UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

SAMUEL GOMES DUARTE

# A complementaridade entre análise e síntese nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática

SÃO PAULO

2014

SAMUEL GOMES DUARTE

# A complementaridade entre análise e síntese nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática

*Dissertação apresentada à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre em Educação*

*Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática*

*Orientador: Prof. Dr. Vinício de Macedo Santos*

SÃO PAULO

2014

Nome: DUARTE, Samuel Gomes

Título: A complementaridade entre análise e síntese nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática

*Dissertação apresentada à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre em Educação*

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. ___________________Instituição: ___________________

Julgamento: ________________Assinatura: __________________

Prof. Dr. ___________________Instituição: ___________________

Julgamento: ________________Assinatura: __________________

Prof. Dr. ___________________Instituição: ___________________

Julgamento: ________________Assinatura: __________________

# Dedicatória

*À minha amada esposa, Natália, com amor, admiração e, especialmente, gratidão pelo carinho, compreensão e incansável apoio ao longo do período de elaboração deste trabalho.*

# Agradecimentos

Aos meus pais, pelo carinho, apoio e ensinamentos que vão além da educação formal, complementando-a.

Ao meu irmão, que me ensinaste muito sobre o que é pesquisar.

Ao prof. Dr. Vinício de Macedo Santos, pela sábia orientação, cuidadosa e paciente, cuja contribuição para minha formação é inestimável.

Aos professores Antonio Carlos Brolezzi e Nílson José Machado pelas contribuições dadas quando do exame de qualificação.

À Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, pela oportunidade de realização do curso.

Aos colegas do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática (CAEM), pelas ótimas conversas e reflexões acerca do ensino desta ciência.

À Comunidade Educativa CEDAC, pela oportunidade de trabalhar em conformidade com meus estudos e por valorizá-los, sempre visando à educação pública de qualidade.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), pela oportunidade de aperfeiçoamento de minha prática docente.

Aos meus amigos, em geral, ubíquos e compreensíveis pela minha ausência.

# EPÍGRAFE

É no problema da educação que assenta o grande
segredo do aperfeiçoamento da humanidade.

**Immanuel Kant**

# RESUMO

DUARTE, S. G.. **A complementaridade entre análise e síntese nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática**. 2014. 99 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

O objetivo central do presente trabalho é analisar e discutir a presença e relação entre análise e síntese, no contexto do ensino de matemática e os possíveis desdobramentos em relação à aprendizagem dos alunos. Como o par análise e síntese pode estar presente nas aulas de Matemática e como esses elementos se relacionam com os processos de ensino e de aprendizagem dessa disciplina? Uma revisão bibliográfica centrada em elementos da didática da Matemática, da história da educação brasileira e do desenvolvimento do conhecimento matemático, e da noção de competências, e um estudo de documentos curriculares oficiais foram necessários para fundamentar e desenvolver a análise e discussão de duas situações-problema ilustrativas do ensino de Matemática da Educação Básica. Para cada uma das situações propostas, são apresentadas e analisadas quatro resoluções possíveis, a partir das quais são feitas a discussão e sistematização de noções matemáticas mobilizadas, e uma reflexão sobre as dimensões e implicações do par análise e síntese nessas resoluções.



Palavras-chave: Análise, Síntese, Competências, Didática da Matemática.

# ABSTRACT

DUARTE, S. G.. **The complementarily between analysis and synthesis of the math teaching and learning processes**. 2014. 99 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

The main objective of this study is to analyze and discuss the relationship and presence between analysis and synthesis in the context of mathematics education and the possible consequences in relation to students learning. How the pair analysis and synthesis may be present in math class? How these elements relate to processes of teaching and learning that discipline? A literature review focused on didactics of mathematics elements and the Brazilian education history and the study of official curriculum documents were necessary to support and develop the analysis and discussion of two illustrative situations on teaching mathematics in basic education. For each of the proposed conditions are presented and analyzed four possible resolutions to discussion and systematization of mathematical notions mobilized are made and reflect on the dimensions and implications of the pair analysis and synthesis in the resolutions.

Keyword: Analysis, Synthesis, Competences, Didactic of the Mathematics.

# Lista de Quadros

# Lista de figuras

# Lista de siglas

| | |
|---|---|
| PCN | Parâmetros Curriculares Nacionais |
| NCTM | National Council of Teachers of Mathematics |
| CAEM | Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática |
| PCNEF | Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental |
| ENEM | Exame Nacional do Ensino Médio |
| MEC | Ministério da Educação |

## SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

As discussões sobre o que é a pesquisa em Educação Matemática ou Didática da Matemática são amplas e, a esse respeito, não há uma única interpretação.

Educação Matemática pode ser considerada como uma área do conhecimento na qual profissionais trabalham sob uma ampla diversidade de tarefas para transmitir o conhecimento matemático à sociedade atual, considerando toda a complexidade envolvida na questão (RICO e SIERRA, 2000, p. 80). Segundo os autores:

> Entre essas tarefas, temos: fornecer situações matemáticas, promover a aprendizagem dos estudantes, avaliar o conhecimento dos alunos, produzir e avaliar materiais curriculares, escrever livros textos e outros documentos escolares, formar professores, gestar e coordenar os aspectos administrativos da educação matemática, orientar os professores de matemática, editar revistas e difundir experiências educativas, dirigir departamentos e equipes de professores, colaborar com grupos de pesquisa e inovação, pesquisar, e muitas outras que podemos considerar (RICO e SIERRA, 2000, p. 80).

A Didática da Matemática, ainda segundo os autores, seria uma classe concreta de atividade profissional dentro da educação matemática, e encontra seu objeto de estudo e trabalho em problemas que surgem de três frentes, a saber: os problemas derivados do ensino, da aprendizagem e a valorização da Matemática no meio escolar; a formação, preparação, atuação e desenvolvimento dos profissionais que intencionalmente ensinam Matemática; a fundamentação e teorização que permitem interpretar e tomar decisões sobre o ensino e a aprendizagem em Matemática (RICO e SIERRA, 2000, p. 99).

Considerando, de acordo com a linha adota por RICO e SIERRA, a concepção de que o termo educação é mais amplo que o termo didática e que, portanto, deveria se diferenciar Educação Matemática de Didática da Matemática, GODINO (2003, p. 2) aponta para a Educação Matemática como todo o sistema de conhecimentos, instituições, planos de formação e finalidades formativas que conformam uma atividade social complexa e diversificada sobre o ensino de Matemática. E chama atenção para a Didática da Matemática enquanto uma disciplina.

Um fator importante nesse contexto, é a utilização de nomenclaturas diferentes em regiões diferentes do mundo. GODINO lembra, ainda, que no mundo anglo-saxão o que entendemos como Educação Matemática é entendido como Didática da Matemática na França, Alemanha ou Espanha.

No presente trabalho, a noção de Didática da Matemática adotada é aquela defendida em RICO e SIERRA (2000) - entendida como uma classe concreta de atividade profissional interna à área do conhecimento Educação Matemática, e pautada em questões inerentes ao ensino e à aprendizagem de Matemática como aquelas advindas de problemas observados no ensino e na aprendizagem dos alunos, na formação de professores, e em fundamentações e teorizações a esse respeito.

Desde os estudos de Graduação, no curso de Licenciatura em Matemática, há questões que me[1] causam inquietação e que se constituíram objeto de interesse para a realização do presente trabalho.

Do tempo em que era aluno da escola básica à Graduação, pude perceber como colegas, em grande parte, tinham dificuldade de diferentes naturezas ao estudar a disciplina. Ao longo do curso de Licenciatura em Matemática e, sobretudo, após licenciar-me, pude refletir de maneira mais embasada sobre o ensino que tive ao longo da educação básica e compreender que o mesmo resultava reduzido. Entre muitos exemplos, destaco: os cálculos com foco em medidas, ou da utilização de fórmulas sem compreensão de conceitos, embasamento matemático insuficiente e falta do senso de autonomia, todos esses, fatores que influenciam diretamente a aprendizagem dos alunos. Pode-se ressaltar, ainda, a lógica de estudo de colegas da Graduação que, em grande parte, reproduziam essa prática.

[1] Ao longo do trabalho, utilizaremos a primeira pessoa do singular quando se tratar de experiências individuais do pesquisador.

Considero que os fatores que motivaram minha reflexão sobre o ensino que recebi tem relação com alguns aspectos identificados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> em nosso país o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão (BRASIL, 1998, p. 18).

Desde o início de minha formação acadêmica tenho me interessado pelos conhecimentos gerados no campo da Didática da Matemática que, a meu ver, contém elementos que requalificam o ensino da Matemática e contribuem para evitar a reprodução daquilo que vivenciei na escola básica.

Ao longo das reflexões realizadas a partir da contínua experiência relatada e em meio a essas inquietações, os aspectos análise e síntese adquiriram importância e despertaram meu interesse pela investigação desses aspectos, uma vez que, com frequência, percebe-se a supervalorização da análise nos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática dissociada da síntese como elemento complementar nesses processos.

Esse é um dos fatores que compõem as discussões acerca da Educação Matemática, e Steiner (1993, p. 19) chama atenção para sua complexidade:

> A Educação Matemática é um campo cujos domínios de referência e ação são caracterizados por uma extrema complexidade: o complexo fenômeno "Matemática", no seu desenvolvimento histórico e actual, e na sua interrelação com outras ciências, áreas de prática, tecnologia e cultura; a complexa estrutura do ensino e escolarização na nossa sociedade; as condições e fatores altamente diferenciados no desenvolvimento individual, cognitivo e social do estudante, etc..

Diante desta complexidade, o presente trabalho tratará especificamente dos aspectos de análise e síntese nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, aspectos esses que serão tratados adiante.

Documentos oficiais apontam, direta ou indiretamente, para a importância da presença desses dois aspectos no ensino de Matemática.

Na seção dos objetivos do Ensino Fundamental, os PCN fazem referência à análise como uma capacidade que deve ser desenvolvida pelos alunos:

> questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação" (BRASIL, 1998, p. 8).

Como um ponto de convergência entre as propostas curriculares de Matemática mundiais que ocorreram nas duas últimas décadas do século XX, o documento indica o "direcionamento do ensino fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas para a preparação de estudos posteriores" (BRASIL, 1998, p. 20).

Sobre o quadro atual do ensino de Matemática no Brasil, os PCN referem-se a algo que comprova nossa experiência: que muitas vezes, os conteúdos matemáticos são tratados de maneira isolada, num único momento escolar, sem a devida atenção às conexões com outros conteúdos (BRASIL, 1998, p. 23).

Dados e afirmações como essas têm motivado os estudos em Educação Matemática no país.

Ao longo do tempo, algumas reformas educacionais ocorreram no Brasil, o que evidencia uma busca contínua de formas mais interessantes de trabalhar a Matemática em sala de aula, através do processo de organização e desenvolvimento curricular na área (Pires, 2008).

Nesse contexto, como será detalhado no desenvolvimento deste trabalho, é possível identificar concepções de ensino e focos diferentes para o ensino de Matemática em diferentes reformas curriculares realizadas ao longo do tempo, dentro e fora do Brasil. Algo que fica evidente, considerando o período a partir da década de 1980, com influência das recomendações do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), dos Estados Unidos, é a presença da noção de competências e do "fazer matemático" em sala de aula, a partir da resolução de problemas, como uma diferenciação em relação aos momentos e reformas anteriores.

A partir do início do século XXI, o foco central das discussões sobre a meta da escola é o desenvolvimento das competências pessoais, e não mais o ensino de conteúdos disciplinares (Machado, 2010).

Sobre disciplinas e competências na escola, Machado (2010, p. 87) traz a seguinte consideração:

> A ideia norteadora de toda a reflexão é a de que, na Escola Básica, os conteúdos disciplinares são sempre meios para a formação pessoal, ou seja, para o desenvolvimento das competências das pessoas. Entretanto, se a ideia de disciplina tem uma longa história, que tem como uma de suas matrizes importantes, na cultura ocidental, o Trivium[2], a ideia de competência tem uma presença mais recente no discurso educacional, carecendo de uma formulação teórica mais consistente. (...) Resumindo em uma frase, já adiantada no início de nosso percurso, a competência significa a capacidade de mobilizar o que se sabe para realizar o que se deseja, ou, mais tecnicamente, de mobilizar recursos cognitivos para realizar o que se projeta.

Concordando com o autor que, considerando que as disciplinas são meios para o desenvolvimento das competências pessoais, existem diversos construtos a serem considerados, construtos esses constituídos por pares conceituais, epistemologicamente importantes, de elementos constitutivos da noção de competência: eu/outro, concreto/abstrato, síntese/análise (Machado, 2010).

O último desses pares, síntese/análise, é o foco da pesquisa e, portanto, objeto de estudo da presente dissertação.

A partir do exposto é possível estabelecer o problema central da pesquisa: como o par análise e síntese pode estar presente nas aulas de Matemática e como esses elementos se relacionam com os processos de ensino e de aprendizagem desta disciplina?

---

[2] Entre os primeiros currículos de que se tem registro na cultura ocidental, destaca-se o *Trivium*, uma referência básica para a compreensão da formação do homem grego. Ele era composto por três disciplinas – a Gramática, a Lógica e a Retórica. (...) Cada uma das três disciplinas citadas não se destinava à formação de Lógicos, Linguistas ou Retóricos; elas também não eram ensinadas tendo em vista o desenvolvimento interno da Lógica, da Gramática ou da Retórica. As disciplinas do *Trivium* eram consideradas instrumentos fundamentais para a formação pessoal; era o "trivial" para a construção da cidadania, para a viabilização da participação na vida da *pólis*, ou seja, para a formação política (Machado. 2010, p. 14-15).

E, então, delimitamos os objetivos do trabalho: analisar e relacionar algumas situações ilustrativas[3] do ensino de Matemática, tendo em vista a possibilidade da presença do par análise e síntese em aulas de Matemática e os possíveis desdobramentos em relação à aprendizagem dos alunos.

Podemos justificar a relevância do trabalho ao entender que trabalhar com situações problemas nas aulas de Matemática considerando, de modo intencional, o par análise e síntese no processo de elaboração e desenvolvimento de atividades pode ser algo que favoreça e potencialize a aprendizagem por parte dos alunos, possibilitando a compreensão de significados, de noções fundamentais, e o estabelecimento de relações entre os conceitos matemáticos (intradisciplinar) e entre eles e as outras áreas do conhecimento (interdisciplinar).

Faremos uma revisão bibliográfica e documental buscando identificar como análise e síntese aparecem no desenvolvimento do conhecimento da Matemática, nos documentos curriculares oficiais e em situações ilustrativas do ensino da ciência em questão.

A esta introdução, seguem o Capítulo 1, no qual apresentamos a metodologia do trabalho desenvolvido, e o capitulo 2, que trata de uma imersão na história da educação brasileira, chegando à discussão atual sobre o desenvolvimento de competências na escola. Dessa discussão são caracterizadas e discutidas as dimensões do par análise e síntese.

No capítulo 3 é feita a análise de três documentos curriculares oficiais, visando identificar em que medida análise e síntese são contemplados no âmbito das diretrizes e propostas curriculares. A saber, foram explorados os Parâmetros Curriculares Nacionais, o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo e as Orientações Curriculares de Matemática do município de São Paulo.

[3] Neste trabalho, nos referimos à noção de situação ilustrativa do ensino de Matemática segundo a ideia de situação pedagógica na aula de Matemática. Segundo Almeida (2014), uma situação pedagógica é aquela que coloca o aluno na condição de aprender por si mesmo, reagindo frente a objetos que lhe são apresentados. Situação pedagógica matemática é uma situação pedagógica em que os objetos são objetos matemáticos.

Na sequência, o quarto capítulo aponta um percurso histórico considerando períodos de desenvolvimento do conhecimento matemático. Nele, também é feita a relação entre tal desenvolvimento e a realização de atividades matemáticas em sala de aula.

O Capítulo 5 contém duas situações ilustrativas do ensino da Matemática e a análise das mesmas do ponto de vista de seu potencial pedagógico, das possibilidades de manifestação das "operações" de análise e síntese tomando como referências soluções possíveis para tais situações. Neste capítulo, são apresentadas quatro resoluções para cada uma das situações ilustrativas apresentadas e é feita, para cada situação, a sistematização de conceitos, conhecimentos e conteúdos mobilizados nas respectivas resoluções. Finalmente, apresentamos a seção discussão e considerações finais.

