UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

A MELODIA DAS RAZÕES E PROPORÇÕES:

A MÚSICA SOB O OLHAR INTERDISCIPLINAR DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Fernando Moreira Barnabé

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de **Mestre em Educação**, na área temática Ensino de Ciências e Matemática, sob a orientação do **Prof. Dr. Oscar João Abdounur**

São Paulo

2011

RESUMO

BARNABÉ, Fernando Moreira. **A Melodia das Razões e Proporções:** a Música sob o olhar interdisciplinar do professor de Matemática. 2011. 68 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

O ensino de Matemática durante anos sofreu e ainda sofre com a abstração a que foi submetida a Matemática escolar, ocasionando muitas vezes o distanciamento da disciplina por parte dos estudantes. Em busca de novas abordagens para o trabalho com conteúdos matemáticos, a Música surge como um elemento facilitador neste processo, por meio de um trabalho interdisciplinar, podendo ser explorada sob diferentes aspectos, sejam eles rítmicos ou melódicos. Pensando sobre as relações matemáticas presentes na construção melódica da música ocidental, o estudo dos conceitos de razão e proporção se torna peça fundamental para a compreensão das mudanças ocorridas durante a história da música e a diferenciação de alguns termos matemáticos, como razão, proporção, quociente, fração e números decimais. Com a promulgação da Lei Federal nº 11.769/08 que determina a obrigatoriedade do ensino de música nas escolas brasileiras de educação básica, a discussão sobre as relações músico-matemáticas intensificam-se e abrem caminho para uma abordagem interdisciplinar relacionando a Educação Matemática e a Educação Musical, trabalhando conteúdos de ambas as áreas, porém sob o olhar do professor de Matemática. Para a construção do conhecimento seguindo esta abordagem, o presente trabalho propõe uma prática interdisciplinar por meio de oficinas, intensificando e explorando o processo de investigação e pesquisa, além de promover a autonomia e o senso crítico dos alunos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Educação Musical. Razão. Proporção. Pitágoras. Interdisciplinaridade. Prática Interdisciplinar.

ABSTRACT

BARNABÉ, Fernando Moreira. **The Melody of Ratios and Proportions**: Music under the interdisciplinary teacher of Mathematics views. 2011. 68 f. Dissertation (Master's degree) – Faculty of Education, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

The teaching of mathematics for years have suffered and still suffers from the abstraction that was submitted to school mathematics, often causing the detachment of discipline on the part of students. In search of new approaches to work with mathematical content, music emerges as a facilitator in this process, using an interdisciplinary work, which can be exploited in different ways, whether rhythmic or melodic. Thinking about the mathematical relationships present in the melodic construction of Western music, the study of the concepts of ratio and proportion becomes central to understanding the changes that occurred during the music history and contrast of some mathematical terms such as ratio, proportion, quotient, fraction and decimal numbers. With the enactment of Federal Law No. 11.769/08 that determines the requirement for teaching music in Brazilian schools of basic education, the discussion of the musical-mathematical relationships intensify and open a way for an interdisciplinary approach linking Mathematics Education and Music Education , working in both content areas, but under the professor of mathematics views. For the construction of knowledge by following this approach, this paper proposes an interdisciplinary practice using workshops, exploring and enhancing the process of investigation and research, and promote the autonomy and critical thinking of students.

Keywords: Mathematics Education. Music Education. Ratio. Proportion. Pythagoras. Interdisciplinarity. Interdisciplinary Parctice.

Sumário

Agradecimentos

Depois de muito esforço e trabalho eis aqui o resultado de toda esta luta. Vale lembrar que esta luta não foi solitária, muitos colaboraram com esta produção de diferentes maneiras, mas sempre agregando e enriquecendo cada linha, cada ideia, cada sentimento e pensamento que em minha mente surgia, posteriormente sendo transformado em palavras e digitadas sempre ao som de músicas das mais variadas origens e estilos.

Ao meu orientador Oscar João, o agradecimento pela paciência e atenção, pois mesmo estando muito distante em vários momentos (distancias interestaduais e até internacionais), fez com que nossas ideias se aproximassem cada vez mais para a elaboração deste trabalho. Sou grato também às professoras Leny e Maria do Carmo, as quais me ensinaram muito, tanto durante a graduação quanto nas disciplinas da pós-graduação, fosse por indicação de leituras relacionadas à minha pesquisa, incitação de reflexões sobre temas e situações variadas ou simplesmente em um bate-papo informal.

Meu suporte acadêmico foi muito grande e contou em sua reta final com uma contribuição intensa dos amigos do Grupo EMFoco, os quais me abriram as portas quando cheguei à Salvador e me acolheram no momento em que eu mais precisava. Sem a contribuição de vocês e essa vontade constante de mudar a Educação Matemática na Bahia e no Brasil eu já teria desistido. Obrigado companheiros.

Agradeço aos amigos de longa data que sempre estiveram comigo de coração e mente, diminuindo distâncias a todo instante: Léo, Eliana, Marina (Chu), Helen, Renan, Charline, Anderson, Lari e Mau (Bom). À Sandra Chiga pelos elogios e palavras confortantes quando pensei em largar tudo isso (mesmo você não sabendo disso quando o fez). À Clezeni e sua boa energia de sempre.

Lembrando sempre dos amigos que me acompanharam com mais intensidade nessa fase de escrita e produção, mantendo-me sempre com um pé no mundo paulista, mesmo que por um simples final de semana: Jenni e sua conexão inexplicável (topa um sorvete?); Jé e seu bom humor de sempre (vai uma melancia aí?); Rafão e Marian, um casal como poucos, morando fortemente em meu coração.

Meus parceiros musicais sempre preencheram com muito axé minha vida e também merecem uma *nota* nestes agradecimentos: Juliana Serzedello movimentando a música com coração e alma, mulher de fibra e serenidade, me fazendo *ser*; Fred *Ganso Véio* com suas tiradas hilárias, solos infindáveis e companheirismo ímpar; meu querido Dú Berton cantando e encantando, me ensinando muitos caminhos pela música e pela vida; Mau *Gatão* e suas imitações em meio à gravações e shows com este irmão que vos escreve; André Caliman palhetando e batucando muito; Thiagão Maciel e sua batera "atrai polícia", percorrendo sete cidades e fazendo a música acontecer; Andrei e Lis, é só juntar que dá samba, rock e muito som; Ananda, com quem realizei diálogos únicos entre cello e violão; e meu querido Adriano Axel, o *Tonho*, que batucou, compôs e clarineteou muitas canções com este Barnabé aqui (continuarei acreditando, Tonico!).

Agradeço aos meus amigos-irmãos com quem eu vivi momentos únicos e que me fizeram acreditar que eu posso sim fazer a diferença: Amanda Souza, produzindo a música dos anjos e santos, sempre ao meu lado, com todo o carinho e besterol que só uma verdadeira irmã é capaz de nos dar; Vinny Muniz, o melhor irmão que a vida poderia ter me dado na Bahia (você é fantástico, nêgo!); Jujuba, com quem eu aprendi a conviver e nunca irei cansar de puxar sua orelha e te pentelhar (filha da...); a minha queridíssima Sabrina Amirati, que a vida me deu a oportunidade de *achar*. Amo vocês!

Aproveito e faço aqui um agradecimento ao Universo que conspirou e me colocou em contato com uma das pessoas mais iluminadas que já conheci, tanto musicalmente quanto socialmente. Roberto Mendes, é só ouvi-lo tocar ou falar durante uma simples conversa e eu preciso de um “HD externo” para armazenar tudo que aprendo. Obrigado e muito axé.

Tenho três pessoas que merecem um salve especial, dois no andar de cima e uma aqui mesmo. Alberto Barnabé, obrigado por ter deixado a música entrar em sua vida (consequentemente, na nossa) e enchido minha lembrança com um momento que não esqueço nunca (mesmo tendo acontecido uma só vez): seus netos dançando enquanto você tocava a velha sanfoninha. Obrigado, Vô! Um beijo na Vó Clarinda que eu sei que está ao seu lado e também ensinou muito nas bandas de cá.

Iracema, seu carinho e sua ternura, seus doces e pratos deliciosos alimentaram em todos os sentidos a vida deste neto (eu sei que sou o mais querido, pode falar, ninguém vai saber...). Darei minha força sempre a você, não importa o que aconteça e nem onde eu esteja.

José Moreira, as palavras faltam e a emoção transborda ao lembrar de tudo o que aprendi contigo. Obrigado por ter me dado a oportunidade de ser seu neto e ter aproveitado *muito* tudo isso. Saudades sempre.

Para ter a serenidade e confiança no desenvolvimento deste trabalho um fator foi decisivo: minha família, a Família Barnabé. Minhas irmãs Gabi e Dani que sempre me apoiaram nas decisões mais difíceis e com quem dividi e continuarei dividindo muitas alegrias, tristezas, frustrações, conquistas e realizações, valeu por tudo. Minha mãe, carinhosamente chamada por mim de *Dona Maria*, essa Ester mostrou-se parceira em todos os momentos tornando sempre mais curta a ligação Bahia–São Paulo, me tirando de todos os apuros e ajudando em tudo o que eu precisei *sempre*. Não teria escolhido mãe melhor no mundo! Ao meu pai, obrigado por encher minha vida de música desde que eu era pequenino e por nunca ter forçado para que eu aprende-se a tocar nada, deixando a vontade e a musicalidade nascerem em mim naturalmente. Você sempre foi meu maior exemplo e sempre será. Amo vocês quatro incondicionalmente.

A vida da gente é engraçada e dá muitas voltas. Depois de voltas e mais voltas me colocou novamente no caminho dessa mulher incrível e que tem feito tudo que a gente quer quando precisa se sentir seguro: puxões de orelha, companheirismo, cumplicidade e carinho. Meu amor por você não cessa, Mari. Obrigado por me fazer uma pessoa mais feliz a cada loucura juntos.

Muitas vezes este é um momento onde esquecemos muitos nomes, mas aos que são lembrados, tenham a certeza de que vocês fizeram a diferença. Nada aqui produzido seria possível sem a colaboração de todos. Vocês criaram este jeito Barnabé de ser, agora agüentem!

Introdução

A primeira impressão no aprender matemático tem uma influência predominante sobre o pensamento do aluno quanto ao estudo de certos assuntos usuais ou não, os quais guiarão seus passos pelo saber matemático durante toda sua vida acadêmica. O mesmo acontece com a música, tanto quanto às oportunidades de estudá-la como a maneira que o ensino da mesma se dá. Cada vez mais professores comprometidos com a verdadeira formação buscam novas abordagens para encantar e conquistar seus alunos, para que estes não sejam apenas simples máquinas de calcular, de dividir compassos corretamente, decorando melodias, escalas musicais e fórmulas, ou ainda, máquinas prontas para serem aprovadas no vestibular.

O estudo da relação entre música e matemática não é recente, mas a busca por um trabalho efetivo entre Educação Matemática e Educação Musical, ainda o é. Sendo assim, através desta relação tão saudável, interessante e, ao mesmo tempo, inusitada para os estudantes que este trabalho busca um novo caminho para introduzir o ensino de razões e proporções nas séries iniciais do Ensino Fundamental II, explorando a interdisciplinaridade entre Matemática e Música, deixando tal conteúdo mais significativo e compreensível aos alunos.

No estudo da Música, seja ele aprofundado ou superficial, as relações com a Matemática foram descobertas há muito tempo e são ferramentas muito úteis em sala de aula. Iniciaremos a discussão retomando a origem da Música Ocidental, quando Pitágoras de Samos (585 a.C. a 500 a.C.), grande filósofo e matemático em sua época, observou relações matemáticas entre os intervalos musicais produzidos por notas emitidas por porções diferentes de cordas vibrantes. Tais relações foram estabelecidas através de um instrumento denominado *monocórdio*, constituído por uma corda fixa nas extremidades por dois cavaletes, contendo um terceiro cavalete móvel, que poderia ser colocado em qualquer parte da corda, alterando a porção vibrante. Os princípios básicos deste instrumento podem ser encontrados nos mais diversos instrumentos musicais de corda, como é o caso do violão, do bandolim, do banjo etc – salvo algumas considerações referentes a descobertas musicais realizadas posteriormente a época de Pitágoras, principalmente, a partir do século XVI. Através dos chamados trastes, ou somente pelos próprios dedos do músico, as cordas são pressionadas junto ao braço do instrumento ficam divididas em diferentes porções vibrantes, as quais serão dedilhadas ou friccionadas.

Ao estudar diferentes frações da corda vibrando, o estudioso da cidade de Samos notou que algumas delas possuíam relações musicais muito agradáveis aos ouvidos, chegando até a encontrar a mesma nota emitida em uma frequência mais aguda do que a encontrada anteriormente (lembrando que a ideia de frequência não faz parte desse período histórico, visto que sua definição surgiu muito tempo depois). É claro que a música atual sofreu transformações consideráveis por toda sua história com todo o desenvolvimento matemático, mas sua essência é alvo de estudos consideráveis. Todas estas relações básicas entre Matemática e Música, estão especificadas em diversos livros de teoria musical, sejam eles voltados para o ensino de instrumentos específicos, teoria rítmica, teoria melódica ou teoria geral da música. Não podemos esquecer das relações rítmicas, onde a contagem de tempos e pulsação de determinada música revela intervalos e frações de tempo interessantíssimas, desde o estudo dos símbolos de tempo (mínima, semínima, colcheia, semicolcheia, etc.) até marcações em músicas de ciranda e cantigas de roda tão conhecidas em nossa sociedade e que precisam ser conservadas.

