Uso de dobraduras no ensino e aprendizagem de conceitos básicos de geometria nos anos finais do Ensino Fundamental

Priscila Sampaio Szauter Pereira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO NO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
ENSINO DE MATEMÁTICA

Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Orientadora: Prof.ª Dra. Iole de Freitas Druck

São Paulo, setembro de 2023

Uso de dobraduras no ensino e aprendizagem de conceitos básicos de geometria nos anos finais do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências. Esta versão contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante defesa pública ocorrida em 16/11/2023.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela minha vida, por estar ao meu lado, me guiar, fortalecer e proteger. Senhor, obrigada pelo fim de mais essa etapa.

A minha orientadora, Profª Iole de Freitas Druck, que muito contribuiu com esta pesquisa por compartilhar um pouco de sua experiência e conhecimento. Por dedicar muitos momentos para auxiliar neste trabalhado, pela sua paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão deste mestrado.

Às professoras doutoras Adair Nacarato e Carmen Lúcia Passos, que fizeram parte da banca de qualificação, cujas sugestões pertinentes me ajudaram a complementar e aperfeiçoar este trabalho.

A meu marido, Tássio Henrique Pereira, pelo incentivo, companheirismo e apoio constante.

Aos meus pais, Beatriz e Claudemir, que muito me ensinaram, apoiaram as minhas escolhas e são meus exemplos de vida.

RESUMO

Pereira, P. S. S, **Uso de Dobraduras no ensino e aprendizagem de conceitos básicos de geometria nos anos finais do Ensino Fundamental**. 2023. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.

Nesta dissertação é investigado o potencial da utilização de dobraduras para motivar, estimular a participação e favorecer a aprendizagem significativa de conceitos básicos da Geometria Euclideana plana, de estudantes de 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental. Os temas de geometria aqui delimitados são: reta e segmento de reta; retas concorrentes, paralelas e perpendiculares; ângulo reto, agudo e obtuso; segmentos congruentes; retângulo, quadrado e suas diagonais; e bissetriz de um ângulo. O desenvolvimento da pesquisa realizada foi embasado em trabalhos de pesquisadores da área de Educação Matemática sobre: o uso de materiais manipuláveis em sala de aula em artigos de Adair Mendes Nacarato e Cármen Lúcia B. Passos; e o desenvolvimento do pensamento geométrico em artigos de Luiz Carlos Pais e de Mary Crowley e Adela Jaime Pastor, estas últimas em trabalhos a respeito do Modelo de Van Hiele. Seguindo a metodologia de pesquisa do *Design Experiment*, conjecturou-se hipóteses buscando evidenciar a especial adequação de dobraduras, como modelos concretos, ao ensino/aprendizagem dos conceitos de geometria selecionados, e apontando os resultados de aprendizagem esperados. A partir disso e seguindo as fases de aprendizagem do Modelo de Van Hiele, foram elaboradas sequências de atividades e aplicadas em salas de aulas das quais a pesquisadora era a regente, ao longo de três (3) ciclos iterativos – em 2019, 2021 e 2022. A cada iteração, seguindo o *Design Experiment*, foi realizada a análise dos resultados para o aprimoramento das hipóteses e da sequência de atividades a ser aplicada na iteração seguinte. Este processo sucessivo de conjectura, teste e revisão, culmina aqui com a formulação e disponibilização, aos eventuais interessados, de uma proposta de sequência didática que consubstancia o produto final desta pesquisa.

Palavras-chave: Dobraduras, Ensino/aprendizagem de Geometria Elementar no Ensino Fundamental II, Modelo de Van Hiele, *Design Experiment*.

ABSTRACT

Pereira, P. S. S, **Use of foldings in instruction and learning of basic concepts of geometry in the final years of Elementary School.** 2023. Dissertation (Master's Degree) – Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo.

This dissertation investigates the potential of using foldings to motivate, stimulate participation and favor the meaningful learning of basic concepts of flat Euclidean Geometry, of 6th or 7th's years of Elementary School's students. The geometry topics here delimited are: line and line segment; concurrent, parallel and perpendicular's lines; straight, acute and obtuse angles; congruent segments; rectangle, square and their diagonals; and bisector of an angle. The development of the research carried out was based on works by researchers in the area of Mathematics Education about: the classroom's use of manipulable materials in articles by Adair Mendes Nacarato and Cármen Lúcia B. Passos; and the development of geometric thought in articles by Luiz Carlos Pais and by Mary Crowley and Adela Jaime Pastor, these last ones in works on the Van Hiele Model. Following the Design Experiment research methodology, hypotheses were conjectured seeking to highlight the special suitability of foldings, as concrete models, to instruction and learning of the selected geometry concepts, and pointing out the expected learning results. From that and following the learning phases of the Van Hiele Model, sequences of activities were developed and applied in the researcher's classrooms, in three (3) iterative cycles – in 2019, 2021 and 2022. At each iteration, following the Design Experiment, the results were analyzed to improve the hypotheses and the sequence of activities to be applied in the next iteration. This successive process of conjecturing, testing and revising, here culminates with the formulation and availability, to any interested parties, of a didactical sequence proposal that embodies the final product of this research.

Keywords: Foldings, Instruction and learning of Elementary Geometry in final Years of Elementary School, Van Hiele Model, Design Experiment.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

A escolha do tema da dissertação – o uso de dobraduras no ensino/ aprendizagem de Geometria – se deve a um trabalho realizado em 2013, como estagiária do CAEM – Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática, no qual montei e ministrei uma oficina para professores do Ensino Fundamental II com atividades que relacionam dobraduras com conceitos geométricos, durante a minha graduação em Licenciatura em Matemática no IME/USP. Ao ingressar no mestrado profissional em 2018, pude escolher estudar mais sobre o assunto para investigar a eficácia de atividades deste tipo ao serem aplicadas em sala de aula, já que, à época, os professores que participaram da oficina mostraram grande interesse ao realizar as atividades propostas. Por outro lado, como professora desta fase de escolaridade a partir de 2015, me deparei com as dificuldades de aprendizagem dos alunos em geometria e com o material apostilado de uma rede privada onde trabalhei com abordagem mecanicista cuja estrutura básica era a da apresentação de definições ou resultados prontos seguidos de resoluções de exercícios, sem abrir espaço para experimentações e discussões de ideias que despertassem o interesse dos alunos pela geometria.

Corroborando com as minhas preocupações elencadas acima, passo a citar considerações de alguns pesquisadores ou constantes em documentos oficiais vigentes norteadores da Educação Básica no Brasil.

No livro “A Geometria nas séries iniciais” (NACARATO, PASSOS, 2003), as autoras ressaltam que muitos pesquisadores discutem o abandono do ensino da geometria, destacando como causas a reforma do ensino que ocorreu com o Movimento da Matemática Moderno e o despreparo dos professores. Segundo elas, no final da década de 70, percebe-se uma preocupação com relação ao ensino da geometria, como pode ser observado nas propostas curriculares oficiais e nos livros didáticos daquela época (destacando-se as propostas dos Guias Curriculares para o ensino de Matemática no 1º Grau do Estado de São Paulo (1975) e pelos materiais produzidos pelo projeto PREMEM/MEC/IMECC-UNICAMP (1972), sob direção do Prof. Ubiratan D’Ambrosio). Entretanto, as autoras relatam:

> A nossa experiência como professoras e como formadoras de professores tem nos apontado que esse movimento de recuperação do ensino da geometria não atingiu ainda a maioria das escolas brasileiras, principalmente as públicas e as séries iniciais do Ensino Fundamental (NACARATO, PASSOS, 2003, p. 32).

Para Sérgio Lorenzato (LORENZATO, 1995), o ensino de Geometria tem sido negligenciado por muitos professores em suas aulas de Matemática. Para o autor, isto se deve ao fato de não dominarem conhecimentos suficientes sobre geometria para poder trabalhá-la significativamente em suas aulas. Assim, o ensino de geometria é apresentado apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas nos livros didáticos desvinculados de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica. Segundo o autor, o estudo de Geometria é necessário para desenvolver o raciocínio visual e facilitar os processos mentais, sempre que forem proporcionadas aos alunos atividades que estimulem a descoberta, conjectura, experimentação e percepção espacial, que são habilidades fundamentais para o desenvolvimento das crianças. A Geometria é também um recurso facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento, sendo essencial para a formação de uma visão mais completa da Matemática.

> A Geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógico que a Matemática possui: ela se interliga com a Aritmética e com a Álgebra porque os objetos e relações dela correspondem aos das outras; assim sendo, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificados pela Geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz (LORENZATO, 1995, p. 6).

Para que a aprendizagem faça sentido aos alunos, é importante que os professores saibam escolher as metodologias de ensino que serão utilizadas em suas aulas. Nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (BRASIL, 2013) são citadas críticas à fragmentação das disciplinas, assim como à forma abstrata e descontextualizada com que são trabalhados os conteúdos. Segundo o documento, deve-se evitar a transmissão mecânica de um conhecimento, uma vez que isto não leva ao envolvimento ativo do estudante no seu processo de aprendizagem.

> A criação de um ambiente propício à aprendizagem na escola terá como base o trabalho compartilhado e o compromisso dos professores e dos demais profissionais com a aprendizagem dos alunos; o atendimento às necessidades específicas de aprendizagem de cada um mediante formas de abordagem apropriadas; a utilização dos recursos disponíveis na escola e nos espaços sociais e culturais do entorno; a contextualização dos

> conteúdos, assegurando que a aprendizagem seja relevante e socialmente significativa; e o cultivo do diálogo e de relações de parceria com as famílias (BRASIL, 2013, p. 119).

Na Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017) é recomendada a utilização de diversos tipos de recursos didáticos e materiais diferenciados, a fim de despertar interesse e favorecer um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. É lembrado ainda que estes recursos precisam levar a reflexões, contribuindo para a sistematização e formalização dos conceitos (BRASIL. 2017, p. 298).

O *preprint* do livro “Direitos à aprendizagem e ao desenvolvimento na educação básica: subsídios ao currículo nacional”, organizado pelo Grupo de Trabalho do MEC sobre Direitos à Aprendizagem e ao Desenvolvimento (GT-DiAD) (BONINI, DRUCK, BARRA, 2018), desenvolveu propostas a partir dos referidos direitos, entre 2012 e 2015, para serem debatidas em discussão nacional em 2016, visando o estabelecimento da BNCC. Neste trabalho já apareciam ideias sobre a importância da utilização de abordagens metodológicas de ensino diferenciadas, na parte voltada à área de Matemática.

> [...] pode-se concluir ser importante que, na área de Matemática, o currículo escolar contemple uma efetiva articulação dos conteúdos, com problemas que lhes são geradores, com suas aplicações nas várias áreas de conhecimento e com o exercício da cidadania. Para isso serão necessárias abordagens metodológicas diferenciadas, como, por exemplo, o trabalho a partir de projetos, modelagem matemática, investigações matemáticas ou outras opções metodológicas que permitam o trabalho integrado e constituam-se formas de garantir o acesso aos conhecimentos historicamente produzidos (BONINI, 2018, p. 146).

Encontrar metodologias e estratégias didáticas que modifiquem e valorizem a aprendizagem de Geometria pode conferir ao ensino subsídios que atraiam a atenção e a motivação dos alunos e provoquem, talvez, um importante passo para uma solução da problemática do ensino de Geometria.

A Geometria é uma área dinâmica da Matemática, o que a possibilita ser trabalhada por diversos recursos. Nesta dissertação, escolhi verificar a utilização das dobraduras e origamis como recurso para a aprendizagem de conceitos básicos de Geometria, tais como polígonos e relações entre retas e ângulos, que são apresentados no Ensino Fundamental. Na habilidade “Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares” constante da

BNCC (BRASIL, 2017, p. 303), sobre o uso de dobraduras pode-se ler: “(EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na **construção de dobraduras** ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.)”.

O uso de dobraduras (origamis) também é encontrado na publicação, na forma de *preprint,* do livro “Direitos à aprendizagem e ao desenvolvimento na educação básica: subsídios ao currículo nacional”:

> A partir da identificação de regularidades no mundo físico, abstraem-se noções de figuras geométricas com as finalidades de apropriar-se do espaço e nele intervir. Ou seja, figuras geométricas como triângulos, quadriláteros, círculos, pirâmides, cubos ou paralelepípedos são noções idealizadas, sem existência concreta na realidade. Assim, é fundamental oportunizar aos estudantes atividades que permitam construir representações gráficas e modelos concretos do espaço e das figuras geométricas, utilizando artefatos físicos (construções com o lápis usando régua e compasso; planificações; **origamis** etc.) e também utilizando aplicativos computacionais que permitam a manipulação, a investigação sobre as propriedades das figuras geométricas, bem como a validação dessas propriedades – por meio de instrumentos e construções concretas ou demonstrações matemáticas. Tais experiências se opõem a uma tradição persistente que dá uma atenção exagerada às classificações e à nomenclatura sem atribuição de significados mais concretos para uma leitura de mundo e que se esgotam em si próprias, em detrimento de operações mais complexas (BONINI, 2018, p. 157).

No livro “Origami em Educação e Arteterapia”, escrito por Sonia Bufarah Tommasi e Luiza Minuzzo (TOMMASI, MINUZZO, 2010), percebemos a pertinência de utilizar as dobraduras em sala de aula, uma vez que com elas pode-se propiciar o desenvolvimento de diversas habilidades nos alunos, além de favorecer a aprendizagem de conceitos Matemáticos.

> Cada vez mais o origami faz parte da ação educativa no Brasil, dos recursos que possibilitam a interdisciplinaridade dentro do currículo escolar. Através de sua prática o educador estimula outras atividades, tais como desenhar, pintar, recortar, colar, dramatizar, criar histórias e canções, estimular a imaginação criativa, ampliar o vocabulário, etc. Paralelamente possibilita a compreensão dos conceitos de formas geométricas e matemáticas, integração com a natureza e compreensão da biologia (TOMMASI, MINUZZO, 2010, p. 40).

Em outra citação do livro, Tommasi e Minuzzo destacam:

> O contato com o origami desde a pré-escola propicia aquisição e interiorização de conceitos como fração, dimensão, proporção e forma. Ao observar como se faz, e fazer a dobradura, a criança começa a perceber as coisas, a natureza e os objetos à sua volta. Ao mesmo tempo desenvolve a autoestima, concentração, memória, raciocínio lógico, psicomotricidade fina, imaginação e a criatividade. (TOMMASI, MINUZZO, 2010, p. 41)

Ainda segundo os autores: “A necessidade de seguir as regras básicas para a execução do origami desenvolve o raciocínio lógico, matemático, geométrico e simbólico.” (TOMMASI, MINUZZO, 2010, p. 45).

Os professores holandeses Pierre M. Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof em suas teses de doutorado, em 1957, classificam o processo de desenvolvimento do raciocínio geométrico na aprendizagem de qualquer tema de geometria em cinco níveis de complexidade, no que ficou conhecido como o Modelo de Van Hiele. O primeiro deles, denominado ‘Reconhecimento’ (em PASTOR, 1993) ou ‘Visualização’ (em CROWLEY, 1994), enfatiza a importância do uso de modelos concretos no início da abordagem de temas da geometria. Consideramos que com dobraduras podem-se obter modelos físicos especialmente adequados de noções básicas de geometria plana e espacial, como reta, polígonos e poliedros. Para cada nível do desenvolvimento do raciocínio geométrico são propostas, no modelo de Van Hiele, cinco fases de aprendizagem. Estas últimas se constituem em orientações para o planejamento e a elaboração de atividades didáticas a fim de favorecer o avanço dos estudantes por cada nível de raciocínio geométrico, ao mesmo tempo em que promovem a avaliação do progresso da aprendizagem dos mesmos.

Como embasamento teórico sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico nos debruçamos sobre os trabalhos “Intuição, Experiência e Teoria Geométrica” de Luiz Carlos Pais, “O modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico” de Mary Crowley e “Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele” de Adela Jaime Pastor sobre o Modelo de Van Hiele. Sobre o uso de materiais manipuláveis estudamos os artigos “Eu trabalho primeiro do concreto” de Adair Mendes Nacarato e “Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática” de Cármen Lúcia Brancaglion Passos.

A metodologia de pesquisa adotada para a realização deste trabalho é o *Design Experiment* (ou pesquisa de desenvolvimento) aplicada em Educação Matemática. Por meio dela desenvolve-se experimentos de ensino com o objetivo de formular abordagens de temática específica para salas de aula, aplicá-las e analisar os resultados obtidos para entender com maior profundidade os processos de ensino-aprendizagem e aprimorar os instrumentos aplicados, sempre na busca de aprendizagem significativa pelos alunos.

A partir das considerações feitas até aqui, surge a minha questão de investigação para esta dissertação:

> *Como e quão significativo pode ser o uso de dobraduras para despertar o interesse e a participação ativa de alunos no sentido de desenvolverem imagens mentais adequadas aos conceitos básicos da geometria, que favoreçam sua aprendizagem na retomada dos mesmos no Ensino Fundamental – Anos Finais?*

Diante desta questão formulamos os seguintes objetivos para a nossa pesquisa:

> *Delimitar temas de geometria plana e espacial para os quais o uso de dobraduras possa ser um apoio adequado ao ensino/aprendizagem de geometria, na fase de escolaridade alvo, e desenvolver experimentos didáticos que nos possibilitem refletir, com base na realidade prática da sala de aula, sobre a questão de investigação posta.*

> *Seguindo a metodologia do Design Experiment, a partir dos experimentos e reflexões desenvolvidos, formular uma proposta de sequência didática final que represente uma contribuição teórico/prática a professores interessados em aperfeiçoar sua prática de sala de aula sobre o ensino-aprendizagem dos temas trabalhados nesta dissertação.*

As etapas percorridas para o desenvolvimento do trabalho foram:

- Realização de estudo sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico e o uso de materiais manipuláveis como apoio ao ensino/aprendizagem de geometria.
- Realização de estudo sobre a metodologia do *Design Experiment*.
- Delimitação de noções de Geometria Plana a serem trabalhadas em sala de aula e elaboração de hipóteses sobre o potencial das dobraduras para o favorecimento de uma pertinente atribuição de significados, pelos estudantes, aos conceitos escolhidos.

- Elaboração e aplicação de um projeto piloto (diagnóstico) de uma sequência de atividades didáticas com dobraduras pertinentes aos temas de geometria escolhidos, seguindo as fases de aprendizagem do modelo de Van Hiele e adequadas ao Nível 2 de desenvolvimento do pensamento geométrico.
- Análise dos resultados obtidos no projeto piloto, com a revisão das hipóteses formuladas inicialmente e reelaboração das atividades para uma segunda aplicação.
- Aplicação das atividades reformuladas como a 1ª iteração do *Design Experiment*, seguida da análise dos resultados obtidos, revisão das hipóteses reformuladas e replanejamento das atividades para uma 2ª iteração do *Design Experiment*.
- Aplicação das atividades reformuladas como a 2ª iteração do *Design Experiment,* seguida da análise dos resultados obtidos para aperfeiçoamento das hipóteses e replanejamento das atividades na forma de uma proposta de sequência didática final que consubstancia a "teoria humilde" elaborada por meio da pesquisa realizada nesta dissertação.

Este trabalho está organizado em 6 capítulos e dois apêndices.

No Capítulo 1 detalhamos a fundamentação teórico pedagógica adotada para o desenvolvimento deste trabalho sendo elas, respectivamente, o uso de materiais manipuláveis e o desenvolvimento do pensamento geométrico.

No Capítulo 2 discorremos sobre a metodologia de investigação, com base no *Design Experiment,* e sobre a metodologia de análise e coleta de dados.

No Capítulo 3 apresentamos o planejamento e a aplicação do projeto piloto de intervenção em sala de aula. Nele formulamos hipóteses sobre o uso de dobraduras como facilitador de aprendizagem dos conteúdos a serem trabalhados em classe e elaboramos atividades a serem aplicadas em uma turma de 6º ano. Neste capítulo também descrevemos como ocorreu a aplicação de tais atividades e analisamos os resultados obtidos.

No Capítulo 4 apresentamos o planejamento da primeira iteração, por meio da revisão das hipóteses e da reformulação das atividades do projeto piloto. Descrevemos também como ocorreu a aplicação de tais atividades e analisamos os resultados obtidos.

No Capítulo 5 apresentamos o planejamento da segunda iteração, por meio da revisão das hipóteses e da reformulação das atividades da 1ª iteração. Descrevemos também como ocorreu a aplicação de tais atividades e analisamos os resultados obtidos.

No Capítulo 6, das Considerações Finais, fechamos o trabalho analisando e explicitando o uso efetivamente feito do embasamento teórico/pedagógico e da metodologia de pesquisa adotados. Concluímos que os objetivos foram adequadamente trabalhados e anunciamos a disponibilização da proposta final de sequência didática no apêndice 1.

Do apêndice 1 consta o produto final da dissertação, ou seja, as hipóteses e a sequência didática aprimoradas pela revisão crítica da última iteração. Dele consta também uma síntese do desenvolvimento da pesquisa, visando torná-lo independente da leitura integral da dissertação. Este apêndice, como conclusão final do nosso trabalho, é dirigido a professores do Ensino Fundamental II eventualmente interessados em testar esta abordagem em sua sala de aula.

No apêndice 2 apresentamos, a título de ilustração, algumas imagens dos registros de respostas de alunos às atividades e de dobraduras realizadas na última iteração.

CAPÍTULO 1: Referencial teórico sobre ensino e aprendizagem de Geometria

1.1 Materiais manipuláveis em aulas de Matemática

Nas aulas de Matemática, os materiais concretos e manipuláveis são utilizados como recursos didáticos para facilitar a compreensão dos conceitos a serem estudados. O tema deste trabalho – dobraduras no ensino de Geometria – diz respeito à utilização de material concreto e manipulável como recurso didático-pedagógico em atividades de sala de aula. Neste sentido, faremos uma discussão teórica acerca da importância da utilização de materiais concretos.

No início da década de 90, no debate sobre o uso de materiais manipuláveis passou-se a problematizar uma ideia comum de que apenas a manipulação de materiais concretos pudesse garantir o aprendizado de matemática (SCHLIEMANN; SANTOS e COSTA, 1992, apud NACARATO, 2005). O estudo das autoras citadas aponta que o material concreto, do modo como era utilizado pelos professores, em nada contribuía para um melhor aprendizado por parte dos alunos. Enquanto docentes, é importante pensarmos na problematização teórica acerca da utilização de materiais concretos como recursos de ensino. Como são usados esses materiais? Em se tratando de sua manipulação, o que se pretende alcançar? Perguntas como essas são de suma importância e devem ser feitas pelos professores, pois, *muitas vezes, incorporam um discurso a favor do 'concreto', sem uma reflexão do que seria concreto em Matemática* (NACARATO, 2005, p. 2).

Para Nacarato (2005), um dos elementos que dificultam o aprendizado com base em materiais manipuláveis diz respeito à falta de relação desses materiais com os conceitos que estão sendo trabalhados em aula. Muitas vezes os professores utilizam os materiais para introduzir uma noção, na sequência os descartam, passando a trabalhar apenas em nível abstrato. Outras vezes também ocorre um uso inadequado ou pouco exploratório de um material por falta de conhecimento do professor com relação ao papel que os materiais desempenham na aprendizagem dos conceitos pelos alunos. No entanto, a autora citada acredita ser fundamental a utilização de materiais manipuláveis em todos os níveis de ensino, uma vez que eles contribuem para o desenvolvimento da visualização, facilitando transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis. Destaca ainda que a eficácia da utilização de determinado material dependerá da forma como será utilizado e das concepções pedagógicas do professor.

Pensando na utilização de materiais manipuláveis em sala de aula, Passos (2012) enfatiza que:

> Qualquer material pode servir para apresentar situações nas quais os alunos enfrentam relações entre os objetos que poderão fazê-los refletir, conjecturar, formular soluções, fazer novas perguntas, descobrir estruturas. Entretanto, os conceitos matemáticos que eles devem construir, com a ajuda do professor, não estão em nenhum dos materiais de forma que possam ser abstraídos deles empiricamente. Os conceitos serão formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às suas ações, às formulações que enunciam, às verificações que realizam (PASSOS, 2012, p. 81).

