

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO**

Tese de Doutorado

AMILTON BRAIO ARA

**O ENSINO DE ESTATÍSTICA E A BUSCA DO EQUILÍBRIO ENTRE OS
ASPECTOS DETERMINÍSTICOS E ALEATÓRIOS DA REALIDADE**

**São Paulo
2006**

AMILTON BRAIO ARA

**O ENSINO DE ESTATÍSTICA E A BUSCA DO EQUILÍBRIO ENTRE OS
ASPECTOS DETERMINÍSTICOS E ALEATÓRIOS DA REALIDADE**

Tese apresentada à Faculdade de Educação da
Universidade de São Paulo para obtenção do título
de Doutor em Educação.

Linha de Pesquisa: Ensino de Ciências e
Matemática
Orientador: Prof. Dr. Nílson José Machado

**São Paulo
2006**

FOLHA DE APROVAÇÃO

Amilton Braio Ara

O Ensino de Estatística e a busca do equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios da realidade.

Tese apresentada à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Educação.

Linha de Pesquisa: Ensino de Ciências e Matemática

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Assinatura: _____

Para minha esposa Everenice e meus filhos Paulo José e Thiago,
companheiros na aventura da vida.

Agradecimentos

Ao Professor Nílson José Machado que desde o início do projeto me incentivou para a sua realização e com muita dedicação, amizade e competência cumpriu a sua tarefa de orientador para que o mesmo pudesse ser concretizado.

À professora Lisbeth Kaiserlian Cordani, pelo seu incentivo e valiosas sugestões e a todos os professores e amigos que, direta ou indiretamente, colaboraram para o enriquecimento desse trabalho.

A todos os meus alunos, que dão sentido e são a razão de nossos esforços para o aprimoramento do ensino.

Ao Instituto Mauá de Tecnologia pelo apoio ao nosso trabalho.

“Não basta a leitura sem a unção, não basta a especulação sem a devoção, não basta a pesquisa sem maravilhar-se, não basta a circunspecção sem o júbilo, o trabalho sem a piedade, a ciência sem a caridade, o estudo sem a graça”.

São Boaventura

RESUMO

ARA, A. B. **O ensino de Estatística e a busca do equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios da realidade.** 2006. 86 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

Em nossa prática docente no ensino da Estatística para os cursos de engenharia temos constatado a dificuldade dos alunos no entendimento dos conceitos envolvidos nos métodos estatísticos, tendo como consequência a falta de motivação para a sua aprendizagem e, em geral, um elevado índice de reprovação. Passamos, então, a refletir sobre as causas dessa dificuldade e os meios de eliminá-las. Verificamos que o caráter problemático do ensino da Estatística decorre de uma equivocada visão da realidade, consequência da pouca familiaridade dos alunos com os fenômenos aleatórios que, embora estejam presentes em seu cotidiano, devido ao caráter excessivamente determinista dos currículos escolares, em geral, não são estudados no ensino fundamental e médio. Os objetivos do presente trabalho consistem em: (1) explicitar uma concepção da realidade em que o equilíbrio determinístico/aleatório seja restaurado; (2) repensar o ensino da Probabilidade e da Estatística nos diversos níveis tendo em vista tal equilíbrio e, a partir dele; (3) propor uma nova organização da disciplina Estatística nos cursos de graduação em Engenharia. Fomos buscar no pensamento filosófico e na evolução das idéias da ciência física a concepção predominante sobre os aspectos determinísticos e aleatórios dos fenômenos naturais, e constatamos que esses aspectos convivem e interagem continuamente e que a aleatoriedade é uma característica intrínseca da natureza. Apresentamos algumas reflexões sobre o conceito de Probabilidade e o conhecimento estatístico, destacando sua importância para se alcançar uma adequada compreensão da realidade e do mundo que nos cerca. Uma formação deficiente no conhecimento probabilístico e estatístico pode conduzir o aluno a uma visão distorcida da realidade. Entendendo que o livro didático utilizado pelo professor é um indicador importante de sua concepção sobre a Estatística e, conseqüentemente, de sua forma de ação docente, fizemos um estudo dos principais livros didáticos utilizados pelos professores de Estatística nos cursos de Engenharia. Constatamos que, salvo algumas poucas exceções, esses livros são baseados em uma concepção predominantemente determinística da realidade. Nessa concepção, priorizam-se o aspecto matemático e a aplicação das técnicas, em relação à construção dos significados dos conceitos necessários ao entendimento da realidade. A verificação desse desequilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios no ensino da Estatística nos cursos de Engenharia nos conduziu à proposta de uma nova prática docente, com a qual imaginamos que o desejado equilíbrio seja restaurado. Em sintonia com o fato de que a aleatoriedade é uma característica importante da realidade, propõe-se uma organização do processo de ensino aprendizagem partindo-se de exemplos contextualizados nas áreas de interesse dos alunos, valorizando-se o trabalho em grupos com a utilização de programas estatísticos para computador e permitindo-se a participação ativa do aluno na construção do conhecimento. Para viabilizar a implantação dessa nova prática são necessárias algumas ações relacionadas com a inclusão do estudo dos fenômenos aleatórios na educação básica e com a formação de professores. Acreditamos que com a nova prática docente proposta se conseguirá uma maior compreensão da realidade, promovendo-se o equilíbrio entre as técnicas e os significados dos conceitos, restaurando-se o equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios da realidade, e aumentando no aluno a motivação pela aprendizagem da Estatística.

Palavras chave: Determinismo, Aleatoriedade, Probabilidade, Estatística, Realidade, Ensino.

ABSTRACT

ARA, A. B. **The teaching of Statistics and the search for the equilibrium between deterministic and random aspects of reality.** 2006. 86 f. Thesis (Doctoral) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

In our daily teaching experience in Statistics in Engineering curricula we notice the student's difficulties to understand the concepts related to the statistics methods that give rise to lack of motivation in learning, and consequently to high rates of failure. We reflected on the causes of these difficulties and on means to surpass them. We observed that the problematic aspect of teaching Statistics is due to a wrong vision of reality, as a consequence of the low familiarity of the students with random phenomena, although their presence in the every day lives of the students, are not studied in colleges and schools because of the excessive deterministic character of the various curricula. The objectives of this work are: (1) to give an explicit conception of reality in which the deterministic/random equilibrium is restored; (2) to reconsider the teaching of Probability and Statistics in all levels keeping in mind that equilibrium, and, after that; (3) suggest a new organization of the discipline Statistics in undergraduate Engineering curriculum. We looked into the philosophical thinking and into the evolution of ideas in the physical sciences about the dominant conception of deterministic and random aspects of the natural phenomena; we then became aware that these aspects interact and continually live side by side and that the randomness is a intrinsic characteristic of nature. We present some reflections about the concept of Probability and the Statistics knowledge, highlighting its importance to achieve an adequate comprehension of reality and the world which surrounds us. A deficient training in probabilistic and statistic knowledge can guide the student to a distorted comprehension of reality. As we think that the textbook adopted in a course indicates how the instructor has his/her own conception about Statistics, and consequently how he/she teaches the subject, we established that, with few exceptions, the textbooks are based on a deterministic conception of reality; they pay more attention to the mathematics and application of techniques than to the building of the necessary concepts to understand it. The observation of this unbalance between deterministic and random aspects in the teaching of the subject in engineering made us propose a new teaching practice to recover it. Being aware that randomness is an important characteristic of reality, we propose an organization in the teaching-learning process starting from examples taken from the student's areas of interest, placing a high value on jobs taken in groups with the help of statistics computer software which enables an active participation of the student in the building of knowledge. For doing so it is necessary to take some actions related to the inclusion of the study of random phenomena in basic education and in the training of instructors. We believe that, with this new approach, a better understanding of reality will be achieved, with the equilibrium between techniques and the comprehension of concepts, as well as the equilibrium between deterministic and random aspects of reality, increasing the student motivation to learn Statistics.

Key-words: Determinism, Randomness, Probability, Statistics, Reality, Learning.

RESUMEN

ARA, A. B. **La Enseñanza de la Estadística y la busca del equilibrio entre los aspectos determinísticos y aleatorios de la realidad.** 2006. 86 f. Tesis (Doctorado) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

En nuestra práctica docente en la enseñanza de la estadística para las carreras de ingeniería hemos notado la dificultad de los alumnos en el entendimiento de los conceptos aplicados en los métodos estadísticos, resultando como consecuencia la falta de motivación para poder aprender tales conceptos y, generalmente, un alto índice de reprobación. Pasamos, entonces, a reflexionar sobre las causas de éstas dificultades y sobre posibles medios para poder eliminarlas. Verificamos que el carácter problemático de la enseñanza de la estadística surge de una visión errónea de la realidad, como consecuencia de la poquísima familiaridad de los alumnos con los fenómenos aleatorios que, sin embargo estén presentes en su cotidiano, debido al carácter excesivamente determinista de los currículos escolares, generalmente, no son estudiados en el colegio secundario. Los objetivos del presente trabajo consisten en: (1) explicitar una concepción de la realidad en que el equilibrio determinístico/aleatorio sea restaurado; (2) repensar la enseñanza de la probabilidad y Estadística en los diversos niveles teniendo en vista tal equilibrio y, a partir de él; (3) proponer una nueva organización de la disciplina Estadística en los cursos de graduación en la ingeniería. Fuimos a buscar en el pensamiento filosófico y en la evolución de las ideas de la ciencia física la concepción predominante sobre los aspectos determinantes y aleatorios de los fenómenos naturales, y constatar que estos aspectos conviven e interactúan continuamente y que la aleatoriedad es una característica intrínseca de la propia naturaleza. Presentamos algunas reflexiones a cerca del concepto de Probabilidad y el conocimiento estadístico, destacando su importancia para poder alcanzar una adecuada comprensión de la realidad y del mundo que nos rodea. Una formación deficiente en el conocimiento estadístico y sobre fenomenología de la estocástica puede conducir al alumno a una visión distorsionada de la realidad. Entendiendo que el libro didáctico utilizado por el profesor es un indicador importante de su concepción sobre la Estadística y, consecuentemente, de su manera de actuar como docente, realizamos un estudio de los principales libros didácticos utilizados por los profesores de estadística en la carrera de Ingeniería. Constatamos que, salvo algunas excepciones, estos libros son basados en una concepción predominantemente determinística de la realidad. En tal concepción, han de se priorizar el aspecto matemático y la aplicación de las técnicas, con relación a la construcción de los significados de los conceptos necesarios al entendimiento de la realidad. La Estadística en las carreras de Ingeniería nos condujo a la propuesta de una nueva práctica docente, con la cual imaginamos que el deseado equilibrio sea restaurado. En sintonía con el hecho de que la aleatoriedad es una característica importante de la realidad, proponemos una organización del proceso de enseñanza y aprendizaje partiendo siempre de ejemplos contextualizados en las áreas de interés de los alumnos, valorizando el trabajo en grupos con la utilización de programas estadísticos para la PC (computadora) y permitiendo la participación activa del alumno en la construcción del conocimiento. Para tornar viable la implantación de esta nueva practica son necesarias algunas acciones relacionadas con la inclusión del estudio de les fenómenos aleatorios en la educación básica y con la formación de los profesores. Creemos que con la nueva practica docente propuesta se conseguirá un incremento en la comprensión de la realidad, promoviénose el equilibrio entre las técnicas y los significados de los conceptos, restaurándose el equilibrio entre los aspectos determinísticos y aleatorios de la realidad, y aumentando en el alumno la motivación o el deseo de poder aprender Estadística.

Palabras claves: Determinismo, Aleatoriedad, Probabilidad, Estadística, Realidad, Enseñanza.

Sumário

1	Introdução	11
1.1	A prática docente	11
1.2	O caráter problemático do ensino da Estatística	12
1.3	Objetivos	13
2	A análise das concepções da realidade: O par determinístico/aleatório	15
2.1	O conhecimento da realidade	15
2.2	O determinístico e o aleatório	17
2.3	A mecânica clássica e o determinismo	20
2.4	O indeterminismo físico de Heisenberg	22
2.5	A importância do caráter aleatório	27
2.6	Incerteza e Probabilidade	28
2.7	A probabilidade e o mundo real	31
2.8	O conceito de probabilidade	34
2.9	O conhecimento estatístico	39
2.10	A Estatística e a realidade	42
2.10.1	O procedimento amostral	42
2.10.2	Índices e medidas de posição	44
2.10.3	O desvio padrão	47
2.10.4	A distribuição normal	50
2.10.5	A importância da Estatística na atualidade	52
3	O ensino da Estatística	55
3.1	A presença da Estatística nos currículos	55
3.2	A sala de aula e o conhecimento estatístico	57
3.3	A Estatística nos cursos de Engenharia	62
3.3.1	Situação atual	62
3.3.2	Análise dos livros didáticos	63
3.4	Elementos para uma nova prática: o construtivismo	80
3.5	Uma nova orientação curricular	84

4 Conclusões	89
4.1 A busca conceitual do equilíbrio determinístico / aleatório.....	89
4.2 A necessidade da Estatística na Escola Básica.....	93
4.3 A formação dos professores	95
4.4 Uma nova prática docente em Estatística.....	97
5 Bibliografia	107
6 Anexo	113

1 Introdução

1.1 A prática docente

Em nossa prática docente em cursos introdutórios de Probabilidade e Estatística para alunos de cursos de graduação em engenharia temos constatado a dificuldade desses alunos no entendimento dos conceitos envolvidos nos métodos estatísticos, tendo como consequência a falta de motivação para o seu aprendizado e em geral um elevado índice de reprovação. Refletindo sobre os problemas relacionados ao ensino da estatística, passamos a perceber que essa dificuldade devia-se à prática, em geral adotada, em que a organização das atividades didáticas se baseia principalmente na teoria matemática e na técnica empregada nos cálculos numéricos. Nessa prática o ensino da Estatística se desenvolve a partir da fundamentação teórica do assunto, às vezes com demasiada ênfase em seus aspectos matemáticos, seguida da apresentação das técnicas correspondentes, através de exemplos de aplicação apresentados a partir de aulas expositivas.

Tal procedimento faz com que os assuntos tenham pouco significado para o aluno, o qual não consegue formar a sua intuição probabilística a partir de suas próprias ações e previsões e construir os significados do conhecimento novo a partir das relações com o seu conhecimento prévio, dificultando a aprendizagem dos conceitos envolvidos. Para tentar superar essa dificuldade, em vez de priorizar a obtenção e justificção do modelo matemático e as técnicas computacionais, passamos a dispensar maior atenção aos conceitos e à compreensão da realidade, estudando a componente aleatória dos resultados obtidos através da experimentação, a partir de exemplos contextualizados nas áreas de interesse dos alunos.

1.2 O caráter problemático do ensino da Estatística

Sabemos que para uma compreensão adequada dos métodos estatísticos é necessária a formação de uma intuição probabilística. No entanto, embora a incerteza esteja presente no cotidiano de nossas vidas e a Probabilidade e a Estatística forneçam uma filosofia do acaso essencial para a compreensão da realidade, capacitando os indivíduos a tomarem decisões perante as inúmeras situações de incerteza presentes em seu cotidiano, devido ao caráter excessivamente determinista dos currículos escolares, esse conhecimento estocástico é praticamente inexistente no ensino fundamental e se resume a algumas poucas noções de Probabilidade no ensino médio. Esta equivocada visão determinista da realidade provoca no aluno ingressante no ensino superior a falsa impressão de que em tudo existe uma certeza absoluta. Considera-se, nessa visão, que a cada questão corresponde uma única resposta possível, despreza-se o acaso, e não se admite nada de intermediário entre o verdadeiro e o falso.

A compreensão do conhecimento estocástico, ou seja, do conhecimento probabilístico e estatístico sujeitos à lei do acaso, exige o desenvolvimento de uma outra forma de pensar que rompa essa lógica determinista empregada pelos alunos, e introduza-os em uma forma diferente de pensar, onde a incerteza seja admitida. Para que se possa atingir esse objetivo, de acordo com a perspectiva construtivista do conhecimento, devemos, no processo ensino-aprendizagem, organizar situações problemáticas contextualizadas que envolvam o aluno na busca de soluções, estabelecendo conexões entre a informação nova e aquela por ele já estruturada. Além disso, para que os problemas tenham sentido para o aluno, e a aprendizagem seja significativa, eles devem se basear em situações reais de suas áreas de interesse, possibilitando uma construção pessoal do conhecimento a partir da negociação dos significados através das interações com os demais indivíduos participantes do processo.

No entanto, embora o mundo tenha muito de aleatório e pouco de determinístico, em nosso sistema de ensino atual, nos currículos escolares, a Probabilidade e a Estatística ocupam um lugar muito discreto nos cursos superiores e praticamente inexistem no ensino fundamental e médio, apesar de estar previsto o seu ensino nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental.

Certamente a familiaridade com os fenômenos aleatórios, estudados pela Probabilidade e a Estatística, adquirida no ensino pré-universitário propiciaria ao aluno uma imagem mais equilibrada da realidade que o cerca, em que o determinístico e o aleatório estariam sempre presentes, facilitando a aprendizagem da inferência estatística nos cursos universitários.

1.3 Objetivos

Os principais objetivos deste trabalho consistem em:

- a) Explicitar uma concepção da realidade onde o equilíbrio determinístico/aleatório seja restaurado. Em geral, não se atribui devida importância ao caráter intrinsecamente aleatório dos fenômenos observados, encarando-se o mundo como se fosse determinístico, quando na realidade é essencialmente aleatório. Muitas vezes, por mais contraditório que possa parecer, a própria disciplina Estatística, da mesma forma que as demais, é apresentada nos cursos de engenharia como se fosse determinística, com exagerada ênfase em seu aspecto matemático, valorizando-se a apresentação lógica formal e os algoritmos em detrimento do estudo empírico dos fenômenos, da variação amostral e de sua interpretação probabilística.
- b) Repensar o ensino de Probabilidade e Estatística nos diversos níveis tendo em vista tal equilíbrio. Para isso, devemos apresentar a Estatística como a disciplina mais adequada para a compreensão dos fenômenos observados no mundo físico, o qual é essencialmente aleatório, onde os fenômenos podem estar correlacionados e interagirem entre si e apresentam uma regularidade estatística.

Nessa nova concepção a Estatística deve ser vista como uma ferramenta matemática de análise de dados, promovendo-se um equilíbrio entre as técnicas e os significados dos conceitos e evitando-se que o conhecimento estatístico seja considerado pelos alunos como um “amontoado” de fórmulas que devem ser decoradas e aplicadas na resolução dos vários tipos de problemas, sem o devido entendimento de seu significado.

Deve-se também destacar a importância da Estatística na valorização da Matemática discreta, dedicando-se maior atenção ao estudo dos processos de contagem no cálculo das probabilidades, de experimentos com variáveis aleatórias discretas e da variabilidade amostral na realização da inferência estatística, ao invés de se priorizar a dedução e aplicação de leis matemáticas. Deve-se ainda dispensar maior atenção ao tipo de conduta indutiva utilizada na inferência estatística, no processo de generalização da informação amostral para toda a população, em que as conclusões sobre a população podem ser falsas, mesmo que as premissas sejam verdadeiras, podendo-se afirmar apenas a frequência relativa do número de vezes que são verdadeiras tais conclusões, quando são verdadeiras as premissas, fato este, em geral, não facilmente compreendido pelos alunos.

- c) Propor uma nova organização da disciplina Estatística nos cursos de graduação em Engenharia a partir de tal equilíbrio. Mostrar como essa nova concepção da Estatística nos conduz a uma nova prática docente. A partir do estudo da natureza dos processos cognitivos e da nova concepção do conhecimento, através da imagem alegórica de uma rede de significados ligados por feixes de relações em permanente estado de atualização, pretendemos mostrar que a prática docente no ensino da Estatística, no curso de engenharia, baseada na experimentação em áreas de interesse dos alunos, com o auxílio do computador, dando-se maior ênfase aos conceitos e não às técnicas, é mais adequada a essa nova concepção de Estatística e dos processos de aprendizagem do que a prática, em geral adotada, baseada principalmente na formulação matemática dos conceitos envolvidos.

2 A análise das concepções da realidade: O par determinístico / aleatório

2.1 O conhecimento da realidade

É próprio da natureza humana o desejo do homem de conhecer a verdade sobre a realidade e o mundo que o cerca, e do qual faz parte. E este desejo tem, ao longo dos séculos, conduzido o homem pelos caminhos do conhecimento. Desde a antiguidade, nas diversas culturas e regiões do mundo o homem tem procurado respostas a questões fundamentais do tipo: Quem sou eu? De onde venho e para onde vou? A busca das respostas a estas e outras indagações sobre a sua existência suscitou o desenvolvimento dos conhecimentos filosófico, científico e religioso. Enquanto os dois primeiros baseiam-se na razão, o último baseia-se na fé.

De fato, a filosofia desenvolveu, a partir da capacidade especulativa do intelecto humano, nos vários povos do oriente e do ocidente, conjuntos de conhecimentos que exerceram influências em suas culturas e vida social. As ciências naturais, por sua vez, baseando-se na percepção dos sentidos e utilizando-se do conhecimento matemático, têm buscado explicações para os fenômenos naturais a partir da comprovação experimental. O desenvolvimento do conhecimento físico, além de ter modificado radicalmente as condições materiais da vida humana, tem alterado as nossas concepções sobre a realidade em que vivemos. Já nas várias religiões, extrapolando as capacidades naturais da razão, o homem tem buscado os mistérios escondidos de Deus nas respostas que estas religiões oferecem através de um conhecimento que é peculiar da fé.

Embora a partir do século XVII, com o racionalismo de Descartes (1596-1650) e o domínio da mentalidade positivista na investigação científica, as ciências tenham se afastado da filosofia e da teologia, fé e razão, apesar de suas naturezas distintas têm trilhado juntas os caminhos do conhecimento, com as descobertas científicas e os avanços tecnológicos se unindo aos valores filosóficos e éticos que são inerentes à natureza humana, na busca do

entendimento da realidade e do sentido último de nossa existência, conforme escreveu Galileu (1564-1642) em sua carta ao Padre Benedetto Castelli, em 1613:

... as duas verdades, de fé e de ciência, não podem nunca se contradizer, procedendo igualmente do Verbo divino a Escritura santa e a natureza, a primeira como ditada pelo Espírito Santo, a segunda como fiel executora das ordens de Deus.

Na busca do conhecimento sobre o mundo que nos cerca, o notável sucesso da teoria da gravitação universal de Newton (1642-1727) fez com que a ciência adotasse uma visão determinística de um universo com uma ordem pré-estabelecida e imutável, onde não havia espaço para a incerteza e a probabilidade, prevalecendo a certeza absoluta. Cabia, então, à ciência a tarefa de desvendar os segredos da natureza, dos quais os nossos sentidos nos forneciam uma percepção parcial e deformada, através da descoberta das leis matemáticas exatas que os explicassem. Tal concepção fica clara na conhecida frase de Einstein (1879-1955):

Deus não joga dados.

No entanto, o desenvolvimento da mecânica quântica, no início do século XX, nos trouxe uma nova visão epistemológica dos fenômenos atômicos. Essa nova mecânica do átomo, essencialmente estatística, nos apresentou uma nova concepção da realidade. O princípio da incerteza de Werner Heisenberg (1901-1976), enunciado em 1927, mostra que o conhecimento possível de se obter sobre o estado de um sistema atômico está sempre sujeito a uma indeterminação. Qualquer tentativa de medida da posição de um elétron por meio de um aparelho, tal como um microscópio que utilize radiação de alta frequência, provocará uma mudança de sua velocidade, devida a interferência do instrumento de medida no elétron em observação. Então, diferentemente da mecânica clássica, na mecânica quântica não é possível determinar a posição de um elétron sem alterar a sua velocidade. A indeterminação faz parte da própria natureza dos fenômenos quânticos não sendo possível, portanto, ir-se além da descrição estatística desses fenômenos, podendo-se determinar apenas as probabilidades

relativas de aparecimento dos fenômenos individuais em condições experimentais dadas. Passando-se, dessa forma, a atribuir maior importância no estudo dos fenômenos naturais à incerteza, à aleatoriedade e à correlação entre os eventos.

2.2 O determinístico e o aleatório

Procuraremos apresentar brevemente as etapas da evolução das idéias da ciência física, com o seu inevitável reflexo no pensamento filosófico, destacando a necessidade da utilização da Probabilidade e da Estatística como ferramenta matemática apropriada para a compreensão da realidade.

Para o entendimento dos fenômenos determinísticos e dos aleatórios, Karl Popper (1902-1994) imagina uma analogia com um arranjo que contém em um extremo um relógio de precisão e no outro uma nuvem muito desordenada, em suas palavras:

Com as nuvens pretende-se representar sistemas físicos que, como gases, são altamente irregulares, desordenados e mais ou menos imprevisíveis. Admitiremos que temos à nossa frente um esquema ou um arranjo em que uma nuvem muito perturbada ou desordenada é colocada à esquerda. Na outra extremidade de nosso arranjo, à direita, podemos colocar um relógio de pêndulo, muito digno de confiança, um relógio de precisão, com o intuito de representar sistemas físicos que são regulares, ordeiros e de comportamento altamente previsível. (Popper, 1975).

Esta imagem sugestiva representa o fato de que cada fenômeno da realidade e cada coisa do mundo que nos cerca, deve se posicionar em algum ponto intermediário entre esses dois extremos: o completamente determinado (representado pelo relógio) e o totalmente aleatório (representado pelas nuvens).