Ainda assim, é importante que se compreenda a diferença entre alguns termos matemáticos até muito comuns, mas que geram uma grande confusão quando são definidos. A construção destes conceitos, por muitas vezes, é feita de maneira deturpada, modificando o sentido das palavras, esquecendo-se da origem de cada termo. *Razão, fração, números decimais* e *quociente* são termos que merecem um cuidado especial, visando uma melhor compreensão de conteúdos matemáticos abordados no processo de ensino, desenvolvendo no educando um senso crítico acerca da construção de novos conceitos. O uso banalizado de tais conceitos, sem o devido cuidado com o significado de cada palavra, cria oportunidades para que os educandos façam relações errôneas entre alguns destes termos, ou até mesmo deixem de perceber relações existentes, o que este trabalho também busca esclarecer.

O aprendizado diferenciado de cada aluno é um dos fatores que torna tão desafiador o ambiente da sala de aula, e é exatamente isso que estimula esta outra visão no início do ensino de razões e proporções. Neste momento, a escola básica é a primeira vez que o aluno tem a experiência de representar algumas relações através de símbolos matemáticos padronizados. Afinal, durante a Educação Infantil e o início do Ensino Fundamental I a ideia de fração já faz parte do cotidiano dos alunos, mas não sua representação com numerador e denominador e operações entre elas, o que geralmente acontece no final do Ensino Fundamental I. As definições de fração, razão e proporção confundem-se, muitas das vezes por conta da explanação do professor e do material que não souberam diferenciá-los quando os temas foram apresentados.

Em todas as épocas do ensino de Matemática, seja no Ensino Fundamental, Médio ou Superior, observamos constantemente alunos com grande dificuldade nas relações entre frações, nas operações básicas que realizamos entre elas, nas relações entre frações e números inteiros, na diferenciação entre razão e fração, no desenvolvimento e resolução de situações problemas que envolvam tais conteúdos, ou até mesmo em uma simples divisão. Através de oficinas, cursos, palestras, especializações, videoconferências ou workshops, muitas instituições e grupos de pesquisa estudam em busca de novas informações, algo que vá além dos cursos de licenciatura em Matemática, visando suprir a necessidade de novas e diversificadas ferramentas e abordagens em sala de aula. O Centro de Aperfeiçoamento de Ensino da Matemática da Universidade de São Paulo, intitulado CAEM (IME-USP), assim como o Grupo EMFoco de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (Salvador-BA), são exemplos da busca incessante por maneiras de propiciar ao professor uma segurança dentro da sala de aula em relação às possibilidades de abordagem de diversos conteúdos. Afinal, a repetição incansável proposta por alguns métodos é questionada por muitos estudiosos, não gerando uma compreensão dos temas, mas sim uma pura e factível mecanização do processo por parte dos alunos.

Sabemos que existem algumas maneiras de introduzir ou abordar o conteúdo de *Razões e Proporções* no Ensino Fundamental II, muitas delas serão enunciadas no decorrer deste trabalho através de uma breve análise de livros didáticos e paradidáticos relacionados ao tema e à faixa etária correspondente, fazendo até mesmo uma sucinta viagem ao mundo da Literatura Infantil, citando a obra *"Aritmética da Emília"*, de Monteiro Lobato. Além disso, abordar tal conteúdo como propõe este texto passa a ter maior importância tendo em vista o cenário escolar atual onde, de acordo com a Lei 11.769, as aulas de Música foram incluídas na grade curricular em todo o país (mesmo que dentro da disciplina de Arte). Portanto, este contexto histórico musical proporcionado por Pitágoras dá margem ao trabalho em questão nas salas de aula da atualidade.

As relações existentes entre Matemática e Música são notórias e merecem um olhar diferenciado sob a perspectiva da *interdisciplinaridade*, campo da Educação muito discutido nos PCN e nas universidades em geral. Este conceito será tratado neste trabalho com base nos principais estudos sobre o tema, visando o entendimento de que interdisciplinaridade "[...] é uma relação de reciprocidade, de mutualidade, que pressupõe uma atitude diferente a ser assumida frente ao problema do conhecimento, ou seja, é a substituição de uma concepção fragmentária para unitária do ser humano" (FAZENDA, 1997, p.9).

A proposta deste trabalho é fazer uso das relações encontradas por Pitágoras para introduzir ou abordar de maneira diferente do dito convencional o conteúdo de *Razões e Proporções* estudado no Ensino Fundamental II, evitando o chamado *senso comum*. A fração vibrante da corda em um monocórdio, que é um instrumento de fácil construção, é de grande valia para esta primeira impressão ou um segundo ponto de vista sobre o conteúdo, onde são observadas também as representações fracionárias das razões entre as partes vibrantes das cordas. Os conceitos podem ser apresentados através de oficinas sobre o tema, ou ainda fazendo uso das próprias aulas de Matemática quando de acordo com a série correspondente na Educação Básica.

Para que isso fosse possível desenvolvemos um estudo sobre algumas fontes bibliográficas referentes à Educação Matemática, pesquisando também os campos da História da Música, da História da Matemática, da Educação Musical, da Educação Matemática, além da relação específica entre Matemática e Música voltados para o ensino, como os registros de Abdounur (2003)[1], apresentando não só relações musico-matemáticas, mas também implicações educacionais de grande valor.

Em um cenário totalmente novo, criativo e até mesmo inusitado para muitos alunos e professores, a Matemática surge através das notas musicais produzidas pelo primitivo instrumento pitagórico, fazendo com que a relação entre Matemática e Música seja um grande passo para o desenvolvimento dos alunos, não só em relação ao conteúdo específico, mas

---

[1] ABDOUNUR, Oscar João. "Matemática e Música: o pensamento analógico na construção de significados". – 3. Ed. – São Paulo: Escrituras Editora, 2003.

também para a observação e constatação de um mundo totalmente interdisciplinar e relacionado, facilitando também a compreensão futura de outras áreas do conhecimento como a Física e a própria Música, caso o aluno pretenda estudá-la com mais propriedade e aprofundamento no futuro.

Capítulo 1 - Motivação músico-matemática

1.1. Minha trajetória

Cercado desde muito cedo por um ambiente musical muito rico, em que meu pai tocava violão e contava histórias sobre a música, sobre os grandes intérpretes e compositores, falava dos diferentes estilos e instrumentos musicais que existiam, fui percebendo que tudo aquilo já fazia parte de mim, do que eu gosto, do que eu escuto, do que eu canto e toco, em suma, do que eu sou. Cresci ouvindo música dos mais variados estilos, sempre sonhando em cantar ou tocar algum instrumento. Aprendi violão com algumas dicas de meu pai e meus estudos solitários, debruçado sobre diferentes métodos e revistas com músicas populares. A partir dos 15 anos de idade, comecei a cantar e a tocar em bandas, tomei aulas de canto popular e lírico, cantei em coros, toquei em bares, estudei um pouco de piano, enfim, fiz com que a música participasse ativamente de minha vida.

Com o falecimento de meu avô paterno, meu pai e eu ficamos com seu acordeão, instrumento com o qual cheguei a tomar poucas aulas particulares, mas o qual gostava de tocar em casa, chegando até a misturá-lo em algumas músicas na banda de pop rock da qual eu fazia parte na época. Divertia-me nas reuniões de família e amigos tocando contrabaixo, teclado, gaita e cavaquinho.

Durante este processo, ingressei no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade de São Paulo, o que me possibilitou, logo no início a trabalhar com o ensino de Matemática em aulas particulares e cursos pré-vestibulares, posteriormente também em colégios, alimentando cada vez mais a vontade de ensinar, lutando contra as barreiras e obstáculos que o ensino de Matemática encontra na educação brasileira, mas sem abandonar a música. Sempre em contato com a prática do canto, lecionei violão e canto para iniciantes, além de trabalhar como professor de música em uma escola de Educação Infantil.

Em meu curso de graduação tive a oportunidade de, em alguns momentos, obter breves encontros com as relações entre Música e Matemática, fossem eles por meio de vídeos, de livros, de seminários ou de conversas com professores e colegas de ambas as profissões – músico e educador matemático. Ao final da graduação, tive a oportunidade de fazer parte do coro da Catedral Metropolitana Ortodoxa de São Paulo, onde pude conhecer grandes peças, grandes cantores e vivenciar bem de perto algumas diferenças entre a Música Ocidental e a Música Oriental. O *canto coral* me abriu as portas para uma nova perspectiva dentro da música que me fascinou, tanto pelos estudos que realizei sobre arranjos, notas, escalas e vozes, quanto pelo contato com diferentes realidades musicais.

Iniciando o projeto de pesquisa para o curso de mestrado voltado para educação matemática, coloquei como objetivo pesquisar os benefícios para a sala de aula oriundos do estudo de ambas as áreas de conhecimento: Matemática e Música. Já com certa experiência lecionando, pude notar grande dificuldade por parte dos alunos em compreender a diferenciação entre alguns conceitos matemáticos que *a priori* eram relativamente próximos (no caso fração, razão e proporção), e a compreensão do real conceito de razão. Praticamente num mesmo período, em meus estudos pessoais sobre música, me deparei com uma grande dificuldade em entender a real necessidade do *temperamento* na música ocidental.

Integrando duas áreas de interesse que apresentavam naquele momento duas grandes dificuldades pessoais, a de desenvolver alguns conteúdos como educador matemático e a de compreender um conceito musical, observa-se que o trabalho interdisciplinar é ideal para o desenvolvimento desta pesquisa.

Capítulo 2 - As razões e proporções na Música de Pitágoras

2.1. A Matemática na Grécia Antiga

Muitos sabem que a Grécia Antiga, sobretudo no primeiro milênio antes de Cristo, foi o berço de muitas das produções intelectuais e científicas, sejam elas exclusivamente européias ou do mundo ocidental como um todo. Os pensadores gregos deixaram para a humanidade celebres obras que influenciaram gerações e gerações no mundo todo, com teorias e conceitos registrados e organizados, que passavam de discípulos para discípulos. Segundo Eves (2004, p. 90):

> Sem dúvida nenhuma, os maiores cientistas do mundo antigo vieram da pequena Grécia, uma região de cidades-Estado encarapitadas por sobre uma miscelânea de ilhas rochosas e penínsulas no extremo leste do mar Mediterrâneo, bem nos limites da civilização do Oriente Médio.

A pesar de formada por diferentes povos, unindo diversas culturas, crenças e etnias, gerando até mesmo algumas guerras entre tais grupos, as produções culturais e intelectuais nesta região eram exuberantes perante as demais civilizações ocidentais da época. Neste cenário nasceram muitas idéias discutidas durante toda a história mundial subsequente, inclusive atualmente. Não há muita certeza sobre datas ou fatos, pois os registros realizados são muito posteriores às supostas descobertas, podendo inclusive ter sofrido alterações dos copistas e tradutores por estes mais de dois mil anos de história. No entanto, pensando na fundamentação da sociedade ocidental, temos definições atribuídas a nomes que se tornaram fortes historicamente, como os dos filósofos Sócrates (469-399 a.C.) e Platão (427-347 a.C.), do cientista Aristóteles (445-385 a.C.), dos dramaturgos Sófocles (496-406 a.C.) e Aristófanes (445-385 a.C.), de Heródoto (484-424 a.C.) descrevendo as glórias dos gregos sobre seus invasores, Tucídides (460-400 a.C.) com seu relato sobre a luta entre Esparta e Atenas, além dos conhecimentos matemáticos deixados por Tales de Mileto (640-564 a.C.) e o famoso teorema que leva seu nome, e as contribuições de Pitágoras de Samos (585-500 a.C.). A Matemática tem um papel importante na antiguidade, além de grande destaque nos estudos do mundo grego deste tempo, visto que a origem da palavra "Matemática" tem raiz grega e significa "aprender", utilizada no sentido de "aquilo que é ensinado" (GARBI, 2010).

2.2. Pitágoras e os pitagóricos

Ao que tudo indica muitas foram as descobertas de Pitágoras, mas as certezas sobre elas e sobre seu suposto criador são poucas, principalmente pela mística e devoção por parte de seus seguidores. É possível até que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales, principalmente por morar próximo a Mileto. Após um período de viagens longas e incertas, provavelmente passando pelo Oriente Médio e Egito, Pitágoras retorna a Samos e, encontrando a cidade tomada por um tirano, decide instalar-se em Crotona, colônia grega localizada no sul da atual Itália. Ali ele fundou a *escola pitagórica*, uma das mais famosas escolas de todo o mundo antigo, dedicada a estudar filosofia, matemática e ciências naturais, além de criar uma irmandade com ritos e cerimônias secretas. Muitos foram os discípulos de Pitágoras nesta escola. Posteriormente, os prédios que abrigavam a escola foram destruídos pelo poder local temendo a força da *irmandade pitagórica*. Alguns relatos indicam que, mesmo dispersos, os pitagóricos continuaram a existir como irmandade pelo menos por mais dois séculos.

Entender a filosofia pitagórica nos faz entender muito das descobertas e estudos oriundos desta escola. Nesta época, o conhecimento grego era basicamente dividido em duas grandes áreas que receberam denominações em latim posteriormente, já na Idade Média: o *quadrivium*, do qual faziam parte a aritmética, a geometria a música e a astronomia; e o *trivium*, formado por gramática, lógica e retórica. Para os pitagóricos o *quadrivium* era a base necessária para o desenvolvimento de estudos e busca por novos conhecimentos. A discussão e o estudo de problemas matemáticos renderam bons frutos oriundos desta escola. Além disso, crê-se que foram os pitagóricos a enxergarem a Matemática como algo abstrato, ideal, pela primeira vez. Apesar de todo seu idealismo e abstração, a matemática poderia ser encontrada por toda a parte. Por conta disso e de muitas outras histórias recontadas através dos tempos, ficou registrado e internacionalmente conhecido como "Teorema de Pitágoras" o teorema sobre os triângulos retângulos[2], muito embora esse teorema já fosse conhecido pelos babilônios mais de um milênio antes (EVES, 2004).

