

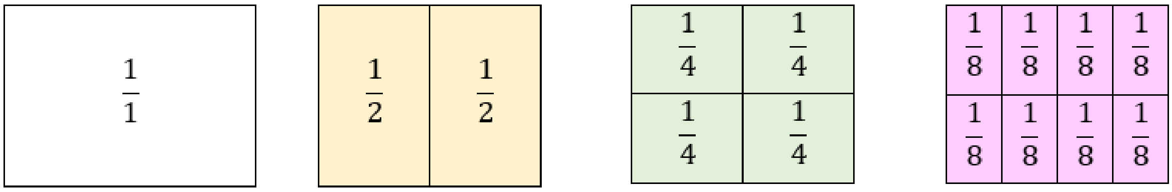
Voltei a escola na semana seguinte, sabendo que o professor daria a mesma aula, só que para a outra metade dos alunos. Para minha surpresa, quando cheguei à sala o professor havia separado folhas coloridas para então trabalhar com os alunos com algo parecido com o fracsoma. Nessa aula, o professor novamente começou a falar sobre o tema de frações colocando na lousa a seguinte frase: "É mais feliz aquele que sabe *dividir*!" Porém, diferentemente da aula anterior, na sequência, o professor disse aos alunos que eles fariam uma pequena atividade e distribui aos alunos quatro folhas de papel sulfite, sendo uma branca, uma amarela, uma verde e uma rosa.

Para começar a atividade, o professor pediu a turma que deixasse a folha branca como está e que ela seria o *inteiro*. Depois, disse a eles para dobrar a folha amarela ao meio para *dividi-la* em duas partes e perguntou: "Cada parte é uma...?". Nesse momento, alguns alunos responderam folha e outros responderam metade.

Depois disso, o professor solicitou aos estudantes que pegassem a folha verde e disse: "Vamos *dividi-la* primeiro em duas *partes*, ou seja, na metade", depois que eles fizeram isso, ele os orientou para *dividir* de novo na metade. Nessa situação, o professor pediu aos alunos que fizessem apenas as dobras nas folhas, sem cortar e em seguida perguntou aos alunos: "Marcou? Agora abre. Quantas *partes*?" E os alunos responderam quatro. E ele continuou "Preciso de quantas *partes* para formar o *inteiro*?" E novamente a turma respondeu quatro. Para finalizar o professor, mostrando as partes da folha, disse: "Um quarto, dois quartos, três quartos, quatro quartos que formam um *inteiro*", e pediu aos alunos que cortassem agora as quatro partes.

Em seguida, o professor orientou aos alunos que pegassem a folha rosa, a *dividissem* na metade, depois na metade de novo e uma última vez na metade novamente. Quando explicava como realizar as dobras, o professor sempre dizia para os alunos juntarem “pontinha com pontinha”, para que a divisória ficasse correta. A partir daí, o professor iniciou uma sistematização na lousa com as ideias que estava trabalhando na atividade. Para isso, ele fez desenhos como os da Figura 14.

Figura 14 – Representação das folhas coloridas



Fonte: Elaborado pela autora

Assim, o primeiro desenho representava a folha branca e que era um *inteiro*, o segundo era a folha amarela que tinhas duas metades, o terceiro a folha verde com quatro quartos e o último a folha rosa com as oito partes em que cada uma representava um oitavo. Depois de fazer os desenhos o professor começou a conversar com os alunos e aproveitou esse momento para conversar com os alunos sobre as nomenclaturas, usando como exemplos o segundo e o terceiro desenhos da lousa. Apontando para o último desenho, o professor perguntou: “Qual é o denominador?”. E eles rapidamente responderam: “8!”. O docente então continuou: “Ele indica o número de *partes* que *dividi*. E qual é o numerador?” Novamente, os alunos agilmente responderam: “1!” E o professor completou dizendo: “Indica as *partes* que peguei”

Depois disso, ele iniciou um momento de reflexão com os alunos e perguntou: “Se eu *dividir* a folha branca em 8 *partes*, sem cortar, eu teria quanto?” Os alunos deram então diferentes respostas como 1, 2, ... Então, o professor explicou que ele teria $\frac{8}{8} = 1$, ou seja, um *inteiro* e repetiu a pergunta para a *divisão* da folha em 4 e em 2 partes.

Para concluir essa parte da aula, o professor perguntou: “Então, para ser um *inteiro*?”. Os alunos então responderam: “Tem que ser tudo igual.” O docente questiona: “O que tem que ser tudo igual?” E a turma respondeu: “O numerador e o denominador”. A partir desse diálogo o professor explicou aos alunos que as frações $\frac{8}{8}$, $\frac{4}{4}$ e $\frac{2}{2}$ são equivalentes e sistematizou essa ideia dizendo que “Equivalentes quer dizer que são a mesma coisa”.

Assim como na aula anterior, depois dessas explicações, o professor pediu aos alunos que resolvessem alguns exercícios do livro. Em um momento posterior, ele perguntou aos alunos: “Qual é maior $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$?” e muitos responderam 4 ou $\frac{1}{4}$. Como essa não é a resposta correta, ele explicou aos alunos que não estava perguntando sobre o número debaixo, mas sim qual tamanho era maior.