As ideias matemáticas são abstrações mentais baseadas na observação de regularidades da natureza ou concebidas na busca de resolver algum problema real ou imaginado, como por exemplo os conceitos de figuras geométricas e a necessidade de contar, medir, fazer operações comerciais ou mandar foguetes ao espaço. Particularmente na geometria os conceitos são abstraídos da observação de objetos concretos ou da natureza. A esses conceitos abstratos geométricos chamamos de <u>modelos matemáticos</u> de realidades observadas nos objetos reais. Assim, por exemplo, um quadrado é uma ideia unicamente mental que não existe na realidade, já que, por definição, o quadrado não tem espessura. No entanto, azulejos, peças de tangram ou janelas com formato quadrangular são considerados como <u>modelos concretos</u> da ideia abstrata de quadrado. Porém, todo modelo concreto contém necessariamente imperfeições relativamente à imagem mental do modelo matemático. A começar pela linha reta que tem como modelos concretos a linha do horizonte vista sobre o mar em uma praia extensa, a extremidade vertical do batente de uma porta, a quina determinada pelo encontro de duas paredes, uma linha desenhada com lápis em um papel com o auxílio de uma régua ou a marca deixada por uma dobra no papel. Observamos que a marca da dobra não é perfeita pois possui a espessura do papel, enquanto o modelo abstrato de reta possui apenas comprimento[1]. No entanto, entre os exemplos citados, é o modelo concreto menos

---

[1] É interessante observar as seguintes definições envolvendo retas constantes do Livro 1 dos Elementos de Euclides (apud ROQUE, 2012, p. 166):
1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
2. Linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos.
4. E Linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.

imperfeito, já que é o único que não contém ondulações (mesmo se não perceptíveis a olho nu em alguns dos outros modelos).

Segundo Passos (2012) um bom material didático é aquele que pode ser utilizado para modelar um grande número de ideias matemáticas e destaca alguns critérios a fim de selecionar tais materiais:

> - os materiais devem proporcionar uma verdadeira personificação do conceito matemático ou das ideias a serem exploradas;
> - os materiais devem representar claramente o conceito matemático;
> - os materiais devem ser motivadores;
> - os materiais, se possível, devem ser apropriados para usar quer em diferentes anos de escolaridade, quer em diferentes níveis de formação de conceitos;
> - os materiais devem proporcionar uma base para a abstração;
> - os materiais devem proporcionar manipulação individual (PASSOS, 2012, p.88).

Passos (2012) conclui que a escolha de um material exige do professor reflexões teórico-pedagógicas sobre o ensino da matemática, para que assim consiga cumprir sua função de ensinar matemática. Neste trabalho temos como objetivo discutir o uso de materiais manipuláveis – no caso, as dobraduras – e também fazer intervenções em sala de aula, avaliando e discutindo os resultados de aprendizagem obtidos, como forma de contribuir para as reflexões de professores interessados em

---

Após as definições são enunciados postulados, sendo os dois primeiros sobre retas:
1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, cobre uma reta. (ROQUE, 2012, p. 167)
Já na Geometria Euclideana, tal como axiomatizada atualmente, reta é um objeto primitivo sem definição, sendo caracterizado apenas pelos postulados de incidência, nos quais nada consta sobre 'espessura', como na versão de Moise (MOISE, 1971,tradução nossa):
I.0 - Todas as retas e todos os planos são conjuntos de pontos.
I.1 - Para cada par de pontos P e Q existe exatamente uma reta à qual ambos $\overleftrightarrow{PQ}$ pertencem.
I.2 - Dados 3 pontos P, Q e R distintos e não colineares, existe exatamente um plano PQR ao qual todos pertencem.
I.3 - Se dois pontos P e Q estão em um plano, então todos os pontos da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ estão no mesmo plano.
I.4 - Se dois planos têm algum ponto em comum, então sua intersecção é uma reta.
I.5 - Toda reta contém pelo menos dois pontos. Existem pelo menos três pontos não colineares. Todo plano contém pelo menos três pontos não colineares. Existem pelo menos quatro pontos não coplanares.

.

repensar e, eventualmente, melhorar sua prática no ensino e aprendizagem de geometria.

1.2 Sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico em sala de aula

1.2.1 Intuição e experiência na construção de conceitos geométricos

Levando em consideração o desenvolvimento do pensamento geométrico, destacamos o trabalho de Luiz Carlos Pais (PAIS, 1996) onde são analisados quatro elementos que interferem no processo de ensino e aprendizagem da geometria plana e espacial, sendo eles: *objeto*, *desenho*, *imagem mental* e *conceito*. Tais elementos estão correlacionados a três aspectos fundamentais do conhecimento geométrico: o *intuitivo*, o *experimental* e o *teórico*.

Para Pais (1996), o objeto é interpretado como sendo os materiais didáticos concretos ou modelos físicos que podem ser associados a alguns conceitos geométricos. Ele considera que o objeto deve ser usado como uma forma primitiva de representar os conceitos, haja vista que o processo de construção teórica é lento, gradual e complexo. O autor ressalta o cuidado com as atividades que envolvem a manipulação de objetos para que não se limitem apenas a uma atividade lúdica, mas sim, uma atividade que estabeleça uma relação efetiva entre teoria e prática. A utilização de materiais manipuláveis, sob uma orientação pedagógica, possibilita ao aluno descobrir propriedades que contribuem na elaboração conceitual, mas o autor destaca que:

> [...] a aprendizagem somente vai desencadear-se a partir do momento que o aluno conseguir fazer uma leitura geométrica da representação envolvida. É evidente, portanto, que a materialidade deve ser suplantada no sentido de permitir a gênese do processo de abstração, caso contrário, recai-se no erro indesejável de admitir a existência de uma “geometria concreta”, o que seria contraditória aos objetivos da educação matemática (PAIS, 1996, p. 67 e 68).

Com relação ao desenho, assim como o objeto, ele também é de natureza concreta e particular, logo, oposta às características abstratas do conceito. Esta relação entre concreto e abstrato que envolve a representação dos conceitos, enfatiza o desafio da necessidade de transpor o próprio desenho no ensino de geometria. O autor considera que o desenho é uma representação com complexidade maior do que os modelos concretos, pois exige uma interpretação técnica que não é explicitamente ensinada, como é o caso da perspectiva nos desenhos de geometria espacial. O desenho é um dos recursos didáticos mais utilizados no ensino e aprendizagem de geometria, já que está presente nos livros didáticos para ilustrar enunciados de exercícios, definições ou teoremas.

Segundo o autor, as imagens mentais são uma terceira forma de representação em geometria, sendo estimuladas principalmente pelos trabalhos com objetos e desenhos, mas possuem uma natureza diferente destes, já que apresentam como características a subjetividade e a abstração. *Pelo fato de serem abstratas, podem ser relacionadas aos conceitos, embora o seu aspecto subjetivo as afaste da natureza científica* (PAIS, 1996, p. 70).

Para o autor as imagens mentais são difíceis de ser definidas, mas destaca:

> [...] pode-se dizer que o indivíduo tem uma dessas imagens quando ele é capaz de enunciar, de uma forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos. Assim, como as noções geométricas são ideias abstratas e, portanto, estranhas à sensibilidade exterior do homem, a formação de imagens mentais é uma consequência quase que exclusiva do trabalho com desenhos e objetos (PAIS, 1996, p.70).

A aprendizagem geométrica envolve a habilidade de elaborar boas imagens mentais relacionadas a conceitos e situações geométricas. Tais imagens, quando desenvolvidas pelos alunos, permitem um raciocínio mais dinâmico para a resolução de problemas e para novas aprendizagens.

No que se refere à generalidade ou abstração dos conceitos geométricos, o autor destaca que é um processo que ocorre lentamente, de maneira que envolve a influência do mundo físico e uma reflexão intelectual sobre este mundo. Diante das dificuldades de abstração, ocorre em um primeiro momento a identificação do conceito com a sua representação por meio dos objetos ou desenhos e, posteriormente, pelas imagens mentais.

> É evidente que, do ponto de vista científico, o conceito não pode ser algo susceptível a modificações subjetivas que permitam diferentes significados. Mas, enquanto conhecimento que é construído pelo homem, existe uma série de particularidades que acabam determinando níveis de conceitualização diferentes. Cada indivíduo possui uma série de imagens mentais associadas a um determinado conceito. Embora esses dois elementos sejam de natureza puramente abstrata, o primeiro deles refere-se ao domínio da psicologia cognitiva, enquanto que o segundo refere-se ao aspecto racional e objetivo da ciência. O trabalho didático situa-se entre esses polos interligados (PAIS, 1996, p. 71).

O autor não deixa de relatar a dificuldade persistente em se atingir a construção dos conceitos geométricos, citando como causas a resistência em considerar os obstáculos à aprendizagem relacionados à experiência do aluno (sua bagagem sociocultural prévia) e, também, dificuldades ocorridas na própria evolução histórica dos conceitos (chamados de *obstáculos epistemológicos*). É importante ter o cuidado de verificar se as imagens mentais que os alunos estão construindo correspondem adequadamente ao conceito trabalhado ou se as atividades desenvolvidas provocam distorções ou limitações nas concepções mentais (*obstáculos didáticos*). Um exemplo dessa situação é o uso reiterado de figuras geométricas sempre na mesma posição, fazendo com que um quadrado possa ser identificado apenas como um losango caso não esteja desenhado com os lados alinhados às bordas da folha.

Diante dos elementos citados, o autor considera que a intuição é uma forma de conhecimento imediato relacionada às imagens mentais e às compreensões já adquiridas pelo aluno. Mas, tanto a *experiência* (atividades experimentais por meio de objetos e desenhos), como a *intuição* (imagens mentais) exercem influência significativa no processo de desenvolvimento da aprendizagem das *teorias geométricas* (conceitos) no nível do Ensino Fundamental. Destaca ainda que a utilização de materiais didáticos manipuláveis é necessária no ensino de geometria como objetos auxiliares para favorecer a construção de imagens mentais, assim como os desenhos, mas não deixando de lado a construção dos conceitos que são a essência do conhecimento geométrico.

O trabalho de Pais (1996) nos mostra elementos que interferem fortemente na aprendizagem da geometria, destacando a importância das atividades experimentais nesse processo, indo ao encontro da proposta de ensino desenvolvida nesta pesquisa. Este mesmo tipo de ideia embasou a formulação do Modelo de Van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico, concebido a partir dos trabalhos do casal Dina e Pierre Marie Van Hiele.

1.2.2 Modelo de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico

Nesta seção descrevemos os principais elementos e características do Modelo de Van Hiele, embasados na tese de doutorado “Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.” de Adela Jaime Pastor (PASTOR, A.J., 1993), da Universidade de Valência, Espanha e no artigo “O modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico” de Mary L. Crowley (CROWLEY, M. L., 1994).

O Modelo de Van Hiele engloba dois aspectos: um relativo ao processo de aprendizagem, no qual identificam-se diferentes níveis de complexidade do raciocínio geométrico nos indivíduos e, também, mecanismos de avaliação da aprendizagem dos mesmos; e outro relativo ao processo de ensino, com diretrizes para o planejamento de aulas que busquem o favorecimento do progresso dos alunos entre os níveis de raciocínio geométrico (PASTOR, A.J., 1993).

O Modelo foi desenvolvido pelos professores holandeses Pierre M. Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof a partir de observações da prática docente de professores de escolas de Educação Básica. De suas pesquisas levantaram a hipótese de que o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos passa por uma série de “níveis de raciocínio” ao longo do processo de aprendizagem da Geometria. Foram identificados cinco níveis de raciocínio geométricos sequenciais – ordenados pelos níveis de complexidade, sendo que cada um é pré-requisito do próximo. Além disso, eles perceberam que o progresso efetivo de um nível de raciocínio para o outro está diretamente relacionado aos tipos de abordagens empregadas em sala de aula no estudo da Geometria. Neste sentido formularam cinco “fases de aprendizagem”, análogas para cada nível, como diretrizes facilitadoras da ação didática que visa favorecer a promoção do desenvolvimento da capacidade de raciocínio dos estudantes.

Seguem as descrições mais detalhadas de cada nível do Modelo de Van Hiele.

Nível 1 – Reconhecimento ou Visualização

Alunos classificados neste primeiro nível: possuem uma percepção das figuras por seu formato como um todo (por sua aparência física); consideram cada figura como um objeto independente; e não reconhecem suas características ou propriedades. Frequentemente fazem uso de propriedades imprecisas para identificar, comparar e classificar figuras, em geral referindo-se a aspectos visuais. Neste nível conseguem aprender um vocabulário geométrico básico para nomear as figuras reconhecidas e também reproduzi-las por desenhos ou por materiais manipuláveis. Por exemplo, dada uma atividade com representações de quadrados e retângulos, o aluno neste nível tem condições de reconhecer e nomear tais figuras porque elas possuem formatos semelhantes a figuras ou objetos de seu conhecimento prévio. Além disso, o aluno consegue reproduzir tais figuras (desenhar), mas não reconhece propriedades, tais como: essas figuras têm ângulos retos ou lados opostos paralelos.

Nível 2 – Análise

No segundo nível os alunos conseguem, por meio de observações e experimentações, perceber que as figuras geométricas são formadas por partes ou elementos e possuem propriedades específicas. A veracidade dessas propriedades é embasada na análise de alguns casos particulares. São capazes de generalizar as propriedades a todas as figuras de uma mesma família. No entanto, não conseguem relacionar diferentes propriedades de uma figura entre si e com outras figuras, além de não compreenderem definições “oficiais”. Continuando no exemplo anterior (sobre quadrados e retângulos), em uma atividade de experimentação envolvendo a medição dos ângulos, os alunos poderiam estabelecer que quadrados e retângulos possuem ângulos retos e fazer tal generalização para essas classes de figuras. Contudo, eles não conseguem explicar relações entre propriedades, tal como “todo quadrado é um retângulo” e não conseguem trabalhar com definições precisas.

Nível 3 – Classificação ou Dedução Informal

Neste nível os alunos conseguem relacionar propriedades de uma figura entre si e com outras figuras, assim como descobrir de maneira experimental novas relações. Os alunos reconhecem classes de figuras, a inclusão de classes e compreendem o que é uma definição matemática. Sentem necessidade de justificar propriedades e para tanto utilizam raciocínios dedutivos informais. Eles compreendem provas realizadas pelo professor, têm a capacidade de repetir tais provas e de adaptá-las a outra situação análoga, mas não conseguem realizar uma demonstração formal completa. Por exemplo, os alunos conseguem identificar quadrados e retângulos como quadriláteros que "possuem quatro ângulos retos" ou que "possuem lados apostos paralelos" e a equivalência entre estas duas definições. Assim, não só percebem que todo quadrado é um retângulo, como identificam pela propriedade da congruência entre os lados a especificidade dos quadrados entre os retângulos.

Nível 4 – Dedução Formal

Neste nível os alunos têm a capacidade de usar uma linguagem precisa e mais formal e compreender a estrutura axiomática da Geometria, ou seja, seus termos não definidos (ou primitivos), postulados, definições de novos termos e teoremas. Conseguem compreender e desenvolver demonstrações formais, entendendo a função de implicações e equivalências lógicas. E percebem a possibilidade de alcançar o mesmo resultado por diferentes premissas ou mediante diferentes formas de demonstração. Este é tipicamente um nível adequado para estudos em nível universitário, mas pode ser atingido por alguns alunos de Ensino Médio, interessados em matemática. Conseguem elaborar pelo menos duas demonstrações diferentes, por exemplo, sobre a propriedade das diagonais de um retângulo serem congruentes (pelo teorema de Pitágoras ou por congruência de triângulos, sendo esta última por vários casos de congruência).

Nível 5 – Rigor

No último nível o aluno é capaz de trabalhar com diferentes sistemas axiomáticos, fazendo comparações entre eles e verificando suas equivalências ou não. Conseguem realizar deduções abstratas, e compreendem a importância da precisão ao tratar dos fundamentos e relações entre estruturas matemáticas. Este nível não é esperado ser atingido na Educação Básica. Estudando geometrias axiomáticas podem demonstrar por exemplo que, sem o uso do quinto postulado de Euclides, é possível construir um quadrilátero com dois lados paralelos congruentes e perpendiculares a um terceiro onde os dois outros ângulos são obtusos – o denominado Quadrilátero de Saccheri.

As fases de aprendizagem foram desenvolvidas como orientações ao professor para o planejamento de suas aulas. Foram estabelecidas pelos autores cinco etapas (fases) de atividades que, sendo seguidas, apresentadas e trabalhadas de forma organizada, favorecem o aprendizado significativo do tema estudado. As fases não estão associadas a um determinado nível. Assim, para cada nível, se inicia com as atividades apropriadas à primeira fase, prosseguindo para as seguintes. Ao finalizar-se a quinta fase, os estudantes devem ter avançado ao nível de raciocínio seguinte. Seguem as principais características de cada fase de aprendizagem.

Fase 1 – Informação

Nesta fase o professor identifica os conhecimentos prévios dos alunos sobre o novo campo de trabalho e seus níveis de raciocínio por meio de atividades diagnósticas ou diálogo com os alunos. Por outro lado, os alunos recebem informações para conhecer o novo campo de estudo, os tipos de problemas que lhes serão apresentados para resolver, os métodos e material que utilizarão etc. Esta fase pode ser omitida caso professor e estudante já tenham tais informações, como por exemplo, no caso de professores que já venham trabalhando com a turma ou de temas que acabaram de ser trabalhados em nível anterior.

Fase 2 – Orientação Dirigida

O professor seleciona cuidadosamente pequenas tarefas adequadas ao nível de raciocínio e com o objetivo de que os alunos percebam/descubram os resultados ou propriedades a serem aprendidos de maneira gradual e significativa. Nesta fase é importante que o professor fique atento para poder orientar os alunos quando necessário.

Fase 3 – Explicação

Os alunos expressam em palavras ou por escrito os resultados que foram obtidos, trocam entre si suas experiências e discutem sobre elas com o professor e os demais estudantes, com a finalidade de se tornarem conscientes das características e relações descobertas. Pretende-se que os estudantes passem a dominar o vocabulário adequado às estruturas que estão trabalhando. Nesta fase não se produz novos conhecimentos, mas sim uma revisão do trabalho feito na fase anterior com conclusões e aperfeiçoamento na forma de se expressar. Esta fase não é necessariamente fixa apenas entre a segunda e a quarta fase, pois serve como uma sistematização dos conteúdos trabalhados onde a intervenção do professor deve garantir também a precisão de linguagem. Estas discussões são momentos importantes que podem ocorrer também ao longo de todas as fases, sempre que o professor perceber a necessidade de intervir. Ou seja, a terceira fase deve ser vista como uma atitude permanente de diálogo e discussão das atividades realizadas nas diferentes fases.

Fase 4 – Orientação Livre

Esta é uma fase de consolidação da aprendizagem realizada nas fases anteriores. O professor propõe aos alunos problemas que envolvam novas relações e propriedades, que sejam mais abertos, com vários caminhos de resolução e não apenas uma aplicação simples e direta do conhecimento trabalhado anteriormente. Os estudantes utilizam os conhecimentos desenvolvidos para resolver atividades e problemas mais complexos a partir do que foi aprendido na segunda fase. O professor limita ao máximo a sua ajuda aos estudantes na resolução desses problemas, mas estimula os alunos para que decidam sobre os caminhos a tomar e a perceberem se são adequados ou não.

Fase 5 - Integração

Os estudantes estabelecem uma visão global de tudo o que foi aprendido sobre o tema, integrando estes novos conhecimentos, métodos e formas de raciocínio com os que tinham anteriormente. Sendo necessário, o professor pode apresentar resumos ou compilações de informações que ajudem os alunos a alcançarem essa integração. Nesta fase não aparecem novos conhecimentos, mas sim a integração dos novos conhecimentos aos anteriores.

Além das características dos níveis de raciocínio e das fases de aprendizagem, é necessário mencionar algumas propriedades globais do Modelo de Van Hiele, imprescindíveis para uma compreensão e utilização adequada do mesmo no ensino e aprendizagem dos conteúdos da Geometria, a seguir descritas.

1. Hierarquização e sequencialidade dos níveis de raciocínio.

Visando alcançar um novo nível de raciocínio, para cada tema ou conceito a ser trabalhado em sala de aula é necessário ter passado pelos níveis anteriores. Portanto, um aluno pode atingir (com atribuições de significado) um raciocínio próprio ao segundo nível se tiver desenvolvido o raciocínio do primeiro nível correspondente ao tema trabalhado, e assim por diante.

2. Relação entre a linguagem e os níveis de raciocínio.

Em cada nível se trabalha uma linguagem específica, não só pensando nas palavras ou construções gramaticais empregadas, mas sim no significado que elas têm. Por exemplo, uma figura pode ter mais do que um nome (inclusão de classes) – um quadrado também é um retângulo (e um paralelogramo). Um aluno do nível 2 não concebe que esse tipo de acomodação possa ocorrer, porém esse tipo de noção e a linguagem que o acompanha são fundamentais no nível 2.

Outro exemplo, a atividade de "demonstrar uma propriedade" consiste em cada nível a procedimentos distintos: comprovar sua veracidade em um ou poucos casos no segundo nível de raciocínio; buscar algum tipo de justificativa lógica intuitiva desta propriedade no terceiro nível; aplicar um raciocínio lógico formal para obter uma demonstração matemática correta e aceitável no quarto nível. Esta característica explica a falta de compreensão entre pessoas que utilizam linguagens de diferentes níveis. Tal fenômeno acontece com frequência em aulas de ensino médio e universidades, quando um professor passa um problema esperando uma resposta que corresponde ao terceiro ou quarto nível, mas o estudante ainda está no primeiro, segundo ou terceiro nível de raciocínio e não consegue resolver o problema ou utiliza um raciocínio intuitivo para formular uma resposta aproximada, intuitiva ou imprecisa.

3. Instrução como uma ferramenta de avanço no nível do raciocínio.

Van Hiele afirma que a instrução é um fator básico para o avanço nos níveis de raciocínio. O amadurecimento que leva a um nível superior deve ser considerado um processo de aprendizagem e não como um resultado apenas de amadurecimento biológico. A transição de um nível ao seguinte não é um processo natural, mas ocorre sob a influência de um programa de ensino-aprendizagem adequado e da aprendizagem de uma nova linguagem.

CAPÍTULO 2: Metodologias de investigação e de pesquisa

2.1 Investigação por meio do Design Experiment

Segundo Gravemeijer (2019), o Design Experiment (ou pesquisa de desenvolvimento) em Educação Matemática é uma metodologia de investigação na qual os pesquisadores executam simultaneamente experimentos didáticos em sala de aula e pesquisa educacional neles baseados, com os objetivos, respectivamente, de desenvolver metodologias de ensino-aprendizagem e de investigar e refletir sobre os processos de ensino-aprendizagem gerando conclusões teóricas a partir das análises feitas. Trata-se de um método de pesquisa qualitativo onde se pretende sistematizar, e disponibilizar ao público, práticas de ensino diferenciadas, juntamente com análises dos resultados obtidos. Este tipo de pesquisa costuma apresentar as seguintes características:

1. Intervencionista – Uma vez que a finalidade da pesquisa em *design* é criar e estudar novas formas de ensino, o pesquisador intervém em sala de aula com atividades práticas, e não apenas observa.
2. Teoria gerativa – A pesquisa de *design* tem por objetivo gerar teorias (e hipóteses) sobre o processo de aprendizagem e os meios didáticos de apoiar essa aprendizagem.
3. Prospectivo e reflexivo – Experimentos de *design* criam condições para o desenvolvimento de teorias que são objetos de exame crítico (reflexão).
4. Iterativa – As teorias da pesquisa são desenvolvidas em uma iteração de ciclos de conjectura, teste e revisão.
5. Raízes pragmáticas e formular teorias humildes – Este tipo de experimento aceita a complexidade da sala de aula como um ambiente de pesquisa onde as teorias são de domínio específico (particular) e têm implicações práticas.

A pesquisa de *design* se assemelha ao trabalho realizado pelos professores que refletem sobre sua própria prática, pois passa pelos processos de planejamento, execução e reflexão. A diferença é que os pesquisadores combinam a prática em sala de aula com o desenvolvimento de uma nova teoria.

A primeira fase do *design experiment* é o planejamento do experimento. Consiste em esclarecer os objetivos da pesquisa, definir os pontos de partida, levar em consideração teorias pedagógicas existentes sobre processos de aprendizagem e desenvolver conjecturas de aprendizagem para os temas do experimento, assim como planejar atividades que envolvam meios de apoio didáticos adequados às conjecturas estabelecidas. O autor chama este processo de *conjectured local instruction theory* (numa tradução livre nossa, a expressão significa “conjecturas teóricas para o ensino de temas específicos” – que passaremos a designar apenas por “teorias locais”). Para a definição da primeira teoria local do *design experiment* é necessário levar em consideração a bagagem anterior dos alunos, a história e a tradição do ambiente escolar no qual o experimento será aplicado. No planejamento de cada iteração do processo do *design*, nesta primeira fase é novamente definida a intenção teórica do experimento e quais tipos de resultados se quer gerar, atentando-se em atingir os problemas que foram identificados como objetivos da pesquisa. Também são definidos os procedimentos a serem executados e como será realizada a interpretação e análise dos dados obtidos, levando-se em consideração os quadros teóricos escolhidos.