Sobre as descobertas, experimentos e a filosofia pitagórica cabe o registro de uma pergunta que ainda intriga muitos matemáticos e até mesmo pesquisadores de outras áreas: "Fazemos ou descobrimos Matemática?" (GARBI, 2010, p. 27). Partindo desta pergunta, podemos definir que, para os pitagóricos, os números inteiros eram a base de tudo ligado ao homem e à matéria. Sendo assim, as explicações dos fatos da natureza, das relações entre estes fatos, das medidas do homem, eram sempre esperadas através de tais números.

2.3. O monocórdio

Partindo dos poucos registros gregos que resistiram por séculos e séculos sobre os estudos dedicados à musica, pode-se dizer que:

> Teóricos musicais tais como Pitágoras, Arquitas, Aristoxeno, Eratóstenes dedicaram-se à construção de escalas desenvolvendo diferentes critérios de afinidade. Por exemplo, valorizando

[2] Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

os intervalos de quintas perfeitos[3], bem como a utilização somente de números de 1 a 4 na obtenção das frações da corda para gerar as notas da escala, Pitágoras estabeleceu uma afinação utilizando percursos de quinta para obtenção das notas da escala. (ABDOUNUR, 2003, p. 3)

Devemos atentar ainda para o fato de que fazemos uma leitura do mundo antes mesmo de codificar ou decodificar as palavras, símbolos e números. Assim também fazemos com a Música, quando nossos ouvidos percebem algumas combinações de sons mais agradáveis que outras mesmo sem o estudo e o conhecimento de teoria musical. Muito provavelmente tenha sido isso que motivou Pitágoras a estudar as relações matemáticas existentes entre os sons emitidos por partes vibrantes de uma corda.

Grande filósofo e matemático em sua época, Pitágoras observou relações matemáticas a partir de sons emitidos por porções diferentes de cordas vibrantes, construindo uma escala musical e relacionando matematicamente os intervalos musicais produzidos pelas notas definidas. Supõe-se que tais relações tenham sido estabelecidas através de um instrumento denominado *monocórdio*, constituído por uma corda fixa nas extremidades por dois cavaletes, contendo um terceiro cavalete móvel, que poderia ser colocado em qualquer parte da corda, alterando a porção vibrante, muito provavelmente inventado pelo próprio Pitágoras. Os princípios deste instrumento podem ser encontrados no atual violão, através dos seus trastes (fazendo o papel dos cavaletes) que dividem o braço do instrumento em porções vibrantes – exceto por algumas modificações referentes a descobertas musicais realizadas principalmente do século XVI em diante. Ao observar diferentes frações da corda vibrando, o estudioso da cidade de Samos notou que algumas delas possuíam relações musicais muito agradáveis aos ouvidos,

[3] Os intervalos de *quintas perfeitos* supracitados são aqueles produzidos pela vibração da fração da corda correspondentes a 2/3 da mesma.

chegando até a encontrar a mesma nota emitida em uma *frequência*[4] mais aguda do que a encontrada anteriormente. Este seria, assim, o primeiro experimento científico do qual se tem registro na história, onde foi criada uma situação artificial para estudar um fenômeno natural.

Não podemos nos esquecer que, desde que o homem primitivo criou o arco e a flecha para caçar, provavelmente já tinha conhecimento do som produzido por uma corda esticada sobre dois pontos e vibrada. Porém, o conhecimento não era ainda estudado, o que veio a ser de fato concretizado com os experimentos de Pitágoras. Referindo-se sempre aos princípios pitagóricos, onde os números inteiros eram a chave para compreensão do mundo, crê-se que Pitágoras buscou relações entre comprimentos de corda que produzissem determinados intervalos sonoros – razões de números inteiros, investigando a relação entre o comprimento de uma corda vibrante e o tom musical produzido pela mesma (ABDOUNUR, 2003). Muito provavelmente, a obsessão de Pitágoras em definir o universo através dos números se deva às viagens que realizou quando deixou Samos e viajou pelo mundo árabe, antes mesmo de fixar-se em Crotona para a criação de sua escola.

2.4. Outras escalas

Vale destacar também o desenvolvimento, desde a antiguidade, da música na China com as *sequências pentatônicas chinesas* que contém, por exemplo, a partir da nota *do*, as notas *re*, *mi*, *sol* e *la*[5], correspondentes às cinco primeiras notas do ciclo das quintas, que no livro de Tso-kiu-ming são comparadas aos cinco elementos da filosofia natural – água, fogo, madeira, metal e terra (Abdounur, 2003). Os hindus elaboraram escalas que variavam de 22 a 27 notas,

[4] Vale destacar novamente que o termo *frequência* não faz parte deste contexto histórico, onde os gregos não haviam estudado as propriedades físicas referentes à Acústica neste período.
[5] O uso desta nomenclatura para as notas em questão tem como objetivo facilitar o entendimento e compreensão das relações propostas por este tipo de escala, uma vez que os nomes adotados na época eram diferentes.

dependendo da região da Índia em questão. Já os árabes elaboraram escalas com 17 notas musicais. Existem alguns aspectos entre música e matemática que extrapolam questões culturais, manifestando-se em todos os povos, como o uso da oitava. Porém, focaremos nossas discussões no trabalho de Pitágoras e na escala musical definida por ele.

2.5. A escala pitagórica

Pitágoras observou que, ao pressionarmos um ponto que dividisse a corda em 3/4 do seu tamanho inicial e tocando-a, ouvia-se uma quarta acima do tom emitido pela vibração da corda inteira (sem divisão alguma). Realizando o mesmo procedimento com 2/3 da corda, ouvia-se a quinta acima do tom original, e vibrando apenas metade da corda obtemos a oitava do som emitido pela corda solta. A descoberta destes intervalos, denominados na música de consonâncias perfeitas (oitava, quinta e quarta de uma nota) é atribuída a Pitágoras, mesmo que, provavelmente, elas fossem conhecidas antes de sua época por outras culturas antigas. Contudo, concordando com a filosofia pitagórica, para Pitágoras a beleza percebida em um determinado som estava associada a estabelecimento de relações simples, entre os números de 1 a 4, obtendo-se: 1/2, 2/3 e 3/4 da corda, equivalentes à oitava, à quinta e à quarta, respectivamente.

Os intervalos musicais supracitados seriam então mais naturais ao ouvido humano, estabelecendo configurações de ondas sonoras compostas por pulsações simples, diminuindo o número de pulsos percebidos pelo ouvido. O estudo do ramo físico da Acústica, com grande desenvolvimento principalmente a partir dos estudos de Galileu Galilei (1564-1643) e René Descartes (1596-1650), sendo estes muito posteriores à escola pitagórica , justificam e colaboram para uma melhor compreensão das relações justificadas por Pitágoras a partir de sua filosofia. Para o pensador grego, a perfeição das relações obtidas estava ligada ao fato de que os números 1, 2, 3 e 4, utilizados nas frações da corda, eram parte de uma relação mística com o número quatro. A origem do universo, segundo os pitagóricos, estava ligada aos quatro elementos essenciais: fogo, ar, terra e água. Além disso, podemos observar a relação com o número quatro na música grega, ao verificar o destaque dado ao *tetracorde*[6], utilizado como escala fundamental da música grega.

Vislumbrando sempre as relações simples entre números inteiros, nasce um sistema musical, buscando afinações que contivessem os intervalos destacados pelo pensador de Samos – oitava, quinta e quarta do som original. Pode-se assim considerar a relação da oitava com sua nota inicial da seguinte maneira:

> [...] duas notas são equivalentes, se o intervalo definido por elas for um número inteiro de oitavas. Sob essa ótica, as distintas oitavas reduziam-se apenas a uma, possuindo portanto cada nota equivalente em todas as outras oitavas, particularmente naquele referencial. (ABDOUNUR, 2003, p. 9)

Isso quer dizer que, ao construir a escala através de intervalos de quintas, por mais que encontremos notas uma oitava acima da relação anterior, elas teriam o mesmo significado. Perceba que partindo, por exemplo, de um *fa*, após uma quinta obtém-se um *do*, que acrescido de uma quinta gera um *sol*, e realizando o mesmo procedimento produz um *re* (oitava acima), *la*, *mi* (oitava acima), e *si*, construindo a sequência *fa-do-sol-re-la-mi-si*. Partindo da ideia de notas equivalentes, podemos reorganizá-las como *do-re-mi-fa-sol-la-si-do*. Esta sequência é denominada por *gama pitagórica*[7].

Pensando na organização das notas pertencentes a uma mesma oitava e partindo de um comprimento de corda como sendo a nota *do*, ao percorrer os intervalos de quinta, obtemos então a relação:

---

[6] Sistema de quatro sons, dos quais os extremos encontram-se a um intervalo de quarta justa.

[7] Lembrando que o uso de tal nomenclatura para as notas tem como objetivo facilitar o entendimento e compreensão das relações propostas

do	re	mi	fa	sol	la	si	do
1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2

(ABDOUNUR, 2003, p. 11)

Mesmo com o *mi* e o *si* possuindo relações com o *do* não muito próximas das propostas pitagóricas (frações de números muito grandes), todas as relações estão expressas por frações contendo potências de 2 e 3, considerados geradores universais. Mas sabemos que, a produção das notas não gerava exatamente um conjunto idêntico ao anterior, quando passava-se de uma oitava para outra, gerando sutis modificações que alteravam as notas originais. Porém, a partir do século XVI, esta proposta de escala passa por profundas modificações, sobretudo pela forte influência do *Temperamento*.

2.6. As mudanças na música *pós pitagórica*

O temperamento, basicamente, é o conjunto das modificações realizadas pelo homem do ocidente durante o estudo da música para que fossem produzidos intervalos de notas, em quaisquer tons, de maneira equivalente, modificando assim a produção natural das notas, "temperando" a música. As modificações produzidas neste período se faziam necessárias por conta da produção de acordes nas músicas, ou seja, a reprodução de várias notas ao mesmo tempo, o que exigia dos instrumentos uma exatidão na reprodução das escalas musicais, para não dar a impressão de desafinação. O conceito aritmético da música pitagórica e, consequentemente, do mundo ocidental, sofre um grande abalo. É observada a necessidade de uma divisão da escala musical partindo de outros princípios que não fossem aritméticos, encontrando assim os logaritmos como solução para este problema.

As propostas de mudanças desta época acabam tornando-se regras, estudadas e aprimoradas nas obras de muitos músicos do início do Renascimento, como Johann Sebastian

Bach (1685-1750). Além de grande músico e compositor, Bach era um estudioso da linguagem musical, dos aspectos matemáticos da música, enfim, das relações musico-matemáticas presentes nas escalas, tons tempo e outras intersecções destes dois campos do conhecimento. Por conta das experiências em suas séries de composições e obras que exploravam exaustivamente todos os recursos do cravo antigo, existe uma grande parcela de músicos e pesquisadores da área musical afirmando que a música ocidental dividi-se em dois períodos: antes e depois das obras de Bach. Entretanto, é preciso valorizar as experiências de Pitágoras para o desenvolvimento do Temperamento musical:

> O experimento de Pitágoras contribui com a ideia de Temperamento na medida em que propicia a construção de uma escala que não se 'fecha', resultando na coma pitagórica[8]. As diversas tentativas de distribuir tal diferença culminam com a repartição logaritmicamente equivalente, correspondente ao temperamento igual. (ABDOUNUR, 2000, p. 221)

A busca pela comensurabilidade e a obsessão pela representação de todos os fenômenos naturais através dos números inteiros, fazem com que os pitagóricos encontrem vários problemas para a criação de padrões, inclusive na música, onde os intervalos de quintas não remetem à mesma nota em oitavas distintas. Ainda sobre o experimento de Pitágoras, fica clara a sua contribuição para a construção do conceito de fração buscando um caráter musical do mesmo. Os conceitos de razão e fração oriundos destas experiências serão o objeto principal no desenvolvimento deste trabalho, onde as informações histórico-matemático-musicais serão essenciais para a construção das relações entre Educação Matemática e Educação Musical nas explorações em sala de aula.

[8] A coma pitagórica é o nome dado para a diferença existente na escala pitagórica quando tomados os intervalos supracitados.

Capítulo 3 - Sobre alguns termos matemáticos: como diferenciá-los e abordá-los?

3.1. Duas questões

As diferentes definições dos termos *razão*, *proporção*, *fração*, *quociente* e *números decimais* confundem-se constantemente nas abordagens destes temas nos mais variados livros, sejam eles didáticos, paradidáticos ou ligados à pesquisa nas áreas de Matemática e Educação Matemática. Por conta do uso confuso de todos estes termos na Educação Matemática, de suas relações ou não, cabem duas perguntas: *Seria necessário o uso de quatro termos diferentes para representar um mesmo objeto no ensino de Matemática? São estes termos diferentes ou são objetos diferentes a serem ensinados?* Para uma melhor compreensão do tema discutido neste trabalho, este capítulo tem como objetivo maior diferenciar (ou não) os termos supracitados, retomando inclusive, a origem das palavras para tal explanação.

3.2. Sobre os termos

3.2.1. Fração

Com origem no Egito Antigo, as *frações* foram criadas pelos egípcios com o intuito facilitar a medição das terras inundadas pelas cheias do rio Nilo. Estas terras, situadas às margens de um dos maiores rios do mundo, eram muito disputadas, visto que as cheias do rio fertilizavam o solo e favoreciam o plantio na região. O problema então era remarcar as divisões no terreno para que ele fosse redistribuído para os agricultores exatamente como estava antes das águas inundarem as margens do rio. Para tanto, os agrimensores, também chamados de estiradores de corda, usavam cordas com marcações de certa unidade de medida. Para medir o terreno, bastava esticar as cordas já marcadas pela tal unidade. Fica claro que não era sempre que a unidade de medida definida por eles caberia um número inteiro de vezes no lado do terreno. Cria-se então um novo número – o número fracionário. Os símbolos do sistema de numeração egípcio em geral não tinham o caráter posicional de escrita, entretanto, quando se tratavam de frações, era preciso adicionar um sinal para representação das mesmas, simbologia totalmente distinta da que usamos nos dias de hoje. Porém, os egípcios faziam uso apenas das chamadas frações unitárias, onde o numerador era igual a 1, com exceção da fração 2/3 que também era utilizada.