# 1. METODOLOGIA

## 1.1 A pesquisa

De cunho bibliográfico, a pesquisa compreende revisão bibliográfica, análise de documentos curriculares oficiais e análise e discussão das situações ilustrativas do ensino da Matemática.

A presente pesquisa visa analisar e relacionar alguns problemas e situações ilustrativas, no contexto da Matemática, tendo em vista a possibilidade da presença do par análise e síntese em aulas de Matemática e possíveis desdobramentos em relação à aprendizagem dos alunos. Tal objetivo tem como suporte a análise desses dois elementos na história do conhecimento matemático e do ensino de Matemática.

Toma-se como base uma reflexão sobre duas situações ilustrativas do ensino de Matemática, por meio de algumas resoluções propostas para cada uma delas. A ideia é refletir sobre as possibilidades do trabalho em sala de aula, tendo em vista relacionar os elementos teóricos focos da pesquisa, análise e síntese, com a atividade matemática em sala de aula e possíveis desdobramentos em relação à aprendizagem dos alunos.

Inicialmente, fundamentamos a didática da matemática, localizando o papel do fazer matemático e a importância das interações no desenvolvimento do conhecimento matemático. Um fator que motiva esse estudo são as indicações de documentos oficias acerca do ensino de Matemática no Brasil. Particularmente, evidenciamos alguns dados presentes nos PCN e em outros documentos que serão apresentados mais adiante.

Para situar a discussão sobre os elementos apontados como foco, foi feita uma revisão bibliográfica sobre a organização e o desenvolvimento curriculares no Brasil, a partir de uma releitura sobre as Reformas educacionais no país. Algo que fica evidente, considerando o período a partir da década de 1980, com influência das recomendações do NCTM, é a presença da noção de competências e do “fazer matemático” em sala de aula, a partir da resolução de problemas, como uma diferenciação em relação aos momentos e reformas anteriores.

Com o estudo a respeito das Reformas Educacionais brasileiras passamos, então, à discussão sobre as competências. A reflexão sobre competências relaciona-se com diversas questões e possui uma abrangência grande de conceitos, dentre eles, o par análise e síntese.

Na sequência, foi feita uma exploração dos documentos oficias já citados anteriormente, vislumbrando relacionar a revisão bibliográfica realizada com as diretrizes e propostas curriculares oficiais, isto é, buscou-se identificar em que medida o par análise e síntese se faz presentes nesses documentos.

Visando relacionar a atividade matemática a ser realizada em sala de aula com o fazer matemático inerente ao desenvolvimento da própria ciência, é feita uma revisão bibliográfica da História da Matemática considerando períodos de desenvolvimento do conhecimento matemático, a partir dos quais identificamos algumas características desse desenvolvimento para, assim, relacionar com a realização de atividades matemáticas em sala de aula.

Em seguida, apresentamos as situações problemas ilustrativas (descritas e contextualizadas na seção seguinte) do ensino da Matemática, situações essas que são analisadas visando à identificação de fatores que contribuam com a aprendizagem dos alunos. As resoluções dessas situações são relacionadas entre si e também com a fundamentação teórica.

Finalmente, são apresentadas a discussão e considerações finais.

## 1.2 Situações ilustrativas do ensino de Matemática

Para relacionar os diferentes aspectos sobre análise e síntese (que serão discutidos no capítulo seguinte) com o trabalho de sala de aula, são analisadas duas situações ilustrativas do ensino desta disciplina.

São duas situações que foram elaboradas em conjunto com educadores do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática (CAEM), quando de uma experiência de estágio. A proposta, no momento, era preparar uma oficina para professores de Matemática dos níveis Fundamental e Médio de ensino que fosse voltada ao trabalho com a resolução de problemas envolvendo as noções de Geometria, quando diversos foram os problemas tratados no interior do centro no período de preparação da oficina. Foram meses de discussões enriquecedoras com esses educadores e, particularmente, houve muita troca de resoluções para cada uma dessas situações tratadas, chegando a sete, oito, nove resoluções diferentes para cada situação. Em um período e um ambiente bastante produtivos, tínhamos o hábito de compartilhar resoluções entre nós e propor novos problemas, uns aos outros.

As situações que são propostas nesta dissertação são oriundas desse momento e foram escolhidas de acordo com seu potencial pedagógico, isto é, por serem consideras situações representativas do ensino de Matemática que podem favorecer a visualização dos elementos teóricos discutidos. São duas situações geométricas, pautadas numa justificativa direta: quando foi considerada a ideia do par análise e síntese, o termo Geometria analítica veio à tona. Assim, consideramos ser uma boa estratégia pensar sobre o par análise e síntese a partir de situações de Geometria Analítica e de alguma outra Geometria que, talvez, fosse sintética. De fato, por meio da pesquisa, descobrimos ser a conhecida Geometria de Euclides, também chamada por alguns de Geometria Sintética. Por exemplo, Bell (1985, p. 28) o faz:

> (...) No período grego, por exemplo, a geometria sintética métrica, como método, foi tão longe como nos parece humanamente possível atualmente. Foi revitalizada com novos aportes mediante as ideias da Geometria Analítica do século XVII (...).

São propostas, então, duas situações, uma do campo da Geometria Sintética e outra, do campo da Geometria Analítica, as quais são apresentadas no capítulo 5.

# 2. ANÁLISE E SÍNTESE

## 2.1 Breve histórico da educação brasileira e do ensino de Matemática

Segundo D'Ambrósio (2004), a preocupação com o ensino de Matemática já existia na antiguidade, desde os tempos de Platão, passando também pela Idade Média, pelo Renascimento, Idade Moderna, chegando aos tempos atuais. O autor afirma que, apesar disso, somente a partir das três grandes revoluções da modernidade (Industrial, em 1767, Americana, em 1776, e Francesa, em 1789) é que, mundialmente, surge a preocupação com a educação matemática da juventude, e que a identificação da educação matemática como prioridade no contexto da Educação é datada na transição entre os séculos XIX e XX:

> (...) o passo mais importante no estabelecimento da educação matemática como uma disciplina [e, portanto, sobre a preocupação com o ensino da Matemática] é devido à contribuição do eminente matemático alemão Felix Klein (1849-1925), que publicou, em 1908, um livro seminal, Matemática elementar de um ponto de vista avançado. Klein defende uma apresentação nas escolas que se atenha mais a bases psicológicas que sistemáticas. Diz que o professor deve, por assim dizer, ser um diplomata, levando em conta o processo psíquico do aluno, para poder agarrar seu interesse. Afirma que o professor só terá sucesso se apresentar as coisas de uma forma intuitivamente compreensível (D'Ambrósio. 2004, p. 71).

A discussão sobre Educação Matemática se fez presente a partir de então, pois existia um descompasso entre os estudos de Matemática superior e avançado. Segundo Miorim (1998), nesse período inicial de preocupação com a educação matemática da juventude, o jovem que aprendia Matemática no ensino secundário não tinha o conhecimento adequado da disciplina para o mundo do trabalho, e por outro lado, o professor que acabara de se formar em Matemática no ensino superior não estabelecia relações entre o que aprendia e o que deveria ensinar para os jovens. A autora defende que:

> A causa do descompasso residia, especialmente, na diferença entre a Matemática ensinada pelas universidades e aquela ensinada nas escolas secundárias. Enquanto a Universidade ensinava os últimos progressos da Matemática, ou seja, a Matemática superior, as escolas secundárias continuavam a ensinar a geometria grega, a álgebra elementar e o cálculo aritmético (Miorim. 1998, p. 60)

Diversas foram as reflexões filosóficas acerca da Educação em âmbito mundial e, aproximadamente por volta da metade do século XX, afirma D'Ambrósio, começam a surgir propostas de renovação curricular. O mesmo, no século XX, começa a ocorrer no Brasil, por volta da década de 1930:

> As reformas que começaram a ocorrer em diversos Estados tentando colocar em prática as novas ideias, a publicação de livros sobre educação que apresentavam as novas correntes educacionais e, especialmente, a criação da Associação Brasileira de Educação, em 1924, que promoveu as Conferências Nacionais de Educação, foram os elementos desencadeadores do movimento de renovação da educação brasileira, provocando uma ampla discussão sobre as questões pedagógicas (Miorim. 1998, p. 90).

Segundo SAVIANI (1999), mundialmente, o movimento Escola Nova, com início marcado entre o final do século XVIII e início do século XIX, começa a ser estabelecido a partir de crítica ao que seria entendido até então como a pedagogia tradicional, esboçando uma maneira de se fazer educação a partir de experiências restritas. O movimento não mais considera a marginalidade vista pelo viés da ignorância, sob a ótica do domínio (ou falta de) conhecimento, mas com base naquele que seria rejeitado pelo grupo, não necessariamente, por saber ou não saber algo. A partir de experiências levadas a efeito com alunos "anormais"[4] buscou-se generalizar a prática pedagógica para todo o sistema escolar.

Algumas das primeiras ideias oriundas do Movimento Escola Nova, e que eram aceitas por todos, eram o "princípio da atividade" e o "princípio de introduzir na escola

[4] Marginalizados são "anormais", isto é, os desajustados e desadaptados de todos os matizes. Mas a "anormalidade" não é algo, em si, negativo; ela é, simplesmente, uma diferença. (SAVIANI. 1999, p. 20)

situações da vida real". Tais princípios provocaram alterações no ensino de Matemática, no sentido de se pensar situações cotidianas em sala de aula e não mais ser a aula realizada exclusivamente no quadro negro, mas ocorrer uma "Matemática de atividade". (MIORIM. 1998)

Os princípios apontados, de certa forma, estão presentes nos dias atuais.

Especificamente no caso da educação brasileira, o movimento de renovação que teve início na década de 1930, teve inúmeras reformas (nacionais, estaduais e municipais), das quais destacamos algumas delas. A título de esclarecimento, será feito a seguir, uma indicação dessas reformas, com características essenciais de cada uma destacando, particularmente, características do ensino de matemática

- Reforma Francisco Campos, de 1931 (Peralta, 2012): não contemplou a relação entre as áreas do conhecimento. Pautada num grande número de provas e exames, com alto grau de rigor, como ponto central. Unificou Aritmética, Álgebra e Geometria e instituiu um único professor como o professor de Matemática. Os professores consideravam fragmentos de vários livros (e sua união) para atenderem à unificação das três áreas, ou seja, utilizavam (unindo) os fragmentos dos livros que eram separados por áreas, o que era base de um sistema de ensino que se pretendia superar.

- Reforma Capanema, de 1042 (Peralta, 2012): consolidou a estrutura elitista e conservadora do ensino que, segundo COSTA (2011, p. 81), era organizado "segundo um currículo baseado em humanidades, repleto de línguas como latim, grego e francês". Manteve a unicidade das áreas da Matemática, mas houve a supressão do ensino concomitante da Aritmética, Álgebra e Geometria em torno da noção de função. A Matemática contemplava, ainda, todas as áreas, mas cada uma delas era iniciada após o término do estudo da outra. Propunha programas curriculares mais densos do que os propostos na Reforma Francisco Campos com, basicamente, o mesmo tempo de aulas, o que gerou uma relação de desconforto entre a extensão do programa e a quantidade de aulas de Matemática nas escolas.

- O Movimento da Matemática Moderna, a partir do início da segunda metade do século XX (Peralta, 2012): o objetivo principal era apresentar a Matemática de forma axiomática e unificada, o que havia de mais moderno no estudo matemático, com foco na linguagem matemática e no rigor das justificações matemáticas. Tinha como base a Teoria dos Conjuntos, as Estruturas Matemáticas e a Lógica Matemática. A ideia central do movimento foi a de aproximar a Matemática desenvolvida na escola à Matemática como é vista pelos estudiosos e pesquisadores (BRASIL. 1998, p. 19).

> A "moderna Matemática" apresentava alto nível de generalidade, elevado grau de abstração e maior rigor lógico. (...) A organização da Matemática moderna baseava-se na teoria dos conjuntos, nas estruturas matemáticas e na lógica matemática. Esses três elementos foram responsáveis pela "unificação" dos campos matemáticos, um dos maiores objetivos do movimento. Para isso, enfatizou-se o uso de uma linguagem matemática precisa e de justificações matemáticas rigorosas. Os alunos não precisariam "saber fazer", mas, sim, "saber justificar" por que faziam. A teoria dos conjuntos, as propriedades estruturais dos conjuntos, as relações e funções, tornaram-se temas básicos para o desenvolvimento dessa proposta.
>
> No entanto, a Matemática moderna não conseguiu resolver o problema do ensino da disciplina. Ao contrário, agravou ainda mais a situação. (...) Nos primeiros anos da década de 70, pesadas críticas ao movimento começaram a aparecer. (...) No Brasil, essas críticas se intensificaram a partir da segunda metade da década.
>
> (...) Ainda hoje, podemos perceber a presença de suas ideias não apenas nas discussões teóricas sobre o assunto, mas também na prática da Educação Matemática (Miorim. 1998, p. 110-115).

Segundo Pires (2008), o Movimento Matemática Moderna foi, certamente, um dos principais marcos das reformas, com impactos curriculares em diversos países do mundo, em realidades diversas.

Em 1980, o NCTM apresentou recomendações para o ensino de Matemática no documento Agenda para Ação. Nele a resolução de problemas era destacada como o foco do ensino da Matemática nos anos 80. Também a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, além dos cognitivos, na aprendizagem da Matemática, imprimiu novos rumos às discussões curriculares.

Essas ideias influenciaram as reformas que ocorreram em todo o mundo, a partir de então. Algo que fica evidente, considerando o período a partir da década de 1980, com influência das recomendações do NCTM, é a presença da noção de competências e do “fazer matemático” em sala de aula, a partir da resolução de problemas, como uma diferenciação em relação aos momentos e reformas anteriores.

- Parâmetros Curriculares Nacionais, com origens a partir do final da segunda metade do século XX (Peralta, 2012): tem como princípio a democratização da educação. Fornece diretrizes a serem seguidas em âmbito nacional, mas sugere autonomia dos Estados para adequações referentes às especificidades locais. Centralidade do papel do aluno no processo de ensino, indo além da ideia do professor como aquele que “transmite o conhecimento”.

Sobre a instituição dos PCN, Pires (2008, p. 25-26) afirma:

> Foi por força da Lei Federal nº 9.394, em 20/12/96, que se estabeleceu a competência da União, em colaboração com estados, Distrito Federal e municípios, de definir diretrizes para nortear os currículos, de modo a assegurar uma formação básica comum. Esse dispositivo legal conduziu à elaboração de Parâmetros e Diretrizes Curriculares – os PCN. Equipes foram constituídas para a formulação de um texto preliminar que foi analisado e discutido por professores e especialistas, tanto nas secretarias de educação como nas universidades.

Em relação ao ensino de Matemática, Peralta (2012, p. 70) afirma:

> (...) Sobre a escolha do conteúdo a ser ensinado e/ou aprendido, os PCN enfatizam como critério essencial a possibilidade de permitir conexões entre diferentes temas matemáticos com outras áreas do conhecimento e com os temas transversais.
>
> Ao professor é esclarecido que a finalidade do ensino da Matemática, associada às outras áreas, é desenvolver habilidades e competências que possibilitarão ao aluno tornar-se um cidadão com condições de compreender

> e contribuir para o conhecimento técnico, desenvolver meios para interpretar fatos naturais, assimilar a dinâmica da vida material e o convívio harmônico com o mundo da informação.

No cenário dos PCN, Pires (2008) aponta para a emergência de propostas que culminem numa aproximação do fazer do aluno ao "fazer matemático" e de atividades apresentadas com significados, a partir de problemas e tarefas estimulantes com relação ao meio físico e social mais amplo.

A autora também chama a atenção para a importância das conexões entre diferentes conteúdos e entre diferentes áreas do conhecimento:

> Os PCNEF[5] indicaram a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade Matemática e discutiram caminhos para "fazer Matemática" na sala de aula, destacando a importância da história da matemática e das Tecnologias da Comunicação. Apontaram também a importância de estabelecer conexões entre os blocos de conteúdos, entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento e suas relações com o cotidiano e com os chamados Temas Sociais Urgentes (Pires. 2008, p. 26-27).

Atualmente, essa é a base da organização curricular brasileira para a educação básica, e contexto da pesquisa em questão. Organização essa que pressupõe conhecimentos de diferentes naturezas por parte do professor:

> Evidentemente, tais propostas, embora muito fecundas, pressupõem conhecimentos do professor muito mais amplos e profundos dos que ele constituiu em sua formação. Conhecimentos contemplando não apenas uma diversidade significativa de conteúdos, temas, mas também, de métodos de investigação, de aplicações, de relações com outras áreas etc., mostrando a Matemática como fenômeno cultural e como rica fonte de explicações. Sem tais conhecimentos, ideias como as de interdisciplinaridade ou propostas de se trabalhar os conteúdos de forma contextualizada, acabam sendo distorcidas em sua implementação (Pires. 2008, p. 28).