A segunda fase do *design experiment* consiste na realização do experimento (execução), onde se irá testar a teoria local desenhada. Importante ressaltar que os resultados encontrados a partir da aplicação de um experimento didático estão diretamente relacionados à cultura da sala de aula e à postura e preparo do professor, pontos que precisam fazer parte do planejamento da pesquisa. Em cada ciclo, o(s) pesquisador(es) conduz(em) um experimento em sala de aula e tenta(m) analisar o processo real de participação e aprendizado dos alunos. Com base nisso, se toma decisões sobre a validade das conjecturas feitas e novas adaptações são realizadas. É necessário analisar e entender as consequências do experimento de ensino anterior para que se possa construir a próxima teoria local a ser testada. Tais teorias e conjecturas serão revisadas a partir da avaliação feita sobre o real desenvolvimento dos alunos, buscando aprimorar a eficácia das atividades para as finalidades constantes dos objetivos de aprendizagem (também aprimorados, sendo o caso) do experimento didático.

Por fim, a última fase é a reflexão e análise global do experimento realizado e seu registro documental como uma contribuição ao desenvolvimento de teorias locais de ensino sobre os temas trabalhados. E também como exemplo de procedimentos em sala de aula que possam estimular a reflexão de professores sobre sua própria prática.

Grande parte das pesquisas de *design* apresentam as cinco características e passam pelas três fases já listadas: planejamento, execução e reflexão. No entanto, podem apresentar diferenças na dependência de sua origem, seu contexto real e suas necessidades específicas, como por exemplo:

- A faixa etária: pode variar do jardim de infância à universidade.
- As motivações: resolução de problemas práticos ou geração de teoria e entendimento de processos de ensino-aprendizagem.
- O tipo de resultado: depende da priorização dos objetivos – produção de artefatos de ensino, produção de teorias locais de ensino ou ainda, fazerem parte de um projeto de pesquisa mais amplo.
- A escala do projeto: pode variar da investigação envolvendo: indivíduos; uma sala de aula; currículo ou projeto político pedagógico de uma escola, diretrizes educacionais nacionais ou internacionais.
- A teoria subjacente: concepções teóricas implícitas ou explícitas dos pesquisadores sobre ensino e aprendizagem podem influenciar os rumos e resultados da pesquisa levando a análises e teorias pedagógicas finais distintas.

Algumas considerações ajudam a identificar se o *design experiment* é a metodologia adequada à pesquisa que pretende ser desenvolvida: ter como objetivo alterar práticas da sala de aula; resolver problemas concretos e contribuir para gerar e testar teorias; necessidade de tempo para uma série de tentativas e adaptações; validar teorias humildes – específicas de tópicos e com implicações práticas.

Lembremos o objetivo geral da nossa pesquisa para o mestrado: *Delimitar temas de geometria plana e espacial para os quais o uso de dobradura possa ser um apoio adequado e desenvolver experimentos didáticos que nos possibilitem refletir, com base na realidade prática da sala de aula, sobre a questão de investigação posta.* Nele podemos identificar uma intenção de alterar práticas de sala de aula e de contribuir para gerar, testar e validar teorias humildes, o que confirma a adequação do uso do *design* como metodologia de pesquisa.

2.2 Metodologia de coleta de dados e de análise dos resultados obtidos com os experimentos didáticos

Vimos (p. 27) que o *Design Experiment* tem por objetivo, entre outros, gerar teorias (e hipóteses) sobre o processo de aprendizagem e os meios didáticos de apoiar essa aprendizagem. Diante disso, do objetivo geral desta pesquisa e visando formular a primeira teoria local do experimento, nos dedicamos a refletir sobre quais elementos geométricos o uso de dobraduras podem constituir-se em um apoio didático adequado à aprendizagem dos estudantes em fase inicial do estudo de geometria. Chegamos à conclusão de que, com dobraduras, pode-se construir modelos físicos, especialmente adequados, de noções básicas de geometria plana e espacial como: reta; ângulo reto; ângulos agudos e obtusos; paralelismo entre retas; congruência de segmentos; alguns polígonos e poliedros.

Para desenvolver os experimentos didáticos a serem aplicados em sala de aula, elaboramos hipóteses nas quais apontamos nossas reflexões sobre o potencial deste material manipulável para o favorecimento da formação de imagens mentais adequadas aos objetos geométricos trabalhados, visando oferecer atividades instigantes e propícias a uma pertinente atribuição de significados dos conceitos pelos alunos. Em cada uma destas hipóteses, a partir de uma justificativa geométrica baseada em fatos observáveis em dobraduras, apontamos o resultado de aprendizagem esperado na aplicação das atividades formuladas. Com isso visamos embasar os ciclos iterativos de conjectura (nossas hipóteses), teste e revisão característicos da metodologia do *Design Experiment*.

Baseadas nestas hipóteses, inicialmente elaboramos a sequência de atividades diagnósticas do projeto piloto. A coleta de dados da aplicação do projeto piloto se deu por meio das informações observadas e anotadas pela professora pesquisadora de acordo com as perguntas, discussões e comportamento dos alunos durante a realização das atividades e dos registros e dobraduras realizadas pelos alunos. Fizemos a análise buscando confrontar os resultados esperados (explicitados nas hipóteses) com os resultados obtidos nos registros das respostas dos alunos. Assim, para melhor favorecer a aprendizagem dos alunos em futuras iterações do projeto, reformulamos tanto os enunciados de atividades como os de hipóteses, adequando-os naquilo que consideramos pouco claro aos alunos ou mesmo não pertinente ao desenvolvimento das imagens mentais pretendidas – compatíveis com os objetos geométricos estudados.

Na coleta de dados da primeira iteração, tivemos a possibilidade de filmar as aulas através do programa Microsoft Teams, já que as aulas estavam ocorrendo de forma síncrona, presencial e online. Assim a análise, além dos outros dados, também foi feita baseada na observação de tais filmagens. O procedimento de análise e reformulação de hipóteses e de atividades constantes na primeira e na segunda iteração foi análogo ao descrito anteriormente. Nos capítulos que seguem, detalhamos todo o processo realizado.

CAPÍTULO 3: Projeto Piloto de Intervenção em sala de aula

O projeto piloto consistiu na aplicação de um conjunto de atividades com dobraduras elaboradas e aplicadas pela pesquisadora em uma turma de 6º ano, da qual era a regente de classe. As atividades, utilizando dobraduras como recurso didático, foram elaboradas para o **nível 2 – Análise**, com base nas fases de aprendizagem do Modelo de Van Hiele. Os objetivos do projeto piloto foram diagnosticar conhecimentos prévios e favorecer a aprendizagem dos seguintes conceitos: retas; segmentos de reta; paralelismo e perpendicularismo de retas; ângulos agudos, retos e obtusos; e retângulos e quadrados. Tais conteúdos estão previstos tanto na BNCC como nos currículos das escolas onde ocorreram as aplicações. Segundo prescrito na BNCC, e incorporado ao currículo do Estado de São Paulo, as seguintes *habilidades* devem ser trabalhadas no 4º e 6º anos do Ensino Fundamental (no que segue, o grifo é nosso), como transcrito a seguir.

> (EF04MA16B) Descrever, interpretar e representar a posição ou a movimentação, deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, <u>intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares</u>. (p. 245)
>
> (EF04MA18) <u>Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras</u>, esquadros ou softwares de geometria. (p. 246)
>
> (EF06MA20) <u>Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos</u> e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles. (p. 254)
>
> (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para <u>representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros</u>. (p. 254)
>
> (EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (<u>como na construção de dobraduras</u> ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.). (p. 254)
>
> (EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a <u>construção de um polígono regular</u> (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado. (p. 259) (BRASIL, 2019)

Nesta dissertação, além do previsto na BNCC, buscamos também trabalhar os conceitos e algumas propriedades fundamentais constantes de registros históricos e axiomáticos da Geometria Euclideana Plana. Assim, focamos nos conceitos primitivos de ponto, reta e plano caracterizados pelos axiomas e as definições geométricas de ângulo agudo, reto, obtuso e raso. Por outro lado, acreditamos que o uso de dobraduras contribui fortemente para a atribuição de significados pelos alunos a algumas propriedades que constam de axiomas de incidência ou de teoremas básicos iniciais, como: "por dois pontos passa uma única reta"; "a reta que contém dois pontos de um plano está toda contida no plano"; "por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela"; "dada uma reta em um plano e um ponto desta reta, existe uma única perpendicular no plano que passa por este ponto"; e "por um ponto fora de uma reta passa uma única perpendicular, contida no plano do ponto e da reta". Observamos a falta deste conteúdo nas habilidades prescritas na BNCC tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, apesar da sua relevância nos fundamentos da geometria e para o desenvolvimento futuro de um tratamento axiomático à ela.

Durante o mês de outubro de 2019 as atividades do projeto piloto foram aplicadas em 5 aulas de Matemática de uma turma de 6º ano com 15 alunos da escola privada de Educação Básica onde a pesquisadora lecionava, localizada em Santo André. Todo o conteúdo abordado havia sido trabalhado com os alunos, dentro da programação oficial do primeiro bimestre. Porém, nesse período, a pesquisadora ainda não havia assumido a turma, o que aconteceu apenas no segundo semestre letivo.

3.1 Planejamento do Projeto Piloto

Inicialmente, para a elaboração das atividades, nos dedicamos à formulação das hipóteses sobre a vantagem do uso de dobraduras na introdução das noções básicas da Geometria Euclideana Plana no Ensino Fundamental, tal como descritas no livro de Tatiana Roque "História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas" (ROQUE, 2012). Nelas, buscamos explicitar nossa compreensão das razões pelas quais dobraduras "traduzem" no concreto, de uma forma particularmente eficaz, as ideias subjacentes aos axiomas que caracterizam os conceitos primitivos, suas inter-relações e as definições básicas que deles decorrem. Imaginamos assim que, uma vez formuladas, tais hipóteses poderiam orientar a criação de enunciados para as atividades e, posteriormente, possibilitar suas validações, bem como os resultados de aprendizagem dos alunos quanto ao desenvolvimento esperado de imagens mentais adequadas aos conceitos trabalhados.

Nesta seção apresentamos as hipóteses que embasaram a elaboração das atividades e os enunciados das próprias atividades desenvolvidas com os alunos em sala de aula, sobre noções iniciais de geometria plana, sejam elas primitivas ou definidas.

Hipóteses sobre o uso de dobraduras no trabalho com os conteúdos: Reta e segmento de reta; retas concorrentes e paralelas

H1 Partindo do fato de que toda a dobra é um modelo concreto de "reta" especialmente "preciso", usar a manipulação de dobraduras pode favorecer a visualização desta noção primitiva da geometria. (Observemos que as próprias réguas podem apresentar ondulações, microscópicas ou não.)

H2 No entanto, necessariamente, uma dobra é um modelo de "segmento de reta". Conjecturamos que questionar se duas dobras feitas em uma mesma folha de papel constituem um modelo de retas concorrentes ou não pode provocar uma discussão significativa sobre a diferença entre "segmento de reta" e "reta". Isso porque algumas dobras se cruzam efetivamente na folha e outras não, mas podem encontrar-se nos prolongamentos imaginados de ambas, não sendo, portanto, paralelas.

H3 Da percepção sobre a necessidade de prolongar segmentos (dobras) para decidir se aquelas "retas" se encontram fora do papel, esperamos que, naturalmente, possa surgir um questionamento sobre "até onde podem ser prolongadas?", levando à compreensão de que retas são ilimitadas e segmentos são limitados.

H4 Deste tipo de discussão poderá surgir uma definição de retas paralelas: duas dobras de um mesmo papel que não se cruzam nas suas extensões totais (mesmo fora do papel).

H5 Surge então a questão: Como saberemos que duas dobras feitas no papel são "pedaços" de retas efetivamente paralelas? Com ela abre-se espaço para conjecturas dos alunos (respostas dos alunos conjecturadas por nós a *priori: duas retas são paralelas porque nunca se encontram; porque mantêm sempre a "mesma distância" entre elas)* a serem trabalhadas no próximo bloco de atividades.

Bloco I de Atividades

Pertinentes às fases de aprendizagem de Van Hiele de 1 a 3.
Conteúdos: Reta e segmento de reta; retas concorrentes e paralelas.
Estratégia: Formar duplas; para cada aluno entregar uma folha de papel vegetal com formato irregular, de maneira que possíveis margens retilíneas não sirvam de apoio indevido para as construções com dobraduras.

<u>Atividades propostas:</u>

1) Dobrando e desdobrando um pedaço de papel qual o nome do elemento geométrico representado pela marca da dobra?
2) Com o papel aberto marque um ponto fora da dobra feita. Faça outra dobra passando por este ponto. É possível que a segunda dobra não corte a primeira? É possível que seja paralela à primeira?
3) O que é preciso garantir para que outra dobra (feita como no item 2) seja paralela à primeira?
4) Escreva todas as conclusões tiradas a partir das questões 1 a 3 sobre retas e posições relativas entre retas de um plano.

Hipóteses sobre o uso de dobraduras no trabalho com os conteúdos: Perpendicularismo entre retas; ângulo reto, agudo e obtuso

H6 Ao marcar um ponto fora de uma dobra feita, fazer dobras que passam por esse ponto e cortam a dobra inicial, os alunos podem comparar as distâncias verificando qual tem a menor distância.

H7 Conjecturamos que investigar a ideia de distância de um ponto a uma dobra pode ajudar os alunos a "descobrirem" que algumas dobras formam com ela dois ângulos diferentes (um agudo e outro obtuso) e há uma única dobra que forma ângulos iguais (o ângulo reto).

H8 Assim eles observarão as características desta dobra que representa a menor distância e verificarão sua unicidade, pois a dobra que representa a menor distância sobrepõe a dobra ("reta") inicial sobre ela mesma.

H9 Com esses procedimentos os alunos poderão descobrir a construção do ângulo reto e da dobra perpendicular a outra dobra passando por um ponto fora desta última.

H10 Na sistematização acreditamos que retomando a questão anterior sobre condições para que duas retas sejam paralelas os alunos poderão atribuir um significado mais concreto à noção de retas paralelas e chegar a uma definição mais precisa do conceito.

Bloco II de Atividades

Pertinentes às fases de aprendizagem de Van Hiele de 2 a 3.
Conteúdos: Perpendicularismo entre retas; ângulo reto, agudo e obtuso.
Estratégias: Formar duplas; entregar folha de papel vegetal com formato irregular para cada aluno de maneira que possíveis margens retilíneas não sirvam de apoio indevido para as construções com dobraduras.

<u>Atividades propostas:</u>

5) No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra e mantenha o papel dobrado. Marque um ponto fora desta dobra. Utilizando dobras determine o menor caminho entre o ponto e a dobra inicial.
6) Observando os ângulos formados pelas dobras feitas com a reta inicial, diga o que a única dobra que determina a menor distância tem de diferente das outras.
7) Escreva suas conclusões com relação às questões 5 e 6.

Hipóteses sobre o uso de dobraduras no trabalho com os conteúdos: Retas paralelas e perpendiculares; retângulo e quadrado; segmentos congruentes.

H11 A construção de retângulos e quadrados com régua e esquadro poderá servir como um diagnóstico para verificar a concepção dos alunos sobre essas figuras. Observe-se que os alunos poderão utilizar a noção de distância, já trabalhada, e suas medidas na régua.

H12 Na construção com dobraduras de retângulos poderemos verificar se os conceitos e a construção geométrica de retas paralelas e perpendiculares já estão dominados.

H13 Para realizar a construção do quadrado com dobras, os alunos utilizarão ideias semelhantes às da construção do retângulo, mas surge a necessidade da determinação de segmentos com uma extremidade comum e de mesma medida.

H14 Uma sistematização final deverá representar uma tomada de consciência por parte dos alunos sobre os conceitos trabalhados e uma oportunidade para a professora de avaliar a evolução das concepções dos estudantes sobre os conceitos trabalhados.

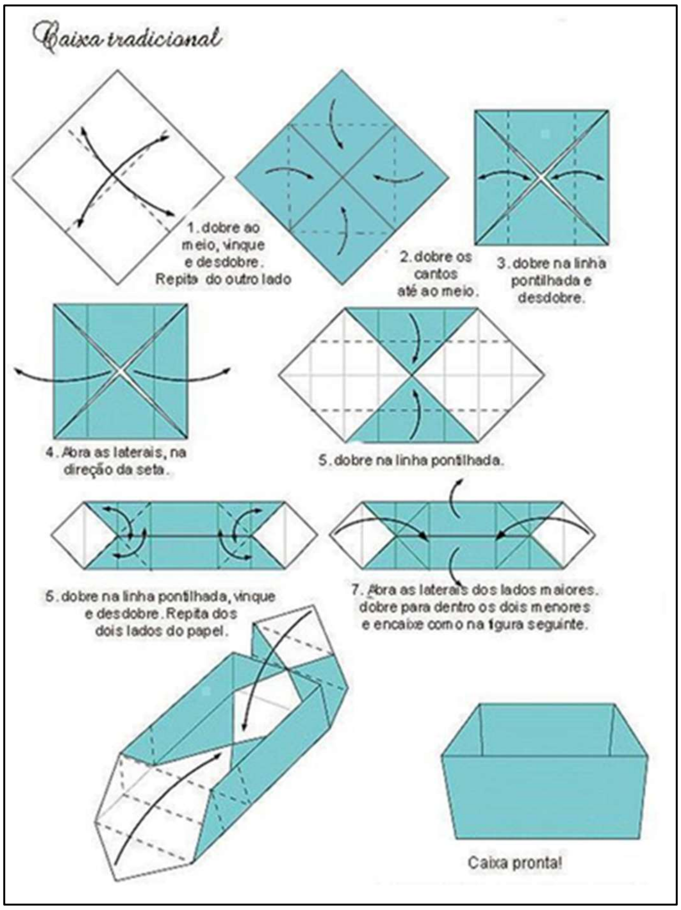
Bloco III de Atividades

Pertinentes às fases de aprendizagem de Van Hiele de 1 a 5.
Conteúdos: Retas paralelas e perpendiculares; retângulo e quadrado; segmentos congruentes.
Estratégia: Atividade individual; entregar uma folha de papel vegetal com formato irregular para a atividade 9 e outra para a atividade 10, de maneira que possíveis margens retilíneas não sirvam de apoio indevido para as construções com dobraduras. Entregar uma folha quadrada para a atividade 12.

Atividades propostas:

8) Desenhe utilizando régua e esquadro um retângulo e um quadrado. Justifique por que as figuras desenhadas são um retângulo e um quadrado. Liste o que é semelhante e o que é diferente entre as duas figuras.
9) Agora faça com dobras um retângulo e justifique por que é de fato um retângulo.
10) Agora faça com dobras um quadrado e justifique por que é de fato um quadrado.
11) Podemos dizer que “todo quadrado é um retângulo” ou que “todo retângulo é um quadrado”? Justifique suas respostas.
12) Vamos construir uma caixa a partir de uma folha quadrada. Em cada passo da construção identifique quais elementos estudados anteriormente aparecem.

Figura 1: Passo a passo da construção da caixa 1



Fonte: http://anabraga-artesanatos.blogspot.com/2011/07/

13) Discussão com a classe sobre os conceitos trabalhados, visando uma sistematização.

3.2 Aplicação das atividades e análise dos resultados

Descrevemos aqui como se desenvolveram as aplicações em sala de aula das atividades propostas, nas quais buscamos seguir as fases de aprendizagem do Modelo de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico (ver pp. 24 e 25). Também analisamos os resultados obtidos comparando com os esperados, realizando as validações e reformulação de hipóteses e de enunciados das atividades para a próxima iteração.

Bloco I de Atividades

Conteúdos: Reta e segmento de reta; retas concorrentes e paralelas.

A aplicação das atividades de 1 a 4 sobre tais conteúdos ocorreu no dia 15 de outubro de 2019 em uma aula com duração de 50 minutos. Nesta ocasião, estávamos estudando sólidos geométricos em classe. Assim achamos conveniente explicar aos alunos que realizariam um conjunto de atividades, usando dobraduras, sobre alguns temas de Geometria, por eles já estudados naquele ano, mas que nos levariam ao último conteúdo de Geometria estudado (este momento corresponde a fase 1 – informação do modelo Van Hiele). Tais conceitos não foram recordados a fim de verificar o conhecimento prévio dos alunos.

Tais atividades foram desenvolvidas em duplas. Para tanto, foi entregue uma folha com as questões e uma folha de papel vegetal com formato irregular para cada aluno.

Na primeira atividade já na fase 2 (orientação dirigida) – *Dobrando e desdobrando um pedaço de papel, qual o nome do elemento geométrico representado pela marca da dobra?* – alguns alunos mostraram falta de concentração na leitura do enunciado ao perguntar se era para identificar o formato apresentado pela folha após a dobra. Neste momento a professora disse: "leia novamente". Depois disso prestaram atenção à palavra "desdobrando" no enunciado e a atividade fluiu. Todos os alunos identificaram facilmente o elemento geométrico formado pela dobra. Alguns responderam primeiro como *linha* e depois identificaram como *reta*, confirmando nossa hipótese H1 de que a dobra é um modelo concreto importante da noção primitiva de reta. Nesta primeira atividade percebemos que alguns alunos tiveram dúvidas relacionadas a "como dobrar o papel" ou manifestaram receio de "dobrar da forma errada", mostrando não estarem familiarizados com resolução de problemas abertos.

Tal estranheza voltou a acontecer na segunda atividade (ainda na fase 2 – orientação dirigida): *Com o papel aberto marque um ponto fora da dobra feita. Faça uma outra dobra passando por este ponto e diga qual a relação entre as duas dobras obtidas. É possível que a segunda dobra não corte a primeira? É possível que seja paralela a primeira?* No decorrer da segunda atividade percebemos que os alunos não recordavam o conceito de retas paralelas. Assim, solicitamos que todos parassem as atividades e perguntamos ao grupo: “Alguém lembra o que são retas paralelas?”. Diante do silêncio da turma, relembramos a definição e questionamos sobre como são representadas. Após sugestões gestuais dos alunos a professora fez um desenho na lousa (este momento correspondeu à fase 3 – explicação). A seguir conseguiram dar continuidade à atividade.

Analisando as respostas dos alunos à questão – *É possível que a segunda dobra não corte a primeira?* – percebemos falta de clareza no enunciado, já que alguns alunos, cujas dobras se cortavam, responderam “não” com base na sua dobradura enquanto outros escreveram “sim” desconsiderando a própria dobra realizada, mas pensando em outras possíveis maneiras de dobrar. Passamos então a analisar o enunciado como um todo e percebemos as seguintes inadequações para alunos de 6º ano: faltou inserir o conceito de retas paralelas no enunciado; a questão – *diga qual a relação entre as duas dobras obtidas* – mostrou-se vaga e inútil, merecendo ser retirada; a colocação de três perguntas em um mesmo enunciado dispersa a concentração do aluno em cada uma em particular.

Como pretendemos aplicar novamente estas atividades em uma primeira iteração do *design experiment*, segue a reformulação desta questão elaborada para a próxima etapa (iteração do design).

> 2) Com o papel aberto marque um ponto fora da dobra feita e faça outra dobra passando por este ponto que não corte a primeira dobra.
> a) Se o papel fosse maior estas dobras continuariam a não se cortar?
> b) É possível fazer uma terceira dobra no mesmo papel passando pelo ponto que corte a primeira?
> Lembrem! Dizemos que são **paralelas** duas retas no mesmo plano que não se encontram. E duas retas são **concorrentes** quando se encontram.

Na terceira atividade – *O que é preciso garantir para que outra dobra (feita como no item 2) seja paralela à primeira?* – ocorreu um melhor entendimento sobre a ideia de “reta” e também de “retas paralelas” por parte dos alunos. Aqui perceberam que mesmo as dobras (retas) não se cortando no papel, elas poderiam não ser paralelas, pois alguns grupos observaram que “continuando as retas, elas se encontram” (fase 2 – orientação dirigida). A partir desta ideia discutimos com toda a turma a característica da reta ser ilimitada. Isso validou nossas hipóteses H3 e H4 relativas à necessidade de considerar o prolongamento das retas (dobras) para determinar se são ou não paralelas e sobre a natureza ilimitada da reta.