Seguindo a definição do dicionário *Aurélio*, um dos mais antigos e famosos sobre a língua portuguesa do Brasil, *fração* é um "número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais" (FERREIRA, 1975, p. 651). De um modo geral, a *fração* segue a definição descrita anteriormente, e, usando uma notação atual pode ser representada por $\frac{a}{b}$, ou ainda por *a/b* . Partindo desta representação, define-se *a* como o *numerador* e *b* como o *denominador* da fração. Escrita assim, a definição de fração possibilita a interpretação de sua característica principal como sendo a representação de *uma parte em relação ao todo*, independentemente se este todo é ou não uma grandeza geométrica.

3.2.2. Razão

Já o conceito de *razão* remonta uma ideia de origem grega, que, com grande facilidade é encontrada na mais famosa obra de geometria, talvez até podendo ser descrita como a maior obra de todo o estudo de Matemática oriundo do mundo antigo: "Os Elementos", de Euclides (330-260 a.C.).

> Parece, também, não haver dúvidas quanto aos objetivos de Euclides ao escrever seus elementos, em 13 livros: tratava-se de material didático para o ensino de Geometria (elementar) aos iniciantes, nenhum outro autor de livros-texto conseguiu êxito comparável a Euclides: seus Elementos são o mais antigo livro de Matemática ainda em vigor nos dias de hoje, uma obra que somente perde para a bíblia em número de edições e, para muitos, o mais influente livro matemático de todos os tempos. (GARBI, 2010, p. 57)

Alguns historiadores afirmam que os Elementos são, na verdade, um grande compêndio de todas as produções e conhecimentos matemáticos da civilização grega até aquele momento da história. No entanto, sabemos, por exemplo, que o desenvolvimento matemático da música era algo de grande importância para os gregos e, mesmo assim, não está registrado nesta obra. Existem outros temas que também foram estudados por Euclides em outros tratados que não fazem parte dos Elementos. Todavia, lembremos que, a essência dos modernos livros de geometria utilizados no Ensino Fundamental II e Médio, exploram basicamente as demonstrações apresentadas pelo pensador grego, salvo algumas simplificações de linguagem ou de simbologia (GARBI, 2010).

No Livro V desta obra, Euclides faz, como nos outros livros, uma série de definições para, então, trazer à luz suas proposições e demonstrá-las. Das definições descritas por ele neste livro estão (EUCLIDES, in COMMANDINO, 1944, p. 75):

> [...] III – A razão entre duas grandezas, que são do mesmo gênero, é um respeito recíproco de uma para a outra, enquanto uma é maior, ou menor do que a outra, ou igual a ela.
>
> IV – As grandezas têm entre si razão, quando a grandeza menor, tomada certo número de vezes, pode vencer a grandeza maior.

V – As grandezas têm entre si a mesma razão, a primeira para, a segunda, e a terceira para a quarta, quando umas grandezas, quaisquer que sejam, equimultíplices da primeira e da terceira a respeito de outras, quaisquer que sejam, equimultíplices da segunda e da quarta, são ou juntamente maiores, ou juntamente iguais, ou juntamente menores.

VI – As grandezas, que têm entre si a mesma razão, se chamam proporcionais.

[...]

VIII – Proporção, ou proporcionalidade é uma semelhança de razões.

Entre as definições supracitadas, mais especificamente a partir da definição V, Euclides abre caminho para a apresentação da *Teoria das Proporções*, de Eudoxo, um marco para o trabalho com grandezas comensuráveis ou incomensuráveis. Esta teoria colocava fim ao grande dilema pitagórico sobre grandezas incomensuráveis, permitindo a comparação de maneira análoga à multiplicação em cruz, podendo ser comparados comprimentos de qualquer natureza (BONGIOVANNI, 2005). Sendo este um dos principais frutos de seu trabalho, Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) deu muitas outras contribuições para o desenvolvimento da Matemática, incluindo o famoso *Método da exaustão*, utilizado ainda hoje em algumas demonstrações,

Sobre a origem dos termos, pelas definições III e IV podemos concluir que a ideia grega de *razão* estava definida basicamente como uma *comparação entre duas grandezas*, pressupondo assim que tais grandezas fossem *geométricas*, basicamente visando o trabalho com segmentos de reta. Quando se percebe que a definição de razão, totalmente geométrica no início, também é válida para quaisquer que sejam as grandezas, geométricas ou não, sua definição confunde-se com a de *fração*, ocasionando a utilização indistinta da simbologia Matemática, misturando as definições e emaranhando os termos.

3.2.3. Proporção

Quanto à definição de *proporção* registrada no livro de Euclides, objetivando em sua origem relações geométricas, fica claro que o uso da palavra "semelhança" perdeu o sentido original, tanto com o passar do tempo quanto pelo uso indiscriminado dos termos fração e razão, não importando a situação em que estes fossem empregados. Segundo o dicionário *Aurélio*, o termo *proporção* é definido como "igualdade entre duas razões" (FERREIRA, 1975, p. 1146), explicação pautada principalmente pela ideia de razão como sendo um número e não uma comparação de grandezas, ou seja, basicamente utilizando a razão como uma fração.

3.2.4. Quociente

Este grande emaranhado de definições e redefinições inclui ainda o termo *quociente*, o qual é usado pelo mesmo dicionário na definição de *razão*. Tendo sua origem no latim, *quotiens*, que significa "quantas vezes", *quociente* é definido como "quantidade resultante da divisão de uma quantidade por outra" (FERREIRA, 1975, p. 1177). Isso deixa claro que o quociente é, basicamente, o resultado de uma divisão entre dois números, ou seja, se temos a divisão de m por n, o número que representa o resultado significa quantas vezes eu tenho n em m. Descrita como "quociente entre dois números" (FERREIRA, 1975, p. 1190), a *razão* perde mais uma vez seu caráter geométrico, sendo enunciado apenas como o resultado da divisão entre dois números.

3.2.5. Números decimais

Com o advento dos algarismos hindu-arábicos[9], o sistema de numeração decimal torna-se mais prático e de fácil operação e escrita do que os símbolos egípcios ou romanos conhecidos pela Europa. Porém, em um primeiro momento, há somente a possibilidade de se trabalhar com os números inteiros, o que restringe demasiadamente as operações matemáticas.

“Professor, posso deixar a resposta em fração ou tenho que dividir para escrever como número decimal?”.

Muitos professores já ouviram essa pergunta uma infinidade de vezes quanto à resolução de uma expressão, de uma equação ou até mesmo de uma simples divisão. Mas o chamado *número decimal* nada mais é do que a representação simplificada de uma fração com um numerador inteiro e o denominador como uma potência de dez. Inicialmente, a ideia era a de criar uma nova simbologia para representar números racionais. A alternativa que melhor se adaptou ao sistema de numeração decimal, com base dez, foi a de apresentar os números como uma soma de frações com numerados de 1 a 9 e com denominadores que poderiam ser escritos como potências de dez. O primeiro grande passo para a concretização deste tipo de representação foi dado pelo matemático holandês Simon Stevin (1548-1620). Segundo Barnabé (2005, p. 3):

> [...] Em ‘La Disme’ (*A Dízima*; de 1585 – tradução francesa) Stevin descreve uma maneira de representar qualquer número por frações decimais.
>
> Escrita originalmente em flamengo (idioma local) sob o título “De Thiende”, Stevin expõe nesta obra uma representação de frações decimais por números inteiros, tornando mais fácil o trabalho com valores que não eram inteiros. Os coeficientes das frações decimais ficavam escritos à frente do expoente das mesmas, sendo estes representados dentro de círculos. Esta idéia apresentada

[9] Algarismos criados pelos hindus e difundidos pelos árabes

neste pequeno folheto de não mais de trinta páginas é utilizada até hoje, mas sua notação foi adaptada, chegando à forma usual.

Posteriormente, essa notação foi sendo adaptada para a que conhecemos hoje, influenciada também pelos estudos de Viète (1540-1603). Sobretudo, os números decimais acabam sendo interpretados algumas vezes como razões, em consequência da igualdade na apresentação dos conceitos de razão e fração. Vale lembrar que os números decimais são somente uma notação para a escrita de alguns números racionais, ou seja, de frações com denominadores específicos. Tal especificidade é alimentada pelas características de nosso sistema de numeração[10], facilitando sua escrita e operação – posicional, aditivo, multiplicativo e de base 10.

3.3. Os símbolos matemáticos

A simbologia Matemática é um dos fatores que aproximou ainda mais estes termos de origens tão distintas. A representação de frações no formato $\frac{a}{b}$ pode ter influenciado a representação do sinal de divisão como sendo $\div$, que posteriormente foi também usado como $:$, este último muito popularizado por Leibniz (1646-1716), que é descrito por muitos historiadores e matemáticos como o "pai" do cálculo. Isso pode também ter se confundido com a representação utilizada para proporção, como tem-se registro no livro *Clavis Mathematicae*, de 1631, do matemático William Oughtred (1574-1660), onde ele usa simbologias do tipo $a : b :: c : d$, significando que *a razão a para b é proporcional à razão c para d* (GARBI, 2010).

As definições simbólicas supracitadas fizeram com que as origens dos termos matemáticos *razão* e *proporção* fossem modificados, denotando o mesmo sentido às palavras

[10] Sistema de Numeração Decimal

"razão", "fração" e "quociente", e, em alguns casos, até mesmo com relação aos "números decimais". Talvez seja este o motivo de pairar sobre estes temas uma grande e maciça névoa de dúvidas e incertezas na construção destes conceitos por parte dos alunos do Ensino Fundamental.

3.4. No cotidiano escolar: um livro didático

Para observar a dificuldade em apresentar o conteúdo de razão e proporção diferenciando-o de fração, faremos a observação de uma coleção destinada à educação Matemática no Ensino Fundamental II.

Na coleção "Tudo é Matemática" (DANTE, 2010), no volume dedicado ao 6º ano de, Dante apresenta o conceito de *fração* de três maneiras aparentemente distintas: a ideia de fração como *parte de um todo*, de fração como *comparação entre dois números naturais* e a ideia de fração como *quociente de dois números naturais*. São apresentados exercícios que desenvolvem estas três linhas de raciocínio expostas pelo autor, mas a simbologia é a mesma – o uso da fração no formato *a/b* . As partes de uma fração também recebem seus respectivos nomes – *numerador* e *denominador*. Já no volume dedicado ao 7º ano da mesma coleção, o autor apresenta *razão* como sendo *a/b* , com a mesma simbologia usada para a representação de *frações*, mas nomeando diferentemente *a* e *b* em cada situação. Segundo Dante (2010b):

> A razão entre dois números a e b, com b ≠ 0, é o quociente de a : b, que pode ser indicado por a/b ou qualquer outra forma equivalente.
>
> Por exemplo:
>
> razão entre 9 e 15 → $\boxed{9 : 15}$ ou $\boxed{9/15}$ ou $\boxed{0{,}6}$ ou $\boxed{60\%}$
>
> A ordem dos números no cálculo de uma razão é importante. Por isso, cada número recebe um nome.

Na razão entre **a** e **b** (a/b), o **a** é chamado de *antecedente* e o **b** é chamado de *consequente*. (DANTE, 2010b, p. 186)

Curiosamente, a simbologia é a mesma (a/b), mas a nomenclatura difere da apresentada no conceito de fração. Quando é tratado o tema proporção, o termo é definido como a igualdade de duas razões: "Assim, se a razão entre os números a e b é igual à razão entre os números c e d, dizemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é uma *proporção*." (Dante, 2010b, p. 190)

A grande questão a ser levantada é que, seguindo a citação anterior, o autor define os termos *a* e *d* como *extremos da proporção*, e os termos *b* e *c* como *os meios da proporção*. Ao utilizar esta nomenclatura, o autor remonta a definição inicial e sua simbologia como sendo a : b :: c : d , mas não desenvolve nem explica sobre os nomes dados[11], apenas questionando: "Por que será que eles têm esses nomes?" (DANTE, 2010, p. 190).

O tema merece bastante atenção e cuidado com a escrita e apresentação dos conceitos, tendo em vista a dificuldade que os alunos têm em entender que, mesmo sendo conceitos de definições iniciais diferentes, verificou-se que eles tinham algumas propriedades comuns válidas. Esta coleção é só um dos diversos exemplos que encontramos entre os muitos livros e coleções existentes dentro e fora do Brasil.

3.5. O cuidado com a escrita matemática na literatura infantil

Monteiro Lobato, em sua obra "Aritmética da Emília" apresenta um cuidado primoroso ao escrever detalhes sobre as operações e questões matemáticas apresentadas pelo personagem do Visconde de Sabugosa como se fosse um grande teatro, repleto de personificações de números, de operações e até mesmo de termos utilizados na Matemática usual. O livro carrega

[11] Nem mesmo na versão do livro destinada ao professor é feito algum comentário ou orientação.

em seu título o nome de Emília, a boneca de pano do Sítio do Pica-Pau Amarelo, personagem cheio de manias e prepotência que, durante a narrativa, vive interrompendo as explicações do Visconde de Sabugosa sobre os mais variados conceitos e conteúdos matemáticos. O livro não discorre sobre razões nem proporções, mas ao trabalhar com o termo *fração*, toma o devido cuidado de não chamá-la de *razão*.