[5] Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental

## 2.2 O problema da pesquisa: o par análise e síntese.

Considerando, então, como explorado na introdução do trabalho, a Didática da Matemática como uma classe concreta de atividade profissional dentro da educação matemática, que encontra seu objeto de estudo e trabalho em problemas derivados do ensino, da aprendizagem - na valorização da Matemática no meio escolar; na formação, preparação, atuação e desenvolvimento dos profissionais que intencionalmente ensinam Matemática; na fundamentação e teorização que permitem interpretar e tomar decisões sobre o ensino e a aprendizagem em Matemática - podemos elencar alguns de seus aspectos essenciais. Segundo Sadovsky e Sessa (2005), são eles:

- Problematizar a atividade matemática que se exibe em uma aula a partir da interação com uma problemática (matemática) por parte dos alunos e do professor;

- A partir das interações entre os alunos e deles com o professor, se constitui uma cultura matemática em sala de aula. Esta cultura se nutre do trabalho de cada estudante e do trabalho coletivo, e às vezes a prática matemática da classe torna possível e também condicionam a atividade matemática de cada estudante;

- Considerar a Matemática enquanto produto social e cultural, sendo do direito dos alunos conhecê-la;

- Outorgar um valor formativo, fundamental no trajeto dos estudantes, às classes que realizam a atividade matemática e ao estudo em que é possível embarcar um aluno a partir dela;

Nesse contexto, assumimos a definição do “fazer matemático” em sala de aula dada pelas autoras:

> Concebemos o trabalho matemático na classe (qualquer que seja ela) como a construção coletiva de uma cultura que se vai elaborando na medida em que um grupo de alunos e professor enfrentam problemas, concebem diferentes formas de abordá-los e discutem sobre as mesmas, geram novos problemas a partir das resoluções realizadas, descontextualizam, generalizam e se perguntam sobre o alcance das relações produzidas... As ideias que vão emergindo são o resultado de uma completa combinação de interações em

> que se entrelaçam o trabalho pessoal dos alunos com as confrontações coletivas – geralmente orientadas pelo professor – que dão sentido à realização de novas questões e abrem outras possibilidades para o trabalho matemático (Sadovsky e Sessa. 2005, p. 17).

E ressaltamos sua importância:

> Dessas considerações coloca-se em destaque o princípio de que a interação, o diálogo, a cooperação e/ou colaboração, nas diferentes práticas sociais, entre elas, as práticas de sala de aula, evocam formas e valores associados ao desenvolvimento humano que sejam condição de existência para o exercício de ensinar e aprender matemática. Talvez sejam os elementos indispensáveis para uma espécie de pacto social amplo que, de modo particular, precisa ser instaurado na escola, essa escola hoje marcada por tensões (as de dentro e as de fora) que têm como sintoma e motor a desarticulação das equipes e, consequentemente, a falta de um projeto pedagógico por ela assumido, o desalento de professores, o desinteresse, indisciplina e agressividade de alunos etc. (Santos. 2008, p. 34-35)

Um trabalho realizado dessa maneira em sala de aula, nas aulas de Matemática, contribui para que os alunos avancem, não mais fazendo questões do tipo “o que é isso?” ou “para que serve?”, mas sim do tipo “o que aprendi?”, propiciando potentes momentos de reflexão e discussão (BUTLEN. 1996, p. 10).

Os momentos de discussão na didática da Matemática vão além da mera explicitação das produções individuais ou de grupos de alunos, do compartilhamento das produções. Sua potencialidade está na possibilidade de gerar confrontos de ideias, reflexões e argumentações, buscando razões, tentando validá-las e legitimá-las.

Para Quaranta e Wolman (2005), uma das possibilidades da interação entre pares são os momentos de discussão. Tratam-se de momentos de intercâmbio entre todos os alunos e o professor, este tendo papel fundamental no trabalho realizado. As autoras defendem que o professor deve orientar o trabalho dos alunos, evitando que as discussões fiquem restritas às circunstâncias da turma, ou seja, o trabalho deve ser organizado e conduzido de maneira intencional e sistemática, sendo o planejamento e as intervenções do professor essenciais no processo, o que consideram como tarefa difícil.

Em reflexão sobre a Educação Matemática, Garnica (2004, p. 92) aponta um princípio que nos auxilia na compreensão do trabalho com atividade matemática em sala de aula, e sustenta essa ideia:

> (...) sugiro algo que, ao menos em princípio, poderia ser um ponto de apoio inegociável: o estabelecimento da concepção de que a matemática não é um conjunto de objetos que suportam tratamentos distintos, mas um conjunto de práticas sociais determinadas exatamente por esses tratamentos aos supostos "objetos matemáticos" (GARNICA. 2004, p. 92).

Essa discussão, sobre a atividade matemática em sala de aula, se relaciona com a questão das competências, o outro fator apontado como algo evidentemente presente na organização e no desenvolvimento curricular brasileiro nos últimos tempos, indo além do ensino centrado em disciplinas, de maneira isolada.

Vale ressaltar que não se trata de questionar a disciplinarização, que é importante e contribui com a organização do estudo, mas de refletir sobre a maneira de realizarem-se as atividades matemáticas em sala de aula. Assim, podemos nos situar em relação aos termos disciplina e disciplinarização:

> Já a palavra disciplinarização participa do campo semântico da palavra disciplina, e esta, por sua vez, não será entendida aqui apenas em seu sentido usual de matéria escolar ou acadêmica que participa da formação geral e/ou profissional das pessoas, mas, sobretudo, como um campo autônomo de investigação e de formação profissional institucionalmente legitimado, topologicamente diferenciado no interior do espaço acadêmico e juridicamente estabelecido como campo profissional autônomo (Miguel. 2004, p. 82)

Os programas escolares são, de modo geral, disciplinares, isto é, composto por disciplinas. Esses programas, segundo Machado (2010) e nossas experiências escolares são, geralmente fragmentados, e supervalorizam a tecnicidade, não tendo foco no estudo de significados dos temas tratados. É nesse sentido que nossa inquietação inicial se coloca como motivação do presente trabalho. A busca é pela reflexão sobre como potencializar o fazer matemático em sala de aula, de maneira alinhada com a proposta curricular, que é pautada na ideia de competência, porém a partir de uma organização que é disciplinar.

Ocorre que a tecnicidade, supervalorizada nos programas escolares, nos remete à ideia de técnico, de cientista, de especialista. Machado (2010, p. 16-17), observa que:

> Mais modernamente, sobretudo a partir do século XVII, o chamado "conhecimento científico" passou a predominar sobre outras formas de conhecer.
>
> É interessante notar que a palavra "cientista" foi utilizada pela primeira vez apenas na segunda metade do século XIX. Anteriormente, prevalecia a ideia de um conhecimento não-fragmentado, pleno de significado, como bem expressam os trabalhos de homens como Galileu, Da Vinci, Newton, entre outros, que não separavam nitidamente arte, conhecimento, filosofia, não podendo ser caracterizado como especialistas em certas disciplinas, como matemática, física ou biologia. Aos poucos, no entanto, o estudo da Ciência caminhou no sentido de uma fragmentação crescente, com a subdivisão da mesma em múltiplas disciplinas, e a supervalorização do conhecimento disciplinar. Há muitas décadas, a escola organiza-se como se os objetivos da Educação derivassem daqueles que caracterizam o desenvolvimento da Ciência.

Porém, considerando que a escola ainda segue essa lógica, é importante resgatarmos que, como afirma o autor, o que devemos ter em mente é que as Ciências precisam servir às pessoas e que, atualmente, a organização da escola deve visar ao desenvolvimento das competências pessoais (Machado, 2010).

Um fator a ser considerado é que, com o passar dos tempos, a noção de especialista vai se transformando. Hoje, não mais são considerados especialistas aqueles, no sentido taylorista, com grande domínio de técnicas específicas relacionadas às tarefas que lhe cabiam, mas os chamados "especialistas-consultores". Estes seriam aqueles que dominam, sim, as especificidades de sua área, porém com um espectro de competências que lhes permitam tratar com discernimento da vasta rede de informações e de conhecimentos, apoiados em sua disciplina, na especificidade da sua área, relacionando-a sensivelmente com essa rede, tanto em âmbito local de problemas particulares quanto em âmbito global, de problemas humanos mais perenes (Machado, 2011).

Juntamente com o avanço das organizações e diretrizes curriculares exploradas anteriormente, a reflexão agora realizada compõe o contexto para o tratamento da ideia de competências. As disciplinas estariam, pois, a serviço do desenvolvimento de competências pessoais.

Segundo Silva (2010, p. 77):

> A referência à pessoa aparece associada a um conjunto de características que se revelam na sua capacidade de se adaptar às contínuas e frequentes mudanças; considerar a importância da formação permanente ao longo da vida; selecionar decisões, analisá-las e tomar decisões; avaliar possibilidades e limites de um conjunto de possíveis estratégias e alternativas para a resolução de um problema; trabalhar cooperativamente; comunicar-se etc..

A ideia de competência envolve a mobilização de recursos. Em suma, a autora afirma que a qualificação de uma ação (realizada por uma pessoa) enquanto competente, depende da seleção e mobilização de recursos. Ela afirma:

> A noção de competência se relaciona com a ideia de mobilização porque envolve **combinação e integração de múltiplos e heterogêneos saberes**. Certamente, essa integração não se reduz à soma das partes; não se reduz a uma adição de saberes. Nesse movimento de integração estão envolvidas a seleção, a organização e a utilização de conhecimentos num contexto para a realização de uma atividade, sendo caracterizado, portanto, como um complexo sistema de conexões. Assim, a ideia de competência é resultante de uma combinação de recursos que se modificam em função das relações envolvidas entre estes e o âmbito da ação (Silva. 2010, p. 96, grifo da autora).

Quando pensamos (como é o caso) no ambiente escolar, especificamente nas aulas de Matemática, e na aprendizagem dos alunos, consideramos que eles deveriam mobilizar os conteúdos matemáticos na realização de atividades matemáticas.

A autora afirma, ainda, que outro aspecto que deve ser considerado em meio à reflexão sobre competência: o âmbito. Como vimos, a discussão sobre a mobilização de recursos passa por um contexto que, em nosso caso, podemos entendê-lo como o âmbito educacional (SILVA, 2010).

Segundo Silva (2010), existe um âmbito de ação quando pensamos na ideia de competência. Assim, quando pensamos em desenvolver competências na escola, devemos considerar as condições e os recursos desse contexto para a realização de uma situação. A autora afirma, ainda, que na escola o âmbito específico de desenvolvimento é a sala de aula, e que, sendo necessária a combinação e integração de diferentes recursos, deve-se refletir sobre o papel dos saberes disciplinares (os conteúdos) como meios para a formação do aluno.

Sintetizando, evidenciamos até o momento, três aspectos que se fazem importantes quando consideramos a ideia de competência: a pessoalidade, o âmbito e a mobilização.

Tendo em vista a discussão que será feita a seguir, chamamos a atenção para o aspecto mobilização. Em relação à mobilização, em nosso âmbito educacional – as aulas de Matemática – estamos considerando os conteúdos (os saberes disciplinares – no caso, matemáticos) como os recursos a serem mobilizados.

Diversas são as competências desejadas quando pensamos em seu desenvolvimento por parte dos alunos, quando pensamos na formação desses alunos. Fazendo relação, especificamente, ao par mobilização/conteúdos, podemos considerar o par de competências argumentação/decisão como algo fundamental.

A capacidade de argumentação é algo que, indiscutivelmente,deve permear a formação de toda e qualquer pessoa, independentemente da área de conhecimento em questão.

Começamos a nos aproximar do conceito de análise quando consideramos a argumentação. Justificando: “A argumentação representa a dimensão analítica do pensamento, que envolve a capacidade de examinar uma questão sob diferentes pontos de vista, considerando-se todos os lados envolvidos” (Machado. 2010, p. 54).

Segundo Machado (2010), quando argumentamos, argumentamos para chegarmos a uma conclusão, ou seja, para decidir sobre algo. A decisão relaciona-se, portanto, com o fechamento de uma questão. Para o autor, com o qual concordamos, não há sentido em uma fundamentada argumentação, apenas, sem que se chegue a uma decisão, nem tampouco uma decisão que não seja baseada em argumentos.

Há uma estreita relação entre a competência decisão e a definição do "fazer matemático", fundamentada por Sadovsky e Sessa anteriormente:

> Naturalmente, todo fechamento de questão é sempre provisório, e logo a questão pode ser reaberta, tendo em vista uma nova decisão, mas sem a competência de concluir, de decidir, de fechar provisoriamente a questão não se progride na construção do conhecimento (Machado. 2010, p. 55).

Lembrando, as autoras citadas referiram-se ao trabalho matemático em sala de aula como uma construção coletiva de uma cultura que vai se estabelecendo na medida em que se enfrentam problemas, concebem novas formas de abordá-los, geram novos problemas, generalizam, questiona-se sobre seu alcance, enfim, defendem que ideias vão surgindo de uma completa combinação de interações que dão sentido à realização de novas tarefas e abrem outras possibilidades para o trabalho matemático.

Os conteúdos, então, relacionam-se diretamente com a argumentação, ao passo que a mobilização, com a decisão. Em outras palavras, a argumentação é pautada na análise de conteúdos, e a decisão é realizada a partir da mobilização dos conteúdos visando o que se deseja, num contexto específico.

Considerando as competências por parte dos professores, ainda no contexto específico dos pares tratados até então, um novo par se faz presente: mapeamento/tecedura.

O professor possui papel fundamental para que a atividade matemática em sala de aula seja potencializada. É nesse sentido que consideramos, inicialmente, a competência docente de tecer. Particularmente, tecer significações. Isto é, é importante que o professor articule os temas e conteúdos diversos, e favoreça a construção dos significados por meio de relações entre eles. Em seu planejamento, deve contemplar os conteúdos buscando fazer relações que possam ser percebidas ou vivenciadas pelos alunos na sala de aula (Machado, 2010).

Por outro lado, buscamos compreender o sentido da competência de mapear. Ainda segundo o autor, podemos, metaforicamente, considerar uma teia e, assim, quando consideramos a ação de tecer, temos uma imagem de micro ação, enquanto que a ação de mapear nos remete à imagem de uma ação macro. Em outras palavras, ao tecer, estamos focados em pontos específicos da teia, e passando de um a outro, sem a visão global da mesma; em se mapeando a teia, visualiza-se a mesma como um todo, sem atentar-se aos pontos específicos (Machado, 2010).

Em relação à competência mapeamento:

> De modo geral, os professores costumam aceitar que é impossível ensinar-se determinados assuntos em poucas horas, ou em poucos minutos de atividades. Nosso ponto de vista é que qualquer assunto pode ser abordado em qualquer tempo, bastando para isso uma escolha adequada da escala de mapeamento das noções relevantes.
>
> (...) Um outro ponto importante é que existem diferentes tipos de mapa. Em sentido cartográfico, muitos são os sistemas de projeção que podem ser escolhidos para representar a superfície da Terra em um plano: projeções cilíndricas, estereográficas etc.
>
> (...) Muito poderia ser dito sobre a escolha de um sistema de projeção, na confecção de um mapa em termos cognitivos, mas vamos nos limitar a registrar que toda construção de um mapa de relevâncias pressupões a existência de um projeto em desenvolvimento, sustentado por valores acordados: nada é absolutamente relevante ou absolutamente irrelevante; tudo é relevante ou deixa de sê-lo tendo em vista o projeto que se persegue. A ação de mapear, portanto, constitui uma responsabilidade indelegável e uma competência decisiva na atuação do professor (Machado. 2010, p. 70-71).

Com o exposto, avançamos nas relações e, em resumo, relacionamos três pares de conceitos e competências: mobilização/conteúdos, argumentação/decisão e mapeamento/tecedura.

De modo direto, as relações entre esses elementos foram dadas da seguinte maneira:

- mobilização, decisão e mapeamento: a decisão é pautada na mobilização de conteúdos, e para potencializar essa mobilização é importante o macro, ter em vista o quadro geral de conteúdos do contexto.