Como sugestão de resolução, o professor orientou aos alunos que tentassem encontrar frações equivalentes. Depois de alguns minutos um aluno disse: “$\frac{2}{4}$ formam $\frac{1}{2}$, ou seja, são do mesmo tamanho por isso $\frac{1}{2}$ é maior”. Na sequência, o professor deu outro exemplo de comparação de frações quando perguntou: “Qual é maior $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{8}$?” e novamente usando a equivalência de frações o professor mostrou que a resposta correta era $\frac{1}{4}$ e se referiu a $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ como uma mágica.

Análise do episódio 4

Mas, afinal, por que o professor chamou essa situação de mágica? Nomear essa igualdade matemática dessa maneira pode ser interpretada de duas maneiras distintas. A primeira está relacionada a uma tentativa de utilizar termos do cotidiano dos alunos como forma de chamar sua atenção para o tema e para a aula e assim engajá-los. Já a outra interpretação é considerar a mágica como algo que não tem explicação e assim, se referir a essa igualdade como mágica, poderia induzir o aluno a ideia de que não há explicação para isso, como se não fosse importante que o aluno entenda as ideias matemáticas presentes nessa igualdade.

Segundo o que pudemos observar, o professor costuma trazer situações do cotidiano, como *pizza*, *geladeira* e *queijo* para as suas aulas. Além disso, ele apresentou aos alunos uma frase impactante que dizia: "É mais feliz quem sabe *dividir*!". Assim, podemos considerar então que ele costuma trazer elementos mais lúdicos para a sua aula, ou seja, tenta tornar suas aulas mais divertidas e menos formais, possivelmente como forma de despertar o interesse e a participação dos alunos. Por isso, de acordo com a nossa interpretação, o professor utilizou a palavra mágica como uma forma de envolver os alunos em suas aulas e despertar neles um encantamento pelo tema ensinado.

Voltando à situação da mágica, podemos dizer que sob a óptica da matemática, quando o professor escreve e fala que $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ele está trabalhando com frações equivalentes, ou seja, com frações que representam a mesma parte do *inteiro*, mas que são escritas de formas diferentes. Ao longo desta pesquisa também foi possível notar que é comum os alunos acharem que frações formadas por números maiores representam partes maiores. Por isso, pode ser fácil encontrar alunos que ao serem perguntados sobre frações como $\frac{2}{8}$ e $\frac{1}{4}$, eles apresentem certa resistência em aceitar e entender que elas são representam o mesmo número. Assim, entendemos que quando o professor diz que é uma mágica o fato de $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, ele está usando elementos lúdicos para trabalhar com frações equivalentes e mais especificamente, ele utiliza o termo mágica porque é algo que não é obvio e que surpreende o espectador, nesse caso, o aluno.

O uso desses elementos lúdicos merece destaque também quando comparamos essa situação às outras aulas de frações que observamos durante esta pesquisa. Já sabemos que muitas vezes esse tema é considerado pelos alunos como um "bicho de sete cabeças". Assim, o uso desses elementos diferenciados nos chamou atenção, porque pode ser uma forma de aproximar os alunos dos conceitos de frações, sendo também uma forma de cativar os alunos e motivá-los a aprender sobre o tema.

Outro aspecto que chamou nossa atenção foi o fato de que essas eram aulas de quinto ano e de como elas foram diferentes das turmas de sexto ano. Isso nos levou a questionar se essa é uma característica específica das turmas do quinto, ou seja, se a presença de elementos lúdicos e que tentam envolver mais os alunos nas aulas é um elemento que está mais pressente em uma determinada fase escolar ou não. Tendo em vista as aulas que acompanhamos, podemos considerar que sim, porque foi mais comum observar esse movimento nos professores das turmas de quinto ano.

O próprio uso do fracsoma, mesmo que somente um desenho dele, também merece destaque. Isso porque quando o professor concluiu junto aos alunos que "...quando aumenta o número do denominador, o número de *partes*, aí o tamanho da parte fica menor.", o docente estava usando o desenho do fracsoma para mostrar aos alunos o porquê dessa conclusão. Assim, nesse momento, além de fazer o aluno aprender uma técnica para decidir rápido a comparação de duas frações, o professor estava priorizando também o sentido e o significado utilizando o desenho para dar sentido a essa frase. Essa situação é também um exemplo de relação entre a língua materna e a matemática. Para sistematizar o que acontece quando se aumenta o número do denominador, o professor recorreu à língua materna. Depois, ele utilizou um material mais concreto e visual para explicar a frase que tinha dito, relacionando assim o que acontece com o número, a parte matemática, ao que foi dito na sistematização através da língua oral.

Quando o professor diz a turma: "Toda vez que o número de cima é igual ao número de baixo, eu tenho um *inteiro*!", ele está novamente utilizando a língua materna para fazer uma sistematização. Vale lembrar que isso aconteceu depois de o professor utilizar desenhos na lousa para representar diferentes frações. Assim, além do uso língua materna através de sua oralidade, o docente utilizou também desenhos para expressar de uma forma diferente o que ele disse oralmente. Ou seja, assim como na situação anterior, o professor utilizou a língua materna como suporte para explicar um conceito matemático, sendo mais um exemplo de situação em que há uma relação entre a língua materna e a matemática. Nessa situação, o professor também fez uso de uma representação gráfica para explicar um conceito matemático, o que mostra que além de priorizar a técnica, que nesse caso era observar que os números do numerador e do denominador eram iguais, o professor também considerou importante os alunos entenderem o porquê dessa regra. O motivo disso é que para ilustrar a veracidade do fato que quando os números do numerados e do denominador são iguais, a fração representa um *inteiro*, o professor utilizou como suporte os desenhos que havia feito na lousa, já que pela representação gráfica era possível compreender que pegar o mesmo número de partes que o círculo foi dividido é a mesma coisa que pegar o círculo *inteiro*.