Como exemplo típico e interessante de uma nuvem podemos considerar as moléculas separadas de um gás com seus movimentos irregulares, ou das gotas miúdas numa nuvem de tempestade, ou ainda, uma nuvem gasosa grande tal como a atmosfera ou o Sol, cujo conglomerado de moléculas se mantém unido por forças gravitacionais. Entre os muitos exemplos de fenômenos de diversas áreas do conhecimento que deveriam ser colocados bem à esquerda no arranjo proposto, com comportamento muito próximo ao das nuvens, poderíamos lembrar ainda: as cotações das bolsas de valores, a evolução de uma população animal, as condições climáticas, um avião em vôo, as aglomerações estelares, ou o funcionamento do cérebro humano.

Embora a situação descrita seja perfeitamente aceita pelo senso comum atualmente, isso não ocorria na época de Newton. Filósofos naturais como Galileu assumiram que a natureza falava a linguagem matemática, decorrência natural de que o mundo era completamente determinado. Prevaleceu, então por mais de dois séculos a idéia, hoje considerada absurda de que:

*Todas as nuvens são relógios – mesmo a mais anuviada das nuvens.
(Popper, 1975).*

Essa proposição reflete o ponto de vista que é conhecido como “determinismo físico”. Essa opinião considera que com o nosso senso comum arrumamos as coisas não de acordo com a sua natureza, mas de acordo com a nossa ignorância. O determinismo físico afirma que se tivéssemos um conhecimento sobre a interação detalhada das partículas que formam uma nuvem gasosa ou os organismos vivos, os consideraríamos tão semelhantes a relógios como nosso sistema solar.

O enorme sucesso da mecânica clássica, que explicava tanto os movimentos dos corpos celestes como dos corpos sobre a Terra, fez com que se pensasse que essa teoria explicaria tudo, incluindo não só fenômenos físicos tais como a eletricidade e o magnetismo, mas também o comportamento das nuvens e dos organismos vivos. O determinismo físico tornou-se, então, a crença dominante na ciência.

No entanto, no início do século XX, com o desenvolvimento dos estudos sobre a constituição atômica da matéria, o determinismo físico mostrou-se inadequado para a compreensão dos fenômenos atômicos, provocando uma revisão das idéias da física.

No estudo do comportamento da luz verificou-se que a imagem de propagação espacialmente contínua e a atomicidade dos efeitos luminosos são aspectos complementares. A imagem ondulatória da propagação da luz é provada pelas figuras de interferência que aparecem quando a luz, proveniente de uma fonte, propaga-se até um anteparo através de dois caminhos diferentes. Por outro lado, verificou-se que qualquer transferência de energia pela luz é feita por quanta de luz, cuja energia é igual ao produto da frequência das oscilações magnéticas da radiação emitida, pelo quantum universal de ação, ou constante de Planck, descoberta pelo físico alemão Max Planck (1858-1947), em 1900.

Os quanta de luz não podem ser considerados como partículas, com uma trajetória definida prevista pela mecânica clássica, sendo impossível determinar a trajetória dos quanta individuais de luz sem perturbar essencialmente o fenômeno em processo de investigação. Em decorrência desse fato, teve-se que abandonar a explicação causal completa dos fenômenos luminosos e se aceitar um comportamento estatístico, explicado por leis probabilísticas.

Um exemplo de um movimento tipicamente aleatório ocorre com os elétrons dos átomos de um metal no estado sólido que ocupam os vértices de figuras geométricas tridimensionais em sua estrutura cristalina periódica no espaço. Os elétrons das últimas órbitas, estando tão próximos dos centros de seus átomos como dos centros dos átomos vizinhos, são atraídos por eles com forças iguais, e, como possuem energia cinética, se liberam de seus átomos de origem e passam a se mover entre os núcleos de maneira caótica. Esses elétrons descrevem trajetórias retilíneas, ao acaso, entre dois choques sucessivos com os núcleos.

Os elétrons livres constituem uma “nuvem eletrônica” num movimento desordenado entre os íons formados pelos átomos com que se chocam, mas não saem do metal, pois embora possuam energia cinética esta não é suficiente para vencer a barreira de potencial formada pelos íons positivos do metal. Para vencer essa atração os elétrons necessitam receber mais energia cinética, como por exemplo, por elevação da temperatura do metal, fazendo com que os íons, aumentando sua vibração térmica, passem mais energia aos elétrons livres nos choques. Isto é o que ocorre no fenômeno de emissão termo-iônica, como por

exemplo, num filamento de tungstênio tornado incandescente pela passagem de uma corrente elétrica.

2.3 A mecânica clássica e o determinismo

O método racionalista de Descartes, baseado na idéia de que se poderia conhecer e representar a natureza através do conhecimento matemático e se chegar à verdade absoluta sobre um universo completamente determinado, dominou o pensamento científico até os séculos XVIII e XIX.

O êxito da mecânica newtoniana criou a ilusão de se poder chegar a um conhecimento absoluto, universal, eterno e completo do universo. O mundo parecia completamente determinado e previsível através de leis matemáticas exatas. Essa perspectiva fica clara na seguinte afirmação de Laplace (1749-1827), onde Deus ou a sua super-inteligência secularizada não necessitava da probabilidade, pois todos os eventos eram necessariamente governados por causas.

Uma inteligência que, em um determinado instante, conhecesse todas as forças que animam a natureza, assim como as respectivas posições dos seres que a compõem, se, além disso, fosse suficientemente poderosa para analisar tais dados, poderia abarcar em uma única fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e os dos átomos mais leves; nada lhe resultaria incerto e, tanto o futuro como o passado, estariam presentes aos seus olhos. (Laplace, 1985).

A tentativa de entender os movimentos dos corpos celestes remonta à antiga Grécia, onde no século II d.C. Ptolomeu, baseado em órbitas circulares, desenvolveu um sistema que conseguia prever aproximadamente as posições dos planetas do sistema solar. Mas foi apenas no início do século XVII que, com base nas teorias de Ptolomeu e de Copérnico e nas observações de Tycho Brahe, Kepler enunciou as suas três leis que explicavam os

movimentos planetários a partir de trajetórias elípticas, conseguindo prever suas posições com grande precisão.

A teoria de Newton, publicada em 1687 com o título “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*” (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural), teve tanto sucesso que provocou a falsa idéia de que os fenômenos naturais eram regulares e perfeitamente previsíveis. De acordo com essa idéia, considerava-se que no universo existia uma ordem natural imutável. O comportamento aleatório, seria apenas aparente. Se os modelos matemáticos fossem aperfeiçoados e as observações tornadas mais precisas, a regularidade dos fenômenos naturais poderia ser prevista exatamente por esses modelos.

O determinismo clássico que estabelece uma relação linear entre causa e efeito parecia explicar os fenômenos naturais, criando uma concepção mecanicista da natureza, embora essa explicação fosse mais difícil nos fenômenos biológicos e nas ciências humanas. Nem mesmo o desenvolvimento da mecânica estatística parecia alterar essa concepção determinística. Considerava-se que o acaso não era a ausência de causas, mas sim a resultante do somatório de várias causas independentes, as quais, uma vez descobertas, desvendariam um determinismo oculto de fenômenos aparentemente aleatórios.

Ainda sob essa perspectiva, o objetivo declarado das ciências exatas é estabelecer um completo controle sobre a experiência em termos de regras precisas, as quais podem ser formalmente provadas e empiricamente testadas. Se esse ideal fosse alcançado, toda verdade e toda falsidade poderiam ser descritas em termos de uma teoria exata do universo, de modo que quem aceitasse a teoria estaria desobrigado de exercitar o julgamento pessoal, teria apenas que seguir a regras fielmente.

A mecânica clássica desenvolveu esse ideal tão completamente que se pensou tê-lo atingido. Mas essa objetividade não considera o julgamento pessoal utilizado para a aplicação das fórmulas da mecânica aos fatos da experiência. A mecânica Newtoniana fornece uma fórmula exata por meio da qual nós podemos calcular as posições relativas de um sistema de dois corpos desde o mais remoto passado até o futuro mais distante, desde que possamos fornecer um conjunto de dados descrevendo o sistema em um único instante de tempo. Tal operação seria muito impessoal e poderia ser feita automaticamente por uma máquina, de modo que poderíamos prever certos fatos experimentais a partir de outros de modo muito impessoal. Mas isto não considera o fato de que os dados da posição e do instante não são fatos experimentais e sim leituras dos instrumentos por um particular observador.

Os dados que aparecem nas fórmulas da teoria exata dependem, em geral, da leitura de instrumentos de medida e estão sujeitos a erros experimentais que apresentam flutuações estatísticas. Em consequência desses erros aleatórios nós podemos partir apenas de valores prováveis dos dados iniciais para chegarmos a valores também prováveis das grandezas previstas e o processo permanece indeterminado. Além dessas flutuações estatísticas está sempre presente a possibilidade de erros sistemáticos. Até o procedimento mais mecanizado depende de algum tipo de interferência pessoal, a qual está sujeita a um vício individual.

Há sempre um julgamento pessoal em toda verificação de uma teoria científica e tais atos de julgamento pessoal formam uma parte importante da ciência.

Entre os poucos dissidentes do determinismo clássico estava Charles Sanders Peirce (1839-1914), grande matemático, físico e filósofo americano. Ele afirmou, já em 1892, que a teoria de Newton, apesar de verdadeira, não nos dava qualquer razão válida para acreditar que as nuvens fossem relógios perfeitos e concluiu que tínhamos liberdade para conjecturar que havia certa frouxidão ou imperfeição em todos os relógios e que isto permitia a entrada de um elemento de acaso. Assim, conjecturou que o mundo não era regido somente pelas estritas leis newtonianas, mas que era também regido ao mesmo tempo por leis do acaso, ou do fortuito, ou da desordem, por leis de probabilidade estatística.

Isto fez do mundo um sistema onde convivem e interagem continuamente nuvens e relógios, de modo que mesmo o melhor relógio, em sua estrutura molecular, mostraria algum grau de anuviamento. Peirce adotou, então, a concepção de que só existem nuvens, embora nuvens de graus diferentes de anuviamento. Essa concepção é justificada lembrando-se que todos os corpos físicos, mesmo os rubis de um relógio, estão sujeitos ao movimento molecular do calor, movimento semelhante ao das moléculas de um gás, ou ao dos elétrons de um metal.

2.4 O indeterminismo físico de Heisenberg

O aleatório, a inconstância, os jogos de azar nunca foram familiares à filosofia e à ciência, desde Aristóteles no IV século a. C. na Grécia, por mais de dois milênios, prevaleceu a idéia de que a ciência se baseava sobre causas e não incorporava o acaso.

A noção de que a matéria não é contínua teve sua origem na Grécia. As moléculas e depois os átomos constituíam as partículas elementares formadoras da matéria, entre as quais existia apenas o vácuo.

A aplicação da mecânica newtoniana, que teve tanto sucesso para explicar os movimentos planetários, aos fenômenos atômicos conduziu à mecânica estatística, a qual adotou uma concepção estatística da natureza e se desenvolveu inicialmente em sua forma clássica com Maxwell (1831-1879) e Boltzmann (1844-1906), a partir da suposição da existência de leis probabilísticas para a determinação das velocidades moleculares de acordo com a curva de Gauss (1777-1855). Supuseram que esta lei constituísse uma invariante da natureza, embora não fosse suficiente para determinar a posição de uma molécula individual.

As dificuldades encontradas para a explicação dos fenômenos de radiação eletromagnética através da mecânica clássica, levaram Planck a descobrir que a radiação de um corpo incandescente podia ser explicada a partir da suposição de que a luz era emitida ou absorvida não continuamente, como estabelecia o eletromagnetismo clássico de Maxwell, mas sim em pacotes separados denominados quanta de energia.

O desenvolvimento, na primeira metade do século XX, da teoria da relatividade de Einstein e da mecânica quântica de Planck e Einstein, conduziu à negação da teoria de que a energia se irradia continuamente, colocando, dessa forma, em dúvida a idéia de continuidade que é fundamental para a visão clássica do mundo, que dominou desde os geometras gregos, até Kepler, Galileu e Newton. A conclusão de que o mundo não era formado somente de partículas individuais, mas também por uma multiplicidade de “quanta” de energia, veio reforçar o enfoque estatístico para a explicação dos fenômenos naturais.

Os indícios encontrados nos últimos descobrimentos da mecânica quântica de que além dos elétrons outras partículas materiais também podem ser consideradas como ondas, conduziram novamente à idéia de continuidade, embora essas ondas não devam ser consideradas literalmente semelhantes às ondas que se propagam em uma corda ou na água. Por onda se entende simplesmente uma função matemática que descreve a probabilidade ou a frequência relativa com que um elétron poderá encontrar-se em uma determinada posição.

Então, a indeterminação que foi introduzida na física tem sua origem na passagem do valor médio ou da função de probabilidade para o caso individual. Uma lei que descreve como se distribui um grupo de elementos não nos proporciona nenhum conhecimento preciso sobre um determinado elemento particular do grupo.

Dessa forma a mecânica quântica nos apresenta um novo quadro da realidade, afirmando que por mais exato que seja o nosso conhecimento do mundo físico, nunca poderemos nos livrar de um componente probabilístico. O princípio da incerteza de Heisenberg, afirmando que não podemos determinar simultaneamente a posição e a velocidade de uma partícula elementar e que quando mais exatamente se tenta medir a posição da partícula, menos exatamente se consegue medir a sua velocidade e vice-versa, não significa um mundo carente de leis, mas sim que as leis são de outro tipo, estabelecendo como se distribuem os conjuntos de partículas em vez de estabelecer o modo como se comporta cada partícula individual.

Essas descobertas da mecânica quântica desvendaram um universo estatístico, que goza de certas leis ou regularidades estatísticas e tornaram o conhecimento estatístico de grande importância para a explicação do mundo físico.

Foi, então, apenas com o surgimento da teoria do quantum que os físicos se dispuseram a abandonar o determinismo físico e o indeterminismo, que até então foi desprezado pela ciência, tornou-se a moda vigente. Até o próprio Popper confessa ser um indeterminista.

Popper acredita que a concepção de Peirce, de que o mundo não é regido apenas pelas leis de Newton, mas também por leis do acaso, é compatível com a física clássica de Newton e é ainda mais compatível com a teoria da relatividade (especial) de Einstein e com a nova teoria do quantum. E afirma:

Sou um indeterminista – como Peirce, Compton e muitos outros filósofos contemporâneos. (Popper, 1975).

Essa declaração de Popper de que é um indeterminista mostra que no marco do determinismo está presente a semente do aleatório.

O físico norte-americano Arthur Holly Compton (1892-1962) foi um dos primeiros a aceitar a teoria do quantum e o novo indeterminismo físico de Heisenberg. Em 1931, Compton foi um dos primeiros a examinar as implicações humanas e, mais geralmente, as implicações biológicas do novo indeterminismo na física. A nova teoria resolveu para

Compton não só problemas de física como também problemas biológicos e filosóficos, e entre estes, especialmente problemas relacionados com a ética. Em suas palavras:

A questão fundamental da moralidade, problema fundamental em religião e motivo de ativa investigação em ciência, é: É o homem um agente livre? Se os átomos de nossos corpos seguem leis físicas tão imutáveis como os movimentos dos planetas, por que tentar? Que diferença pode fazer, por grande que seja o esforço, se nossas ações já estão predeterminadas por leis mecânicas?.

Desfaz-se, desta forma, a ilusão do físico newtoniano de que poderia provar serem relógios todas as nuvens. Compton afirma ainda:

O físico raramente se tem importado com o fato de que, se leis completamente deterministas se aplicarem às ações do homem, ele próprio tornar-se-á um autômato.

O Indeterminismo é simplesmente a doutrina de que nem todos os eventos do mundo físico são predeterminados com precisão absoluta, em todos os seus infinitesimais detalhes. Fora isto ela é compatível praticamente com qualquer grau de regularidade que se quiser e, portanto, não acarreta a concepção de que há “eventos sem causas”. Enquanto o determinismo físico exige uma predeterminação física completa e infinitamente precisa e a ausência de qualquer exceção, o indeterminismo físico assevera somente que o determinismo é falso e que há pelo menos algumas exceções, aqui e ali, à predeterminação precisa.

Assim, mesmo a afirmação “cada evento físico observável ou mensurável tem uma causa física observável ou mensurável” é ainda compatível com o indeterminismo físico, simplesmente porque nenhuma medição pode ser infinitamente precisa.

O determinismo físico defendido por Laplace tornou-se então um pesadelo, pois afirma que o mundo inteiro com tudo que há nele está completamente determinado, tornando-nos verdadeiros autômatos, destruindo a criatividade e reduzindo a uma completa ilusão a idéia de que o cérebro possa criar algo novo.

Popper se declara, como Compton, um indeterminista físico, e afirma acreditar que o indeterminismo físico é um pré-requisito para o entendimento da realidade; considera, contudo que o indeterminismo não é bastante. Em suas palavras:

Se o determinismo é verdadeiro, então o mundo inteiro é um relógio que funciona com impecável perfeição, incluindo todas as nuvens, todos os organismos, todos os animais e todos os homens. Por outro lado, se é verdadeiro o indeterminismo de Peirce, ou de Heisenberg, ou alguma outra forma dele, então o puro acaso desempenha um papel principal em nosso mundo físico. Mas é o acaso realmente mais satisfatório do que o determinismo? (Popper, 1975).

No entanto, Popper defende a idéia de que o indeterminismo não é a única alternativa ao determinismo e considera que o comportamento humano racional é algo intermediário entre o perfeito acaso e o perfeito determinismo, isto é, algo intermediário entre nuvens perfeitas e relógios perfeitos. Considera absurda a idéia de um determinismo completo, no qual o acaso não tem lugar, a não ser como um sintoma de nossa ignorância. E argumenta lembrando que mesmo os relógios altamente de confiança não são realmente perfeitos, devidos a fatores tais como o atrito – isto é, a efeitos estatísticos, ou de acaso. Da mesma forma como as nuvens não são totalmente fortuitas, pois muitas vezes é possível prever o tempo com inteiro êxito, pelo menos para curtos períodos. Popper conclui afirmando:

... é insatisfatório encarar o mundo como um sistema físico fechado – seja um sistema estritamente determinista ou um sistema em que tudo o que não é determinado estritamente é simplesmente devido ao acaso: em tal concepção do mundo, a criatividade e a liberdade humanas só poderiam ser ilusões. (Popper, 1975).

Em sintonia com a argumentação de Popper, eu penso que a razão, a consciência, as ações humanas em geral, ocupam uma posição intermediária entre o absoluto determinismo e o total indeterminismo. Podemos considerar, dessa forma, que na ação criadora de Deus, a criatura é chamada a participar e, nesse sentido, o destino do Universo está em aberto.

2.5 A importância do caráter aleatório

Verificamos, portanto, que o surgimento das teorias da relatividade de Einstein e da mecânica quântica, no início do século XX, nos proporcionou uma nova visão do mundo, revolucionando o modo como interpretamos o Universo. Enquanto a teoria da relatividade alterou completamente os nossos conceitos de espaço e tempo absolutos, conforme percebemos pelos nossos sentidos, a mecânica quântica, penetrando no mundo dos átomos, nos mostrou não ser possível determinar simultaneamente as coordenadas posicionais e os respectivos componentes de momentos das partículas, alterando a nossa concepção epistemológica das ciências físicas. Pudemos perceber, então, que as leis que formam o grande edifício da física clássica só se aplicam à escala macroscópica, aos corpos formados por um número muito grande de átomos, como ocorre com os fenômenos observados em nosso cotidiano. Nos fenômenos atômicos individuais, quando se leva em conta o quantum de ação, depara-se com regularidades estatísticas que não podem ser explicadas pela teoria mecanicista da natureza e sua visão determinista, mas apenas através de sua descrição estatística.

Por outro lado, enquanto os fenômenos em nosso cotidiano podem ser explicados pelos conceitos da física clássica por idéias de causalidade, o mesmo não ocorre com a descrição do comportamento humano, de nossos estados mentais, sentimentos, vontades, decisões, atos em geral, que se aproximam muito mais dos conceitos físicos elementares empregados na física atômica do que aos da mecânica clássica.

Podemos constatar que as ocorrências individuais são, em geral, aleatórias, quer sejam elas relativas a fenômenos sociais, econômicos ou naturais. Esses fenômenos possuem uma regularidade apenas quando analisados no conjunto de suas ocorrências e portanto podem ser compreendidos e previstos somente com a utilização de medidas estatísticas e de modelos probabilísticos.

Concluimos, portanto, que, com a mecânica quântica, a aleatoriedade passa a ser considerada como uma característica intrínseca da natureza, em vez de indicar simplesmente uma falta de conhecimento sobre o fenômeno analisado. Dessa forma, a Probabilidade e a Estatística constituem um conjunto de conhecimentos essenciais em nossa incansável busca da verdade sobre nós mesmos e sobre o universo que nos rodeia.

2.6 Incerteza e Probabilidade

O entendimento dos fenômenos aleatórios, ou estocásticos, associados à idéia do acaso, exige um raciocínio diferente dos fenômenos determinísticos em que se utiliza o raciocínio dedutivo, lógico matemático, baseado em relações causais. Os fenômenos aleatórios, que envolvem o acaso, e onde a incerteza está presente só podem ser explicados pela teoria da probabilidade que nos fornece uma quantificação dessa incerteza e a maneira de pensar necessária ao entendimento e à descrição desses fenômenos.

A teoria da probabilidade, na qual se baseiam as técnicas de inferência estatística, é um importante ramo da Matemática que surgiu no século XVII, na França, com os estudos dos jogos de azar feito por dois grandes matemáticos, Blaise Pascal e Pierre Fermat (1654) e foi formalizada pelo matemático holandês Christian Huyghens no tratado “ De Ratiociniis in Aleae Ludo” (1657), desenvolvendo-se ao longo dos séculos seguintes com importantes contribuições de J. Bernoulli (1713), A. De Moivre (1733), T. Bayes (1763), P.S. Laplace (1812), K.F. Gauss (1823) e muitos outros. Os modelos probabilísticos tornaram-se então a linguagem adequada para descrever precisamente situações do mundo real onde a incerteza esteja presente e uma ferramenta fundamental ao estudo da Estatística.

No que se refere ao futuro, muitas vezes podemos fazer escolhas e constantemente devemos tomar decisões, desde nossas pequenas ações, nas coisas mais corriqueiras como a escolha do tipo de roupa a usar durante o dia, do tipo de alimento a comer na primeira refeição do dia, do melhor caminho até o local de trabalho, até as decisões mais difíceis, tais como a escolha da profissão, do companheiro ou da companheira para constituir uma família ou de outro estado de vida, do número de filhos, e assim por diante.

Sobre alguns acontecimentos futuros como, por exemplo, o momento da morte não nos é permitido escolher, porém nos casos em que podemos fazer escolhas sobre o futuro, o nosso sucesso dependerá de termos feito escolhas corretas e escolher sempre é difícil. Em cada escolha nos encontramos diante de um problema.

Escolher é decidir sobre uma de nossas opções, e portanto, para escolher é necessário termos uma relação de opções e liberdade de escolha de uma, e apenas uma, dessas opções. Uma pessoa racional escolhe, movida pela razão, aquela opção que julga ser a melhor, aquela

que lhe propiciará um maior benefício, sendo a sua escolha racional movida por suas crenças, desejos e entendimento.

Algumas vezes, no entanto, não podemos decidir com certeza sobre qual das opções será a melhor escolha. Nesses casos dizemos que a decisão é tomada sob a condição de incerteza. Em uma escolha sob a condição de incerteza não sabemos o que resultará de determinada decisão, sabemos apenas o que poderá resultar. Suponhamos, no entanto, que possamos avaliar quanto provável é cada uma das conseqüências de nossas opções e também o quanto elas nos oferecem de benefício. Nesse caso estamos diante de um problema de escolha sob risco abordado pela teoria da decisão, para o qual existe uma lógica especial desenvolvida pela teoria da probabilidade.

A teoria da probabilidade, como já foi dito, surgiu a partir do estudo das chances de se ganhar nos jogos de azar. Nesses jogos, tais como no lançamento de uma moeda ou de um dado, na extração de uma carta de um baralho, ou no sorteio de um número em uma roleta, embora cada resultado particular ocorra ao acaso, e portanto seja incerto, se o jogo for repetido muitas vezes pode-se prever a chance de ocorrência de determinado resultado. Por exemplo, embora cada resultado do lançamento de uma moeda seja imprevisível, se a moeda for homogênea de modo que possamos supor que os resultados “cara” e “coroa” sejam igualmente prováveis, é possível prever que em “muitos” lançamentos da moeda em aproximadamente metade das vezes ocorram caras. Da mesma forma, no nascimento de crianças, em cada concepção o sexo da criança é imprevisível, mas em um grande número de nascimentos pode-se prever, aproximadamente, qual será a proporção de nascimentos de crianças do sexo masculino.

Consideremos, como exemplo, o seguinte problema clássico de jogo de dados: Dois dados são lançados 24 vezes e se ganha um certo valor V se sair um par de seis pelo menos uma vez. A idéia básica é que cada possível conseqüência de se adotar uma opção, no caso de se fazer uma aposta, oferece ao jogador algum benefício monetário. O valor da opção, nesse caso, é o seu benefício esperado, isto é, a média ponderada dos benefícios de cada resultado, onde os pesos são as probabilidades de ocorrência de cada um desses resultados. Uma pessoa racional escolherá a opção que maximize o seu benefício esperado.

Nesse caso, a probabilidade de se obter como resultado, em um lançamento de um par de dados, um par de seis é igual a $\frac{1}{36}$, logo, a probabilidade de não se obter um par de seis é

de $\frac{35}{36}$, e em 24 lançamentos a probabilidade de não se obter um par de seis nenhuma vez é de $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$; finalmente, a probabilidade de obter um par de seis pelo menos uma vez, nos 24 lançamentos, é igual a $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,4914$.