Talvez todo este cuidado de Monteiro Lobato com a escrita matemática muito provavelmente se deva pela admiração que o mesmo tinha pelo trabalho de um contemporâneo seu, uma pessoa de grande importância para a Educação Matemática brasileira, o carioca Júlio César de Mello e Souza, que escrevia suas obras literárias sob o pseudônimo de Malbah Tahan. Em sua mais famosa obra, "O Homem que Calculava", ele descreve a trajetória de um andarilho matemático que, ao lado do narrador da história, vivencia diferentes problemas e situações, os quais ele resolve brilhantemente usando seus conhecimentos sobre Matemática e História da Matemática. Muitos dos problemas que aparecem durante a história e são resolvidos pelo tal andarilho são ótimos pontos de partida para os mais diferentes temas matemáticos abordados na educação básica.

Os cuidados tomados por Monteiro Lobato, mesmo que evitando a escrita do termo razão, fica de exemplo para muitos autores de livros infantis que não atentam para detalhes importantes na formação do alunado. As crianças crescem ouvindo e lendo histórias dos livros infantis, e acabam muitas vezes concretizando ideias e conceitos errados ou distorcidos, se tornarão de difícil desconstrução.

3.6. Busca por novas abordagens no ensino de Matemática

Para aprimorar o ensino de *Razões e Proporções* são estudadas diversas formas de fazer com que o aluno compreenda, cada vez mais e de uma melhor maneira, todas as propriedades e operações deste conteúdo matemático. Porém, a abordagem variada não é privilégio do conteúdo em questão. Necessitando buscar novas situações de aprendizagem, alimentados pelo desinteresse de boa parte do alunado quanto ao estudo da Matemática, muitos professores, pesquisadores e, porque não dizer, professores pesquisadores, desenvolveram e aplicaram formas diferentes de apresentar, estudar e abordar o conteúdo da educação básica, fugindo da chamada escola tradicional. Sabemos que, o ensino de Matemática que se impôs em Portugal ainda no período do Brasil colonial, herdado inicialmente da Escola Francesa, ao chegar a terras brasileiras foi sendo gradativamente distorcido por algumas outras influências vindas do exterior, caracterizando o que ainda é reproduzido por algumas instituições de ensino.

Observando o ensino de Trigonometria, por exemplo, sob o olhar das mudanças em Educação Matemática e a busca por novas abordagens, podemos explorar triângulos retângulos existentes em situações problemas particulares, ou ainda o uso do teodolito, instrumento topográfico que tem em seu princípio de funcionamento as razões trigonométricas para determinar alturas e desníveis de terrenos. O trabalho com áreas de figuras planas, no entanto, pode ter mais sentido quando experimentamos o conteúdo na prática, através de medições da própria sala de aula, experimentando diferentes figuras padronizadas para cobrir uma região, exploração de malhas quadriculadas etc. Ao introduzir os números inteiros no Ensino Fundamental, alguns exemplos cotidianos como os números observados em um elevador na representação dos andares do subsolo, o trabalho com a medição de temperaturas negativas, ou ainda o uso de situações bancárias e as relações entre dívidas e créditos, são alguns dos princípios encontrados para fazer com que a compreensão do tema faça a ligação com o cotidiano e leve o aluno a refletir sobre o que aprende, refletindo sobre o cotidiano para aprender.

A exploração de ferramentas didáticas e objetos de aprendizagem estão sendo cada vez mais estudadas e experimentadas em sala de aula, como o uso de dobraduras no trabalho com geometria, jogos que fazem uso da tabuada ou da compreensão de frações equivalentes, ou ainda softwares para o trabalho com funções dos mais variados tipos.

Com este trabalho, a busca por um novo caminho no ensino de razões e proporções se abre, trazendo experimentações que eram simplesmente apresentadas aos alunos sem a possibilidade de um trabalho diferente do chamado *giz e quadro negro*, que com as mudanças nas escolas passou a ser conhecido também como *caneta e quadro branco*. Sabendo disso, este trabalho fará uso da *interdisciplinaridade* entre Música e Matemática para trazer o aluno para uma nova experiência, em um novo ambiente, sendo que o experimento de Pitágoras nos dá essa possibilidade. Assim, podemos ainda esclarecer as diferenças e controvérsias entre as definições dos termos citados neste capítulo, desenvolvendo um processo de aprendizagem satisfatório para estes temas.

Capítulo 4 - Interdisciplinaridade entre Música e Matemática: uma metodologia de trabalho

Pensar o trabalho em sala de aula de maneira interdisciplinar é algo que vai muito além do que imaginamos ser. Para que se tenha uma melhor compreensão da *prática interdisciplinar* a qual este projeto se propõe a desenvolver, se faz necessário uma explanação sobre algumas características deste capítulo. Primeiramente apresentaremos um panorama sobre a motivação para o estudo das relações entre matemática e Música, citando ainda algumas características referentes à Educação Matemática e à Educação Musical. Na sequência, definiremos qual o posicionamento adotado neste trabalho quanto à definição do conceito de interdisciplinaridade, diferenciando alguns termos próximos a ele e justificando o uso de sua prática.

4.1. A Educação Matemática

Muitas mudanças já aconteceram e ainda acontecem no ensino de matemática, mas a grande maioria das instituições de ensino e dos profissionais ligados à educação matemática se esquece de seus propósitos:

> Aos professores de matemática compete selecionar entre toda a matemática existente, a clássica e a moderna, aquela que possa ser útil aos alunos em cada um dos diferentes níveis da educação. Para a seleção temos de levar em conta que a matemática tem um valor formativo, que ajuda a estruturar todo o pensamento e a agilizar o raciocínio dedutivo, porém que também é uma ferramenta que serve para a atuação diária e para muitas tarefas específicas de quase todas as atividades laborais. (SANTALÓ, in PARRA et. al., 1996, p. 15)

Cada professor de matemática precisa ter claramente em seu exercício profissional o compromisso com o saber matemático e com a formação do indivíduo, lembrando que o contato com a Matemática na escola marca as pessoas de alguma forma (IMENES, 1990). Por conta do esquecimento dos professores de seu verdadeiro papel que existem diversos problemas de reprovação e evasão escolar ligados ao repúdio à Matemática. Quando não deixam as salas de aula, os alunos que ali ficam alimentam um verdadeiro ódio da disciplina e de tudo que está ligado a ela: “A população em geral não retém quase nada da Matemática ensinada na escola, e, o que é mais grave, se orgulha disso.” (TINOCO, in BOLEMA, 1991, p.68)

Nessa busca pelo desenvolvimento de novas técnicas e abordagens para um melhor aproveitamento da educação matemática, superando inclusive os obstáculos citados anteriormente, encontramos o trabalho interdisciplinar como uma resposta para o ensino de razões e proporções. É na superação das dificuldades encontradas que se constrói um bom processo de ensino e aprendizagem, quebrando esse caráter inatingível da Matemática enraizado nas pessoas, pois “Dentre as razões que elas apontam para explicar seu insucesso, destacam-se (...): - a falta de um contexto não matemático que situasse a Matemática entre as coisas dos homens.” (IMENES, in BOLEMA, 1990, p. 25)

4.2. A Educação Musical

> A Educação musical perdeu créditos, se tornou uma utopia. Em alguns países foi suprimida em vez de ser melhorada. Não é organizada de uma maneira integrada, está ilhada e sofre com a falta de estabilidade. Gostaria que não fosse mais preciso ficar discutindo se a música é algo relevante ou não. Ela sempre é muito importante para os alunos, desde que bem ensinada. (DE GAINZA, in NOVA ESCOLA, 2011a, p. 39)

Com algumas palavras de uma das maiores autoridades no ensino de música no mundo, iniciamos nossa reflexão sobre os rumos da educação musical brasileira, tendo em vista a lei 11.769 que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação brasileira tornando obrigatório o ensino de música nas escolas do país a partir de 2012. Vale salientar aqui que esta obrigatoriedade está em fazer parte do currículo da disciplina Arte, não necessariamente como uma disciplina a parte. Faz-se necessário que a Educação Musical conquiste seu espaço na grade curricular da educação básica, mas, para isso, há a necessidade também da formação de educadores musicais, com estudos sérios em música *e* em educação[12]. Ainda assim, faltam profissionais qualificados para trabalhar na área. Entende-se que o principal objetivo educacional da música no currículo é o de "[...] Dar a todos os estudantes a oportunidade de compreender e expressar a linguagem musical e, ao mesmo tempo, fomentar o desenvolvimento da sensibilidade e da capacidade de articulação de crianças e jovens por meio da prática musical ativa." (DE GAINZA, in NOVA ESCOLA, 2011a, p. 40).

A formação musical de nossos estudantes é de grande preocupação desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, partindo do princípio que os professores graduados em Pedagogia estão autorizados a lecionar Música sem mesmo terem uma formação específica na área. Muitos cursos de Pedagogia não possuem nenhuma disciplina ligada à Educação Musical, o que agrava a formação deste professor que atuará junto aos alunos mais novos, onde muitos terão o primeiro contato com a disciplina. Partindo de todos estes pressupostos, pensou-se no desenvolvimento do trabalho contando ou não com a colaboração e participação do professor de Música ou Arte, em virtude das dificuldades que ainda existem na formação dos profissionais citados anteriormente. Entretanto, sabemos que este professor pode dar grandes contribuições ao ensino de Matemática, desenvolvendo um trabalho de integração, interdisciplinar, beneficiando ambas as áreas do conhecimento.

[12] Entende-se aqui a necessidade de licenciados em música para atuar junto às aulas de educação musical, ou ainda, uma melhor formação musical nos cursos de licenciatura em Arte, sabendo que os profissionais habilitados por estes cursos trabalharão a educação musical em muitas das escolas brasileiras.

4.3. Sobre interdisciplinaridade

Em busca de uma fundamentação teórica para o desenvolvimento do presente trabalho, a interdisciplinaridade surge como um tema muito propício, um assunto relativamente comum, sendo encontrado em diversos textos e artigos ligados à Educação. Porém, quando pesquisada e estudada com profundidade, percebe-se que muitas vezes há uma banalização, um "modismo" no que se refere ao uso deste termo, ocasionando a produção de trabalhos e mais trabalhos sem que haja uma verdadeira ligação entre as áreas, não havendo uma verdadeira *prática interdisciplinar*.

Sob este olhar, para o ensino de razões e proporções ao qual nos propomos, fica clara a necessidade de integração entre os dois campos ligados ao projeto, no caso Educação Matemática e Educação Musical[13]. A construção de uma parceria entre a Matemática e uma área do conhecimento ao qual não estamos habituados, incita o diálogo entre elas, possibilitando a interpenetração das mesmas (FAZENDA, 1997). É preciso esclarecer que este trabalho não tem o intuito de defender a desconstrução total do atual modelo por disciplinas, com a não divisão do conhecimento para o ensino. Afinal, partimos do pressuposto que não há a existência de interdisciplinaridade sem a divisão do conhecimento em disciplinas, o que discutiremos mais à frente neste trabalho.

4.3.1. Diferenciando multi, pluri, inter e transdisciplinaridade

> Há uma família de quatro elementos que se apresentam como mais ou menos equivalentes: pluridisciplinaridade, multidisciplinaridade, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade. Sentimo-nos um pouco perdidos no conjunto destas quatro palavras. As suas fronteiras não estão estabelecidas, nem para aqueles que as usam, nem

[13] Neste trabalho abordaremos a educação Musical como uma área em separado, mesmo sabendo que ela possa ser desenvolvida como uma das áreas dentro da disciplina de Arte.

> para aqueles que as estudam, nem para aqueles que as procuram definir. Há qualquer coisa estranha nesta família de palavras. Umas vezes são usadas umas, outras vezes outras. (POMBO, 2005, p. 4)

Mesmo acontecendo muitas discussões sobre este tema nos últimos anos não há uma definição consensual que caracterize os termos *multidisciplinaridade*, *pluridisciplinaridade*, *interdisciplinaridade* e *transdisciplinaridade*. Visando uma melhor compreensão deste projeto, além de uma definição da metodologia de trabalho a ser escolhida, fez-se necessário diferenciá-los, ou buscar características mínimas para cada um, visto que suas definições não são unanimidades na área de Educação. Para tanto, utilizaremos a proposta de Pombo (2005, p. 5):

> A minha proposta é muito simples. Passa por reconhecer que, por detrás destas quatro palavras, multi, pluri, inter e transdisciplinaridade, está uma mesma raiz – a palavra *disciplina*. Ela está sempre presente em cada uma delas. O que nos permite concluir que todas elas tratam de qualquer coisa que tem a ver com as disciplinas. Disciplinas que se pretendem juntar: *multi*, *pluri*, a ideia é a mesma: *juntar* muitas, pô-las *ao lado* uma das outras**.** Ou então articular, pô-las *inter*, em inter-relação, estabelecer entre elas uma *ação recíproca*. O sufixo *trans* supõe um *ir além*, uma ultrapassagem daquilo que é próprio da disciplina.
>
> Aceitar a minha proposta como base de trabalho, como hipótese operatória, é aceitar que há qualquer coisa que *atravessa* a pluridisciplinaridade ou multidisciplinaridade, a interdisciplinaridade e a transdisciplinaridade. Que essa qualquer coisa é, em todos os casos, uma tentativa de romper o caráter estanque das disciplinas.

Concordando com os apontamentos supracitados, o presente trabalho faz uso do entendimento de que os conceitos de multidisciplinaridade e pluridisciplinaridade são praticamente os mesmos, significando *a abordagem de um tema por diversas disciplinas, sem uma relação direta entre elas*. Isso vem acontecendo constantemente nas escolas que propõem um projeto que seja abordado por todas as disciplinas. Por exemplo, uma escola que desenvolva um projeto sobre a água, em que todas as disciplinas deverão abordar este tema, seja a falta de água, as bacias hidrográficas, a composição química e o tratamento da água, as estatísticas sobre a falta de água no planeta etc.