Essa preocupação do professor não só com o domínio das técnicas, mas também com o entendimento delas pelos alunos foi uma característica de suas aulas que chamou a nossa atenção. Isso porque é algo que também é importante para nós, foi estudado por Machado (2011), Santos (2015) e Gómez-Granell (2003) e estava presente também nas falas do docente durante a entrevista que realizamos com ele. Durante esse momento de conversa inicial, quando o perguntamos sobre sua relação com a matemática, ele disse:

> Para mim, foi bom ter feito a pedagogia, porque a matemática de escola, que a gente aprende na escola ela é muito conteudista e pouco dada aos princípios que norteiam, né?! Ela é muito mais de que faça isso para obter isso, é assim que se faz, que se tem esse resultado, é dessa maneira que se procede. E na pedagogia, eu tive condição de ver em que se baseiam essas normas. Porque afinal, é, o tal do sobe 1 ou empresta isso, faz aquilo, que números não emprestam nada. É mais a questão do valor posicional dos números, então por isso é que eles têm esse lugar na conta, isso ajudou muito o entendimento né?! A matemática, não apenas no seu sentido mecânico, mas sim, de que na sua própria ordenação, ela tem a sua razão de ser. E com esse entendimento, eu creio que se isso me fosse passado quando eu era criança, seria muito mais gostosa a matemática para mim, do que foi naquele tempo, né? Muito mais prazerosa.

Assim, podemos dizer que para esse professor é de extrema importância que os alunos entendam o porquê das técnicas matemáticas. Ou seja, não basta que os alunos saibam como manipular os números e resolver operações utilizando os algoritmos, é necessário que eles entendam como funcionam esses algoritmos, sabendo o porquê realizar as contas de uma maneira ou de outra. Isso, segundo ele, contribui para que os alunos não só para a compreensão e aprendizagem dos alunos, mas também para que eles tenham maior interesse em aprender matemática e que essa aprendizagem se torne mais prazerosa. De maneira geral, podemos dizer que essas ideias que o professor compartilhou conosco na entrevista também estiveram presentes nas observações que fizemos em sala de aula, principalmente nos dois momentos de sistematização com o uso de língua materna que analisamos acima.

Outro momento da entrevista com esse docente que chamou a nossa atenção foi quando perguntamos a ele se sentia alguma dificuldade para ensinar frações. Sobre isso, disse que

> A dificuldade que eu tenho está na minha formação. A minha formação de antigamente não se propunha a explicar essas coisas. E mesmo que a minha faculdade foi excelente, mas, ainda assim, eu creio que estou precisando muito melhorar minha compreensão. Então, por isso, eu estou estudando bastante, né?! (No sentido de melhorar a compreensão sobre frações?) Sobre frações, sobre frações... Quando fazer o que e por que fazer o que... Quando isso fica bem solidificado para mim é mais fácil de ensinar. Por exemplo, eu estou revendo essa matéria toda para poder ensinar.

Nesse e em outros momentos da entrevista, o professor destacou que considera importante continuar estudando, especialmente para ensinar frações. Foi exatamente essa fala que me levou a conversar com ele no final da primeira aula que observei e apresentar-lhe o fracsoma, explicando que esse material poderia ser utilizado em suas aulas de frações. O fato de o professor ter demonstrado tanto na entrevista como em sua prática que era importante para ele que seus alunos entendessem o porquê das situações matemáticas foi outro fator que contribuiu para que me sentisse a vontade de apresentar a ele um novo material que pudesse ser utilizado em suas aulas.

De modo geral, temos que a entrevista e as observações das aulas desse professor chamaram a nossa atenção para uma característica comum: a sua preocupação com o entendimento de seus alunos a respeito da matemática. Isso porque ele compartilhou essa ideia conosco durante a entrevista e também pudemos perceber que durante suas aulas ele demonstrou uma grande preocupação em fazer com que a turma entendesse o porquê de certas "regrinhas" e sistematizações matemáticas. Além disso, observamos também que ao fazer algumas conclusões com os alunos sobre determinados assuntos de frações, o professor utilizou a oralidade e a escrita através da língua portuguesa, demonstrando assim que existe uma relação entre a matemática e a língua materna nas aulas observadas.

Como o intuito deste trabalho é estudar sobre a linguagem que os professores utilizam para ensinar frações, uma de nossas perguntas aos professores durante o momento de entrevista foi sobre qual/quais seriam as palavras que eles achavam que mais utilizavam quando davam aula desse tema. No caso específico deste docente, quando entrevistado, ele respondeu que acreditava que as palavras eram: dividir, comparar, equivalência, resolver de maneira equânime, de maneira justa. Outro momento em que pudemos estudar sobre o repertório desse professor sobre frações, foi durante a observação de suas aulas e que estão descritas aqui neste episódio. Para facilitar nossa análise, optamos por grifar as palavras mais utilizadas por ele, são elas: dividir, partes, inteiro, geladeira, queijo e pizza.