Se, por exemplo, o valor do ganho no jogo for de $V = \text{R\$ } 100,00$, o jogo oferecerá ao jogador um ganho de $\text{R\$ } 100,00$, com a probabilidade $p = 0,4914$ de sair pelo menos um par de seis nos 24 lançamentos, e um ganho nulo, se não sair nenhum par de seis, com a probabilidade $(1-p)$. Logo o ganho esperado será de $\text{R\$ } 100,00$ vezes p mais $\text{R\$ } 0,00$ vezes $(1-p)$, o qual é igual a $\text{R\$ } 49,14$ e um jogador racional pagaria no máximo esse valor para jogar.

Consideramos, nesse caso, como melhor opção no critério de decisão, aquela que corresponde à maximização do ganho monetário esperado. No entanto, sabemos que muitas vezes as pessoas não decidem apenas com base no ganho monetário esperado. Na tomada de decisão sob a condição de incerteza, onde o fator risco está presente, o critério de decisão não é apenas o ganho médio, prova disso é o grande número de pessoas que fazem seguros ou apostam em loterias, apesar de que, em ambos os casos, a decisão de participar, ao invés de não participar, corresponde à opção de menor ganho monetário esperado, pois as seguradoras e os organizadores das loterias, em média, obtêm lucros correspondentes às perdas dos participantes.

No caso do jogo em questão, os benefícios possíveis são ganhar $\text{R\$ } 100,00$ ou não ganhar nada e o risco de ganhar $\text{R\$ } 100,00$ pode representar uma grande vantagem para o apostador, fazendo-o optar pelo jogo apesar do benefício monetário esperado desfavorável. Para explicar esse comportamento pessoal foi criada a Teoria da Utilidade, a qual incorpora ao ganho monetário esperado a vantagem ou a utilidade da opção que não é uma medida de seu valor monetário objetivo, mas sim da valorização subjetiva, decorrente de uma avaliação pessoal. A utilidade que alguém associa a alguma coisa mede o quanto ela deseja possuí-la, o quanto ela é preferida em relação à outra coisa.

A teoria da utilidade irá, então, associar aos ganhos monetários os valores de uma quantidade subjetiva chamada utilidade, a qual procurará representar o comportamento real das pessoas ao decidirem sob a condição de risco, incorporando além dos valores

quantitativos também os qualitativos. Consideramos, então, que uma pessoa racional decidirá pela opção que maximize sua utilidade esperada, a qual será calculada da mesma forma que o benefício esperado, porém calculando a média ponderada das utilidades de cada um dos resultados, onde os pesos são as probabilidades de ocorrência de cada um desses resultados.

O valor da utilidade associada a cada um dos possíveis resultados, dependendo de uma avaliação pessoal, varia para cada pessoa. No exemplo considerado, no qual o jogo oferece uma probabilidade $p = 0,4914$ de se ganhar R\$ 100,00 e $(1-p)$ de não se ganhar nada, *a utilidade esperada será igual a p vezes a utilidade de se ganhar R\$ 100,00 mais $(1-p)$ vezes a utilidade de não se ganhar nada.*

Se a utilidade esperada for igual ao ganho monetário esperado, no exemplo igual a R\$ 49,14, diremos que o jogador é indiferente ao risco, decidindo exclusivamente com base no benefício monetário esperado. Quando a utilidade esperada de um jogo é menor do que o ganho monetário esperado, dizemos que o jogador tem aversão ao risco; quando ela é maior, o jogador será propenso ao risco.

2.7 A probabilidade e o mundo real

Verificamos que quando penetramos no âmago da matéria, nas partículas subatômicas, a incerteza desempenha um papel essencial não se podendo determinar exatamente e ao mesmo tempo a posição e a velocidade das partículas. Essa indeterminação, no entanto, certamente não indica uma ausência de leis, mostra apenas que as leis são de outro tipo, de natureza probabilística. Verificamos, dessa forma, que a Probabilidade e a Estatística desempenham um papel importante no entendimento da natureza, devendo-se, portanto, dedicar uma maior atenção ao ensino do conhecimento estocástico em nossas escolas, para que o mesmo faça parte da formação de nossos jovens.

Porém, a aleatoriedade está presente não apenas na mecânica estatística e na mecânica quântica, mas se manifesta também em muitos fenômenos naturais, assim como em diversas situações com que nos deparamos em nossas vidas. Consideremos, por exemplo:

- a) os diversos tipos de jogos de que participamos, onde a incerteza está sempre presente.
- b) as doenças, onde o médico, baseado nos sintomas e nos dados laboratoriais, deve pronunciar um diagnóstico e usando sua intuição, tomar uma decisão com relação à necessidade ou não de uma intervenção cirúrgica.
- c) os crimes, onde o juiz, com base nos dados processuais, deve emitir uma sentença, condenando ou absolvendo o réu.

O Mundo é probabilístico. Vivemos rodeados por fenômenos aleatórios de diversos tipos, como por exemplo: Fenômenos físicos: temperaturas mínimas e máximas diárias, quantidade de chuva anual, alturas das marés oceânicas, ocorrência de fenômenos naturais tais como terremotos ou furacões; fenômenos biológicos: características hereditárias, como sexo, cor dos olhos, altura, características intelectuais e emocionais; fenômenos econômicos: produções de produtos agrícolas, produções de produtos industriais, comportamentos de mercados, evolução de estoques, índices de preços, índices de inflação; fenômenos sociais: evolução da população, índices de mortalidade, índices de desemprego, índices de analfabetismo, assim como resultados de pesquisas de opinião pública sobre os mais diversos assuntos. Deparamo-nos, então, em nosso cotidiano com uma infinidade de fenômenos não determinísticos. Além de que, a nossa própria condição humana encontra-se envolta na incerteza quanto ao futuro, seja com relação ao nosso tempo de vida, à possibilidade de ocorrência de doenças, acidentes, assaltos e outros imprevistos. Devemos, portanto, fornecer aos alunos desde o início do processo de escolarização uma formação estatística necessária ao entendimento da realidade que os cerca e que lhes possibilite, no futuro, o exercício consciente da cidadania.

Verificamos, portanto, que os fenômenos aleatórios desempenham um papel importante na ciência e nos procedimentos de nosso cotidiano, onde a incerteza está constantemente presente e os acontecimentos são contingentes, forçando-nos a tomar decisões a partir de julgamentos em situações de incerteza. Prova disso, encontramos em expressões da linguagem popular, tais como: “muito provável”, “improvável”, “quase certo”, “mais provável”, entre outras do mesmo tipo. Como, por exemplo: “é muito provável que hoje chova”, ou “é pouco provável que eu ganhe na loteria”, ou ainda, “o evento A é mais provável do que o evento B”. Esses julgamentos sobre a probabilidade de ocorrência de determinados resultados de fenômenos ou experimentos regidos pela lei do acaso somente são

possíveis com base em nossa experiência anterior ou em nosso conhecimento sobre o conjunto de proposições que o tornam, ou não, evidente.

No entanto, estamos habituados a raciocinar com situações em que, quando as premissas são verdadeiras e nosso raciocínio é válido, podemos afirmar categoricamente nossas conclusões. Isto é, uma argumentação válida nos fornece uma classe de conclusões, as quais são totalmente verdadeiras, desde que as respectivas premissas também o sejam. Uma inferência probabilística, por outro lado, pertence a uma classe de conclusões que, referindo-se a um conjunto de realizações, pode para um caso particular ser falsa, mesmo que as premissas sejam verdadeiras.

Assim, por exemplo, se em um lote da produção de certo tipo de peça não existir nenhuma peça defeituosa, selecionando-se uma peça ao acaso do lote poderemos afirmar categoricamente que ela não será defeituosa. No entanto, se apenas 90% das peças do lote não são defeituosas, então, selecionando-se uma peça ao acaso do lote pode-se afirmar apenas que há uma probabilidade igual a 0,9 de que ela não seja defeituosa. Isto é, em apenas nove décimos das extrações, em média, as peças não serão defeituosas. Verificamos, então, que não há uma inferência necessária entre uma premissa que se refira à distribuição de uma classe e uma conclusão relativa a um único elemento da classe. A única coisa que se pode afirmar nesse caso é a frequência relativa do número de vezes que são verdadeiras tais conclusões, quando são verdadeiras as premissas.

Michael Polanyi em seu livro “Personal Knowledge” nos apresenta outro exemplo do significado de uma afirmação probabilística, a partir do modelo de um átomo de hidrogênio apresentado pela física quântica. O modelo nos fornece, para cada um dos infinitos pontos do espaço, um número $f(r)$ que é uma função da distância r do elétron ao núcleo. Este número indica a probabilidade de se encontrar um elétron de um átomo de hidrogênio em um ponto particular ou em qualquer outro ponto que esteja à mesma distância r do núcleo. Essa afirmação não pode ser contradita por qualquer evento que se possa conceber, pelo simples fato de que admite que o elétron possa ser encontrado, ou não, em um determinado lugar em certo instante.

Polanyi comenta:

Embora afirmações desse tipo sejam ambíguas, considerando que existe um significado em atribuir um valor numérico à probabilidade de encontrarmos um elétron em uma dada posição em determinado instante,

tal indicação nos fornece uma restrição a essa ambigüidade e uma orientação para a nossa participação pessoal no evento ao qual se refere a afirmação probabilística. Se nós afrouxarmos nosso determinismo objetivo e nos voltarmos para o senso comum, verificamos que fazemos estimativas de eventos regidos pela lei do acaso. Quando fazemos estimativas sobre a ocorrência de tais eventos, e se sua probabilidade é expressa numericamente, esse número nos orienta e expressa completamente a nossa avaliação.

Faremos, então, algumas reflexões sobre o conceito de probabilidade, lembrando que a interpretação da probabilidade desempenha um papel fundamental no pensamento estocástico e é essencial ao estudo da teoria da Probabilidade e da Estatística, a qual é a ferramenta apropriada para a descrição, interpretação, e análise dos fenômenos aleatórios.

2.8 O conceito de probabilidade

A teoria matemática da probabilidade, utilizada para representar a incerteza depende da forma de se interpretar e atribuir valores numéricos às probabilidades de ocorrência dos possíveis resultados de experimentos aleatórios. A atribuição de valores às probabilidades foi feita inicialmente, na teoria clássica de Laplace, a partir da idéia de que, assim como nos jogos, a ocorrência de cada um dos resultados possíveis seja igualmente provável. Certamente essa suposição de que os resultados sejam igualmente prováveis não se aplica a um grande número de eventos do mundo real, nem tão pouco a afirmações sobre situações de nosso cotidiano regidas pela lei do acaso. Apresentamos, então em seguida, as principais interpretações do conceito de probabilidade:

a) Probabilidade clássica ou a priori

Assumindo-se que cada resultado possível de um experimento aleatório (evento elementar) seja igualmente provável de ocorrer, a probabilidade de ocorrência de cada evento

é definida como a razão entre o número de resultados favoráveis ao evento e o número total de resultados possíveis, o qual é denominado de espaço amostral.

A definição clássica de probabilidade se aplica apenas ao número muito limitado de situações em que se possa assumir que os possíveis resultados do experimento sejam equiprováveis. As probabilidades nessa definição são ditas a priori e são atribuídas teoricamente por um raciocínio puramente dedutivo, como por exemplo, a suposição de que a probabilidade de ocorrência do número 6 no lançamento de um dado homogêneo seja igual a $\frac{1}{6}$. A definição clássica trata com objetos ideais, e não se aplica a situações em que não se possa atribuir a mesma chance de ocorrência para cada um dos resultados possíveis do experimento. Além disso a definição é, em certo sentido redundante, pois utiliza o próprio conceito que está definindo, quando supõe que os resultados do experimento tenham a mesma chance de ocorrência. A definição é também restrita aos casos de espaços amostrais finitos e necessita de uma adaptação no caso em que o experimento admita um número infinito de resultados possíveis.

b) Probabilidade frequentista ou a posteriori

Nos experimentos regidos pela lei do acaso, embora cada resultado particular seja imprevisível, se o experimento puder ser repetido muitas vezes sob as mesmas condições experimentais, a frequência relativa das vezes que ocorre cada um dos resultados do experimento tende a se estabilizar. Pode-se, então, definir a probabilidade de ocorrência de um evento A , indicada por $P(A)$, como o limite da frequência relativa de ocorrência do evento A , quando o número de repetições do experimento, sob as mesmas condições, tende ao infinito. Ou seja:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n},$$

onde n_A é o número de vezes que o evento A ocorreu em n idênticos e independentes ensaios experimentais. Podemos, portanto, aproximar a probabilidade de ocorrência de um evento A , pela frequência relativa do número de vezes n_A em que ele ocorre, em um grande número n de idênticos e independentes ensaios experimentais. Então:

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}.$$

Assim, no exemplo do lançamento de uma moeda, podemos aproximar a probabilidade de ocorrência do resultado *cara* pela frequência relativa do número de vezes que ocorreu *cara* em um grande número de lançamentos. Ou, ainda, no nascimento de crianças, podemos aproximar a probabilidade de nascer uma criança do sexo masculino, pela proporção de nascimentos de crianças do sexo masculino em um grande número de nascimentos.

Embora a definição freqüentista de probabilidade, ao contrário da definição clássica, se baseie em resultados experimentais e portanto pareça ser mais objetiva, ela depende dos conceitos subjetivos de idênticas e independentes condições experimentais e as probabilidades são calculadas apenas aproximadamente, através de um número finito de repetições do experimento.

As duas interpretações de probabilidade apresentadas, a clássica e a freqüentista, se aplicam apenas a eventos observáveis e exigem que os resultados ocorram sob condições uniformes. No entanto a teoria da probabilidade pode ser aplicada a situações em que não sejam possíveis repetições, tais como, para atribuir probabilidades a afirmações do tipo: “choverá hoje”, ou “João ama Maria”, ou ainda, “nos próximos cinco anos será descoberta a cura para a Aids”. As probabilidades atribuídas a afirmações desses tipos dependem de uma avaliação pessoal, de ordem qualitativa, e são conhecidas como probabilidades subjetivas, que discutiremos em seguida.

c) Probabilidade subjetiva

A probabilidade subjetiva de ocorrência de um evento mede o grau de crença de uma pessoa na ocorrência desse evento, e, portanto, depende de uma avaliação pessoal, subjetiva, da probabilidade de ocorrência do evento, com base na informação disponível. Assim por exemplo, para a afirmação “nos próximos cinco anos será descoberta a cura para a Aids”, uma pessoa que não tenha nenhum conhecimento a respeito poderá atribuir probabilidade 0,5, enquanto que um pesquisador sobre a doença poderá atribuir um valor mais próximo da realidade, devido à sua maior informação sobre o assunto.

Nesses casos utiliza-se o conceito de probabilidade condicional, ilustrado através do seguinte exemplo:

Numa população de n motoristas, consideremos os eventos:

A: o motorista sofreu algum acidente com vítima fatal.

M: o motorista é do sexo masculino.

Sejam n_A e n_M respectivamente o número de motoristas que sofreram algum acidente com vítima fatal e o número de motoristas do sexo masculino.

Então, quando n é grande, a probabilidade de que um motorista sofra algum acidente com vítima fatal, pode ser aproximada pela frequência relativa:

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

e, da mesma forma, a probabilidade de que um motorista seja do sexo masculino é aproximada por:

$$P(M) = \frac{n_M}{n}.$$

Então, a probabilidade condicional de que um motorista sofra algum acidente com vítima fatal sabendo-se que o motorista é do sexo masculino, indicada por $P(A|M)$, é calculada restringindo-se o espaço amostral aos motoristas do sexo masculino.

Dessa forma, sendo n_{AM} o número de motoristas do sexo masculino que sofreram algum acidente com vítima fatal, essa probabilidade será aproximada por:

$$P(A|M) = \frac{n_{AM}}{n_M} = \frac{n_{AM}/n}{n_M/n} = \frac{P(A \cap M)}{P(M)}.$$

Dessa forma, se A e B são dois eventos quaisquer de um espaço amostral S, com $P(A) > 0$, então definimos a probabilidade condicional de B, dado A, por:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Quando fazemos uma afirmação probabilística condicional, indicada por $P(A|E)$, entre duas proposições, estamos indicando a nossa crença na relação entre as proposições e representando o grau de crença na afirmação A, baseado na evidência E.

Polany ressalta a diferença entre a afirmação probabilística por um lado e a probabilidade da afirmação, ou o grau de crença na afirmação por outro lado, com o seguinte exemplo:

No lançamento de um dado, podemos considerar a afirmação probabilística H: “a probabilidade de ocorrer um seis é 1/6”, ou “a probabilidade de ocorrer um cinco é 1/6”, e assim por diante. Se nós estivermos fazendo afirmações não probabilísticas H sobre o lançamento, elas devem ser do tipo: “no lançamento ocorrerá um seis”, ou no lançamento ocorrerá um cinco, e assim por diante. Então, as seis afirmações contraditórias relativas aos resultados possíveis no lançamento do dado serão perfeitamente aceitáveis, somente se elas forem consideradas não como certezas, mas sim como um grau de probabilidade ou de crença, ao qual nós atribuímos o número 1/6. Concluimos, portanto, que as afirmações probabilísticas são afirmações sobre eventos prováveis e não afirmações prováveis sobre eventos.

Verificamos, portanto, que as probabilidades subjetivas incorporam os fatos disponíveis sobre o evento, que são considerados como informação a priori. A incorporação da informação a priori para o cálculo das probabilidades e a realização de inferências é feita pela estatística Bayesiana e foi discutida detalhadamente por Cordani, (2001).

d) Probabilidade axiomática

Assim como a geometria euclidiana é construída sobre um conjunto de axiomas e entes matemáticos ideais, tais como o ponto e a reta, e apesar disso tem inúmeras aplicações ao mundo real, ou ainda, a física utiliza modelos matemáticos para explicar os fenômenos observados na natureza, também a teoria axiomática da probabilidade, é um modelo

matemático baseado em um conjunto de axiomas, com o objetivo de prever e interpretar os fenômenos regidos pela lei do acaso observados no mundo real.

A teoria axiomática da probabilidade foi formalizada por A. Kolmogorov em 1933 e editada em inglês, com o título: *Foundations of the theory of probability*, em 1956 e é uma teoria matemática suficientemente geral para incluir todas as interpretações anteriores de probabilidade. Utilizando a teoria dos conjuntos, a teoria axiomática define uma função de probabilidade, como uma particular função matemática, que associa a cada evento do espaço amostral de um experimento aleatório um número real no intervalo fechado $[0,1]$, satisfazendo a determinados axiomas.

Embora a teoria axiomática seja bastante geral para ser aplicada às mais diversas situações empíricas, por ser um modelo matemático e portanto uma idealização da realidade, ela não nos diz como calcular os valores da função de probabilidade, que fornece a chance de ocorrência de cada um dos resultados de um experimento aleatório. Esses valores devem ser determinados através de alguma das interpretações intuitivas da probabilidade que se aplique à situação prática real em estudo.

2.9 O conhecimento estatístico

As técnicas da Estatística Descritiva de coletar e de organizar dados são utilizadas desde a época dos romanos, quando o Estado já realizava censos sobre a população, com finalidades fiscais e militares. A própria expressão Estatística tem sua origem na palavra latina “status”, que significa Estado e foi originalmente utilizada para designar conjuntos de dados sobre um país, tais como: o número de habitantes, o número de empregados, a produção agrícola ou industrial, o volume de comércio e outras informações de interesse.

No entanto, a teoria estatística que tem como objetivo o desenvolvimento de métodos de decisão em situações de incerteza, a partir da análise de dados provenientes da realização de experimentos ou de processos aleatórios, é relativamente recente. Foi apenas no início do século XIX que Laplace e Gauss, com base em uma visão determinista da natureza, em que

se supunha que os fenômenos aleatórios eram a resultante de várias causas independentes desconhecidas, deram importante contribuição especificando, sob a hipótese de equiprobabilidade, distribuições a priori para o cálculo dos erros experimentais, a partir de observações em astronomia. Contudo, pode-se considerar que a inferência estatística iniciou-se apenas no final do século XIX com Francis Galton e Karl Pearson, a partir do estudo da variação simultânea de duas ou mais variáveis através das covariâncias ou das correlações entre essas variáveis. A primeira distribuição amostral utilizada nos testes de hipóteses, como uma medida do desvio entre as observações e o modelo adotado na hipótese, foi apresentada por Pearson em 1900 e é conhecida como distribuição qui-quadrado (χ^2), da soma dos quadrados dos desvios em relação à média.

Mas, sem dúvida, o grande desenvolvimento da inferência estatística ocorreu no início do século XX, com as contribuições de William D. Gosset, que utilizava o pseudônimo de “Student”, e de Ronald A. Fisher, na análise de dados experimentais. Em 1908, Gosset encontrou a distribuição de probabilidade da estatística $t = \frac{(\bar{x} - \mu)}{s/\sqrt{n}}$, conhecida como distribuição “t-Student”, dos desvios da média amostral \bar{x} em relação à média populacional μ , quando o desvio padrão populacional σ é estimado pelo amostral s , para qualquer amostra de tamanho n conhecido. Fisher, por sua vez, em seu artigo intitulado “The arrangement of field experiments”, apresentou em 1926 as principais idéias do planejamento experimental e expôs o conceito dos testes de hipóteses, que chamou originalmente de testes de significância.

Fisher, defendendo a idéia de que a inferência estatística deveria sempre que possível ser inteiramente baseada na probabilidade frequentista, calculada exclusivamente a partir dos resultados experimentais, introduziu uma mudança de caráter epistemológico. A probabilidade, além da função de caráter descritivo de modelar a variabilidade da população, passa a ter a função de quantificar a variabilidade amostral das induções, conforme nos destaca Pace (1997):

A probabilidade tem um duplo papel: o primeiro é descritivo, esse é, de modelar a variabilidade na população; o segundo é epistemológico: a probabilidade permite a quantificação da variabilidade amostral das

induções, admitindo-se que a variabilidade das amostras possa ser modelada. De acordo com o paradigma de Fisher, a variabilidade das induções seria modelada, em conformidade com o “princípio das amostragens repetidas”, levando-se em conta como mudam as conclusões com as variações amostrais, as quais podem ser obtidas através da repetição hipotética, sob as mesmas condições, do experimento o qual gerou inicialmente as observações.

Enquanto a Probabilidade constrói um modelo matemático supostamente apropriado para a descrição de um fenômeno aleatório, especificando os valores de seus parâmetros e deduzindo o comportamento do fenômeno, como por exemplo, determinando a distribuição do número de vezes em que cada resultado ocorrerá; a Estatística, por sua vez, assume o modelo matemático, mas, ao invés de assumir os valores de seus parâmetros, estima-os a partir dos resultados experimentais observados.

Para ilustrar essas considerações tomemos um exemplo particular: consideremos que uma amostra aleatória de tamanho n seja selecionada de um lote de N lâmpadas elétricas contendo uma proporção θ de lâmpadas defeituosas. Qual é a distribuição do número x de lâmpadas defeituosas em repetidas amostras? Supondo que $n = 100$, $N = 10.000$ e $\theta = 0,1$ o número esperado de lâmpadas defeituosas por amostra é igual a $100 \cdot 0,1 = 10$ lâmpadas. Mas esse número não será constante em toda amostra. Então, a probabilidade nos indicará qual será a proporção de vezes em várias amostras que o número x de lâmpadas defeituosas será igual a 0, 1, 2 ... 100. Em Estatística, de modo diverso, seleciona-se uma amostra de n lâmpadas e verifica-se o número efetivo de defeituosas. A partir desse número observado na amostra procura-se estimar o valor do parâmetro desconhecido θ , ou seja, determina-se o valor mais provável para esse parâmetro. Um dos métodos de estimação mais utilizados é o método da máxima verossimilhança, o qual determina o valor do parâmetro que maximiza a probabilidade de ocorrência do resultado observado na amostra.

A partir de então a inferência estatística, inicialmente utilizada no estudo de experimentos agrícolas, passou a ser aplicada ao estudo de fenômenos das mais variadas áreas do conhecimento, nas ciências naturais e sociais, na economia, e em experimentos de engenharia, medicina, psicologia, meteorologia, pedagogia, assim como em todas as áreas do conhecimento em que se coleta e analisa dados.

No entanto, a importância da Probabilidade e Estatística não se deve apenas às suas inúmeras aplicações, mas também à sua necessidade para a compreensão dos fenômenos aleatórios observados em nosso cotidiano e para a tomada de decisão perante as inúmeras situações de incerteza com que nos deparamos a todo o instante.

2.10 A Estatística e a realidade

O objetivo da inferência estatística é a obtenção de informações sobre a população de interesse, por meio de resultados obtidos na observação de amostras extraídas dessa população. Assim por exemplo, nas ciências em geral e na Engenharia em particular são utilizadas as técnicas estatísticas para planejar e realizar experimentos e para analisar os resultados obtidos, tirar conclusões e tomar decisões sobre novos produtos e processos. No processo de indução da inferência estatística é feita uma extensão do particular (amostra) para o geral (população). Devido às variações amostrais tais extensões não podem ser feitas com absoluta certeza, mas apenas sob a condição de incerteza, a qual é medida em termos de probabilidade.

As estatísticas são variáveis aleatórias definidas como funções dos valores das amostras. Dessa forma, estas estatísticas, sendo resultantes da observação da realidade, estão sujeitas a uma série de imprecisões devidas a vários fatores, tais como, o procedimento amostral adotado e a utilização de índices e valores centrais.