- conteúdos, argumentação e tecedura: a argumentação pressupõe a análise de conteúdos, e com essa análise vão sendo estabelecidas relações entre os conteúdos.

Para além dos conceitos envolvidos na ideia de competência (mobilização e conteúdo) e das competências dos alunos (decisão e argumentação) e dos professores (mapeamento e tecedura), propomos, agora, uma reflexão no sentido de uma visão geral sobre competências.

A partir desses elementos citados, podemos considerar outros construtos na linha de que, na escola, os conteúdos são meios para o desenvolvimento das competências pessoais.

Segundo Machado (2010), o par de elementos apresentados como constitutivos da ideia geral de competência (mobilização/conteúdo), corresponde a um par conceitual importante do ponto de vista epistemológico: síntese/análise.

O autor defende, como sendo difícil de imaginar um quadro de competências fundamentais sem que análise e síntese estivessem presentes, que, na verdade, não lhe parece possível construir o conhecimento sem esses elementos.

Em relação ao trabalho que comumente é observado nas aulas de Matemática, como vimos, de maneira demasiadamente fragmentada, nos termos aqui assumidos esse trabalho seria considerado demasiadamente analítico, pautado na argumentação, na realização de atividades inerentes a conteúdos específicos.

Ao considerarmos como foco desta dissertação o par análise e síntese, estamos considerando a complementaridade dos elementos, e não a eventual supervalorização de um deles. Complementaridade no sentido de considerarmos ambos os aspectos como dimensões do processo de construção do conhecimento matemático, sendo um intrinsicamente ligado ao outro.

Referindo-se ao chamado *Método de Análise e Síntese*[6], Vaz (2007, p. 82) reforça a importância de tratar os elementos análise e síntese de maneira complementar, como inseparáveis, e nos dá pistas sobre como podemos caracterizar esses elementos:

> Deste modo, Hintikka e Remes propõem que devemos interpretar o método como um único método, a parte analítica e a parte sintética como sendo inseparáveis. Esse método deve ser encarado como geométrico, os antigos estão situados no domínio da Geometria, isto quer dizer, entre outras coisas, que as proposições estão hierarquicamente ordenadas e que se uma proposição implica outra, não necessariamente significa que o inverso é verdadeiro. O geômetra, depois de visualizada a análise, deveria provar a convertibilidade das proposições na síntese.

Vale ressaltar que não entendemos, aqui, que as operações de análise e síntese na sala de aula deva seguir uma ordem previamente estabelecida (primeiro, análise e depois, síntese, ou vice-versa), mas que sejam tratadas de maneira complementar, ou seja, defendemos a presença de ambos os elementos no contexto do desenvolvimento de competências, no contexto do fazer matemático.

Fazendo referência aos estudos de Salomon, Kilpatrick (1998, p. 6) chama a atenção para uma distinção importante a respeito das noções de análise e síntese:

> De acordo com Salomon, a distinção mais importante está entre a aproximação analítica, na qual os eventos externos ao sujeito são manipulados (isolados, controlados e medidos) com o propósito de inferir acerca de eventos internos como a aprendizagem ou a tomada de decisões, e a aproximação sistêmica, na qual os eventos são estudados em sua mútua interação e interpretação. (...) "A aproximação analítica capitaliza em precisão, enquanto que a aproximação sistêmica capitaliza em autenticidade".

Lacroix (2013) se pauta na etimologia grega das palavras análise e síntese e resgata que a primeira significa decomposição e a segunda, composição, e reconhece esses dois termos como dois métodos para tratar as ciências matemáticas.

---

[6] No método de Análise e Síntese grego, a parte analítica seria a etapa da descoberta, enquanto a sintética seria a formalização do resultado.

Em um exemplo na área de Química, o autor detalha os métodos de análise e síntese, e chama atenção para o caráter complementar entre ambos:

> Foi na Química que a aplicação dos dois métodos pareceu mais evidente a mais de acordo com a etimologia dos nomes pelos quais os designamos. Combinam-se juntas várias substâncias, ou assim consideradas, e dessa forma se realiza a síntese. Toma-se um corpo misto e procede-se à separação de seus componentes: eis a análise. No entanto, as coisas não se passam assim em todos os casos: nem todas as análises são perfeitas; frequentemente, só reconhecemos o composto que buscamos comparando as propriedades que ele manifesta com aquelas que foram descobertas antes pela síntese, sem poder desvendá-lo. Da mesma maneira, as sínteses não são sempre bem-sucedidas. Poderíamos suspeitar, com frequência, que elas são sempre acompanhadas de decomposições que alteram sua certeza. (...) Nas sínteses deve-se, na minha opinião, ver com cautela as consequências que as experiências indicam, sem admití-las, posto que não se conhece de maneira precisa a natureza dos efeitos da luz e do calor, assim como os da eletricidade e, em geral, das substâncias que são incoercíveis ou imponderáveis (LACROIX. 2013, p. 178).

Ao longo deste capítulo, foi feito um retrospecto histórico da educação brasileira e uma discussão teórica sobre competências que culminou no estabelecimento dos elementos análise e síntese, foco de estudo da dissertação. Destacou-se também a atividade matemática em sala de aula à luz da didática da matemática.

Como vimos a partir das palavras dos diferentes autores, análise e síntese estão presentes nas discussões a respeito da Matemática desde a antiguidade e são aspectos a serem tratados de maneira complementar. Considerando a sequência das reflexões, a ideia é fazer, no capítulo 3, uma exploração de documentos oficias recentes com intuito de verificar a presença de elementos relacionados à análise e síntese nas propostas voltadas para o ensino de Matemática. No capítulo 4, uma breve exploração sobre os períodos históricos de desenvolvimento do conhecimento matemático, visando verificar a presença dos dois aspectos (análise e síntese) nesses períodos.

# 3. DOCUMENTAÇÃO

No capítulo anterior, foi feita uma reflexão sobre o par análise e síntese. Ao longo dessa reflexão, pudemos perceber os diversos aspectos relacionados ao par em questão. Neste capítulo, busca-se identificar em que medida análise e síntese estão presentes em documentos curriculares oficiais, bem como relacionar e sintetizar as diversas ações relacionadas aos dois elementos.

A escolha dos documentos se deu pelo fato de serem documentos oficiais orientadores da Educação Básica. Dentre os documentos analisados, dois deles são de âmbito nacional – os PCN e a matriz curricular do ENEM, esta, importante por fazer parte da avaliação do ensino e também pelo fato de o exame ser utilizado como forma de ingresso em diversas universidades do país – e um, de âmbito estadual – o Currículo do Estado de São Paulo.

Inicialmente, façamos um retrospecto de algumas das principais ideias que se relacionam com análise e síntese e que foram expressas até o presente momento, nos capítulos anteriores.

Considerando a ordem cronológica com que as ideias foram apresentadas no texto, podemos iniciar o retrospecto com a noção do fazer matemático, onde surge a importância da justificativa por parte do aluno, que deve ser dada quando fazem ou afirmam algo em sala de aula. Não há apenas a preocupação com o saber fazer, mas também com o saber justificar o que fazem e o que sabem.

A resolução de problemas como foco central nas propostas de educação matemática é algo que legitima o fazer matemático em sala de aula, e que pode favorecer o desenvolvimento de competências. E como protagonista nos processos de ensino e de aprendizagem, tem-se a figura do aluno.

Com o fazer matemático em sala de aula vislumbra-se o estabelecimento de conexões entre diferentes temas matemáticos e, também, com outras áreas do conhecimento e, para isso, algumas ações são fundamentais como, por exemplo, contextualizar, descontextualiza, abstrair, generalizar, argumentar, comparar, tomar decisões, avaliar estratégias, selecionar, organizar e utilizar conhecimentos, analisar situações, dentre outras.

Em síntese, pode-se relacionar análise à argumentação, a conteúdos, à tecedura, ao caráter local de determinadas explorações, considerando o conhecimento como uma teia de significados, à decomposição, à precisão. Ao passo que a síntese pode ser relacionada à mobilização de conteúdos, à tomada de decisão, ao mapeamento, considerando o caráter global de determinadas explorações, considerando o conhecimento como uma teia de significados, à autenticidade, à decomposição.

De acordo com os PCN, um dos objetivos do Ensino Fundamental é fazer com que os alunos tornem-se capazes de questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

O documento indica a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade Matemática e discutem caminhos para fazer Matemática na sala de aula, destacando a importância da História da Matemática e das Tecnologias da Comunicação (BRASIL. 1998, p. 16). E aponta as possíveis conexões entre os blocos de conteúdos, entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento e suas relações com o cotidiano e com os Temas Transversais.

Em uma passagem do documento, encontra-se a presença de algumas ações elencadas anteriormente:

> O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino (BRASIL. 1998, p. 26).

A tomada de decisões também é algo presente nos PCN, como fundamental no desenvolvimento da cidadania e como capacidade em potencial a ser desenvolvida no contexto da Matemática.

Sobre a relação do professor com o conhecimento matemático, o documento destaca:

> Por outro lado, um conhecimento só é pleno se for mobilizado em situações diferentes daquelas que serviram para lhe dar origem. Para que sejam transferíveis a novas situações e generalizados, os conhecimentos devem ser descontextualizados, para serem novamente contextualizados em outras situações. Mesmo no ensino fundamental, espera-se que o conhecimento aprendido não fique indissoluvelmente vinculado a um contexto concreto e único, mas que possa ser generalizado, transferido a outros contextos (BRASIL. 1998, p. 36).

A comparação por parte dos alunos de soluções propostas aos problemas surge no documento na medida em que são exploradas capacidade de explicar o próprio pensamento e procurar compreender o pensamento dos colegas, discutir dúvidas e buscar reestruturar e ampliar a compreensão acerca de novos conhecimentos.

Em resumo, podemos sistematizar as ideias relacionadas a análise e síntese presentes nos PCN:

| | |
|---|---|
| Síntese | Fazer conexões entre temas e conteúdos matemáticos |
| | Fazer conexões entre Matemática e outras áreas do conhecimento |
| | Descontextualizar |
| | Generalizar |
| | Tomar decisões |
| | Mobilizar conteúdos |
| | Escolher relevâncias |
| Análise | Contextualizar |
| | Argumentar |
| | Analisar situações |
| | Avaliar estratégias |
| | Estudar conteúdos |

Quadro 2: Ideias relacionadas ao par análise e síntese nos PCN

Ainda em contexto nacional, outro objeto de interesse que exploramos é a matriz do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Particularmente, a versão analisada foi a do ano de 2009, a mais recente encontrada no sítio eletrônico do Ministério da Educação (MEC).

Na seção Eixos Cognitivos (comuns a todas as áreas do conhecimento), encontramos enunciados como os que seguem:

> - construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas;
> - selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema;
> - relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente (BRASIL. 2009, p. 1).

Especificamente, no caso da área do conhecimento Matemática e Suas Tecnologias, verifica-se, dentre outros:

> - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas;
> - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano;
> - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida;
> - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente;
> - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas;
> - Identificar a relação de dependência entre grandezas;
> - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação;
> - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas;
> - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas;
> - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação;

- Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação;
- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências;
- Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos (BRASIL. 2009, p. 5-7).

Na matriz do ENEM, as ideias relacionadas a análise e síntese são:

| | |
|---|---|
| Síntese | Fazer conexões entre temas e conteúdos matemáticos |
| | Fazer conexões entre Matemática e outras áreas do conhecimento |
| | Generalizar |
| | Tomar decisões |
| | Escolher relevâncias |
| | Autenticidade |
| Análise | Contextualizar |
| | Argumentar |
| | Analisar situações |
| | Avaliar estratégias |

Quadro 3: Ideias relacionadas ao par análise e síntese na matriz do ENEM

Com abrangência estadual, e em conformidade com os PCN, o Currículo do Estado de São Paulo para a área do conhecimento Matemática e Suas Tecnologias, especificamente do ciclo II do Ensino Fundamental e Ensino Médio, foi outro documento analisado.

Na seção de apresentação do documento, verifica-se a defesa da promoção de competências, por meio do compromisso de articular as disciplinas e as atividades escolares com aquilo que se espera que os alunos aprendam na escola. E assume-se a postura de que as competências caracterizam modos de ser, de raciocinar, de interagir, que podem ser depreendidos das ações e das tomadas de decisão em contextos de problemas, de tarefas ou de atividades (SÃO PAULO. 2010).

Sobre o trabalho com competências, no contexto local que é de abrangência do documento (jovens do Estado de São Paulo), tem-se que:

> Valorizar o desenvolvimento de competências nessa fase da vida implica ponderar, além de aspectos curriculares e docentes, os recursos cognitivos, afetivos e sociais dos alunos. Implica, pois, analisar como o professor mobiliza conteúdos, metodologias e saberes próprios de sua disciplina ou área do conhecimento, visando a desenvolver competências em adolescentes, bem como a instigar desdobramentos para a vida adulta (SÃO PAULO. 2010, p. 10).

De acordo com a proposta, o professor deve apresentar e explicar os conteúdos, organizar situações que possibilitem a aprendizagem de conceitos, de métodos, de formas de agir e pensar, enfim, deve possibilitar o desenvolvimento de conhecimentos que possam ser mobilizados em competências e habilidades que instrumentalizam os alunos para enfrentar problemas do mundo.

É defendido no documento que todos lidam com números, medidas, operações; que todos leem e interpretam gráficos, que todos vivenciam relações de ordem e de equivalência, que todos argumentam e tiram conclusões a partir de proposições e resultados, que todos fazem inferências a partir de informações diversas.

O Currículo do Estado de São Paulo aponta para três eixos de competências: expressão/compreensão, argumentação/decisão e contextualização/abstração. Respectivamente, é preciso saber expressar-se e ouvir o outro, buscar compreendê-lo, ter as capacidades de argumentação e decisão, bem como transitar entre o contexto e o abstrato.

Em relação à natureza dos problemas matemáticos, estes são identificados, no documento, como problemas que favorecem o exercício do movimento argumentar/decidir, isto é, são problemas que favorecem o trabalho com análise e síntese (SÃO PAULO. 2010, p. 32). Particularmente, a mobilização de conteúdos é proposta via noções fundamentais de cada tema. Essas noções possibilitariam, segundo as ideias apresentadas no documento, o estabelecimento de relações entre os conteúdos.

Além disso, é proposto, ainda, o mapeamento de informações relevantes das disciplinas, tendo em vista articulá-las de maneira conveniente.

Finalmente, em relação ao bloco temático Relações (ou outros propostos no documento seriam Números e Geometria): “o ponto de partida natural é o estudo das medidas: medir é comparar uma grandeza com um padrão e expressar o resultado da comparação por meio de um número” (SÃO PAULO. 2010, p. 43).

No caso do Currículo do Estado de São Paulo, temos como ideias relacionadas a análise e síntese:

| | |
|---|---|
| Síntese | Fazer conexões entre temas e conteúdos matemáticos |
| | Fazer conexões entre Matemática e outras áreas do conhecimento |
| | Descontextualizar |
| | Tomar decisões |
| | Mobilizar conteúdos |
| | Mapear |
| | Pensamento global |
| | Composição |
| Análise | Contextualizar |
| | Argumentar |
| | Estudo fragmentado |
| | Analisar situações |
| | Avaliar estratégias |
| | Tecer |
| | Pensamento local |
| | Precisão |
| | Decomposição |

Quadro 4: Ideias relacionadas ao par análise e síntese no Currículo do Estado de São Paulo

Explicitamos a presença das diversas ideias relacionadas ao par análise e síntese nos documentos. O quadro a seguir sintetiza essas ideias, relacionando-as com análise e síntese e evidenciando os documentos nos quais estão presentes:

| | | | Documentos analisados | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | PCN | Matriz do ENEM | Currículo do Estado de São Paulo |
| Ideias presentes nos documentos analisados | Síntese | Fazer conexões entre temas e conteúdos matemáticos | X | X | X |
| | | Fazer conexões entre Matemática e outras áreas do conhecimento | X | X | X |
| | | Descontextualizar | X | | X |
| | | Generalizar | X | X | |
| | | Tomar decisões | X | X | X |
| | | Mobilizar conteúdos | X | | X |
| | | Mapear | | | X |
| | | Pensamento global | | | X |
| | | Escolher relevâncias | X | X | |
| | | Composição | | | X |
| | | Autenticidade | | X | |
| | Análise | Contextualizar | X | X | X |
| | | Argumentar | X | X | X |
| | | Estudo fragmentado | | | X |
| | | Analisar situações | X | X | X |
| | | Avaliar estratégias | X | X | X |
| | | Estudar conteúdos | X | | |
| | | Tecer | | | X |
| | | Pensamento local | | | X |
| | | Precisão | | | X |
| | | Decomposição | | | X |

Quadro 5: ideias relacionadas ao par análise e síntese nos documentos analisados

E podemos, ainda, identificar nos documentos a presença das ideias que são fundantes da atividade matemática em sala de aula e que foram elencadas ao longo do texto:

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="3">Documentos analisados</th></tr>
<tr><th colspan="2"></th><th>PCN</th><th>Matriz do ENEM</th><th>Currículo do Estado de São Paulo</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Ideias fundantes da atividade matemática em sala de aula</td><td>Justificar o que se faz/sabe</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>A resolução de problemas como ponto de partida</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>A noção de competência no fazer matemático</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>O aluno como protagonista nos processos de ensino e de aprendizagem</td><td>X</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Comparação de estratégias e resultados</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Validação, confronto de ideias</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Interação entre os alunos</td><td>X</td><td></td><td>X</td></tr>
</table>

Quadro 6: ideias fundantes da atividade matemática presentes nos documentos analisados

Dado que há uma tradição de elaboração dos documentos curriculares no Brasil pelos órgãos de Administração Pública (MEC e secretarias de Educação), é frequente a repetição de especialistas envolvidos nesses processos de elaboração.