Assim, temos que a palavra dividir foi a palavra que ele achava que mais ia utilizar e foi realmente a que ele mais utilizou. Já as outras palavras que ele disse na entrevista, podemos dizer que como só observamos duas aulas e estas eram introdutórias, talvez ele as utilizasse em momentos posteriores. Quanto as palavras que ele mais utilizou nas aulas que observamos, podemos ressaltar dois aspectos diferentes. O primeiro, já analisado anteriormente, é o uso de palavras do cotidiano dos alunos como forma de tentar aproximá-los do conteúdo e de envolve-los nas atividades da aula. O segundo ponto diz respeito ao uso das palavras parte e inteiro, nesse caso podemos interpretar essa situação como um reflexo da importância de o aluno entender a matemática que neste caso está relacionado a ideia de parte/todo e aos conceitos de unidade ou o todo; as partes da unidade e a igualdade entre as partes que, segundo Druck (2005), são fundamentais no ensino de frações.

De acordo com o que foi observado nas duas aulas aqui descritas e também com o que foi coletado durante a entrevista com o professor deste episódio, podemos considerar que ele disse e demonstrou que considera importante que os alunos não só dominem as técnicas matemáticas, mas também que essas façam sentido, ou seja, que os alunos entendam o porquê delas e o raciocínio lógico que está presente nelas. O professor também fez uso da Língua Materna como forma de sistematizar algumas ideias relacionadas a fração, exemplificando então a relação entre a Matemática e a Língua Materna.

O último aspecto deste episódio que merece destaque é a presença de um repertório de palavras mais relacionadas ao cotidiano e também que remetem a situações divertidas como é o caso do uso da palavra mágica. Deixamos aqui nossa reflexão sobre a possibilidade do uso desse universo também para o uso de sistematizações. Antes, porém, cabe ressaltar que o que colocamos adiante não diz respeito a um julgamento sobre a prática desse professor, mas sim, um apontamento de outro caminho possível. Nesse sentido, temos que na situação em que o professor conclui com os alunos que "Toda vez que o número de cima é igual ao número de baixo, eu tenho um *inteiro*!" existe uma outra forma de abordar essa ideia. Sugerimos então que ele poderia perguntar a turma qual era a mágica que acontecia em todos os círculos desenhados na lousa para o resultado de todos ser igual a 1 ou outras formas de perguntas utilizando a ideia de mágica para fazê-los refletir. Essa seria uma forma de inserir elementos importantes do diálogo (MILANI, 2017), como é o caso da escuta ativa. Ou seja, a partir da sugestão que demos, o professor poderia ouvir o que o aluno tem a dizer, refletir sobre o que ele concluiu, realizando então o estranhamento, para então fazer o descentramento, conseguindo se colocar no lugar do aluno para então auxiliá-lo a chegar na conclusão esperada.

6.5 Considerações sobre os episódios

De acordo com os episódios aqui apresentados, o primeiro aspecto que merece destaque é a relação entre a Língua Materna e a Matemática. Em todas as aulas aqui descritas pudemos observar os professores usarem a Língua Materna como meio para ensinar matemática, mais ainda para abordarem o assunto de frações. Assim, apresentamos neste trabalho exemplos de situações reais em que acontece a impregnação mútua entre a Língua Materna e a Matemática.

A partir dessa relação de impregnação e do que foi aqui exposto, podemos considerar que a Língua Materna tem papel importante na compreensão da Matemática, já que observamos que a língua é um grande suporte para o ensino de conceitos matemáticos. Também observamos em muitos de nossos episódios a presença de desenhos e materiais concretos no ensino de frações. Mais do que isso, pudemos perceber que a presença desses elementos também contribui para a impregnação entre a Língua Materna e a Matemática. Isso porque, vimos que muitas vezes os desenhos e os materiais concretos foram usados juntamente com a Língua Materna para explicar determinados conceitos matemáticos e que talvez sem isso, a compreensão dos alunos poderia ser dificultada.

Um segundo ponto que chamou a nossa atenção foi a presença da discussão do uso de técnica e significado nas aulas de matemática. Segundo Machado (2011) essa não é uma questão dicotômica, mas sim uma questão de ênfase ou de prioridade. Isto é, em determinado momento da aprendizagem será necessário que os alunos aprendam mais sobre as técnicas e os signos técnicos, porém em outros o significado e o sentido do conhecimento abordado serão mais importantes. Sobre isso, pudemos observar ao longo deste capítulo como os professores do quinto e do sexto ano trabalham com a dualidade de técnica e significado. Com isso, percebemos que os professores buscaram trabalhar tanto com uma como com outra, priorizando cada uma delas nos momentos em que consideravam uma mais importante do que a outra.

Também pudemos observar em alguns dos episódios aqui descritos professores estabelecendo comunicações que em muito se assemelhavam a definição de diálogo de Milani (2017). Vimos que muitas vezes, quando os alunos apresentavam dúvidas ou faziam perguntas em relação ao que o professor havia dito, este tentava usar da escuta ativa para ouvir com atenção o que aluno estava apresentando a ele, depois o estranhamento para entender o que o aluno estava questionando e por último o descentramento, para conseguir ir até onde o aluno está e chegar na dúvida ou no questionamento dele.

Em outros momentos, também pudemos observar a comunicação em padrão sanduíche, isto é, o professor perguntava, o aluno respondia, havia uma avaliação da resposta e assim se seguia. Sobre isso, podemos refletir que para que o diálogo de Milani realmente ocorra, é necessário que os professores deixem os alunos falarem mais, escutem ativamente essas falas, façam o estranhamento e o descentramento, para então prosseguir sua fala. Novamente, não nos cabe aqui julgar o trabalho de nenhum docente, essa foi apenas mais uma reflexão sobre como estabelecer um diálogo em sala de aula.