Nas respostas apresentadas para a terceira atividade os alunos colocaram as seguintes ideias no sentido de garantir que duas retas sejam paralelas: "*elas não se encontram/cortam/cruzam*", "*ter a mesma distância*", "*dobrar igualmente a primeira, que sejam do lado uma da outra*". Tais respostas sugerem um entendimento do conceito de retas paralelas. Dois alunos responderam com ideias errôneas: "*que sua inclinação ficasse diferente*" e "*primeiro tem que deixar a folha de pé e fazer duas retas*". Nossa hipótese H5 foi assim verificada, pois os alunos formularam as conjecturas pertinentes para a caracterização de retas paralelas, sendo que, além das duas repostas por nós imaginadas, surgiu uma terceira bastante interessante – "*dobrar igualmente a primeira, que sejam do lado uma da outra*". Entendendo-se a ideia dos alunos como "dobrar o papel de maneira a verificar se as retas podem ser sobrepostas", este é um procedimento que, via tentativa e erro, é possível ser concretizada por meio de dobraduras.

Avaliamos que esta atividade foi significativa para verificar o entendimento dos alunos sobre os conceitos apresentados. A hipótese H2 sobre o aparecimento da definição de "segmento de reta" não foi verificada e, no momento da aplicação das atividades, a professora acabou por não levantar tal questão com o grupo. Para a próxima aplicação esta hipótese foi mantida para melhor validá-la, com a efetiva discussão sobre a diferença entre segmento e reta.

Na quarta questão, que é a última desta primeira parte – *Escreva todas as conclusões tiradas a partir das questões 1 a 3 sobre retas e posições relativas entre retas de um plano* – nos surpreendeu a estranheza dos alunos: demonstraram não saber o que deveriam escrever ou mesmo qual o significado de "escrever conclusões" (fase 3 – explicação). De modo geral colocaram ideias corretas nas conclusões, mas algumas respostas ficaram vagas e uma dupla respondeu com uma ideia equivocada: "*todas as linhas do papel são paralelas*". Seguem as demais conclusões escritas por eles: "*que retas paralelas não podem se cruzar*"; "*discutimos sobre retas*"; "*nós entendemos que quando dobramos a folha forma uma reta e quando dobramos uma do lado da outra formam retas paralelas*"; "*que as retas podem se cruzar ou não*"; "*logo que uma reta corta outra, elas não podem ser paralelas. Retas paralelas são as que ficam uma ao lado da outra sem se cruzar*"; "*as retas podem se cruzar, linhas paralelas* *não se encontram, quanto mais dobramos mais linhas teremos*"; e "*nós vimos sobre retas que são linhas e as dobras paralelas que são aquelas que não se encontram*".

Diante da estranheza dos alunos com relação ao tipo de atividades trabalhadas, verificamos que para a próxima aplicação seria importante apresentar previamente aos alunos a natureza de tais atividades.

Bloco II de Atividades

Conteúdos: Perpendicularismo entre retas; ângulo reto, agudo e obtuso.

A aplicação das atividades de 5 a 7 sobre tais conteúdos ocorreu no dia 17 de outubro de 2019 em uma aula com duração de 50 minutos. Neste dia, dois alunos faltaram, ou seja, a aplicação ocorreu com 13 alunos. Para a realização, em duplas e um trio, destas atividades foi entregue uma folha com as questões e uma folha de papel vegetal com formato irregular para cada aluno. Consideramos que, sendo estas atividades uma continuação das anteriores, a fase 1 – informação – era desnecessária.

Antes do início da atividade 5 – *No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra e mantenha o papel dobrado. Marque um ponto fora desta dobra. Utilizando dobras determine o menor caminho entre o ponto e a dobra inicial* – fizemos uma introdução retomando os conceitos trabalhados anteriormente. Consideramos importante retomar os conceitos trabalhados já que, na atividade 3, os alunos escreveram que "ter a mesma distância" é uma das condições para que duas retas sejam paralelas. Queríamos verificar qual seria a compreensão deles sobre tal afirmação (este momento corresponde à fase 3 – explicação – com relação ao conceito de retas paralelas). Após fazer os desenhos de retas paralelas e concorrentes na lousa a professora perguntou "Como podemos medir a distância entre duas retas?", e os alunos responderam que "precisava marcar um ponto em uma das retas e então conseguia medir a distância até a outra reta". A professora leu com os alunos o enunciado da atividade 5, indicando que precisariam representar, por meio de uma dobra, a menor distância de um ponto à reta. Após esta introdução os alunos não tiveram dificuldades (fase 2 – orientação dirigida). Dois grupos realizaram a atividade de acordo com nossa hipótese H6, comparando o tamanho das dobras feitas. Todos fizeram a dobra que representa a menor distância dobrando diretamente a “reta” sobre si mesma de maneira a passar pelo ponto inicial, sem a preocupação de justificar porque este procedimento (correto) determina o segmento de menor distância. Observamos que a instrução de manter o papel dobrado ajudou na resolução da atividade, já que facilitou dobrar a “reta” sobre si mesma, estabelecendo a dobra perpendicular à inicial e que passa pelo ponto fixado. Aparentemente os alunos apoiaram suas convicções de terem obtido a distância correta apenas em uma percepção visual. Percebemos que a professora perdeu a oportunidade de questionar os alunos o porquê do procedimento feito estar correto, o que seria desejável que fosse feita no Nível 2 de Van Hiele.

Para responder à questão 6 – *Observando os ângulos formados pelas dobras feitas com a reta inicial, diga o que a única dobra que determina a menor distância tem de diferente das outras* – foi necessário retomar a classificação de ângulos, pois os alunos não recordavam. Após uma explicação com desenhos de ângulos na lousa, todos conseguiram identificar e classificar o ângulo formado pelas dobras feitas na atividade 5 de forma correta, ou seja, como um ângulo reto (fase 2 – orientação dirigida). Alguns grupos responderam à atividade 6 de maneira a confirmar nossa hipótese H7, ou seja, perceberam que se os ângulos formados pelas dobras fossem agudos ou obtusos não se obtém o menor caminho.

A atividade 7 – *Escreva suas conclusões com relação às questões 5 e 6* – não gerou tanta estranheza quanto a atividade 4, pois os alunos conseguiram escrever de forma clara e completa suas conclusões, sendo que todas as respostas dadas foram corretas (fase 3 – explicação). Seguem as conclusões escritas por eles: “*nós encontramos a distância entre o ponto e a reta, que sempre vai dar um ângulo reto*”; “*para indicar a distância entre uma reta e um ponto, sempre será um ângulo reto*”; “*utilizando dobras de novo dessa vez usando ângulos eu identifiquei que o meu ângulo é reto*”; “*quando nós dobramos a primeira vez ficou uma reta e fizemos um ponto distante da reta. E fizemos a segunda dobra em cima do ponto e a linha mais próxima do ponto era a primeira e vimos quatro ângulos que eram ângulos retos*”; “*ao dobrarmos achamos uma reta, nós fizemos duas retas e achamos o ângulo reto*”; e “*somente uma dobra forma o ângulo reto*”.

Após todos terminarem as atividades a professora perguntou: “Vocês lembram como se chamam as retas que se cruzam formando ângulos retos?”. Ninguém soube responder. Perguntou então: “Como podemos fazer o desenho dessa situação?”. Alguns alunos indicaram com os braços e outro aluno mostrou a dobra que ele tinha acabado de fazer. A seguir a professora desenhou na lousa duas retas perpendiculares, relembrou o uso do termo “perpendicular” para esta situação e ressaltou que as dobras por eles feitas tinham este padrão, com isso verifica-se a hipóteses H9 (este momento corresponde a fase 3 – explicação).

Analisando a aplicação deste bloco de atividades percebemos que poderia ter sido significativo explorar a definição de ângulo reto na atividade 6, solicitando aos alunos que abrissem a dobra feita e verificassem que todos os ângulos formados são retos. Este fato foi observado apenas por um dos grupos. Na próxima iteração daremos maior atenção a esta definição.

Quanto à hipótese H10, percebemos que ela não foi validada no projeto piloto até a atividade 7. A hipótese se refere a condições para o paralelismo de duas retas, enquanto as atividades de 5 a 7 focaram a discussão sobre perpendicularismo de retas. Ou seja, a hipótese H10 não cabe neste bloco de atividades da forma como foi formulado neste piloto. Acreditamos ser importante e vantajoso estabelecer uma relação entre os conceitos de perpendicularismo e paralelismo, mas é necessário tomar cuidado para permanecermos em atividades próprias ao Nível 2 de Van Hiele, evitando destacar propriedades mais avançadas, próprias ao Nível 3, como por exemplo: ‘se as retas coplanares r, s e t são tais que $r \perp s$ e $s \perp t$, então $r // t$’ ou ‘dadas duas retas cortadas por uma transversal, se dois ângulos correspondentes forem congruentes então as retas são paralelas’. Com isto em mente, formulamos outra atividade para a primeira iteração (após a questão 6), com o seguinte enunciado:

> Agora que encontramos o segmento cuja medida é a menor distância entre o ponto e a dobra inicial, dobre o papel de maneira a obter uma dobra paralela à inicial que passe pelo ponto marcado. Descreva como você fez e comprove que as dobras são paralelas.

Bloco III de Atividades

Conteúdos: Retas paralelas e perpendiculares; Retângulo; Quadrado; Segmentos congruentes.

A aplicação das atividades de 8 a 11 sobre tais conteúdos ocorreu no dia 21 de outubro de 2019 em duas aulas com duração de 50 minutos cada. Neste dia, dois alunos faltaram e, novamente, a aplicação ocorreu com 13 alunos. Para a realização, em duplas e um trio, destas atividades foi entregue uma folha com o enunciado das questões e duas folhas de papel vegetal com formato irregular para cada aluno, para a resolução das questões 9 e 10.

Começamos a aula retomando os conceitos trabalhos em todas as atividades anteriores. Percebemos que a maioria dos alunos lembrava das posições relativas entre retas e da classificação de ângulos (este momento corresponde a fase 3 – explicação). Antes de começar a atividade 8 introduzindo quadriláteros ainda não tematizados – *Desenhe utilizando régua e esquadro um retângulo e um quadrado. Justifique por que as figuras desenhadas são um retângulo e um quadrado. Liste o que é semelhante e o que é diferente entre as duas figuras* – perguntamos aos alunos se eles conheciam e sabiam como utilizar o esquadro. Eles responderam que nunca tinham utilizado tal instrumento. A professora apresentou o esquadro aproveitando para reforçar a classificação de ângulos ao questionar sobre quais tipos de ângulos o esquadro apresenta – ao que responderam corretamente. A seguir mostrou como utilizar o instrumento, fazendo desenhos na lousa. Com isso, a atividade 8 ocorreu sem dificuldade para os alunos, já que todos sabiam identificar e representar retângulos e quadrados. Eles conseguiram descrever as características iguais e diferentes das duas figuras utilizando também conceitos trabalhados em atividades anteriores (paralelismo e ângulos retos). Esta atividade nos possibilitou fazer um diagnóstico sobre a concepção dos alunos sobre estas figuras, para que conseguissem realizar as atividades 9 e 10, em concordância com a hipótese H11 (fase 1 – informação – relativo ao conteúdo de retângulo e quadrado). Vale ressaltar que segundo Luiz Carlos Pais (PAIS, 1996) a partir do trabalho com desenhos podemos identificar as representações dos conceitos de acordo com as imagens mentais constituídas pelos alunos (ver p. 18). Seguem as respostas dos alunos:

"*A semelhança, os dois têm ângulos retos e os dois têm lados paralelos. As diferenças são que o quadrado tem quatro lados iguais e o retângulo não tem quatro lados iguais*";
"*Diferença: quadrado tem lados iguais e o retângulo tem lados diferentes, semelhanças: têm os ângulos iguais*";
"*A semelhança entre elas é que têm ângulos retos e a diferença é o comprimento dos lados*";
"*O quadrado e o retângulo têm lados paralelos e quadrado tem todos os lados iguais*";
"*A semelhança é que as duas têm quatro lados e a diferença é que o quadrado tem lados iguais e o retângulo não*";
"*Os dois têm retas paralelas e o retângulo tem lados um maior que o outro, já no quadrado os lados são iguais*";
"*O quadrado tem os 4 lados da mesma medida. O retângulo tem 2 pares de paralelas, mas cada par tem uma medida. Semelhanças: são formas geométricas, têm quatro ângulos retos e 2 pares de paralelas e 4 retas perpendiculares. Diferença: o quadrado tem 4 lados iguais e o retângulo tem 2 lados diferentes*"; e
"*Semelhança: ângulos retos, quatro lados e lados paralelos. Diferença: comprimento dos lados*".

Observamos que apenas os dois últimos alunos deram respostas compatíveis com o Nível 3 de Van Hiele.

Na atividade 9 – *Agora faça com dobras um retângulo e justifique por que é de fato um retângulo* – percebemos que os alunos utilizaram a construção do ângulo reto (feita anteriormente na atividade 5) para construir o retângulo, o que se confirma observando as justificativas feitas por eles, onde a maioria citou que a figura formada é um retângulo pois fizeram as dobras que formam ângulos retos (fase 4 – orientação livre). Retomando o que diz Luiz Carlos Pais (PAIS,1996), pudemos perceber que os alunos fizeram "uma leitura geométrica da representação" (ver p. 18) de ângulos retos obtidos com as dobras construídas. Assim, está verificada a hipótese H12, pois podemos confirmar que os conceitos e suas representações pelas dobras, feitas anteriormente, foram dominados pelos alunos. Observamos que todos os alunos justificaram apontando os ângulos retos e não falaram sobre o paralelismo entre os lados opostos do retângulo. Porém isto foi observado somente quando lemos as respostas, assim não houve uma discussão sobre a necessidade (ou não) de comprovar que os lados são paralelos. Com a formulação da nova atividade (já mencionada anteriormente) na qual os alunos farão a construção de retas paralelas, na próxima iteração tal falha foi superada, como veremos no próximo capítulo.

Na atividade 10 – *Agora faça com dobras um quadrado e justifique por que é de fato um quadrado* – foi perceptível a falta de experiencia prévia da maioria dos alunos de como obter lados congruentes por dobraduras (fase 4 – orientação livre). Somente uma dupla conseguiu rapidamente fazer a construção do quadrado justapondo os lados ao dobrar o ângulo reto ao meio (fazendo a dobra da bissetriz). Os outros alunos fizeram os ângulos retos, mas não deixaram os lados exatamente com a mesma medida, pois a dobra do quarto lado foi feita por meio de uma aproximação visual. Ao observar estas construções dos alunos a professora fez alguns questionamentos: “Por que este lado tem o mesmo tamanho que o outro?” ou “*V*ocê tem certeza de que este lado tem o mesmo tamanho que o outro?”. Assim, os alunos foram se convencendo de que aquela construção não estava correta, pois não garantia que todos os lados tivessem, de fato, a mesma medida, e continuaram tentando. Com isso, outras duas duplas conseguiram realizar a construção do quadrado corretamente. As demais três duplas precisaram da ajuda da professora para concluir a construção. Refletindo sobre a dificuldade de tal atividade, verificamos a necessidade de introduzir, na próxima iteração, uma atividade prévia a esta na qual se trabalhe por dobraduras a congruência de segmentos com uma extremidade comum. Ou seja, percebemos que a “determinação de segmentos com extremidades comuns e de mesma medida”, mencionada na hipótese H13, não aconteceu por falta de orientação prévia nossa aos alunos. Consideramos que esta hipótese continua válida desde que haja a inclusão de uma atividade específica. Segue o enunciado planejado para esta nova atividade:

> Marque sobre a folha dois pontos e nomeie-os de A e B. Faça uma dobra que passe pelos pontos marcados.
> a) É possível fazer mais de uma dobra passando por A e B?
> b) Faça uma segunda dobra passando pelo ponto A. Localize nesta segunda dobra um ponto, nomeado de C, de maneira que a distância de A a B seja igual a distância de A a C. (Não utilizar régua.) Descreva como você encontrou o ponto C.

A atividade 11 – *Podemos dizer que “todo quadrado é um retângulo” ou que “todo retângulo é um quadrado”? Justifique sua resposta* – foi de grande dificuldade para os alunos (fase 4 – orientação livre). Percebemos agora que esta atividade é mais adequada ao *Nível 3 – Classificação ou Dedução Informal* – de acordo com o Modelo de Van Hiele, já que envolve o reconhecimento e inclusão de classes de figuras geométricas e a compreensão de definições "oficiais". Como nossa proposta inicial se restringia a atividades de Nível 2, avaliamos que esta atividade não foi apropriada aos objetivos do projeto piloto. De fato, além da observação final na atividade 8, de que apenas dois alunos deram resposta compatível com o Nível 3, nesta atividade constatamos que 7 alunos responderam corretamente que "*todo quadrado é um retângulo",* mas apenas 3 formularam uma justificativa coerente (por causa dos ângulos retos). Os demais alunos responderam que nenhuma das afirmações são verdadeiras. Concluímos que esta atividade deve ser suprimida em uma próxima iteração de trabalho com estes mesmos conteúdos e objetivos.

Para a atividade 12 – *Vamos construir uma caixa a partir de uma folha quadrada. Em cada passo da construção identifique quais elementos estudados anteriormente aparecem* – cada aluno recebeu uma folha quadrada colorida específica para Origami. Esta atividade tinha por objetivo retomar todos os conceitos desenvolvidos anteriormente (fase 5 – integração). Os alunos não apresentaram dificuldades em acompanhar os passos da construção e em identificar os conceitos trabalhados em cada passo. Mostraram grande interesse e entusiasmo na realização da atividade, devido ao seu aspecto lúdico, até por envolver folhas coloridas para a construção de um objeto concreto ao final. Para garantir o registro a professora entregou uma folha para que registrassem os elementos presentes em cada passo da construção da caixa. Os alunos fizeram um registro correto e completo identificando, em cada passo da construção, os conceitos presentes – retas paralelas, perpendiculares, ângulos retos, quadrados ou retângulos – além de citar outros elementos como triângulo, hexágono, sólido geométrico e bloco retangular. Seguem alguns registros feitos pelos alunos:

"1º Passo: Quadrado e retas perpendiculares. 2º Passo: Quadrado, retas perpendiculares, retas paralelas e ângulos retos. 3º Passo: Retângulo, retas paralelas e ângulos retos. 5º Passo: Retas perpendiculares, quadrado e retas paralelas. 6º Passo: Quadrados, retas perpendiculares e retângulo. 7º Passo: Quadrado, retângulos, retas perpendiculares, retas paralelas, ângulos retos. 9º Passo: Retas, ângulos retos, retas paralelas, retas perpendiculares, retângulos e quadrados";

"*1º Passo*: *Temos retas não paralelas (quadrado). 2º Passo: Quadrados formados por triângulos. 3º Passo: Retângulos. 4º Passo: Hexágono. 5º Passo: Temos retas paralelas. 6º Passo: Um retângulo com pontas formadas por quadrados. 7º Passo: A mesma coisa da 6. 8º Passo: Retângulo. 9º Passo: Sólido geométrico";* e

"*1º Passo*: *Quadrados. 2º Passo: Linhas perpendiculares. 3º Passo: Retângulo, linhas paralelas. 4º Passo: Retas e quadrados. 5º Passo: Triângulo e linhas paralelas. 6º Passo: Quadrados nas pontas. 7º Passo: Triângulo e quadrado nas pontas. 8º Passo: Linhas paralelas e perpendiculares, quadrado e retângulo. 9º Passo: Quadrado, retângulo e retas".*

Após o encerramento da atividade 12 a professora fez com os alunos a sistematização de tudo que foi trabalhado com dobraduras. Perguntou aos alunos quais foram os assuntos discutidos durante todas as atividades, registrando na lousa as ideias citadas por eles (as palavras-chave). Isso feito, sobre cada palavra que estava na lousa pediu para que explicassem o seu significado e como poderia ser representada por meio de figuras desenhadas. Os alunos participaram ativamente da discussão, conseguindo lembrar todos os conceitos desenvolvidos neste projeto piloto e explicando de forma correta cada um deles (completando a fase 5 – integração). Não foi feita uma avaliação formal sobre estes conceitos desenvolvidos, uma vez que os alunos já haviam sido avaliados por outra professora no primeiro bimestre sobre estes assuntos. O projeto não estava inserido na programação inicialmente prevista para o 4° bimestre, portanto, não caberia constar na avaliação final.

CAPÍTULO 4: Primeiro ciclo de iteração das atividades em sala de aula

4.1 Replanejamento e formulação do primeiro ciclo de iteração da pesquisa

Com a elaboração e aplicação de um projeto piloto de intervenção em sala de aula conseguimos fazer uma reflexão e identificar os pontos positivos e negativos. Com isso, revisamos as hipóteses iniciais e reformulamos as atividades do projeto piloto para uma nova aplicação. No projeto piloto a aplicação ocorreu em uma turma de 6º ano em uma escola, mas em 2020 passei a trabalhar em outra escola privada de Santo André, onde o conteúdo escolhido consta da programação do 7º ano.

Segue a segunda teoria local desenvolvida, com as novas hipóteses pensadas e as atividades replanejadas a partir do projeto piloto, para a próxima iteração em sala de aula.

Hipóteses sobre o uso de dobraduras no trabalho com os conteúdos:
Reta e segmento de reta; retas concorrentes e paralelas

H1 Partindo do fato de que toda a dobra é um modelo concreto de “reta” especialmente “preciso”, usar a manipulação de dobraduras pode favorecer a visualização desta noção primitiva da geometria. (Observemos que as próprias réguas podem apresentar ondulações, microscópicas ou não.)

H2 No entanto, necessariamente, uma dobra é um modelo de “segmento de reta”. Conjecturamos que questionar se duas dobras feitas em uma mesma folha de papel é um modelo de retas concorrentes ou não pode provocar uma discussão significativa sobre a diferença entre “segmento de reta” e “reta”. Isso porque algumas dobras se cruzam efetivamente na folha e outras não, mas podem encontrar-se nos prolongamentos imaginados de ambas, não sendo, portanto, paralelas.

H3 Da percepção sobre a necessidade de prolongar segmentos (dobras) para decidir se aquelas “retas” se encontram fora do papel, esperamos que, naturalmente, possa surgir um questionamento sobre “até onde podem ser prolongadas?”, levando à compreensão de que retas são ilimitadas e segmentos são limitados.

H4 Deste tipo de discussão poderá surgir uma definição de retas paralelas: duas dobras que não se cruzam nas suas extensões totais (mesmo fora do papel).

H5 Surge então a questão: Como saberemos que duas dobras feitas no papel são retas efetivamente paralelas? Com ela abre-se espaço para conjecturas dos alunos (respostas dos alunos conjecturadas por nós a *priori: duas retas são paralelas porque nunca se encontram; porque mantêm sempre a "mesma distância" entre elas; porque podem ser sobrepostas por meio de uma dobradura)* a serem trabalhadas no próximo bloco de atividades.

Bloco I de Atividades

Pertinentes às fases de aprendizagem de Van Hiele de 1 a 3.
Conteúdos: Reta e segmento de reta; retas concorrentes e paralelas.
Estratégia: Formar duplas; entregar folha de papel vegetal com formato irregular para cada aluno de maneira que possíveis margens retilíneas não sirvam de apoio indevido para as construções com dobraduras.

<u>Atividades propostas:</u>

1) Dobre e desdobre um pedaço de papel:
a) qual o nome do elemento geométrico representado pela marca da dobra?
b) Dobras diferentes feitas em um mesmo papel podem ter comprimentos diferentes. Qual é a medida do comprimento do elemento geométrico identificado por você no item "a"?
2) Com o papel aberto marque (com um lápis ou caneta) um ponto fora da dobra feita e faça outra dobra passando por este ponto que não passe pela primeira dobra no seu pedaço de papel.
a) Se o papel fosse maior estas dobras continuariam a não se cortar? Foi necessário imaginar uma folha muito maior para chegar na sua resposta? Explique como pensou.

Vamos combinar?

Reta: é uma linha imaginária, infinita e sem "curvas".[2]

Segmento de reta: é um único pedaço de reta de comprimento finito.

Duas retas no mesmo plano são **paralelas** se não se encontram e são **concorrentes** quando se encontram.

b) As dobras feitas antes são paralelas ou concorrentes? Justifique.