A *transdiciplinaridade* seria um contexto mais complexo, prezando pela não fragmentação do conhecimento, indo *além* das disciplinas, *trans*pondo seus limites, onde alguns teóricos defendem até mesmo o fim da disciplinaridade. Com a escolha para o desenvolvimento deste trabalho fundamentada na ideia de *interdisciplinaridade*, faremos uma melhor explanação sobre o que entendemos sobre este assunto nas linhas subsequentes.

4.3.2. A interdisciplinaridade *em ação*

Para entender a definição de *interdisciplinaridade* aqui utilizada, firmamos aqui um posicionamento sobre o tema, esclarecendo que o que existe é uma *prática interdisciplinar*, compreendendo interdisciplinaridade como sendo mais do que um *conceito*, e sim uma *atitude*. Conhecer a visão que se tem de interdisciplinaridade em nosso país requer um breve passeio histórico sobre como o tema surgiu, como chegou até aqui e quais foram as influências sobre o mesmo.

As discussões sobre o tema começam a chegar ao Brasil ao final da década de 1960 com sérias distorções, fruto do modismo e do mergulho em novas tendências sem reflexão prévia (FAZENDA, 1994). Somados a estes problemas, vieram as reformas educacionais, entre as décadas de 1960 e1970, usando indiscriminadamente o termo para justificar mudanças e manipulações de interesse governista. As consequências destas reformas foram observadas durante muitos anos na educação brasileira, gerando um saldo negativo para a formação do cidadão, sendo positivo para os militares da época. Contudo, para propor mudanças, não podemos nos desligar do que já foi ou ainda é estruturado no currículo da escola básica. É necessário fazer uma profunda reflexão sobre o que já aconteceu não se esquecendo de analisar inclusive o fato de que ao propor um projeto interdisciplinar existem algumas variáveis que não competem ao campo da educação defini-las. Para a época, propor uma visão interdisciplinar do ensino ameaçaria a estrutura escolar, colocando em xeque o poder dos governantes em exercício.

Sobre estas questões, Gusdorf (1977), remetendo uma carta à professora Ivani Fazenda, destaca que:

> O que se designa por interdisciplinaridade é uma atitude epistemológica que ultrapassa os hábitos intelectuais estabelecidos ou mesmo os programas de ensino. Nossos contemporâneos estão sendo formados sob um regime de especialização, cada um em seu pequeno esconderijo, abrigado das interferências dos vizinhos, na segurança e no conforto das mesmas questões estéreis. Cada um por si e Deus por todos (...)
>
> A ideia de interdisciplinaridade é uma ameaça à autonomia dos especialistas, vítimas de uma restrição de seu campo mental. Eles não ousam sucitar questões estranhas à sua tecnologia particular, e não lhes é agradável que outros interfiram em sua área de pesquisa. A interdisciplinaridade implica verdadeira conversão de inteligência (...) (GUSDORF, in FAZENDA, 1991, p. 24)[14]

Frente às questões levantadas, além de observar que a defesa da interdisciplinaridade está em ampliar a visão de conhecimento para o todo, da não fragmentação do mesmo, entenderemos que a interdisciplinaridade assume acima de tudo um papel de diálogo entre as partes de interesse. Esse isolamento das disciplinas tão criticado por Gusdorf reforça ainda mais a ideia de que o conhecimento visto como um todo não pode ser dividido sem que haja interação entre as

---

[14] Carta enviada por Gusdorf à professora Ivani Fazenda, registrada em FAZENDA, I. C. A. “Interdisciplinaridade: um projeto em parceria”. São Paulo: Loyola, 1991.

partes. Entendendo as partes como disciplinas, conclui-se que o conhecimento é assim interdisciplinar.

Como citado anteriormente, tantas variáveis, um projeto interdisciplinar não pode avançar sem a principal delas: a *prática interdisciplinar*. Afinal, não basta apenas integrar disciplinas, é preciso desenvolver a busca pelo conhecimento, explorando situações que possam ser vivenciadas pelos alunos. A postura do professor é decisiva neste processo, orientando os alunos, tirando dúvidas relativas à sua disciplina, incluindo ideias e sugestões dos alunos, arriscando-se em novos horizontes ao realizar pesquisas sobre temas que não possui domínio, despertando nos alunos a curiosidade e um caráter investigador. Essa *postura interdisciplinar* faz uso da dúvida para o desenvolvimento do trabalho, experimentando e pesquisando novas fontes, novos caminhos para a explicação da realidade, para a construção e reconstrução do conhecimento, onde o professor acaba por tornar-se cada vez mais um guia, um facilitador. Assim sendo, a *ação* fica em evidência durante todo o trabalho, passando a ser ponto de convergência e partida entre o fazer e o pensar da interdisciplinaridade (FAZENDA, 1994).

Todavia, existem sempre os obstáculos a serem superados para que a prática interdisciplinar aconteça. O primeiro deles está ligado à formação dos docentes, ou ainda à pré-disposição destes, os quais precisam ser incentivados a desenvolver uma *atitude interdisciplinar* desde sua formação inicial.

> Entendemos por atitude interdisciplinar, uma atitude diante de alternativas para conhecer mais e melhor; atitude de espera ante os atos consumados, atitude de reciprocidade que impele à troca, que impele ao diálogo – ao diálogo com pares idênticos, com pares anônimos ou consigo mesmo – atitude de humildade diante da limitação do próprio saber, atitude de perplexidade ante a possibilidade de desvendar novos saberes, atitude de desafio – desafio perante o novo, desafio em redimensionar o velho – atitude de envolvimento e comprometimento com o projeto e com as

pessoas neles envolvidas, atitude, pois, de compromisso em construir sempre da melhor forma possível, atitude de responsabilidade, mas, sobretudo, de alegria, de revelação, de encontro, enfim, de vida. (FAZENDA, 1994, p. 82)

A formação escolar ainda é falha no sentido de fazer com que o cidadão reflita sobre as interações entre os conceitos, temas e disciplinas estudados em toda a escola básica, ou até mesmo no ensino superior, dificultando um maior desenvolvimento de algumas áreas do conhecimento, mas, sobretudo, na visão crítica e ampla do cidadão.

Outro obstáculo neste processo são as instituições que não se abrem ao novo, não acolhendo o professor comprometido com o trabalho, não propiciando condições para que o diálogo entre os professores de diferentes disciplinas aconteça, ou ainda não proporcionando uma infraestrutura minimamente adequada para que o professor desenvolva seu trabalho[15]. Não adianta, portanto, a escola declarar apoio ao professor, mas sem ajudá-lo efetivamente. Um ponto interessante dos projetos interdisciplinares que não é observado pelas instituições é que os mesmos podem vir a serem desenvolvidos em outras salas de aula, ganhando novas proporções dentro da própria instituição, desde que ela esteja aberta a estas questões.

Podemos levantar outras questões como o comodismo de se trabalhar com o ensino isolado em disciplinas, onde é muito mais fácil parcelar totalmente, sem amarras, o conhecimento do que discutir ideias de outros campos ou colocar em discussão ideias de sua própria área (FAZENDA, 2002). Há também o fato de que a postura interdisciplinar requer "humildade, abertura e curiosidade" (FAZENDA, 2002, p. 54), o que supostamente diminuiria o "status" de cada disciplina.

Ao concluirmos sobre a perspectiva abordada, vale salientar:

[15] Como infraestrutura aqui entendemos não só o local apropriado para o desenvolvimento do projeto, mas também a aquisição de materiais e a remuneração do professor que realiza este trabalho, sendo este último muitas vezes esquecido propositalmente pelas instituições.

> [...] uma última palavra para dizer que a interdisciplinaridade se deixa pensar, não apenas na sua faceta cognitiva - sensibilidade à complexidade, capacidade para procurar mecanismos comuns, atenção a estruturas profundas que possam articular o que aparentemente não é articulável - mas também em termos de *atitude* - curiosidade, abertura de espírito, gosto pela colaboração, pela cooperação, pelo trabalho em comum. Sem interesse real por aquilo que o outro tem para dizer não se faz interdisciplinaridade. Só há interdisciplinaridade se somos capazes de partilhar o nosso pequeno domínio do saber, se temos a coragem necessária para abandonar o conforto da nossa linguagem técnica e para nos aventurarmos num domínio que é de todos e de que ninguém é proprietário exclusivo. (POMBO, 2005, p. 13)

4.3.3. Por que interdisciplinaridade?

As características do projeto propondo o estudo de razões e proporções partindo da construção da música ocidental, as experimentações feitas com o auxílio do monocórdio de Pitágoras, a integração das duas áreas pelo tema – Matemática e Música – e a construção do conhecimento são algumas das características observadas como ideais para que uma perspectiva interdisciplinar fosse desenvolvida neste trabalho.

A prática interdisciplinar explora muito mais do que o conteúdo integrador das disciplinas em questão, tendo alguns objetivos junto aos alunos quando um projeto interdisciplinar é proposto:

- Permitir um melhor desenvolvimento de suas atividades, assegurando sua orientação, a fim de definir o papel que deverão desempenhar na sociedade.
- Desenvolver o senso crítico e a compreensão das informações recebidas a cada instante.
- A necessidade de *aprender a aprender*.
- Manter a curiosidade e o interesse quanto ao(s) conteúdo(s) apresentado(s).

Outra característica importante e que justifica também a prática interdisciplinar é o trabalho em grupo, promovendo a socialização das ideias. Quando em conjunto os alunos podem buscar ajuda uns nos outros, pensar sobre soluções, indo além do conteúdo matemático e musical, desenvolvendo características de interação social. Segundo Cândido (2001, p. 27):

> Podemos até mesmo afirmar que, sem a interação social, a lógica da criança não se desenvolve plenamente, porque é nas situações interpessoais que ela sente-se obrigada a ser coerente. Sozinha, a criança poderá dizer e fazer o que quiser pelo prazer do momento, mas em grupo, diante de outras pessoas, sentirá a necessidade de pensar naquilo que irá dizer e fazer para que possa ser compreendida. [...]
>
> Em grupo há possibilidades de se descobrir preferências, negociar soluções, diluir dificuldades. Nesse processo, são evidenciados diferentes modos de pensamento sobre as ideias sugeridas nas discussões, o que permite o desenvolvimento de habilidades de raciocínio, como investigação, inferência, reflexão e argumentação.

Com foco nestes quatro pontos principais, desenvolveremos através de oficinas e práticas em sala de aula que levem à uma melhor e mais significativa aprendizagem do conteúdo razões e proporções. Nossa intenção em realizar uma abordagem interdisciplinar está justamente no foco dado à *prática interdisciplinar*, a qual fica claramente caracterizada nas oficinas a seguir, mesmo que por muitas vezes, percebem-se situações *transdiciplinares*, exatamente por defender o ponto de vista descrito no presente capítulo. Neste contexto, o aluno desenvolve competências importantes para sua formação escolar e social, o que será apontado de uma melhor maneira no próximo capítulo.

Capítulo 5 - Implicações Educacionais: Trabalhando a Música para aprender Matemática no Ensino Fundamental II

Sabemos que muitas são as possibilidades de trabalho quanto ao ensino de algumas características e alguns conceitos no campo da Matemática usando a Música e vice-versa, como o trabalho com frações equivalentes e os valores de tempo de nota, ou ainda a organização da partitura e seus mais variados sinais, mas nosso objetivo com este projeto é o de trabalhar a interdisciplinaridade entre Educação Matemática e Educação Musical desenvolvendo e aprimorando o conteúdo matemático ligado a razões e proporções. Vale salientar também que a busca por tais relações inovadoras no ensino de Matemática foi valorizada pela importância da Educação Musical na formação do cidadão, além das alterações na Lei de Diretrizes e Bases da Educação brasileira referentes ao ensino de Música.

Com a Lei nº 11.769, assinada pelo então presidente Luís Inácio Lula da Silva, no dia 18 de agosto de 2008, houve uma alteração na Lei nº 9.394 – a Lei de Diretrizes e Bases da Educação do ano de 1996 –, exigindo que o ensino de música seja obrigatório na Educação Básica, podendo estar presente como uma nova disciplina na grade curricular, ou simplesmente fazendo parte do componente curricular referente ao ensino de Arte. Estas mudanças abrem caminho para novas possibilidades de trabalho nas escolas, principalmente com relação a novas perspectivas em sala de aula usando a Música como ferramenta.

Aliada a outras disciplinas, a formação na escola básica favorece e é favorecida com a presença cada vez mais forte da Música no currículo. Neste contexto, a Educação Matemática é favorecida pelas experiências práticas e significativas para o desenvolvimento do conteúdo matemático, e a Educação Musical pela compreensão das modificações realizadas pelo homem na música ocidental, principalmente com relação ao Temperamento, onde as sequências de razões propostas por Pitágoras já não atendiam à demanda musical da época, ou seja, à necessidade de se produzir a mesma nota uma ou várias oitavas acima ou abaixo da primeira[16]. É através da *prática interdisciplinar* que podem ser exploradas as características tanto de uma quanto de outra disciplina, mas, acima de tudo, desenvolvendo competências importantes para a formação do aluno, baseando-se em uma situação ligada à realidade.

O presente trabalho propõe o desenvolvimento do projeto interdisciplinar por meio de oficinas cuja construção seria realizada com os alunos trabalhando em grupo, discutindo possibilidades de intervenção e exploração do monocórdio de Pitágoras, pesquisando sobre a origem dos termos *razão* e *fração*, finalizando sempre com um registro da atividade, processo que seria todo detalhado para os alunos no primeiro contato com o projeto. A abordagem interdisciplinar permite que conteúdos que você daria de forma convencional, seguindo o livro didático, e totalmente abstratos sejam ensinados e aplicados na prática. Temos um bom exemplo nas colocações de Cruz (2009) sobre sua pesquisa relacionando a prática da Dança Esportiva em Cadeiras de Rodas (DECR), quando participando de uma aula de dança a professora:

> [...] resolveu executar os passos utilizando contagem e então comecei a perceber a diferença e indagá-la o porquê do contar em '4' aquela *rumba*[17] e ela respondeu-me: 'porque é quaternária!'. Continuei: 'E o samba que contamos '1' e '2' é binário?'. E com sua resposta: 'Sim, é binário', tudo começou a fazer sentido. Por que não me ensinaram assim? A Música é Matemática! Dessa conclusão comecei a perceber que os passos que também eram executados, eram figuras

[16] Na escala pitagórica os intervalos de quinta produziam uma escala espiralada, que não se fechava. Com a necessidade de se fechar este ciclo é que se dá a busca por sons que produzissem a mesma nota em frequências diferentes.

