$L(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n, t)$ independe explicitamente de *t*, então podemos escrever:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

Substituindo o termo $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ por $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ (equações de Lagrange), temos:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

que é igual a: $\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0$

Segue-se disso que o termo: $E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$

é um invariante (permanece constante) do sistema (fechado). Esse termo é denominado *energia*.

Uma outra derivação desse resultado pode ser encontrada em Nussenzveig (1981, pp. 391-395), que considera um sistema de N partículas ao qual podemos associar uma energia potencial U que, a princípio, pode depender da posição das partículas e do tempo: $U = U(\vec{r}_1; \vec{r}_2; ...; \vec{r}_n; t)$

Para um deslocamento infinitesimal das partículas, o autor calcula a variação da energia potencial do sistema, chegando à expressão:

$$\Delta U = U(\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_1; ...; \vec{r}_n + \Delta\vec{r}_n; t + \Delta t) - U(\vec{r}_1; ...; \vec{r}_n; t) = -\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i + \frac{\partial U}{\partial t} \cdot \Delta t$$

Consideremos que a energia potencial não dependa explicitamente do tempo (não há forças externas dependentes do tempo atuando sobre o sistema). Nesse caso, o sistema será simétrico para uma translação temporal, ou seja, a experiência pode ser repetida em outro horário com as mesmas condições iniciais (uniformidade temporal). Com isso, o último termo da expressão acima anula-se, e podemos escrever:

$$\frac{dU}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta U}{\Delta t} \right) = -\lim_{\Delta t \to 0}\left[\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t} \right] = -\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

Mas $\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{d}{dt} T_i$, onde T_i é a energia cinética da partícula *i*. Segue que:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} T_i = -\frac{d}{dt} T \Rightarrow \frac{d}{dt}(T + U) = \frac{dE}{dt} = 0$$

o que representa a conservação da energia total E, obtida como conseqüência da uniformidade temporal.