É provável que uma repetição de autoria explique a presença de elementos comuns encontrados nas análises e apresentados nos quadros como, por exemplo, no caso dos PCN e da matriz do ENEM.

# 4. A MATEMÁTICA, HISTORICAMENTE

## 4.1 Períodos de desenvolvimento do conhecimento matemático.

Quando nos dispomos a estudar História da Matemática, nos deparamos com uma questão inicial que se refere ao modo de considerá-la, enquanto corpo de conhecimento estruturado.

Smith (1923 apud Brolezzi, 1991, p. 22) discorre sobre diversas possibilidades de classificação da História da Matemática, enfatizando que cada uma, de acordo com seus objetivos, tem suas vantagens. Dentre elas, destaca as categorias baseadas na cronologia, em biografias, em ramos da Matemática, como fonte de material de estudo, em resultados obtidos por um país ou povo, dentre outros. De acordo com seus objetivos, o autor assume a seguinte divisão para os tipos de livros relacionados à história da Matemática: cronologias, biografias, por assunto, outros.

Independentemente da categorização a ser adotada, nos remetemos ao prefácio da obra *História da Matemática* (Boyer, 1996, p. VI, grifo do autor), escrito por Asimov, no qual o autor chama a atenção para um fato característico da História da Matemática:

> A matemática é um aspecto único do pensamento humano, e sua história difere na essência de todas as outras histórias.
>
> Com o passar do tempo, quase todo campo do esforço humano é marcado por mudanças que podem ser consideradas como correção e/ou extensão.
>
> (...) Só na matemática não há correção significativa, só extensão. Uma vez que os gregos desenvolveram o método dedutivo, o que fizeram estava correto, correto para todo sempre.
>
> (...) Cada grande matemático acrescenta algo ao que veio antes, mas nada tem que ser removido. Consequentemente, quando lemos um livro como **Uma História da Matemática** temos a figura de uma estrutura crescente, sempre mais alta e mais larga e mais bela e magnífica e com uma base que é

> tão sem mancha e tão funcional como era quando Tales elaborou os primeiros teoremas geométricos há quase 26 séculos.

Considerando o exposto, trataremos dos chamados períodos de desenvolvimento do conhecimento matemático. Esta releitura, enquanto períodos, foi feita baseada em obras de autores que tratam da história, em geral, de maneira cronológica ou por assunto, quais sejam Bell (1985), Borges (2010), Boyer (1996), Brolezzi (1991), Courant e Robins (2000), Eves (2004), Miguel (1993), Smith (1993), Táboas (1993).

Antes, porém, vale ressaltar a existência de certa dificuldade por parte dos historiadores na reconstrução da História Antiga:

> O legado científico-cultural que a Civilização greco-romana nos deixou talvez seja responsável pela concepção usual de que a História deve ser registrada e preservada para as gerações futuras. Mas antes de Heródoto, considerado por alguns por seu pioneirismo como o Pai da História, essa concepção não era nada corrente. Desse modo, os historiadores têm dificuldades especiais para construir a História Antiga da Matemática, principalmente do período anterior aos gregos (Brolezzi. 1991, p. 8).

Eves (2004) inicia sua obra com um quadro visando situar a História da Matemática no tempo.

De caráter cronológico, o autor divide o texto em duas partes: a primeira, intitulada Antes do Século XVII e a segunda, Do Século XVII em Diante.

Relativamente a esses dois grandes períodos, o autor destaca alguns momentos. A primeira parte é divida da seguinte maneira:

- A Idade da Pedra;
- Os Berços da Civilização;
- Grécia Helênica;
- O império Persa, A Grécia Helenística, O Império Romano;
- China, Índia e a Ascensão do Islamismo;
- A Idade Média Européia.

E a segunda parte, assim:

- A Expansão da Europa;
- O Século XVIII na Europa e na América;
- O Século XIX;
- O Século XX.

Brolezzi (1991), por sua vez, atendo-se a um período mais curto do que aquele apresentado anteriormente, e tratando do valor didático dos livros de História da Matemática, sugere a seguinte divisão:

- Caminhos da História da Matemática Pré-Helênica;
- Tradição Greco-Latina;
- De Boécio a Gerbert;
- O Renascimento do Século XII;
- O Advento dos Livros de História da Matemática.

Como mais um exemplo, Kline (2001) faz um panorama histórico da seguinte maneira:

- As Matemáticas nas Primeiras Civilizações;
- A Grécia Clássica;
- A Época Helenística;
- Os Hindus e os Árabes;
- A Europa Antiga e a Medieval;
- O Renascimento;
- Avanços Realizados de 1550 a 1800;
- Avanços realizados de 1800 até o presente.

Existem algumas variações para a categorização do desenvolvimento do conhecimento matemático em períodos, variações essas que contemplam alguns (poucos) séculos de diferença, ou incluem alguns (poucos) personagens em um ou outro momento. Contudo, independentemente da categorização assumida pelos diversos autores, há intersecções quando consideramos certas características desse desenvolvimento. Essas intersecções podem ser melhor visualizadas na categorização que será aqui assumida, a sugerida por Bell (1985).

O autor, inicialmente, apresenta uma perspectiva geral, na qual contempla a noção e a necessidade da demonstração e da abstração na história, a motivação para a Matemática, e apresenta os períodos de desenvolvimento do conhecimento matemático da maneira como descrevemos a seguir, totalizando sete:

1º) Da época mais remota à antiga Babilônia e Egito, inclusive;

2º) A contribuição grega, desde cerca de 600 anos a.C., até aproximadamente o ano 300 de nossa Era, sendo a melhor nos séculos IV e III a.C.;

3º) Os povos orientais e semíticos – hindu, chinês, persa, muçulmano, judeu, etc. – em parte antes e em parte depois do 2º período e extendendo-se até o 4º ;

4º) Europa durante o Renascimento e a Reforma, aproximadamente os séculos XV e XVI;

5º) Os séculos XVII e XVIII;

6º) O século XIX;

7º) O século XX.

O 1º período é aquele considerado como a idade do empirismo. Das primeiras noções de Aritmética datadas dos anos 600 a.C., passando pela Álgebra não simbólica (pelo pensamento algébrico), chegando aos aportes babilônicos e egípcios, inclusive na construção da maior pirâmide egípcia, não existia, ainda, a ideia da formalidade e do rigor matemático, do caráter de generalização.

Considerado pelo autor como o período da *Base Firme*, o 2º período é caracterizado pela concepção grega da lógica axiomática, apoiada no método postulacional.

No 3º período, vislumbra-se o nascimento parcial da Álgebra e a aparição da Trigonometria, em uma confluência de conhecimentos desenvolvidos por povos diversos.

Marcado pelo desenvolvimento do simbolismo que possibilitou o surgimento da Álgebra e da Trigonometria à maneira como conhecemos, o 4º período é intitulado pelo autor como os *Quatro séculos de transição*.

Em relação ao 5º período, segundo o autor e os historiadores matemáticos, em geral, este pode ser considerado como o período da efervescência matemática. O autor o intitula como O começo da Matemáticas moderna, no qual indica progressos como o advento da Geometria Analítica, do Cálculo, da teoria de Probabilidades, da Aritmética moderna, da Geometria Projetiva, a origem das matemáticas modernas aplicadas e a intensificação do rigor matemático.

Finalmente, considera a possibilidade de assumir os períodos 6º e 7º como um único período, marcado pela abertura de um mundo de ideias inovadoras que vão além de toda a matemática desenvolvida até então, bem como pelo aumento significativo da abstração e, consequentemente, pela incessante busca porgeneralizações, pela preocupação crescente em relação à morfologia e anatomia das estruturas matemáticas.

Sistematizando, sugerimos a Quadro a seguir:

| Períodos de desenvolvimento do conhecimento matemático | |
|---|---|
| Período | Característica |
| **1º**<br>Até a antiga Babilônia e Egito | Marcado pelo empirismo. Das primeiras noções de Aritmética datadas dos anos 600 a.C., passando pelo pensamento algébrico, chegando aos aportes babilônicos e egípcios, inclusive na construção da maior pirâmide egípcia. Não existia, ainda, a ideia da formalidade e do rigor matemático, do caráter de generalização. |
| **2º**<br>Grécia | Concepção grega da lógica axiomática, apoiada no método postulacional. |
| **3º**<br>Orientais e Semíticos | Nascimento parcial da Álgebra e aparição da Trigonometria, em uma confluência de conhecimentos desenvolvidos por povos diversos. |
| **4º**<br>Europa - séculos XV e XVI | Desenvolvimento do simbolismo que possibilitou o surgimento da Álgebra e da Trigonometria à maneira como conhecemos. |
| **5º**<br>Séculos XVII e XVIII | Considerado como o período da efervescência matemática, marca o começo das matemáticas modernas, com o advento da Geometria Analítica, do Cálculo, da teoria de Probabilidades, da Aritmética moderna, da Geometria Projetiva, a origem das matemáticas modernas aplicadas e a intensificação do rigor matemático. |
| **6º e 7º**<br>Séculos XIX e XX | Marcado por ideias inovadoras que vão além de toda a matemática desenvolvida até então, bem como pelo aumento significativo da abstração e, consequentemente, pela ganância em relação às generalizações, pela preocupação crescente em relação à morfologia e anatomia das estruturas matemáticas. |

Quadro 7: Sistematização dos períodos de desenvolvimento do conhecimento matemático.

Bell ainda distingue, dentre os sete períodos citados, três das *aquisições de maior importância* do desenvolvimento do conhecimento matemático. A saber: a invenção grega do raciocínio dedutivo estrito; o desenvolvimento da Álgebra simbólica durante o Renascimento, na Europa; a união das três correntes principais de número, forma e continuidade, no século XVII, o que gerou o cálculo e a análise matemática em geral, transformou a Geometria possibilitando a criação dos altos espaços necessários para as modernas matemáticas aplicadas.

No quadro, apresentamos os períodos referentes a essas três aquisições:

| **Períodos de desenvolvimento do conhecimento matemático** | |
|---|---|
| Período | Característica |
| **1º**<br>Até a antiga Babilônia e Egito | Marcado pelo empirismo. Das primeiras noções de Aritmética datadas dos anos 600 a.C., passando pelo pensamento algébrico, chegando aos aportes babilônicos e egípcios, inclusive na construção da maior pirâmide egípcia. Não existia, ainda, a ideia da formalidade e do rigor matemático, do caráter de generalização. |
| **2º**<br>Grécia | Concepção grega da lógica axiomática, apoiada no método postulacional. |
| **3º**<br>Orientais e Semíticos | Nascimento parcial da Álgebra e aparição da Trigonometria, em uma confluência de conhecimentos desenvolvidos por povos diversos. |
| **4º**<br>Europa - séculos XV e XVI | Desenvolvimento do simbolismo que possibilitou o surgimento da Álgebra e da Trigonometria à maneira como conhecemos. |
| **5º**<br>Séculos XVII e XVIII | Considerado como o período da efervescência matemática, marca o começo das matemáticas modernas, com o advento da Geometria Analítica, do Cálculo, da teoria de Probabilidades, da Aritmética moderna, da Geometria Projetiva, a origem das matemáticas modernas aplicadas e a intensificação do rigor matemático. |
| **6º e 7º**<br>Séculos XIX e XX | Marcado por ideias inovadoras que vão além de toda a matemática desenvolvida até então, bem como pelo aumento significativo da abstração e, consequentemente, pela ganância em relação às generalizações, pela preocupação crescente em relação à morfologia e anatomia das estruturas matemáticas. |

Quadro 8: Sistematização dos períodos de desenvolvimento do conhecimento matemático com destaque para os três períodos que contemplam as três aquisições mais importantes.

## 4.2 Análise e Síntese no desenvolvimento do conhecimento matemático.

Visando relacionar a motivação pelo fazer matemático com o exposto no capítulo anterior, nos remetemos às palavras de Bell. Para o autor, é importante ter clareza que o fazer matemático tem impulso intelectual. Por vezes, pode-se imaginar que há (e ora, realmente há) o impulso econômico como motivação ao fazer matemático, considerando aplicações das teorias desenvolvidas, porém, o autor ressalta a ideia de que não, necessariamente, as teorias matemáticas são desenvolvidas visando às aplicações, e mais, que tais ocorrências são mínimas ao longo da história. Segundo o autor:

> Evidenciar a importância da prática imediata em relação a evidente curiosidade intelectual, é desconsiderar pelo menos a metade dos atos no desenvolvimento das matemáticas. Como qualquer matemático medianamente competente, cuja educação não tenha terminado com o Cálculo e suas aplicações mais comuns, pode verificar, não é verdade que na criação das matemáticas tenha sido mais frequente o incentivo econômico que o impulso puramente intelectual. Isto se sustenta para as matemáticas práticas como se aplicaram no comércio, incluindo toda classe de seguros, ciências e tecnologias, assim como aquelas divisões das matemáticas que na atualidade não tem valor matemático. Os exemplos podem multiplicar-se indefinidamente (...) (Bell. 1985, p. 30).

O autor cita exemplos de teorias e conceitos que foram desenvolvidos em determinados momentos da história, por determinados matemáticos, e que somente foram utilizados, na prática, muito tempo depois. Indica também que muitas teorias e conceitos foram desenvolvidos com contribuições de diversos matemáticos, alguns procurando avançar ou ampliar ideias desenvolvidas por outros produzindo ideias novas muitas vezes desenvolvidas a partir de indagações feitas sobre o conhecimento já existente.  Observa-se que esse é um movimento no processo de construção do conhecimento matemático que, ao longo do tempo, ocorre entre os matemáticos.

Essa é a atividade matemática a que autores da didática da matemática defendem. A realização da atividade matemática em uma classe de alunos é pautada por essas mesmas noções. Pretende-se que os alunos criem pela motivação intelectual e em interação com os colegas e com o professor, e que tenham suas ideias questionadas, refutadas, validadas, que argumentem, defendam, validem, discutam, e que, assim, sejam geradas novas questões, emergindo o caráter vívido desta ciência.

Assim, entendemos que existe relação entre o desenvolvimento do conhecimento matemático genuíno, descrito pela história, e as discussões atuais sobre a didática da matemática e os pressupostos da organização curricular pautados na lógica das competências. Diante do exposto, entendemos que os elementos teóricos – a atividade matemática, a interação entre pares, as competências – tratados, de fato, podem ser levados de maneira intencional para a sala de aula e favorecer a aprendizagem dos estudantes, no sentido de possibilitar que estes sejam motivados pela curiosidade intelectual e desenvolvam, de maneira competente, o conhecimento matemático.