2.10.1 O procedimento amostral

A confiabilidade das estatísticas depende fundamentalmente do procedimento amostral adotado. A falta de representatividade das amostras, decorrentes de amostras viciadas ou muito pequenas, podem conduzir a resultados falsos. Como a inferência estatística tem como objetivo tirar conclusões sobre a população a partir dos resultados observados nas amostras da

população, o processo de amostragem utilizado desempenha papel fundamental na validade das conclusões obtidas sobre a população. A teoria estatística exige que se utilize uma amostragem aleatória, como por exemplo uma amostra casual simples, onde cada elemento da população tem a mesma probabilidade de ser selecionado para a amostra; ou uma amostragem aleatória estratificada proporcional, onde a população é dividida em vários grupos (estratos) homogêneos e em cada estrato é feita uma amostragem casual simples, com o tamanho da amostra proporcional ao tamanho do estrato. No entanto, devido ao alto custo de se enumerar os elementos da população e selecionar para a amostra aqueles que forem sorteados aleatoriamente, por simplicidade ou por impossibilidade, utiliza-se muitas vezes uma amostragem não probabilística, como por exemplo, a técnica de quotas, onde se procura selecionar ao acaso os elementos de cada grupo para a amostra, até se completar as quotas definidas, não se garantindo a representatividade da população.

Amostras não representativas da população, por sua vez, podem conduzir a conclusões completamente equivocadas. Tal como, por exemplo, um psiquiatra que com base na observação de seus pacientes chega à conclusão de que atualmente praticamente todas as pessoas da população são neuróticas. O psiquiatra, considerando os seus pacientes como uma amostra representativa da população, não leva em conta que pessoas normais não procuram ajuda de psiquiatras.

No entanto, mesmo um processo de amostragem aleatória poderá fornecer amostras não representativas ou dados incorretos devido a vários fatores, tais como, a dificuldade de se obter as informações ou da elaboração de questionários objetivos e claros, ocasionando a imprecisão das respostas. Assim, por exemplo, se o objetivo de uma pesquisa for estimar a renda média das famílias de um determinado município, pode-se ter dificuldade em se obter as proporções exatas de famílias de cada bairro ou região do município (estratos), assim como de se obter as informações das famílias selecionadas para a amostra. Pode ocorrer que tais famílias não sejam localizadas, ou que se recusem a fornecer o valor da renda, além da possibilidade do fornecimento de dados incorretos por aquelas pessoas que não desejam revelar o verdadeiro valor de sua renda familiar.

Muitas vezes consideram-se as estatísticas como se fossem exatas, encarando-as como uma fotografia da realidade, quando ao invés disso são muito mais o resultado de uma observação, de uma modelagem da realidade, e, portanto, não se pode entendê-las sem se estudar o processo de observação estatística.

Esse fato foi ressaltado por Besson (1995):

Toda observação estatística é afetada por um certo grau de inexatidão, cuja estimativa é incerta. Erros de observação e de amostragem se combinam, então, para impedir que as cifras sejam algo diferente de aproximações. Sem serem falsas, elas não podem atingir a exatidão. Se as estatísticas fossem apenas um reflexo (concepção fotográfica), disporiam de um critério de verdade (a exatidão). Não é este o caso: elas não provem da denotação mas da conotação, pois é o contexto, o contorno, que determina seu sentido.

2.10.2 Índices e medidas de posição

Em nosso cotidiano observamos freqüentemente contestações das pessoas do povo às cifras, como por exemplo, ao índice de inflação, julgando-o bem inferior ao aumento real dos preços pagos pelos produtos e serviços. Essas contestações decorrem do fato de que as estatísticas sintetizam as informações, representando, portanto, uma medida resumo das situações e não as situações individuais. As estatísticas só apreendem índices da realidade, e a inflação é apreendida pela média dos preços no varejo (índice de preços).

A objetivação estatística em seu esforço na abstração das particularidades individuais para atingir as massas libera a subjetividade, pois a informação global freqüentemente não é pertinente. Esse fato é muito bem ilustrado pela seguinte anedota: muitas pessoas se afogaram em um rio cuja profundidade média era de um metro, com uma pequena variabilidade média em torno desse valor médio. O que não impede que haja buracos de 2 a 3 metros.

A confusão entre o índice e a realidade, entre o indicador e o fenômeno que ele representa provocam a rejeição das estatísticas, em decorrência da concepção absolutista do conhecimento.

Assim, por exemplo, se um produto que custa R\$ 100,00 sofrer um reajuste de 50%, passará a custar R\$ 150,00. Se, em seguida, o preço do produto sofrer um desconto de 40%, passando a custar R\$ 90,00, houve, de fato, uma redução de 10% em seu preço que passou de

R\$ 100,00 para R\$ 90,00. Considerando-se apenas as variações percentuais, poder-se-ia concluir, erradamente, que houve um aumento de 10% no preço (50% de aumento menos 40% de desconto). O engano se deve ao fato de que o aumento de 50% foi aplicado sobre o preço inicial de R\$ 100,00, enquanto que a redução de 40% ocorreu sobre o preço maior de R\$ 150,00. Da mesma forma, um produto que tenha seu preço reduzido de R\$ 100,00 para R\$ 50,00 pode ser anunciado em uma propaganda como tendo um desconto de 100% no preço. O erro está na troca da base do cálculo do percentual, o que ocorreu de fato foi uma redução de 50% no preço do produto.

Outra forma de distorção da realidade é a confusão entre porcentagem e pontos percentuais. Assim por exemplo, se o lucro de um capital investido subir de 3% em um ano para 6% no ano seguinte, poder-se-ia afirmar simplesmente que houve um modesto crescimento de 3 pontos percentuais no lucro. Mas poderia ter sido afirmado, corretamente, que houve um aumento de 100% no lucro, tendo o seu valor aumentado de 3% para 6% do capital investido.

Pode-se, ainda, ocultar a verdadeira distribuição dos dados, apresentando-se apenas uma das três principais medidas de posição: a *média*, a *mediana* ou a *moda*. Consideremos, por exemplo, uma micro-empresa em que os salários mensais, em reais, de seus 11 funcionários sejam os seguintes:

350 350 350 350 350 500 650 800 1800 3000 8000

Desejando mostrar que ele paga altos salários aos seus empregados, o proprietário da empresa pode informar apenas o salário médio de seus funcionários, afirmando, corretamente, que o salário médio pago pela empresa é de R\$ 1.500,00 por funcionário. O proprietário utilizou o fato de que a média é muito influenciada por valores extremos e, nesse caso, os dois salários mais altos deslocaram a média para cima. No entanto, poderia ter sido dada uma idéia mais próxima da realidade, informando-se também o valor da mediana, que é igual a R\$ 500,00 e que representa, nesse caso, o valor do salário tal que a metade dos funcionários recebem salários inferiores a ele e a outra metade salários superiores. Assim como, o valor da moda, que é igual a R\$ 350,00, e representa o valor do salário que ocorre com maior frequência.

Essa imagem distorcida da realidade decorre do fato de que para variáveis com distribuições simétricas, que seguem a conhecida curva de Gauss da distribuição normal, as três medidas de posição consideradas, a média, a mediana e a moda coincidem. Mas esse fato não pode ser aplicado a variáveis com distribuições assimétricas, como ocorre, por exemplo, com os salários.

Além disso, a palavra média é utilizada para designar a *média aritmética* que é a mais comum das médias. E, portanto, nos referiremos à média aritmética simplesmente como média. Para um conjunto de n valores a média aritmética é calculada somando-se os n valores e dividindo-se o resultado por n . No entanto, a média aritmética fornece uma melhor representação dos valores quando eles estão distribuídos de modo aproximadamente uniforme, assim como ocorre, por exemplo, com as alturas das pessoas de uma dada faixa etária. Ao contrário, se os valores crescerem ou decrescerem rapidamente, assim como no caso em que cada valor é o termo anterior multiplicado por uma constante, como ocorre, por exemplo, nos crescimentos populacionais ou nos investimentos no mercado financeiro, a média mais indicada não é a aritmética, mas sim, a *média geométrica*.

A média geométrica de um conjunto de n valores é definida como sendo a raiz de ordem n do produto desses valores. Assim, por exemplo, para os valores: 1, 2, 4, 8 e 16, a média geométrica é calculada por:

$$\sqrt[5]{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16} = \sqrt[5]{1024} = 4$$

Notemos que, nesse caso, a média geométrica coincidiu com a mediana do conjunto de valores, diferentemente da média aritmética que é igual a:

$$\frac{1 + 2 + 4 + 8 + 16}{5} = 6,2.$$

Utilizando-se no exemplo anterior dos salários, a média geométrica, ao invés da média aritmética, obteríamos o valor:

$$\sqrt[11]{350 \cdot 350 \cdot 350 \cdot 350 \cdot 350 \cdot 500 \cdot 650 \cdot 800 \cdot 1800 \cdot 3000 \cdot 8000} = 773,13.$$

Notemos que, nesse caso, a média geométrica seria mais adequada para representar os salários do que a média aritmética utilizada.

Outras vezes a média geométrica pode ser utilizada para falsear a realidade, considere o exemplo seguinte:

Suponha que dois produtos A e B tenham o mesmo preço de R\$ 10,00 cada um, sendo portanto o preço médio dos dois produtos igual a R\$ 10,00.

Suponha, ainda, que depois de determinado período de tempo, o preço do produto A tenha dobrado, passando a ser de R\$ 20,00; enquanto o preço do produto B tenha sido reduzido à metade, passando a ser de R\$ 5,00. Nesse caso o novo preço médio dos dois produtos será de $\frac{20,00 + 5,00}{2} = \text{R}\$12,50$, ocorrendo, portanto, um aumento médio de 25%, no preço médio dos dois produtos .

Se utilizássemos a média geométrica poderíamos concluir que não houve aumento no preço médio dos dois produtos, pois $\sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100} = \text{R}\$10,00$.

Outro conceito estatístico que em geral é mal interpretado é o de correlação entre duas variáveis. A existência de uma correlação entre duas variáveis é apenas um indicador de uma possível relação causal entre essas variáveis, mas não implica necessariamente uma relação de causa e efeito entre elas.

Assim, por exemplo, existe uma forte correlação linear entre as quantidades de cerveja e de sorvete consumidas nos meses de verão. No entanto, o consumo de cerveja não decorre do consumo de sorvete, mas sim, ambos são causados pelas altas temperaturas dos meses de verão.

Verificamos, dessa forma, que os conceitos estatísticos quando mal interpretados ou mal utilizados podem conduzir a um falseamento da realidade. Isso pode ocorrer tanto propositalmente, quando gráficos com escalas não apropriadas e medidas estatísticas não adequadas são habilmente empregadas para demonstrar uma tendência não existente, quanto inadvertidamente, em decorrência de uma interpretação errada de um indicador estatístico.

2.10.3 O desvio padrão

O desvio padrão é a medida mais utilizada para se medir a dispersão de um conjunto de valores e é definida como a raiz quadrada da variância, que por sua vez, é definida como a

média dos quadrados dos desvios de cada um dos valores em relação à média desses mesmos valores. Assim, por exemplo, para o conjunto de dados: 1, 5, 9, 10, 15, teríamos:

$$\text{Média} = \frac{1+5+9+10+15}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\text{Variância} = \frac{(1-8)^2 + (5-8)^2 + (9-8)^2 + (10-8)^2 + (15-8)^2}{5} = \frac{112}{5} = 22,4$$

e, finalmente:

$$\text{Desvio padrão} = \sqrt{22,4} = 4,73.$$

Dessa forma, podemos considerar que o desvio padrão de 4,73 representa a média dos desvios em relação à média medindo, portanto, a dispersão média dos valores do conjunto de dados em torno de seu valor médio.

Observemos que, para qualquer conjunto de valores, a soma dos desvios desses valores em relação à sua própria média μ é sempre nula. De fato, para um conjunto de dados: x_1, x_2, \dots, x_n , temos:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \text{ e, portanto:}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n\mu.$$

Então, a soma dos desvios em relação à média será igual a:

$$(x_1 - \mu) + (x_2 - \mu) + \dots + (x_n - \mu) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n\mu = n\mu - n\mu = 0$$

Devido a esse fato, define-se a variância como sendo a média da soma dos quadrados dos desvios em relação à média. No entanto, a variância tem o inconveniente de ser expressa em unidades ao quadrado, as quais geralmente não têm sentido. Portanto, para se retornar às unidades originais, define-se o desvio padrão como sendo a raiz quadrada da variância.

Observemos, ainda, que se utilizássemos qualquer outra média (M), em vez da média aritmética (μ), no cálculo da variância obteríamos um valor maior do que o obtido com a média aritmética. Ou seja, a média aritmética é aquela que minimiza o cálculo da variância.

De fato, considerando-se as somas de quadrados correspondentes:

$$S_M = (x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \dots + (x_n - M)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - M)^2$$

$$S_\mu = (x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

teremos:

$$\begin{aligned} S_M &= \sum_{i=1}^n (x_i - M)^2 = \sum_{i=1}^n [(x_i - \mu) + (\mu - M)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [(x_i - \mu)^2 + (\mu - M)^2 + 2(x_i - \mu)(\mu - M)] \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 + n(\mu - M)^2 + 2(\mu - M) \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \\ &= S_\mu + n(\mu - M)^2 \end{aligned}$$

pois, conforme já verificamos, $\sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0$ e, como $n(\mu - M)^2 \geq 0$, têm-se:

$$S_M \geq S_\mu \text{ e } S_M = S_\mu \Leftrightarrow M = \mu$$

O desvio padrão fornece uma medida da proporção de valores que se situam a uma dada distância da média. Para uma grande quantidade de valores que se distribuem simetricamente em relação à média, tal como, por exemplo, o número de pontos obtidos em um teste por uma grande quantidade de candidatos, os intervalos de 1, 2 e 3 desvios padrões em torno da média contém, respectivamente, aproximadamente 68%, 95% e 99,7% dos valores, conforme veremos em seguida.

2.10.4 A distribuição normal

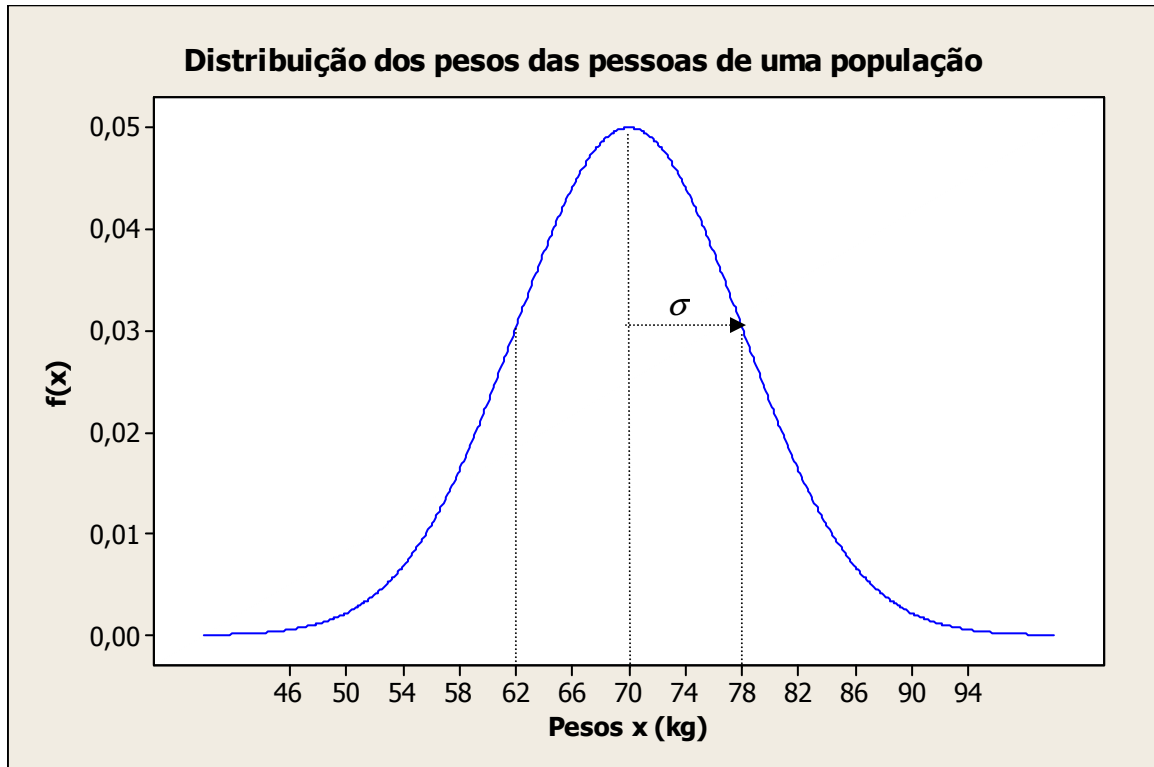
A distribuição normal, também conhecida como curva de Gauss, é a mais importante das distribuições contínuas de probabilidades. Inicialmente utilizada para representar a distribuição dos erros experimentais nas observações astronômicas, passou a ser aplicada a inúmeras variáveis, desde o comportamento coletivo do movimento de moléculas de um gás, até as medidas de coeficientes de inteligência e as mensurações de experimentos agrícolas. Além disso, em decorrência de um resultado teórico conhecido como teorema do limite central, a distribuição da soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas pode ser aproximada pela distribuição normal, quando o número de variáveis cresce. Esse fato permite a utilização da distribuição normal para a realização das inferências estatísticas, pois a média \bar{X} de uma amostra aleatória de tamanho n de qualquer distribuição com média μ e variância finita σ^2 , será uma variável aleatória com distribuição aproximadamente normal, com média μ e variância σ^2/n .

A curva de Gauss tem a forma de sino e os valores da variável se distribuem simetricamente em torno da média. Para se calcular as probabilidades de a variável assumir valores em determinados intervalos, probabilidades essas dadas pelas áreas sob a curva da distribuição normal nesses intervalos, utiliza-se a variável aleatória

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

a qual tem distribuição normal padronizada, com média 0 e variância 1 e mede o número de desvios padrões que os valores da variável X se afastam de sua média. As áreas sob essa curva estão tabeladas e fornecem diretamente essas probabilidades.

Assim, por exemplo, se os pesos das pessoas de uma população têm distribuição normal, com média de 70 kg e desvio padrão de 8 kg, a sua função densidade de probabilidade $f(x)$ é apresentada no gráfico seguinte.



Nesse caso, calculando-se os valores da variável $Z = \frac{X - 70}{8}$, podemos obter diretamente da tabela da distribuição normal padronizada as proporções de pessoas da população cujos pesos se encontram em qualquer intervalo desejado.

Dessa forma, podemos determinar como os pesos das pessoas da população estão distribuídos em torno da média, obtendo-se que:

No intervalo de um desvio padrão em torno da média, ou seja, com pesos entre $\mu - \sigma = 62 \text{ kg}$ e $\mu + \sigma = 78 \text{ kg}$, estão 68,3% das pessoas da população.

No intervalo de dois desvios padrões em torno da média, ou seja, com pesos entre $\mu - 2\sigma = 54 \text{ kg}$ e $\mu + 2\sigma = 86 \text{ kg}$, estão 95,4% das pessoas da população.

No intervalo de três desvios padrões em torno da média, ou seja, com pesos entre $\mu - 3\sigma = 46 \text{ kg}$ e $\mu + 3\sigma = 94 \text{ kg}$, estão 99,7% das pessoas da população.

Notemos ainda que, devido à sua simetria e conforme já destacamos, na distribuição normal, a média, a mediana e a moda coincidem.

No entanto, convém ressaltar que a função densidade de probabilidade se refere à distribuição dos valores da variável na população, de modo que o seu gráfico se baseia em médias para um grande número de medidas. Então, conforme já destacamos no capítulo 2, não

se pode utilizar um raciocínio determinístico para se explicar fenômenos aleatórios. Assim da mesma forma como em 100 lançamentos de uma moeda dificilmente ocorrerão 50 caras e 50 coroas, mesmo que as probabilidades de ocorrer cara ou coroa sejam iguais, também em relação às probabilidades teóricas calculadas através da distribuição normal ocorrerão variações amostrais. Então, desvios em relação à distribuição normal são perfeitamente possíveis e não devem ser considerados como sendo “anormais”. Desse modo, no exemplo considerado, pesos fora do padrão de normalidade podem ocorrer e decorrem naturalmente das variações individuais.

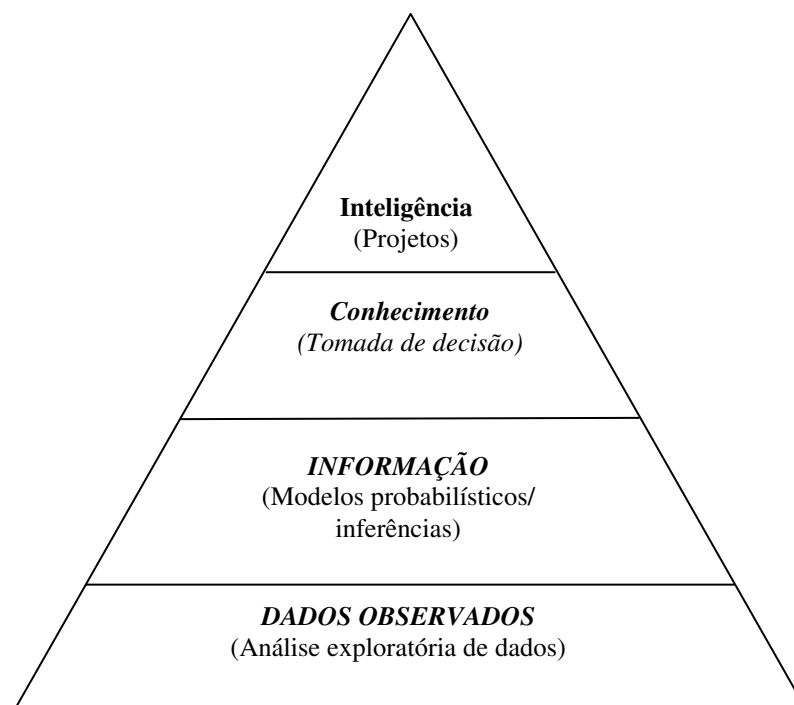
2.10.5 A importância da Estatística na atualidade

Atualmente, com as facilidades dos sistemas de comunicação eletrônica, verificou-se um grande aumento na quantidade de informação disponível e a Estatística passou a fazer parte do cotidiano de nossas vidas. A necessidade de analisar as informações contidas nos grandes bancos de dados das empresas para orientar a tomada de decisão e a facilidade de se dispor de recursos computacionais potentes, suscitou o desenvolvimento de uma nova técnica de análise de dados conhecida como “Data Mining” ou Mineração de Dados. Trata-se de um conjunto de técnicas Estatísticas e da Inteligência Artificial destinadas à exploração de grandes quantidades de dados, de forma a descobrir conhecimento novo, através da definição de novos padrões e relações a partir da informação contida nessas grandes massas de dados. A mineração de dados utiliza técnicas estatísticas para a seleção, preparação e classificação dos dados, escolha das variáveis importantes, eliminação de dados considerados espúrios, fazendo-se as estimativas e previsões necessárias e obtendo-se mecanicamente um conjunto de relações entre as variáveis de interesse, as quais serão analisadas por analistas humanos e auxiliarão no processo decisório.

Na sociedade do conhecimento em que vivemos tornou-se de grande importância analisar a enorme quantidade de informações contidas nos bancos de dados, com o objetivo de transformá-las em conhecimentos que possam ser utilizados em suas áreas de interesse, quer sejam elas comerciais ou científicas.

Para a transformação dos dados, sejam eles quantitativos ou qualitativos, em informação é necessária que se faça uma análise exploratória desses dados, organizando-os e

apresentando-os de modo que possam ser facilmente analisados. A utilização de modelos probabilísticos e a realização das inferências estatísticas possibilitarão, por sua vez, a definição de novos padrões e o relacionamento das informações, transformando-as em conhecimento útil para o processo de tomada de decisão. Esse último nível envolve a inteligência humana com a sua competência de fazer uso dos novos conhecimentos para a realização de projetos, sejam eles, pessoais, de uma empresa, ou de qualquer instituição privada ou pública. Estas etapas podem ser esquematizadas na conhecida pirâmide informacional seguinte:



Conforme destacamos no capítulo 2, o mundo em que vivemos encontra-se impregnado de fenômenos aleatórios. Dessa forma, uma formação deficiente no conhecimento probabilístico e estatístico pode conduzir o aluno a uma visão distorcida da realidade. Para evitar que isso venha a ocorrer, considero essencial que a Probabilidade e a Estatística façam parte da formação geral do aluno, cujo conhecimento lhe possibilitará entre outras coisas:

- desenvolver uma visão mais equilibrada da realidade, onde os aspectos determinísticos e aleatórios estejam sempre presentes;
- ler e interpretar tabelas, gráficos, índices e demais medidas estatísticas que são apresentadas freqüentemente em seu cotidiano pelos meios de comunicação;
- compreender as demais disciplinas do currículo escolar que utilizam o conhecimento probabilístico e estatístico;
- utilizar esse conhecimento na vida profissional, para resolver situações-problema que envolvam o raciocínio estocástico.

Além disso, a Estatística, sendo uma disciplina que se aplica às mais diversas áreas do conhecimento, pode facilitar a interdisciplinaridade e a aplicação da Matemática à realidade, desde que seja apresentada de modo contextualizado e com a participação ativa do aluno, conforme nos destaca Batanero (2001):

Além disso, a probabilidade e a estatística podem ser aplicadas à realidade tão diretamente como a aritmética elementar uma vez que não requerem técnicas matemáticas complicadas. Por suas muitas aplicações, proporcionam uma boa oportunidade para mostrar aos estudantes as aplicações da matemática para resolver problemas reais, sempre que o seu ensino se realize mediante uma metodologia heurística e ativa, enfatizando-se a experimentação e a resolução de problemas.

Concluimos, portanto, que a Probabilidade e a Estatística pode desempenhar um papel importante no currículo em todos os níveis de ensino e em particular nos cursos superiores de engenharia. Mas para que isso seja possível é necessário que se desenvolva uma nova prática docente, baseada na experimentação em áreas de interesse dos alunos, valorizando-se o entendimento dos conceitos em relação às técnicas e à sua justificação matemática, conforme apresentaremos em seguida.