[17] "Ritmo de origem cubana, no ambiente da DECR, lembra um bolero mais estilizado. Segundo Ried é uma dança que seduz com erotismo, saudade, dividido entre a dedicação e a recusa." (nota da autora)

geométricas desenhadas: ora pelos pés, rodas, tronco, braços, ou pelo corpo, como um todo. (CRUZ, 2009, p. 148)

Sabemos que o conhecimento musical dos alunos é heterogêneo, tendo de iniciantes musicais até estudantes ou ainda músicos profissionais, o que deve ser observado pelo professor antes de iniciar as oficinas. Os mais experientes no campo musical podem auxiliá-lo na demonstração das relações musicais a serem estudadas, executando notas solicitadas em instrumentos variados, ou ainda na pesquisa e troca de informações sobre a evolução da música, os diferentes instrumentos com alguma semelhança ao monocórdio, e na melhor compreensão do temperamento na música ocidental. Com isso, trabalhar com as oficinas é basear-se nas palavras do grande educador Paulo Freire (1996, p. 22) "[...] ensinar não é *transferir conhecimento*, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção".

Para tanto, a intenção é de que o presente capítulo nos dê possibilidades de trabalho com o registro de procedimentos para o desenvolvimento de oficinas e propostas de intervenção ao visar o ensino de razões e proporções utilizando elementos musicais, com base no início da formatação da música ocidental oriunda dos experimentos pitagóricos.

5.1. Das oficinas

As oficinas aqui presentes são sugestões de trabalho com o tema em questão, onde os alunos construirão o conhecimento, sempre relacionando conhecimentos matemáticos e musicais. Apresentaremos a sequência de trabalho de cada oficina com questionamentos interessantes e importantes que podem ser realizados pelo professor[18], de acordo com a necessidade de cada turma, para que a oficina atinja seus objetivos. Vale destacar a importância

[18] Estes questionamentos serão apresentados em itálico na descrição das oficinas.

do uso do *duocórdio*[19] (ou *dicórdio*) durante as oficinas, sempre trazendo uma comparação das notas musicais emitidas por este instrumento e um piano ou um teclado. A sugestão do uso de um destes dois instrumentos musicais fica por conta da fácil visualização das relações entre as notas por meio das teclas do instrumento, diferente de um violão, onde as relações ficariam um pouco mais difíceis de se perceber.

5.1.1. Oficina 1 – Apresentando as relações músico-matemáticas

1) Apresentar o vídeo "Donald no País da Matemática" para a turma.

Quais são as relações entre Matemática e Música observadas no vídeo? São relações rítmicas ou melódicas? O que é ritmo? O que é melodia? Pitágoras seria então o "pai" da música mundial?

2) Propor aos alunos algumas questões para pesquisa na biblioteca da escola e na internet usando o laboratório de informática:

- Quem foi Pitágoras de Samos?
- O que é um monocórdio?
- O que são intervalos musicais?
- O que é uma razão? E uma proporção?
- O que são escalas musicais? Para quê servem? Busquem exemplos.
- O que é a *gama pitagórica*?

3) Com o material pesquisado, propor aos alunos a elaboração de um pequeno texto sobre a história de Pitágoras e suas contribuições para o desenvolvimento da Música.

[19] Também chamado de *dicórdio*, é um instrumento com os mesmos princípios e características de um monocórdio, mas com duas cordas ao invés de uma. A escolha deste instrumento vem de encontro com a proposta do trabalho, facilitando a comparação entre os sons emitidos por cada corda.

4) Apresentar aos alunos um modelo de *duocórdio*, que será construído também pelos alunos para o desenvolvimento dos experimentos[20] – sugestão de um *duocórdio* por dupla ou trio. Pedir que os alunos "afinem" as duas cordas com uma nota dada pelo professor através de um piano ou teclado (um dó natural, por exemplo).

5) Deixar que os alunos explorem o instrumento e experimentem diferentes sons e posicionamentos dos cavaletes.

Há alguma relação entre a corda solta e o som produzido por vocês com o cavalete colocado? Vocês conseguiram fazer esta comparação?

6) Retomando o que foi visto no vídeo inicial, apresentar aos alunos os experimentos de Pitágoras no duocórdio, sempre comparando o som emitido por uma *corda solta*[21] com o som da parte vibrante da corda fixada pelos cavaletes.

Trazer para os alunos os intervalos de oitava (1/2 do comprimento da corda), quinta (2/3) e quarta (1/4), mostrando os mesmos intervalos produzidos em um piano.

7) Propor aos alunos algumas reflexões:

- Com os intervalos propostos por Pitágoras seriam possível construirmos as 7 notas da escala musical que conhecemos (do, ré, mi, fá, sol, lá e si)?

- Partindo deste contexto musical, da relação entre as notas e o comprimento das cordas vibradas, como podemos definir uma *razão*?

- Qual seria a diferença entre *razão* e *fração*?

8) Exibir aos alunos os vídeos da série "Arte & Matemática" referentes à Música para que eles possam tirar suas próprias conclusões.

[20] É importante que os alunos recebam a base do instrumento pré-construída, economizando tempo e evitando acidentes com ferramentas pesadas.
[21] Entenderemos aqui *corda solta* como sendo a corda onde não colocaremos cavaletes.

5.1.2. Oficina 2 – Analisando comprimentos de corda no *duocórdio*

Distribuir aos alunos *duocórdios* com as duas cordas afinadas em uma mesma nota (ré, por exemplo) – dois a três alunos por instrumento. Lembrar aos alunos as relações existentes nos intervalos propostos por Pitágoras, fazendo um paralelo dos intervalos em um piano e no duocórdio: subir uma oitava corresponde a tomar metade da corda; subir uma quinta, 2/3 da corda; subir uma quarta, 3/4 da corda.

1) Usando as duas cordas do instrumento, produzam os intervalos a seguir:

a) uma quarta acima

b) uma quinta acima

c) uma oitava acima

d) duas oitavas acima

O que podemos observar sobre os sons emitidos? Há alguma relação entre eles? Compare-os com os mesmos intervalos reproduzidos por um piano.

2) Seja L o comprimento correspondente a uma nota dada. Que comprimentos produzirão?

a) duas quartas acima

b) duas quintas acima

c) uma quinta acima e uma oitava abaixo

d) uma quinta acima e uma quarta abaixo

3) Seja um comprimento *L* correspondente a uma nota dada, como podemos obter:

a) sua oitava *(L/2)*, superpondo somente intervalos de quartas e quintas?

b) sua quinta (*2L/3*), superpondo somente intervalos de quartas e oitavas?

c) sua quarta (*3L/4*), superpondo somente intervalos de quinta e oitava?

4) Seja L o comprimento correspondente a uma nota dada. Que intervalos são produzidos por:

a) L/4

b) 4L/9

b) 9L/16

c) 8L/9

d) 4L/3

5) Seja L o comprimento correspondente a uma nota dada. Qual o comprimento necessário para elevar tal nota de uma oitava e uma quinta, decrescendo-a, em seguida, de duas quartas? Ouça a nota resultante no duocórdio, comparando-a com aquela atingida ao realizarmos tal procedimento no piano.

O que podemos observar? Há diferença entre os sons? Por quê?

6) Afinando as cordas do duocórdio em ré, qual o comprimento da corda, na concepção pitagórica, que produz a nota mi? Ouça o resultado obtido no duocórdio comparando-o com o piano.

E agora, há diferença entre os sons? Por quê? Quais são as conclusões que podemos construir a partir destes experimentos?

5.1.3. Oficina 3 – Diferenciando musicalmente frações e razões

Distribuir aos alunos *duocórdios* com as duas cordas afinadas em uma mesma nota (dó, por exemplo) – dois a três alunos por instrumento. As cordas devem ter 48 cm de comprimento. Lembrar aos alunos as relações dadas pelos intervalos pitagóricos, fazendo um paralelo entre um piano e o duocórdio: subir uma oitava corresponde a tomar metade da corda; subir uma quinta, 2/3 da corda; subir uma quarta, 3/4 da corda.

1) Partindo de intervalos de quinta propostos por Pitágoras (relação de comprimentos em 2/3), procure desenvolver a *gama pitagórica*.

2) Para as questões propostas a seguir adote L = 6 cm:

a) Qual seria o comprimento correspondente a 2L? E a 3L? Produza o som a partir destes comprimentos de corda.

b) Compare o intervalo de sons produzidos por 2L e 3L com o intervalo produzido por 4L e 6L. Partindo das considerações de Pitágoras, o que podemos concluir?

c) Compare os comprimentos dos intervalos anteriores (2 para 3 e 4 para 6), quais são as relações matemáticas que podemos estabelecer entre eles?[22]

3) Usando os intervalos de quinta, reproduza a *gama pitagórica* ao piano. O que podemos concluir?

Em quais instrumentos musicais poderíamos reproduzir a gama pitagórica tal qual idealizada por Pitágoras de Samos? Em quais não poderíamos? Quais são suas vantagens e desvantagens do ponto de vista musical? A afinação pitagórica é a mesma que fundamenta a música ocidental nos dias de hoje?

4) Faça uma breve pesquisa sobre a definição dos termos *razão* e *fração*. Há relação destes termos com o que foi estudado a partir do duocórdio? E com a Música? Quais?

5) Exibir aos alunos os vídeos da série "Arte & Matemática" referentes à Música para que eles possam tirar suas próprias conclusões.

O que podemos dizer então sobre o temperamento? Ele existe em todo tipo de música?

5.2. Intervenções e registros

Após a realização das oficinas apresentadas, é importante que o professor tenha um registro sobre o que foi trabalhado, como se desenvolveu a oficina, como foi recebida a atividade por parte dos alunos, como ela pode ser melhorada e quais foram os benefícios da mesma para o aprendizado do conteúdo proposto. Sendo assim:

[22] A ideia desta questão é trazer a relação de equivalência existente quando comparamos numericamente os comprimentos, mas que se perdem no contexto musical.

> [...] os alunos são encorajados a escrever sobre o que fizeram, aprenderam ou perceberam durante a realização de uma dada atividade, a qual pode ser um jogo, um problema ou uma tarefa qualquer.
>
> Ao explicitar dúvidas e outras impressões, os alunos permitem ao professor perceber em quais aspectos da atividade apresentam mais incompreensões, em que pontos avançaram, se o que era essencial foi compreendido e que intervenções precisará fazer. (SMOLE, 2001, p. 38)

Analisando os registros produzidos pelos alunos após a oficina, o professor terá informações valiosas para prosseguir com seu planejamento em sala de aula ou explorar melhor alguns objetivos não atingidos, na atividade ou ainda em novas oportunidades de trabalho.

Considerações finais

A Matemática ensinada nas escolas brasileiras recebeu inúmeras influências de tendências durante anos, que aqui chegaram sofrendo, na maioria das vezes, distorções gravíssimas. Quando tratamos do ensino de razões e proporções e da diferenciação entre os termos matemáticos, tudo parece muito mais confuso. É preciso sempre ter cuidado com a apresentação, construção e utilização dos termos discutidos neste trabalho – *fração*, *razão*, *proporção*, *quociente* e *números decimais*, na Matemática descrita pelos livros didáticos, naquela apresentada na Literatura Infantil, a que está presente nas pesquisas das universidades, ou utilizada na formação de professores.

As construções dos conceitos de *razão* e *fração* possuem origens distintas que precisam ser apresentadas para os alunos, em busca de uma melhor compreensão da relação entre todos os termos e conceitos apresentados nesta tese. Com o auxílio da Música e os experimentos realizados por Pitágoras de Samos buscamos uma nova abordagem para a construção e apresentação do conteúdo de razões e proporções, esclarecendo as diferenças entre os termos, compreendendo as relações entre eles. Faz-se importante destacar que também há uma colaboração da Educação Matemática para com a Educação Musical, objetivando uma melhor compreensão do porque não utilizamos a escala pitagórica até os dias de hoje na música do Ocidente, a qual foi modificada principalmente pelo temperamento, abandonando-se a chamada *gama pitagórica*, fazendo com o que o aluno compreenda também outras relações musicais.

Todo o processo realizado durante as oficinas que foram propostas no presente trabalho segue como fundamento uma prática interdisciplinar, desenvolvendo e construindo conceitos e conhecimentos tanto na Educação Matemática quanto na Educação Musical, explorando características de ambas as áreas, mesmo que esta proposta de trabalho seja direcionada ao professor de Matemática. Essa busca por informações e interesse em uma área fora de sua formação faz com que o educador matemático exerça também sua prática interdisciplinar, afinal, só é possível realizar um projeto com tais características se o orientador do mesmo utiliza um *pensar interdisciplinar*. Portanto, a interdisciplinaridade não se resume apenas na execução do projeto, existindo outras atitudes que completam este trabalho.

Ainda sob uma perspectiva interdisciplinar acreditamos que, para uma boa formação do educador matemático haja a necessidade da presença de um interlocutor em suas atividades, percebendo as possíveis leituras sobre o trabalho a ser desenvolvido. Durante a elaboração desta tese este foi um ponto essencial, acontecendo tanto nas discussões ocorridas dentro dos grupos de pesquisa dos quais eu participei, quanto nas conversas com colegas dos colégios e universidades onde trabalhei (educadores das mais diversas áreas), ou ainda nas conversas com músicos com os quais tive o prazer de trocar ideias, discutir conceitos e fazer música.