Especificamente, sobre os elementos análise e síntese, Courant e Robins (2000) nos ajudam a percebê-los no desenvolvimento da Matemática. Lembrando da relação que foi estabelecida, análise relaciona-se com os conteúdos, sendo estes analisados pelos alunos a partir de uma tecedura feita pelo professor, uma visão micro de estudo, local, ao passo que síntese relaciona-se com a mobilização dos conteúdos, sendo esta mobilização presente na decisão por parte dos alunos, estes devendo ser orientados pelo professor que se baseia em um mapeamento das principais ideias a serem estudadas, uma visão macro de estudo, global. Os autores chamam a atenção, ainda, para a importância do fazer matemático. Em suas palavras:

> Através dos tempos, os matemáticos têm considerado seus objetos, tais como números, pontos, etc., como coisas substanciais em si. Uma vez que essas entidades sempre tinham desafiado tentativas de uma descrição adequada, manifestou-se corretamente nos matemáticos do século XIX a convicção de que a questão do significado destes objetos como coisas substanciais não fazia mais sentido dentro da Matemática, ou mesmo em geral. As únicas asserções relativas a eles não se referem à realidade substancial; elas enunciam apenas as inter-relações entre "objetos definidos" matematicamente e as regras governando operação com eles. O que pontos, retas, números "efetivamente" são não pode e não precisa ser discutido na

> Ciência Matemática. O que importa e o que corresponde aos fatos "verificáveis" é a estrutura e as relações entre objetos; que dois pontos determinem uma reta, que números se combinam de acordo com certas regras para formar outros números, etc. Uma clara percepção da necessidade de uma dis-substanciação de conceitos de Matemática elementar tem sido um dos mais importantes e úteis resultados do desenvolvimento postulacional moderno.
>
> Felizmente, mentes criativas esquecem crenças filosóficas dogmáticas sempre que o apego a elas impede realizações construtivas. Tanto para eruditos quanto para leigos não é a Filosofia, mas a experiência ativa na própria Matemática que unicamente pode responder à questão: o que é Matemática? (Courant e Robins. Na seção *O que é Matemática?*, sem página).

Neste sentido, considerando o ensino de Matemática, Brolezzi (1991, p. 59) destaca:

> Quando se estuda Matemática elementar, muitas vezes é difícil ter uma visão ampla acerca da matéria como um todo. Dentro do currículo elementar, os diversos assuntos surgem bastante isolados uns dos outros, de modo que por si mesmos não são capazes de transmitir uma ideia clara do conjunto do que é estudado. Sem pretender aqui discutir a importante questão da definição do que deve conter um currículo elementar de Matemática, cabe-nos, no entanto, sugerir que se dê aos vários tópicos um tratamento que permita aos alunos uma compreensão mais global acerca do que estão fazendo.

Finalmente, chamamos a atenção para a importante relação que se dá entre o desenvolvimento do conhecimento matemático e as reformas curriculares e propostas educacionais no Brasil.

Como exposto, a partir dos séculos XVII E XVIII houve uma efervescência no desenvolvimento do conhecimento matemático, com grandes evoluções e criações. É a partir desse processo que, aproximadamente, no século XIX, intensifica-se a preocupação com o ensino da Matemática.

# 5. ANÁLISE DAS SITUAÇÕES ILUSTRATIVAS

Neste capítulo, serão apresentadas e discutidas quatro resoluções para cada uma das situações ilustrativas. Essas resoluções apresentadas foram desenvolvidas para atividades de formação continuada de professores no CAEM.

Após a descrição das atividades e suas resoluções, passamos a analisa-las com o intuito de identificar aspectos que se relacionam com o par análise e síntese e com a realização da atividade matemática em sala de aula.

Daremos ênfase aos conhecimentos, conceitos e conteúdos que foram mobilizados em cada caso. Vale ressaltar que técnicas operatórias como manipulações algébricas, o trabalho com expressões, fatoração, cálculo de determinantes, dentre outras, não serão aqui consideradas como conhecimentos, conceitos e/ou conteúdos mobilizados na resolução, e que outras resoluções também se fazem possíveis para cada uma das situações apresentadas, o que continuaria dando margem a presente discussão.

## 5.1 Situação ilustrativa 1.

Na figura abaixo, calcule o valor da medida do segmento $\overline{AB}$ :

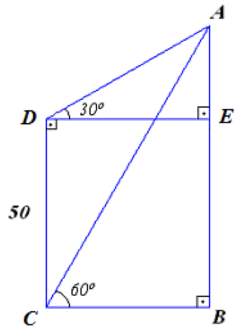


Figura 1: Proposição da situação ilustrativa 1

### 5.1.1 Resolução 1

Como o ângulo $A\hat{E}B$ é raso e $D\hat{E}A = 90°$, temos que $D\hat{E}B = 90°$.

Portanto, $BCDE$ é um retângulo, pois sendo a soma dos ângulos internos de um quadrilátero igual à $360°$, resta-nos que $B\hat{C}D = 90°$.

Logo, $BE = CD = 50$.

Como o ângulo $A\hat{C}D$ é igual à diferença entre os ângulos $B\hat{C}D = 90°$ e $B\hat{C}A = 60°$, segue que $A\hat{C}D = 30°$.

Mas, pela figura, $A\widehat{D}C = 120°$, o que nos faz concluir que $D\hat{A}C = 30°$, visto que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$. Isto é, o triângulo $\Delta ACD$ é isósceles, com $DC = DA = 50$.

No triângulo $\Delta AED$:

$$sen30° = \frac{1}{2} = \frac{AE}{50}$$

$$AE = \frac{50}{2}$$

$$AE = 25$$

Portanto:

$$AB = AE + BE = 25 + 50$$

$$AB = 75$$

Conceitos, conhecimentos e conteúdos mobilizados na resolução:

- ângulos raso e reto;
- retângulo e suas propriedades;
- soma de ângulos internos de polígonos;
- ângulos complementares;
- classificação de triângulos quanto a seus lados;
- relação trigonométrica seno.

### 5.1.2 Resolução 2

Como o ângulo $A\hat{E}B$ é raso e $D\hat{E}A = 90°$, temos que $D\hat{E}B = 90°$.

Portanto, $BCDE$ é um retângulo, pois sendo a soma dos ângulos internos de um quadrilátero igual à $360°$, resta-nos que $B\hat{C}D = 90°$.

Como o ângulo $A\hat{C}D$ é igual à diferença entre os ângulos $B\hat{C}D = 90°$ e $B\hat{C}A = 60°$, segue que $A\hat{C}D = 30°$.

Mas, pela figura, $A\widehat{D}C = 120°$, o que nos faz concluir que $D\hat{A}C = 30°$, visto que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$. Isto é, o triângulo $\Delta ACD$ é isósceles, com $DC = DA = 50$.

No triângulo $\Delta AED$:

$$cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{DE}{50}$$

$$DE = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$$

Pela lei dos cossenos no triângulo $\Delta ACD$:

$$(AC)^2 = 50^2 + 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 50 \cdot cos 120°$$

$$(AC)^2 = 5000 - 2500 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2$$

$$(AC)^2 = 7500$$

$$AC = \sqrt{7500}$$

$$AC = 50\sqrt{3}$$

Os triângulos $\Delta AED$ e $\Delta CBA$ são semelhantes, pois possuem ângulos de $30°, 60°\ e\ 90°$. A razão de semelhança entre eles é dada por:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{AB}$$

$$\frac{50}{50\sqrt{3}} = \frac{25\sqrt{3}}{AB}$$

$$AB = \frac{25\sqrt{3} \cdot 50\sqrt{3}}{50}$$

$$AB = 75$$

Conceitos, conhecimentos e conteúdos mobilizados na resolução:

- ângulos raso e reto;
- retângulo e suas propriedades;
- soma de ângulos internos de polígonos;
- ângulos complementares;
- classificação de triângulos quanto a seus lados;
- relação trigonométrica cosseno;
- lei dos cossenos;
- relações trigonométricas no ciclo trigonométrico;
- semelhança de triângulos.

### 5.1.3 Resolução 3

Considere a figura dada no plano cartesiano, de modo que o ponto C encontre-se na origem. Assim, a medida de AB, procurada, será igual ao valor da ordenada do ponto de intersecção entre as retas $r_1$, determinada pelos pontos A e C, e $r_2$, determinada pelos pontos A e D.

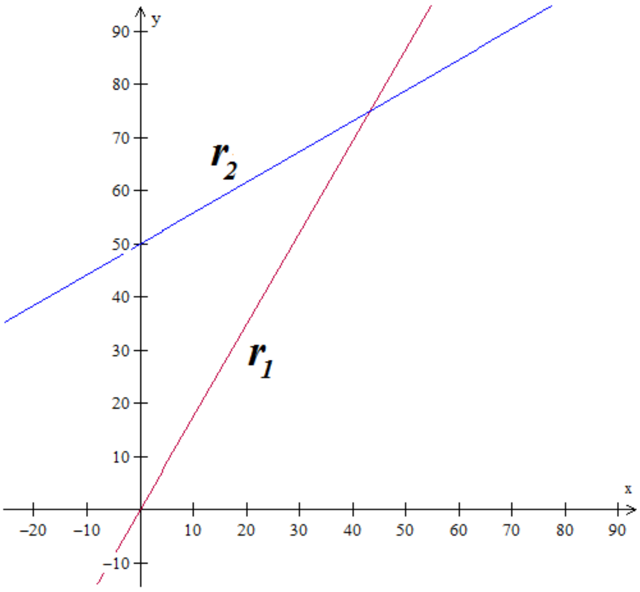


Figura 2: Representação das retas $r_1$ e $r_2$

$$r_1: y = tg60° \cdot x = \sqrt{3} \cdot x$$

$$r_2: y = tg30° \cdot x + 50 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot x + 50$$

Abscissa do ponto de intersecção entre as duas retas:

$$\sqrt{3} \cdot x = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot x + 50$$

$$\sqrt{3} \cdot x - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot x = 50$$

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cdot x = 50$$

$$x = \frac{50 \cdot 3}{2\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{75}{\sqrt{3}}$$

Substituindo o valor da abscissa do ponto de intersecção entre as duas retas na expressão de uma das retas, encontramos o valor da ordenada do ponto. Nesse caso, substituindo em $r_1$:

$$y = \sqrt{3} \cdot x = \sqrt{3} \cdot \frac{75}{\sqrt{3}}$$

$$y = 75$$

Portanto, como a medida de AB, procurada, é igual ao valor da ordenada do ponto de intersecção entre as retas $r_1$ e $r_2$, segue:

$$AB = 75$$

Conceitos, conhecimentos e conteúdos mobilizados na resolução:

- plano cartesiano;
- localização no plano cartesiano;
- abscissas e ordenadas;

- esboço de gráficos de funções, particularmente, de funções do 1º grau;
- coeficiente angular da reta;
- intersecção entre retas, analiticamente;
- relação trigonométrica tangente.

### 5.1.4 Resolução 4

Como o ângulo $A\hat{E}B$ é raso e $D\hat{E}A = 90°$, temos que $D\hat{E}B = 90°$.

Portanto, $BCDE$ é um retângulo, pois sendo a soma dos ângulos internos de um quadrilátero igual à $360°$, resta-nos que $B\hat{C}D = 90°$.

Logo, $BE = CD = 50$.

Como o ângulo $A\hat{C}D$ é igual à diferença entre os ângulos $B\hat{C}D = 90°$ e $B\hat{C}A = 60°$, segue que $A\hat{C}D = 30°$.

Mas, pela figura, $A\widehat{D}C = 120°$, o que nos faz concluir que $D\hat{A}C = 30°$, visto que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a *180°*. Isto é, o triângulo $\Delta ACD$ é isósceles, com DC= $DA = 50$.

Como DC= $DA = 50$ e $A\widehat{D}C = 120°$, podemos considerar a figura como parte de um hexágono regular, visto que, em particular, essa figura tem como duas de suas propriedades, 120° como medida de seus ângulos externos, e todos os lados com medidas congruentes entre si, medidas essas congruentes ao raio da circunferência que circunscreve o hexágono regular:

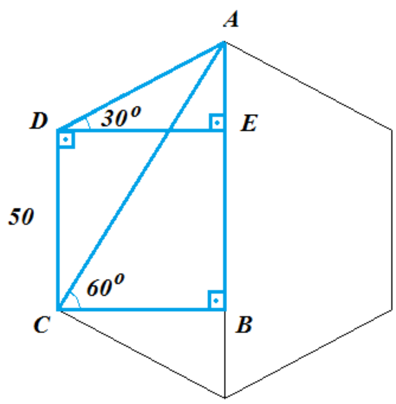


Figura 3: Representação da situação por meio de um hexágono regular

No caso, o raio da circunferência que circunscreve o hexágono mede 50. Logo, seu diâmetro mede 100.

Pela simetria da figura, temos:

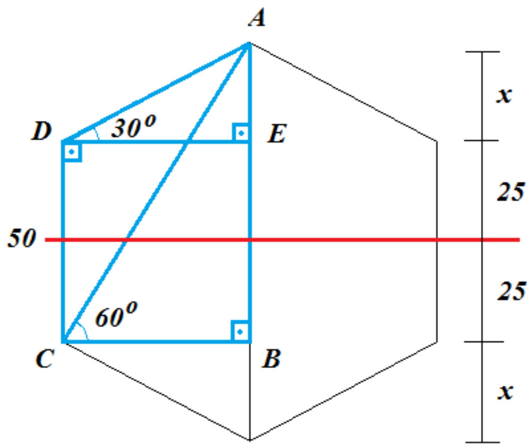


Figura 4: Representação da situação por meio de um hexágono regular com eixo de simetria

$$2x + 50 = 100$$

$$x = \frac{100 - 50}{2}$$

$$x = 25$$

Mas:

$$AE = x = 25 \qquad e \qquad AB = AE + BE$$

$$AB = 25 + 50$$

$$AB = 75$$

Conceitos, conhecimentos e conteúdos mobilizados na resolução:

- ângulos raso e reto;
- retângulo e suas propriedades;
- soma de ângulos internos de polígonos;
- ângulos complementares;
- classificação de triângulos quanto a seus lados;
- polígonos inscritos em circunferências;
- Hexágono Regular - propriedades;
- simetria em figuras.

## 5.2 Sistematização: situação ilustrativa 1

A partir das resoluções apresentadas para a situação ilustrativa 1, percebe-se a mobilização de diferentes conceitos, conhecimentos e conteúdos, o que nos indica a possibilidade de um trabalho profícuo a partir da proposição de situações em sala de aula prezando-se por uma discussão que leve em conta a situação problema em si, o conteúdo matemático de cada situação, os objetivos previstos com a sua proposição, os conceitos envolvidos, os raciocínios e sua natureza, os procedimentos e operações envolvidas como as de relacionar ideias, refletir, argumentar, analisar, sintetizar, generalizar, projetar, predizer etc.. A intenção principal é que se vá além da análise de um conteúdo específico e se explicite, procurando mapear, elementos constitutivos do "fazer matemático" a partir de uma atividade de sala de aula.

Nessa perspectiva, os alunos podem compartilhar suas resoluções e discutir sobre elas, vislumbrando a presença e, consequentemente, a articulação e complementaridade das operações de analisar e sintetizar. Trata-se do nosso trabalho de visualizar e analisar os elementos relacionados ao par análise e síntese, sistematizando as ideias relacionadas a eles e que foram elencadas a partir da exploração dos documentos oficiais, como algo que dá significado ao aprendizado.

A título de visualização das relações citadas, organizamos as ideias sugeridas nas resoluções no quadro a seguir:

| Relação de conceitos, conhecimentos e conteúdos mobilizados | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Situação 1** | | | | |
| **O que foi mobilizado** | **Resolução 1** | **Resolução 2** | **Resolução 3** | **Resolução 4** |
| Ângulos raso e reto | X | X | | X |
| Retângulo e suas propriedades | X | X | | X |
| Soma de ângulos internos de polígonos | X | X | | X |
| Ângulos complementares | X | X | | X |
| Classificação de triângulos quanto a seus lados | X | X | | X |
| Relação trigonométrica seno | X | | | |
| Relação trigonométrica cosseno | | X | | |
| Lei dos cossenos | | X | | |
| Relações trigonométricas no ciclo trigonométrico | | X | | |
| Semelhança de triângulos | | X | | |
| Plano cartesiano | | | X | |
| Localização no plano cartesiano | | | X | |
| Abscissas e ordenadas | | | X | |
| Esboço de gráficos de funções | | | X | |
| Coeficiente angular da reta | | | X | |
| intersecção entre retas, analiticamente | | | X | |
| relação trigonométrica tangente | | | X | |
| Polígonos inscritos em circunferências | | | | X |
| Hexágono regular - propriedades | | | | X |
| Simetria em figuras planas | | | | X |

Quadro 9: sistematização dos conceitos, conhecimentos e conteúdos mobilizados nas resoluções sugeridas para a situação 1

Com essas propostas de resoluções para a situação 1 e a sistematização feita no quadro anterior, podemos perceber que a grande parte das noções comuns entre as resoluções são conteúdos matemáticos elementares, e que com o desenvolvimento dessas resoluções os conteúdos presentes em cada uma delas vão ficando mais complexos e específicos.