3) O que você acha que é preciso garantir para que uma segunda dobra (feita como no item 2) seja paralela à primeira? Explique por quê.

4) Com suas palavras diga o que você aprendeu e as dúvidas que ficaram a partir das atividades de 1 a 3.

Hipóteses sobre o uso de dobraduras no trabalho com os conteúdos: Perpendicularismo entre retas; ângulo reto, agudo e obtuso

H6 Para provocar uma discussão sobre distância de ponto a reta com dobraduras, imaginamos que, ao marcar um ponto fora de uma dobra anteriormente feita, por meio de outras dobras que passam por esse ponto e cortam a dobra inicial (determinando segmentos do ponto à dobra), os alunos possam comparar as distâncias entre o ponto e a dobra inicial por sobreposição dos segmentos obtidos identificando qual segmento é maior.

H7 Conjecturamos que investigar a ideia de distância de um ponto a uma dobra pode ajudar os alunos a "descobrirem" que algumas dobras formam com ela dois ângulos diferentes (um agudo e outro obtuso) e uma única dobra forma ângulos iguais (o ângulo reto).

H8 Assim eles poderão observar as características desta dobra, sobre a qual está o segmento de menor distância, e verificarão sua unicidade, pois por meio dela duas partes da dobra inicial ficam sobrepostas sobre si mesmas, determinando assim 4 ângulos congruentes, enquanto as demais determinam quatro ângulos, dois a dois suplementares.

[2] Nas sistematizações, projetadas em sala de aula, procuramos usar uma linguagem adequada à compreensão de alunos da fase de escolaridade alvo desta pesquisa. Por esta razão, colocamos "curvas" (entre aspas), mesmo sabendo que na Matemática retas são casos particulares de curvas.

H9 Com esses procedimentos os alunos descobririam a construção do ângulo reto por dobraduras e da dobra perpendicular à outra dobra passando por um ponto fora desta última. Esse pode ser um passo importante para que, na sistematização, se possa trabalhar significativamente a definição de ângulo reto como sendo aquele "formado por duas retas concorrentes na única situação em que determinam quatro ângulos congruentes".

H10 Tendo sido construída a dobra sobre a qual se realiza a menor distância de um ponto a uma reta, se os alunos forem desafiados a construir a dobra paralela à mesma reta passando pelo mesmo ponto, será possível retomar e atribuir um significado mais concreto às ideias por eles anteriormente formuladas sobre condições para que duas retas sejam paralelas.

Bloco II de Atividades

Pertinentes às fases de aprendizagem de Van Hiele de 1 a 4.
Conteúdos: Perpendicularismo entre retas; ângulo reto, agudo e obtuso.
Estratégias: Formar duplas; entregar folha de papel vegetal com formato irregular para cada aluno de maneira que possíveis margens retilíneas não sirvam de apoio indevido para as construções com dobraduras.

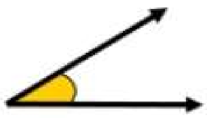
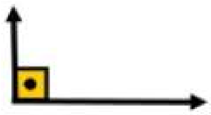
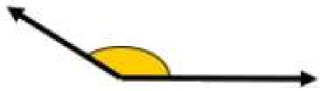
<u>Atividades propostas:</u>

5) No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra e mantenha o papel dobrado. Marque um ponto no papel, fora desta dobra.
a) Agora faça duas dobras diferentes que passam pelo ponto marcado e sejam concorrentes com a primeira, determinando 2 segmentos que começam no ponto marcado e terminam na dobra inicial. Sem utilizar régua, diga se os segmentos dobrados têm ou não o mesmo comprimento.
Desafio! Comprove a sua resposta anterior usando dobradura e descreva o procedimento feito.
b) Faça uma dobra que determine o menor segmento entre o ponto marcado e a dobra inicial. Existe mais de uma? Explique como chegou à sua resposta.

6) Diga o que tem de diferente das outras a dobra que determina o menor segmento encontrado na atividade “5b”, observando os ângulos formados por cada dobra feita com a dobra inicial.

Relembrando!

Escreva o nome dos ângulos desenhados a seguir:

Você observou?

Somente uma dobra que sobrepõe duas partes da dobra inicial sobre elas mesmas, determina quatro ângulos iguais no papel aberto. Cada um destes quatro ângulos iguais é chamado de **ângulo reto**.

Neste caso dizemos que uma dobra é **perpendicular** à outra quando forma ângulos retos.

7) Agora que encontramos a dobra que passa pelo ponto marcado e é perpendicular à dobra inicial, dobre o papel de maneira a obter outra dobra que seja paralela à inicial e que passe pelo ponto marcado. Descreva como você fez e explique por que as dobras obtidas são paralelas.

Vamos concluir?

Dadas duas retas perpendiculares, uma terceira reta que seja perpendicular a uma delas será paralela à outra.

8) Escreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores e as dúvidas que surgiram.

Hipóteses sobre o uso de dobraduras no trabalho com os conteúdos: Retas paralelas e perpendiculares; segmentos congruentes; retângulo, quadrado e suas diagonais

H11 A construção de retângulos e quadrados com régua e esquadro poderá servir como um diagnóstico para verificar a concepção dos alunos sobre essas figuras. Observe-se que os alunos poderão utilizar a noção de distância, já trabalhada, e suas medidas na régua.

H12 Na construção com dobraduras de retângulos poderemos verificar se os conceitos e a construção geométrica de retas paralelas e perpendiculares (construção do ângulo reto) já estão dominados.

H13 Para realizar a construção do quadrado com dobras, os alunos utilizarão ideias semelhantes às da construção do retângulo, mas surge a necessidade da determinação, com o uso de dobras, de segmentos com mesma origem e medida (segmentos congruentes), o que introduz a necessidade do conceito de extremidades de um segmento. Assim, torna-se conveniente solicitar que, inicialmente, sejam marcados no papel dois pontos (A e B) que serão as extremidades de um segmento, para depois introduzir um terceiro ponto C (não colinear) de modo que $\overline{AB}$ seja congruente a $\overline{AC}$. Tal C será o ponto extremidade do segmento $\overline{AC}$ procurado. Este procedimento determina a dobra bissetriz do ângulo entre as duas dobras já vincadas, o que possibilita encontrar a localização de C na segunda dobra.

H14 Note-se que dados A e B marcados no papel, sempre existe uma e somente uma dobra que passa pelos dois pontos. Isto pode oferecer uma maneira concreta de familiarizar os estudantes com o primeiro postulado da Geometria Euclideana: “por dois pontos passa uma única reta”. Assim, temos uma boa oportunidade para destacar a evidência da unicidade da construção desta reta por dobraduras, como uma ideia, talvez útil, para o desenvolvimento futuro de um pensamento axiomático dos alunos. Porém, foge do escopo desta dissertação confirmar ou não tal hipótese, já que não cabe trabalhar geometria axiomática na fase de escolaridade em questão.

H15 Uma sistematização final deverá representar uma tomada de consciência por parte dos alunos sobre os conceitos trabalhados e uma oportunidade para a professora de avaliar a evolução das concepções dos estudantes sobre os conceitos trabalhados.

Bloco III de Atividades

Pertinentes às fases de aprendizagem de Van Hiele de 1 a 5.
Conteúdos: Retas paralelas e perpendiculares; segmentos congruentes; retângulo, quadrado e suas diagonais.
Estratégia: Atividade individual; entregar uma folha de papel vegetal com formato irregular para a atividade 10 e outra para a atividade 11, de maneira que possíveis margens retilíneas não sirvam de apoio indevido para as construções com dobraduras. Entregar uma folha quadrada para a atividade 13.

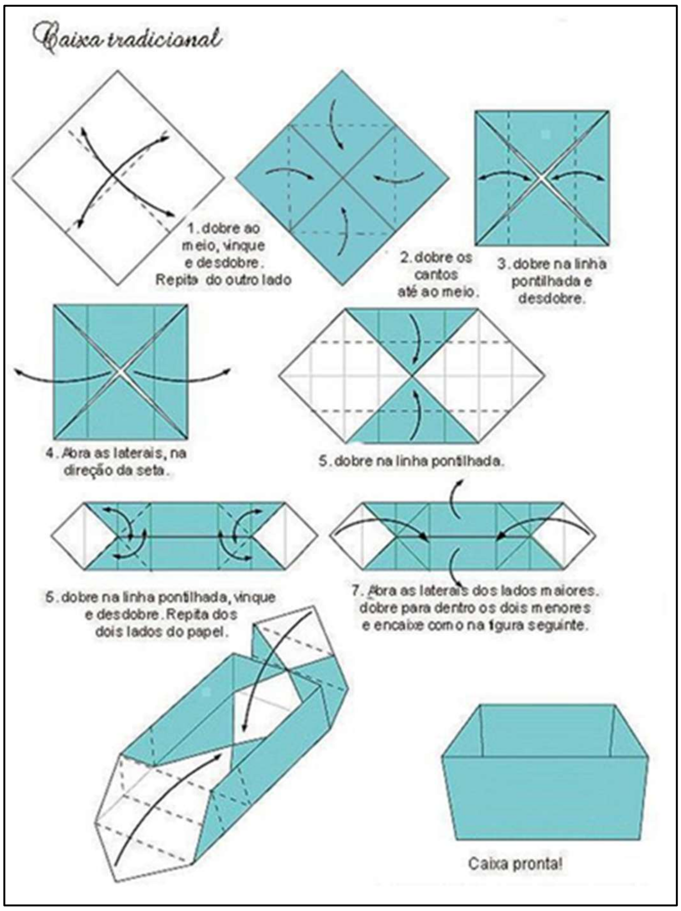
<u>Atividades propostas:</u>

9) Desenhe um retângulo e um quadrado utilizando régua e esquadro. Liste as características que são iguais e as que são diferentes entre as duas figuras.
10) Agora, no papel fornecido faça um retângulo com dobras e justifique por que é de fato um retângulo.
11) Marque sobre a folha dois pontos e chame-os de A e B. Faça uma dobra que passe pelos pontos marcados. Observe que não é possível fazer mais de uma dobra passando por A e por B. Faça uma segunda dobra passando pelo ponto A. Usando dobradura, encontre nesta última um ponto, (chame-o de C) de maneira que a distância de A a B seja igual à distância de A a C (não utilize régua). Descreva o procedimento feito para encontrar o ponto C.
12) Faça agora um quadrado com dobras e justifique por que obteve de fato um quadrado.
13) Nesta atividade vamos trabalhar com as diagonais de retângulos e quadrados.
Faça as dobras que representam as diagonais do retângulo e as diagonais do quadrado.
a) Liste as características das diagonais do retângulo.
b) Liste as características das diagonais do quadrado.
c) Quais características são iguais e quais são diferentes nas diagonais de retângulos e quadrados.

14) Descreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores e as dúvidas que surgiram.

15) Vamos construir uma caixa a partir de uma folha quadrada. Em cada passo da construção identifique quais elementos estudados anteriormente aparecem.

Figura 2: Passo a passo da construção da caixa 2



Fonte: http://anabraga-artesanatos.blogspot.com/2011/07/

4.2 Aplicação das atividades e análise dos resultados

Neste capítulo faremos a descrição de como ocorreu a aplicação do novo conjunto de atividades que foram replanejadas bem como a análise da aplicação e dos resultados encontrados. Segundo o planejamento inicial, essas atividades seriam aplicadas em 2020 para uma turma do 6º ano, mas, devido a pandemia da COVID-19 e mudança de local de trabalho da pesquisadora, a atividade foi aplicada no segundo semestre de 2021 em duas turmas do 7º ano. Como mencionado anteriormente, a mudança ocorrida relativa ao ano de escolaridade (de 6º para 7º ano do Ensino Fundamental) deveu-se ao fato de que os conteúdos de geometria selecionados na pesquisa constam no material do 7º ano na escola em que será aplicado o projeto. Vale destacar também que, devido a pandemia e a um atraso no trabalho com os conteúdos programados, essas turmas de 7º ano não tiveram contado com nenhum conteúdo de geometria no 6º ano.

A aplicação das atividades se deu ao longo de 7 aulas de Matemática para cada uma das duas turmas de 7º ano, com duração de 50 minutos cada aula. Devido à pandemia, as aulas foram ministradas de forma simultânea, com cerca de metade dos alunos presencialmente e metade online, através da plataforma Microsoft Teams, sendo no total 32 alunos em cada turma. Por nossa orientação, os alunos que estavam presentes na sala se organizaram em duplas ou trios. Cada aluno recebeu uma folha com as orientações e as questões para registrarem suas respostas, além de folhas vegetais com formato irregular para realização das dobraduras. Para os alunos que estavam online, foi disponibilizado o arquivo com as orientações e as questões, eles acompanharam via Teams o que estava sendo feito em aula, tendo sido orientados a utilizar qualquer tipo de folha para a realização das dobraduras (caso não tivessem o papel vegetal). Eles também poderiam se reunir em duplas após a aula para discutir e fazer a entrega da atividade em conjunto. Posteriormente, fizeram o envio de suas respostas, a maioria de forma individual. Vale ressaltar que neste período nem todos os alunos participavam das aulas (seja presencial ou online), assim como, alguns alunos que não participavam presencialmente não realizaram as entregas dos registros de suas respostas. A análise dos dados da primeira iteração foi feita com base nas observações e anotações da pesquisadora, na gravação das aulas, nas dobraduras e nos registros feitos pelos alunos.

Bloco I de Atividades

Conteúdos: Reta e segmento de reta; retas concorrentes e paralelas.

A aplicação das atividades de 1 a 4 sobre os conteúdos relacionados ocorreu nos dias 27 de setembro com a turma do 7º ano A (15 alunos presencialmente em aula e 13 online) e 29 de setembro de 2021 com a turma do 7º ano B (18 em sala de aula e 8 online), ambas em aulas duplas com duração de 100 minutos.

Nas aulas prévias ao início da aplicação do projeto, a professora iniciou, com as duas turmas, a unidade do material didático sobre o conteúdo de ângulos e construções geométricas, fazendo com eles os primeiros exercícios que tratam da identificação de ângulos em figuras e do trabalho com giros. Os alunos não haviam estudado nenhum conteúdo de geometria tanto no ano anterior como neste, já que no material didático voltado ao Ensino Fundamental não há uma unidade dedicada ao trabalho com os conceitos básicos iniciais da geometria Euclideana no 6º ano.

Antes de iniciar a atividade, a professora explicou aos alunos que nas próximas aulas iriam trabalhar em uma sequência didática que trata do estudo de conceitos iniciais de geometria por meio do uso de dobraduras. Destacou também a atenção que eles deveriam ter na leitura dos enunciados, colocou-se à disposição em caso de dúvidas e explicou que iria recolher todo o material ao final da aula (este momento corresponde a fase 1 – informação do modelo Van Hiele). Devido ao fato de alguns alunos acompanharem a aula online, foi feita a leitura, em conjunto com os alunos, dos enunciados dos exercícios desta primeira parte da atividade, o que permitiu que observações e explicações fossem dadas pela professora, quando necessário.

O enunciado da primeira atividade lida com os alunos inicia por – *Dobre e desdobre um pedaço de papel.* Neste momento foram feitas duas perguntas: *"É para dobrar no meio?"* (mesmo sendo a folha de papel vegetal de formato irregular e tendo sido indicado ser esta a folha a ser dobrada) *e "É uma dobra em qualquer lugar?"*, para a qual a professora respondeu questionando se no enunciado há alguma restrição ou orientação de como deveria ser a dobra e destacou que era apenas uma única dobra. Muitos alunos pediram para a professora verificar se a dobra feita estava correta, demonstrando o receio de não ter dobrado adequadamente (fase 2 – orientação dirigida). Esse tipo de atitude mostra que eles não estão familiarizados com resolução de problemas abertos. Passando para o item "a" – *qual o nome do elemento geométrico representado pela marca da dobra?* – um aluno do 7ºA imediatamente respondeu "*uma linha*", mas um outro aluno respondeu "um retângulo", mostrando não ter entendido o que seria a marca da dobra. Sem qualquer comentário, a professora mostrou a dobra feita por outro aluno para a turma indicando o que seria a marca da dobra. Neste momento, outros alunos responderam "linha" e "linha reta". Nesta turma apareceram os seguintes tipos de registros como resposta ao item “a”: “*uma linha*”, “*uma linha reta*”, “*um segmento de reta*” e “*uma reta*” (todas as 15 respostas corretas). Nos registros dos alunos que estavam online apareceram respostas como: “*uma linha*”, “*reta*”, “*linha reta*” (9 respostas corretas) e quatro (4) alunos responderam de forma incorreta “*um retângulo*”. Vale ressaltar que a resposta “um retângulo” não apareceu mais nos registros dos alunos que estavam em sala de aula, aparecendo apenas em respostas de alunos que estavam online, possivelmente por não terem feito dobras em folhas de formato irregular e não terem entendido o enunciado corretamente. Na turma do 7ºB, assim que a professora leu o enunciado, um aluno perguntou “*O que seria a marca da dobra?”.* Novamente a professora mostrou para a turma a dobra feita por outro aluno, indicando o que é a marca da dobra. Nenhum aluno se manifestou em voz alta respondendo ao exercício. Nesta turma apareceram os seguintes tipos de registros como resposta ao item “a”: “*uma linha*”, “*uma linha reta*”, “*uma reta*” (17 respostas corretas), e apenas um (1) aluno respondeu de forma incorreta “ângulo reto”. Nos registros dos alunos que estavam online apareceram respostas como: “*reta*”, “*linha reta*” (6 respostas corretas) e dois (2) alunos responderam de forma incorreta “*um retângulo*”, reforçando a análise já feita anteriormente sobre a maior dificuldade de comunicação com os alunos no formato online. Diante das respostas dos alunos pudemos confirmar nossa hipótese H1 de que a dobra é um modelo concreto preciso para a noção primitiva de reta, já que entre os alunos que estavam presentes apenas um (1), de um total de 33, se equivocou e a maioria dos que estavam no online responderam corretamente (15 de um total de 21). Assim, a diferença significativa entre a quantidade de erros apresentados no ensino presencial comparado com o online, nos permitiu avaliar como positiva a interação ocorrida no presencial entre professora e alunos, entre os próprios alunos o mesmo não ocorrendo online, em prejuízo da aprendizagem.

Em razão das respostas iniciais errôneas para o item 1a (um retângulo), na tentativa de deixar mais claro o significado de “marca da dobra” a ser observada pelos alunos, acrescentamos uma observação no enunciado da atividade 1:

> **1) (2ª iteração)** Dobre e desdobre a folha de papel vegetal. <u>Observando a marca deixada no papel, responda:</u>
>
> a) Qual o nome do elemento geométrico representado pela marca da dobra?

Após ler o enunciado do item “b” – *Dobras diferentes feitas em um mesmo papel podem ter comprimentos diferentes. Qual é a medida do comprimento do elemento geométrico identificado por você no item “a”?* – os alunos de imediato pegaram as réguas para medir o comprimento da dobra feita. O objetivo desta questão foi o de propiciar uma posterior discussão sobre as definições de reta e segmento de reta.

Prosseguindo, a professora leu o enunciado da atividade 2 – *Com o papel aberto marque (com um lápis ou caneta) um ponto fora da dobra feita e faça outra dobra passando por este ponto que não passe pela primeira dobra no seu pedaço de papel.* Na turma do 7ºB um aluno perguntou *“Mas, marcar onde?”* e a professora respondeu que poderiam marcar um ponto em qualquer lugar do papel, menos em cima da dobra feita (fase 2 – orientação dirigida). Nas duas turmas alguns alunos ficaram com dúvidas relativamente às instruções do enunciado e pediram para que a professora verificasse se estava correto o que tinham feito. Após sanar as dúvidas e fazer as verificações solicitadas, continuou a leitura do enunciado do item “a” – *Se o papel fosse maior estas dobras continuariam a não se cortar? Foi necessário imaginar uma folha muito maior para chegar na sua resposta? Explique como pensou.* A professora observou que muitos alunos estavam tendo dificuldades em entender as instruções da atividade 2, demonstrando muita insegurança na realização das dobras e no registro de suas respostas. Observou também que alguns alunos mostraram falta de interesse ou motivação para pensar de forma autônoma no desafio proposto. Levantamos aqui duas hipóteses explicativas deste comportamento, a serem testadas na próxima iteração: o enunciado da questão não foi adequado à compreensão dos alunos; e dificuldades de interação e participação nas aulas presenciais após o longo período de aulas online.

Ao observar os alunos discutindo e respondendo a questão 2a, a professora identificou que tiveram bastante dificuldade em explicar e registrar seus raciocínios, o que posteriormente foi perceptível na leitura dos registros entregues, os quais continham: falta de coerência em algumas respostas; erros gramaticais; e uso de linguagens informais. Dos alunos que estavam em sala foi possível comparar a resposta dada com a dobra efetuada e todos responderam sim ou não de forma correta à primeira pergunta (*Se o papel fosse maior estas dobras continuariam a não se cortar?)*; no entanto, esta comparação não foi possível para os alunos que estavam online.

Quanto à segunda pergunta (*Foi necessário imaginar uma folha muito maior para chegar na sua resposta? Explique como pensou)*, destacamos alguns registros de respostas:

"*Não, pois se a folha aumentar elas continuam não se encontrando, porque elas estão distantes uma da outra*";

"*Não se as linhas aumentarem não mudaria nada, até porque elas só iriam aumentar*";

"*Sim, pois estão em lugares diferentes seguindo reto*";

"*Sim, eu pensei que se a folha for maior elas vão se bater uma hora*";

"*Sim, pois as linhas estão tortas*";

"*Sim, pois iria demorar a se cruzar*";

"*Não, porque as linhas são retas*";

"*Se o papel fosse maior as dobras continuariam a não se cortar, pois mesmo sendo um papel maior, as dobras seriam feitas uma do lado da outra*";

"*Não, só fui repetindo o movimento e elas não se cruzam*"; e

"*Sim, eu peguei uma folha de sulfite e dobrei igual as linhas da outra folha e foi assim que eu cheguei na resposta*".

Três duplas presenciais escreveram respostas incompatíveis com a pergunta feita, e dos alunos que estavam online dois escreveram respostas confusas e um não respondeu. Seguem as respectivas respostas: "*Porque elas se encontram*"; "*Não muito pois essa folha está na metade*"; "*Não, porque o ponto não está muito perto da linha, e mesmo que a folha fosse maior, mesmo assim cortaria*" (no presencial); "*Não foi necessário, pois eu imaginei uma folha maior para ficar mais fácil de pensar*"; e "*Não porque a folha é maior que o ponto*" (no online). Analisando as respostas, com relação ao fato da reta ser infinita, percebemos que a grande maioria das respostas, mesmo que em uma linguagem imprecisa, indica uma conotação (destacadas nas respostas transcritas acima) sobre o fato de que as linhas das dobras podem ser prolongadas indefinidamente na mesma direção. Sobre a ideia das dobras representarem trechos de retas concorrentes, as justificativas dadas foram bastante sugestivas em geral, como se pode observar nas respostas "*Sim*". No entanto, percebemos uma grande dificuldade dos alunos em caracterizar a situação em que as retas obtidas são paralelas, o que nos leva a entender que eles não tinham um conhecimento prévio sobre a definição de retas paralelas ou não haviam assimilado a ideia do conceito significativamente.

Antes de continuar no item “b” a professora apresentou, para os alunos que estavam na sala, a projeção do seguinte slide:

Figura 3: Slide 1 - Bloco I de Atividades (2021)

Avaliação – Parte I

Vamos Combinar?

✓**Reta**: é uma linha imaginária, infinita e sem “curvas”.

✓**Segmento de Reta:** é um único pedaço de reta de comprimento finito.

✓Duas retas no mesmo plano são **paralelas** se não se encontram, e são **concorrentes** quando se encontram.