Outro aspecto que merece destaque é o ensino de frações a partir dos três conceitos básicos de Druck (2005), são eles: unidade ou todo, partes da unidade e igualdade entre as partes. Vimos, em muitas das aulas aqui descritas que os professores tanto do quinto como do sexto ano possuem zelo por ensinar a relação de fração com parte-todo, tentam tornar claro aos alunos sobre qual é o inteiro, qual o número de partes em que foi dividido e que o tamanho das partes deve ser igual.

Consideramos então que a relação entre a Língua Materna e a Matemática se fez presente em todas as aulas que observamos o que é um indicativo da impregnação mútua existente entre elas. A dualidade entre técnica e significado também foi um elemento presente em diferentes aulas que assistimos nas quais pudemos observar exemplos de situações em que se prioriza uma ou a outra e também formas em que é possível encontrar um equilíbrio ou uma sequência entre elas. O elemento do diálogo na comunicação entre professor e aluno também esteve presente em algumas das aulas observadas e talvez pudesse ter sido presenciado em maior escala e com mais clareza se as condições impostas pela pandemia de COVID-19 não tivessem afetado a forma com que as observações aconteceram. Por fim, os três elementos básicos relacionados a fração também estiveram presentes em muitas das aulas que assistimos, reforçando a importância deles e indicando que os professores possuíam conhecimentos técnicos sobre eles.

CAPÍTULO 7 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos o desenvolvimento de uma pesquisa sobre a linguagem utilizada por professores do quinto e do sexto ano do Ensino Fundamental para ensinar frações. De forma mais detalhada, buscamos compreender como os professores dessa transição utilizam a Língua Materna e a Matemática durante o ensino de frações. Assim, durante todo processo da pesquisa, tentamos identificar qual era a linguagem que estava sendo utilizada pelos professores a fim de identificá-las e também de observar quais os efeitos que elas causavam no entendimento dos alunos, ou seja, se a escolha por uma ou por outra gerava que tipo de impacto na aprendizagem dos alunos.

Utilizamos uma metodologia de pesquisa qualitativa, composta por entrevistas com professores de matemática do quinto e do sexto ano e também observações de suas aulas sobre o tema de frações. Devido ao contexto pandêmico, tivemos certa dificuldade de conseguir contato com esses docentes e algumas das aulas que assistimos ocorreram de forma remota, o que pode, de certa maneira, ter influenciado nos dados, já que em alguns momentos não conseguimos ouvir direito o que os alunos disseram. Além, é claro, de que a dinâmica dessas aulas aconteceu de maneira diferente da que estávamos acostumados até o início da pandemia, o que provocou também certa dificuldade para os professores que tiveram que se adaptar a uma nova forma de lecionar.

Dentre os estudos teóricos realizados neste trabalho, destacamos primeiramente o estudo sobre linguagem, mais especificamente sobre Língua Materna e Matemática. Como esta pesquisa buscou *identificar* e *analisar* a linguagem e o vocabulário utilizados pelos professores do quinto e do sexto ano, nas aulas de matemática, mais especificamente no ensino de frações, as análises de dados realizaram-se sob esse ponto de vista. Assim, pudemos compreender que tanto na linguagem como no vocabulário utilizado pelos docentes para ensinar Matemática predominavam elementos da Língua Materna e que isso acontecia de forma natural para os professores, sendo, então, exemplos de impregnação mútua entre a Língua Materna e a Matemática.

De modo mais específico, em todos os episódios que criamos pudemos *identificar* e *analisar* a linguagem utilizada pelo professor, a partir de situações em que os professores utilizavam a Língua Materna como ferramenta para explicar determinado conteúdo ou então para esclarecer dúvidas que os alunos apresentavam. Analisamos situações em sala de aula em que os professores recorreram a Língua Materna para sistematizar conteúdos e em algumas vezes, criar “regrinhas” de memorização com a intenção de facilitar a aprendizagem de técnicas pelos alunos. Também pudemos perceber que muitos professores utilizam desenhos e materiais concretos como forma de complementar a língua tanto na sistematização como na compreensão de conceitos matemáticos, contribuindo assim para a impregnação entre a Língua Materna e a Matemática.

No caso específico do episódio 1, além de *identificar* e *analisar* a linguagem utilizada pelo professor, também pudemos observar como a Língua Materna pode atuar como forma de melhorar a comunicação entre professor e alunos. Nessa situação, o aluno não estava respondendo à pergunta de acordo com o que o professor esperava e então, podemos refletir que o docente se esforçou pata tentar fazer o outro entender o que ele estava perguntando. Com essa intenção, utilizou a Língua Materna para reformular sua pergunta até que o aluno conseguisse compreender o que ele queria dizer.

Este trabalho também procurou *perceber* de que maneira a mudança na linguagem e no vocabulário utilizado pelo professor refletia na relação entre docente e discentes, no interesse dos alunos pelas aulas de matemática e no entendimento de determinados conceitos de frações. Assim, novamente o episódio 1 foi uma situação em que pudemos *perceber* que a mudança na linguagem e o uso da Língua Materna foram os elementos utilizados pelo professor como forma de despertar o interesse do aluno pelo conteúdo que estava ensinando. E, ao nosso ver, foi a partir desse momento que o professor pôde aprofundar mais sua aula sobre frações.