É inegável, portanto, um destaque para o posicionamento do Grupo EMFoco[23] como interlocutor no processo final de construção do corpo deste trabalho, tanto nas discussões durante as reuniões do grupo, quanto no convite para proferir uma videoconferência. Ao participar da série de videoconferências “Descomplicando a Matemática”, idealizada pelo grupo e realizada no Instituto Anísio Teixeira, em Salvador (BA), tive a oportunidade de levantar algumas possibilidades de trabalho interdisciplinar fazendo uso da Música, ouvindo críticas que colaboraram para a construção do projeto.

Pensando a formação inicial do educador matemático e do educador musical, é imprescindível que algumas mudanças sejam realizadas. O pensar interdisciplinar implica em

[23] O grupo de estudos e pesquisas “Educação Matemática em Foco – EMFoco” é um grupo de estudos situado na cidade de Salvador (BA), composto por pessoas comprometidas com o desenvolvimento e a valorização da Educação Matemática.

uma transformação profunda na formação de professores, caracterizada por uma mudança de atitude do educador, sensibilizando e desenvolvendo o sentido da criação e da imaginação. O campo da Educação Matemática hoje está muito mais desenvolvido e estruturado do que o da Educação Musical, mas as mudanças precisam acontecer o mais rápido possível, desde o fomento e o acesso às práticas culturais, quanto às mudanças no cenário educacional atual.

A partir das oficinas e intervenções propostas, espera-se criar um novo olhar para o estudo de razões e proporções, criando a noção e diferenciação dos termos matemáticos, compreendendo um dos fatores que motivaram modificações na estrutura da música ocidental, mas principalmente, desenvolver nos alunos a capacidade de questionar processos naturais e artificiais, de identificar regularidades, de usar instrumentos de medida, de formular hipóteses e prever resultados, de perceber o papel da matemática nos mais variados campos do conhecimento, desenvolvendo o senso crítico e proporcionando uma formação destinada ao "aprender a aprender".

Com as mudanças que vem acontecendo na educação básica brasileira, desde sua estruturação com o Ensino Fundamental de nove anos, até o seu ingresso nas universidades com o novo ENEM, o que se percebe é não só uma real necessidade, mas um direcionamento voltado para uma visão interdisciplinar nos exames criados e nas profissões que se constituíram com o tempo. E por que não na escola? Por que não temos professores e projetos com uma visão verdadeiramente interdisciplinar? Sobre essa maneira interdisciplinar de encarar o ensino e a vida de um modo geral, registramos aqui um poema para não nos esquecermos da importância do pensar interdisciplinar no principal papel da escola: formar cidadãos.

PERCEBER-SE INTERDISCIPLINAR[24]

Maria Elisa Ferreira

É sentir-se componente de um todo.
É saber-se filho das estrelas,
Parte do Universo e um Universo à parte...

É juntar esforços na construção do mundo,
Desintegrando-se do outro, para, com ele,
Reintegrar-se no novo...

É ter consciência de que a natureza o gerou:
De que é fruto dela, jamais seu senhor...

É saber que a humanidade terrena surgiu de uma evolução,
E que, talvez, não seja ela a única no espaço sideral...
É saber que a liberdade está em afirmar-se integrando-se,
Que o crescer histórico consente em ser retardado,
Nunca eternamente impedido...

É reconhecer no "Uni-verso" "unidade na diversidade"
E estar consciente de que o evoluir é lei geral...

É saber que, etimologicamente, "mundus" é pureza
E (quem sabe?) encontrar a paz interior...

[24] FAZENDA, I. C. Interdisciplinaridade: um projeto em parceria, São Paulo, Loyola, 1991, p. 96 e 97

Pois

> "quando a mente é perturbada
>
> produz-se a multiplicidade das coisas;
>
> quando a mente é aquietada,
>
> a multiplicidade das coisas desaparece." [25]

[25] ASHVAGHOSHA, The Awekening of Faith, p. 78, cit in CAPRA, F. O tao da física, Cultrix, 1986, São Paulo, p. 26 (nota da autora)

Bibliografia

ABDOUNUR, O. J., BOTTURA, C. B. *From Mathematics to Music: a Numerical Journey through sounds*. São Paulo, IME-USP, 1997. 20p. (RT-MAT-9701).

ABDOUNUR, Oscar João. *Compounding ratios and intervals; an educational approach in mathematics and music*. [S.I.]: Teaching Mathematics and Its Applications, vol. 21, nº I, 2002. p. 1-10

______. *Matemática e Música: o pensamento analógico na construção de significados*. – 3ª ed. – São Paulo: Escrituras Editora, 2003. (Coleção ensaios transversais)

______. "Histórias da Relação Matemática/Música e Construção de Significados". In: FOSSA, John A. (org.) *Facetas do Diamante: Ensaios sobre Educação Matemática e História da Matemática*. Rio Claro: Editora da SBHMat, 2000

ABRANTES, P. *Avaliação e educação matemática*. Rio de Janeiro: MEM/USU GEPEM, 1995. v.1. (Série: Reflexões em Educação Matemática)

ALVES, Railda F.; BRASILEIRO, Maria do Carmo E.; BRITO, Suerde M. de O. *Interdisciplinaridade: um conceito em construção*. Episteme, Porto Alegre, n. 19, p. 139-148, jul./dez. 2004.

BARNABE, F. M. "O Arquimedes Holandês: um estudo sobre a matemática de Simon Stevin". In: *Anais do VI SBHMat*, Brasília, 2005.

BARROS, Marília T. A. *Motivando a construção do Saber Matemático*. BOLEMA – Boletim de Educação Matemática, ano 3, nº 4, p. 51 a 53. Rio Claro, 1988.

BONGIOVANNI, V. *As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido: a teoria das proporções e o método de exaustão*. Buenos Aires: Unión – Revista Iberoamericana de Educación Matemática – FISEM. v.6, n.2. P. 91-110, jun. 2005.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2ª ed. São Paulo: Ed. Edgard Blücher, 1996.

CÂNDIDO, Patrícia T. "Comunicação em Matemática", In: SMOLE, K. C. S; DINIZ, M. I. (Orgs.) *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas (Artmed), 2001.

CARDOSO, L. *Educação musical: método*. Salvador: Mimeo, 1972.

CORDIOLLI, Marcos. *O currículo e as relações de inter, multi, trans, pluri e polidisciplinaridade na Escola: notas para debate conceitual*. TEMAS em Educação I. s.l. Futuro, 2002. p. 303-314.

CRUZ, Anete Otília Cardoso de Santana. "Dança Esportiva em Cadeira de Rodas: um ambiente propício para o trabalho investigativo da matemática". In: DINIZ, L. N. & BORBA, M. C. (orgs.) *Grupo EMFoco: diferentes olhares, múltiplos focos e autoformação continuada de educadores matemáticos*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

CUNHA, N. P. *Matemática & música: diálogo interdisciplinar*. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2006.

______. *Iniciação Musical: Bases epistemológicas dos doze centros tonais*. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2005.

DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de matemática*. São Paulo: Ática, 1996.

______. *Tudo é Matemática*. vol. 6º e 7º anos. São Paulo: Ática, 2010.

EUCLIDES; COMMANDINO, Frederico. *Elementos de Geometria*. São Paulo: Edições Cultura, 1944.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FAZENDA, Ivani C. A. (org.) *Didática e interdisciplinaridade*. Campinas: Papirus, 1998.

FAZENDA, Ivani C. A. *Integração e Interdisciplinaridade no Ensino Brasileiro: efetividade ou ideologia*. São Paulo: Loyola, 2002.

______. *Interdisciplinaridade: História, teoria e pesquisa*. Campinas: Papirus, 1994 (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).

______. *Interdisciplinaridade: um projeto em parceria*. São Paulo: Loyola, 1991.

______. *Metodologia da Pesquisa Educacional*.São Paulo: Cortez, 1997.

FREIRE, Paulo. *A importância do ato de ler: em três artigos que se completam*. 2ª edição. São Paulo: Autores Associados: Cortez, 1982.

______. *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 1996 (Coleção Leitura)

FERREIRA, Aurélio B. H. *Novo dicionário da Língua Portuguesa*. 1ª edição. Editora Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 1975.

FUNARO, Vânia M. B. de Oliveira [coord.]. *Diretrizes para apresentação de dissertações e teses da USP : documento eletrônico e impresso Parte I (ABNT) / Sistema Integrado de Bibliotecas da USP*. 2ª ed. rev. ampl. São Paulo : Sistema Integrado de Bibliotecas da USP, 2009. 102 p. - - (Cadernos de Estudos ; 9)

GARCIA, Lenise A. M. *Competências e Habilidades: você sabe lidar com isso?* **Educação e Ciência On-line**, Brasília: Universidade de Brasília. Disponível em: http://uvnt.universidadevirtual.br/ciencias/002.htm. Acesso em: 12 jan. 2005

GARBI, Gilberto G. *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. 5ª edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GÓMEZ-GRANELL, C. "A aquisição da linguagem matemática; símbolo e significado". In: TEBEROSKY, A.; TOLCHINSKY, L. (Orgs.). *Além da alfabetização*. São Paulo: Ática, 1996.

GUSDORF, G. *Professores para quê?: Para uma Pedagogia da Pedagogia*. 2.ed. São Paulo: Martins Fontes, 1995.

IMENES, L. M. P. *Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem da matemática*. BOLEMA – Boletim de Educação Matemática, ano 5, nº 6, p. 21 a 27. Rio Claro, 1990.

IMENES, L. M. P.; JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. C. *Frações e números decimais*. São Paulo: Atual, 1993. (Pra que serve matemática?)

KAUFMAN, A. M.; RODRIGUEZ, M. E. *Escola, leitura e produção de textos*. Porto Alegre: Artes Médicas (Artmed), 1995.

LACERDA, Osvaldo Costa de. *Compêndio de Teoria Elementar da Música*. 11ª ed. São Paulo: Ricordi, 1998.

LOBATO, Monteiro. *Aritmética da Emília*. São Paulo: Brasiliense, 1971.

MACHADO, N. J. *Epistemologia e didática*. São Paulo: Cortez, 1995.

MÁRSICO, L. O. *Introdução à leitura e à grafia musical*. Porto Alegre, 1987.

MASSIN, J.; MASSIN, B. *História da Música Ocidental*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

MIORIM, M. A. *Introdução à história da educação matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

MOURA, I. M. C.; BOSCARDIN, M. T.; ZAGONEL, B. *Musicalizando crianças: teoria e prática da educação musical*. São Paulo: Ática, 1989.

NOVA ESCOLA. Ano XIX, nº 174, Agosto 2004. São Paulo: Editora Abril, 2004.

______. Ano XXVI, nº 239, Jan/Fev 2011. São Paulo: Editora Abril, 2011.

______. Ano XXVI, nº 241, Abril 2011. São Paulo: Editora Abril, 2011.

______. Ano XXVI, nº 243, Junho/Julho 2011. São Paulo: Editora Abril, 2011.

NICOLESCU, Basarab. *O manifesto da transdisciplinaridade*. São Paulo: TRIOM, 1999.

PERRENOUD, P. *Construir as competências desde a escola*. Porto Alegre: Artmed, 1999.

PIAGET, J. *A Formação do Símbolo na criança*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

PIMENTA, C. *Interdisciplinaridade, Humanismo, Universidade*. Porto: Campo das Letras, 2004.

PIRES, C. M. C. *Currículos de matemática: da organização linear à idéia de rede*. São Paulo: FTD, 2000.

POMBO, Olga. *Epistemologia da Interdisciplinaridade*, Ideação – Revista do Centro de educação e Letras da Unioeste, Foz do Iguaçu, v. 10, nº 1 - p. 9-40, 1º sem. 2008

______. *Interdisciplinaridade: Ambições e limites*. Lisboa: Relógio d'Água, 2004

______. *Interdisciplinaridade e integração dos saberes*. Liinc em Revista, v.1, n.1, março 2005, p. 3 -15 http://www.ibict.br/liinc

______. *Praticas Interdisciplinares*. Sociologias, Porto Alegre, ano 8, nº 15, jan/jun 2006, p. 208-249

POZZOLI, Heitor. *Guia Teórico-Prático para o ensino do ditado musical – I e II partes*. São Paulo: Ricordi, 1998.

REMATEC, Revista de Matemática, Ensino e Cultura. Ano 4 - nº 5, julho de 2009. Natal: EDUFRN, 2009.

SANTALÓ, Luis A. "Matemática para não-matemáticos". In: PARRA, C. & SAIZ, I. [orgs.] Porto Alegre: Artes Médicas (Artmed), 1996.

SEVERINO, Antônio J. *Metodologia do Trabalho Científico*. 22ª ed. São Paulo: Cortez, 2002.

SINCLAIR, H. (Org.). *A produção de notações na criança*. São Paulo: Cortez, 1990.

SMITH, D.E. *A Source Book in Mathematics*. (2 vol.). Dover, 1939.

SMOLE, Kátia C. S. "Textos em Matemática: Por Que Não?". In: SMOLE, K. C. S; DINIZ, M. I. (Orgs.) *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas (Artmed), 2001.

TINOCO, Lucia. *Quando e como um professor está fazendo Educação Matemática*. BOLEMA – Boletim de Educação Matemática, ano 6, nº 7, p. 68 a 77. Rio Claro, 1991.

TOMAZ, Vanessa S.; DAVID, Maria M. M. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2008. (Coleção Tend6encias em Educação Matemática)

VISCONTI, Márcia.; BIAGIONI, Maria Zei. *Guia para Educação e Prática Musical em Escolas*. 1ª ed. São Paulo: ABEMÚSICA, 2002

WISNIK, J. M. "O som e o sentido: uma outra história das músicas". São Paulo: Editora Cia das Letras, 1989.