3 O ensino da Estatística

3.1 A presença da Estatística nos currículos

Embora o conhecimento estatístico seja essencial para a compreensão dos fenômenos observados no mundo físico, que é essencialmente aleatório, o conceito de aleatório não é familiar aos nossos alunos de engenharia e dos cursos superiores em geral. Isso se deve ao fato de que em toda a sua formação anterior, nas várias disciplinas, os fenômenos estudados foram apresentados como sendo determinísticos, evitando-se a interpretação de toda componente de variação aleatória.

A Estatística se constitui em uma “ilha” de pensamento aleatório no ensino, quando na verdade há muito de aleatório nas demais disciplinas. Entendemos que a antecipação da familiarização com os fenômenos aleatórios e o conseqüente desenvolvimento do pensamento probabilístico, deveria ser propiciada aos nossos alunos desde o ensino fundamental e médio. Assuntos como as teorias da probabilidade, da amostragem, e da decisão, abordados desde o ensino fundamental, fornecerão, entre outros aspectos, essa familiaridade aos alunos com os fenômenos aleatórios, além de dar um maior destaque à matemática discreta, em geral relegada ao segundo plano nos currículos escolares.

No sistema de ensino brasileiro, a Estatística ocupa um lugar muito pouco destacado nos cursos superiores e praticamente inexistente no ensino fundamental e médio, apesar de que o ensino do conhecimento estatístico, combinatório e probabilístico esteja previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Neles, encontramos o seguinte registro:

O ensino da Matemática deve visar o desenvolvimento:

do raciocínio combinatório, estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

- * coletar, organizar e analisar informações, construir e interpretar tabelas e gráficos, formular argumentos convincentes, tendo por base a análise de dados organizados em representações matemáticas diversas;*
- * resolver situações-problema, que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão;*
- * construir tabelas de frequência e representar graficamente dados estatísticos, utilizando diferentes recursos, bem como elaborar conclusões a partir da leitura, análise, interpretação de informações, apresentadas em tabelas e gráficos;*
- * construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos.*

Em muitos países como, por exemplo, em Portugal, Inglaterra e Estados Unidos da América do Norte, a disciplina Estatística já faz parte dos currículos do ensino básico e secundário. Essa gradativa introdução da disciplina Estatística nos currículos já a partir das fases iniciais da escolarização que está ocorrendo em âmbito mundial suscitou o aparecimento de várias associações interessadas no ensino da Estatística. Em 1948 a American Statistical Association criou a Comissão para a Educação do ISI (International Statistical Institute), com o objetivo de desenvolver atividades de educação estatística. A partir de 1982 a ISI passou a organizar conferências internacionais sobre o ensino da Estatística, as ICOTS (International Conference Of Teaching Statistics), que se realizam a cada 4 anos e em 1991 foi criada, como uma nova seção do ISI, a IASE (International Association of Statistical Education) com a finalidade de promover o desenvolvimento e a melhoria da educação estatística em escala mundial. Com o crescente volume de informações sobre a Educação Estatística surgiram várias revistas especializadas no tema tais como a revista Teaching Statistics, publicada desde 1973 e a revista eletrônica Journal of Statistical Education, dentre outras. Intensificou-se, então, o interesse na investigação sobre o ensino da Estatística, procurando-se identificar os seus problemas, discutir os processos de aprendizagem e as técnicas de ensino e ocupar-se da questão da formação dos professores.

Percebemos então a existência de uma conscientização em nível mundial da importância de que o aluno reconheça e compreenda a dimensão aleatória dos fenômenos naturais, econômicos e sociais, saiba analisá-los, interpretá-los e representá-los corretamente, assim como utilizar a teoria da probabilidade para resolver situações-problema envolvendo esses fenômenos.

A importância da Estatística nos currículos é destacada na seguinte afirmação de Ponte e Fonseca (2000):

É preciso ultrapassar definitivamente a noção de que a estatística se reduz a umas tantas formas de representar dados em gráficos e tabelas e à execução de certos cálculos para determinar a média ou o desvio padrão. A estatística, encarada como um domínio de conceitualização dos processos de coleta, análise e interpretação de dados constitui uma interface fundamental entre a matemática e a realidade, indispensável numa verdadeira educação para a cidadania e para uma intervenção ativa nas diversas atividades. É esse o lugar que deve assumir no currículo.

Considerando que conhecer é construir e reconstruir significados continuamente, mediante o estabelecimento de relações de múltipla natureza, acreditamos que o desenvolvimento dessa visão aleatória do mundo poderá facilitar a construção dos significados dos conceitos envolvidos no ensino da Estatística, influenciando positivamente o seu aprendizado nos cursos superiores.

3.2 A sala de aula e o conhecimento estatístico

A concepção do conhecimento predominante em nossas escolas continua sendo a cartesiana, a qual utiliza a imagem de uma cadeia linear para a construção do conhecimento. De acordo com tal concepção, se o objeto de estudo for complexo, deve-se decompô-lo em

partes mais simples até que possamos ter idéias claras e distintas sobre cada uma dessas partes, para que em seguida o objeto possa ser reconstituído através do encadeamento lógico de suas partes, partindo-se sempre do simples para o complexo, obedecendo-se uma seqüência linear rígida.

No entanto, a partir de 1960, o surgimento das novas tecnologias computacionais, com a criação das redes de informação (Internet), e os avanços alcançados pelas ciências cognitivas suscitaram uma nova imagem do conhecimento como uma rede de significados que constituem os seus nós e que estão ligados entre si por feixes de relações, as quais se entrelaçam como em uma teia e estão em permanente estado de atualização, incorporando novas relações, eliminando outras que se tornam menos importantes e alterando os significados. Na metáfora da rede, como uma teia de significados, conhecer é conhecer o significado, nas suas múltiplas relações com outros significados.

Essa mudança na concepção do conhecimento provocará uma transformação no ensino, conforme nos afirma Machado (1995):

A expectativa é a de que, a partir da metáfora do conhecimento como uma rede, um amplo espectro de ações docentes possa ser desenhado, envolvendo tanto as atividades didáticas em sentido estrito, como as que se referem aos processos de avaliação, ao planejamento, à organização curricular, à utilização de tecnologias educacionais, entre outras.

Sabemos que nossas ações docentes são ditadas por nossas concepções do conhecimento, mesmo que essa influência não se apresente muitas vezes de forma explícita. E, como dissemos, a concepção do conhecimento ainda predominante é a cartesiana, a qual utiliza a imagem de uma cadeia para a construção do conhecimento.

Com base nessa concepção do conhecimento, na prática docente em sala de aula, em geral, se parte da teoria, dos casos mais simples para os mais complexos, com os assuntos tratados separadamente, em uma idealização da realidade, para em seguida se compor esses conhecimentos na aplicação à solução de problemas, também, partindo-se dos mais simples até se alcançar os mais complexos que estão mais próximos dos encontrados na realidade. Embora, em geral, se reconheça ser conveniente se partir do concreto para o abstrato, essa

prática pedagógica, em que se parte da teoria para os exercícios, caminha no sentido contrário, isto é, parte-se do abstrato para o concreto.

No entanto, na recente concepção da inteligência, com a noção de inteligência múltipla desenvolvida por Gardner (1993), considera-se um espectro de múltiplas competências, incluindo além das dimensões linguística e lógico-matemática, também a musical, a corporal-cinestésica, a espacial, a intrapessoal, e a interpessoal. Segundo Gardner, a inteligência não é considerada como uma única grandeza a ser medida, mas sim, no seu aspecto múltiplo, como um espectro de competências. Então nos é permitido imaginar, para orientação de nossas ações docentes, que assim como o mundo é essencialmente aleatório, onde os fenômenos não são independentes, interagindo entre si e correlacionando-se mutuamente e são regidos por leis que seguem uma regularidade estatística, estabelecendo como se distribuem os conjuntos de partículas em vez de estabelecer como se comporta cada partícula, da mesma forma a inteligência e os processos cognitivos também podem ser entendidos apenas de acordo com essa mesma regularidade estatística.

A inteligência esteve durante muito tempo associada à capacidade de receber informações, interpretá-las e produzir respostas eficazes, ou ainda, à capacidade de relacionar um conjunto de conhecimentos com as metas a serem alcançadas para a resolução de problemas. Tais níveis de inteligência estão hoje associados aos computadores e às “máquinas inteligentes” em geral, sendo conhecidos como “inteligência artificial”. A inteligência, em sentido humano, por sua vez, é associada à capacidade de criar, de inventar possibilidades, enfim, à capacidade de ter projetos. O importante são as pessoas, com os seus projetos, e o valor do conhecimento deve estar na possibilidade de realização dos projetos. A importância da valorização dos projetos nas atividades escolares foi bem destacada por Machado (1997), nas suas palavras:

A transferência para o universo educacional de preocupações como as que estão presentes nos programas de qualidade no mundo do trabalho, pode servir de base, pois, para aumentar a importância da idéia de projeto nas atividades de ensino, em seus diversos níveis. Tal fato deve contribuir para dar destaque, na realização das atividades didáticas, à fixação prévia de metas do que se projeta, à participação e à cooperação de todos na tarefa de persegui-las, à valorização do trabalho em grupo e, sobretudo, à

re-instalação do hábito, tantas vezes esquecido, de avaliar o desempenho em função das metas do projeto que se realiza.

Na escola a idéia de projeto, em geral associada à realização de pesquisas, deve, portanto, ser estendida às demais atividades didáticas, as quais devem ser organizadas sob a forma de projetos pedagógicos que propiciem o desenvolvimento dos projetos dos alunos, dando maior significado aos conteúdos disciplinares.

Sabemos, no entanto, que a situação atual da maioria de nossas salas de aula se situa muito distante disso. Embora exista um movimento mundial de reforma do ensino da Estatística em todos os níveis.

Apesar de minha experiência e interesse se concentrarem principalmente nos cursos introdutórios de Estatística dos cursos superiores de Engenharia, as alterações propostas podem ser aplicadas, com as devidas adaptações, a todos os níveis e áreas onde a Estatística é ensinada, exigindo mudanças nos conteúdos, na pedagogia e nas técnicas de ensino.

A democratização do ensino fez com que a aprendizagem da Matemática deixasse de ser um privilégio de uma minoria e passasse a ser vista como uma parte obrigatória da formação de todos os cidadãos. Como consequência tomou força no ensino da Matemática a tendência a valorizar as aplicações, o estudo de situações concretas e o desenvolvimento de habilidades para usar os conceitos matemáticos, em relação ao rigor dos detalhes teóricos. A Estatística deve, então, se voltar mais para as aplicações práticas, tais como a análise de dados, a teoria da probabilidade, o estudo da variação amostral e da teoria da decisão. Com a disponibilidade dos programas estatísticos, passa a ter mais importância a interpretação dos resultados obtidos, do que o entendimento dos detalhes teóricos que lhe dão suporte.

Segundo David S. Moore (1997):

Uma aprendizagem mais efetiva se realiza quando o conteúdo (o que nós queremos que o aluno aprenda), a pedagogia (o que nós fazemos para auxiliá-lo a aprender) e a tecnologia auxiliam-se mutuamente de uma forma balanceada.

O Ensino da Estatística concentrou-se inicialmente principalmente na inferência probabilística baseada na Matemática e os cursos eram excessivamente teóricos. A partir de 1960, com o rápido desenvolvimento da tecnologia da informação surgiu a oportunidade da realização de análise de dados reais em grandes volumes. No entanto, atualmente com a disponibilidade dos programas estatísticos tornou-se possível realizar-se análises complexas, muitas vezes sem o completo entendimento daquilo que está sendo feito.

Conforme nos afirma Des F. Nicholls (2001):

Com a facilidade do uso dos programas estatísticos agora disponíveis existe para um usuário periódico a possibilidade de realizar análises tecnicamente difíceis sem o entendimento completo do que está sendo feito. Do ponto de vista do ensino, enquanto outrora os estudantes aprendiam a teoria mas não tinham facilidades computacionais para implementá-la, agora eles têm a capacidade computacional para empreender tecnicamente análises complexas, sem a base teórica para o completo entendimento dos resultados que estão sendo gerados. A realização de um apropriado equilíbrio entre a teoria e a aplicação será o maior desafio para o futuro.

Acredito que a busca desse equilíbrio entre a fundamentação matemática dos métodos estatísticos e as aplicações desses métodos a situações contextualizadas, com significado para o aluno, e entre o estudo das componentes determinística e aleatória dos fenômenos observados seja o caminho a ser perseguido no ensino da Probabilidade e da Estatística.

Considero que a Probabilidade e a Estatística devam ser ensinadas desde o curso fundamental e não apenas no curso superior como em geral ocorre atualmente, para que o pensamento estocástico seja introduzido desde o início da escolarização e o aluno adquira a habilidade de interpretar a variabilidade e de encará-la como um aspecto da vida. Dessa forma o aluno receberá uma educação em que o equilíbrio determinístico/aleatório será restaurado e perceberá que a Estatística não é apenas relevante mas vital no nosso cotidiano e para o entendimento da realidade que nos cerca.

3.3 A Estatística nos cursos de Engenharia

3.3.1 Situação atual

Os alunos ingressantes nos cursos superiores, em sua maioria, nunca tiveram em seus currículos escolares os conteúdos de Probabilidade e de Estatística e portanto não desenvolveram a sua intuição a respeito dos fenômenos aleatórios, pretendendo explicá-los a partir de um raciocínio determinístico. A lacuna na formação dos alunos nos cursos fundamental e médio, decorrente do pouco contato com o estudo dos fenômenos aleatórios, não lhes permite uma melhor interpretação da realidade que os cerca e a valorização da Probabilidade como ferramenta matemática adequada para descrever quantitativamente grande parte dos fenômenos com que nos deparamos em nosso cotidiano. Os alunos dos cursos de Engenharia, em geral, carentes dessa intuição estatística não têm uma visão clara da importância desse ramo do conhecimento em sua área de interesse na Engenharia. Conseqüentemente, temos notado que muitos desses alunos demonstram desinteresse no estudo de Probabilidade e Estatística, considerando o assunto difícil e sem importância em sua futura atividade profissional. E, em decorrência dessa pouca importância dada ao assunto, constatamos um baixo aproveitamento e um alto índice de reprovação na disciplina.

Por outro lado, em geral, os cursos de Probabilidade e Estatística para alunos de Engenharia seguem a prática tradicional de aulas expositivas, nas quais os assuntos são organizados pelo professor e desenvolvidos a partir de sua justificção matemática e da apresentação de exemplos idealizados, muitas vezes distantes da realidade do aluno. Com essa prática o aluno permanece em uma posição passiva a qual não lhe permite associar o seu conhecimento prévio com o novo e, dessa forma, os cursos são centrados mais nas técnicas do que na construção dos significados dos conceitos.

A concepção de Estatística predominante entre os Professores que ministram os cursos introdutórios dessa disciplina no ensino superior é evidenciada pelos livros didáticos por eles utilizados em sala de aula.

Para comprovar que o ensino da Estatística nos cursos de Engenharia é feito de uma forma predominantemente determinística priorizando-se as técnicas matemáticas, em relação ao entendimento dos fatos da realidade em estudo cujo comportamento é intrinsecamente

estocástico, faremos um estudo dos principais livros didáticos utilizados pelos professores em sala de aula.

3.3.2 Análise dos livros didáticos

Para esse estudo, selecionamos 10 livros entre os mais vendidos pelas principais editoras de livros didáticos, cujos conteúdos correspondem aos assuntos ensinados nos cursos iniciais de Estatística, e que são indicados nas bibliografias básicas e utilizados nos cursos de Engenharia em nossas principais universidades.

Entendemos que o livro didático, assim como os demais materiais utilizados pelo professor, são indicadores importantes de sua concepção sobre a Estatística e, conseqüentemente, da sua forma de ação docente. A verificação de como os diversos livros didáticos encaram as novas tecnologias informacionais, os tópicos incluídos nos livros, assim como da forma de abordagem dos assuntos e a concepção filosófica que norteou a sua elaboração, nos permitirão construir um retrato da sala de aula e da pedagogia utilizada pelo professor.

Ressaltemos que com o estudo dos principais livros didáticos não pretendemos compará-los quanto à sua qualidade, indicando quais seriam os mais adequados. Pretendemos apenas, conforme já dito, considerar o tipo de abordagem utilizada por cada um deles como um indicador importante da prática docente predominante entre os professores dos cursos introdutórios de Estatística nos cursos superiores e eventualmente sugerir novas alternativas para os nossos procedimentos didáticos, os quais sejam mais condizentes com a nova concepção da Estatística e dos processos de aprendizagem.

Selecionamos para o estudo a seguinte relação dos principais livros didáticos com maior volume de vendas e que são mais utilizados nos cursos superiores de engenharia:

I - BARBETTA, P. A.; REIS, M. M.; BORNIA, A. C.: Estatística para cursos de Engenharia e Informática. São Paulo: Atlas, 2004.

II - BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A.: Estatística Básica. São Paulo: Saraiva, 2002.

III - COSTA NETO, P. L. O.: Estatística. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

IV - DOWNING, D.; CLARK J.: Estatística Aplicada. São Paulo: Saraiva, 2000.

V - FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A.: Curso de Estatística. São Paulo: Atlas, 1996.

VI - LARSON, R.; FARBER, B.: Estatística Aplicada. São Paulo: Prentice Hall, 2004.

VII - MAGALHÃES, M. N.; PEDROSO DE LIMA, A. C.: Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2004.

VIII - MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C.: Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2003.

IX - MORETTIN, L. G.: Estatística Básica. São Paulo: Makron Books, 1999.

X - SPIEGEL, M. R.: Estatística. São Paulo: Makron Books, 1993.

Os conteúdos desses livros selecionados constam do apêndice do presente trabalho. No estudo de cada um dos livros selecionados, para classificá-los de acordo com a concepção filosófica predominante que norteou a sua elaboração, consideraremos os seguintes aspectos:

Quanto às novas tecnologias informacionais, verificaremos se os livros utilizam como ferramenta tecnológica algum dos programas estatísticos disponíveis, ou se exigem como recurso computacional apenas uma calculadora científica simples.

Verificaremos, também, se os livros selecionados incluem os seguintes tópicos, que julgamos importantes em um curso introdutório à estatística: análise exploratória de dados, estudo da variabilidade amostral, planejamento experimental e teoria da decisão.

Com relação à forma de abordagem dos assuntos, analisaremos os seguintes aspectos:

1º) Como são introduzidos os novos conceitos: se de forma contextualizada através do estudo de situações reais, facilitando o processo de construção do conhecimento pelo aluno;

ou, se através de definições formais, objetivando-se a transmissão de um conhecimento acabado.

2º) Como são apresentados os exemplos e os problemas propostos: se de forma contextualizada na realidade do aluno, valorizando-se a interpretação dos conceitos; ou, se através de situações idealizadas, priorizando-se a aplicação de fórmulas e técnicas matemáticas, com pouco significado para o aluno.

3º) Se são incentivados os estudos de caso e os projetos para serem desenvolvidos em grupos de alunos.

Consideramos que a análise dos livros didáticos selecionados, com relação ao uso de programas estatísticos para computador, à inclusão dos tópicos indicados e à forma de abordagem dos conteúdos é um indicador da concepção filosófica predominante que norteou a elaboração do livro: aleatória (A) ou determinística (D).

Os resultados da análise dos livros selecionados estão indicados no quadro seguinte, onde N indica predominantemente Não e S predominantemente Sim.

Análise dos livros didáticos

	ferramenta tecnológica	Inclusão dos tópicos				Forma de abordagem dos conteúdos			Concepção filosófica predominante
Livro	Utilização de programas estatísticos	Análise exploratória de dados	Variabilidade amostral	Planejamento experimental	Teoria da decisão	Utilização de situações reais	Valorização dos conceitos	Utilização de estudos de casos	Aleatória ou determinística
I	N	S	S	S	N	S	N	N	D
II	S	S	S	N	N	S	S	N	A
III	N	N	N	N	N	N	N	N	D
IV	N	N	N	N	S	N	N	N	D
V	N	N	N	N	N	N	N	N	D
VI	S	S	S	N	N	S	S	S	A
VII	N	S	N	N	N	N	N	N	D
VIII	S	S	S	S	N	S	S	N	A
IX	N	N	N	N	N	N	N	N	D
X	N	N	N	S	N	N	N	N	D
Totais	3 S e 7 N	5 S e 5 N	4 S e 6 N	3 S e 7 N	1 S e 9 N	4 S e 6 N	3 S e 7 N	1 S e 9 N	3 A e 7 D

Apresentaremos, em seguida, a análise de cada um dos livros selecionados:

Livro I

O livro, dirigido especialmente aos estudantes de Engenharia e Informática, embora não utilize um programa estatístico específico apresenta e interpreta resultados obtidos com o auxílio do computador e propõe problemas para serem resolvidos utilizando pacotes estatísticos. O texto discute o planejamento experimental e a variabilidade amostral, além de apresentar as técnicas de análise exploratória de dados e de procurar ilustrar os conceitos e as técnicas estatísticas com exemplos e problemas contextualizados nas áreas de interesse dos alunos.

No entanto, apesar do livro procurar um equilíbrio entre as técnicas e os significados dos conceitos, ele decorre de uma concepção determinística da realidade, não se discutindo a questão filosófica subjacente às técnicas e conceitos estatísticos. Isso pode ser constatado na omissão da probabilidade subjetiva ao se discutir o conceito de probabilidade, assim como na inexistência de referência à incorporação da informação a priori para a realização das inferências pela estatística Bayesiana.

Livro II

O livro tem a preocupação em discutir as questões de ordem epistemológica relacionadas ao conceito de probabilidade e à realização da inferência estatística. Assim, no estudo da teoria das probabilidades apresenta-se as várias maneiras de se atribuir probabilidades aos eventos, discutindo-se inclusive a probabilidade subjetiva. Da mesma forma, na estimação de parâmetros são discutidas as idéias da inferência Bayesiana.

O livro procura ainda valorizar o estudo da componente aleatória dos fenômenos analisados, mantendo o equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios no ensino da Estatística, apresentando juntamente com o formalismo matemático e as técnicas, os significados dos conceitos ligados aos fatos da realidade.

Dessa forma, apresentam-se vários exemplos de utilização de programas computacionais, discutem-se amplamente a análise exploratória de dados, assim como a variabilidade amostral.

Livro III

O livro é um texto que segue uma linha tradicional baseada em uma concepção predominantemente determinística da realidade. Essa opção fica evidenciada nas afirmações abaixo, constantes do prefácio à segunda edição lançada em 2001 e que ocorreu 25 anos após o lançamento original do livro.

Resistimos à tentação de ancorar o texto a algum software estatístico, deixando essa opção a cargo de cada leitor. ... A razão porque o livro sobreviveu durante todo esse longo período e pode ser reeditado sem grandes mudanças deve-se ao fato de ser ele um texto básico em Estatística, contendo conceitos e técnicas já consagrados, que formam o alicerce para outros estudos mais sofisticados nesse campo.

De acordo com essa concepção, apresentam-se os conceitos e as técnicas estatísticas como um conhecimento acabado, priorizando-se o rigor matemático e as técnicas computacionais em relação à interpretação dos conceitos e à discussão dos fatos da realidade a eles associados.

Livro IV

O livro pretende apresentar os conceitos e métodos estatísticos e fazer com que o leitor adquira prática na realização de cálculos estatísticos, para que possa aplicá-los na análise de dados, conforme é destacado em seu prefácio:

Neste livro o estudante verá como aplicar métodos estatísticos à análise de dados. O capítulo 1 relaciona algumas situações em que esses métodos constituem instrumento valioso para a tomada de decisões. Abordaremos muitas técnicas estatísticas com exemplos de cálculos e interpretações.

O aprendizado de estatística exige prática. Cada capítulo começa com uma lista de termos chaves, seguidos de definições. O livro contém 737 questões de discussão e 275 exercícios, distribuídos no final dos capítulos. As questões de discussão levam o leitor a meditar sobre os conceitos que acaba de aprender e a ampliar o conhecimento das aplicações desses conceitos.

O objetivo principal é a transmissão de técnicas estatísticas a serem aplicadas à análise de dados. Dessa forma, apesar de apresentar as idéias básicas da teoria da decisão, o livro prioriza as técnicas aos significados dos conceitos, seguindo uma filosofia predominantemente determinística. Não são utilizados programas computacionais, assim como não são tratados tópicos tais como a análise estatística de dados, a variação amostral e o delineamento experimental.

Livro V:

O livro apresenta o conteúdo de Probabilidade e Estatística utilizando o rigor e o formalismo da linguagem matemática, em geral sem a devida preocupação com o contexto e com o significado dos conceitos.

Os autores destacam no prefácio:

Cada capítulo inicia-se com uma exposição objetiva do assunto indicado, solução de exemplos e proposição de exercícios cujas respostas se encontram no final do livro.

Verificamos, portanto, que não existe a preocupação de se facilitar a apreensão dos significados dos conceitos, iniciando-se a apresentação dos conteúdos através de situações concretas contextualizadas, para somente em seguida se apresentar a exposição objetiva do assunto através do formalismo matemático.

Não são discutidos os aspectos filosóficos dos conceitos de probabilidade, tais como a probabilidade subjetiva, a incorporação da informação a priori no teorema de Bayes, assim como as idéias de média, mediana e de outras medidas estatísticas, destacando-se apenas o aspecto computacional, determinístico matemático.

Dessa forma, o livro pode ser classificado como predominantemente determinista, praticamente omitindo-se o aspecto aleatório presente nos experimentos.

Livro VI:

Trata-se de um livro recente, editado em língua portuguesa no ano de 2004 e que enfatiza principalmente os aspectos aleatórios dos conceitos apresentados.