A dualidade entre a técnica e significado foi outro aspecto teórico que despertou nosso interesse ao longo deste trabalho. Isso porque é comum que professores de matemática se deparem com o dilema de priorizar técnica ou significado. Entendemos por técnica questões mais operacionais, que envolvam cálculos, memorização de regras e situações com pouca reflexão, como é o caso do ensino de adição e subtração de frações com denominadores diferentes, quando o professor diz a seus alunos "divide pelo debaixo e multiplica pelo de cima". Já o significado envolve situações em que os alunos realmente entendam o porquê de cada operação ou regra, ou seja, situações em que os alunos estejam entendendo a operação matemática e em que exista um significado por trás de cada cálculo ou memorização. Como exemplo, podemos citar o uso de equivalência de frações na situação da memorização descrita acima. Nesse caso, os alunos são convidados a refletir do porque a "regrinha" pode ser usada, compreendendo que ela nada mais é do que encontrar frações equivalentes de mesmo denominador.

Nesse sentido, durante as observações e entrevistas pudemos analisar momentos em que os professores priorizavam a técnica ou o significado e com isso, *analisar* como o professor escolhe a linguagem e o vocabulário que utiliza durante as aulas de Matemática. Isso porque entendemos que a escolha entre técnica e significado se relaciona diretamente com o uso da Língua Materna e a Matemática. Quando o professor prioriza a técnica, é mais comum que ele utilize linguagem e vocabulário mais característicos da Matemática. Já quando o foco do docente é no significado, geralmente há a predominância da Língua Materna na linguagem e no vocabulário utilizados.

Compreendemos também que a formação e conhecimento do docente podem influenciar na escolha feita. Isso porque a professora B que é generalista, nos contou que sentia falta de ter aprendido mais sobre alguns conceitos matemáticos durante sua formação e conforme observamos, quando foi ensinar sobre adição e subtração de frações com denominadores diferentes, um conceito um pouco mais complexo, optou por utilizar a técnica. Por outro lado, observamos que a professora C que é especialista, nos contou ter mais de 20 anos de experiência dando aulas de matemática optou por ensinar o mesmo conteúdo tentando priorizando mais o significado, utilizando como explicação as frações equivalentes para realizar as operações. Isso, então, nos leva a considerar que tanto a formação como a experiência dos professores podem sim influenciar nas escolhas feitas em sala de aula.

Pensando na formação docente, é importante refletir sobre como a trajetória acadêmica do professor generalista pode ser muito diferente da do especialista. Especialmente em matemática essas diferenças podem influenciar nas escolhas entre Língua Materna e Matemática, mas também nas que envolvem técnica e significado. Nesse sentido, Nacarato et al (2009) aborda a questão da formação de professoras generalistas e diz que é comum que elas não tenham uma formação que dê conta das atuais necessidades da sociedade e que quando isso acontece, é mais focado na metodologia de ensino da matemática.

Assim, podemos questionar se a partir dessa formação, os docentes se sentirão capazes de usar mais a Matemática em detrimento à Língua Materna e também mais o significado em detrimento à técnica. É possível considerar que não, já que o pouco contato com o assunto em sua formação pode gerar certa insegurança tanto no uso de termos específicos como nas explicações mais conceituais e com significado. Por outro lado, o professor especialista tem sua formação concentrada na Matemática, o que pode permitir que ele tenha um vocabulário mais amplo e com maior conhecimento da área, poderá se sentir mais preparado para trabalhar com o significado do que ensina.

A partir da comparação entre as aulas da professora B e C, descrita no episódio 3, pudemos *analisar* se existem diferenças no ensino das principais ideias de fração no sexto ano, quando comparado com o quinto ano. Com base nessa situação, refletimos que sim, podem existir diferenças entre o ensino de um mesmo conteúdo de frações, nesse caso, no ensino de adição e subtração de frações com denominadores diferentes. Isso porque, tivemos, na turma de quinto ano, uma aula mais voltada para a técnica de como resolver esse tipo de operação matemática, enquanto, na aula do sexto ano, os cálculos eram feitos usando como base as frações equivalentes, o que ajudava os alunos a entenderem o mecanismo e a regra utilizada para resolver as contas.

Também podemos entender essa situação como um exemplo de como a técnica e o significado podem ser utilizados em momentos diferentes e até mesmo simultâneos como forma de abordar um mesmo conteúdo em diferentes anos escolares, mas com um grau de aprofundamento diferente. Segundo o nosso entendimento, foi isso o que aconteceu nessa situação, o tema de adição e subtração com denominadores diferentes foi abordado com os alunos no quinto ano dando ênfase a técnica e no sexto ano foi trabalhado priorizando o significado, mas utilizando também a técnica.

De um modo geral, este trabalho buscou estudar o uso da linguagem matemática e da linguagem coloquial pelos professores para ensinar frações durante o quinto e o sexto ano do Ensino Fundamental. A partir do que produzimos de dados, em nossos episódios buscamos *identificar* e *analisar* a linguagem e o vocabulário utilizados pelos professores do quinto e do sexto ano, nas aulas de matemática, mais especificamente no ensino de frações e o que eles pensavam sobre isso, usando como ótica para olhar para esses dados a Língua Materna, para a linguagem mais coloquial e a Matemática, para os termos e simbolismos mais próximos dessa área do conhecimento.