Fonte: Slide utilizado em sala de aula pela autora

A leitura das definições constantes no slide foi feita em uma classe pela professora e na outra pelos alunos, por solicitação da mesma. Com relação às duas primeiras definições, foi enfatizada a relação entre a ideia da reta ser infinita com o exercício 2a (onde tiveram que imaginar o prolongamento das dobras), e destacado que um segmento de reta seria a parte da dobra que se vê no papel, medido no exercício 1b. Neste momento, alguns alunos tomaram a iniciativa de retomar o exercício 1a para utilizar as nomenclaturas introduzidas (reta ou segmento de reta) em suas respostas. Sobre a definição de retas paralelas e concorrentes, a professora destacou que tais conceitos foram mobilizados no exercício 2a, onde foi solicitado que verificassem se as dobras que fizeram em um mesmo papel se cortavam ou não (este momento corresponde a fase 3 – explicação). Todos pareceram concordar, atribuindo significado à sistematização feita, tanto que durante a leitura do item 2b – *As dobras feitas antes são paralelas ou concorrentes? Justifique* – alguns alunos responderam em voz alta. Observando os registros feitos nas duas turmas, apenas uma dupla classificou de forma discordante com as dobras feitas. Os demais classificaram corretamente, justificando suas respostas em concordância com as definições, ou seja, são paralelas pois não se encontram ou são concorrentes pois se encontram. Para os alunos que estavam online não foi possível observar as dobras realizadas, no entanto as classificações respondidas ao item 2b mostraram coerência com as respostas dadas ao item 2a, e justificaram de acordo com as definições. Acreditamos que a pertinência da nossa hipótese H4 foi confirmada, porém com uma mudança na redação, já que os alunos demonstraram não ter maturidade ou domínio de linguagem suficiente para chegarem sozinhos às definições. Reformulando a redação, na próxima iteração a nova H4 terá o seguinte enunciado:

H4 Este tipo de discussão poderá favorecer a atribuição de significado à definição de retas paralelas: duas dobras que não se cruzam nas suas extensões totais (mesmo fora do papel).

A professora fez a leitura do enunciado da questão 3 – *O que você acha que é preciso garantir para que uma segunda dobra (feita como no item 2) seja paralela à primeira? Explique por quê*. Na turma do 7ºA uma aluna respondeu – "*Que elas não se encontram*", e a professora questionou se não haveria outras características que pudessem ser observadas entre retas paralelas, pois "não se encontrar" faz parte da definição desse tipo de posição entre retas. Tal comentário provocou uma maior discussão nos grupos para responderem à questão. Um outro aluno respondeu "*Serem retas*", e a professora questionou se retas concorrentes também não são retas, o que fez o aluno repensar sua resposta (fase 2 – orientação dirigida). Assim, pudemos avaliar que os alunos se encontravam de fato no Nível 2 (análise) do Modelo de Van Hiele sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico, pois demonstraram não compreender definições "oficiais" e conseguir trabalhar com definições precisas (ver p. 22).

Refletimos sobre a ideia subjacente a cada resposta buscando identificar a que fosse principal, mesmo em explicações eventualmente confusas ou com terminologia imprecisa. A seguir organizamos as citações dos registros elaborados pelos alunos de acordo com as seguintes ideias sobre as características de retas paralelas apontadas: (a) seguem na mesma direção alinhadas uma em relação à outra; (b) mantêm sempre a mesma distância uma da outra; (c) não se cruzam (a própria definição); e (d) "estarem em lados diferentes" – ideia esta que não nos ficou clara e consideramos que, se não coincidir com (a) (serem alinhadas) poderia indicar que as retas podem ser sobrepostas uma com a outra (ficando assim de lados distintos da dobra que realiza a sobreposição). Infelizmente essa análise foi realizada após o término das aulas, e assim não pudemos discuti-la com os alunos. Para uma próxima iteração das atividades, consideramos importante realizar esse confronto, das nossas interpretações com as reais ideias que os alunos tentaram expressar, até para garantir uma sistematização mais significativa do conceito de paralelismo. Seguem os registros feitos pelos alunos que estavam em sala e online:

(a) seguem na mesma direção alinhadas uma em relação à outra:

"*Que esteja na mesma direção. Porque as duas vão seguir uma ao lado da outra reto*";

"*Para garantir que uma dobra seja paralela à outra, é necessário que elas estejam uma do lado da outra. Porque para serem paralelas, as dobras não podem se encontrar, e o jeito de deixá-las paralelas é colocando uma do lado da outra*";

"*Sendo dobras no mesmo sentido da primeira, formando uma linha paralela sem curvas*"

"A *posição tem que estar reta uma com a outra*";

"*A dobra precisa ser reta pois assim elas não se cruzam*";

"*Elas não podem ter inclinação*";

"*Se as dobras forem feitas no mesmo ângulo as retas não se encontram, e serão paralelas*"; e

"*É preciso ter uma marcação e dobrar na direção certa*";

(b) mantêm sempre a mesma distância uma da outra:

"*Para continuar sendo paralelas é preciso fazer uma dobradura que a linha não encontra a primeira, e que continuem no mesmo sentido e tendo a mesma distância uma pra outra*";

"*Se tiver a mesma distância é paralela*";

"*Medir com uma régua, fazendo com que um ponto X vá até um ponto Y, até o fim da folha*";

"*Elas precisam de espaço, porque se tiver espaço elas não vão se encontrar*";

"*Elas serem separadas e retas*"; e

"*É preciso deixar elas separadas*";

(c) não se cruzam:

"*Elas não podem se encontrar*";

(d) "estarem em lados diferentes":

"*Dobrar um lado da folha antes da antiga dobra*";

"*É preciso garantir que elas fiquem em lados diferentes pois assim não se cruzam*"; e

"*Fazer a dobra de lados diferentes, para elas não se encontrarem*".

Dos registros feitos, tivemos duas duplas, que estavam em sala, e dois alunos que estavam online que responderam de forma incorreta, incompatível ou incompreensível: “*Se as retas tiverem vértice serão paralelas*”; “*A primeira é paralela e a segunda é concorrente*”; “*Fazer em uma folha maior*”; e “*Acho que para garantir na segunda dobra tem que fazer uma dobra pequena*”.

Diante das respostas dadas pelos alunos à questão 3, percebemos a dificuldade que encontraram para descrever características garantidoras do paralelismo entre duas dobras feitas. Decidimos, assim, fazer uma alteração na ordem das questões 2b e 3, revendo também seus enunciados. Tais alterações visam levar os alunos a, inicialmente refletir sobre as características que envolvem o paralelismo entre retas, para posteriormente classificar em paralelas ou concorrentes as dobras feitas, de acordo com as características por eles descritas. A intenção é que assim consigam precisar melhor suas respostas à questão 3 (nova questão 2b) e, também, evitem responder “são paralelas por que não se cruzam”, já que esta é a definição dada de retas paralelas. Seguem os novos enunciados das questões:

> **2) (2ª iteração)** Com o papel aberto marque (com um lápis ou caneta) um ponto fora da dobra feita e faça outra dobra passando por este ponto que não passe pela primeira dobra no seu pedaço de papel.
>
> a) Se o papel fosse maior estas dobras continuariam a não se cortar? Foi necessário imaginar uma folha muito maior para chegar na sua resposta? Explique como pensou.
>
> b) Vimos que duas retas são paralelas se não se cruzam em nenhum ponto. Descreva o que mais podemos observar em duas dobras feitas como no item 2 para que se possa garantir que elas sejam paralelas. Justifique sua resposta.
>
> c) A partir do que foi observado no 2 b), verifique se as dobras feitas por você são paralelas ou concorrentes. Justifique.

Na próxima iteração, faremos, entre os itens 2b e 2c uma discussão com todos os alunos, sobre as respostas formuladas ao item 2b, na busca de uma sistematização das diferentes ideias que alunos efetivamente tenham desejado expressar, de maneira a que consigam se apropriar de uma terminologia mais precisa, com atribuição de significados. Com isso imaginamos que as dificuldades de linguagem e de falta de clareza não venham a ser presentes nas respostas ao item 2c.

Na quarta e última questão deste bloco de atividades – *Com suas palavras diga o que você aprendeu e as dúvidas que ficaram a partir das atividades de 1 a 3* – a maioria dos alunos respondeu que aprenderam sobre retas paralelas e concorrentes, outros acrescentaram que aprenderam sobre retas e segmentos de reta. A maioria respondeu que não tinha dúvidas. Uma dupla respondeu "*dúvidas em todas*", mas todos os exercícios estavam respondidos de forma correta, logo interpretamos esta resposta como uma dificuldade que sentiram para realizar os exercícios, já que eles conversaram bastante com a professora durante a realização das atividades tirando dúvidas e pedindo verificação das respostas dadas. Outra aluna respondeu "*fiquei um pouco confusa no começo, e depois me achei*". Acredito que estas duas respostas retratam a estranheza dos alunos ao tipo de atividade que foi dada a eles (fase 3 – explicação). Ressaltamos que para a próxima iteração, esta questão será a de número três (3).

Observando os registros feitos pelos alunos neste bloco de atividades, concluímos que a nossa hipótese H5 deve ser modificada para a próxima iteração. Percebemos que nela não cabe deixar o trecho de frase – "duas retas são paralelas porque nunca se encontram" – como uma conjectura de resposta dos alunos, já que esta ideia havia sido mobilizada na questão 2b levando à sistematização e às definições de retas paralelas e concorrentes. A ideia – "mantêm a mesma distância" – foi efetivamente apontada em várias respostas, porém não conjecturamos uma resposta também levantada pelos alunos: "retas que têm a mesma direção". Já o aparecimento da nossa conjectura de resposta – "podem ser sobrepostas" – não ficou clara nas respostas efetivas dos alunos e não tivemos a oportunidade de confirmar se de fato houve a tentativa (imprecisa) de expressar esta ideia por algum aluno. Para a próxima iteração procuraremos abrir espaço para um diálogo que possibilite aferir se esta ideia aparece realmente.

Segue a reformulação da hipótese H5 feita para a próxima iteração:

H5 Surge então a questão: Como saberemos que duas dobras feitas no papel são retas efetivamente paralelas? Com ela abre-se espaço para conjecturas dos alunos (respostas dos alunos conjecturadas por nós a priori: porque têm a mesma direção; porque mantêm sempre a "mesma distância" entre elas; porque podem ser sobrepostas por meio de uma dobradura – o que poderá oportunizar uma questão do professor sobre qual seja um procedimento que possibilite a realização concreta de tal sobreposição) a serem trabalhadas no próximo bloco de atividades.

Bloco II de Atividades

Conteúdos: Paralelismo e perpendicularismo entre retas; ângulos reto, agudo e obtuso.

A aplicação das atividades de 5 a 8 sobre tais conteúdos ocorreu no dia 01 de outubro nas duas turmas e em duas aulas com duração de 50 minutos cada uma. Na turma do 7º ano A participaram 15 alunos presencialmente em sala e 12 online, e na turma do 7º ano B participaram 18 alunos em sala de aula e 8 a distância. Tais atividades foram desenvolvidas em duplas ou trios, escolhidos pelos alunos. Foi entregue uma folha com as questões e uma folha de papel vegetal de formato irregular para cada aluno. Os alunos que estavam acompanhando a aula online receberam o arquivo das questões e foram orientados a utilizar qualquer tipo de folha para a realização das dobraduras (caso não tivessem o papel vegetal), eles também poderiam se reunir em duplas após a aula para discutir e fazer a entrega da atividade em conjunto.

Depois de entregar o material aos alunos, a professora perguntou se lembravam o que havia sido trabalhado na atividade anterior. Neste momento, alguns alunos intervieram respondendo: "*Vimos sobre retas paralelas e concorrentes*", "*Fizemos dobras na folhinha e observamos se elas se cortam*", *"Fizemos retas com dobras"* e "*Retas que se cortam e não se cortam*". Depois a professora perguntou: "O que são retas paralelas e retas concorrentes?". Alguns alunos responderam corretamente que as retas paralelas não se cortam e que as retas concorrentes se cortam. Com isso, a professora explicou aos alunos que esta nova sequência de atividades é uma continuidade da atividade anterior, onde novas ideias seriam exploradas e relacionadas aos conceitos trabalhados anteriormente (fase 3 – explicação).

A seguir a professora leu o enunciado da questão 5 – "*No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra e mantenha o papel dobrado. Marque um ponto no papel,* *fora desta dobra*”. Neste momento, como resposta à pergunta de um aluno – “*É para dobrar no meio?*” – disse que poderia ser uma dobra em qualquer posição do papel. Foi ainda sugerido que o ponto marcado no papel não ficasse muito perto da dobra feita, já que outras seriam realizadas, o que poderia dificultar a observação das dobras (fase 2 – orientação dirigida). Dando continuidade à atividade 5, foi lido o item “a” – “*Agora faça duas dobras diferentes que passam pelo ponto marcado e sejam concorrentes com a primeira, determinando 2 segmentos que começam no ponto marcado e terminam na dobra inicial*”. Nas duas turmas muitos alunos disseram não terem entendido a questão. A professora fez uma ilustração na lousa representando a situação da questão a fim de mostrar aos alunos o que seria a dobra que passa pelo ponto marcado e é concorrente com a dobra inicial. Alguns alunos conseguiram fazer as dobras solicitadas e pediram para que fosse verificado se estavam corretas. Outros, ainda com dúvidas, foram auxiliados pela professora individualmente. Percebemos que após a explicação os alunos entenderam o que era para ser feito na questão, mas alguns tiveram dificuldade em conseguir realizar a dobradura, seja por falta de habilidade motora ou por falta de percepção sobre como realizar a dobra solicitada. Continuando a questão 5 item “a” – *“Sem utilizar régua, diga se os segmentos dobrados têm ou não o mesmo comprimento”* – a professora aproveitou a ilustração feita na lousa para reforçar quais medidas eles precisavam comparar. Na turma do 7ºA, todos os alunos responderam “sim” ou “não” corretamente, em concordância com as dobras por eles feitas. Na turma do 7ºB, apenas uma dupla respondeu “*Parece ter a mesma medida*”, mas observando as dobras feitas por eles verificamos que a resposta não está correta. Na sequência a professora instruiu que respondessem à próxima questão, ainda do item “a” – “*Comprove a sua resposta anterior usando dobradura e descreva o procedimento feito”.* Observando as respostas dos alunos que estavam presencialmente, a maioria respondeu de forma correta, dando a ideia de ter usado a sobreposição das dobras feitas. Seguem as respostas:

“*Se fizermos uma sobreposição com as linhas podemos ver que uma linha é maior que a outra”*;

“Podemos fazer uma dobra ao meio, assim as linhas das dobras se juntam e conseguimos comparar”;

“Fazer uma dobra que leve uma linha na outra”;

“Uma linha sobre a outra e vi a medida”;
“Colocar uma linha em cima da outra”;
“Eu dobrei uma linha sobre a outra e vi qual era a medida das linhas”;
“Para descobrir é preciso colocar uma linha em cima da outra, para assim saber a medida de ambas”;
“Dobrando a folha de forma que uma linha fique em cima da outra”; e
“Eu observei uma por cima da outra e ficou sobrando um pouco”.

Duas duplas responderam de forma incompleta ou confusa – *“O único método é comparar uma linha com a outra”* e *“Por uma parte ser mais baixa que a outra, dobrei para ter certeza”.* Uma dupla respondeu de forma incorreta – “*Não têm a mesma medida*”.

Dos alunos online, quatro (4) não responderam. Seguem os registros corretos feitos pelos alunos que estavam online:
“*Precisei colocar a linha em cima da outra*”;
“*Eu fiz uma dobra no meio e vi que a quantidade era igual*”;
“*Dobrei a folha e comparei a medida*”;
“*Dobramos a folha ao meio*”;
“*Dobrei a folha ao meio e observei que os segmentos têm o mesmo tamanho*”;
“*Fechando as duas dobras e comparando as duas retas formadas*”;

Seguem as respostas inconclusivas:
“*Eu dobrei os dois segmentos e vi que fazendo isso foi formado um triângulo, provando que as dobras têm o mesmo comprimento*”; e
“*Uma das dobras foi feita em um ângulo de 90º e a outra em um ângulo agudo*”;

Segue a única resposta incorreta:
“*Fez uma dobradura e a marcação formou um quadrado*”.

Analisadas as respostas, pudemos confirmar nossa hipótese H6, no trecho onde consta: *“*[...] *os alunos possam comparar as distâncias entre o ponto e a dobra inicial por sobreposição dos segmentos obtidos identificando qual segmento é maior*.” Entre os estudantes presentes em sala de aula, apenas 6 alunos responderam de forma incompleta ou incorreta, de um total de 33, e a maioria dos que estavam no online responderam corretamente (15 de um total de 20).

Diante desta análise, concluímos que a atividade 5a produziu o efeito esperado e que o enunciado inicial da atividade 5 (4 na próxima iteração) poderia ser aperfeiçoado da seguinte maneira:

> **a) (2ª iteração)** No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra e mantenha o papel dobrado. Marque um ponto no papel, <u>longe</u> da dobra feita.

Na sequência das atividades na turma do 7ºA, a professora instruiu que os alunos dessem continuidade às atividades 5b, 6 e preenchessem o quadrinho "Relembrando!" (*Escreva o nome dos ângulos desenhados a seguir*). Na turma do 7ºB foi feita a leitura do item 5b, ressaltando que eles já poderiam responder à atividade 6 e preencher o quadrinho "Relembrando!". Neste momento a professora passou pelas duplas tirando as dúvidas que tiveram (fase 2 – orientação dirigida).

Quanto às respostas dadas à atividade 5b – *Faça uma dobra que determine o menor segmento entre o ponto marcado e a dobra inicial. Existe mais de uma? Explique como chegou à sua resposta* – todos os alunos que estavam presencialmente em sala de aula fizeram corretamente a dobra cuja marca representa o menor segmento entre o ponto e a marca da dobra inicial. Das 16 duplas presentes, cinco não responderam à pergunta "*Existe mais de uma?*" e as demais responderam corretamente "*Não*". Já os registros das explicações ficaram um tanto imprecisos ou incompletos. Seguem as respostas dadas pelos alunos:

"*Não, a menor dobra é a que está reta, pois se compararmos ela é a menor*";

"*Não, pois é o caminho mais curto*";

"*Não. A menor reta que podemos fazer não tem inclinação, se tivesse ia ser maior*";

"*Não, pois só a que está no meio vai ser uma linha reta sendo a menor*";

"*Não, por que é uma reta que tem um ângulo de 90º*";

"*Fazendo uma linha totalmente reta a linha de baixo*";

"*Uma reta que tem um ângulo de 90º*";

"*Dobrando a partir do ponto feito e olhar qual é a menor distância que no caso forma 90º*";

"*Dobrando onde dava a entender que iria ser o menor segmento*";

"*A menor é a reta de 90º*";

"*Não, só precisa dobrar no meio*";

"*Não, usando o mesmo método do item a*";

"*Não, porque sobrepomos uma linha sobre a outra*"; e
"*Não, pois pela minha visão só tem uma*".

Das respostas dadas pelos vinte (20) alunos que estavam online, três responderam de forma incorreta "*Sim*" à pergunta "*Existe mais de uma?*", e três responderam apenas "*Não*" sem explicação. Seguem todas as respostas com explicação:

"*Existe apenas uma dobra. Eu fiz uma dobra no meio das outras*";
"*Não, sendo uma linha que forma um ângulo reto ela só teria um caminho reto como opção*";
"*Não, pois ela é a menor dobra que dá para fazer, e eu tentei várias outras*";
"*Não. Dobrando ao meio*";
"*Sim, precisa colocar no meio*";
"*Sim, fazendo o passo a passo da marcação*"; e
"*Sim, dobrando a folha percebemos mais de um segmento*".

Diante das respostas dadas à atividade 5b, relativas à unicidade da reta perpendicular, a maioria dos alunos responderam que ela é única, comprovando parcialmente a nossa hipótese H8, já que, em suas justificativas, não se referiram à congruência ou não dos ângulos formados pelas dobras feitas, passando pelo ponto (*H8: Assim eles poderão observar as características desta dobra, sobre a qual está o segmento de menor distância, e verificarão sua unicidade, pois por meio dela duas partes da dobra inicial ficam sobrepostas sobre si mesmas, determinando assim 4 ângulos congruentes, enquanto as demais determinam quatro ângulos, dois a dois suplementares*). Por outro lado, mesmo sem conseguirem chegar na propriedade definitória de ângulo reto, os alunos conseguiram fazer a construção da perpendicular, de alguma forma verificando a hipótese H9 (*Com esses procedimentos os alunos descobririam a construção do ângulo reto por dobraduras e da dobra perpendicular à outra dobra passando por um ponto fora desta última).* Assim, concluímos que, na próxima iteração, alguma atividade deva ser incluída para garantir a compreensão da definição de ângulo reto. Na sequência apresentamos a reformulação imaginada para a próxima iteração.

Observando as respostas dadas pelos alunos à atividade 6 (fase 2 – orientação dirigida) – *Diga o que tem de diferente das outras a dobra que determina o menor segmento encontrado na atividade "5b", observando os ângulos formados por cada* *dobra feita com a dobra inicial* – uma dupla respondeu de forma incorreta, referindo-se às retas e não aos ângulos: "*As diferenças são umas menores e outras maiores*". Todos os outros responderam de forma correta, indicando ser a dobra que forma um ângulo reto com a dobra inicial, aquela que determina o menor segmento.

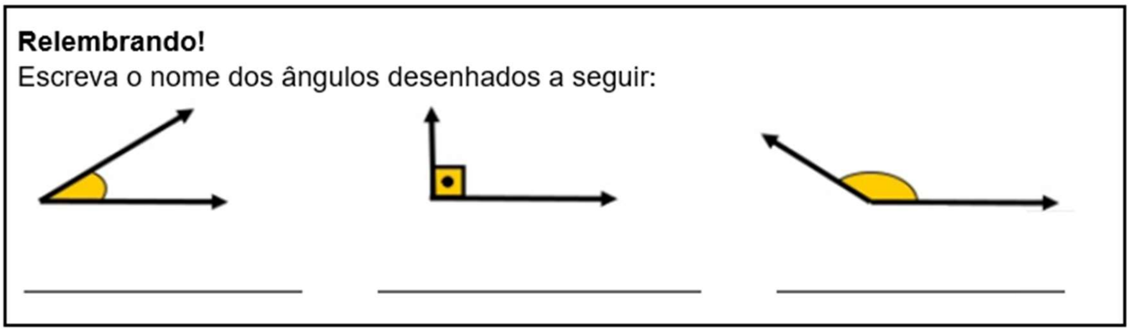
Apesar da maioria dos alunos ter respondido de forma correta a atividade 6, percebemos que nossa hipótese H7 relacionada a esta atividade não foi totalmente comprovada. (*Conjecturamos que investigar a ideia de distância de um ponto a uma dobra pode ajudar os alunos a "descobrirem" que algumas dobras formam com ela dois ângulos diferentes (um agudo e outro obtuso) e uma única dobra forma ângulos iguais (o ângulo reto)).* Acreditamos que o modo como a questão foi formulada não fez com que os alunos se atentassem que nas dobras não perpendiculares os ângulos formados são agudos e obtusos, ou seja, os alunos observaram somente os ângulos formados com a perpendicular. Diante deste fato, reformulamos as atividades 5 e 6 (4 e 5 na próxima iteração), introduzindo perguntas relacionadas aos ângulos formados entre todas as dobras feitas e a dobra inicial. Segue a sistematização dos novos enunciados:

> **4) (2ª iteração)** No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra e mantenha o papel dobrado. Marque um ponto no papel, longe da dobra feita.
>
> a) Faça uma dobra que passa pelo ponto marcado e cruza com a dobra inicial. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre estas duas dobras?
>
> b) Agora faça outra dobra, diferente da anterior, passando pelo ponto marcado e que também cruze com a primeira. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre esta segunda dobra e a inicial?
>
> c) Observe os 2 segmentos obtidos nos itens a) e b) que começam no ponto marcado e terminam na dobra inicial. Sem utilizar régua, diga se os segmentos dobrados têm ou não o mesmo comprimento.
>
> **Desafio!** Comprove a sua resposta anterior usando dobradura e descreva o procedimento feito.
>
> **5) (2ª iteração)** Faça uma dobra que determine o menor segmento entre o ponto marcado e a dobra inicial.

a) Diga o que tem de diferente das outras a dobra que determina o menor segmento encontrado na atividade “5”, observando os ângulos formados por cada dobra feita com a dobra inicial.

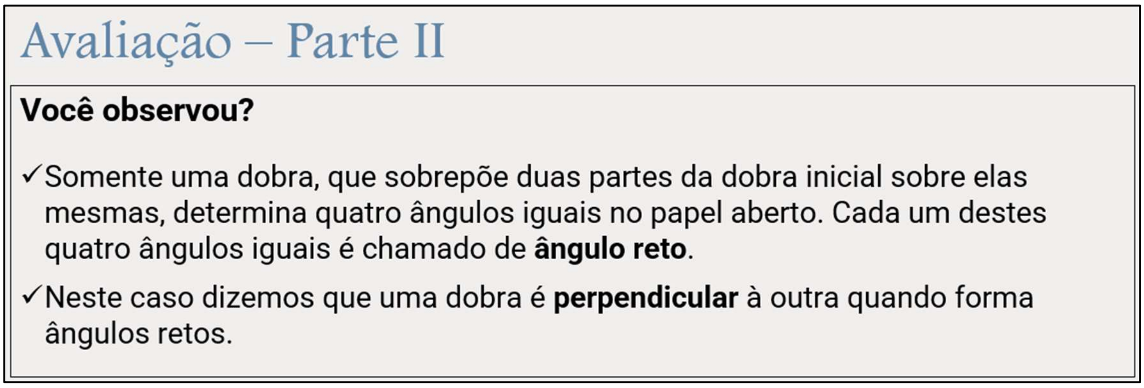
b) Esta dobra feita é única ou existe mais de uma? Explique como chegou à sua resposta.