Os diversos conteúdos são sempre precedidos dos objetivos que se pretende alcançar e quase sempre de exemplos contextualizados nas várias áreas do conhecimento, sempre que possível utilizando-se dados reais.

Utilizando os vários tipos de ferramentas computacionais disponíveis, o livro enfatiza a análise exploratória de dados, atribuindo grande importância à sua apresentação gráfica e dedicando bastante atenção aos significados dos conceitos. Assim, por exemplo, na definição de probabilidade aborda-se as várias interpretações possíveis, incluindo-se a probabilidade subjetiva.

São apresentados vários estudos de caso com dados reais das diversas áreas do conhecimento, visando-se apresentar aplicações da Estatística na vida real que sejam representativas para os estudantes e possam auxiliá-los no entendimento e na aplicação dos conceitos apresentados.

Verificamos, portanto, que o livro foi elaborado a partir de uma concepção predominantemente aleatória da realidade, valorizando-se, juntamente com as técnicas as idéias dos conceitos e o entendimento dos significados dos fenômenos estocásticos.

Livro VII

O livro segue uma orientação determinística. Embora se reconheça a importância da análise exploratória de dados e da computação na Estatística, o livro não apresenta nenhum programa estatístico para computador, ressaltando apenas que os estudantes poderão utilizar algum dos programas disponíveis no mercado.

Em geral não se apresenta os assuntos a partir de situações reais contextualizadas que poderiam auxiliar na motivação dos alunos. Ao contrário, prioriza-se o rigor matemático apresentando-se uma teoria formalizada de forma acabada, seguida de exemplos de aplicação.

Dessa forma, se atribui maior importância à aplicação das técnicas do que às idéias dos procedimentos adotados. Verificamos, por exemplo, que não se discute as várias interpretações do conceito de probabilidade, nem a incorporação da informação a priori para a realização de inferências na estatística Bayesiana.

Esse tipo de abordagem dos conteúdos pode ser considerado como decorrente de uma concepção predominantemente determinística da realidade.

Livro VIII

O livro, dirigido a estudantes de cursos de graduação em engenharia, procura não seguir um enfoque determinístico, de valorização do formalismo matemático e das técnicas computacionais. Ao contrário, pretende-se que através de uma aprendizagem significativa o futuro engenheiro seja capaz de aplicar os conhecimentos estatísticos em sua atividade profissional, conforme é destacado em seu prefácio:

É nossa intenção dar ao leitor não a teoria matemática, mas um entendimento da metodologia e como aplicá-la. ...Queremos que os estudantes se tornem familiarizados com o modo como essas técnicas são usadas para resolver problemas de engenharia do mundo real e conseguir algum conhecimento dos conceitos por trás deles. Damos um desenvolvimento lógico e heurístico dos procedimentos, em vez de um desenvolvimento teórico formal.

Vemos, então, que há uma valorização do entendimento dos conceitos e da capacidade de aplicá-los a situações reais na engenharia. Dessa forma atribui-se grande importância aos significados dos conceitos subjacentes às técnicas.

Com esse objetivo, o livro utiliza várias ferramentas computacionais e inclui tópicos como a análise e apresentação de dados, valorizando a apresentação gráfica, o planejamento experimental e a variação amostral. Além disso apresenta exemplos e exercícios baseados em engenharia com grande quantidade de dados reais. A preocupação com o entendimento do processo de inferência estatística é ressaltada na apresentação da abordagem Bayesiana para estimação.

Livro IX

O texto que é composto de dois volumes, o primeiro relativo à Probabilidade e o segundo abordando a Inferência, segue uma filosofia predominantemente determinística. Os conteúdos são em geral desenvolvidos a partir de definições matemáticas, seguidas de exemplos idealizados, conforme é destacado no prefácio:

Procurei seguir a mesma filosofia usada no primeiro volume, apresentando os conteúdos de maneira clara e bem objetiva, com exemplos de aplicações para facilitar o entendimento dos assuntos pelo leitor. Apresento também exercícios resolvidos e exercícios propostos no final dos capítulos, na grande maioria dos casos.

Há uma valorização da apresentação formal, com a preocupação de se transmitir um conhecimento acabado e estruturado, ao invés de se procurar apresentar os conteúdos através de exemplos contextualizados, facilitando-se a apreensão pelo aluno dos significados dos conceitos envolvidos.

Livro X

É um livro em que prevalece o aspecto determinístico, enfatizando-se as técnicas sem a devida preocupação com as idéias dos conceitos e dos métodos apresentados. O livro, além de ser um texto para um curso regular de Estatística, tem como objetivo ser um manual de consulta, conforme é explicado em seu prefácio:

A finalidade deste livro é apresentar uma introdução aos princípios gerais da Estatística que serão úteis a todos os indivíduos, qualquer que seja o seu campo de especialização. Foi planejado para ser utilizado para suplementar os livros texto-padrão usuais ou como livro texto de um curso regular de Estatística. Pode ser também de valor considerável como livro de consulta para aqueles que presentemente se empenham nas aplicações da Estatística aos seus problemas especiais de pesquisa.

O livro não utiliza programas estatísticos, dificultando a análise de dados reais, não apresenta a análise exploratória de dados, assim como não discute as várias interpretações do conceito de probabilidade, os conceitos das medidas estatísticas e as idéias relativas à inferência estatística.

Dessa forma prioriza-se o aspecto matemático, apresentando-se os conteúdos de forma estruturada, valorizando-se as técnicas em relação à construção dos conceitos e ao entendimento da realidade à qual serão aplicados os métodos estatísticos.

As informações obtidas através da análise dos principais livros didáticos utilizados em sala de aula pelos professores de Probabilidade e Estatística nos cursos de Engenharia, que indicam a sua concepção sobre a Estatística e conseqüentemente a sua conduta docente, estão resumidas nos gráficos apresentados em seguida.

Gráfico 1

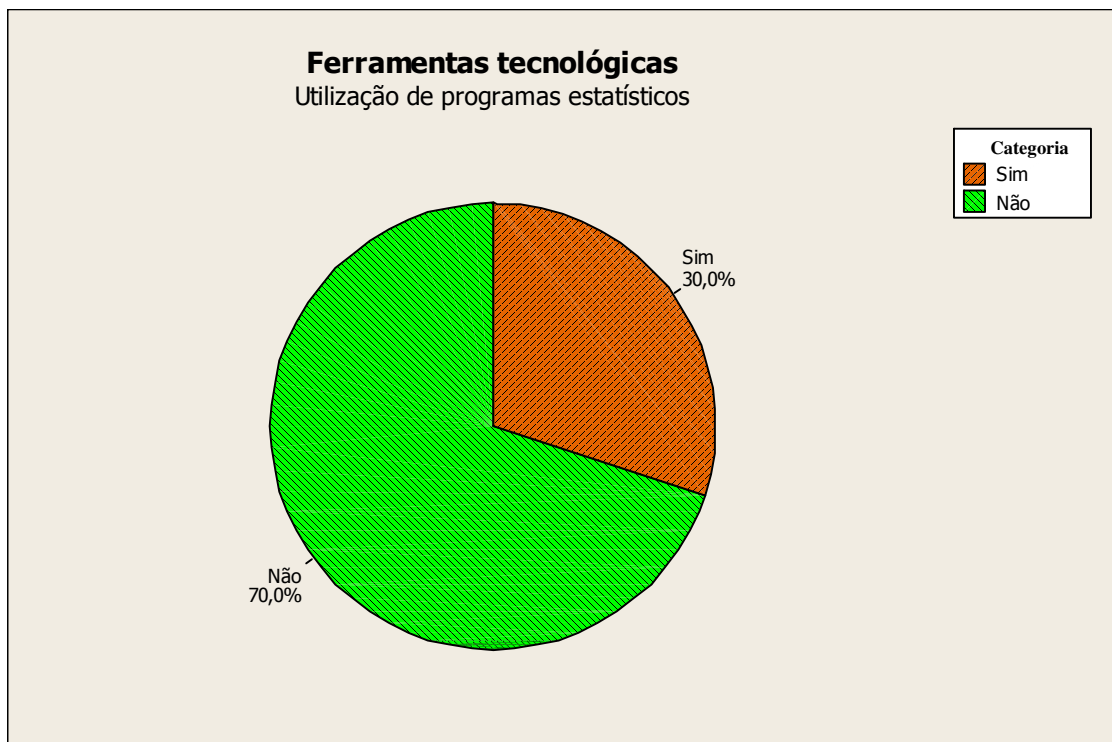


Gráfico 2

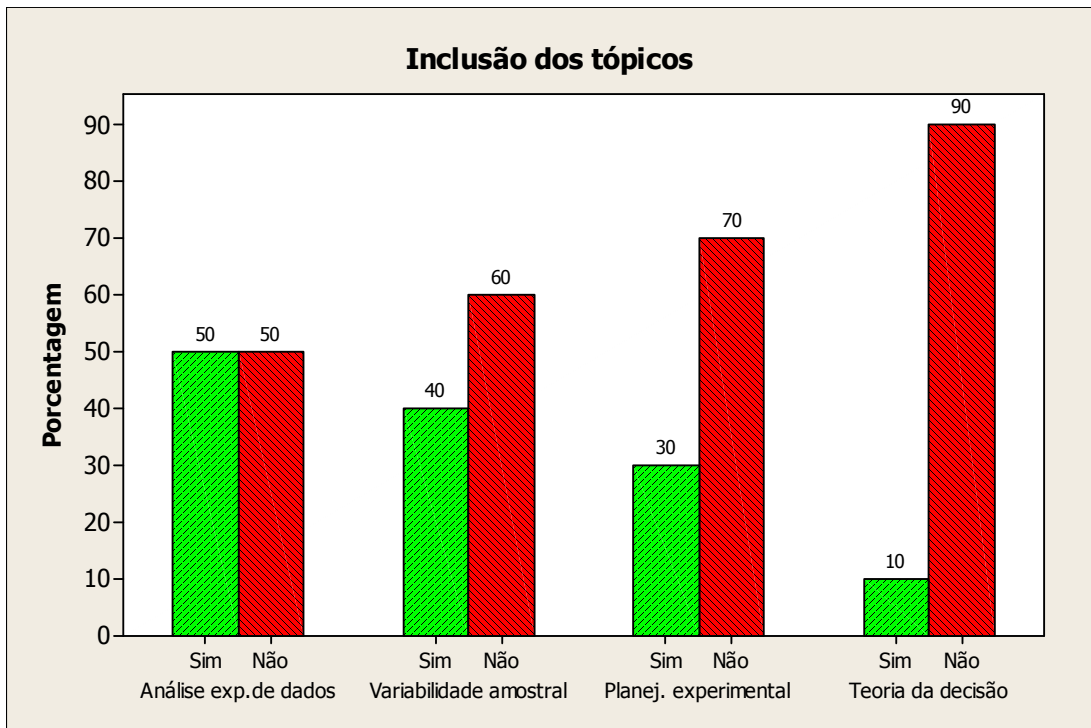


Gráfico 3

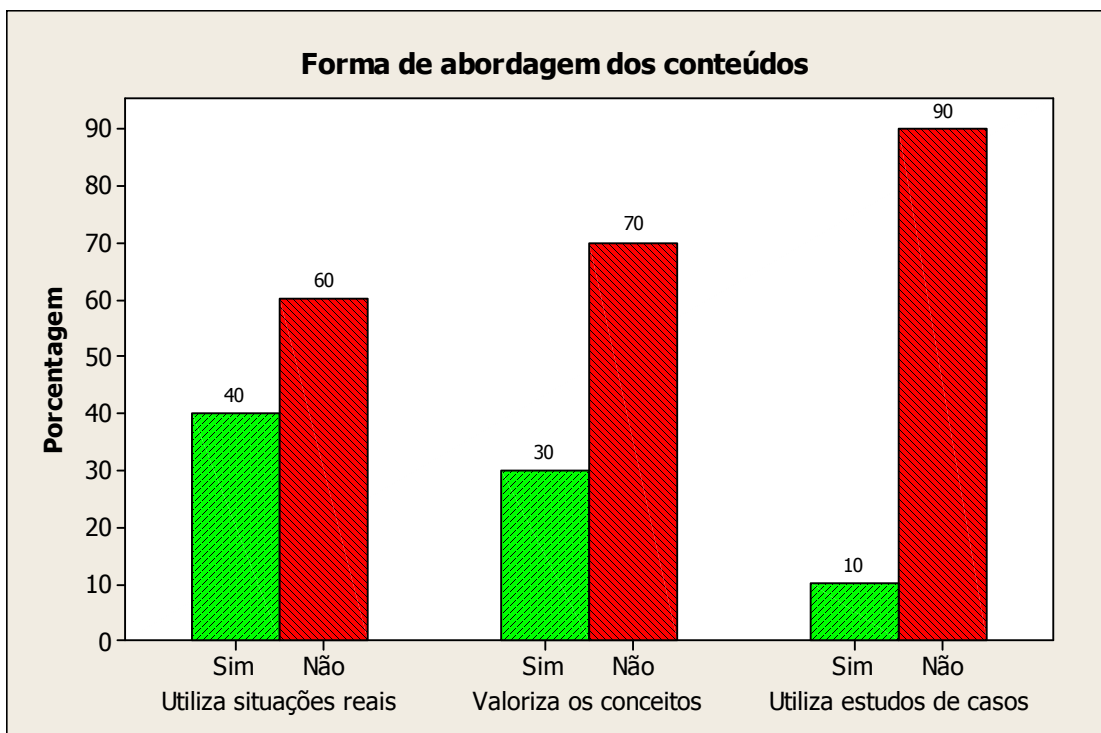
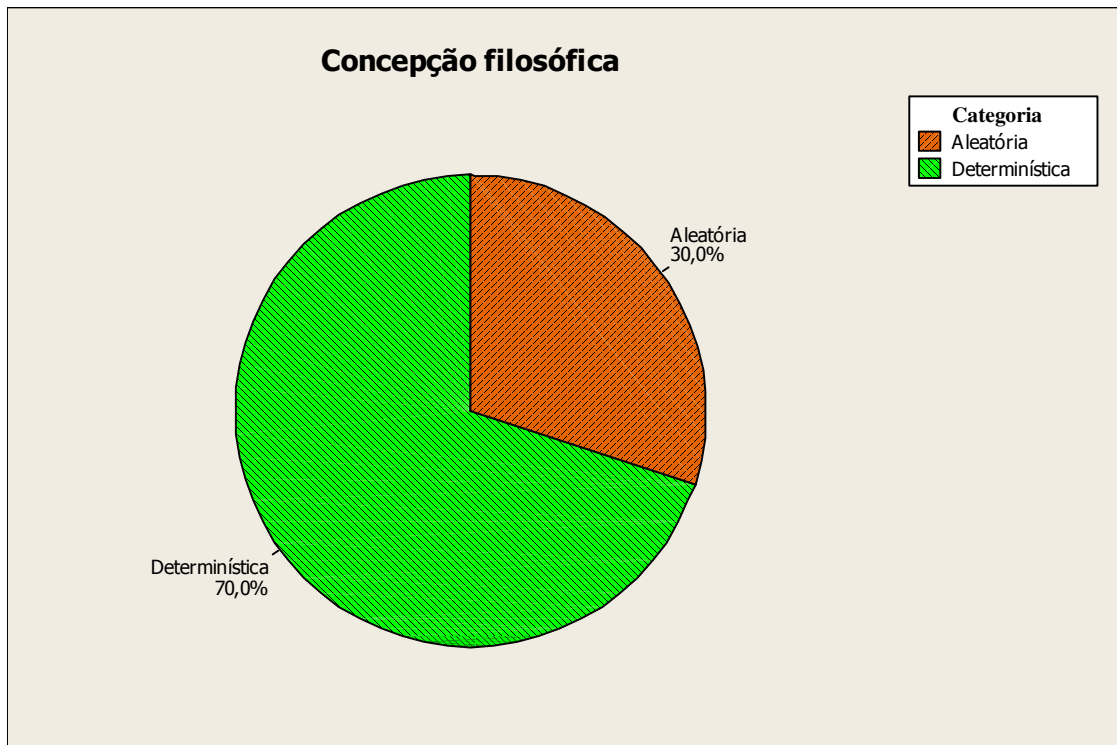


Gráfico 4



Verificamos portanto, através da análise dos livros didáticos utilizados pelos professores de Probabilidade e Estatística, que, excetuando-se o livro II e os livros VI e VIII, que são traduções recentes (de 2003 e 2004) de textos escritos por professores de universidades dos Estados Unidos da América do Norte, todos os demais são baseados em uma concepção predominantemente determinística da realidade.

Constatamos, dessa forma, que apenas 30% dos livros analisados baseiam-se em uma concepção predominantemente aleatória da realidade, concluindo-se que a grande maioria dos professores de Probabilidade e Estatística nos cursos de engenharia adotam uma concepção determinística da realidade. Embora alguns livros mais recentes já estejam dedicando maior atenção aos significados dos conceitos e procurando manter um equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios no ensino da Estatística, em geral, segue-se uma linha tradicional enfatizando-se os aspectos matemáticos e as técnicas correspondentes.

Nessa concepção priorizam-se conteúdos e adotam-se formas de abordagens dos assuntos que destacam os aspectos determinísticos dos fenômenos aleatórios, valorizando-se o formalismo matemático e as técnicas em detrimento à interpretação dos fenômenos estudados.

Quanto ao uso de ferramentas tecnológicas, pudemos verificar que apenas 30% dos livros analisados utilizam programas estatísticos para computador, podendo trabalhar com situações reais contendo grandes volumes de dados.

Constatamos, ainda, que apenas 50% dos livros analisados tratam da análise exploratória de dados, poucos abordam a variabilidade amostral e o planejamento experimental e apenas um deles apresenta a teoria da decisão. Consideramos que a inclusão desses tópicos poderia facilitar o entendimento dos fenômenos aleatórios encontrados na vida real e a aplicação dos métodos estatísticos às diversas áreas da engenharia.

Com relação à forma de abordagem dos conteúdos verificamos que a grande maioria dos livros analisados não valoriza o estudo de situações reais contextualizadas, o estudo de casos e a interpretação dos conceitos, ao contrário, apresentam-se definições formais e situações idealizadas, priorizando-se o aspecto matemático e a aplicação das técnicas em relação à construção dos significados dos conceitos necessários ao entendimento da realidade.

3.4 Elementos para uma nova prática: o construtivismo

No estudo da natureza dos processos cognitivos, na concepção construtivista do conhecimento, este é algo que se constrói através de conexões com o conhecimento já adquirido, por meio de ações e interações com o meio. Para que a aprendizagem seja significativa, o ensino deve estar centrado no aluno. No processo ensino aprendizagem cabe ao professor criar condições que ajudem o aluno a aprender, atuando como orientador e facilitador da aprendizagem do aluno.

Então, de acordo com a perspectiva construtivista do conhecimento, para desenvolver o pensamento estocástico o aluno deverá vivenciar situações concretas que lhe permitam construir suas próprias intuições sobre os conceitos estocásticos, através da interação de suas

noções subjetivas com esses conceitos. Faremos então, uma breve apresentação do construtivismo e de sua aplicação no ensino da Estatística.

O construtivismo como teoria de aprendizagem teve sua origem na psicologia genética do conhecimento de Jean Piaget e considera que o desenvolvimento da inteligência e das estruturas cognitivas é de natureza construtivista, isto é, constrói-se o conhecimento de modo ativo, através da interação com o meio e da organização das próprias estruturas mentais. No construtivismo a aprendizagem é vista como um processo de construção do conhecimento e o ensino como uma ajuda a esse processo de construção.

O construtivismo, como a sua própria designação indica, baseia-se na metáfora da construção na qual se descreve a compreensão como a construção de estruturas mentais, através da acomodação da estrutura existente às novas peças de conhecimento recebidas, de acordo com o primeiro princípio do construtivismo: *O conhecimento não é recebido passivamente pelo sujeito cognitivo, mas sim ativamente construído.*

Existem diversas formas de construtivismo, sendo as principais: o construtivismo trivial, o construtivismo radical e o construtivismo social.

O construtivismo trivial combina o primeiro princípio do construtivismo de que todo conhecimento pessoal se constrói por cada indivíduo, com a metáfora da mente como um computador. Segundo esta metáfora o funcionamento da mente se assemelha a um computador, onde a cognição é compreendida como processamento de informação, organizando a memorização e a recuperação de informação através de diversas rotinas como ocorre em um computador eletrônico.

A concepção de mundo associada ao construtivismo trivial é a da mecânica clássica newtoniana, de um espaço absoluto, determinístico e previsível através de leis matemáticas exatas. Na metáfora da mente como um computador, a informação ou o conhecimento é recebido pelo sujeito cognitivo de forma pré-constituída e qualquer resposta ou elaboração se constrói sobre ela. Isto não é um processo recursivo de construção, pois considera, ao contrário a existência de um conhecimento objetivo pré-existente. Segundo Ernest (1994) é difícil coexistirem esses aspectos duais dessa epistemologia:

Por um lado, todo conhecimento individual é construído. Por outro lado, existe um domínio de conhecimento objetivo, que por exemplo, incluiria as verdades da matemática e os fatos sobre o mundo. Mas como se pode conhecer tal conhecimento por qualquer indivíduo, se seu conhecimento é uma construção pessoal? ... Isto significa que o conhecimento se constrói para se adaptar ao mundo, ou às verdades eternas da matemática, e não como uma construção recursiva baseada sobre construções prévias, que satisfazem restrições internas.

O *construtivismo radical*, por sua vez, além de basear-se no primeiro princípio do construtivismo de que o conhecimento é ativamente construído, baseia-se também no segundo princípio seguinte: *A função da cognição é adaptativa e serve à organização do mundo experimental.*

O construtivismo radical não faz nenhuma suposição sobre a existência do mundo atrás do domínio subjetivo da experiência, conforme nos afirma Ernest (1994):

Como seu nome implica, a teoria da aprendizagem é radicalmente construtivista, todo conhecimento se constrói pelo indivíduo sobre a base de seus processos cognitivos em diálogo com o mundo experimental.

Finalmente, o *construtivismo social* considera que não se constrói o conhecimento individualmente, e sim que ele é socialmente construído. As pessoas são formadas mediante suas interações com as demais e a metáfora correspondente é a das pessoas em conversação.

A partir dos trabalhos iniciais de Vygotsky, o construtivismo social considera que a construção dos significados se realiza através da linguagem, conforme destaca Ernest (1994):

Reconhece-se cada vez mais que uma grande parte da instrução e da aprendizagem ocorre diretamente por meio da linguagem. Inclusive a aprendizagem manipulativa e enativa, enfatizada por Piaget e Bruner, tem lugar em um contexto social de significado e é mediada de algum modo pela linguagem e as interpretações associadas socialmente negociadas.

Dessa forma, o construtivismo social veio complementar a contribuição pessoal do indivíduo na construção do conhecimento, com a necessária interação social, conforme é afirmado por Sierpinska e Lerman (1996):

Ainda que as compreensões individuais dos professores e estudantes contribuam na elaboração dos significados matemáticos característicos da cultura de uma dada classe, pode ocorrer que não seja possível atribuir a autoria de um significado a alguém em particular. Os significados podem ser elaborados por meio de negociações pelas quais o grupo chegue a estar de acordo sobre certas convenções nas interpretações dos signos, situações e condutas. O resultado final das negociações tem propriedades emergentes: pela interação, as contribuições individuais podem acrescentar algo sobre o qual ninguém em particular havia pensado ou antecipado.

De acordo com construtivismo social, considerando-se que a aprendizagem e o conhecimento são o resultado de um processo social, devemos procurar promover a participação ativa do aluno no processo ensino aprendizagem. A partir dessa visão, acreditamos que a construção dos significados dos conceitos envolvidos no ensino da Estatística e a interpretação da componente aleatória dos fenômenos em estudo, cuja importância para o entendimento da realidade foi ressaltada no capítulo 2 do presente trabalho, podem ser facilitados partindo-se de exemplos contextualizados e com significado

para os alunos, e de pequenos projetos em suas áreas de interesse a serem realizados em grupos, privilegiando-se a análise de dados experimentais com o auxílio do computador.

Dessa forma estaremos estabelecendo um equilíbrio mais adequado entre os aspectos determinísticos e aleatórios dos fenômenos em estudo, entre a abordagem matemática e o seu estudo empírico e entre a aplicação das técnicas estatísticas e o desenvolvimento no aluno do pensamento estocástico.

3.5 Uma nova orientação curricular

Conforme já destacamos, os antigos cursos de introdução à Estatística nos cursos superiores eram totalmente baseados na inferência probabilística, em que os estudantes realizavam procedimentos específicos para obter respostas a questões bem definidas sob a suposição de algumas restrições. Nós sugerimos, como Moore (1997), que um primeiro curso de Estatística deverá oferecer uma introdução mais balanceada de análise e obtenção de dados e inferência. Uma análise exploratória de dados, planejamento e obtenção de dados e o uso de ferramentas computacionais, deverão substituir os métodos tradicionais de cálculos estatísticos com a aplicação automática de fórmulas.

O comitê da American Statistical Association (ASA) e a Mathematical Association of América (MAA) aprovaram a seguinte orientação curricular para um moderno curso introdutório de Estatística:

1. Enfatizar os elementos do pensamento estatístico

- (a) a necessidade dos dados
- (b) a importância da obtenção dos dados
- (c) a onipresença da variabilidade
- (d) a medida e modelagem da variabilidade

2. Incorporar mais dados e conceitos, menos receitas e repetições. Sempre que possível, utilizar cálculos automáticos e gráficos

- (a) utilizar, sempre que possível, dados reais

- (b) enfatizar os conceitos estatísticos
- (c) utilizar os recursos computacionais ao invés de receitas computacionais
- (d) tratar as derivações formais como de importância secundária

3. Encorajar uma aprendizagem ativa, através das seguintes alternativas à aula expositiva:

- (a) discussão e resolução de problemas em grupos
- (b) laboratório de exercícios
- (c) demonstrações baseadas em simulações com dados
- (d) apresentações orais e escritas
- (e) projetos em grupos ou individuais.

A importância de enfatizar os conceitos foi destacada por Moore (1992):

A Estatística tem o seu próprio significado, seus próprios e distintos conceitos e modos de raciocínio. Este seria o coração do ensino da Estatística para iniciantes de qualquer nível de sofisticação matemática.

Consideramos essencial a incorporação nos cursos das calculadoras eletrônicas e dos programas estatísticos. Após a realização manual dos cálculos estatísticos, tais como média e desvio padrão, através de alguns cálculos simples para a assimilação dos conceitos, a utilização de calculadoras para a realização dos cálculos estatísticos e dos gráficos permite-nos trabalhar com dados reais e dispensar mais atenção às técnicas de análise empregadas e à interpretação dos resultados obtidos, a exemplo do que ocorre na utilização prática da Estatística.

Podemos utilizar menos a linguagem matemática formal da probabilidade e dar mais ênfase ao estudo da variabilidade amostral. A inferência estatística pode ser feita substituindo-se as demonstrações matemáticas das propriedades dos estimadores, pelo estudo de suas distribuições amostrais, obtidas através de simulações com ferramentas de análise de dados que permitem uma melhor compreensão do conceito dos intervalos de confiança.

O trabalho em grupos deve ser incentivado para que os alunos desenvolvam a habilidade de discutir as idéias estatísticas e de participar de debates com os componentes de sua equipe. Muitos estudantes, por não estarem habituados, têm dificuldade para participar de trabalhos em grupos, mas devemos incentivá-los lembrando-os de que isso é o que ocorre na vida profissional e organizarmos tarefas ou projetos para que sejam executados em grupos,

propiciando aos estudantes o treinamento na discussão de suas idéias com os demais elementos do grupo.

A importância do trabalho em equipe para o sucesso da empresa foi destacada por um executivo da Motorola em seu pronunciamento para um grupo de estudantes universitários:

Todo nosso trabalho é feito corporativamente em equipes. Por que vocês insistem em enviar-nos estudantes cuja única experiência é individual e competitiva?

Solicitar os alunos a trabalharem cooperativamente e a comunicarem suas descobertas oralmente e por escrito ajuda o aprendizado, conforme nos lembra Moore (1997), que apresenta o seguinte resumo destacando a sinergia existente entre o conteúdo, a pedagogia e a tecnologia.

- **Conteúdo \Leftrightarrow Pedagogia**
 - Análise de dados \Leftrightarrow Mãos à obra
 - Estatística na prática \Leftrightarrow Comunicação, cooperação
 - Mais conceitos \Leftrightarrow Menos provas
- **Pedagogia \Leftrightarrow Tecnologia**
 - Visualização \Leftrightarrow Gráficos automáticos
 - Resolução de problemas \Leftrightarrow Cálculos automáticos
 - Aprendizagem ativa \Leftrightarrow Multimídia
- **Tecnologia \Leftrightarrow Conteúdo**
 - Computação \Leftrightarrow Análise de dados, diagnósticos
 - Automação \Leftrightarrow Mais conceitos
 - Simulação \Leftrightarrow Menos provas

A tecnologia pode auxiliar na pedagogia, como por exemplo, na escolha de um modelo para um grande conjunto de dados. Podemos usar várias ferramentas para o diagnóstico, comparar vários modelos e ter possibilidade de chegar a soluções alternativas. A inclusão dos novos conteúdos em Estatística, tais como análise de dados e variação amostral reflete o uso intensivo da computação na prática estatística.

Moore (1997) destaca a importância do uso dos computadores no ensino da Estatística:

Bons programas estatísticos exigem dos estudantes grande atividade cognitiva, substituem procedimentos com algoritmos complexos por um simples comando, permitindo aos aprendizes se concentrarem no entendimento de alto nível.

Os computadores podem auxiliar os alunos, que entendem conceitualmente um assunto, a resolverem completamente um problema e a evitar que os mesmos se percam muitas vezes em cálculos complicados, chegando a soluções incorretas.

4 Conclusões

4.1 A busca conceitual do equilíbrio determinístico / aleatório

Na análise das concepções da realidade abordamos o par **determinístico / aleatório**, em decorrência de sua influência decisiva no ensino da Probabilidade e Estatística e concluímos que devemos repensar esse ensino, tendo-se em vista o restabelecimento do equilíbrio entre o estudo das componentes determinísticas e aleatória dos fenômenos observados.

Da mesma forma que destacamos a importância do par determinístico / aleatório para se alcançar um melhor entendimento da realidade, facilitando-se a construção dos significados dos conceitos estatísticos pelos alunos, encontramos no desenvolvimento do pensamento humano outros pares que foram fundamentais para a construção do conhecimento matemático, e para o entendimento da realidade, tais como os pares: **discreto / contínuo; finito / infinito e digital / analógico**.

O discreto e o contínuo surgiram na Matemática, respectivamente, a partir da necessidade de contar e medir. A Matemática discreta utiliza os números inteiros nos processos de contagem da análise combinatória, assim como nos métodos recursivos, enquanto que as grandezas contínuas são descritas através do conceito de função contínua. O estudo do par discreto / contínuo pode ser encontrado em Brolezzi (1996)

A noção de infinito, transcendendo ao finito, com as suas inúmeras implicações filosóficas e influências no entendimento da realidade física e no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral é apresentada por Santos (1995).

O vertiginoso progresso da eletrônica e da informática, por sua vez, propiciou a disseminação dos computadores e equipamentos digitais e nos introduziu na atual sociedade do conhecimento. Surgiu, então, a discussão sobre o novo par digital / analógico, associado, respectivamente, ao discreto, e ao contínuo; ao armazenamento e manipulação de informações

digitalizadas pelos computadores eletrônicos e aos processos de criação e interpretação das informações, pelos seres humanos. O estudo desse par pode ser encontrado em Tenório (1996).

Conforme pudemos constatar, prevalece entre os professores de Probabilidade e Estatística em nossos cursos de engenharia uma concepção determinística da realidade. Como consequência, em geral, esses professores priorizam em sua prática docente a abordagem matemática e a aplicação das técnicas, em relação à interpretação dos conceitos e ao entendimento da realidade a partir do reconhecimento da componente aleatória dos fenômenos em estudo.

A verificação desse desequilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios no ensino da estatística nos cursos de engenharia nos conduziu a uma nova prática docente, com a qual imaginamos que o desejado equilíbrio possa ser restaurado. Procuramos buscar o equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios dos fenômenos, entre a teoria e a prática, entre as técnicas e os significados dos conceitos, fazendo com que os alunos adquiram um sólido conhecimento teórico e sejam capazes de utilizar as técnicas estatísticas na análise de dados e na tomada de decisão. O desenvolvimento das aulas segundo uma abordagem balanceada, através da qual se promova um equilíbrio entre a formalização matemática, as técnicas computacionais, a compreensão conceitual e a tomada de decisão, pressupõe, a nosso ver, uma adequada compreensão da realidade, que foi objeto de análise do capítulo 2 do presente trabalho.

Para que isso possa ocorrer, o professor deve organizar situações de ensino que permitam ao aluno a apreensão dos significados dos conceitos, o desenvolvimento do pensamento estocástico e da habilidade de planejar e analisar experimentos, além da análise crítica necessária à interpretação de seus resultados, e à extração da informação contida nos dados, transformando-a em conhecimento novo a ser utilizado em suas respectivas áreas de interesse.

Constatamos, dessa forma, uma contradição no ensino da Estatística. Muitas vezes a Probabilidade e a Estatística, que têm como objetivo a explicação dos fenômenos aleatórios e o desenvolvimento de métodos de decisão em situações de incerteza, são apresentados como se fossem determinísticos. Reiteramos que essa flagrante contradição no ensino da Estatística decorre da existência de um desequilíbrio entre o par determinístico / aleatório na visão da realidade. A predominância da concepção determinística da realidade faz com que o ensino da

Estatística seja centrado nos modelos matemáticos e nas técnicas de cálculo numérico e não nos significados dos conceitos e na interpretação da componente aleatória dos fenômenos estudados.

Nos cursos tradicionais o aluno é pouco exposto a situações onde estão presentes a variação amostral e a discussão do raciocínio indutivo utilizado na inferência estatística. Em geral os cursos dispensam pouca atenção aos conceitos básicos de planos amostrais e de planejamento de experimentos, assim como à análise gráfica de dados, além de não utilizarem programas estatísticos para computadores.

Sendo a probabilidade um ramo da Matemática ela tem sido ensinada por matemáticos, em geral privilegiando-se a teoria axiomática da probabilidade, em detrimento da abordagem empírica dos conceitos envolvidos nos fenômenos probabilísticos. A Estatística, por sua vez, tendo seus fundamentos na Matemática também foi inicialmente apresentada como uma inferência probabilística baseada na Matemática. Sem as facilidades computacionais alcançadas com os atuais programas estatísticos disponíveis para computadores eletrônicos, os cursos eram excessivamente teóricos, enfatizando-se os aspectos matemáticos dos métodos estatísticos e a sua aplicação a situações idealizadas muitas vezes distantes da realidade dos alunos. Além disso, os cursos introdutórios à Estatística focalizavam principalmente a componente determinística dos fenômenos aleatórios, não se desenvolvendo no aluno o pensamento estocástico (probabilístico e estatístico).

A pouca familiaridade com as variações amostrais e com o cálculo empírico das probabilidades dos eventos a partir de suas frequências relativas, associados a uma formação totalmente determinística, faz com que as pessoas utilizem esse mesmo tipo de raciocínio determinístico para as afirmações estatísticas. Assim, por exemplo, podemos citar situações cômicas do tipo:

Um casal com quatro filhos sendo informado de que para cada cinco crianças que nascem no mundo uma é chinesa, decide não ter mais filhos para não aumentar a população de chineses.

Ou ainda, uma pessoa decide viajar em uma empresa aérea na qual ocorreu recentemente um acidente, a partir da informação de que nessa empresa ocorre, em média, um acidente a cada 100.000 vôos e, portanto, não deverá acontecer outro acidente nos próximos 100.000 vôos.

Da mesma forma constatamos, em sala de aula de cursos de engenharia, muitos alunos usando um raciocínio determinístico para interpretar fenômenos aleatórios. Assim por exemplo, a partir da informação de que em uma linha de fabricação de uma indústria o índice de peças defeituosas é de 2%, muitos alunos afirmam que em uma amostra de 100 dessas peças, com certeza, encontraremos duas peças defeituosas.

Essa visão equivocada das pessoas sobre os fenômenos aleatórios decorre, conforme já destacamos, de uma falta de compreensão do significado das medidas estatísticas e de uma escassa exposição a situações onde a variabilidade amostral esteja presente. Outro exemplo da falha de intuição na interpretação dos fenômenos aleatórios nos é apresentado por Branco (2000):

...uma dificuldade associada ao ensino das probabilidades resulta do conflito freqüentemente verificado entre as probabilidades de acontecimentos e a intuição que os estudantes e as demais pessoas têm dessas probabilidades e que refletem as suas experiências com o mundo à sua volta. Ilustra esse fato o conhecido problema das idades. Quando perguntamos aos alunos de uma classe com mais de 50 alunos se é grande ou pequena a probabilidade de haver pelo menos dois alunos na classe aniversariando no mesmo dia, geralmente os alunos respondem que a probabilidade é pequena, e no entanto, como é fácil deduzir, essa probabilidade é superior a 0,5 se o número de alunos é igual a 23 e é superior a 0,99 se o número de alunos é igual a 60 (admitindo-se que a amostra é aleatória). A falha de intuição deve resultar do fato de não ser freqüente conhecermos pessoas que aniversariam no mesmo dia que nós.

Para viabilizar a busca do desejado equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios da realidade no ensino da Estatística, são necessárias algumas ações relacionadas com a inclusão de tais aspectos na educação básica e com a formação de professores, de modo a se instaurar a nova prática docente. Algumas considerações serão apresentadas em seguida.

4.2 A necessidade da Estatística na Escola Básica

Para facilitar o desenvolvimento do pensamento estatístico no aluno seria desejável introduzir o ensino da Probabilidade e da Estatística já a partir do ensino fundamental, seguindo, dessa forma, a tendência mundial e a orientação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que prevêem o ensino do conhecimento estatístico, combinatório e probabilístico no terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. A apresentação da Probabilidade no ensino fundamental pode ainda valorizar o estudo da matemática discreta, muitas vezes relegada a um segundo plano, através da simulação de experimentos aleatórios envolvendo variáveis aleatórias discretas e da comparação dos resultados amostrais com os teóricos, obtidos a partir dos processos de contagem previstos pelo cálculo de probabilidades.

Embora deparemos em nosso cotidiano com inúmeras situações onde o acaso está presente, devido à concepção determinística da realidade predominante na educação e na sociedade em geral, procuram-se sempre explicações causais para os fenômenos aleatórios, diminuindo-se a importância do acaso no pensamento racional e científico. A antecipação da introdução do pensamento probabilístico já a partir do ensino fundamental se faz necessária para que o aluno possa adquirir uma correta intuição probabilística e ao ingressar no curso superior não chegue com uma intuição viciada sobre os fenômenos aleatórios decorrente de sua pequena familiaridade com as variações amostrais e com o estudo dos fenômenos aleatórios em geral.

Na sociedade do conhecimento na qual vivemos, o volume de informações a que temos acesso cresceu exponencialmente e muitas vezes temos que analisar grandes volumes de dados. Portanto, uma educação mais completa, para o exercício consciente da cidadania, exige que as nossas crianças e adolescentes tenham uma formação estatística que lhes permitam, entre outras coisas:

- desenvolver o seu raciocínio crítico na análise de dados
- interpretar gráficos, médias, índices e outras informações estatísticas
- utilizar a Estatística como um instrumento em outras disciplinas em que a aleatoriedade esteja presente.

A presença da Estatística no ensino fundamental exige que se faça um estudo sobre o raciocínio estocástico, para se identificar os mecanismos de aprendizagem e se promover um ensino bem sucedido dos conceitos básicos, tais como, a aleatoriedade, a probabilidade, a independência e a variabilidade amostral, conforme destaca Branco (2000):

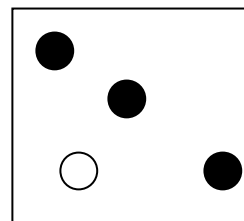
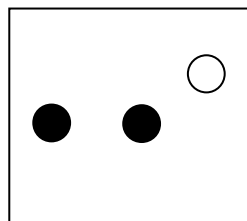
Fundamental para a compreensão do raciocínio típico da estatística é o conceito de distribuição de probabilidade. A grande dificuldade deste conceito é compreender como é que um modelo matemático caracterizado pela sua regularidade pode descrever o comportamento de observações independentes, isto é, como podemos conciliar independência com regularidade.

Sabemos que as crianças não aprendem apenas na escola através da educação formal, mas também nas suas experiências no meio familiar e social e que o seu raciocínio se modifica gradualmente a partir de suas interações com o mundo que as rodeiam.

Fischbein (1975) afirma que as crianças podem distinguir entre um fenômeno aleatório e um determinístico e fazer juízos probabilísticos antes dos 7 anos de idade. Sua conclusão baseia-se na conduta dessas crianças em jogos simples, nos quais elas são capazes de indicar o resultado de maior chance de ocorrência.

Batanero (2001) nos mostra que adolescentes a partir dos 12 ou 13 anos, e já a partir dos 10 anos, com ajuda de instrução, podem resolver problemas de cálculo de probabilidades, comparando razões de denominadores diferentes, como em atividades do seguinte tipo:

Na caixa A são colocadas 3 fichas pretas e 1 branca. Na caixa B são colocadas 2 fichas pretas e 1 branca, conforme o desenho seguinte:



Se você tem que retirar uma ficha preta para ganhar um prêmio, sem olhar dentro da caixa, qual caixa você escolheria? Assinale a resposta correta:

(a) A caixa A fornece maiores possibilidades de se obter uma ficha preta

(b) A caixa B fornece maiores possibilidades de se obter uma ficha preta

(c) As duas caixas fornecem a mesma possibilidade

(d) Não sei dizer.

Verifica-se, dessa forma, que a Probabilidade e a Estatística podem ser ensinadas às crianças desde o início de sua escolaridade, assim como a aritmética e a geometria, iniciando-se com os conceitos fundamentais sem que se tenha a preocupação de apresentar a teoria correspondente.

A dificuldade de se ensinar Estatística nos cursos superiores deve-se à questão filosófica de se encarar o aleatório, pois o aluno é formado em uma cultura determinista que é reforçada na escola e especialmente na sala de aula de Matemática. O aumento do conhecimento das dificuldades de aprendizagem e a possibilidade de uma formação adequada do professor permitirão que o ensino da Probabilidade e da Estatística sejam iniciados a partir do ensino fundamental, facilitando a superação da dificuldade atual.

4.3 A formação dos professores

Para que se possa desenvolver uma nova concepção da realidade onde o determinístico e o aleatório estejam sempre presentes e interajam continuamente e se compreenda a importância do conhecimento estocástico para o entendimento da realidade que nos cerca, é necessário que se crie uma nova mentalidade nos professores da disciplina, implantando-se programas adequados de formação de professores, organizados de modo a permitir uma maior compreensão do pensamento estocástico e a fornecer-lhes uma sólida formação no conhecimento estatístico e pedagógico.

Sabemos que o êxito de um processo educacional depende essencialmente da ação do professor em sala de aula, a qual é decorrente de suas concepções, crenças e formação. Portanto, para que se consiga implantar uma nova prática docente no ensino da Probabilidade e Estatística é fundamental que se dedique uma atenção especial à formação dos professores. A formação do professor de Probabilidade e Estatística não supõe apenas um sólido conhecimento das técnicas a serem ensinadas e do necessário conhecimento pedagógico, mas também do conhecimento histórico, teórico e conceitual sobre a Probabilidade e a Estatística, suas origens, significados e aplicações.

Os professores de Estatística em sua grande maioria provêm de cursos de formação em matemática, instruídos no raciocínio determinístico e com pouco contato com o pensamento estatístico, dificultando as mudanças nos métodos tradicionais de ensino da Probabilidade e Estatística. Conforme verificamos através da análise dos principais livros didáticos utilizados, em geral são abordados principalmente os aspectos técnicos dos conteúdos estatísticos, sem incluir as novas tecnologias informacionais, nem tópicos, tais como a teoria da decisão e as técnicas de amostragem, que permitiriam criar no aluno a intuição probabilística desejada. Os professores de Estatística, em geral, valorizam a aplicação das técnicas e a realização de cálculos sem dedicar muita ênfase à interpretação do problema, à análise crítica sobre a adequação do método e ao significado e aplicação dos conceitos estatísticos.

As profundas mudanças ocorridas na organização da sociedade nos últimos anos, com o surgimento dos novos meios de comunicação eletrônica nos obrigam a adotar novas práticas docentes em que a informação deixe de ser o mais importante, conforme é destacado por D'Ambrosio (1998):

A organização da sociedade e o modo e contexto geral como as nações se relacionam fazem com que nossos sistemas educacionais adquiram um sentido de universalidade distinto do que hoje prevalece. A informação que passa por eles talvez deixe de ser o mais importante, pois ela vem carregada de obsolescência e preconceitos inevitáveis, embutidos na formação do professor e na sua própria ação. O conceito de reciclagem e atualização, como uma medida a aliviar essa obsolescência, é absolutamente insuficiente e não atinge esse objetivo. Faz-se necessário um outro professor, formado de outra maneira e com a capacidade de renovar

seus conhecimentos como parte integrante de sua preparação profissional. Além disso, um professor conscientizado de que seu papel tem sua ação bem mais ampliada é certamente mais empolgante do que um mero transmissor de informações na função de professor.

A compreensão do conhecimento estocástico exige uma ultrapassagem da lógica determinística causal do verdadeiro e falso, do sim e do não. A peculiar natureza epistemológica do conhecimento estocástico exige uma forma diferente de pensar, ao se admitir a existência da incerteza na complexidade de uma causalidade múltipla.

As noções básicas de aleatoriedade e probabilidade assim, como todo o pensamento estocástico, constituem um conhecimento complexo, cujo significado decorre tanto do modelo matemático, quanto do estudo das situações empíricas correspondentes. Dessa forma, a partir da perspectiva construtivista, o processo de construção do conhecimento estocástico somente é possível se o aluno for ajudado nesse processo de construção, através da interação, a partir de situações concretas, dos seus conceitos com os novos conceitos e modelos estocásticos, impregnados de concepções filosóficas.

Dessa forma, verificamos que a implantação da nova prática de ensino da Probabilidade e Estatística exige que se dê uma preparação adequada aos professores, pois a Probabilidade e a Estatística não podem ser ensinadas a partir do raciocínio determinista e causal em que a grande maioria dos professores foi formada e que, conforme vimos no capítulo 2, prevaleceu na ciência até o século XIX.

4.4 Uma nova prática docente em Estatística

Consideramos que para tentar superar a dificuldade dos alunos no entendimento dos conceitos envolvidos nos métodos estatísticos, promovendo-se o equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios dos fenômenos em estudo, é necessário levar em conta a dimensão aleatória da realidade, conforme sugere a orientação do comitê da American

Statistical Association, bem como grande parte dos livros didáticos que traduzem uma preocupação efetiva com um ensino significativo. Devemos, então, em vez de simplesmente introduzir os conceitos a partir de definições, em geral sem nenhuma relação com situações concretas, e de priorizar a obtenção e justificação do modelo matemático, dedicar maior atenção à compreensão da realidade e dos resultados obtidos através da experimentação, a partir do estudo de sua componente aleatória.

De acordo com essa orientação somos favoráveis a uma nova prática docente, que já vivenciamos, pessoalmente, em grande medida. Nessa nova prática docente que sugerimos para o ensino da Estatística, os assuntos *são sempre introduzidos a partir da discussão de exemplos contextualizados nas áreas de interesse dos alunos*, trabalhando-se, sempre que possível, com dados de situações reais. Na parte inicial (capítulo 2), mostramos que a realidade encontra-se impregnada de elementos aleatórios. Em sintonia com tal fato, procuramos introduzir os assuntos sempre de modo contextualizado, na expectativa de que tal procedimento contribua para o estabelecimento de um equilíbrio mais adequado entre os aspectos determinísticos e aleatórios dos fenômenos. Dessa forma, na nova prática os modelos matemáticos e os métodos estatísticos apropriados para a análise e interpretação estatística dos dados, são apresentados sempre a partir da discussão dos exemplos.

Adotando-se o construtivismo social como teoria de aprendizagem, procura-se organizar o processo de ensino aprendizagem partindo-se de exemplos contextualizados nas áreas de interesse dos alunos, valorizando-se o trabalho em grupos com a utilização de programas estatísticos para computadores e permitindo-se a participação ativa do aluno na construção do conhecimento. A discussão e resolução de problemas e a realização de trabalhos em grupos podem exercitar os alunos na comunicação de suas idéias, aumentando a motivação e facilitando o entendimento dos conceitos.

Acredito que, dessa forma, a compreensão conceitual possa ser facilitada. Além de que a realização de trabalhos em grupos ou de projetos com o auxílio de programas estatísticos para computadores permitirá a análise de dados reais em grande quantidade, aumentando a motivação dos alunos. A utilização do computador facilita a simulação da variabilidade amostral e a análise de dados, permitindo um melhor entendimento dos fenômenos aleatórios e liberando o aluno da dificuldade computacional para que possa utilizar esse tempo adicional no entendimento dos fenômenos e na tomada de decisão. A comunicação de idéias entre os

alunos nos trabalhos em grupo facilita a compreensão dos conceitos e propicia um treinamento nas situações encontradas na utilização da Estatística na vida real.

Os cursos devem conter aulas teóricas expositivas dialogadas, nas quais o professor desenvolve em cada assunto a teoria e as técnicas correspondentes, a partir de exemplos contextualizados a serem discutidos com os alunos; aulas de exercícios e de resolução de problemas, onde são utilizados os conceitos e são praticadas as técnicas; e aulas de laboratório com a utilização de programas estatísticos para computador, nas quais se lidaria com dados de situações reais das áreas de interesse dos alunos, realizando-se as simulações, as análises de dados, e aplicando-se os métodos estatísticos apropriados para a realização das inferências estatísticas e para a tomada de decisão.

Com essa nova prática docente no ensino da Estatística, na qual se parte de exemplos nas áreas de interesse dos alunos através da análise de situações concretas, para somente em seguida se desenvolver as abstrações através dos modelos matemáticos correspondentes e dos métodos estatísticos apropriados para a análise e interpretação dos dados, temos notado um aumento do interesse dos alunos no aprendizado da Estatística, facilitando o entendimento dos significados dos conceitos, aumentando a motivação e provocando a melhora do aproveitamento, além de propiciar o desenvolvimento das competências e habilidades necessárias para projetar e conduzir experimentos e para interpretar os seus resultados.

Acreditamos, que esta nova prática seja mais adequada para a construção do conhecimento estatístico pelos alunos e para a sua aplicação no exercício de suas futuras atividades profissionais, do que a prática usualmente adotada em que o Professor se torna um simples transmissor de informações, numa seqüência linear pré-definida e a ser rigidamente desenvolvida.

Conforme nos sugere David S. Moore (1997):

A idéia central da nova pedagogia é o abandono do modelo de transferência de informação em favor de um ponto de vista construtivista da aprendizagem: Os estudantes não são vasos vazios a serem cheios com o conhecimento derramado pelos professores; eles inevitavelmente constroem seu próprio conhecimento combinando suas experiências presentes com seus conceitos existentes.