A partir, principalmente, das entrevistas, pudemos refletir *analisar* como o professor escolhe a linguagem e o vocabulário que irá utilizar com os alunos durante as aulas de matemática e de que forma a formação e as experiências dos professores poderia influenciar nessa decisão. Retomamos as diferenças entre as formações do professor generalista, muitas vezes pedagogo, e do especialista, neste caso licenciado em Matemática, e ouvimos de mais de um professor de quinto ano que eles sentiram falta de uma formação mais aprofundada na área de matemática durante sua formação em pedagogia. Vimos também que a experiência e a busca por conhecimento podem trazer aos professores mais opções de ferramentas para usar em sala de aula.

Ao longo dos episódios expostos neste trabalho, também conseguimos *analisar* se existem diferenças no ensino das principais ideias de fração no sexto ano, quando comparado com o quinto ano. Claro que não podemos fazer uma generalização, porque nossas observações foram em apenas duas escolas, mas podemos perceber que existe, sim, um aprofundamento no estudo desse tema matemático, o que pode ser considerado positivo, desde que os alunos consigam compreender bem o conteúdo tanto sob o ponto de vista da técnica como do significado.

Por fim, tivemos, ao longo de nossa análise, mais de uma situação em que conseguimos *perceber* de que maneira a mudança na linguagem e no vocabulário utilizado pelo professor refletiu na relação entre docente e discentes, no interesse dos alunos pelas aulas de matemática e no entendimento de determinados conceitos de frações. Ou seja, a forma como o professor expressou suas ideias aos alunos pode ter provocado dúvidas ou, então, situações em que a turma não compreendeu o que o docente disse.

Assim, refletimos que a linguagem e o diálogo em sala de aula possuem um papel significativo na dinâmica de ensino e de aprendizagem, especialmente com o tema de frações, que, como já dissemos, é considerado por muitos um “bicho de sete cabeças”. Nessas situações em que a compreensão dos alunos pode ser afetada, uma boa alternativa pode ser utilizar os três elementos do diálogo, escuta ativa, estranhamento e descentramento, para, então, recorrer a Língua Materna como ferramenta para explicar melhor, seja uma ideia, uma sistematização ou até mesmo a resolução de um exercício.

Desse modo, entendemos que conseguimos, de certa maneira, compreender como os professores usam a linguagem para ensinar frações no quinto e no sexto ano do Ensino

Fundamental. Refletimos que, apesar do que imaginávamos incialmente, as diferenças entre as aulas de frações desses dois anos escolares foram sutis, pelo menos nas aulas que conseguimos observar. Percebemos também que a forma como o professor se expressa, a linguagem, os desenhos e os materiais concretos que ele usa e o diálogo que ele estabelece com seus alunos são fatores importantes para o ensino em Matemática e que, por isso, devem ser considerados com a devida atenção pelos professores, especialmente na transição estudada neste trabalho. Isso porque, como já vimos, esse é um momento delicado e repleto de mudanças na vida dos alunos, por isso estabelecer uma boa comunicação com os alunos pode ser uma parte fundamental no trabalho dos professores que lidam com esse momento de mudanças.

Além disso, ao longo do desenvolvimento deste trabalho pudemos perceber que estudar sobre temas tão corriqueiros na vida de um professor especialista em matemática, como as frações e a transição do quinto para o sexto ano, me deram a oportunidade de refletir sobre minhas concepções e minha prática. Assim, entendo que a professora que decidiu realizar essa pesquisa em 2019, com certeza não é mais a mesma que finaliza este texto agora em 2022.

Dentre os diversos aprendizados deste trabalho, gostaria de destacar a riqueza do tema de frações, repleto de minuciosidades e de particularidades que só pude perceber após o longo do estudo sobre o tema, que deu origem a um dos capítulos deste trabalho. Além dos estudos teóricos, analisar aulas sobre esse tema, especialmente sobre adição e subtração de frações, um tema que na prática vejo que muitos alunos têm dificuldades, me fez refletir sobre a minha forma de ensinar o assunto. Depois desta pesquisa, me sinto muito mais preparada para essas aulas e espero que este texto tenha convidado o leitor a mesma reflexão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALONSO, A. **Métodos qualitativos de pesquisa:** uma introdução. In: Abdal, A. et al. Métodos de pesquisa em Ciências Sociais: Bloco Qualitativo. São Paulo: Sesc/Cebrap, 2016.

ALVES-MAZZOTTI, A.J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas ciências naturais e sociais:** pesquisa quantitativa e qualitativa. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 2004.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **LDB - Lei nº 9394/96**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CARVALHO, I. R. C. **Afetividade, crescimento, linguagem e currículo:** aspectos da transição do quinto para o sexto ano do ensino fundamental. 2018. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática). Universidade de São Paulo. USP.

DRUCK, I. F. **Frações:** uma análise de dificuldades conceituais. São Paulo: Departamento de Matemática/IME/USP, 2005

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Miniaurélio:** o minidicionário da língua portuguesa. 7ª ed. Curitiba: Ed. Positivo; 2008. 896 p. ISBN 978-85-7472-959-6.

FREIRE, P**. Professora sim, tia não:** cartas a quem ousa ensinar. São Paulo: Olho d’Água, 1997.

GÓMEZ-GRANELL, Carmen. A Aquisição da Linguagem Matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKI, A. & TOLCHINSKI, L. (Orgs.). **Além da Alfabetização:** a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. Tradução Stela Oliveira. São Paulo: Editora Ática, pp.257-282, 2003.