Essa diversidade de conteúdos que podem ser mobilizados ao longo da resolução de uma situação matemática proposta pode ser entendida como uma possibilidade de discussão nas aulas de Matemática que englobe e relacione diversos conhecimentos, o que mostra o potencial que existe nessa discussão no âmbito dos processos de análise e síntese, uma vez que ela pode ser conduzida considerando as ideias relacionadas ao par análise e síntese apresentadas anteriormente nos documentos analisados como, por exemplo: generalizar, tomar decisão, fazer conexões entre temas e conteúdos matemáticos, argumentar, contextualizar e descontextualizar, avaliar estratégias, dentre outros.

## 5.3 Situação ilustrativa 2

Calcule o valor da medida da área delimitada pelas retas $r_1$, $r_2$, $r_3$ e $r_4$, de equações:

$r_1$: y = - (5/7).x + (52/7)
$r_2$: y = (3/5).x – (22/5)
$r_3$: y = x + 4
$r_4$: y = - 7.x - 12

Figura 5: Proposição da situação ilustrativa 2

Antes de especificar a resolução, é importante que sejam esboçadas as retas em questão, para que seja conhecida a área delimitada por elas:

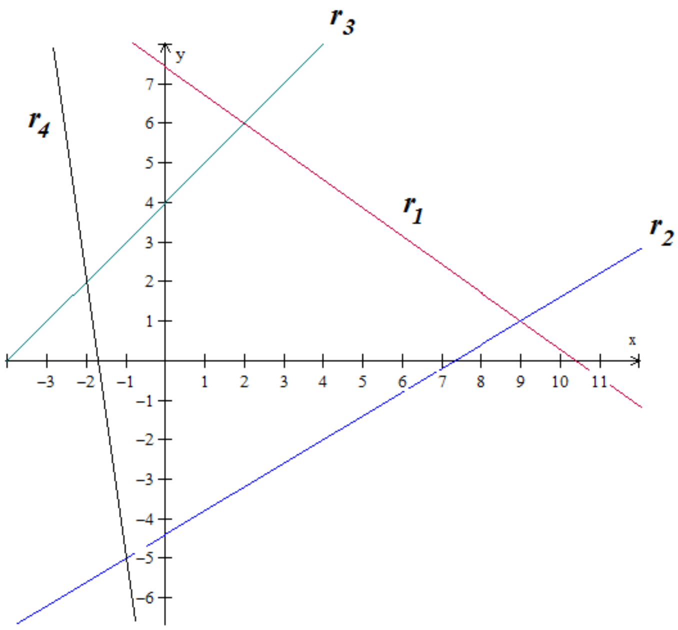


Figura 6: Representação das retas $r_1$, $r_2$, $r_3$ e $r_4$

E, também, determinados os pontos de intersecção entre as retas. Calculemos as coordenadas desses pontos:

Ponto 1 – intersecção entre as retas $r_1$ e $r_2$:

$$\left(-\frac{5}{7}\right) \cdot x + \frac{52}{7} = \left(\frac{3}{5}\right) \cdot x - \frac{22}{5}$$

$$x = 9$$

Substituindo o valor de $x$ em $r_1$:

$$y = \left(-\frac{5}{7}\right) \cdot 9 + \frac{52}{7}$$

$$y = 1$$

Assim, $P_1 = (9{,}1)$

Ponto 2 – intersecção entre as retas $r_1$ e $r_3$:

$$\left(-\frac{5}{7}\right) \cdot x + \frac{52}{7} = x + 4$$

$$x = 2$$

Substituindo o valor de $x$ em $r_3$:

$$y = 2 + 4$$

$$y = 6$$

Assim, $P_2 = (2,6)$

Ponto 3 – intersecção entre as retas $r_3$ e $r_4$:

$$x + 4 = -7x - 12$$

$$x = -2$$

Substituindo o valor de $x$ em $r_3$:

$$y = -2 + 4$$

$$y = 2$$

Assim, $P_3 = (-2,2)$

Ponto 4 – intersecção entre as retas $r_2$ e $r_4$:

$$\left(\frac{3}{5}\right) \cdot x - \frac{22}{5} = -7x - 12$$

$$x = -1$$

Substituindo o valor de $x$ em $r_4$:

$$y = -7 \cdot (-1) - 12$$

$$y = -5$$

Assim, $P_4 = (-1, -5)$

Temos, então, a figura em questão:

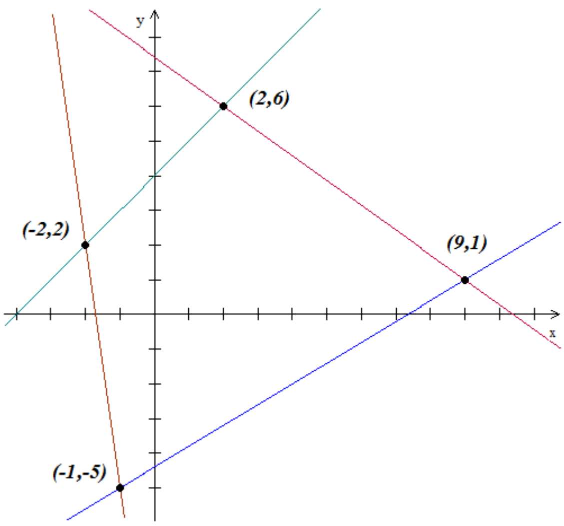


Figura 7: Representação dos pontos de intersecção entre as retas $r_1$, $r_2$, $r_3$ e $r_4$

No caso desta situação ilustrativa, em particular, serão considerados como conhecimentos, conteúdos e conceitos mobilizados em todas as resoluções apresentadas, aquilo que assim foi até aqui:

- localização no plano cartesiano;
- equação explícita da reta;
- esboço de gráficos de funções, particularmente, de funções do 1º grau;
- Intersecções entre retas, analiticamente.

### 5.3.1 Resolução 1

Seja $A$ a área procurada. Podemos considerar A como parte de uma decomposição de um quadrado cujo lado mede 11 unidades:

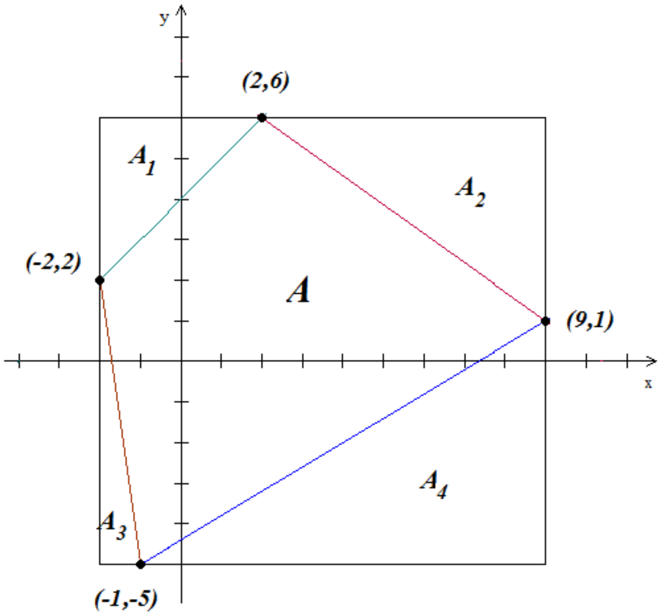


Figura 8: Representação da área $A$ por decomposição

Assim,

$$A = 11^2 - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$$

$$A = 121 - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$$

Mas,

$$A_1 = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8\, u.a.$$

$$A_2 = \frac{7 \cdot 5}{2} = \frac{35}{2}\, u.a.$$

$$A_3 = \frac{1 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2}\, u.a.$$

$$A_4 = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30\, u.a.$$

Logo:

$$A = 121 - \left(8 + \frac{35}{2} + \frac{7}{2} + 30\right) = 121 - 59$$

$$A = 62\ u.a.$$

Conceitos, conhecimentos e conteúdos mobilizados na resolução:

- áreas de figuras geométricas planas, particularmente, quadrados e triângulos;
- polígonos como decomposição de outros polígonos;
- área de uma figura geométrica plana como decomposição de áreas;

## 5.3.2 Resolução 2

Seja A a área procurada. Podemos considerar A como composição de figuras, no caso, como composição de quatro triângulos e um retângulo:

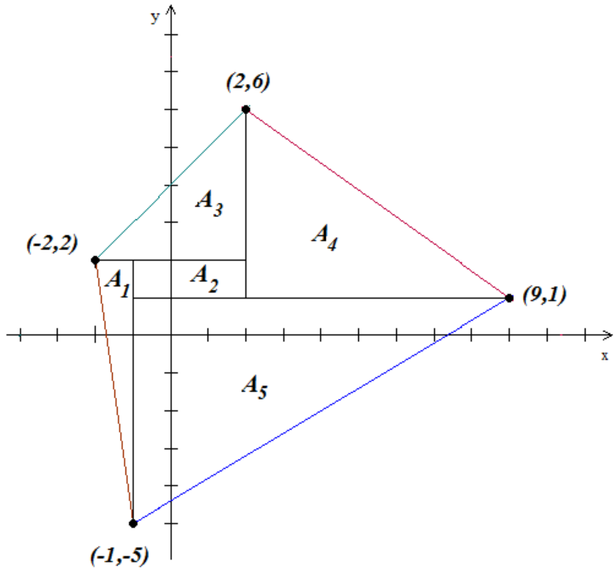


Figura 9: Representação da área $A$ por composição

Assim,

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

Mas,

$$A_1 = \frac{1 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2}\ u.a.$$

$$A_2 = 1 \cdot 3 = 3\ u.a.$$

$$A_3 = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8\ u.a.$$

$$A_4 = \frac{5 \cdot 7}{2} = \frac{35}{2}\ u.a.$$

$$A_5 = \frac{6 \cdot 10}{2} = 30\ u.a.$$

Logo:

$$A = \frac{7}{2} + 3 + 8 + \frac{35}{2} + 30$$

$$A = 62\ u.a.$$

Conceitos, conhecimentos e conteúdos mobilizados na resolução:

- áreas de figuras geométricas planas, particularmente, retângulos e triângulos;
- polígonos como composição de outros polígonos;
- área de uma figura geométrica plana como composição de áreas;

### 5.3.3 Resolução 3

Seja A a área procurada. Podemos calculá-la por meio do conhecido processo prático para cálculo de áreas de polígonos via determinantes:

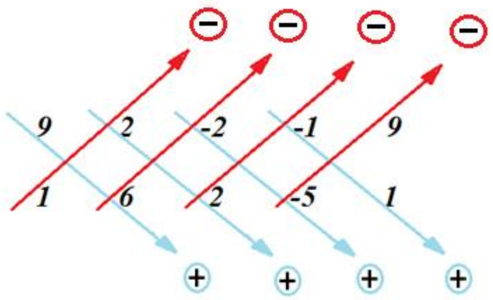


Figura 10: Processo prático para o cálculo de área de polígonos via determinantes

$$A = \frac{1}{2} \cdot [9 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-5) + (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 6 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) - (-5) \cdot 9]$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (54 + 4 + 10 - 1 - 2 + 12 + 2 + 45) = \frac{1}{2} \cdot (124)$$

$$A = 62\, u.a.$$

Conceitos, conhecimentos e conteúdos mobilizados na resolução:

- processo prático para cálculo de áreas de polígonos via determinantes;

### 5.3.4 Resolução 4

Seja A a área procurada. Podemos calculá-la considerando as integrais definidas das funções que representam as quatro retas, $r_1, r_2, r_3$ e $r_4$, em intervalos específicos:

$$f_1(x) = -\left(\frac{5}{7}\right)x + \frac{52}{7}$$

$$f_2(x) = \left(\frac{3}{5}\right)x - \frac{22}{5}$$

$$f_3(x) = x + 4$$

$$f_4(x) = -7x + 12$$

$$A = \int_{-2}^{2} f_3(x)dx + \int_{2}^{9} f_1(x)dx - \int_{-2}^{-1} f_4(x)dx - \int_{-1}^{9} f_2(x)dx$$

Calculando cada uma das integrais, separadamente:

$$\int_{-2}^{2} f_3(x)dx = \int_{-2}^{2} (x+4)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{4}{2} + 8 - \left(\frac{4}{2} - 8\right) = 16$$

$$\int_{2}^{9} f_1(x)dx = \int_{2}^{9} \left(-\frac{5x}{7} + \frac{52}{7}\right)dx = -\frac{1}{7}\int_{2}^{9} (5x - 52)dx = -\frac{1}{7}\left(\frac{5x^2}{2} - 52x\right)\Bigg|_{2}^{9} =$$

$$= -\frac{1}{7}\left[\frac{5 \cdot 81}{2} - 52 \cdot 9 - \left(\frac{5 \cdot 4}{2} - 52 \cdot 2\right)\right] = -\frac{1}{7}\left(\frac{405}{2} - 468 - 10 + 104\right) =$$

$$= -\frac{1}{7}\left(\frac{405}{2} - \frac{748}{2}\right) = -\frac{1}{7} \cdot \left(-\frac{343}{2}\right) = \frac{49}{2}$$

$$\int_{-2}^{-1} f_4(x)dx = \int_{-2}^{-1} (-7x - 12)dx = \left(\frac{-7x^2}{2} - 12x\right)\Big|_{-2}^{-1} = -\frac{7}{2} + 12 — \frac{7 \cdot 4}{2} + 24 =$$

$$= -\frac{7}{2} + 12 + 14 - 24 = -\frac{3}{2}$$

$$\int_{-1}^{9} f_2(x)dx = \int_{-1}^{9} \left(\frac{3x}{5} - \frac{22}{5}\right) dx = \frac{1}{5}\int_{-1}^{9} (3x - 22)dx = \frac{1}{5}\left(\frac{3x^2}{2} - 22x\right)\Big|_{-1}^{9} =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{3 \cdot 81}{2} - 22 \cdot 9 - \left(\frac{3 \cdot 1}{2} + 22\right)\right] = \frac{1}{5}\left(\frac{243}{2} - 198 - \frac{3}{2} - 22\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{240}{2} - 220\right) = \frac{1}{5} \cdot (-100) = -20$$

Logo, a área A é dada por:

$$A = 16 + \frac{49}{2} — \frac{3}{2} — 20 = 16 + \frac{49}{2} + \frac{3}{2} + 20 = 36 + 26$$

$$A = 62\ u.a.$$

Conceitos, conhecimentos e conteúdos mobilizados na resolução:

- integral definida de uma função polinomial;
- representação geométrica de integral definida;
- área de uma figura geométrica plana como composição de áreas;

Assim como no caso das resoluções propostas para a situação 1, podemos perceber, na situação 2, que a grande parte das noções comuns entre as resoluções são conteúdos matemáticos elementares, e que com o desenvolvimento dessas resoluções os conteúdos presentes em cada uma delas vão ficando mais complexos e específicos. Assim, podemos entender, também, a situação 2 como uma possibilidade de discussão nas aulas de Matemática que englobe e relacione diversos conhecimentos e que considere as ideias relacionadas ao par análise e síntese apresentadas anteriormente nos documentos analisados como, por exemplo: generalizar, tomar decisão, fazer conexões entre temas e conteúdos matemáticos, argumentar, contextualizar e descontextualizar, avaliar estratégias, dentre outros.

## 5.4 Sistematização: situação ilustrativa 2

Do mesmo modo como feito na sistematização da situação ilustrativa 1, a partir das resoluções apresentadas para a situação ilustrativa 2, percebe-se a relação existente entre os conceitos, conhecimentos e conteúdos mobilizados. Mais uma vez, somos levados à ideia de que existe a possibilidade de um trabalho profícuo ao se trabalhar situações em sala de aula contemplando, de maneira intencional, o par análise e síntese.

A partir das resoluções apresentadas para a situação ilustrativa 2, percebe-se a relação existente entre os conceitos, conhecimentos e conteúdos mobilizados. Como já apontado na sistematização da situação ilustrativa 1, a intenção principal é que se vá além da análise de um conteúdo específico e se explicite, procurando mapear, elementos constitutivos do "fazer matemático" a partir de uma atividade de sala de aula, o que é possível com a proposição de situações prezando-se por uma discussão que leve em conta a situação problema em si, o conteúdo matemático de cada situação, os objetivos previstos com a sua proposição, os conceitos envolvidos, os raciocínios e sua natureza, os procedimentos e operações envolvidas como as de relacionar ideias, refletir, argumentar, analisar, sintetizar, generalizar, projetar, predizer etc..