Mesmo sem terem explicitado em suas respostas sobre os ângulos agudos e obtusos formados entre as dobras, todos os alunos responderam corretamente no quadrinho “Relembrando!”, sobre a classificação de ângulos em agudo, reto ou obtuso. Isso nos indicou que eles já tinham este conhecimento prévio.



Antes de continuar na atividade 7 a professora apresentou, para os alunos que estavam na sala, a projeção do seguinte slide:

Figura 4: Slide 2 – Bloco II de Atividades (2021)



Fonte: Slide utilizado em sala de aula pela autora

Foi feita a leitura do primeiro tópico da parte “Você observou?”, e a professora utilizou a dobradura feita por um aluno para mostrar a todos que a dobra inicial foi dobrada sobre si mesma para obter o segmento que representa o menor caminho entre o ponto e a dobra inicial. A seguir, abriu o papel para mostrar os quatros ângulos formados, enfatizando que eles são iguais, pois eles se sobrepõem exatamente quando o papel fica dobrado. Continuou na leitura do próximo tópico, reforçando que as dobras feitas por eles, que formaram os ângulos retos, recebem o nome de retas perpendiculares (este momento corresponde a fase 3 – explicação). Na sequência solicitou que os alunos fizessem a atividade 7 (fase 4 – orientação livre – sobre retas paralelas) – *Agora que encontramos a dobra que passa pelo ponto marcado e é perpendicular à dobra inicial, dobre o papel de maneira a obter outra dobra que seja paralela à inicial e que passe pelo ponto marcado. Descreva como você fez e explique por que as dobras obtidas são paralelas* – e passou pelos grupos para tirar dúvidas. Antes de trabalharem na atividade, alguns alunos solicitaram a confirmação de que retas paralelas são as que não se encontram, mas a maioria entendeu por si só o que era para ser feito. A seguir organizamos os registros elaborados pelos alunos classificados de acordo com as seguintes ideias por nós observadas: (a) sobreposição da dobra perpendicular sobre si mesma (mesmo que em linguagem imprecisa); (b) reta com a mesma inclinação da primeira; (c) retas que seguem na mesma direção, alinhadas uma em relação à outra; e (d) respostas tautológicas, que utilizaram apenas a definição como justificativa. Seguem as respostas dadas pelos alunos presentes em sala de aula e online:

(a) sobreposição da dobra perpendicular sobre si mesma:

"Para fazer a dobra temos que sobrepor a última linha. Elas são paralelas porque elas não se cruzaram";

"Para ficar paralela com a primeira dobra, dobrei em cima cruzando com a linha reta, formando ângulos de 90º."; (a e b)

"Eu dobrei o papel por cima da linha e consegui encontrar uma linha paralela";

"*Para ser paralelas, precisei dobrar uma linha reta em cima da outra"*; e

"Dobramos ao meio e passando pelo ponto. As dobras são paralelas pois não se cruzam".

(b) reta com a mesma inclinação da primeira:

"*Uma reta de lado que não tem inclinação";* e

"*Dobrei a parte contrária da dobra inicial para que ficasse paralela à outra. Elas são paralelas porque não se cruzam e porque tem o mesmo ângulo de inclinação*".

(c) retas que seguem na mesma direção, alinhadas uma em relação à outra:

"Eu fiz mais uma dobra, que são paralelas, pois eu segui a mesma linha";

“Eu dobrei de forma horizontal, assim pegou na última linha e no ponto”;
“São dobras paralelas porque as linhas não se encontram. Fiz uma dobra reta”;
“Eu fiz uma dobra horizontal que passa pelo ponto, pois ela está passando ao lado da dobra inicial”; e
“Eu fiz uma dobra em que sua linha é do lado da inicial e não se encontram. São paralelas pois não se encontram”.
(d) respostas tautológicas, que utilizaram apenas a definição como justificativa:
“Dobrei ela passando pelo ponto, mas não pela dobra. Porque não passa pela dobra inicial”.
“*Elas são paralelas porque elas não se cruzam e foi dobrado em um ponto longe da outra dobra”*;
“Eu fiz uma dobra em cima do ponto. Porque elas não se cruzam”;
“Eu fiz uma dobra paralela à linha inicial passando pelo ponto”;
“Apenas fazendo as duas linhas não se encontrando”;
“Fazendo uma linha que não se encontra com a debaixo”; e
“Juntei ponto com ponto. Elas são paralelas pois não se encontram”.

Percebemos que a maioria das duplas explicou corretamente o procedimento feito para encontrar a dobra paralela ou utilizou ideias relativas ao paralelismo já apontadas anteriormente por eles na questão 3 (terem a mesma inclinação ou direção, ou ainda estarem “alinhadas” uma com a outra), sem, no entanto, explicitar que a direção ou inclinação é determinada pela igualdade dos ângulos formados pelas duas com a reta perpendicular. Podemos dizer ainda que ninguém fez referência à ideia, também apontada por alguns na questão 3, das dobras paralelas “manterem a mesma distância uma da outra”. Diante disso, percebemos que nossa hipótese H10 não foi propriamente testada nesta atividade, já que não retomamos as ideias por eles formuladas anteriormente na questão 3 sobre as condições de paralelismo entre duas retas (*H10: Tendo sido construída a dobra sobre a qual se realiza a menor distância de um ponto a uma reta, se os alunos forem desafiados a construir a dobra paralela à mesma reta passando pelo mesmo ponto, será possível retomar e atribuir um significado mais concreto às ideias por eles anteriormente formuladas sobre condições para que duas retas sejam paralelas*).

Na atividade 8 – *Escreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores e as dúvidas que surgiram* – a maioria dos alunos respondeu que aprenderam sobre ângulos, retas perpendiculares e paralelas, e relataram não ter dúvidas. Tivemos três respostas indicativas de que eles ficaram com dúvidas no entendimento de alguns exercícios e tiveram dificuldade em fazer os registros: “*Eu fiquei com muita dúvida na 5b, mas depois que a professora me explicou eu entendi, e aprendi sobre ângulos”*; “*Eu fiquei com dúvida na 7, mas com a professora explicando ficou mais fácil”*; e *“Consegui compreender ângulos, dobras paralelas e perpendiculares, só fiquei confusa na hora de como responder os exercícios, mesmo entendendo”* (fase 3 – explicação).

Quando os alunos terminaram a atividade a professora fez a projeção do seguinte slide:

Figura 5: Slide 3 – Bloco II de Atividades (2021)

Vamos concluir?

✓ Dadas duas retas perpendiculares, uma terceira reta que seja perpendicular a uma delas será paralela à outra.

Fonte: Slide utilizado em sala de aula pela autora

A propriedade apresentada no slide faz referência ao que foi trabalhado na atividade 7. A professora fez a leitura do slide e utilizou uma ilustração já iniciada na lousa para mostrar passo a passo o que é dito na propriedade: vocês construíram duas retas perpendiculares, e a terceira dobra feita (paralela à dobra inicial) também é perpendicular à segunda dobra, feita na atividade 5b (a dobra que contém o menor segmento entre o ponto e a dobra inicial). Entretanto, percebemos que a apresentação e leitura desta última propriedade foi de difícil compreensão para os alunos. Assim sendo, para a próxima iteração, elaboramos uma nova atividade (atividade 6 na próxima iteração), com a intenção de direcionar os alunos a observarem os ângulos formados entre uma terceira dobra que corta uma perpendicular a uma outra, e assim trabalhar com a propriedade apresentada no slide. Acreditamos que, com a nova atividade, que antecede a atividade 7, os alunos terão maior facilidade em justificar o paralelismo entre as duas dobras perpendiculares à segunda dobra, a partir da observação dos ângulos formados entre elas. A formulação desta nova atividade foi inspirada na ideia expressa originalmente no enunciado do 5º postulado constante no

Livro I dos Elementos de Euclides[3]. Seguem os enunciados das novas atividades 6, 7 e 8:

6) (2ª iteração) Em um novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra inicial e mantenha o papel dobrado. Novamente marque um ponto no papel, longe da dobra feita, e faça a dobra perpendicular à inicial passando pelo ponto marcado. Agora faça uma terceira dobra passando pelo ponto marcado que não seja perpendicular à segunda dobra e também não cruze, **no papel**, com a inicial. Justifique porque a última dobra feita é concorrente com a dobra inicial (mesmo elas não se cruzando no papel) a partir dos ângulos formados entre a última dobra e a perpendicular já feita.

7) (2ª iteração) Agora dobre o papel de maneira a obter outra dobra que seja paralela à inicial e que passe pelo ponto marcado. Descreva como você fez e explique por que as dobras obtidas são paralelas.

8) (2ª iteração) Escreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores e as dúvidas que surgiram.

Diante das novas atividades, reformulamos nossa hipótese H10:

H10 Observando a condição original do 5º postulado de Euclides para que duas retas em um plano cortadas por uma transversal sejam concorrentes (caso em que os ângulos interiores e de um mesmo lado da transversal sejam menores do que dois retos), acreditamos que propor um caso particular desta condição, no qual um dos ângulos é reto (já construído pelos alunos) e o outro agudo, possa favorecer o desenvolvimento nos alunos de uma imagem mental significativa e possibilitar que formulem justificativas baseadas nas observações dos ângulos e nas ideias sobre paralelismo por eles levantadas em atividades anteriores. Com isso, espera-se que possam melhor atribuir significado à propriedade: “Dadas duas retas perpendiculares entre si, uma terceira reta que seja perpendicular a uma delas será paralela à outra”.

---

[3] E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (EUCLIDES, 2009)

Bloco III de Atividades

Conteúdos: Retas paralelas e perpendiculares; segmentos congruentes; retângulo, quadrado e suas diagonais.

A aplicação das atividades de 9 a 15 sobre tais conteúdos ocorreu nos dias 04 e 05 de outubro de 2021 na turma do 7º ano A e nos dias 06 e 07 na turma do 7º ano B, em três aulas com duração de 50 minutos cada uma. Da turma do 7º ano A participaram 15 alunos presencialmente e 8 online, e da turma do 7º ano B participaram 18 alunos em sala de aula e 6 online. Tais atividades foram desenvolvidas em duplas ou trios, escolhidos pelos alunos. Foi entregue uma folha com as questões e três pedaços de folha de papel vegetal de formato irregular para cada aluno, para a realização das atividades 10, 11 e 12. Os alunos que estavam acompanhando online receberam o arquivo das questões e foram orientados a utilizar qualquer tipo de folha para a realização das dobraduras (caso não tivessem o papel vegetal). Eles também poderiam se reunir em duplas após a aula para discutir e fazer a entrega da atividade conjunta posteriormente.

A professora iniciou esta terceira parte das atividades retomando todos os conceitos que foram trabalhados anteriormente. Para isso, ela perguntou aos alunos o que lembravam ter estudado nas outras atividades e escreveu as palavras-chave na lousa à medida que os alunos foram respondendo. Na turma do 7ºA, de imediato, os alunos falaram que haviam estudado sobre retas paralelas, retas concorrentes e sobre ângulos. Então foram escritas estas palavras na lousa (paralelas, concorrentes e ângulos) e a professora completou com as palavras “retas”, “segmento de reta” e “perpendiculares”, já que não foram ditas por eles. Depois perguntou a eles qual seria o significado de cada palavra, complementando as falas dos alunos no sentido de chegar a formulações mais precisas, fazendo algumas ilustrações na lousa. Como a única definição não lembrada nesta turma foi a de “retas perpendiculares”, ela foi explicitada pela professora. Na turma do 7ºB, a dinâmica foi semelhante. Os alunos responderam terem estudado sobre retas concorrentes, paralelas, perpendiculares e ângulos. Também neste caso a professora escreveu na lousa as palavras retas e segmento de reta, além das citadas. Nesta turma ficou claro que todas as noções abordadas foram explicitadas pelo menos por algum aluno.

Feita a retomada, foi dito aos alunos que poderiam iniciar a atividade 9 – *Desenhe um retângulo e um quadrado utilizando régua e esquadro. Liste as características que são iguais e as que são diferentes entre as duas figuras.* A maioria dos alunos não tinha esquadros. Assim a professora orientou para que utilizassem apenas régua. Os alunos que possuíam esquadro não sabiam como utilizá-lo, tendo sido orientados individualmente. Todos os alunos (que estavam em sala e online) desenharam de forma correta tanto o retângulo como o quadrado, mesmo alguns apresentando maior capricho do que outros. Muitos anotaram nas figuras as medidas adotadas para seus lados (fase 1 – informação). Consideramos assim nossa hipótese H11 confirmada (*A construção de retângulos e quadrados com régua e esquadro poderá servir como um diagnóstico para verificar a concepção dos alunos sobre essas figuras. Observe-se que os alunos poderão utilizar a noção de distância, já trabalhada, e suas medidas na régua*), já que os alunos demonstraram conhecimento prévio sobre as definições de quadrados e retângulos, ao explicitarem a congruência necessária entre os lados destas figuras. Vale ressaltar que segundo Luiz Carlos Pais (PAIS, 1996) a partir do trabalho com desenhos podemos identificar as representações dos conceitos de acordo com as imagens mentais constituídas pelos alunos (ver p. 18). Sobre as características comuns às figuras, todos responderam corretamente. A maioria registrou sobre as duas figuras, que possuem quatro lados (ou são quadriláteros) e quatro ângulos retos (ou de 90º). Uma dupla respondeu de forma mais completa, acrescentando que as figuras possuem lados opostos paralelos. Como características diferentes, todos citaram que o quadrado possui lados de medidas iguais e no retângulo o comprimento difere da largura. Assim, ficou confirmado que os alunos se situam no Nível 2 (análise) do Modelo de Van Hiele, por reconhecerem elementos e propriedades específicas das figuras desenhadas, mas não dominarem a inclusão da classe dos quadrados na classe dos retângulos (ver p. 22). Ressaltamos ter sido esta uma importante e necessária atividade diagnóstica da concepção prévia dos alunos sobre estas figuras, nos permitindo verificar que poderiam realizar as próximas atividades.

Após a finalização da atividade 9 por alguns alunos, a professora orientou que continuassem na atividade 10 – *Agora, no papel fornecido faça um retângulo com dobras e justifique por que é de fato um retângulo*. A seguir, foi passando pelas duplas para verificar como os alunos estavam realizando a construção do retângulo.

Percebeu que a maioria construiu o retângulo corretamente, tomando o cuidado de sobrepor os vincos para formar os ângulos retos e deixar os lados de medidas diferentes. Porém, alguns alunos estavam construindo sem tomar o cuidado de deixar os vincos totalmente sobrepostos (o que produz uma figura sem ângulos retos e lados opostos de medidas diferentes), tendo sido questionados sobre ser a figura formada de fato um retângulo. Com este questionamento, tais alunos perceberam o erro e grande parte deles disse que a figura estava “torta”. Assim, receberam um novo pedaço de papel e foram orientados a refazer a construção. Ao final da atividade, todos os grupos realizaram corretamente a dobradura solicitada (fase 4 – orientação livre).

Ao observar os registros feitos, verificamos que praticamente metade dos alunos, tanto dos presentes em sala de aula quanto dos online, deram justificativas inconclusivas (7 de 15 alunos na turma do 7ºA, 9 de 18 alunos do 7ºB e 6 de 14 alunos online). Identificamos as seguintes ideias nessas respostas: ser um retângulo porque possui quatro lados ou porque a medida do comprimento é diferente da medida da largura. Os demais alunos tentaram formular justificativas baseadas em propriedades do retângulo sem, no entanto, justificar porque a dobradura feita garante as propriedades enunciadas. As seguintes respostas foram dadas:

(a) alunos presentes em sala de aula:

“*Porque tem ângulos de 90º, lados retos, 4 lados, lados com tamanhos diferentes*”;

“*Porque o comprimento e a largura têm medidas diferentes e os ângulos são retos*”;

“*Porque tem ângulo reto, e duas medidas iguais e comprimento diferente*”;

“*Porque tem ângulos de 90º e lados retos*”;

“*Porque um retângulo tem lados perpendiculares*”;

“*Os lados são perpendiculares e tem quatro lados sendo um mais comprido*”; e

“*Têm medidas diferentes de largura e comprimento e os lados são perpendiculares*”.

(b) alunos presentes online:

“*Ele é um retângulo pois tem lados opostos paralelos, cada lado possui um ângulo de 90º e dois de seus lados são maiores que os outros*”;

“*É de fato um retângulo pois têm quatro lados, dois sendo maiores que os outros e os ângulos são retos*”;

"*Porque tem todos os ângulos retos e cada lado oposto tem a mesma medida*";
"*Porque possui todos os ângulos de 90º e as medidas dos seus lados são pares iguais*";
"*Porque ele é uma forma geométrica formada por 4 lados e apresenta os quatro ângulos internos congruentes e retos. Além disso, seus lados opostos são paralelos*";
"*Dobrei no meio e virou um retângulo, porque tem quatro ângulos retos e dois lados maiores*"; e
"*O fato é porque ele tem 90º em seus quatro ângulos*".

Pelas respostas dadas observamos que os alunos possuem uma imagem mental do retângulo como sendo não quadrado, confirmando o diagnóstico feito na descrição da atividade 9. Além disso, eles demonstraram desconhecer o que seja uma definição precisa, pois descrevem a figura utilizando todas as propriedades que conhecem sobre ela, sem denotarem a compreensão de que apenas algumas propriedades definem um objeto e outras decorrem das definições. Observamos que a última resposta citada foi a única que se atém estritamente à definição de retângulo. Como não discutimos com os alunos as respostas por eles formuladas, não pudemos saber se esta última foi proposital ou casual. De todo modo, verificamos novamente que os alunos se encontram no Nível 2 do Modelo de Van Hiele sobre o pensamento geométrico, tanto por não compreenderem definições "oficiais" como por não relacionarem as propriedades do retângulo entre si e não considerarem o quadrado como um retângulo.

Levando em consideração o fato dos alunos conseguirem realizar corretamente a construção do retângulo por meio de dobraduras, ou seja, construíram os ângulos retos e as dobras paralelas como feito anteriormente, podemos dizer que nossa hipótese H12 foi verificada – *Na construção com dobraduras de retângulos poderemos verificar se os conceitos e a construção geométrica de retas paralelas e perpendiculares (construção do ângulo reto) já estão dominados*. Retomando o que diz Luiz Carlos Pais (PAIS, 1996), pudemos perceber que os alunos fizeram "uma leitura geométrica da representação" (ver p. 18) de ângulos retos obtidos com as dobras construídas. Entretanto, analisando as respostas dadas pelos alunos à questão 10, percebemos uma falta de clareza no enunciado da mesma. A solicitação de que "justificativa" para a construção do retângulo os levou a entender ser necessário apenas caracterizar as propriedades da figura construída. No entanto, o pretendido era que explicassem as razões das dobras feitas determinarem, de fato: quatro ângulos retos; lados congruentes ou não; e lados paralelos ou não (caso apontassem tais propriedades). Reformulamos, então, o enunciado da questão 10 para a próxima iteração:

> **10) (2ª iteração)** Agora, no papel fornecido, faça um retângulo com dobras.
> a) Quantas dobras você fez para construir o retângulo?
> b) Diga que elemento geométrico você construiu com cada dobra e explique por quê.
> c) Finalmente, diga quais elementos geométricos construídos por você garantem que a figura obtida é um retângulo?

Na próxima iteração, consideramos pertinente realizar um debate com os alunos sobre qual seria uma definição para retângulo que acarrete as demais propriedades por eles levantadas – a partir das respostas dadas. Com isso poderemos avaliar os alunos relativamente às suas potencialidades de progressão para o Nível 3 de Van Hiele.

Assim que finalizaram a atividade 10, a professora avisou aos alunos que poderiam prosseguir nas próximas atividades. O enunciado da questão 11 – *Marque sobre a folha dois pontos e chame-os de A e B. Faça uma dobra que passe pelos pontos marcados. Observe que não é possível fazer mais de uma dobra passando por A e por B. Faça uma segunda dobra passando pelo ponto A. Usando dobradura, encontre nesta última um ponto, (chame-o de C) de maneira que a distância de A a B seja igual à distância de A a C (não utilize régua). Descreva o procedimento que fez para encontrar o ponto C* – se mostrou de difícil compreensão para os alunos, pois muitas duplas precisaram de ajuda na interpretação da atividade. No entanto, a professora percebeu que após entenderem o exercício, sua resolução fluiu bem nas turmas, denotando que há uma inadequação na formulação do enunciado. Todas as construções, feitas pelos alunos que estavam em sala de aula, aparentaram estar corretas, mas diante de algumas explicações confusas ou incorretas não ficou claro qual procedimento foi utilizado por eles na resolução da atividade (fase 2 – orientação dirigida). Seguem as respostas que expressam de forma correta a resolução da atividade, por meio da sobreposição das linhas:

"*Precisa sobrepor as retas, ou seja, colocar uma em cima da outra para saber o ponto exato*";
"*Eu tive que dobrar uma linha sobre a outra*";
"*Eu dobrei o ponto B até a linha do ponto A e achei o ponto C*";
"*Elevei uma dobra sobre a outra*";
"*Dobrei a ponta inferior da folha até chegar no segmento AB, e encontrei o ponto C com a mesma medida*";
"*Eu levei uma linha para cima da outra, assim eu achei o ponto C*"; e
"*Fazer uma dobradura de triângulo que faça encontrar o ponto A e B de maneira que se forme o ponto C*".

Seguem as respostas que não ficaram bem explicadas pelos alunos ou que estão incorretas:
"*Nós juntamos os pontos tendo assim uma medida, bastou fazer a mesma dobradura para termos a medida de C*";
"*Colocamos o ponto C perto do ponto B fazendo 2 caminhos que iniciam no mesmo local e se separam ao longo do caminho*";
"*Eu comparei a linha B com a linha que eu fiz para o C, chegando no resultado*";
"*Eu dobrei o ponto B até o ponto A*";
"*Colocamos o ponto B perto do A e assim conseguimos descobrir o ponto C*"; e "*Colocando o ponto C, o ponto A e o ponto B".*

Considerando os alunos que estavam online, nenhum deles indicou a sobreposição das dobras feitas. Uma única resposta aparentou trazer a ideia correta – "*Eu fiz uma dobra na diagonal que passa pelo ponto A e depois marquei o ponto C abaixo do ponto B"* – se considerarmos que o aluno ao escrever "diagonal" quis se referir a bissetriz do ângulo de vértice A. Todas as demais respostas foram confusas ou incorretas, sendo que dois alunos não responderam à questão. Seguem suas respostas:
"*O procedimento foi fazer A em linha reta com o C e medir com os dedos*";
"*Usei uma dobradura para substituir a régua*"; "*Dobrando uma folha de sulfite ao meio obtendo dois retângulos, dobrando pela segunda vez obtendo quatro retângulos e três vincos nomeados A, B e C. No final, acabando por ter a mesma distância*";
"*Eu fiz a dobra dos pontos A e B, tive que arrumar as duas primeiras dobras (A e B). Assim que eu encontrei, formou um triângulo. Foram do mesmo tamanho*";

"*Eu fiz uma dobra em linha reta até o A encontrar o C*"; e

"*Eu fiz a dobradura entre A e B, depois fiz uma dobradura só passando pelo ponto A. Depois comparei a duas dobraduras e cheguei no ponto C*".

Dos alunos que estavam presencialmente, 21 alunos responderam de forma correta e 12 de forma incorreta (33 alunos no total). Apesar da maioria ter respondido a contento, mais de um terço deles demonstrou permanecer com dificuldades. Porém, por não termos debatido as resoluções com o grupo, não podemos avaliar se tais dificuldades foram devidas à formulação do enunciado ou à falta de domínio de linguagem apropriada para expressar suas ideias. Mais uma vez pudemos perceber a diferença entre a quantidade de erros e acertos dos alunos no ensino presencial e no online, destacando a importância para a aprendizagem das interações professor/aluno e de alunos entre si. Lembramos que esta atividade tinha por finalidade trabalhar, por meio de dobraduras, a construção de segmentos congruentes para auxiliar na construção do quadrado.