MACHADO, C. T. O.; MENEZES, J. E. **Concepções de professores que ensinam matemática sobre números fracionários, suas experiências e as implicações em suas práticas na 5ª série do ensino fundamental.** Educação Matemática em Revista, n. 25, p. 5-21, 30 dez. 2008.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Língua Materna**: análise de uma impregnação mútua. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MILANI, Raquel. **“Sim, Eu Ouvi o que Eles Disseram”:** o Diálogo como Movimento de Ir até Onde o Outro Está. *Bolema*, Abr 2017, vol.31, no.57, p.35-52. ISSN 0103-636. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n57/0103-636X-bolema-31-57-0035.pdf > Acesso em: 28/07/2019.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental:** tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

NUNES, T. Criança pode aprender frações. E gosta! In: GROSSI, E. P. (Org.). **Por que ainda há quem não aprende? A teoria**. Petrópolis: Vozes, 2003. p. 119-136.

PASSOS, C. L. B.; NACARATO, A. M. Trajetória e perspectivas para o ensino de Matemática nos anos iniciais. **Estudos Avançados**, *[S. l.]*, v. 32, n. 94, p. 119-135, 2018. DOI: 10.1590/s0103-40142018.3294.0010. Disponível em: https://www.revistas.usp.br/eav/article/view/152683. Acesso em: 14 jan. 2022.

RIBEIRO, M.S. N.; DIAS, M. A.; FIGUEIREDO, H. R. S. **Noção de função quadrática na transição entre a educação básica e o ensino superior.** *Revista Eletrônica de Educação Matemática -REVEMAT,* Florianópolis, v. 15, p. 01-23, 2020. Universidade Federal de Santa Catarina. ISSN 1981-1322

ROSA, J. G. **Grande sertão:** veredas. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.

SANTOS, V. de M. Ensinar e aprender Matemática no Ensino Fundamental In: SANTOS, V. de M. **Ensino de Matemática na Escola de Nove Anos:** dúvidas, dívidas e desafios. São Paulo: Cengage Learning, 2015, cap. 4, p. 43-56.

SEABRA, R. P. **Sobre a linguagem dos professores nas aulas de Matemática:** práticas de uma professora do sexto ano de uma escola pública. Belo Horizonte, 2017.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. São Paulo, 2005.

WHO Director-General's opening remarks at the media briefing on COVID-19 - 11 March 2020 **World Health Organization**, 11 de março de 2020. Disponível em: <https://www.who.int/director-general/speeches/detail/who-director-general-s-opening-remarks-at-the-media-briefing-on-covid-19---11-march-2020 >Acesso em 25/11/2021 às 20:00

APÊNDICE

APÊNDICE A – Roteiro de entrevista

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Concordo em participar, como voluntário/a, da pesquisa intitulada " A linguagem no ensino de frações durante a transição escolar do quinto para o sexto ano do Ensino Fundamental", que tem como pesquisadora responsável Isabela Ruiz Cavalcanti de Carvalho, estudante da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, orientada por Prof.ª Dr.ª Raquel Milani, as quais podem ser contatadas pelo e-mail isabelaruizcc@gmail.com. O presente trabalho tem por objetivo principal compreender como os professores do quinto e do sexto ano do Ensino Fundamental utilizam a linguagem e os simbolismos próprios da matemática e uma linguagem mais próxima ao cotidiano dos alunos durante o ensino de frações. Compreendo que esse estudo possui finalidade de pesquisa, e que os dados obtidos serão divulgados seguindo as diretrizes éticas da pesquisa, assegurando, assim, minha privacidade. Sei que posso retirar meu consentimento quando eu quiser, e que não receberei nenhum pagamento por essa participação.

São Paulo, agosto de 2020.

____

ROTEIRO DE ENTREVISTA (SEMIESTRUTURADA)

1. Qual a sua formação?
2. Em qual ou quais anos você leciona?
3. Há quanto tempo você dá aulas para turmas de quinto ou de sexto ano?
4. Qual a sua relação com a Matemática?
5. Você sente alguma dificuldade para ensinar Matemática? Se sim, qual é?
6. Você acredita que a Matemática possui um vocabulário específico? Se sim, como é esse vocabulário?
7. Como você aprendeu frações quando estava na escola?

8. O que é fração para você?

Geralmente os sentidos atribuídos a fração são: relação parte/todo; resultado de uma divisão; medidas; razão; operador. *(Os sentidos serão apresentados em um papel, de tamanho grande para que fique bem claro e visível).*

9. Qual deles você aborda mais nas suas aulas?

10. Qual deles você acha que não aborda?

11. Tem algum outro sentido que você aborda e não está aqui listado?

12. O que você leva em consideração quando vai ensinar frações?

13. Você sente alguma dificuldade para ensinar frações? Se sim, qual?

14. Como você como você inicia o estudo de frações com seus alunos de quinto/sexto ano? *(Depende do ano que o professor dá aula)*

15. O que um aluno de quinto ano deve saber sobre frações para conseguir acompanhar o conteúdo de frações no sexto ano?

16. Quais os termos ou palavras que você mais utiliza quando ensina frações?

17. Você percebe quando há alunos que não compreendem frações?

18. Como você percebe isso?

19. O que você tenta fazer para reverter essa situação?

20. O que você mudaria nas suas aulas de frações se fosse ensinar esse conteúdo para uma turma de sexto ano? *(Pergunta exclusiva para professores do quinto ano)*

21. O que você mudaria nas suas aulas de frações se fosse ensinar esse conteúdo para uma turma de quinto ano? *(Pergunta exclusiva para professores do sexto ano)*

Agradecemos a participação.