Podemos reiterar que, situações matemáticas podem potencializar a aprendizagem dos alunos se exploradas de maneira a considerar as ações de análise e síntese, isto é, se exploradas de maneira a considerar os detalhes de determinados conceitos, conhecimentos e conteúdos, localmente, e também a relação entre eles, por meio de uma visão mais global e integradora.

Como feito anteriormente, a título de visualização das relações citadas, sistematizamos as ideias sugeridas nas resoluções desta situação no quadro a seguir:

| Relação de conceitos, conhecimentos e conteúdos mobilizados | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Situação 2** | | | | |
| **O que foi mobilizado** | **Resolução 1** | **Resolução 2** | **Resolução 3** | **Resolução 4** |
| Localização no plano cartesiano | X | X | X | X |
| Equação explícita da reta | X | X | X | X |
| Esboço de gráfico de funções | X | X | X | X |
| Intersecções entre retas, analiticamente | X | X | X | X |
| Áreas de figuras geométricas planas | X | X | | |
| Polígonos como decomposição de outros polígonos | X | | | |
| Área de uma figura geométrica plana como decomposição de áreas | X | | | |
| Polígonos como composição de outros polígonos | | X | | |
| Área de uma figura geométrica plana como composição de áreas | | X | | X |
| Processo prático para o cálculo de áreas de polígonos via determinantes | | | X | |
| Integral definida de uma função polinomial | | | | X |
| Representação geométrica de integral definida | | | | X |

Quadro 10: Sistematização dos conceitos, conhecimentos e conteúdos mobilizados nas resoluções sugeridas para a situação 2

## 5.5 Sistematização

Ao longo da exploração dos documentos oficiais, no capítulo 3, foi feita a sistematização das ideias relacionadas a análise e síntese e, também, daquelas fundantes da atividade matemática em sala de aula presentes em cada um desses documentos.

Os quadros a seguir relacionam essas ideias com as situações analisadas anteriormente. Neles, identificamos quais dessas ideias podem ser exploradas quando do trabalho com as situações analisadas em sala de aula.

| **Relação entre as ideias presentes nos documentos oficiais e as situações analisadas** | | |
|---|---|---|
| **Ideias presentes nos documentos analisados** | **Situação 1** | **Situação 2** |
| Fazer conexões entre temas e conteúdos matemáticos | X | X |
| Fazer conexões entre Matemática e outras áreas do conhecimento | | |
| Descontextualizar | X | X |
| Generalizar | X | X |
| Tomar decisões | X | X |
| Mobilizar conteúdos | X | X |
| Mapear | X | X |
| Pensamento global | X | X |
| Escolher relevâncias | X | X |
| Composição | X | X |
| Autenticidade | X | X |
| Contextualizar | X | X |
| Argumentar | X | X |
| Estudo fragmentado | X | X |
| Analisar situações | X | X |
| Avaliar estratégias | X | X |
| Estudar conteúdos | X | X |
| Tecer | X | X |
| Pensamento local | X | X |
| Precisão | X | X |
| Decomposição | X | X |

Quadro 11: Relação entre as ideias presentes nos documentos oficias e as situações analisadas.

| Relação entre as ideias fundantes da atividade matemática em sala de aula e as situações analisadas | | |
|---|---|---|
| **Ideias fundantes da atividade matemática em sala de aula** | **Situação 1** | **Situação 2** |
| Justificar o que se faz/sabe | X | X |
| A resolução de problemas como ponto de partida | X | X |
| A noção de competência no fazer matemático | X | X |
| O aluno como protagonista nos processos de ensino e de aprendizagem | X | X |
| Comparação de estratégias e resultados | X | X |
| Validação, confronto de ideias | X | X |
| Interação entre os alunos | X | X |

Quadro 12: Relação entre as ideias fundantes da atividade matemática em sala de aula e as situações analisadas.

# DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Resgatamos, agora, a problemática da presente pesquisa que nos propusemos a responder:

*Como o par análise e síntese pode estar presente nas aulas de Matemática e como esses elementos se relacionam com os processos de ensino e de aprendizagem desta disciplina?*

E retomamos os objetivos do trabalho:

*Analisar e relacionar alguns problemas e situações ilustrativas do ensino de Matemática, tendo em vista a possibilidade da presença do par análise e síntese em aulas de Matemática e os possíveis desdobramentos em relação à aprendizagem dos alunos.*

No campo da didática da Matemática, entendemos que os alunos devem ser protagonistas no desenvolvimento do conhecimento matemático, relacionando ideias, refletindo sobre elas, argumentando, analisando, sintetizando, generalizando, projetando, tomando decisões etc..

Os momentos de discussão coletiva se fazem eficazes nesse sentido, são oportunidades para os alunos desenvolverem essas competências inerentes ao trabalho com a atividade.

Como exposto anteriormente:

> Concebemos o trabalho matemático na classe (qualquer que seja ela) como a construção coletiva de uma cultura que se vai elaborando na medida em que um grupo de alunos e professor enfrentam problemas, concebem diferentes formas de abordá-los e discutem sobre as mesmas, geram novos problemas a partir das resoluções realizadas, descontextualizam, generalizam e se perguntam sobre o alcance das relações produzidas... As ideias que vão emergindo são o resultado de uma completa combinação de interações em

> que se entrelaçam o trabalho pessoal dos alunos com as confrontações coletivas – geralmente orientadas pelo professor – que dão sentido à realização de novas questões e abrem outras possibilidades para o trabalho matemático (Sadovsky e Sessa. 2005, p. 17).

Desse modo, e a partir das situações ilustrativas apresentadas e suas análises, podemos concluir que a atividade matemática em sala de aula pode favorecer o desenvolvimento de competências e, particularmente, das ações de análise e síntese por parte dos estudantes, estando, inclusive, em conformidade com os documentos oficiais que foram analisados – a saber, os PCN, a matriz curricular do ENEM e o Currículo do Estado de São Paulo.

As situações apresentadas tiveram o papel de evidenciar como uma situação matemática pode propiciar a realização da atividade matemática, de fato, em sala de aula, valorizando os aspectos considerados como essenciais na didática da Matemática e a possibilidade de análise e síntese, de fragmentação e de mobilização, de pensar local e globalmente, potencializando a aprendizagem dos alunos.

Nesse contexto, concordamos que:

> (...) ao examinar qualquer questão, é tão inadequado concluir sem argumentar quanto o é argumentar, argumentar, argumentar, sem chegar a uma decisão. É uma ocorrência muito comum, em trabalhos escolares, a realização de diversas "análises" (às vezes pseudoanálises) sem que se chegue a qualquer conclusão, sem que se proponha uma resposta à questão formulada. Após analisar todos os ângulos, todos os aspectos envolvidos, é muito importante decidir-se a respeito da questão em pauta, saindo da cisão que a observação dos diversos lados da questão propicia, e chegando à decisão, ao fim da cisão, ou seja, a uma situação final em que explicitamos de que lado estamos (Machado. 2010, p. 55).

Como vimos por meio das situações ilustrativas apresentadas, ao se propor uma situação matemática em sala de aula, é importante prezar pelo trabalho coletivo, pelo momento de discussão coletiva, de modo que a complementaridade das ações de análise e síntese seja considerada.

Essa é uma perspectiva que pressupõe planejamento detalhado por parte do professor, responsável por garantir as condições necessárias para que a discussão entre os alunos se desenvolva. É importante que o professor conheça muito bem a situação proposta, que antecipe para si prováveis modos de se resolver uma situação problema para que sejam relacionadas às resoluções produzidas pelos alunos. Nessa perspectiva, os papéis do professor e dos alunos são assim considerados:

> Em particular, o professor deverá conhecer aquelas questões que definem a "razão de ser" das obras a serem estudadas, assim como as possíveis maneiras concretas de gerar, sob determinadas condições, as principais organizações matemáticas (tipos de problemas, técnicas, tecnologias e teorias) que constituem a obra estudada. (...) Do mesmo modo, o aluno, na qualidade de estudante, pode se considerar menos dependente do professor ao ter um referente externo na atividade matemática que realiza. Isso lhe proporciona maior liberdade para administrar seu próprio estudo e utilizar meios de estudo complementares ao ensino, como são, por exemplo, os livros de consulta, as pesquisas pessoais, os intercâmbios com os colegas, etc. (Chevallard. 2001, p. 202).

Retomando as ideias de análise e síntese no processo de desenvolvimento do conhecimento da Matemática, Courant e Robins (2000), afirmam que o mais importante do processo não está em definir os objetos matemáticos, mas sim em relacioná-los.

Nas palavras de Garnica (2004, p. 92):

> (...) sugiro algo que, ao menos em princípio, poderia ser um ponto de apoio inegociável: o estabelecimento da concepção de que a matemática não é um conjunto de objetos que suportam tratamentos distintos, mas um conjunto de práticas sociais determinadas exatamente por esses tratamentos aos supostos "objetos matemáticos".

Finalmente, defendemos o trabalho em sala de aula pautado em atividades que contemplem intencionalmente a noção de complementaridade das operações de análise e síntese. Entendemos os dois elementos como constitutivos dos processos de aprender e ensinar Matemática, não devendo haver supervalorização de um deles.

Na última sistematização apresentada no capítulo 5, vimos que a maioria das ideias exploradas ao longo do texto, tanto as relacionadas a análise e síntese quanto aquelas que são fundantes da atividade matemática em sala de aula, podem se fazer presentes quando do trabalho com as situações analisadas em sala de aula. Como existe uma confluência entre todas essas ideias numa mesma situação, fica evidente a complementaridade que existe entre elas e, portanto, entre o par análise e síntese.

Assim, resgatamos uma ideia já apresentada:

> De acordo com Salomon, a distinção mais importante está entre a aproximação analítica, na qual os eventos externos ao sujeito são manipulados (isolados, controlados e medidos) com o propósito de inferir acerca de eventos internos como a aprendizagem ou a tomada de decisões, e a aproximação sistêmica, na qual os eventos são estudados em sua mútua interação e interpretação. (...) "A aproximação analítica capitaliza em precisão, enquanto que a aproximação sistêmica capitaliza em autenticidade" (Kilpatrick. 1998, p. 6).

Com as análises feitas a partir das situações ilustrativas, aulas de Matemática planejadas e desenvolvidas considerando intencionalmente a complementaridade do par análise e síntese possibilitam um trabalho matemático profícuo em sala de aula, uma vez que, assim, são propostas situações de discussão que leve em conta a situação em si, o conteúdo matemático, os objetivos previstos com sua proposição, os conceitos envolvidos, os raciocínios e sua natureza, os procedimentos e operações envolvidos, e que propicie aos alunos a oportunidade de relacionar ideias, de refletir sobre elas, de argumentar, de analisar, de sintetizar, de generalizar, de projetar, de predizer, dentre outros.

# REFERÊNCIAS


ALMEIDA, J. J. P. de. **Sobre situações e contextos**. In: Ensino de Matemática na escola de nove anos: dúvidas, dívidas e desafios**.** Cengage Learning, São Paulo: 2014.

ALSINA, C.; BURGUÊS, C.; FORTUNY, J.M.. **Invitacion a la didactica de la Geometria**. Coleção Matematicas: cultura y aprendizaje. Vol. 12. Editoral Sintesis, Madrid: 1995.

BELL, E.T.. **Historia de las Matematicas**. Fondo de Cultura Econômica, México: 1985.

BORGES, M. F.. **Ciência e religião: reflexões sobre os livros de história da Matemática e a formação do professor**. 2010. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, SP.

BOYER, C.B.. **História da Matemática**. 2ª Ed. Editora Blucher, São Paulo, SP: 1996.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matriz de Referência para o ENEM 2009**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13318&Itemid=310
Acesso em 24 de setembro de 2014.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROLEZZI, A. C.. **A arte de contar: uma introdução ao estudo do valor didático da História da Matemática**. 1991. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, SP.

BUTLEN, D.. **Dos ejemplos de situaciones de enseñanza de la matemática dirigida a alumnos com dificultades**. In: Documientos para la formación de professores de escuela em didactica de la matemática. CPIRELEM tomo V, IREM Paris-VII, 1996.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J.. **Estudar Matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Artmed Editora, Porto Alegre, RS: 2001.

COSTA, J. C. O.. **O Currículo de Matemática no Ensino Médio do Brasil e a Diversidade de Percursos Formativos**. 2011. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, SP.

COURANT, R.; ROBINS, H.. **O que é Matemática?** Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, RJ: 2000.

D’AMBRÓSIO, U.. **Uma História Concisa da Matemática no Brasil**. Editora Vozes, Petrópolis, RJ: 2011.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Editora UNICAMP, Campinas, SP: 2004.

GODINO, J. D.. **Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica.** Granada: Universidade de Granada, 2003.

LACROIX, S. F.. **Ensaios sobre o ensino em geral e o de Matemática em particular**. Editora UNESP, São Paulo, SP: 2013.

KILPATRICK, J.; GÓMEZ, P.; RICO, L.. **Educación Matemática: errores y dificultades de lós Estudiantes; Resolución de problemas; Evaluación; Historia**. Universidad de lós Andes, uma empresa docente, Bogotá: 1998.

KLINE, M. **Matemáticas para lós Estudiantes de humanidades**. Fondo de Cultura Econômica, México: 2001.

MACHADO, N. J.. **Epistemologia e Didática: as concepções do conhecimento e inteligência e a prática docente**. 7ª Edição. Cortez Editora: São Paulo, 2011.

MACHADO, N. J.. **Educação: competência e qualidade**. Coleção Ensaios Transversais. 2ª Edição. Editora Escrituras: São Paulo, 2010.

MIGUEL, A.; GARNICA, A. V.; IGLIORI, S B. C.; D’AMBRÓSIO, U.. **A Educação Matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização**. Revista Brasileira de Educação, Anped: Rio de Janeiro, RJ, v. 27, 2004.

MIGUEL, A.. **Três estudos sobre História e Educação Matemática**. 1993. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

MIORIN, M. A.. **Introdução à História da Educação Matemática**. Atual Editora: São Paulo, 1998.

PANIZZA, M. e cols. **Ensinar Matemática na Educação Infantil e nas Séries Iniciais**. Artmed Editora, Porto Alegre, RS: 2005.

PERALTA, D. A.. **Formação continuada de professores de Matemática em contexto de Reforma Curricular: Contribuições da Teoria da Ação Comunicativa**. 2012. Tese (Doutorado) – Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista, Bauru, SP.

PIRES, C. M. C. **Currículos de Matemática: da organização linear à ideia de rede**. Editora FTD, São Paulo, SP: 2000.

PIRES, C. M. C.. **Educação Matemática e sua Influência no Processo de Organização e Desenvolvimento Curricular no Brasil**. BOLEMA, Rio Claro, Ano 21, n. 29, p. 13-42, 2008.

RICO, L.; SIERRA, M.. **Didáctica de lá Matemática e investigación.** In: La investigación em Educación Matemática – Parte del capítulo Didactica de la Matemática e Investigación, del libro Matemática Española em los albores del siglo XXI. Editado por J. Carrilo y L.C, Contreras: 2000.

SADOVSKY, P.; SESSA, C.. **La conformación de uma comunidad matemática em um proceso de formación de maestros: um ejemplo privilegiado para conocer complejidades acerca de la classe de matemática**. Revista Yupana, no 2. Faculdade de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional Del Litoral, Santa Fé, Argentina: 2005.

SANTOS, V. de M.. **A Matemática Escolar, o Aluno e o Professor: Paradoxos Aparentes e Polarizações em Discussão**. Caderno CEDES, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 25-38, 2008.

SÃO PAULO (Estado). SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nílson José Machado. –** São Paulo: SEE, 2010.

SAVIANI, D.. **Escola e democracia: teorias da educação, curvatura da vara, onze teses sobre educação e política!** Coleção polêmicas do nosso tempo. 32ª Edição. Editora Autores Associados, Campinas, SP: 1999.SILVA, E. R. da. **Uma reflexão sobre a ideia de competência e implicações educacionais**. 2010. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, SP.

STEINER, H. G.. **Teoria da Educação Matemática (TEM): uma introdução**. Quadrante: Revista Teórica e de investigação. Vol 2 (I), Lisboa, 1993.

TÁBOAS, C. M. G.. **O número e sua história cultural: fundamento necessário na formação do professor**. 1993. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

VAZ, D. A. de F.. **A influência da Matemática nas Regras para a Direção do Espírito e em O Discurso do Método**. 2007. Tese (Doutorado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP.