UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

ABORDAGEM HISTÓRICO - EPISTEMOLÓGICA DO ENSINO DA GEOMETRIA FAZENDO USO DA GEOMETRIA DINÂMICA

TATIANA DE CAMARGO WALDOMIRO

SÃO PAULO
2011

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

ABORDAGEM HISTÓRICO - EPISTEMOLÓGICA DO ENSINO DA GEOMETRIA FAZENDO USO DA GEOMETRIA DINÂMICA

TATIANA DE CAMARGO WALDOMIRO

Dissertação apresentada como exigência parcial do Título de Mestre em Educação Matemática, junto ao Programa de Pós - Graduação em Educação na área de Ensino de Ciências e Matemática da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo – FE/USP, sob orientação do Prof. Dr. Oscar João Abdounur

SÃO PAULO
2011

Catalogação na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

Waldomiro, Tatiana de Camargo

Abordagem histórico - epistemológica do Ensino da geometria fazendo uso da geometria dinâmica/ Tatiana de Camargo Waldomiro; orientação Oscar João Abdounur. São Paulo: s.n., 2011.

90 p.:Il;,tabs.

Dissertação (Mestrado) Programa de Pós – Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.2. 3. 4. I.Abdounur, Oscar João, orient.

1.Geometria: Estudo e Ensino 2.História da Matemática 3. Uso de Novas tecnologias 4. Conhecimento – Educação I. Abdounur, Oscar João, orient.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

Autora: Tatiana de Camargo Waldomiro

Título: Abordagem Histórico - Epistemológica do Ensino da Geometria Fazendo Uso da Geometria Dinâmica

Orientador: Oscar João Abdounur

Dissertação de Mestrado em Educação

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação de Mestrado em Educação de Tatiana de Camargo Waldomiro submetida à Comissão de Pós Graduação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo – FE/USP – para a obtenção do Título de Mestre em Educação, na linha de Pesquisa: Ensino de Ciências e Matemática tendo sido aprovado em ____/___/2011, pela seguinte Banca Examinadora.

____

Prof Dr Oscar Joao Abdounur

____

____

À minha mãe e meus irmãos que sempre estão ao meu lado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que, mesmo sem saber, ajudaram muito para a realização do meu trabalho.

Meus agradecimentos...

Ao Prof. Dr. Oscar João Abdounur, por nossas conversas e apoio.

À Profª Drª Maria do Carlos Santos Domite pela amizade, pela idéias, sugestões e por ser sempre um exemplo em sua profissão.

À Profª Drª Adriana Matos pelas ótimas sugestões na banca de qualificação.

À minha mãe, pela estrutura, paciência e compreensão nesse período.

Aos meus irmãos Letícia e Marcello por sempre colaborarem com meu trabalho.

Ao Rogério pela companhia.

Aos funcionários da Faculdade de Educação que me ajudaram muito nas horas difíceis.

Ao Michel pela amizade e ajuda na melhor hora.

Aos amigos e alunos da EE Dona Pérola Byington, sem vocês não seria possível esse trabalho.

A todos aqueles que foram valiosos para a realização dessa dissertação.

WALDOMIRO, Tatiana de Camargo, Abordagem Histórico - Epistemológica do Ensino da Geometria Fazendo Uso da Geometria Dinâmica. 90 f. Dissertação (Mestrado)- Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2011.

RESUMO

A presente pesquisa, de cunho quantitativo, tem como propósito responder a seguinte questão: De que modo e em que alcance o trabalho pedagógico articulado com a história, geometria e meio computacional tem refletido sobre posturas e caminhos que levassem os alunos a se envolver com o conhecimento matemático? Desse modo, fizemos uma investigação e análise sobre os efeitos de uma articulação entre o ensino da história da matemática e o uso de ferramentas computacionais como solução para as dificuldades apresentadas no Ensino de Geometria, principalmente no Ensino Médio. Utilizamos a obra de Lakatos e a primeira proposição (do livro 1) de Euclides para realizar a verificação de sua demonstração através de um software de Geometria dinâmica. Os resultados serão utilizados para a construção de um novo software que envolva o ensino e aprendizagem de história da matemática e geometria. Outros objetivos podem ser assim colocados: Refletir sobre as condições e viabilidade da integração de recursos computacionais – para o ensino da Matemática no âmbito Ensino Médio – em especial a partir do produtos/softwares propostos para a educação matemática; Compreender o potencial de softwares de geometria dinâmica para a educação matemática escolar; Analisar as necessidades matemáticas de uma instrumentação eficaz, a partir da história da Matemática, para compreender a Matemática como um processo em construção, em especial no âmbito das relações geométricas. Para isso foram retiradas vivências do cotidiano das aulas de Matemática para a reflexão sobre a geometria, e os resultados foram que a história da Matemática junto as novas tecnologias podem mudar as concepções de conhecimento da Matemática, pois através do professor ela pode chegar à sala de aula e transformar a prática pedagógica.

Palavras chaves: Ensino de Geometria, História da Geometria, obstáculo epistemológico e geometria dinâmica.

WALDOMIRO, Tatiana de Camargo. Historical - Epistemological approach geometry teaching making use of dynamic geometry. 90 f. Dissertation(Masters) – Education College, University of São Paulo/USP, 2011

ABSTRACT

The current study focused on quantity, aims to answer the following question: How and to what extent the educational work linked to the story, using computational geometry and has reflected on postures and paths that could lead students to engage with the mathematical knowledge? Thus, we developed a research and analysis on the effects of an articulation between the teaching of mathematics and the use of computational tools as a solution to the problems presented in the Teaching of Geometry, especially in high school. We used the work of Lakatos and the first proposition (Book 1) Euclid to perform the verification of his statement through a dynamic geometry software. Results will be used for the construction of a new software that involves teaching and learning of history of mathematics and geometry. Other goals may be well placed: Reflecting on the conditions and feasibility of integrating computing resources - to the teaching of mathematics in high school - in particular from the product / software proposed for mathematics education; understand the potential of software for geometry dynamic for mathematics education; analyze the needs of a mathematical effective instrumentation, from the history of mathematics, to understand mathematics as an ongoing process, particularly in the context of geometric relationships. For that were withdrawn daily experiences of mathematics lessons to reflect on the geometry and the results were that the history of mathematics with the new technologies may change the concepts of knowledge of mathematics, because through it the teacher can get to the room transform the classroom and practice teaching.

Key-words: Teaching Geometry, History of Geometry, epistemological obstacle and dynamic geometry

Sumário

"Se, portanto, queremos Igrejas e estados bem ordenados e florescentes e boas administrações primeiro que tudo ordenemos as escolas e façamo-las florescer, a fim de que sejam verdadeiras e vivas oficinas de homens e viveiros eclesiásticos, políticos e econômicos."

Iohannis Amos Comenius

Apresentação

"Acredito que nenhum trabalho é separado de uma vida, de suas circunstâncias." (PENIN, 1989) Meu primeiro contato com a Matemática e o uso de computadores se deu quando cursei o Ensino Fundamental. Lembro que fui ao computador fazer algumas construções com a tartaruguinha[1]. A partir daí nunca mais consegui esquecê-lo. Ao cursar a licenciatura em Matemática comecei a fazer iniciação científica e daí comecei a pensar mais e mais em ensino com o uso de softwares. Em meu trabalho de iniciação científica, usando o software "Maple[2]" para fazer simulações de um sistema de equações diferenciais não lineares sobre a propagação do vírus da AIDS, passei a valorizar, efetivamente, o uso de softwares para a visualização das relações matemáticas.

Porém, foi nas aulas de Prática de Ensino que comecei a pensar como poderia aplicar isso na sala de aula, e quando precisei fazer um projeto para meu estágio, logo me ocorreu a ideia de trabalhar com softwares para o ensino

---

[1] A tartaruguinha é o símbolo da ferramenta utilizada para fazer construções geométrica pelo software "Logo".

[2] **Maple** é um sistema de álgebra computacional comercial de uso genérico. Constitui um ambiente informático para a computação de expressões algébricas, simbólicas, permitindo o desenho de gráficos a duas ou a três dimensões. O seu desenvolvimento começou em 1981 pelo Grupo de Computação Simbólica na Universidade de Waterloo, em Waterloo, no Canadá, província de Ontário.

de Matemática. Esse movimento se deu na E.E. Antonio Militão de Lima, em São Carlos. Comecei utilizando a minha admirada tartaruguinha, o software Logo, em um projeto destinado a quinta série. Ainda nesse projeto, trabalhei com o software "Fracionando" [3], destinado ao ensino e a aprendizagem da relação parte-todo, em especial das frações.

Vale aqui comentar que apesar deste trabalho estar sendo desenvolvido em uma escola já em articulação com os trabalhos de estágio dos cursos de licenciatura da Universidade Federal de São Carlos, encontrei inúmeras dificuldades para aplicar esse projeto. A sala de Informática – especialmente bem equipada – mas pouco utilizada, exigiu da equipe manutenção em alguns computadores, limpeza e, de início, encontrar as chaves perdidas.

Concluindo a graduação, a minha grande vontade era ter meus próprios alunos e colocar a mão na massa junto a projetos de Ensino da Matemática com o uso de computadores. E foi o que comecei a fazer assim que assumi aulas na escola pública, utilizando os softwares “Maple”, “Logo” e “Fracionando” para proposta de ensino de geometria e álgebra. O software “Logo” e “Fracionando” ainda hoje utilizo com meus alunos da quinta série do ensino Fundamental e o software “Maple” utilizo “plotando” as diversas curvas de Geometria Analítica.

Essa prática realizou-se em uma escola pública do bairro de Americanópolis, periferia da cidade de São Paulo, na qual leciono Matemática

[3] O software é comprado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.

para o Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino de Jovens e Adultos, desde que me formei em 2003 em Licenciatura. A partir de então veio a necessidade de sistematizar minhas experiências o que, de algum modo, culminou nesta pesquisa acadêmica educacional.

No início de minha experiência como professora encontrei muitos obstáculos ao lecionar Matemática, percebi que os problemas de aprendizado eram maiores do que eu havia imaginado. Isso me levou a pensar em caminhos diferenciados para o ensino da Matemática. Caminhos que alcançassem mais e mais a motivação dos alunos assim como os ajudassem a compreender melhor o que me propunha a ensinar. De modo geral, os alunos tinham habilidades nos cálculos aritméticos - como trabalhadores em feiras, padarias e comércio em geral - mas, se sentiam nitidamente tensos e apreensivos no momento em que eu os solicitava para a matemática escolar "do lápis e papel" e de cunho mais formal. Parecia que isso não estava ao alcance deles, era coisa de gênio, nas palavras de D'AMBRÓSIO (2000, p.245)

> *"Os reflexos dessa reação na Educação Matemática são evidentes e dificultam a contextualização. Com isso, muitos orientam o ensino destacando o fazer matemático como um ato de gênio, reservado a poucos, que como Newton, são vistos como privilegiados pelo toque divino. O resultado disso é uma educação de reprodução, formando indivíduos subordinados, passivos e acríticos."*

Este estudo tem a pretensão de usar os artifícios, como a história da Matemática e os recursos computacionais, como meio de transformação nas práticas pedagógicas do professor de Matemática. Para que o conceito entre os alunos possa mudar perante a disciplina, ocorrendo mudanças na situação acima descrita e concretizando a matemática de cunho formal.

Capítulo 1: A pesquisa: um plano em construção

Um delineamento inicial da pesquisa é nosso objetivo nessa etapa, discutindo a utilização de softwares no Ensino da Matemática apoiada na História da Matemática como ferramenta para o ensino. Basear-nos-emos nas teorizações de Evelyne Barbin e Ubiratan D'Ambrósio sobre o Ensino de História na Educação e de Imre Lakatos sobre a epistemologia da matemática, assim como nas de Gaston Bachellar e Chevallar em busca da construção das noções de obstáculo epistemológico e transposição didática, respectivamente.

Justificativa e problema de pesquisa

No início da minha profissão como professora meu interesse pelo ensino da geometria começou logo que comecei a lecionar. Percebi a enorme dificuldade que meus alunos tinham quando lecionava geometria e pensei como poderia melhorar o desempenho deles nessa área. Esse foi o propósito de ingressar no Mestrado em Educação. Na sala de aula utilizei diversos artifícios: fiz muitos jogos, dobraduras, usei recursos computacionais e da história da Matemática, pois sempre me interessei pelos recursos computacionais.

Meus alunos não conseguiam fazer as relações entre os diversos assuntos que aprendiam em geometria, nos diversos anos. O que aprendiam na sala de aula ficava "desconexo" da realidade, algo que eles não enxergavam. O aprendizado da Geometria é feito através das relações que o aluno faz. Segundo BERTONHA (1989), aprender um conceito é o objetivo fundamental em educação e para que seja compreendido é necessário estabelecer uma relação de associação entre palavra e imagem, os estudos com o modelo Van-Hiele em ensino de geometria confirmam essa ideia. Com isso resolvi unir meu interesse pelos recursos computacionais e o ensino de Geometria.

Para a visualização e manipulação de imagens, utilizamos softwares de geometria dinâmica. Esses softwares unem a técnica ao raciocínio dedutivo, valorizando o pensamento geométrico, permitindo realizar ações independentes. Livre das barreiras analíticas, o visual tende a ser valorizado, e assim o aluno se sente motivado, capaz de formular argumentos informais e, em seguida, utilizar o pensamento dedutivo, pelo fato de estar visualizando o que acontece com as figuras quando as manipula na tela do computador (MENDES, 2009). Assim, o educando pode compreender o significado da dedução como uma maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático, ou seja, esses recursos permitem um pensamento mais livre como TAVALERA (2004, p. 120) encontra nas palavras de Marcondes:

> *“Todos os homens têm por natureza, desejo de conhecer: uma prova disso é o prazer das sensações, pois fora até de sua utilidade, elas nos agradam por si mesmas e mais que todas as outras, as visuais. Com efeito, não só para agir, mas até quando não nos propomos operar coisa alguma, preferimos por assim dizer a vista aos demais. A razão é que ela é de todos os sentidos, o que melhor nos faz conhecer as coisas e mais diferenças nos descobre.”*

Segundo OLIVEIRA (2005, p.59), na atualidade pode-se observar um predomínio da cultura tecnológica surgida "a partir da relação com a TV e do manejo das redes de informática". Para a autora, essa nova cultura seria o agente de transformação da forma como os jovens experimentam suas identidades e passam a pertencer a um dado território. O homem pós-moderno estaria, assim, cada vez menos vinculado ao domínio da máquina e cada vez mais focado na informação e na comunicação, apreendendo, então, o mundo, não mais como território real, mas como imagem, em sua virtualidade.

O aluno do Ensino Médio, adolescente, naturalmente "mutante, cujas transformações físicas aceleradas correspondem a mudanças igualmente rápidas no plano psicológico e intelectual" (CAMPOS; SOUZA, 2005, p.147), esse ambiente relacionado à tecnologia torna-se muito mais familiar e agradável. A televisão, o videogame, as imagens em 3D, a imagem digitalizada e imediata da fotografia e do vídeo através de câmeras digitais e telefones celulares fazem parte de seu universo desde o nascimento e, sendo assim, sua apreensão e compreensão do mundo em que vive encontram-se muito relacionadas às imagens e à multimídia. Por isso encontramos esse desapego ao ambiente escolar, ao ensino tradicional.

Diante dessa situação, é importante que nós, profissionais de ensino, repensemos nossa postura perante os avanços tecnológicos e às exigências impostas pelas linguagens que permitirem ao aluno contemporâneo absorver o mundo, para que possa apoderar-se do computador e entendê-lo, não apenas como um instrumento, mas também como parte integrante da construção do conhecimento. (MENDES, 2009)

Todas essas questões devem estar presentes no planejamento das aulas e no cotidiano do professor que pretende fazer uso de novas tecnologias em sala de aula, que podem ser: calculadoras, computadores, lousas eletrônicas, tablets etc. Entendemos que a tecnologia pode ser uma aliada ao processo educacional, se usada crítica e criteriosamente, se percebida em sua totalidade, se proporcionar a reflexão e o desenvolvimento da criticidade do aluno.

É fato que a utilização do computador em sala de aula como uma ferramenta no processo de ensino e aprendizagem facilita e melhora a execução de trabalhos. O computador é um instrumento que, sem dúvida, constrói o conhecimento matemático mais ilustrativo, possibilitando o estabelecimento de conjecturas, despertando a criatividade, estimulando a curiosidade em conhecer, em descobrir. Com um projeto pedagógico bem elaborado e com softwares bem selecionados, os computadores podem ser instrumentos muitos valiosos para os professores. Assim teremos os resultados que (BEHRENS, 2007, p.5) afirma: "Os alunos passam a ser descobridores, transformadores e produtores do conhecimento. (...) Como parceiros, professores e alunos desencadeiam um processo de aprendizagem cooperativa para buscar a produção do conhecimento".

JUNQUEIRA e VALENTE(2006, p.167), comprometidos com o uso do computador para trabalhar a Geometria, afirmam que:

> *A geometria é uma fonte por excelência de problemas não rotineiros que podem propiciar o desenvolvimento, entre outras, das capacidades de visualização espacial, de raciocínio e argumentação, identificadas como fundamentais para os cidadãos na época actual e no futuro. Há já fortes indícios de que os modernos ambientes computacionais, que permitem fazer construções de figuras geométricas e explorá-las de forma dinâmica, podem contribuir de forma decisiva para uma nova relação de professores e alunos com a Geometria. Mas, só por isso, esses ambientes pouco fazem. Reconhece-se a necessidade de a sua utilização ser suportada por matérias, devidamente testadas, que motivem e rentabilizem o trabalho na sala de aula.*

Pela proposta portuguesa de 1994, vemos que os ambientes computacionais permitem um maior leque de ações e o trabalho com objetos mais complexos relativamente à utilização das ferramentas clássicas (papel e lápis, régua e compasso) e, fundamentalmente, permitem que os alunos tenham contato com um grande número de situações em tempo real e percebam que dominam as propriedades estudadas. Há muita dificuldade em trabalhar com os alunos os processos de demonstração, já o software possibilita mais sentido a essas demonstrações.

Como as atividades devem ser realizadas em etapas é importante o desenvolvimento da capacidade de organização lógica do pensamento, e esse é um processo que ocorre nesses ambientes virtuais.

Em minha experiência na sala de aula pude perceber que ao contextualizar a matemática, os alunos conseguiam fazer relações entre o contexto explicado e a situação a qual esse processo foi criado, tornando mais real o que, às vezes, é concebido de forma abstrata na Matemática. D'AMBRÓSIO(2005, p.116) diz que:

> *"Contextualizar a matemática é essencial para todos. Afinal, como deixar de relacionar Os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia Antiga? Ou a aquisição da numeração indo-arábico com o florescimento do mercantilismo europeu nos séculos XIV e XV? E não se pode entender Newton descontextualizado"*

Para realizar essa contextualização utilizei a história da Matemática. Lembro-me que a primeira vez que utilizei desse artifício foi no ensino da Soma das Progressões Aritméticas. Contei sobre a história/lenda de Gauss. Os alunos quiseram cada vez mais saber sobre o que tinha ocorrido com Gauss e o que mais na Matemática era atribuído a ele. Os alunos consideraram o Matemático um homem excepcionalmente inteligente, e quando algum aluno se sobressaía em alguma atividade, os demais logo o chamavam de "Gauss", e o mesmo tornava-se um ícone de inteligência. CHACÓN (2003, p. 55) afirmou que

> *“Se aceitássemos a Matemática como uma ciência que surge da sociedade, e reconhecermos a parte que está modelada pelas raízes culturais e históricas dessa sociedade, os significados das idéias matemáticas podem ser ampliadas. Este é um primeiro passo para aproveitar a diversidade cultural dos alunos como fonte de riqueza para aprendizagem da matemática escolar."*

MOTTA (2006) afirma que o conhecimento matemático que o aluno traz de sua vivência torna-se o ponto de partida para o trabalho em sala de aula e deixa de ser visto como algo a ser substituído pelo conhecimento escolar.

A junção do software e da história da Matemática favorece a desvinculação do ensino da Matemática à sala de aula e aos inúmeros exercícios descontextualizados. Dá ao aluno à oportunidade de conhecer a história dessa ciência, realizar as construções matemáticas, as manipular e fazer atividades desvinculadas do cotidiano.

> *"Desvinculada do mundo cotidiano e por consequência também de qualquer realidade possível, o ensino científico foi aos poucos perdendo sua vitalidade até se transformar numa atividade essencialmente restrita à sala de aula e aos livros textos." (PIETROCOLA, 2005, p.12)*

Como lecionava para o Ensino Médio, logo no primeiro bimestre, pela Proposta Curricular do Estado de São Paulo, comecei a ensinar Geometria Analítica. Tive muitos problemas com as dificuldades que os alunos encontraram, e então resolvi montar um projeto de ensino onde busquei novas formas para o Ensino da Geometria que dessem novos significados para o ensino da Matemática, *"O ensino com significado, relacionando o mundo abstrato com o mundo real, torna a matemática mais relevante e mais útil" (FASHEH, 1998, p.20).*

O Projeto: Novas Tecnologias no Ensino da UFRJ desenvolve a ideia de que função da Geometria Analítica é explorar a correspondência entre pontos e suas coordenadas para estudar problemas geométricos, especialmente as propriedades de curvas, com o instrumental da Álgebra. Dessa maneira, podemos utilizar as ferramentas computacionais em problemas geométricos e este foi o grande avanço na Geometria desde os tempos dos gregos, já que agora podemos ter a verificação e “varrer” todos os casos possíveis da demonstração.

Outro recurso que utilizei em minhas aulas foi o de contar a história da Matemática para ilustrar os temas da Geometria Analítica à medida que lecionava no decorrer do bimestre, já que: “Os conhecimentos em História da Matemática permitem compreender melhor como chegamos aos conhecimentos atuais, porque é que se ensina este ou aquele capítulo. Com efeito, sem a perspectiva crítica que a história nos dá, a matemática ensinada transforma-se pouco a pouco no seu próprio objeto, e os objetos matemáticos ficam desnaturados: já não são mais do que objetos de ensino. Aprendem-se os casos notáveis para eles mesmos, a noção de distância para ela mesma: está-se então em presença do fenômeno da transposição didática em que o objeto de ensino é o resultado de uma descontextualização, está separado da problemática que lhe deu origem e que faz viver a noção como saber." (GUICHARD, 1986).

GUICHARD (1986) ainda acredita que tal fenômeno poupa o esforço de saber quando apareceu esse tipo de teoria matemática, que tipo de problemas ela permitia e permite resolver. Ele chama esses processos de "desistorização", de "despersonalização" do saber e o caracteriza como transposição didática. *"O saber toma o aspecto de uma realidade anti-histórica, intemporal, que se impõe por si mesma e que, sem produtor, aparecendo livre* *em relação a qualquer processo de produção, não se lhe pode contestar a origem, a utilidade, a pertinência Matemática e Sentido".*

Na escola, nesse primeiro momento utilizei apenas a história da Matemática ao estudo da Geometria Analítica. No entanto, somente após conversas com meu orientador surgiu a ideia deste projeto, que seria o Ensino da História da Geometria Analítica utilizando os recursos de um software Matemático.

Logo percebi que utilizar todo o programa de ensino de geometria Analítica do Ensino Médio seria algo complexo que impossibilitaria o cumprimento de todo o conteúdo previsto, por isso optamos pelo aprofundamento de um tema específico.

Aqui propomos a construção de um software que possa aliar o ensino da geometria dinâmica e o estudo da História da Geometria para a aplicação com os alunos do terceiro ano do Ensino Médio, com isso, tenho como hipótese ampliar o interesse e os conhecimentos não só da Geometria Analítica, mas também da geometria em geral.

A geometria é essencialmente um meio para o aluno conhecer o espaço em que se move, pelo que se torna importante promover a aprendizagem baseada na experimentação e na manipulação. De acordo com esta perspectiva, destacam-se, como aspectos a desenvolver, as capacidades de visualização espacial e de verbalização, a intuição e a utilização destas na resolução de problemas. (ABRANTES, 1999)

Para propor esse software, antes utilizarei um software já existente e testado. Para essa pesquisa utilizarei a história da geometria analítica, especificamente a primeira proposição do livro 1 de Euclides. A partir daí encontrarei as formas de como projetar o software que estou propondo.

Este estudo deve fornecer elementos para conceber que o uso das tecnologias nas aulas de geometria, especificamente o software de geometria dinâmica, assinala um valor maior do pensamento geométrico, que só teve similar na Grécia antiga. Para os gregos, carentes de uma álgebra que permitisse a visão analítica da geometria, esta se sustentava em si mesma - é isso que os softwares de geometria dinâmica podem trazer de volta. A geometria dinâmica - compasso eletrônico - oferece condições de construir, testar, validar hipóteses, ou até mesmo anular as primeiras conjecturas em detrimento de outras, por conta da manipulação que se pode fazer da figura construída na tela do computador. Da mesma forma que se constrói uma figura geométrica com compasso e régua, pode-se construí-la com o compasso eletrônico, com muitas vantagens como a de testar suas propriedades inúmeras vezes em tempo real. (TALAVERA, 2004)

Diante das reflexões, essa pesquisa busca responder a seguinte questão:

De que modo e em que alcance o trabalho pedagógico articulado com a história, geometria e meio computacional tem refletido sobre posturas e caminhos que levassem aos alunos e alunas a se envolver com o conhecimento matemático?

Temos em foco a articulação entre a história, geometria e meio computacional no ensino e aprendizagem de Matemática, pois temos como hipótese que esse trabalho conjunto pode mudar a prática de ensino de Matemática e fazer com que os alunos tenham uma concepção diferente do que é o conhecimento matemático.

Objetivos

O objetivo central desta investigação está em perceber e analisar os efeitos de uma articulação entre o ensino da história da matemática apoiado no uso de ferramentas computacionais. Como solução para as dificuldades apresentadas no Ensino de Geometria, principalmente no Ensino Médio, utilizei a obra de Lakatos e a primeira proposição (do livro 1) de Euclides para realizar a verificação de sua demonstração através de um software de Geometria dinâmica. Esses resultados serão utilizados para a construção de um novo software que envolva o ensino e aprendizagem de história da matemática e geometria.

Outros objetivos podem ser assim colocados:

- Refletir sobre as condições e viabilidade da integração de recursos computacionais – para o ensino da Matemática no âmbito Ensino Médio – em especial a partir do produtos/softwares, em geral, propostos para a educação matemática.

- Compreender o potencial de softwares de geometria dinâmica para a educação matemática escolar.

- Analisar as necessidades matemáticas de uma instrumentação eficaz, a história da Matemática, para compreender a Matemática como um processo em construção, em especial no âmbito das relações geométricas.

Na verdade, temos como um dos objetivos orientadores deste trabalho evidenciar que a educação, como em BISHOP (1999, p.31), é um processo social e, portanto, a educação matemática, como consequência, deve conter em seu núcleo a essência de construção social. Esta afirmação parece trivial, mas a natureza social humana é essencialmente interpessoal na educação e, muitas vezes, ignorada pela pressa em adquirir habilidades matemáticas e o desejo de alcançar a eficiência em educação matemática. Com esse trabalho gostaria de sensibilizar (e, então, conscientizar) cada vez mais os professores de matemática de que o conhecimento matemático não está pronto e acabado, é um processo em permanente construção.

Método

A presente pesquisa visa investigar o uso da história da Matemática e os softwares de geometria dinâmica no cotidiano das aulas de Matemática, principalmente no Ensino Médio, tomando como eixo de reflexão as aulas de Matemática ocorridas em uma escola pública de São Paulo, para a proposta de criação de um software de ensino de Geometria com o uso da História da Matemática.

Nessa perspectiva, busca-se aprofundar a compreensão teórica sobre o uso da história para o ensino da Matemática, baseado nos recursos das novas tecnologias. Por isso, o método de pesquisa é de natureza qualitativa, baseada numa que recolhe os fatos e dados, segundo as fontes: observação de sala de aula, reflexão sobre algumas produções escritas e estudos bibliográficos.

O intuito dessa pesquisa não é o de estabelecer relações de cunho quantitativo, mas refletir como o professor a partir de atitudes mais dialógicas pode buscar o ensino e a aprendizagem da geometria levando em conta a história dos conceitos matemáticos, mudando o cotidiano das aulas de Matemática nas escolas. O que se faz na escola, o que se pensa sobre ela e o que se desenvolve neste contexto, está vinculado em um conjunto de saberes, crenças, habilidades, atitudes que se construiu ao longo do tempo na sociedade, de modo geral, e na prática escolar de modo específico.

Por isso a importância da pesquisa bibliográfica para esse estudo se dá com a necessidade de aprofundamento teórico dos conceitos abordados e da investigação que se pretende fazer.

O cotidiano das aulas de Matemática torna-se fonte reveladora da pesquisa sobre os conceitos que se quer investigar.

> *"não há realidade humana desvinculada da realidade concreta de uma cotidianidade. O caráter totalizante dessa abrangência significa que até mesmo as vidas humanas inteiramente comprometidas com os valores mais elevados da humanidade*

têm a sua base no mundo concreto cotidianidade" (AZANHA, 1990, p.46)

Será realizada uma proposta para o uso do software de Geometria dinâmica, "Cabri"[4], para resolver os problemas surgidos na prova na primeira proposição do Livro 1 de Euclides.

Finalmente farei a proposta de um software para o Ensino da Geometria apoiado no estudo da história da Matemática.

1.4 Pressupostos teóricos/fundamento

Assim como BISHOP, acredito que a Matemática se encontra em uma posição nada invejável: é uma das matérias escolares mais importantes e, ao mesmo tempo, é uma das mais incompreendidas. Sua reputação intimida. Todos sabem que é importante e que seu estudo é necessário, mas poucas pessoas se sentem cômodas com ela. Em muitos países é totalmente aceitável, no âmbito social, confessar a ignorância que se tem da Matemática, vanglorear-se sobre a própria incapacidade pra lidar com ela, e até mesmo dizer que tem uma fobia.

---

[4] O Cabri foi desenvolvido por Y. Baulac, Franck Bellemain e J.M. Laborde, no Laboratório de Estruturas Discretas e de Didática da Universidade de Grenoble (França), na década de 80.

Para que isso não aconteça precisamos ter “Um processo significativo de ensino de Matemática deve conduzir os alunos à exploração de uma grande variedade de ideias e ao estabelecimento de relações entre fatos e conceitos, de modo a incorporar os contextos do mundo real, as experiências e o modo natural de envolvimento para o desenvolvimento das noções matemáticas com vistas à aquisição de diferentes formas de percepção da realidade.” (MIGUEL, 2009, p.78)

1.5 Alunos e alunas da EE Dona Pérola Byington

Os alunos onde foi realizada a pesquisa são da EE Dona Pérola Byington, escola pertencente a Secretaria de Estado da Educação, no bairro de Americanópolis, periferia de São Paulo. Lá, como em outras escolas, os alunos tem muita dificuldade no aprendizado de Matemática. São estudantes que tem baixo índice nas avaliações internas e externas[5] e que sofrem com os diversos problemas sociais que tem a região.

[5] SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo): participam alunos da 2ª, 4ª, 8ª série do Ensino Fundamente e 3º ano do Ensino Médio PROVA BRASIL: Avalia alunos da 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, participam alunos da 2ª, 4ª, 8ª série do Ensino Fundamente e 3º ano do Ensino Médio ENEM (Exame Nacional de Ensino Médio): participam alunos do 3º ano do Ensino Médio

Foi pensando nesses alunos que idealizei essa pesquisa. Sempre quis que meus alunos tivessem um aprendizado de qualidade em Matemática, já que como analisou MIGUEL(2009, p. 78)

> *"Para além das dimensões científica e tecnológica, a Matemática se consolida como fundamental componente da cultura geral do cidadão que pode ser observada na linguagem corrente, na imprensa, nas leis, na propaganda, nos jogos, nas brincadeiras e em muitas outras situações do cotidiano."*

CAPÍTULO 2: A GEOMETRIA NA CONSTRUÇÃO NO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

"Que ninguém que ignore a geometria entre aqui". (Boyer, 1999, p. 58)

Segundo FREIRE (1996, p. 30) é dever do professor e da escola: "*Não só respeitar os saberes com que os educandos, sobretudo os das classes populares, chegam a escola (saberes socialmente construídos na prática comunitária), mas também discutir com os alunos a razão de ser de algum desses saberes em relação ao ensino dos conteúdos."*

Esse estudo iniciou-se em decorrência da observação das deficiências apresentadas por meus alunos quando ensinava geometria. Tive problemas no ensino da Álgebra, por exemplo, mas ao ensinar geometria, observei uma defasagem ainda maior, devido aos problemas no ensino, generalizados no Brasil. Com relação a isso, PAVANELLO(1989, p.76) afirma que:

> *"Com a Matemática Moderna, as tentativas de ensinar a Geometria sob o enfoque das transformações e dos planos vetoriais respeitando as orientações do movimento, fizeram com que, a partir da década de 1960, o ensino de Geometria fosse relegado a um segundo plano. Dessa forma, como muitos professores não dominavam esses assuntos, passaram a trabalhar preferencialmente a Álgebra, o que pode ser constatado pelo fato de que os livros didáticos passaram a abordar a Geometria nos capítulos finais, característica essa que permaneceu até a década de 1990."*

Por trabalharem excessivamente o conteúdo da álgebra, PAVANELLO(1989, p.76) afirma ainda que isso priva os alunos da "possibilidade integral dos processos necessários à resolução de problemas". E realmente isso é o que acontece na sala de aula, já que os alunos tendem sempre a pensar que os problemas são iguais, com a mesma resolução, sem ter o pensamento lógico dedutivo e perdendo sua autonomia.

Essa constatação causou-me surpresa ao observar a forma que os alunos concebiam a Geometria. Como eles têm muitos problemas de aprendizado, resolvi insistir nesse caminho do ensino de geometria, para que, com isso, tenha o significado que MURARI (2004) dá a geometria, como um campo da matemática que possui um campo muito fecundo, e a maneira como for estudada irá refletir no desenvolvimento intelectual, no raciocínio lógico e na capacidade de abstração e generalização do aluno. Essa é uma das hipóteses que estou trabalhando nesse estudo.

No mundo em que vivemos tudo é geometria. A natureza, a arquitetura, as artes e as tecnologias tem as formas e os princípios da geometria. Para que isso aconteça precisamos fazer com que o estudo da geometria melhore a interpretação do mundo que nos cerca, facilite o entendimento das ideias e contribua para ampliar a visão do contexto matemático (SILVA, 2007). Seja na colméia das abelhas, na arte de Escher e na arquitetura de Gaudi, o aluno deve identificar que a geometria está em sua vida. Tanto para seu crescimento cultural, como para estimular a imaginação e a intuição, e desenvolver o raciocínio e a compreensão do espaço. (LAURO, 2007)

Os alunos têm que adquirir o pensamento geométrico. O conhecimento se faz através da aprendizagem, que é a série de transformações ocorridas a partir de uma informação. As transformações são processos importantes do pensamento geométrico. *(...) o aprendizado não é desenvolvimento; entretanto, o aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer. Assim, o aprendizado é um aspecto necessário e universal do processo de desenvolvimento das funções psicológicas culturalmente organizadas e especificamente humanas.* (VYGOTSKY*, 1989, p. 101)*

SÁNCHEZ & BRAVO apontam que a matemática é uma criação da mente humana, e seu ensino deve transformar-se em autênticos processos de descoberta por parte do aluno. Sánchez ainda diz: "Não se aprende matemática, faz-se". Os autores prosseguem dizendo que alguns alunos tem dificuldades mais sérias de aprendizagem, além de problemas para chegar ao pensamento abstrato, por isso torna-se necessário que lhes sejam oferecidos apoio concreto e trabalhos sobre conteúdos mais relacionados com sua experiência diária.

2.1 Geometria: uma construção histórica

As primeiras manifestações do que hoje chamamos de pensamento geométrico já ocorriam por volta de 3000 mil anos atrás quando os egípcios iniciaram os primeiros estudos relacionados à geometria. Todos os anos sempre contamos, na sala de aula, a história da Geometria e falamos da divisão das terras do Rio Nilo para uso na demarcação de terras ou para construção das pirâmides. EVES (2004) credita a Tales os primeiros estudos da Geometria demonstrativa, ANDERY (2004) afirma que a geometria existia ausente de símbolos numéricos, e somente após a morte de Alexandre "O Grande" e da construção da cidade de Alexandria e da famosa Universidade de Alexandria (em sua homenagem), quando Euclides foi escolhido pelo então rei Ptolomeu para chefiar o departamento de matemática, iniciou-se o avanço da matemática dedutiva, os gregos insistiam em que os fatos geométricos deveriam ser estabelecidos não por procedimentos empíricos, mas por raciocínios dedutivos.

Na Grécia antiga, Euclides destacou-se como um importante geômetra. Ele foi o autor de um dos textos mais importantes da Matemática, Os Elementos, divididos em 13 livros ou capítulos, dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes tratam da teoria dos números, o décimo (Livro X) dos incomensuráveis e os três últimos versam principalmente sobre geometria no espaço. Euclides estruturou a geometria daquele tempo, com sua obra, devido uma certa preocupação didática.

TOMEI (2003) observa que nos "Elementos" estão contidos resultados de uma tradição que combina Geometria e Aritmética, apresentados de uma maneira revolucionária. Cada um dos treze livros dos "Elementos" é baseado em outros resultados mais simples, dando origem a longas cadeias de argumentos que são extremamente convincentes. O papel da obra era o de ilustrar o caráter axiomático e dedutivo da matemática. Na prática, os aspectos da geometria ligados à observação, à experimentação e à construção praticamente desapareceram do ensino básico. (ABRANTES, 1999)

Hoje a Matemática é tida como uma disciplina pronta, sem a necessidade da contextualização. "(...) substituir o saber fechado e estático por um conhecimento aberto e dinâmico, dialetizar todas as variáveis experimentais, oferecer, enfim, à razão razões para evoluir." (BACHELAR, 1996, p. 24) Mesmo não sendo uma Geometria com o objetivo de memorização de um conjunto de postulados e demonstrações (SANTANA, 2010), os educandos não conseguem adquirir a habilidade de empregar seus conceitos na resolução de problemas, por exemplo. Há a necessidade de "oferecer à razão razões para evoluir". E com isso trazer novos pensamentos de como conceber a geometria na Escola.

Desde a década de 90, já há uma nova corrente de pensamento sobre essa nova concepção, em 1998, os PCN´s trazem que "uma forma de conhecer e atuar no mundo é o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural". Para o ensino e aprendizado de Geometria, SANTANA (2010) destaca, HERSHKOWITZ(2004) e FAINGUELERNT(1999) como dois aspectos opostos em ver o ensino aprendizagem de geometria. O primeiro destaca-se pela visão de que a geometria é ferramenta para descrever o espaço e medir figura. O segundo vê como instrumento para desenvolver o pensamento e a compreensão de modo a alcançar o nível mais elevado de uma teoria formal. Mas os dois se interligam quando concordam que para atingir a Geometria como estrutura lógica deve-se ter atingido alguns níveis da Geometria, como ciência do espaço, "talvez a parte da matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade". (FAINGUENLERT, 1999)

Para isso há a importância da contextualização da Geometria como a construção do começo dessa discussão. Há a necessidade de se compreender o aspecto singular e particular das áreas do conhecimento. Conhecendo a história temos o conhecimento de construção e heurístico da Matemática. O livro didático mascara o processo heurístico, o que a história trás. Assim a geometria torna-se um obstáculo epistemológico que "se incrusta no conhecimento não questionado." (BACHELAR, 1996, p.19), já que é concebida como pronta.

A História da Geometria, nessa visão, permitiria identificar os obstáculos epistemológicos superados na construção histórica de um conceito e os transformar em situações-problemas que permitissem a reconstrução do conhecimento matemático, ou seja, seria uma fonte de busca de problemas:

> *"A pesquisa dos indícios históricos correspondentes não é mais nesse caso aquela das dificuldades ou dos erros semelhantes do nosso ponto de vista de hoje, mas aquela dos fracassos característicos de um certo saber, em sua imersão dentro dos conhecimentos atuais, em poder prever o gênero de problemas que vão estar mal colocados ou mal resolvidos e chegar a busca dentro da história: a epistemologia tende a tornar-se sistemática e experimental. Os pontos de ruptura não são mais os das datas de descobertas mas das problemáticas e dos tipos de saber utilizados, que podem se reencontrar a partir de momentos diferentes dentro de domínios mais ou menos próximos". (BROSSEAU, 1983, p 191, 192).*

Com as atividades de história da Matemática fazemos a adaptação do saber científico encontrado nos livros de História da Matemática para o saber escolar, algo que faço para que os alunos formem conceitos matemáticos. E mais que isso, a história da Geometria pode ser uma prática social, como diz MOTTA (2006, p.30):

> *"... acreditamos que o recurso à história da Matemática deveria ser baseado em um diálogo do passado com o presente e interpretado dentro das práticas sociais em que tal passado se achava envolvido. (...) A história da Matemática seria, então tratada como um produto humano: carregada de valores, relativizada em relação aos pressupostos das condições sócio-culturais de sua produção, aceitação e divulgação."*

Atualmente, os professores de matemática em todos os níveis de Ensino ainda tem dado pouco destaque à História da Matemática como recurso didático. Constata-se que, via de regra, os conteúdos de Matemática são trabalhados sem relacioná-los, em nenhum momento, ao contexto histórico no qual o respectivo tema emergiu. Perdendo um recurso muito poderoso, que ainda somado aos recursos que as novas tecnologias nos dão, serão, com certeza, a (re)descoberta de conceitos na sala de aula, conceitos Matemáticos perdidos ou não usados no decorrer do tempo.

MOTTA(2004) expõe em seu trabalho que a história da Matemática possibilita a re-descoberta de conceitos em sala de aula e a re-criação pode acontecer através da utilização do software de geometria dinâmica.

2.2 Meio computacional: ferramenta ou caminho

> *"Eu insistiria (...) que eu não sou contra a informática, não sou contra o uso dos computadores. Já disse que faço questão de ser um homem de meu tempo. O problema é saber a serviço de quem, e de que, a informática entrará agora maciçamente na educação brasileira, e como é que se vão atribuir notas, no 2º grau, ao uso dos computadores. O que é que há detrás desse manuseio? É uma experiência de classe indiscutivelmente, que está aí." (Paulo Freire)*

Ao ler sobre um trabalho na Índia chamado "O Buraco no Muro", onde um cientista de computadores oferece acesso à internet livre e gratuito as crianças pobres desse país refletimos ainda mais sobre a necessidade deste recurso ser utilizado nas escolas brasileiras. Lá, ele percebeu que ao deixar à máquina ligada as crianças aprenderem sozinhas a manipula - lá e logo encontrou resultados surpreendentes. Eles começam a praticar e, consequentemente, a aprender rapidamente como se opera a máquina, como aprenderam a língua materna, reinventando termos do computador e ícones com termos de sua própria cultura.

Os resultados são logo vistos na Escola, pois as crianças começam a ter uma visão global de mundo. E porque não aproveitar isso para a Matemática? Por isso, nos últimos anos, educadores/pesquisadores têm discutido cada vez mais o ensino com o uso das ferramentas computacionais como caminho para o aprendizado de Geometria. A melhor aprendizagem ocorre quando o aprendiz assume o comando de seu próprio desenvolvimento em atividades que sejam significativas e lhe despertem o prazer (PAPERT, 1994 p. 29), o que torna o ato de aprender um ato de alegria e contentamento, no qual o cognitivo e o afetivo estão unidos dialeticamente. (FREIRE, 1995)

Freire concorda com a evidência do discurso de Papert, mas enfatiza a dimensão histórica do homem nas mudanças do mundo. Embora constate que "a escola está péssima", não concorda com a ideia de que a escola "esteja desaparecendo ou vá desaparecer". E apela para que "modifiquemos a escola", isto é, não se trata de acabar com a escola, mas de mudá-la completamente, "Eu continuo lutando no sentido de pôr a escola à altura do seu tempo e isto não é soterrá-la nem sepultá-la, mas é refazê-la (...). A escola não é em si mesma errada, ela está errada". (FREIRE, 1995)

Na Escola, como uso didático, Papert foi pioneiro ao usar e refletir sobre o uso dos computadores na sala de aula. Com o seu "Logo" e princípios construtivistas deu os primeiros passos para que essa realidade, hoje, acontecesse. Segundo os princípios construtivistas, uso de computadores, foi proposto por Papert com base nas ideias de diferentes pensadores modernos. *Como acredita Almeida (1996,p.30) Ideias que não se contrapõe, mas se inter-relacionam, em um diálogo que as incorpora a um processo de descrição-execução-reflexão-depuração. Dewey, Freire, Piaget e Vigotsky são os principais inspiradores do pensamento de Papert.*

BORBA e PENTEADO (2001, p.17), que defendem que "o acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma alfabetização tecnológica". E mais que isso, a informática deve ser uma ferramenta ou caminho para romper o obstáculo epistemológico encontrado no ensino de Geometria.

Com esse recurso o aluno logo adquire a competência de distinguir figuras geometricamente iguais ou semelhantes, por exemplo. Quando o adolescente necessitar visualizar as cônicas, tema que ele considera muito abstrato, o uso de um software de geometria dinâmica pode contribuir para a visualização imediata da imagem, pode manipular os modelos e possibilitar que ele faça conjecturas sobre propriedade, procure testá-las e justificá-las. (ABRANTES, 1999)

O uso dessa ferramenta já está oficializada no currículo de Matemática, os PCN's em 1994, falam do uso das calculadoras no Ensino Médio e o uso de softwares de geometria dinâmica e planilhas eletrônicas vem tendo mais importância no Ensino. “A disponibilidade de modernos recursos para produzir imagens impõe a necessidade de atualização das imagens matemáticas, de acordo com as tendências tecnológicas e artísticas, incorporando a cor, os gráficos, a fotografia, assim como a importância de ensinar os alunos a fazer uso desses recursos.” Nas escolas estaduais do Estado de São Paulo são disponibilizados alguns softwares para o ensino de Matemática, como o “Cabri”. Mas porque a utilização desses softwares continua sendo negligenciada em algumas Escolas?

Há um tempo as novas tecnologias tem grande ênfase na vida do cidadão. Apesar de ser oficializado e estar no currículo de Matemática a utilização de recursos computacionais, valores e normas do ensino e aprendizagem de matemática ainda são associados ao ensino num ambiente com papel e lápis.

No artigo de Michèle Artigue é discutida a implantação do uso de novas tecnologias no ensino de Matemática nas Escolas da França. As tecnologias tem uma forte legitimidade social e científica, mas isso ainda não legitima seu poder na educação. Precisamos de provas que os computadores e as novas tecnologias podem ser úteis na educação. Para ganhar tal legitimidade, Artigue discute o que seria necessário para que esse processo ocorra. A princípio é preciso:

- ajudar aos professores a enfrentar as dificuldades recorrentes do ensino e aprendizagem de matemática, melhorando-os;

- fazer o ensino-aprendizado fácil e melhor;

- ajudar a desqualificar o aprendizado por exercícios repetitivos e promover a prática o aprendizado conceitual.

Ele ainda discute que isso não é tão fácil provar se os valores e normas do ensino da Matemática, como já disse, continuam essencialmente moldados pelos valores tradicionais e normas da atividade matemática (uso do papel e lápis). Isso tende a gerar algum tipo de círculo vicioso. Diante das dificuldades de legitimidade, inovações e promotores de tecnologias de informática tendem a minimizar o custo de integração e superestimar seus potenciais benefícios. Isso não ajuda para resolver as complexas questões de integração adequada e, finalmente, os atos contra ela.

Quando trabalhamos com novas tecnologias, como calculadoras e computadores, professores e alunos estão diante de dois mundos diferentes: o mundo da transposição didática ordinária associada com papel e caneta e o ambiente dos computadores. As pesquisas estão cada vez mais ligadas aos efeitos cognitivos e didático do uso deste ambiente na sala de aula.

Essa pesquisa deixa claro que as tecnologias da computação libertam o aluno da carga técnica, que a priori deixa tempo para um trabalho mais reflexivo e conceitual e, portanto, são geralmente considerados como um meio ideal para renovar as práticas de ensino consideradas demasiadamente limitadas e técnicas. Para o estudioso, tal fato trás legitimidade para o ensino com computadores, mas não ajuda a analisar e compreender a interação dialética entre o conceito fundamental e a faceta técnica da atividade matemática e as formas sutis pela quais a tecnologia modifica essa dialética, mudando o significado e economizando o trabalho matemático.

Para seu estudo, o pesquisador usou referenciais teóricos que nos permitem a abordagem da dimensão institucional e cultural dos processos de ensino e aprendizagem. Reconhecemos o fato de que o ensino e a aprendizagem da Matemática em ambientes computacionais introduz uma forte dimensão instrumental para os processos correspondentes. Esta é a razão pela qual os pesquisadores franceses que trabalham nessa área, muitas vezes, confiam tanto na abordagem antropológica desenvolvida por Chevallard [6] e em abordagens provenientes da ergonomia[7] cognitiva.

[6] Chevallard em 1985 em seu livro La Transposition Didactique mostra as transposições que um saber sofre quando passa do campo científico para o campo escolar, chamada transposição didática.

[7] Estudo das relações entre homem e máquina, visando a racionalização e a melhoria das condições de trabalho

A abordagem antropológica oferece-nos uma perspectiva em que a atividade matemática é concebida como trabalho humano fortemente influenciado pelas características culturais, limitações e normas das instituições onde são desenvolvidos. Os objetos matemáticos são, assim, concebidos não como entidades absolutas, mas como objetos culturais que emergem dos sistemas de práticas. Essas práticas ou praxeologias, como são chamadas por Chevallard, que Artigué usa como seu interlocutor, são descritos em termos de:

- tarefas em que os objetos são incorporados;
- as técnicas usadas para resolver essas tarefas;
- a tecnologia, este termo rotulado aqui, tem um discurso que explica e justifica as técnicas, de acordo com sua etimologia, e, finalmente;
- teoria vista como um discurso, justificando o discurso tecnológico.

Essa abordagem conduz a uma visão mais equilibrada entre o conceitual e a técnica, como dimensões da atividade matemática. É importante ressaltar que a palavra técnica deve ser entendida aqui num sentido muito amplo. A técnica é uma maneira de resolver uma tarefa e técnicas envolvidas na resolução de problemas matemáticos, exceto as de rotina, que são uma mistura complexa de peças de raciocínio e rotinas sub-técnicas.

Dentro desta perspectiva, no estudo realizado nas escolas francesas, podemos ver que a compreensão dos processos de ensino e aprendizado e suas relações mútuas exigem a compreensão da matemática associada a “praxeologia” em suas dimensões institucionais e pessoais. Além disso, refletir sobre as questões de integração exige a análise das mudanças que as tecnologias da computação introduzem ou podem introduzir nessas “praxeologias”. Não há dúvida de que as tecnologias computacionais modificam profundamente o nível técnico e tecnológico e, através destes, o tradicional equilíbrio que existia entre o trabalho conceitual e a técnica.

O pesquisador francês retoma o tema Ergonomia Cognitiva, que também conta com perspectivas antropológicas, oferece-nos ferramentas complementares para abordar questões de instrumentação. Com efeito, contrastando com pesquisadores no campo didático, pesquisas em ergonomia cognitiva são usadas para analisar os processos de aprendizagem em ambientes tecnologicamente complexos, nomeadamente o local de trabalho. Dentro desta abordagem, os artefatos (objetos técnicos) são cuidadosamente distinguidos dos instrumentos que podem tornar-se através da gênese instrumental. Um instrumento (computador) é visto como uma entidade mista, constituída por um lado de um artefato e, por outro dos esquemas que fazem dele um instrumento para uma pessoa específica.

Mas o autor identifica as limitações induzidas pelo instrumento e, em especial para o tipo de instrumento com o qual se trata. Dois tipos de limitações: limitações de comando e limitações organizacionais. Estas resultam de limitações internas e de interface. É necessário, também, para identificar as potencialidades oferecidas pelo novo trabalho instrumentado. A pesquisa em ergonomia atesta a complexidade da gênese instrumental quando se trata de ambientes tecnologicamente complexos, como é o caso de tecnologias computacionais.

2.3 Meio computacional: um lugar do olhar para o pensamento geométrico

PAPERT (1994) afirma que a utilização do computador na sala de aula pode gerar novas possibilidades de trabalho, desde que eles façam parte de um processo de desenvolvimento da escola. Além disso, as possibilidades se abrem dependendo do uso que o professor faz dele.

Uma das maneiras de romper com o obstáculo epistemológico advindo da geometria, é, por exemplo, utilizar recursos computacionais a partir de um software de geometria dinâmica para a visualização de uma construção.

No primeiro momento o aluno precisa ter algum conhecimento básico da geometria, por exemplo: para fazer uma reta temos que ter os dois pontos, para fazer uma circunferência precisamos ter o centro e o raio, dentre outros conceitos. As atividades se desenvolvem em torno de projetos. Os alunos são instigados a expressar suas próprias ideias nas atividades, a explicitar a solução adotada segundo seu estilo de pensamento, a testar e a depurar seu trabalho e a empregar pensamentos intuitivos ou racionais. Depois de pronta a construção, podemos fazer a visualização de diversas posições e fazer diversas conjecturas.

Com isso o software abre espaço para a confirmação dos casos, pois varre todos os possíveis. Não é uma demonstração, mas sim uma verificação dos casos. Quando temos um ambiente dessa maneira, é essencial incentivar a compreensão através da reflexão propícia a assimilação de conceitos ou de estruturas através da resolução de problemas ou da implementação de projetos. A depuração implica a aplicação de conceitos ou de estruturas que podem ser revistos, explicitados ou mesmo reelaborados para outro nível de compreensão; ou seja, a depuração promove a acomodação.

A educação não se reduz à técnica, "mas não se faz educação sem ela". Utilizar computadores na educação, "em lugar de reduzir, pode expandir a capacidade crítica e criativa de nossos educandos. Depende de quem o usa, a favor de que e de que quem e para quê". O homem concreto deve se instrumentar com os recursos da ciência e da tecnologia para melhor lutar "pela causa de sua humanização e de sua libertação". (FREIRE, 1995, p. 98; 1970, p. 22)

O critério fundamental de que os conhecimentos trabalhados no computador sejam apropriados pode romper barreiras ao fazer com que a aprendizagem tenha sentido para o aluno que desenvolve seus programas ou acessa a novos nós ou ligações. Para o aluno, o conhecimento necessário é aquele que o "ajudará a obter mais conhecimento". A isso PAPERT denomina matética - a "arte de aprender' no sentido de desenvolver o conhecimento sobre aprendizagem. (PAPERT, 1994, p.79, p.125)

> *“Pretendemos encontrar, no estudo histórico, argumentos para mostrar que o uso desse software é um fator decisivo à construção, pelos alunos, de um pensamento geométrico que remonta aos tempos em que a cultura grega fazia da geometria condição necessária para entrar no mundo do conhecimento.”*

Em Matemática existem recursos que funcionam como ferramentas de visualização, ou seja, imagens que por si mesmas permitem compreensão ou demonstração de uma relação, regularidade ou propriedade. Um exemplo bastante conhecido é a representação do teorema de Pitágoras, mediante figuras que permitem revelar a relação entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos. (PCN, 1997)

2.4 Geometria Euclidiana: O caminho do meio computacional

No artigo, *Proof in History and the Classroom*, LAVERDURE(2004), discute os fatores históricos da prova Matemática e a sua validade enquanto Prova Matemática na história. Começa dizendo que o filósofo Thales foi credenciado como o inventor da prova matemática, no entanto apresenta argumentos que questionam esse mérito, pois o ponto principal é que se Thales não tinha um sistema de axioma, ele não poderia provar nada.

No entanto, o objetivo da prova é convencer o público, fazendo-lhes "ver por si mesmos" que aquilo que o matemático diz é verdade. O que é necessário não é um sistema de axiomas, mas que o matemático e a platéia concordem com o que é considerado como saber e que é aceito como óbvio ou convincente. Por isso, pode-se dizer que a este respeito, Thales estava em uma situação semelhante ao de um professor da escola em frente de uma classe.

Ele acredita que desde a época de Thales, a "prova matemática" tem sido a principal característica da matemática, no entanto, como LAKATOS observou em seu famoso “A Lógica do descobrimento matemático: Provas e Refutações", “prova de ontem pode ser apenas uma piada boa de hoje”. A Epistemologia da Matemática apresentada em Provas e refutações (1978) não pode ser concebida à parte da História da Matemática. LAKATOS apresenta suas concepções epistemológicas como sendo uma reconstrução racional da História da Matemática. (MOLINA, 2001)

O mais apropriado parece ser considerar as provas matemáticas como construções mentais e distingui-las de sua expressão num sistema formal. Uma questão estreitamente ligada à noção de prova é a da evidência dos princípios da demonstração. (MOLINA, 2001)

Portanto LAVERDURE (2004) acredita que um professor que quer transmitir o espírito da matemática para os alunos tem que criar um entendimento do que uma prova matemática é, e fazer com que os alunos vejam o sentido disto.

A Matemática tem fama de estar pronta e ter que ser compreendida, sem questionamentos. Mas em sua concepção a Matemática é muitas vezes considerada como um “sujeito autoritário na escola”, quando poderia ser de fato o menos autoritário, e, assim, o assunto mais democrático de todos. Quando um aluno compreendeu uma prova, ela sabe que o que o professor disse é verdade - não porque o professor disse que sim, mas porque ele entendeu a prova.

A questão da utilização de prova em sala de aula é certamente uma das mais importantes discussões de uma série de perguntas entre todos os professores de matemática. Pelos professores terem muita dificuldade em fazer esse trabalho, muitos abandonam a prova de Matemática, apenas apresentando fórmulas e teoremas, esquecendo em suas aulas o papel do Matemático.

Um trabalho importante para a volta da prova na sala de aula seria o uso da visualização das construções geométricas. Não que a visualização seja de mesma validade que a prova, isso não é verdade. Mas chamemos essas construções como uma verificação. Para se obter uma visualização completa das construções e livrar os alunos do vício de achar os conceitos geométricos muito abstratos, usamos os softwares de Geometria Dinâmica, ele nos fornecerá a verificação de muitas construções. Uma ferramenta que Lakatos naquele tempo não dispunha e que certamente diminuiria seu trabalho, já que poderia ter uma verificação por visualização que seria importantíssima em seu trabalho.

A verificação computacional, vem como comprovação da proposição 1 do livro 1 de Euclides[8], nunca substituindo a prova.

Essa verificação irá "favorecer" uma visualização que é fundamental para o entendimento do aluno sobre o problema.

Proposição 1,do Livro 1:

Construir um triângulo equilátero em uma linha reta finita. (Fig. 1)

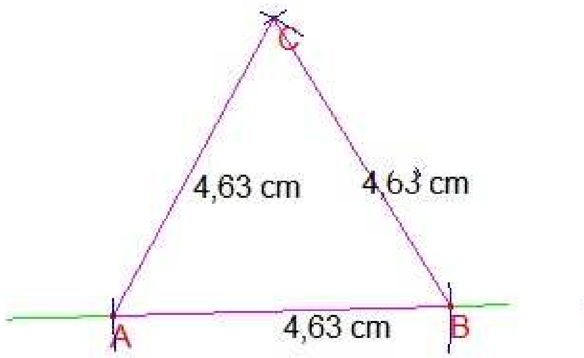


Figura 1

Seja AB a linha reta finita dada, na figura abaixo (Fig.2):

[8] Tradução realizada de: Thomas Heath, EUCLIDE The thirteen Books of THE ELEMENTS. Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath , DOVER.

Figura 2

Pede-se que se construa um triângulo equilátero a partir desta linha reta AB.

Solução:

Descreva o círculo BCD com centro A e raio AB. Descreva o círculo ACE (Post. 3)[9] com centro B e raio BA.Ligue as linhas CA e CB a partir do ponto C,no qual (Post.1)[10] os círculos se cortam, aos pontos A e B.

---

[9]Post. 3:Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

[10] Post. 1:Tirar uma linha reta de qualquer ponto a qualquer outro.

Agora, desde que o ponto A é o centro do círculo CDB, temos que AC é igual a AB. De novo, desde que o ponto B é o centro do círculo CAE, temos que BC é igual a BA. (Def.15)[11].

Mas provou-se que AC é igual a AB,e assim temos que as retas AC e BC são iguais a AB (N.C.1)[12],visto que, se uma coisa é igual a outra e esta é igual a uma terceira,segue-se que elas são iguais entre si;portanto, AC também é igual a BC.

Deste modo, as 3 linhas retas AC, AB e BC são iguais umas às outras.

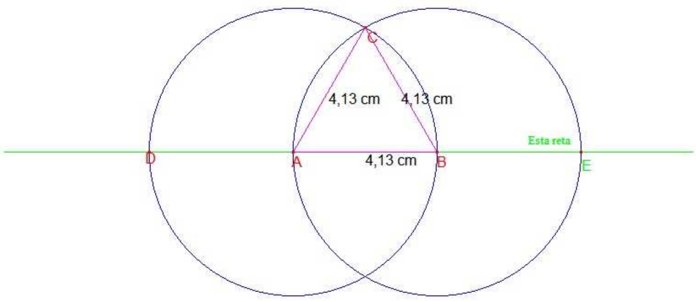


Figura 3

[11] Def.15: Círculo é a figura plana contida por linhas tais, que todas as linhas retas que caem sobre ele a partir de um ponto, entre aqueles que se encontram dentro da figura, são iguais umas às outras.

Portanto, o triângulo ABC é equilátero e foi construído com base na linha reta finita AB.(Fig.3)

Comentários:

É trivial que Euclides não tem o direito de assumir, sem colocarem como premissas de algum postulado que os dois círculos vão se reunir em um ponto C. Para suprir o que queria devemos invocar O Princípio da Continuidade. Isso é suficiente, para efeitos desta proposição e a I. 22, onde há uma suposição tácita semelhante, usando desta forma o postulado proposto por Killing[13]. "Se uma linha (neste caso, por exemplo, a circunferência ACE) pertence exclusivamente a uma figura (neste caso um plano), o qual é dividido em duas partes (ou seja, a parte fechada dentro da circunferência do círculo BCD e parte fora desse círculo), e se a linha tem pelo menos um ponto em comum com cada parte, também deve atender o limite entre as partes (isto é, a circunferência ACE deve encontrar a circunferência BCD)".

Zeno observou que o problema não estava resolvido, a menos que seja tido como certo que as duas linhas retas não podem ter um segmento comum, já mencionado. Assim, se AC e BC encontram-se em F antes de atingir C, e tem a parte FC em comum, o triângulo obtido, nomeado FAB, não será

[13] Killing foi o matemático que introduziu álgebras de Lie, independentemente do estudo de Lie sobre a Geometria não-Euclidiana. A classificação da álgebra de Lie simples realizada Kolling foi uma das melhores realizações em toda a investigação matemática.

equilátero (fig.4), mas a FA, FB serão inferiores a AB. Mas o Post. 2 [14] já estabeleceu que duas linhas retas não podem ter um segmento em comum.

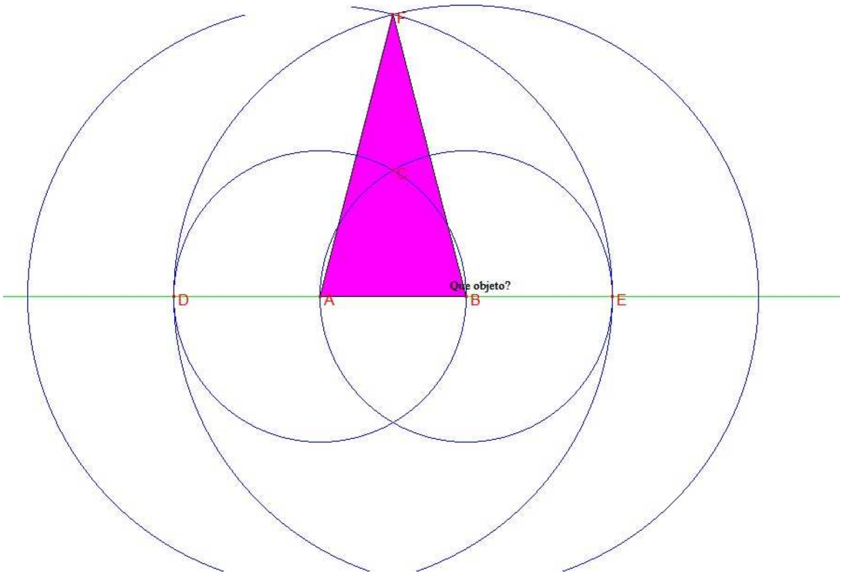


Figura 4

Proclus dedica um espaço considerável a esta parte da crítica de Zenão, mas satisfaz com a simples menção do outro, no sentido de que também é necessário assumir que duas circunferências (com diferentes centros) não podem ter uma parte em comum. Ou seja, para qualquer coisa que sabemos, pode haver qualquer número de pontos de C comuns às duas circunferências

[14] Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta.

ACE, BCD. Está provado que os dois círculos não podem cruzar mais pontos do que dois, de modo que não temos como assumir isso.

O máximo que podemos dizer é que é suficiente, para os fins da presente proposição, se um triângulo equilátero pode ser encontrado com a base dada, então a construção só dá dois triângulos deixados para serem provados posteriormente. I.7[15] mostra claramente que em ambos os lados da base AB apenas um triângulo equilátero pode ser descrito. Assim fornece o mesmo que em I.22[16] onde um triângulo tem que ser descrito com três lados de determinado comprimento, que inclui não apenas a determinação das condições de possibilidade, mas também o número de soluções. Esta visão de I. 7 com o fornecimento de uma equivalente para III.10[17]absolutamente necessário I.1[18] e I. 22[19] devem servir para corrigir a idéia tão comum entre os escritores de livros-texto que I.7 é apenas de uso como um lema para a prova de Euclides de 1.8 e, portanto, pode ser deixada de lado como um prova alternativa da proposição.

[15] I.7 A superfície plana é aquela, sobre a qual assenta toda uma linha reta entre dois pontos quaisquer, que estiverem na mesma superfície.

[16] I.22 Os quadriláteros são aqueles que são feitos por quatro linhas retas.

[17] III.10 Um círculo não corta outro círculo em mais que dois pontos.

[18] I.1 Ponto é o, que não tem partes, ou o, que não tem grandeza alguma.

[19] Dos quadriláteros, o quadrado é a que é simultaneamente equilátera e retângula; o oblongo é a que é retângula mas não é equilátera; o rombo é uma figura equilátera mas não retângula; e o romboide é a que, tendo os lados e ângulos opostos iguais, não é nem equilátera nem retângula. E todas as outras figuras quadriláteras se chamam trapézios.

Agradavelmente à sua noção de que é de I.1 que devemos convencer-nos que os triângulos isósceles e escalenos realmente existe, bem como um triângulo equilátero, Proclus mostra como desenhar, primeiro um triângulo isósceles em particular, e, em seguida, um triângulo escaleno, por meio de a figura da proposição. Para fazer um triângulo isósceles, ele produz AB em ambas as direções para encontra os círculos respectivos em D, E, em seguida descreve círculos com A, B, com centros em AE, BD como raios, respectivamente.

O resultado é um triângulo isósceles com cada um de seus lados duplos do terceiro lado. Para fazer um triângulo isósceles em que os lados são iguais não tão relacionado com o terceiro lado, mas têm um determinado comprimento exigiria o uso de I.3[20], e não há nenhum objeto em tratar a questão em todas em avanço da I.22. Uma maneira mais fácil de satisfazer-nos da existência de alguns triângulos isósceles, certamente seria conceber qualquer dois raios de um círculo desenhado e suas extremidades unidas.

Há mais um ponto na construção de Proclus de um triângulo escaleno. Suponha que AC é um raio de um dos dois círculos, e D um ponto sobre AC na parte do círculo com um centro que é fora do círculo com centro em B. Então, juntando-se BD como na figura 5, temos um triângulo que tem, obviamente, todos os seus lados desiguais, ou seja, um escaleno triângulo.

[20] I.3 As extremidades de uma linha são pontos.

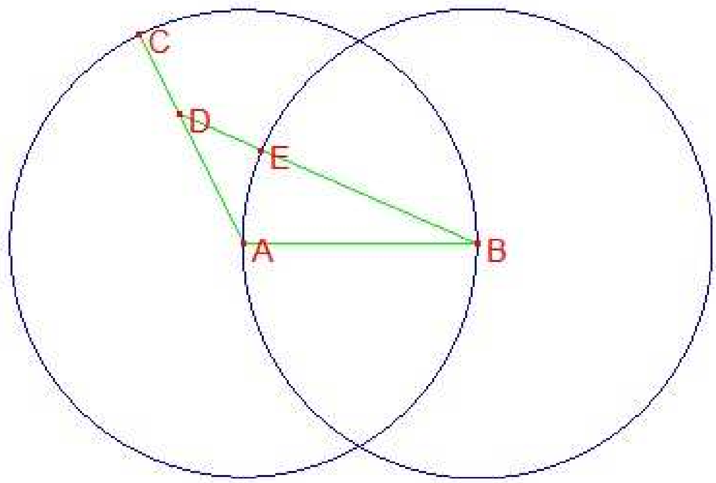


Figura 5

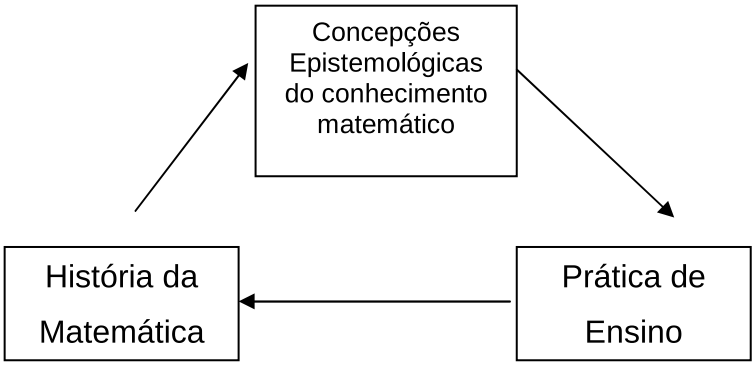
Capítulo 3: O ensino de geometria: um enfoque histórico – epistemológico

> *"As matemáticas se apresentam como um conjunto sempre crescente de verdades eternas e imutáveis, nas quais não podem entrar os contra - exemplos, as refutações ou a crítica. O tema em estudo se reveste de um ar autoritário (...). O estilo dedutivista esconde a luta e oculta a aventura. Toda história se desvanece, as sucessivas formulações tentativas do teorema ao longo do procedimento probatório é condenado ao esquecimento, enquanto que o resultado final é exaltado ao estado de infalibilidade sagrada." (LAKATOS,1978).*

Segundo D'AMORE (2007), uma *concepção epistemológica* é um "conjunto de convicções, conhecimentos e saberes científicos, os quais tendem a dizer o que são os conhecimentos de indivíduos ou de grupos de pessoas, como funcionam os modos de estabelecer sua validade, bem como adquiri-los e, para então, ensiná-los."

Nesta perspectiva de como se dá o processo de construção de uma concepção epistemológica, Barbin parece não discordar de D'AMORE, mas procura demonstrar, com ênfase, que o estudo da história da Matemática altera profundamente as concepções epistemológicas do conhecimento matemático, assim como transforma a prática pedagógica da matemática.

BARBIN (1996) tem apresentado o esquema abaixo, no sentindo de mostrar a relação fecunda entre esses três processos.



Concepções epistemológicas e o papel dos problemas

Realmente a história da Matemática pode mudar as concepções de conhecimento Matemática, pois através do professor ela pode chegar à sala de aula e transformar a prática pedagógica. BARBIN (2004) confirma que isso pode ocorrer através da resolução de problemas. Pois, se não houvessem problemas para serem resolvidos no decorrer da história não haveria o conhecimento Matemático. Sem as perguntas, não teríamos o conhecimento. Os conceitos matemáticos são de fato construídos, modificados e estendidos a fim de resolver problemas.

A autora tem como um de seus interlocutores o epistemólogo Gaston Bachelard, que escreveu: "é precisamente essa noção do problema que é a marca da verdadeira mente científica, todo o conhecimento é uma resposta para uma questão". Todo conhecimento é uma resposta a uma questão, isto é, os conceitos e teorias da matemática existem para responder a pergunta, eles são ferramentas para resolver problemas.

Ela acredita ainda que os elementos da matemática como: Axiomas, teoremas, provas, definições, teorias, algoritmos, fórmulas, símbolos etc. São, sim, indispensáveis para o bom entendimento dos conceitos matemáticos. Mas as situações problema e estratégias para compreendê-los são a essência da matemática.

Discutir o histórico de certos problemas pode realmente ser uma maneira de fazer os alunos interessarem-se sensivelmente à natureza mutável da matemática, permitindo enfatizar ao mesmo tempo, a contribuição de diferentes culturas para o conhecimento Matemático.

Aos professores de matemática, como construtores da história da matemática, Eveline Barbin acredita que somos portadores da cultura matemática, sendo nossa responsabilidade transmitir essa cultura aos nossos estudantes. Não é suficiente que nós simplesmente apresentemos os detalhes matemáticos. Nossa responsabilidade, como bem concordo com Barbin, é muito maior. Em outras palavras, estaríamos abandonando nossas responsabilidades como professor se apresentássemos a matemática como uma disciplina totalmente pronta, como um conjunto de conhecimentos que surgiu - há milênios - já em perfeita forma.

Esta ênfase em problemas corresponde igualmente a certas concepções epistemológicas do conhecimento matemático. Tomado como um todo, há duas maneiras de pensar sobre o conhecimento matemático: como produto ou como processo. Pensar sobre o conhecimento matemático como produto significa estar preocupado com a atividade matemática. A história da matemática centrado em problemas traz à tona o processo de construção e retificação de conhecimentos decorrentes da atividade de resolução de problemas.

O conhecimento matemático decorrente da história vem nos conquistando como meio de ensino e aprendizagem da matemática a cada ano que lecionamos. Na maioria das salas de aula, as crianças aprendem a somar, subtrair, multiplicar e dividir, seguindo rotinas prescritas. O problema é que muitos não compreendem os processos subjacentes matemáticos envolvidos e são ensinados ano após ano a repetirem as mesmas técnicas.

Cada vez que utilizávamos esse recurso de expor a história da Matemática, as aulas tornavam-se "diferentes" e os alunos demostravam maior interesse. "*A História da Matemática no ensino deve ser encarada, sobretudo, pelo seu valor de motivação para a Matemática. Deve-se dar curiosidades, coisas interessantes e que poderão motivar alguns alunos."(*D'AMBROSIO, 2000, p.255*)* Sentiamos como se houvesse uma "justificativa" para o que estava ensinando naquele momento. "Do ponto de vista psicológico, o aprendizado das respostas sem saber as perguntas, é tão difícil que é quase impossível." (EDWARDS, 1977, p. 75). O contexto histórico, através da narração e por outros meios, oferece muitas maneiras deliciosas de conectar os estudantes de hoje a descoberta significativa, aumentando a sua motivação e sua compreensão matemática. (LAVERDURE, 2004). Não apenas um desfilar de datas e nomes como afirma Ubiratan, a história é muito mais que isso.

> *"Jamais, deve-se dar a impressão, através de um desfilar de nomes, datas, resultados, casos, fatos, que se está ensinando a origem de resultados e teorias matemáticas. Sabe-se que as*

> *necessidades e as idéias vão se organizando ao longo da história, em tempos e lugares difíceis de serem localizados. Numa certa época, as idéias começam a se organizar, a tomar corpo, e a serem identificadas como isso ou aquilo. A partir daí entram para a "história". Mas não nasceram assim." D'AMBRÓSIO(2000, p. 256)*

Para trabalhar como D'Ambrósio sugere, estamos sempre em busca de "bons problemas" como exercícios para a sala de aula.Os problemas históricosn são um bom exemplo disso,eles são um testemunho contínuo da sociedade, e até em matemática. Eles reforçam a importância da matemática e ajudam a iluminar a ampla gama de aplicações matemáticas. Tocando em história, economia e até mesmo as condições sociais, eles são uma fonte fecunda de aprendizagem.

Mas, infelizmente, KATZ (2008, p.326) acredita que uma das principais razões para que a história não prevalece em sala de aula era de que os professores não podiam contar com muitos planos de aula de fácil acesso e eram poucas as atividades que poderiam utilizar sem a necessidade de fazer um monte de investigação por conta própria. Já não é fácil para alguém imerso na história da matemática desenvolver ideias para serem trabalhadas na sala de aula, mas para alguém com apenas um conhecimento limitado, é muito demorado.

Hoje existem novos materiais (livros paradidáticos) e a internet como uma fonte rica em informações. E uma vez que eles possam ver a história como algo bem sucedido em aumentar seus alunos interessados em matemática, os próprios professores serão mais motivados a desenvolver material por conta própria. Tornando – se pesquisadores e reflexivos.

Para o pesquisador KLERK (2008, p. 353), as vantagens da utilização da história da matemática no ensino da Geometria podem ser vistas em diferentes níveis. Alguns dos benefícios que são frequentemente mencionadas são as seguintes:

- que motiva os alunos que tenham sido afastados devido serem sujeitos à apresentação impessoal, racional e lógica dos manuais,

- ensina "valores humanos"para os alunos,

- que dá aos alunos uma sensação de movimento, progresso e inerente mudança continua na ciência, e

- fornece uma perspectiva inteiramente diferente sobre a natureza do assunto do que aquilo que teria obtido pelo estudo de sua estrutura, de natureza teórica, dados, etc

LAVERDURE(2004) argumenta que podemos recorrer à história porque a história nos fornece um panorama que vai além das meras tecnicalidades da matemática contemporânea.

> *"Nós não pensamos que compreendemos algo, até que tenhamos entendido o porquê dele... E o porquê de uma coisa é o entendimento da sua causa principal",* afirma ARISTÓTELES em Analíticos Posteriores.

A história pode ser uma ferramenta para aprofundar nossa compreensão do desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. A história não é meramente uma ferramenta para tornar a matemática acessível aos nossos estudantes. A História é uma condição necessária. Como disse Eval Ilyenkov "uma compreensão concreta da realidade não pode ser alcançada sem uma abordagem histórica."

Realidade, aliás, não é algo que você pode perceber pela simples observação. Nem pode ser apreendida pelas aplicações de conceitos, independentemente da forma como sutis são as suas ferramentas conceituais. A realidade não é uma coisa. É um processo que, sem trazer percebido, discretamente, atravessa, a cada momento, os pensamentos e as ideias das gerações anteriores. A história está embebida em realidade.

Resumindo as idéias anteriores, a história não é apenas uma ferramenta motivacional, nem apenas uma maneira de ensinar a entender os alunos o raciocínio matemático. A História é uma condição necessária. Sem história equivale a fechar, em nós mesmos, as portas para uma apreensão da realidade, que equivaleria ao egocentrismo e cegueira. Temos de reconhecer que muitas vezes, no nosso ensino da matemática, não temos sido muito bem sucedido em fazer a dimensão histórica do conhecimento e sua importância na compreensão do nosso mundo.

Essa relação pedagógica pode ocorrer de duas maneiras: a primeira, a incorporação física de conteúdo histórico, através de discussão, resolução de problemas, etc, ou seja, usando materiais que reflitam diretamente de volta sobre a história da matemática e, segundo, analisar a história da matemática para os procedimentos e processos que envolvem o ensino e a promoção da própria matemática.

3.1 A epistemologia da matemática e o seu lugar na sala de aula

A partir do que estamos estudando até aqui, pensamos como seria possível o conceito epistemológico chegar até a sala de aula? Principalmente uma sala de aula de matemática pública e de periferia. Afirmamos que esse tópico é possível e necessário nas aulas de Matemática. Como em KLERK, (2008) o contexto das aulas de matemática não pode ser de apenas de teoremas, provas, corolários, algoritmos e conceitos decorados.

Deve-se dar atenção ao conceito epistemológico como a aquisição de conhecimentos e o caráter verdadeiro de Matemática. Se perguntássemos aos alunos de uma sala de aula de matemática qual o significado da Matemática? Qual seria a resposta? Acredito que muitos falariam sobre as técnicas matemáticas. Muitos, realmente, estão apenas interessados nas técnicas matemáticas, outros nunca viram e nunca virão uma matemática diferente da que utiliza técnicas.

Pode ser que, realmente, alguns estejam interessados nas técnicas, mas certamente muitos gostariam de estudos mais profundos em Matemática. Não é a toa que sempre ouvimos as mesmas falas: “Por que tenho que aprender isso?” ou “Pra que isso serve?”. Isso nos deixa a hipótese de que eles tem a curiosidade de algo mais profundo que meramente técnicas. Por isso quando BARBIN(1995), fala que a o estudo da história da Matemática altera profundamente as concepções epistemológicas do conhecimento da matemática, isso realmente acontece e chega as salas de aulas de Matemática do ensino básico.

As aulas devem ter os objetivos, tais como apreciação e compreensão das origens das idéias matemáticas e como elas evoluíram. Vários estudos podem ser realizados, como sugerido por STEIN (2004): a evolução de conceitos, tais como número, função e prova. A evolução do simbolismo e sua relação com conceitos.

Capítulo 4: Geometria e história: um software em proposta

O computador, como já foi discutido em um capítulo anterior, é considerado um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos, principalmente na medida em que possibilita o desenvolvimento de um trabalho que se adapta a distintos ritmos de aprendizagem e possibilita ao aluno o aprendizado com seus próprios erros (GALHARDI. 2003).

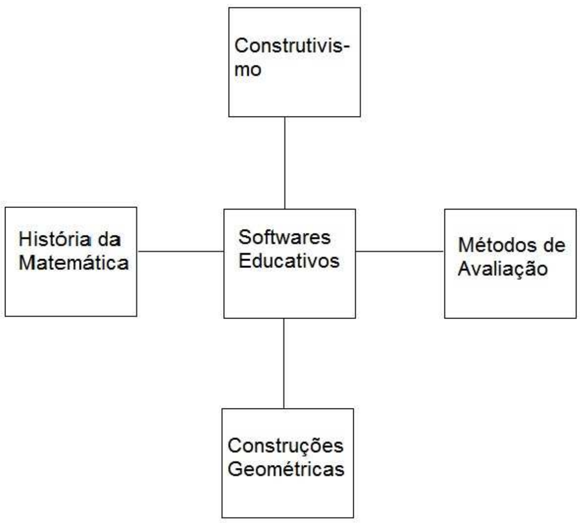
Para realizar esse trabalho utilizamos um software educativo que pode ser definido como Leal (2005, p.4) uma classe de interfaces educativas ou conjunto de artefatos criados para funcionarem enquanto mediadores em atividades educativas de formação em áreas distintas do conhecimento.

Um dos objetivos de sua utilização incide na procura de meios que reforcem a motivação dos alunos no processo de ensino e aprendizagem. Por isso, em termos pedagógicos, é fundamental analisar as teorias de aprendizagem adotadas pelos construtores. (Leal, 2005) Como Papert, aqui, apresentamos uma perspectiva construtivista, onde a aprendizagem é concebida como um processo de acomodação e assimilação em que os alunos modificam as suas estruturas cognitivas internas através das suas experiências pessoais.

Nesta teoria os alunos são encarados como participantes ativos, aprendendo de uma forma que depende do seu estado cognitivo concreto. Nesta aprendizagem, os conhecimentos prévios, interesses, expectativas e ritmos de aprendizagem são levados em conta.

Assim o software educativo possibilita a expressão e exploração individualizada, permitindo que os alunos desenvolvam aspectos específicos na aprendizagem.

Aqui propomos o desenvolvimento do software como um produto que expressa meios para o ensino da geometria e a história da matemática. Para isso temos que ter compreensão da estrutura geométrica, computacional e ergonômica. Abaixo vai uma adaptação do esquema de Neto(2005) para o projeto de desenvolvimento do software.



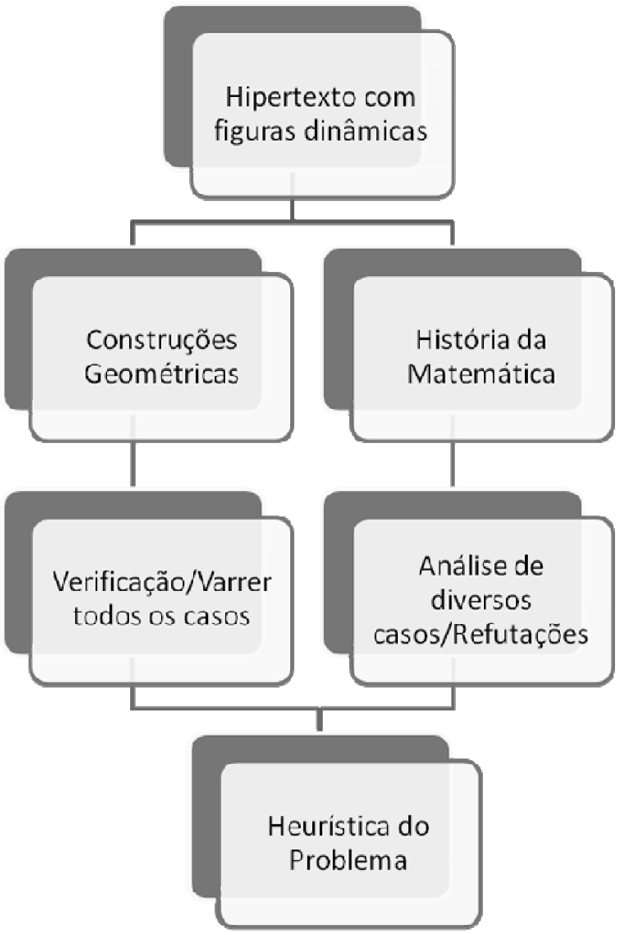
Para o desenvolvimento serão utilizados hipertextos com figuras dinâmicas que permitiriam trabalhar com a história da matemática, potencializando, assim, a manipulação, experimentação e verificação. Serão desenvolvimento mini-aplicativos para incorporação de ferramentas diversas no software. Para tanto são necessários conhecimentos de programação em Java e outras linguagens, mas também é relevante a estruturação de uma análise das possibilidades didáticas deste recurso.

NETO (2010, p.3), analisa a sequência didática seguinte como meio de viabilizar a aprendizagem do aluno, como uma experiência matemática significativa, permitindo que se obtenham conhecimentos matemáticos. Essa sequência é composta por quatro etapas, que são: a apresentação, que é a proposição de um problema para o aluno, fase em que são contemplados o contrato didático e a transposição didática; o "debruçamento" que é a ocasião em que o aluno se debruça sobre o problema proposto, formando conjecturas e fazendo novos experimentos.

Ao encontrar a sua solução para o problema dado temos os seguintes passos; a solução é validação do conhecimento desenvolvido pelo aluno, momento em que se tenta formalizar o conhecimento do aluno. Neste processo, há necessidade de intervenção do professor e a prova: É a formalização propriamente dita, quando o estudante faz que sua solução assuma a linguagem matemática.

Neste caso é o software que se pretende desenvolver. Tais etapas reproduzem para o aluno o contexto de trabalho do matemático, viabilizando assim a lógica do descobrimento matemático de LAKATOS(1978).

A seguir demonstraremos um esquema de como seria o trabalho da história da Matemática com a utilização de softwares. O esquema demonstra o caminho percorrido pelo aluno desde o momento que irá ter o hipertexto em sua frente com figuras dinâmicas, até as possibilidades de através da história da Matemática ele poder fazer conjecturar para a demonstração de teoremas ou resolução de problemas.



Proposta de caminho do software de geometria dinâmica

Capítulo 5: A pesquisa: o plano em ação

Neste capítulo, dedicado ao desenvolvimento da pesquisa, refletimos sobre o contexto sociocultural no ensino da matemática, sobre a organização e vivências e uma análise da utilização dos recursos da história da matemática e o computador na sala de aula.

5.1 O contexto sociocultural em estudo

A escola é uma instituição social que tem sua existência pensada e vivida na complexidade das relações que são permanentemente organizadas no contexto sociocultural. Como DAYRELL(1996, p.136)"(...)alunos e professores, seres humanos concretos, sujeitos sociais e históricos, presentes na história, presentes na história." Caracterizada, pelas relações sociais, a realidade escolar aparece mediada, no cotidiano, pela apropriação, elaboração, reelaboração ou repulsa expressas pelos sujeitos sociais.(EZPELETA & ROCKWELL, 1986).

A escola é uma instituição única, os conflitos sociais que se configuram no cotidiano dessa instituição não ocorrem sem motivos, são historicamente construídos. No entanto, a história se constrói e se reconstrói cotidianamente, mediada por sujeitos que a produzem e são ao mesmo tempo produtos dela. Os educadores são sujeitos do mundo e, com nosso inconformismo e a nossa rebeldia, temos que olhar, viver, sentir a escola como sendo um local onde se mantém viva a luta pelos direitos à cidadania e o sonho de uma vida digna e mais solidária para os até então excluídos. (COPOLILLO, 2011)

Mas é por isso que o professor, e principalmente o professor de Matemática, não tem que se eximir do pensamento político e pensar apenas “nos números”. Temos que ter bem claro o significado de que somos intelectuais que estamos a serviço de algo e atrás da melhoria dos Homens.

A educação é uma via fraca pra a transformação social, mas não podemos esquecer que o professor é instrumento de uma ideologia e que essa ideologia é a da classe dominante, que não leva em consideração o povo, para quem desenvolvo minha prática. Para que deixe de ser um instrumento do aparelho ideológico do Estado e possa construir minha identidade como Professora que seja consciente dos fracassos da educação e tente combatê-los e entendê-los, não apenas me conformar e ajudar formar uma sociedade libertadora. (FREIRE, 1996)

O processo de alteridade, que tem significado de reconstrução da identidade na diferença, junto à matemática é a ver nas diversas identidades. Porque concordo com D'Ambrosio quando ele diz que há várias maneiras dos povos matematizarem e de uma educação matemática também deve conter em seu núcleo a condição de ser uma produção social.

E pensando com BISHOP(1999), acredito que aprendizado interpessoal das matemáticas ignora totalmente estas conexões e significados pessoais e, em consequência, despersonaliza o processo de aprendizagem. A ausência de significados pessoais significa que, na realidade, nas aulas onde são ensinadas matemáticas não há pessoas: só há um professor de matemática e vários alunos. Por isso, a tarefa desse professor é ensinar matemática com maior eficácia e eficiência possível para que os alunos possam aprendê-la.

As matemáticas são objetos impessoais que se devem transmitir mediante uma comunicação unidirecional. Os significados e os pontos de vista pessoais do professor são irrelevantes e não fazem mais que entravar, enquanto se supõe que todos os alunos devem aprender exatamente o mesmo, existe não como pessoas sim como um aluno generalizado. Raras vezes as pessoas podem expressar seus sentimentos, sua intuições, seus significados e suas interpretações pessoais.

E ainda compartilhamos com Bishop da mesma opinião: que o aprendizado é impessoal e, em essência, antieducativo. D'AMBRÓSIO (2000) como (Dayrell, 1996), ainda propõem uma renovação no currículo, para que formemos realmente o cidadão crítico e não mais um produto da homogeneidade, que consagra a desigualdade e as injustiças das origens sociais do aluno. É preciso que o aluno perceba quando a matemática é usada para favorecer a classe dominante e quando a matemática é usada para a vida, para a pessoa exercer a cidadania, para desenvolver uma atitude crítica ao analisar cálculos, estatísticas e ao ler um artigo.

> *“A alternativa que proponho em orientar o currículo matemático para a criatividade, para a curiosidade e para crítica e questionamento permanentes, contribuindo para a formação de um cidadão na sua plenitude e não para ser um instrumento de interesse, da vontade e das necessidades das classes dominantes. A invenção depende do contexto social, político, econômico e ideológico.“(D'AMBRÓSIO, 2000, p. 245)*

5.2 Organização e vivência: as aulas

O cotidiano das aulas de matemática é a grande motivação de análise para essa pesquisa. O estudo que apresentamos é um relato das vivências como professora de Matemática. Elas foram organizadas e a partir disso levantou-se a hipótese de como a prática pedagógica poderia ser melhorada articulado os recursos da computação e os meios da história da matemática.

As vivências ocorreram nas aulas de Matemática do Ensino Médio com alunos adolescente de 15 a 18 anos do período noturno da Escola.

5.3 Um caminho para a análise

Aqui faremos uma análise reflexiva sobre o uso da história da Geometria, uso de computadores, melhoria da prática pedagógica do professor de Matemática e efeitos na sala de aula de Matemática, como eixos referenciais somados aos referenciais teóricos utilizados como fundamentação para essa pesquisa.

No decorrer da pesquisa bibliográfica e do olhar nas vivências da sala de aula podemos considerar que o uso da história da matemática é um fator que pode transformar a prática, mas os professores ainda têm dificuldade em trabalhar com esse meio na sala de aula. Ela se faz pelo problema em encontrar materiais e organizá-los. Pois pesquisar em história envolve uma carga de trabalho bem grande e não se pode dar uma aula com um conhecimento razoável. É necessário tornar-se um professor pesquisador, como na definição de Garcia (2007, p.1), *"professor pesquisador seria aquele professor que parte de questões relativas a sua prática com o objetivo de aprimorá-la*." Essa pesquisa tem como finalidade o conhecimento da realidade para transformá-la, visando a melhoria de suas práticas pedagógicas.

No que se refere ao uso de novas tecnologias, essas são indispensáveis em nossas vidas hoje, mas ainda buscam legitimidade na educação. Mesmo sabendo de seu "poder" na capacidade de visualização, ainda as técnicas e o uso de "papel e lápis" são meios de se obter o conhecimento matemático legitimados pela história. Além disso, temos o fator das diversas políticas sobre a utilização dos computadores das Secretarias da Educação. A implementação de projetos que muitas vezes impossibilitam que o professor trabalhe com ambientes computacionais.

Outro eixo que devemos discutir aqui é a transformação na prática pedagógica do professor. A articulação da história da Matemática com o uso das novas tecnologias vem trazendo uma nova reflexão para os professores de Matemática. Transformadora, pois como disse acima exige a formação do professor pesquisador e para que isso ocorra, há a necessidade de rever sua prática e repensá-la quanto às mudanças da sociedade.

E quando houver essa reflexão vamos chegar ao último eixo que é a melhoria do ensino e aprendizagem dos alunos. Muitos fatores políticos implicam na chegada desse último eixo: como a melhoria dos salários, a dedicação exclusiva do professor ao seu trabalho, a formação continuada etc. Mas percorrendo o caminho do professor pesquisador e reflexivo isso ocorrerá.

Algumas considerações

Neste trabalho fizemos uma caminhada sobre a geometria e o uso de recursos computacionais. No primeiro capítulo definimos a justificativa, o objeto de trabalho e o método utilizado para a pesquisa.

No segundo capítulo foi realizada a reflexão sobre a geometria e a construção do conhecimento. Primeiro discutimos de geometria como concepção história e os métodos computacionais como visualização das construções históricas.

No terceiro capítulo o foco foi o ensino da geometria com um enfoque histórico-epistemológico. Discutimos o ensino de geometria através de sua história, não apenas como algo que irá motivar os alunos, mas como algo que mudará a prática pedagógica do professor e as concepções epistemológicas do conhecimento matemático.

No quarto capítulo há a proposta de construção de um software para o ensino de Geometria. Através de hipertextos com figuras dinâmicas poderemos fazer construções geométricas e articulado com a história da geometria pode-se analisar/refutar ou verificar os diferentes casos nas construções. Por fim, no quinto capítulo fazemos uma análise do trabalho.

Nossa discussão envolve a reflexão sobre o ensino público, a história da matemática e o uso de computadores na sala de aula, que pode ecoar até como utopia. Mas acredito que a reflexão sobre a prática traga ao professor a discussão da importância de usar meios diferenciados para o ensino de Matemática, o faça pesquisar e criar novos materiais didáticos para suas novas práticas pedagógicas. Repensando suas práticas o professor irá buscar meios para romper o obstáculo epistemológico que é encontrado no ensino de geometria.

Espero ter deixado claro que a integração das tecnologias de informática no ensino da matemática está longe de ser fácil de alcançar. Várias características da cultura matemática e restrições funcionam como obstáculos para a integração e as estratégias desenvolvidas espontaneamente pelo sistema educacional não são necessariamente as mais adequadas. Uma melhor compreensão da forma como estas características e limitações da forma de ensino e aprendizagem nos ambientes tecnológico e da maneira que se entrelaçam mutuamente. É hoje mais que nunca uma necessidade para a investigação.

É muito interessante que na Geometria, o uso de softwares de geometria dinâmica abre o espaço para a discussão de que ele é uma poderosa ferramenta, que "varre" os casos de construção, confirma os casos, mas não demonstra, por isso não tem o valor da prova matemática. Mas por que o educador deve usar a geometria dinâmica?

A geometria dinâmica, não é suficiente para o matemático, mas na sala de aula é ferramenta importante. Seu uso, mesmo que intuitivamente, leva ao rigor. Como comprovado nas visualizações feitas com o cabri para ilustra a proposição 1 do livro 1 de Euclides. O “Cabri”, por exemplo, permite visualizar, esgotar os casos e “varrer” todas as situações possíveis.

Ela traz ao usuário do software um grau de liberdade já que podemos trabalhar com as hipóteses de um teorema ou problema e verificar se são suficientes para sua prova ou solução, lançando uma hipótese e lançando contra exemplos que enfraqueçam a hipótese.

Trazendo os ambientes computacionais para a Matemática acredito, como BISHOP(1999), que o fato de que as verdades matemáticas estão por toda parte e para qualquer um, não é motivo para decidir que a educação matemática deve ser igual em todas as partes em todo o mundo. Por mais que as verdades matemáticas são universais, este não significa que o ensino da Matemática deve ignorar a individualidade do aluno ou o contexto social e cultural do ensino. Uma educação Matemática deve fazer algo mais que limitar-se a comunicar estas verdades aos alunos. Uma integração entre o aluno e a Matemática pode ser melhorada usando esses ambientes.

E, então, finalizando aqui por hora, esperando que as reflexões aqui apresentadas possam servir de referência ao professor que deseja repensar sua prática e utilizar novos meios para o ensino de Matemática.

Referências Bibliográficas

____A.P.M. Geometria no séc. XVII: Área da ciclóide segundo Roberval, 1998. Acesso em 29 de agosto de 2010. http://www.apm.pt/apm/foco98/activ9.html

ABRANTES, Paulo. SERRAZINA, Lurdes. OLIVEIRA, Isolina. A Matemática na Educação Básica. Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica de Portugal. Lisboa, 1999.

ALMEIDA, Maria Elisabeth B. T. M. Pinto de. Informática e Educação – Diretrizespara uma formação reflexiva de professores. Faculdade de Educação PUC/SP, 1996.(Dissertação, Mestrado em Educação: Supervisão e Currículo

ANGLIN, W.S. Mathematics. A consise History and Philosophy. Editora Springer, Canada, 1994.

ARTIGUE, Michèle. (2000, March). Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching. *Proceedings of the annual meeting of the Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM)*, *1*, 7-17.

BACHELARD, Gaston. A Formação do Espírito Científico: Contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto Editora, 1996.

BARBIN, Evelyne. Painel: Original sources in the classroom. In: in HPM2004 & ESU4, p.192, Sweden, 2004

BARBIN, Evelyne. Schweiger, Fritz. Radford, Luis. Swetz, Fank. Mathematics of Yesterday and Teaching of today. In: in HPM2008 & ESU5, Prague, 2008.

BARBIN, Evelyne. The Role of problems in the history and teaching of mathematics. In: Vita mathematica. Historical Research and Integration With Teaching. Ronald Calinger (ed.). Wasghinton: MAA, 1996.

BEHRENS, Maria Aparecida. Projetos de aprendizagem colaborativa num paradigma emergente. In: MORAN, José Manuel. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. Campinas – SP: Papirus, 2000.

BERTONHA, Regina Aparecida. O Ensino de Geometria e o dia-a-dia na sala de aula. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e perspectivas, Editora Unesp, Rio Claro, 1999.

BISHOP, Alan J. Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural. Barcelona, España: Ediciones Paidós Ibérica, 1999.

BOYER, Carl B. História de Matemática. Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2003.

BROSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques ET lês problèmes em mathèmatiques. Recherches em Didatiques dês Mathématiques, v.4.2m p164-168, 1983.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira. Três excursões pela História da Matemática. Rio de Janeiro: Intermat, 2008.

CHACÒN, Inês Ma Gomes. Matemática Emocional: Os afetos na Aprendizagem Matemática. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003.

COPOLILLO, Martha Lenora Q. O Contexto Social e as Ações Pedagógicas Cotidianas na Educação Física Escolar: (im)possibilidades. VII EnFEFE - Encontro Fluminense de Educação Física Escolar. Disponível em: http://cev.org.br/biblioteca/o-contexto-social-as-acoes-pedagogicas-cotidianas-educacao-fisica-escolar-impossibilidades. Acessado em: 28/08/2010.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. A interface entre história e Matemática: Uma visão Histórico-Pedagógica. In: Facetas do diamante: Ensaios sobre educação Matemática e história da Matemática. John A. Fossa (org). Rio Claro: Sociedade Brasileira de Historia da Matemática, 2000.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. In: Educação e Pesquisa – Revista da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, v.31, p.99-120. Jan/abr 2005.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática - Elo entre as tradições e a modernidade. Editora Autêntica, Belo Horizonte, 2001.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática, Volume Único. Editora Ática. São Paulo, 2005.

DAYRELL, Juarez T. A escola como espaço sócio-cultural. In: DAYRELL, Juarez T. (Org.) Múltiplos Olhares sobre educação e Cultura. Belo Horizonte: Ed. UFMG, 1996. P 136-161

EDWARDS, Harold M. Fermat's Last Theorem, Springer, New York, 1977.

EVES, Howard. Introdução à história da Matemática. Editora da Unicamp, Campinas, 2004.

EZPELETA, Justa, Rockwell. Pesquisa participante. Cortez, São Paulo, 1986.

FASHEH, Munir. Matemática, cultura e poder. In: Zetetiké/Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática - - n.1, mar. (1993-) - Campinas, SP: UNICAMP – FE – CEMPEM, 1998.

FREIRE, Paulo. Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa. Paz e Terra. São Paulo, 1996

GALHARDI, A. C. *Um estudo exploratório sobre a metodologia de seleção de softwares educacionais no ensino da pesquisa operacional*. Anais do X Simpósio de Engenharia de Produção, X SIMPEP, 2003.

GARCIA, Vera C. G. Fundamentação teórica para as perguntas primárias: O que é Matemática? Porque Ensinar? Como se ensina e como se aprende? Apostila, 2007.

GREGOLIN, Vanderlei Rodrigues. Conceitos Matemáticos em ambiente Logo, Ufscar, dissertação, São Carlos, 1994.

GUICHARD, Jean Paul. adaptação de artigo História da Matemática no ensino da Matemática. Disponível em: http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.html

HUETE, J.C. Sánchez. BRAVO, J.A. Fernandez. O Ensino da Matemática-Fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Editora Artmed. Porto Alegre, 2006.

KATZ, Victor. Historical Modules for the Teaching and learning of Mathematics. In: in HPM2008 & ESU5, Prague, 2008.

KLERK, Johan H de. History and Epistemology As Tools in Teaching mathematics. In: in HPM2008 & ESU5, Prague, 2008.

LAKATOS, Imre. A lógica do descobrimento matemático:provas e refutação. Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1976.

LAURO, Maira Mendias. Percepção-Construção-Representação-Concepção: Os quatro processos do ensino da Geometria: uma proposta de articulação. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

LAVERDURE, Gilles. Integrating the history of mathematics in to the teaching of mathematics. In: in HPM2004 & ESU4, p.192, Sweden, 2004

MARKUCHEVITCH, A.I. Curvas Notáveis. Editora Atual. São Paulo, 1995.

MARTINS, A. adaptação livre de artigo de Jean Paul Guichard História da Matemática no ensino da Matemática. IREM de Lyon in Bouvier, A. (coord), Didactique des Mathématiques, Cedic/Nathan, 1986.

MATOS, J.M e SERRAZINA, M.de L. Didactica da Matemática. Lisboa: Universidade Aberta.

MENDES, Lina Maria Braga. Experiências de Fronteira: Os meios Digitais em Sala de Aula. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

MIGUEL, José Carlos. Programa UNESP de Educação de Jovens e Adultos – PEJA/Marília: articulação entre teoria e prática na formação do educador e a perspectiva de integração social e comunitária. Encontrado em http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/educacao/article/viewFile/3216/2678. Acessado em: 28/08/2010

MOTTA, Cristina Dalva Van Berghem. História da Matemática na Educação Matemática: espelho ou pintura? Editora Comunicar, Santos, SP.

OLIVEIRA, Lilian Haffner da Rocha. Trabalho coletivo em educação: os desafios para a construção de uma experiência educacional fundamentada na cooperação em uma Escola Municipal de São Paulo. São Paulo, Feusp, 2006. (Dissertação de mestrado)

OLIVEIRA, Sandra Ramalho. Imagem também se lê. São Paulo. Rosari, 2006.

PAPERT, S., Logo: Computadores e Educação, Editora Brasiliense, São Paulo, 1985.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria: uma visão histórica. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Campinas, 1989. Dissertação de Mestrado.

PENIN, Sonia. Cotidiano e Escola, a obra em construção. São Paulo. Cortez, 1989.

PIETROCOLA, M. Construção e realidade: o resultado científico de Mario Bunge e o ensino de ciências através de modelos. In: Investigações em ensino de ciências. <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S151673132004000300019& script=sci_arttext> . Acesso em 29 de agosto de 2010.

Proninfo: Informática e formação de professores/Secretaria de Educação a Distância. Brasília: Ministério da Educação, Seed, 2000.

SANTANA, JOSÉ ROGÉRIO (Discente-Autor /Graduação): Telejava/Geometria - desenvolvimento de ferramentas para o ensino da geometria na internet.; 2001; Comunicação E Congresso; X Encontro de Iniciação Cientifica; Universidade Estadual Do Ceara; Campus Da Uece - Itaperi; Fortaleza; Brasil;Meio magnético.

SILVA, C.M.S. A Matemática Positivista e sua difusão no Brasil. Vitória: EDUFES, 1999.

TAVALERA, Leda Maria Bastoni. Geometria Dinâmica e Reconstrução do Pensamento Geométrio Grego na Sala de Aula. In: Exata, edição novembro, volume 2. Disponível em <portal.uninove.br/marketing/cope/exactav2>. Acesso em> 29 de agosto de 2010.

VALENTE, J. A., Computadores e Conhecimento: repensando a educação, Gráfica da Unicamp,Campinas, 1993.

VALENTE, Sérgio. JUNQUEIRA, Margarida. Realização e exploração de construções geométricas dinâmicas: materiais para a sala de aula. IV Concurso de Materiais de Apoio à Integração e Utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação nos Ensinos Básicos e Secundários. (GTC, Grupo de Trabalho de Geometria, 2006). Portugal, 2006.

WIELEITNER, H. Histórias de las Matemáticas. Editorial Labor. Barcelona 1932.

NÓVOA, Antônio. O Professor Pesquisador e Reflexivo. Entrevista concedida em 13 de setembro de 2001. Disponível em: http://www.tvebrasil.com.br/salto/entrevistas/antonio_novoa.htm Acessado em 22/11/2006

HEATH, Thomas. EUCLIDE The thirteen Books of THE ELEMENTS. Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath , DOVER.

LEAL, Fabiano. Pena, Ricardo Silva. Almeida, Dagoberto A. Souza, Elaine A. Moraes, Paulo A. Uma ferramenta de ensino para análise de tempos nas relações de trabalho**.** XII SIMPEP – Bauru, SP, Brasil, 7 a 9 de Novembro de 2005.

ARISTOTLE, Posterior Analytics, Loeb Edition, translated by Hugh Tredennick, 1960.

SANTANA, Ivanilde da Conceição, Professores de Matemática na Educação de Jovens e Adultos: o pensamento geométrico no centro das atenções.237 f. Dissertação(Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

VYGOTSKY, L. S. Interação entre aprendizado e desenvolvimento. In: VYGOTSKY, L. S. A formação social da mente. Trad. José Cipolla Neto, Luis S. M. Barreto, Solange C. Afeche. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1989. p. 89–103. (Psicologia e Pedagogia).