Para que isso possa ocorrer a grande maioria das pesquisas em ensino e aprendizagem sugere-nos que é necessária uma variedade de atividades, incluindo discussões em grupos, trabalhos práticos, prática das técnicas importantes, resolução de problemas, aplicações a situações do cotidiano, trabalhos de pesquisa e exposição pelo professor.

De acordo com essa nova prática docente abordamos os assuntos sempre a partir de um exemplo de aplicação nas áreas de interesse dos alunos. Apresentaremos em seguida alguns exemplos de atividades didáticas utilizadas nessa nova prática.

1. O conceito de probabilidade é introduzido em uma aula prática no laboratório, na qual grupos de 2 a 4 alunos realizam experiências com moedas e dados, obtendo os valores das frequências relativas dos vários resultados. Esses valores são posteriormente confrontados com os teóricos calculados, obtidos pela teoria axiomática da probabilidade, através da aplicação da definição clássica de probabilidade, sob a hipótese de equiprobabilidade.

2. Para a apresentação dos diversos tipos de variáveis e das medidas estatísticas de posição, dispersão e assimetria, a discussão é feita a partir do estudo de dados fornecidos pelos próprios alunos da classe para vários exemplos de variáveis, tais como: grau de escolaridade do pai, município de residência, número de irmãos, número de automóveis na família, peso e altura do aluno.

3. Na determinação das distribuições amostrais parte-se de exemplos de situações concretas, considerando-se os alunos da classe como a população de interesse e coletando-se dados relativos a variáveis de interesse dos alunos. A classe é dividida aleatoriamente em grupos, considerados como amostras, calculando-se as estimativas amostrais e discutindo-se a variabilidade dessas estimativas amostrais, ao invés de se partir das demonstrações matemáticas das propriedades dos estimadores amostrais.

4. No estudo das distribuições de probabilidades parte-se da análise de conjuntos de dados através de tabelas de frequências ou de histogramas, para somente em seguida se deduzir os modelos matemáticos correspondentes. Assim, por exemplo, na apresentação da distribuição exponencial parte-se do estudo dos tempos de vida de determinado tipo de lâmpada, a partir de um conjunto de dados relativos aos tempos de duração de uma amostra de 100 dessas lâmpadas. Obtêm-se, com o auxílio do computador, as estatísticas descritivas e o

histograma e comparam-se as probabilidades empíricas, obtidas a partir dos dados amostrais, com os correspondentes valores teóricos previstos pelo modelo matemático.

5. Os processos de inferência estatística, tanto as estimações por intervalos de confiança quanto os testes de hipóteses, são introduzidos a partir de exemplos contextualizados nas áreas de interesse dos alunos, sempre que possível com dados reais fornecidos pelos próprios alunos, dos seguintes tipos:

a) Em uma experiência para a determinação da resistência à tração por flexão no concreto, após um tempo de cura de 28 dias, 5 corpos de prova forneceram os seguintes resultados, em kgf/cm^2 : 60,4; 53,1; 51,0; 40,3; 30,3. Determine um intervalo de 90% de confiança para a resistência média desse tipo de concreto.

b) Um processo de estampagem produz arruelas com diâmetro médio do furo igual a 9,0 mm. Uma amostra de 5 arruelas forneceu os seguintes valores para os diâmetros dos furos, em milímetros: 8,9; 8,8; 9,1; 9,0; 8,5. Com base nesses resultados, teste, ao nível de 5% de significância, se o processo está produzindo arruelas com diâmetro médio do furo inferior a 9,0 mm.

c) Uma amostra de 10 parafusos de um lote de produção forneceu os seguintes valores para os diâmetros dos rebites dos parafusos, em milímetros: 2,48; 2,56; 2,54; 2,60; 2,58; 2,55; 2,52; 2,50; 2,47; 2,51. Podemos considerar, ao nível de 5% de significância, que o diâmetro médio dos rebites do lote é inferior a 2,54 mm?

6. O teste da proporção proporcional é apresentado a partir de exemplos de situações reais vivenciadas pelos próprios alunos do tipo:

Numa linha de montagem de automóveis a proporção de pára-lamas de automóveis com defeitos, tais como, rebarbas, riscos, cavacos, rachaduras é de 3%. Desconfiando que essa proporção esteja aumentando, o controle de qualidade selecionou uma amostra de 200 pára-lamas e encontrou 9 com defeitos. Qual será a conclusão do controle de qualidade, ao nível de significância de 10%?

7. Podem ser utilizados projetos integradores de várias disciplinas como, por exemplo, o projeto de construção de uma máquina de ensaio de fadiga para diversos materiais, usando corpos de prova deformáveis, que foi realizado na 3ª série de um curso de engenharia mecânica. Trata-se de um trabalho multidisciplinar, que integra as seguintes

disciplinas; Construção de máquinas, Processos de fabricação, Teoria das estruturas e Estatística. O trabalho engloba as seguintes etapas:

- a) Concepção geral dos mecanismos e cálculos de dimensionamento.
- b) Projeto do conjunto e das partes. Dimensionamento e seleção dos componentes.
- c) Construção do dispositivo. Usinagem das peças e montagem da máquina.
- d) Aplicação da máquina no laboratório de ensaios de materiais.
- e) Preparação dos corpos de prova e levantamento das curvas de Woehler.
- f) Tratamento estatístico das curvas levantadas.

O tratamento estatístico consistiu em selecionar o modelo matemático que melhor se ajustou aos dados. Para isso foi utilizada a técnica de análise de regressão e, com o auxílio do programa estatístico “Minitab”, foram testados os possíveis modelos, comparando-se os seus coeficientes de explicação e realizando-se as análises dos resíduos correspondentes.

A teoria matemática é essencial para validar a metodologia estatística, mas a Estatística não é uma parte da Matemática determinística e não pode ser confundida com ela, conforme nos ressalta Branco (2000):

Que a matemática é essencial ao desenvolvimento da estatística parece não levantar dúvidas a ninguém, mas esquecer ou ignorar os outros ingredientes (a indispensável presença de dados, a essencial intervenção dos computadores e uma certa arte de analisar dados) que fazem parte integrante da ciência estatística, e que a distingue claramente da matemática, levanta grandes preocupações e reações da parte dos estatísticos. O raciocínio típico da estatística é diferente do que se usa em matemática e daí que seja legítimo tentar evitar que o ensino da estatística se faça adotando uma orientação semelhante à que é seguida quando se ensina matemática.

A assimilação das idéias estocásticas pelos alunos exige a organização de atividades didáticas que permitam uma aprendizagem significativa. Conforme já destacamos a pesquisa

no ensino da estatística é relativamente recente e muitos esforços estão sendo realizados para o aprimoramento desse ensino. Nesse sentido Batanero (2000) destaca:

Um problema particular é que a investigação em educação estatística está se desenvolvendo em áreas muito diversas (estatística, psicologia, educação matemática e por professores de estatística em diferentes áreas de conhecimento), com diferentes tipos de alunos, metodologias e marcos teóricos. É preciso, portanto, realizar um trabalho de síntese desses trabalhos, e de posterior difusão entre esses professores, que são os que têm finalmente a possibilidade e responsabilidade da formação estatística dos estudantes.

Verificamos, portanto, que a Estatística está presente tanto nos fenômenos observados nas ciências naturais, quanto na economia, assim como no cotidiano de nossas vidas. Como conseqüência, o domínio de seus conceitos, linguagem e técnicas tornaram-se condição necessária para o exercício consciente da cidadania e para a aplicação nas diversas áreas do conhecimento envolvendo planejamento, coleta e análise de dados. Para que possamos fornecer essa formação aos nossos alunos devemos promover as mudanças nos conteúdos e nas práticas docentes atualmente adotadas e iniciar o estudo da Probabilidade e da Estatística já a partir do ensino fundamental e médio conforme já ocorre em países como Portugal, Inglaterra e Estados Unidos da América do Norte.

Resumindo, a nova prática de ensino propõe que os alunos passem de uma atitude de ouvintes e leitores para uma participação ativa. Assim como se chega ao conhecimento da natureza de forma empírica, o ensino da Estatística também deve ser baseado na experimentação através de pequenos projetos, a serem desenvolvidos com o auxílio do computador, envolvendo assuntos de interesse dos alunos. O fato de se partir de exemplos contextualizados em áreas de interesse dos alunos, conforme sugerimos, deverá propiciar-lhes uma maior oportunidade para o entendimento dos fenômenos aleatórios, facilitando a construção dos significados dos conceitos envolvidos no ensino da Estatística.

Certamente um aluno que esteja familiarizado com esses fenômenos conseguirá uma maior compreensão da realidade e dos resultados obtidos através da experimentação,

promovendo-se o equilíbrio entre as técnicas e os significados dos conceitos, restaurando-se o equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios da realidade e facilitando o desenvolvimento de habilidades para a aplicação das técnicas estatísticas na interpretação e resolução de problemas envolvendo dados experimentais.

A implantação da nova prática docente sugerida exige, portanto, a reformulação dos conteúdos. Ainda que as listas de conteúdo possam variar, de contexto para contexto, apresentamos, como exemplo, para explicitar melhor nossas intenções relativamente ao ensino da estatística, a seguinte proposta de conteúdo a ser desenvolvido em um curso introdutório à Estatística no curso superior:

1. Introdução à Estatística: Conceitos básicos de aleatoriedade; noções básicas de planejamento experimental; amostragem e tomada de decisão.
2. Análise exploratória de dados: organização dos dados; medidas de posição e de variabilidade; análise gráfica dos dados e análise exploratória de dados reais, usando o computador.
3. Probabilidade: Discussão dos conceitos de Probabilidade clássica, freqüentista, subjetiva e axiomática; matemática discreta, estudos dos processos de contagem; comparação entre os cálculos teóricos e empíricos das probabilidades; discussão da incorporação da informação a priori no Teorema de Bayes; independência.
4. Modelagem da variabilidade: Variáveis aleatórias; simulação de experimentos aleatórios; distribuições de probabilidades; alguns modelos probabilísticos para variáveis discretas.
5. Variáveis aleatórias contínuas: distribuições empíricas e alguns modelos probabilísticos para variáveis contínuas; distribuição normal.
6. Variáveis aleatórias bidimensionais: Distribuição conjunta; distribuições marginais e condicionais; covariância entre duas variáveis aleatórias.
7. Introdução à Inferência Estatística: conceitos básicos; amostragem, tipos de amostragem; distribuições amostrais, discussão da variabilidade amostral.
8. Inferência estatística: métodos de estimação de parâmetros; intervalos de confiança, discussão do conceito de nível de confiança; dimensionamento da amostra; inferência Bayesiana.

9. Testes de hipóteses: conceitos básicos e procedimento, significados conceituais de nível de significância estatística, “P-valor” e poder do teste; testes para a média, proporção e variância com uma e duas populações; testes para várias populações, análise de variância.

10. Testes não paramétricos: teste de aderência; teste de independência.

11. Correlação e regressão linear: Conceito de correlação linear; regressão linear simples, previsões, análise de resíduos, funções linearizáveis; regressão linear múltipla.

Dessa forma, acreditamos que se possa alcançar o almejado equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios dos fenômenos, analisados no capítulo 2 do presente trabalho, fazendo com que os nossos alunos dos cursos de Engenharia e dos cursos superiores em geral possam compreender a importância do conhecimento estatístico para o melhor entendimento da realidade que os cerca, aumentando o interesse por sua aprendizagem e viabilizando a sua correta aplicação em sua futura atividade profissional.

Ao buscarmos no pensamento filosófico as duas faces da realidade, a determinística e a aleatória, constatamos a necessidade de se promover o equilíbrio entre essas duas visões da realidade. Para se conseguir esse equilíbrio foi necessário repensar o ensino da Probabilidade e da Estatística em todos os níveis, desde o curso fundamental até a universidade. A proposta de que a Estatística seja semeada desde a educação básica de nossas crianças, a partir de um ensino contextualizado onde elas possam vivenciar situações problemáticas concretas em que a aleatoriedade esteja presente, além de que se promova a necessária formação dos professores de acordo com essa nova concepção do ensino da estatística, deverão facilitar o estabelecimento desse equilíbrio na visão da realidade.

Convém ressaltar que a mudança proposta no ensino da Probabilidade e da Estatística exige que as escolas disponham de laboratórios equipados com computadores contendo programas estatísticos, além de professores adequadamente preparados para implementá-la. Na verdade, sabemos que o sucesso de qualquer curso depende essencialmente do professor, de seu empenho e dedicação, para que realizando com amor a sua atividade cotidiana possa conduzir seus alunos na deslumbrante viagem pelos caminhos do conhecimento.

Na sociedade do conhecimento em que vivemos, com os modernos meios de comunicação eletrônica, grandes massas de informações são acessíveis a um número cada vez maior de pessoas envolvidas no processo de aprender e produzir novos conhecimentos, exigindo mudanças nos métodos tradicionais de ensino. A Estatística, sendo utilizada pelas

mais variadas áreas do conhecimento, poderá auxiliar na filtragem da informação de interesse, constituindo-se em um elemento de ligação entre essas áreas e facilitando a interdisciplinaridade. Na metáfora do conhecimento como uma rede de significações, a Probabilidade, fornecendo modelos matemáticos para explicar o comportamento dos fenômenos aleatórios, e a Estatística, com os seus métodos de planejamento do experimento, descrição e análise dos dados experimentais, permitirão a tomada de decisões em situações de incerteza. Cabe ao professor a tarefa de auxiliar os alunos no desenvolvimento de suas competências, inserindo-os na rede a partir dos assuntos de seu interesse e orientando-os na construção dos novos significados a partir daqueles que já conhecem, para sejam capazes de discernir em cada nó da rede qual é a melhor direção a tomar.

Concluimos, lembrando que para o entendimento da realidade, na maioria das vezes, as únicas afirmações possíveis são as estatísticas. As afirmações determinísticas sobre a realidade, em geral, exigem suposições que restringem o âmbito de sua abrangência. Dessa forma, o conhecimento estatístico pode nos auxiliar na incessante procura da verdade absoluta que, em consequência da limitada capacidade de entendimento do homem, não pode ser alcançada sem ajuda da fé no que lhe é transcendente. Somente dessa forma, unindo-se os resultados científicos e tecnológicos aos valores filosóficos e éticos e à capacidade metafísica do homem, poderemos alcançar o almejado conhecimento da verdade sobre o mundo que nos cerca e sobre nós mesmos.

5 Referências bibliográficas

- ANGOTTI, J. A. P.: Fragmentos e totalidade no conhecimento científico e no ensino das ciências. São Paulo, Tese de doutorado - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1991.
- ARENDT, H.: A condição humana. Tradução Silva, E. F.; Sawaya, J. Rio de Janeiro: Forense universitária, 2000.
- BATANERO, C.: Didáctica de la Estadística. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada, 2001.
- BATANERO, C.: Conferência plenária. Estatística no Secundário: Dificultades de los Estudiantes en los Conceptos Estadísticos Elementares; el Caso de las Medidas de Posición Central. Organização: Loureiro, C.; Oliveira, F.; Brunheira, L. Universidade de Lisboa, 2000.
- BEKMAN, O. R; COSTA NETO, P. L. O.: Análise Estatística da Decisão. São Paulo: Edgard Blücher, 1980.
- BESSON, J. L.: A Ilusão das Estatísticas. São Paulo: Ed. da Universidade Estadual Paulista, 1995.
- BRANCO, J.: Conferência plenária. Estatística no Secundário: o Ensino e seus problemas. Ensino e Aprendizagem da Estatística. Organização: Loureiro, C.; Oliveira, F.; Brunheira, L. Universidade de Lisboa, 2000.
- BOHR, N.: Física atômica e conhecimento humano: ensaios 1932-1957. Tradução Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Contra-ponto, 1995.
- BOX, G. E. P.; TIAO, G. C.: Bayesian Inference in Statistical Analysis: Wisconsin: Addison-Wesley, 1973.
- BROLEZZI, A. C.: A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino da matemática. Tese de doutorado - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

- BROWNLEE, K. A.: *Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering*. Chicago: John Wiley, 1960.
- CAÑIZARES, C. M. J.: *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primárias*. Tese de doutorado - Universidad de Granada. Granada, 1997.
- CARVALHO, L. A. V.: *Datamining: a mineração de dados no marketing, medicina, economia, engenharia e administração*. São Paulo: Érica, 2001.
- COHEN, M. R.: *Introducción a la lógica*. México: Fondo de Cultura Económica, 1992.
- CORDANI, L. K.: *O Ensino da Estatística na Universidade e a controvérsia sobre os fundamentos da inferência*. Tese de doutorado - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.
- D'AMBROSIO, U.: *Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar e conhecer*. São Paulo: Ática, 1998.
- D'AMORE, B.: *Epistemologia e Didática da Matemática*. Tradução Maria Cristina Bonomi Barufi. São Paulo: Escrituras, 2005.
- ECHEVERRIA, P. M. P.: *Psicología del razonamiento probabilístico*. México: Ediciones de la Universidad Autónoma, 1998.
- EKELAND, I.: *O cálculo e o imprevisto*. Tradução Maria Clara Constantino. São Paulo: Martins Fontes, 1987.
- ENCÍCLICA: *Fides et Ratio: João Paulo II*. São Paulo: Paulinas, 1999.
- ERNEST, P.: *Varietades de constructivismo: Sus metáforas, epistemologías e implicaciones pedagógicas*. *Hiroshima journal of mathematics education* 2: 1-14; Tradução Juan D. Godino. Inglaterra, 1994.
- FISCHBEIN, E.: *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel, 1975.
- FISHER, N. I.: *Crucial Issues for Statistics in the Next Two Decades*. *International Statistical Review* (69), México, 2001.
- FISHER, R. A.: *Statistical Methods for Research Workers*. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1958.

- FRIEDMAN, J. H.: The role of Statistics in the Data Revolution? *International Statistical Review* (69), México, 2001.
- GIGERENZER, G. et al.: *The empire of chance*. New York: Cambridge University Press, 1989
- GLEICK, J.: *Caos a criação de uma nova ciência*. Tradução Waltensir Dutra. Rio de Janeiro: Campos, 1989.
- GODED, P. A.: *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria em torno a las nociones de la aleatoriedad y probabilidad*, Granada, 1996.
- GODINO, J. D. et. alii.: *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Editorial Sintesis, Madrid. 1996.
- HAWKING, S.: *O universo numa casca de noz*. Tradução Ivo Korytowski. São Paulo: Mandarim, 2001.
- HAWKING, S.: *Os gênios da ciência: sobre os ombros de gigantes*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005
- HAWKINS, A. et al.: *Teaching statistical concepts*. New York: Longman. 1992.
- HEITELÉ, D.: *An epistemological view on fundamental stochastic ideas*. *Educational Studies in Mathematics*, v.6, 1975.
- IMBERNÓN, F.: *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza*. São Paulo: Cortez, 2000.
- JEFFREY, R.: *Probability and the art of judgment*. New York: Cambridge University Press, 1992.
- KAHNEMAN, D. et al.: *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press, 1982.
- KANT, I.: *Realidade e existência: lições de metafísica: introdução e ontologia*. Tradução Fioretti, A. São Paulo: Paulus, 2002.
- KAPADIA, R.; BOROVNICK, M.: *Chance encounters: probability in education: a review of research and pedagogical perspectives*. Dordrecht: Reidel.
- KOTZ, S.; JOHNSON, N. L.: *Breakthroughs in Statistics, Vol. I: Foundations and Basic Theory*. New York: Springer-Verlag, 1992.

- LAKATOS, I.: Mathematics, Science and Epistemology. Philosophical Papers. vol.2. Cambridge: Universit Press, 1978.
- LAPLACE, P. S. de: Ensayo Filosofico sobre las probabilidades. Tradução Pilar Castillo. Madrid: Alianza ,1985.
- LÉVY, P.: A Inteligência Coletiva. São Paulo: Loyola, 1998.
- LOUREIRO, C. et al.: Ensino e Aprendizagem da Estatística. Sociedade Portuguesa de Estatística. Lisboa: Grafis Artes Gráficas, 2000.
- MACEDO, L.; MACHADO, N. J.: Jogo e projeto: pontos e contrapontos. São Paulo: Summus, 2006.
- MACHADO, N. J.: Epistemologia e Didática.: As concepções de conhecimento e inteligência e prática docente. São Paulo: Cortez, 1995.
- MACHADO, N. J.: Cidadania e Educação. São Paulo: Escrituras, 1997.
- MACHADO, N. J.: Educação: Projetos e Valores. São Paulo: Escrituras, 2000.
- MACHADO, N. J.: Matemática e Realidade. São Paulo: Cortez, 1987.
- MACHADO, N. J.: Matemática e Língua Materna: Análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 1990.
- MACHADO, N. J.: Matemática e Educação Alegorias, tecnologias e temas afins. São Paulo, Cortez editora. 1995.
- MACHADO, N. J.; Ortega, C. M.: Lógica e linguagem cotidiana - verdade, coerência, comunicação, argumentação. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- MASETTO, M. T.: Aulas Vivas. São Paulo: M. G. Editores Associados, 1992.
- MASETTO, M. T. e ABREU, M. C.: O Professor Universitário em Sala de Aula. São Paulo: M. G. Editores Associados, 1990.
- MASETTO, M. T.: Didática: a aula como centro. São Paulo: FTD, 1997.
- MATALÓN, B.: Epistemologia de las probabilidades. J. Piaget Ed. Epistemología de la matemática (pp. 121-145). Buenos Aires: Paidós. 1979.
- MENEZES, L. C.: A matéria uma aventura do espírito: fundamentos e fronteiras do conhecimento físico. São Paulo: Editora livraria da Física, 2005.

- MIGON, H. S.; GAMERMAN, D.: Statistical Inference: an Integrated Approach. London: Arnold, 1999.
- MOLES, A.: A criação científica. São Paulo: Perspectiva, 1998
- MOORE, S. D.: Teaching statistics as a respectable subject. In Statistics for the Twenty-First Century, Eds. F.S.Gordon & S. P. Gordon, pp 14-25, Washington, D. C.: Mathematical Association of America, 1992.
- MOORE, S. D.: New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics. International Statistical Review (65), México, 1997.
- MORIN, E.: Os sete saberes necessários à educação do futuro. Brasília, DF.: Cortez, UNESCO, 2000.
- NEYMAN, J.: Probabilidade Frequentista e Estatística Frequentista. Tradução Djalma G. C. Pessoa. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978.
- NICHOLLS D. F.: Future Directions for the Teaching and Learning of Statistics at the Tertiary Level. International Statistical Review (69), México, 2001.
- NISBETT, R. et al.: The use of statistical heuristic in everyday inductive reasoning. Psychological Review, v.90. 1983.
- OWEN, D. B.: On the History of Statistics and Probability. New York: Marcel Dekker, 1976.
- PACE, L.; SALVAN, A.: Principles of Statistical Inference: from a Neo-Fisherian Perspective. World Scientific, Singapore, 1997.
- PCN. Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 1998.
- PCN. Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio. Brasília: MEC, 1999.
- PIAGET, J.: Para onde vai a educação? Tradução Ivete Braga. Rio de Janeiro: José Olympio, 1977.
- PONTE, J. P.; FONSECA, H.: A Estatística no currículo do Ensino Básico e Secundário. Ensino e Aprendizagem da Estatística. Loureiro, C. Oliveira, F. Brunheira, L. Universidade de Lisboa, 2000.
- POLANYI, M.: Personal Knowledge. London: Routledge and Kegan Paul, 1958.
- POPPER, K. R.: Conhecimento Objetivo: uma abordagem evolucionária; tradução de Milton Amado. São Paulo: Ed. Da Universidade de São Paulo, 1975.

- REICHENBACH, Hans: La filosofia científica. México: Fondo de Cultura Económica, 1953.
- RICOEUR, P.: Em torno ao político. Tradução Perine, M. São Paulo: Loyola, 1995.
- RODRIGUES, I. G.: Aspectos epistemológicos da mecânica de Newton: Novas formas de compreensão dos conceitos. Tese de mestrado - Instituto de Física / Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1988.
- ROWLAND, T.: Hedges in Mathematics Talk: Linguistic Pointers to Uncertainty. Educational Studies in Mathematics, v.29, Bélgica, 1998.
- SÁENZ, C.: Teaching Probability for conceptual change. Educational Studies in Mathematics, v.35, Holanda, 1998.
- SÁENZ, C.: Intuición y matemática en el razonamiento y aprendizaje probabilístico. Tese de doutorado, UAM. Madri, 1995.
- SANTOS, V. M.: O infinito, concepções e conseqüências pedagógicas. Tese de doutorado - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.
- SCHICK, F.: Making Choices. Cambridge University Press, United Kingdom, 1997.
- SCHLAIFER, R.: Probability and Statistics for Business Decisions: An introduction to managerial economics under uncertainty. N. York: McGraw-Hill, 1959.
- SIERPINSKA, A.; LERMAN, S.: Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: Bishop et al. (eds), International Handbook of Mathematics Education (pp. 827-876). Tradução parcial de Juan Godino. Dordrecht, HL: Kluwer, A. P., 1996.
- STIGLER, S. M.: The History of Statistics. Cambridge: The Belknap press of Harvard University press, 1986.
- TENÓRIO, R. M.: Educação e informática: Uma investigação da tensão entre os processos analógicos e digitais. Tese de doutorado - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.
- WALLEY, P.: Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities. St. Edmundsbury Press, Bury St. Edmunds, Suffolk, 1991.
- YULE, G. U.; KENDALL M. G.: Introduccion a la Estadística Matematica, Tradução Jimeno, J. R. Aguilar, Madrid, 1964.

6 Anexo - Conteúdos dos livros selecionados para análise

Apresentaremos, em seguida, as capas e os conteúdos dos 10 livros didáticos analisados no presente trabalho.