Diante das dificuldades ocorridas, reformulamos tanto a hipótese 13 como a questão 11. Com relação à antiga hipótese 14, decidimos retirá-la da segunda iteração, já que não pretendemos trabalhar, com os alunos diretamente o fato observável por dobradura de que por dois pontos passa uma única reta. Seguem os novos enunciados:

H13 Para realizar a construção do quadrado com dobras, os alunos utilizarão ideias semelhantes às da construção do retângulo, mas surge a necessidade da determinação, com o uso de dobras, de segmentos com mesma origem e medida (segmentos congruentes). Assim, torna-se conveniente solicitar que, inicialmente, seja feita a comparação das medidas de dois segmentos ($\overline{\mathrm{AB}}$ e $\overline{\mathrm{AC}}$, com med(AB) < med(AC)) para depois introduzir um ponto D em $\overline{\mathrm{AC}}$ de modo que $\overline{\mathrm{AB}}$ seja congruente a $\overline{\mathrm{AD}}$. Conjecturamos que a manipulação das dobras neste procedimento ficará facilitada se os alunos realizarem as dobras no triângulo ABC já recortado, ao eliminar o excesso de papel inútil para a atividade. Este procedimento, ao sobrepor as duas dobras já vincadas, possibilita determinar a localização de D no interior do segmento $\overline{\mathrm{AC}}$, de maneira a que $\overline{\mathrm{AB}} \equiv \overline{\mathrm{AD}}$. Este procedimento pode também oportunizar a introdução do conceito de bissetriz de um ângulo.

11 (da 2ª iteração) Na folha fornecida, com os pontos A, B e C marcados, use dobraduras para construir o triângulo de vértices A, B e C. Recorte o triângulo feito.

a) Fazendo nova dobradura, verifique se o lado $\overline{AB}$ tem o mesmo comprimento do lado $\overline{AC}$. Explique o procedimento feito para chegar à sua conclusão.

b) Marque um ponto D no lado $\overline{AC}$ de maneira que $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ tenham a mesma medida. Explique o procedimento feito.

c) Observe que a dobra feita no triângulo determina dois ângulos de vértice A no interior da figura. O que você pode afirmar sobre estes dois ângulos? Justifique.

Na aplicação do projeto piloto destacamos a dificuldade que os alunos tiveram para realizar a construção dos lados congruentes do quadrado por dobradura. Para a primeira iteração, elaboramos a atividade 11 (descrita acima) a fim de tentar sanar tal dificuldade. No entanto, verificamos que os alunos continuaram com a mesma dificuldade na atividade 12 – *Faça agora um quadrado com dobras e justifique por que obteve de fato um quadrado.* Nenhum grupo conseguiu sozinho realizar a construção do quadrado corretamente, fazendo a construção da bissetriz (ou da diagonal) para deixar os lados com a mesma medida. Todos os alunos fizeram a construção dos ângulos retos, mas a dobra do quarto lado não foi feita com precisão, pois utilizaram apenas uma aproximação visual para as medidas dos lados, sem garantir a igualdade dos mesmos por dobradura. Após questionamentos aos alunos sobre serem as construções feitas de fato um quadrado, alguns perceberam que não estava correto, mas nenhuma dupla chegou à construção exata. Diante disso, a professora passou pelas duplas mostrando a construção correta e explicando que tal construção garantia que os lados tivessem igual medida (fase 4 – orientação livre).

Assim como aconteceu na construção do retângulo, os alunos também justificaram a construção do quadrado descrevendo suas propriedades, não justificando os passos realizados. Ao observar os registros feitos, verificamos que mais da metade dos alunos, tanto dos presentes em sala de aula quanto os online, justificaram de forma inconclusiva (19 alunos de 33 que estavam em sala e 11 alunos de 20 que estavam online). Tais alunos responderam que é um quadrado pois possui quatro lados de mesma medida. Sabemos que apenas esta propriedade não garante que a figura formada seja de fato um quadrado (podendo ser um losango). Um aluno respondeu de forma incorreta: “*Porque dobrei e fiz um quadrado*”. Os demais alunos (13 que estavam presentes e 9 online) deram a seguinte resposta: é um quadrado pois possui os quatro lados de mesma medida e ângulos retos. Diante do fato dos alunos não conseguirem, tanto fazer a construção do quadrado como justificar o procedimento realizado, reformulamos o enunciado da atividade 12 a fim de reforçar a necessidade do uso das ideias trabalhadas nas atividades anteriores para a construção do quadrado.

> **12 (2ª iteração)** Utilizando as ideias e construções desenvolvidas nos exercícios 10 e 11, faça um quadrado com dobras. Descreva o que obteve com cada dobra feita para construir o quadrado.

Assim que a professora percebeu alguns alunos iniciando a atividade 13 – *Nesta atividade vamos trabalhar com as diagonais de retângulos e quadrados. Faça as dobras que representam as diagonais do retângulo e as diagonais do quadrado* – ela perguntou se eles sabiam o que eram as diagonais. Poucos disseram não saber, e foram orientados individualmente. Todas as dobras realizadas ficaram corretas, e alguns alunos também traçaram as diagonais nos desenhos do retângulo e do quadrado feitos na atividade 9 (fase 4 – orientação livre).

Como resposta ao item “a” – *Liste características das diagonais do retângulo* – a maioria dos alunos indicou como característica o fato de possuírem as diagonais do retângulo as mesmas medidas ou o mesmo comprimento (19 alunos de 33). Os outros deram as seguintes respostas:

“*As diagonais são concorrentes, o tamanho é igual, mas os triângulos que se formam, dois são iguais e os outros diferentes*”;

“*Que as duas são concorrentes*”;

“*Não formam triângulos iguais, as linhas se cruzam e formam ângulos agudos e obtusos*”;

“*As linhas são concorrentes, dois ângulos agudos e são inclinadas*”;

“*As diagonais do retângulo são um pouco diferentes pois o retângulo não é proporcional*”; e

“*São duas diagonais com inclinação*”.

Nota-se que, as ideias subjacentes às duas últimas respostas não estão claras.

Seguem as respostas dos alunos que estavam online:

"*As diagonais são sempre congruentes, e o ponto de encontro das diagonais é também ponto médio de cada uma das diagonais*";

"*Os ângulos formados pelas diagonais de um retângulo são diferentes*";

"*Elas possuem a mesma medida*";

"*São congruentes*";

"*As diagonais são iguais*";

"*As diagonais se cruzam, sendo concorrentes*";

"*Quando traçamos qualquer uma das diagonais do retângulo, estamos dividindo em dois triângulos retângulos*";

"*O retângulo tem duas diagonais*"; e

"*Ela é reta, é maior que a diagonal do quadrado*".

Nota-se que, a última resposta mencionada extrapola a pergunta feita.

No item "b" – *Liste características das diagonais do quadrado* – a maioria dos alunos colocou características corretas das diagonais do quadrado (23 alunos de 33). Seguem as respostas:

"*Têm comprimentos iguais*";

"*São iguais e mesmos ângulos*";

"*Têm as mesmas medidas e mesmos ângulos*";

"*Elas são concorrentes*";

"*As diagonais são concorrentes, os ângulos são iguais e o tamanho também, e os triângulos formados são iguais*";

"*As linhas são concorrentes, e os ângulos e o tamanho iguais*"; e

"*Formam triângulos iguais e formam ângulos retos*".

Os demais alunos apresentaram respostas incompletas, confusas ou incorretas:

"*Formam quatro lados iguais*";

"*São duas diagonais com inclinação, são menores que do retângulo*";

"*As diagonais do quadrado são proporcionais pois o quadrado tem medidas iguais*";

"*Ela vai de ponta a ponta*"; e

"*O tamanho é menor do que do retângulo*".

As respostas de 11 dos 20 alunos que estavam online apresentaram características corretas:

"*Os ângulos das diagonais de um quadrado são ângulos retos (90º)*";

"*Congruentes e perpendiculares*";

"*As diagonais se cruzam, sendo concorrentes, formando ângulos retos*";

"*Cortam o quadrado ao meio*";

"*O quadrado tem duas diagonais*"; e

"*Se cruzam*".

Os demais apresentaram respostas incompletas ou incorretas:

"*É um segmento de reta*";

"*Diagonais têm comprimento e altura iguais*";

"*Ela é reta, é menor que a diagonal do retângulo*"; e

"*São segmentos de reta cujas extremidades são dois vértices de um polígono, mas que não são lado*".

No Item "c" – *Quais características são iguais e quais são diferentes nas diagonais de retângulos e quadrados?* – grande parte dos alunos apresentou ideias corretas e completas (25 de 33). Seguem suas respostas:

"*A igualdade está no tamanho e a diferença nos ângulos*";

"*Igualdade: tem a mesma medida de comprimento. Diferença: inclinação*";

"*Iguais: são concorrentes e formam triângulos. Diferentes: os ângulos e formato dos triângulos*";

"*A semelhança é que as duas se cruzam e a diferença é que no quadrado tem ângulos iguais e no retângulo é diferente*";

"*Elas são congruentes e no quadrado são perpendiculares*";

"*Semelhanças: as linhas se cruzam e formam triângulos. Diferença: os ângulos são diferentes*"; e

"*Iguais são as medidas e diferente são os ângulos*".

Consideramos que 4 alunos apontaram corretamente apenas a diferença entre os ângulos: "*Igual: são retas. Diferença: ângulos*"; e "*As duas são concorrentes, e diferentes na inclinação*". Os demais alunos indicaram de forma incorreta que a característica diferente é o tamanho das diagonais: "*As duas são concorrentes, só que de tamanhos diferentes*" e "*São duas diagonais, uma maior que a outra*". Com relação às respostas dos alunos que estavam online, apenas 6 responderam de forma correta:

"*Ambos possuem diagonais congruentes, mas só o quadrado possui as diagonais perpendiculares*";

"*Semelhanças: As diagonais dos quadrados e dos retângulos formam um "X" dentro das formas geométricas. Diferenças: Os ângulos formados pelas diagonais dos retângulos e dos quadrados são diferentes*"; e

"*Iguais: são congruentes. Diferente: no retângulo não são perpendiculares*".

Os demais (14 de 20) apresentaram ideias incompletas ou incorretas. Consideramos incompletas as seguintes respostas:

"*As diagonais das duas formas cruzam-se em ponto médio*"; e

"*Características iguais: eles têm as diagonais congruentes. Características diferentes: o retângulo tem lado diferente do quadrado*".

Finalmente, as incorretas foram:

"As duas se cruzam, são de tamanho diferente, uma é mais deitada e a outra é igual tanto de altura como de comprimento";

"*As iguais é que são retas e a diferença é a medida*";

"*As duas se cruzam, elas são de tamanhos diferentes*"; e

"*Iguais: são concorrentes. Diferente: as diagonais do quadrado são menores do que as do retângulo*".

A partir de algumas respostas, percebemos certa incompreensão relativamente à característica que diz respeito à igualdade dos comprimentos das diagonais do mesmo quadrilátero, já que alguns fizeram a comparação do "tamanho" das diagonais do retângulo com as do quadrado. Observamos que, por questão de tempo didático, não conseguimos realizar com os alunos uma discussão sobre as características das figuras que expressaram em suas respostas, o que poderia ter sido uma oportunidade significativa para que percebessem eventuais imprecisões, incompletudes ou incorreções nos registros de suas ideias. Além disso, tal debate poderia ter se constituído em uma sistematização dos conceitos e propriedades envolvidos na atividade. Após a aplicação desta atividade também percebemos uma certa dificuldade dos alunos em realizarem as dobras das diagonais no mesmo papel utilizado para a construção do retângulo e do quadrado, devido às dimensões (pequenas) das figuras construídas por eles e da quantidade de folha que fica sobrando por detrás das dobraduras. Nesse sentido, e tendo em vista que nas atividades anteriores os alunos já realizaram a construção de retângulos e quadrados, decidimos, para a aplicação desta atividade na segunda iteração, entregar aos alunos retângulos e quadrados já recortados e de dimensões adequadas para dobrar as diagonais com maior facilidade. Neste sentido, reformulamos o enunciado da atividade 13 para a próxima iteração (transcrito a seguir). Mais ainda, na próxima iteração, na sistematização desta atividade faremos uma discussão visando o favorecimento da comprovação, pelos alunos e por meio das dobraduras, de serem as diagonais do quadrado bissetrizes dos seus ângulos internos, o que não acontece com o retângulo não quadrado. Sobre isso, acrescentamos uma nova hipótese H14:

H14 A partir do momento que já foi realizada a construção do retângulo (não quadrado) e do quadrado, vale aprofundar o estudo destas figuras solicitando que seja feita a construção de suas diagonais. Com isso, acreditamos ser possível avaliar a aprendizagem dos alunos sobre os seguintes elementos estudados anteriormente: retas concorrentes e perpendiculares; ângulos agudos, obtusos e retos; e bissetriz de um ângulo.

Segue o novo enunciado da atividade 13:

13 (2ª iteração) Nesta atividade vamos trabalhar com as diagonais dos retângulos e dos quadrados. No retângulo e no quadrado fornecidos faça as dobras que representam as diagonais destas figuras.
a) Liste as características das diagonais do retângulo por você observadas.
b) Liste as características das diagonais do quadrado.
c) Agora compare as duas listas dos itens “a” e “b” e diga quais características são iguais e quais são diferentes com relação às diagonais das duas figuras.

Na atividade 14 – *Descreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores e as dúvidas que surgiram* – de modo geral os alunos responderam que aprenderam: sobre características de quadrados, retângulos e diagonais; a fazer a construção das figuras com dobras; a comparar medidas sem régua; e aprenderam mais sobre ângulos (fase 3 – explicação). A maioria dos alunos também disse não ter ficado com dúvidas, porém alguns citaram a dificuldade para entender e responder à questão 11 (já reformulada aqui para a segunda iteração), confirmando que seu enunciado não ficou adequado à compreensão dos alunos. Seguem algumas respostas:

“*Aprendi a fazer um quadrado sem ser no olhômetro, aprendi a criar formas na folha. Tive dúvidas para responder às questões, porém a professora me ajudou*”;
“*Aprendi a fazer um quadrado perfeito e surgiu dúvida de como encontrar o ponto C na atividade 11*”;
“*Eu aprendi a medir segmentos sem régua e construir quadrado sem régua também, e não sobrou dúvida*”;
“*Só tive dúvida para descrever as semelhanças e diferenças das características*”;
“*Eu aprendi o que é diagonal, aprendi as características das diagonais, e o que fiquei com dúvida foi a 11, mas depois que a pro me explicou ficou fácil*”;
“*Ângulos, diagonais, características do retângulo e do quadrado, e não tive dúvidas*”;
“*Eu fiquei com um pouco de dúvida na questão 11, mas depois consegui resolver*”;
“*Aprendi sobre retângulos e quadrados, mas me compliquei na questão 11 e na dobra da questão 15*”; e
“*Aprendi sobre as diagonais, e como distinguir retângulos e quadrados. Uma única dúvida que tive nesses exercícios foram os que envolviam pontos a serem marcados*”.

Para a atividade 15 – *Vamos construir uma caixa a partir de uma folha quadrada. Em cada passo da construção identifique quais elementos estudados anteriormente aparecem* – cada aluno recebeu uma folha quadrada colorida específica para Origami. O desenho do passo a passo, como tradicionalmente aparece nos livros de origami, faz parte do enunciado da atividade (ver p. 58). Esta atividade tinha por objetivo retomar todos os conceitos desenvolvidos anteriormente (fase 5 – integração). De modo geral, os alunos não apresentaram dificuldades em acompanhar os passos da construção, mas vale ressaltar que alguns precisaram de ajuda, pois não tinham habilidade motora para fazer as dobras com precisão. Ainda assim, mostraram grande interesse e entusiasmo durante a realização da atividade, devido ao seu aspecto lúdico, até por envolver folhas coloridas para a construção de um objeto concreto ao final. Das respostas apresentadas, 6 alunos que estavam em sala responderam de forma incorreta copiando o passo a passo da construção da caixa e um aluno que estava online não respondeu à questão. Os demais, 27 alunos presenciais e 19 online, não fizeram registros completos, mas todos apresentaram respostas corretas. Nos passos da construção identificaram os seguintes elementos: segmentos de reta; retas paralelas, perpendiculares e concorrentes; ângulos retos; quadrados, retângulos e suas diagonais; triângulos; trapézios; e hexágonos. Devido ao êxito desta atividade, ela será mantida na próxima iteração sem alterações. Seguem alguns registros feitos pelos alunos:

"*1º Passo*: *Formamos linhas perpendiculares, quatro quadrados e ângulos de 90º. 2º Passo: Formamos um quadrado feito por quatro triângulos, e aparecem linhas concorrentes. 3º Passo / 4ºPasso: Formamos um retângulo e ângulos de 90º. 5º Passo: Abrimos e formamos um hexágono com linhas paralelas. Triângulo e linhas paralelas. 6º Passo / 7º Passo: Formamos um hexágono. Tem ângulos de 90º nas pontas e linhas concorrentes. 8º Passo / 9º Passo: Formamos uma caixa com linhas paralelas e perpendiculares com ângulos de 90º em todas as pontas".*

"*1º Passo*: *Segmentos de retas, ângulos retos, retas perpendiculares e quadrados. 2º Passo: Diagonais e ângulos retos. 3º Passo / 4ºPasso: Retas paralelas e retângulos. 5º Passo: Retas paralelas e perpendiculares. 6º Passo / 7º Passo: Igual ao anterior e diagonais. 8º Passo / 9º Passo: Retas paralelas, perpendiculares e retângulos".*

"*1º Passo: Formam quatro quadrados e ângulos retos. 2º Passo: No meio formou um quadrado com triângulos e nas pontas também e ângulos de 90º. 3º Passo / 4ºPasso: Formou três retângulos e ângulos retos. 5º Passo: Formou um hexágono e linhas paralelas. 6º Passo: / 7º Passo: Continuou um hexágono. 8º Passo / 9º Passo: Formou uma caixa com lados retangulares".*

"*1º Passo*: *Retas perpendiculares e quadrados. 2º Passo: Quadrados e triângulos. 3º Passo / 4ºPasso: Retângulos. 5º Passo: Hexágono. 6º Passo / 7º Passo: Dois quadrados e trapézios. 8º Passo / 9º Passo: Caixa com retângulos e um quadrado".*

Relembrando nossa hipótese H15 – *Uma sistematização final deverá representar uma tomada de consciência por parte dos alunos sobre os conceitos trabalhados e uma oportunidade para a professora de avaliar a evolução das concepções dos estudantes sobre os conceitos trabalhados* – após finalizar a sequência das 15 atividades propostas foi realizada uma sistematização dos assuntos trabalhados juntamente com os alunos. O objetivo da sistematização foi avaliar os resultados, verificando as aprendizagens dos alunos, e também que registrassem em seus cadernos o que foi estudado. A professora iniciou a aula questionando sobre as impressões dos alunos a respeito da sequência de atividades nas quais haviam trabalhado. Muitos responderam que "acharam legal", porém, entre estes, alguns destacaram que algumas atividades foram "difíceis". Outros disseram ter sido "diferente" trabalhar com papel e dobraduras. Um último grupo apontou que, de modo geral, as atividades foram difíceis, sendo que a maior dificuldade foi registrar suas respostas.

Podemos concluir que esta atividade prática de manipulação de dobraduras, foi uma situação didática que motivou os alunos a investigar, discutir ideias, escrever explicações e tirar conclusões. Das falas dos alunos pudemos perceber seu envolvimento ativo nas atividades aplicadas, diferentemente do que estavam habituados. Constatamos também que os alunos perceberam suas dificuldades em expressar claramente as características geométricas que observaram.

Ao iniciar a sistematização, a professora perguntou o que lembravam sobre o estudo de retas. Ao que os alunos responderam, corretamente, terem trabalhado sobre as noções de segmento de reta, retas concorrentes, paralelas e perpendiculares, lembrando seus nomes e significados. A professora foi anotando na lousa as respostas dadas. A seguir, perguntados sobre a discussão feita sobre ângulos, os alunos também responderam corretamente – ângulos agudos, retos e obtusos. Por fim, questionou sobre quais figuras geométricas e seus elementos foram estudados, ao que os alunos apontaram as características do retângulo e do quadrado e de suas diagonais. Com relação às diagonais, a professora reforçou a característica de serem perpendiculares entre si no quadrado e no retângulo não, já que não foi lembrado pelos alunos. Ao fim, foi solicitado que registrassem em seus cadernos os conceitos e as características estudados (este momento corresponde a fase 5 – integração).

Após a aplicação de tais atividades os alunos realizaram uma prova individual escrita. Nesta avaliação um quarto das questões corresponderam ao conteúdo trabalho nas atividades com dobraduras, sendo que as demais envolveram outros assuntos de geometria, pertinentes ao material didático: medidas de ângulos; ângulos complementares e suplementares; ângulos consecutivos e opostos pelo vértice; classificação de triângulos; soma dos ângulos internos de triângulos; e polígonos. Observando os resultados desta avaliação e considerando a média avaliativa da escola que é de sete pontos (7,0) sobre dez, do total de 64 alunos, 25 (39%) obtiveram notas acima desta média e 13 alunos (20%) notas entre cinco (5,0) e sete (7,0) pontos. Nesta iteração, vale ressaltar que 33 alunos (52%) estavam presencialmente em sala para a realização das atividades e, destes, 24 alunos (73%) obtiveram notas acima de cinco (5,0). Os demais 31 alunos (48%) acompanharam as aulas de forma remota, devido a pandemia de COVID-19, e apenas 14 alunos (45%) obtiveram notas acima de cinco (5,0). Isso mostra que os alunos que estavam na sala de aula conseguiram um melhor desempenho do que aqueles que acompanharam as aulas de forma remotamente, o que reitera a importância das interações presenciais. Percebe-se assim, que as atividades realizadas presencialmente proporcionaram aos alunos um melhor desenvolvimento de imagens mentais apropriadas sobre os elementos geométricos trabalhados. Corrobora esta afirmação, o fato de que foi nítida, na prova escrita, uma apropriação mais adequada das denominações matemáticas e uma melhor compreensão de propriedades e relações entre os conceitos envolvidos.

CAPÍTULO 5: Segundo ciclo de iteração das atividades em sala de aula

5.1 Replanejamento e formulação do segundo ciclo de iteração da pesquisa

Com a elaboração e aplicação da primeira iteração do projeto de intervenção em sala de aula conseguimos fazer uma reflexão e identificar os seus pontos positivos e negativos. Com isso, revisamos as hipóteses e reformulamos as atividades para que uma nova aplicação acontecesse como na primeira iteração – seguindo o planejamento anual de conteúdo das turmas de 7° ano.

Segue aqui a sistematização da terceira teoria local desenvolvida com as novas hipóteses pensadas, junto com os novos enunciados das atividades planejadas para a segunda iteração em sala de aula.

Hipóteses sobre o uso de dobraduras no trabalho com os conteúdos: Reta e segmento de reta; retas concorrentes e paralelas.

H1 Partindo do fato de que toda a dobra é um modelo concreto de "reta" especialmente "preciso", usar a manipulação de dobraduras pode favorecer a criação de imagem mental adequada desta noção primitiva da geometria. (Observemos que as próprias réguas podem apresentar ondulações, microscópicas ou não.)

H2 No entanto, necessariamente, uma dobra é um modelo de "segmento de reta". Conjecturamos que um questionamento sobre serem, ou não, duas dobras feitas em uma mesma folha de papel um bom modelo de retas concorrentes pode provocar uma discussão significativa sobre a diferença entre "segmento de reta" e "reta". Isso porque algumas dobras se cruzam efetivamente na folha e outras não, mas podem encontrar-se nos prolongamentos imaginados de ambas, não sendo, portanto, paralelas.

H3 Da percepção sobre a necessidade de prolongar segmentos (dobras) para decidir se aquelas "retas" se encontram fora do papel, esperamos que, naturalmente, possa surgir um questionamento sobre "até onde podem ser prolongadas?", levando à compreensão de que retas são ilimitadas e segmentos são limitados.

H4 Este tipo de discussão poderá favorecer a atribuição de significado à definição de retas paralelas: duas dobras que não se cruzam nas suas extensões totais (mesmo fora do papel).

H5 Surge então a questão: Como saberemos que duas dobras feitas no papel são retas efetivamente paralelas? Com ela abre-se espaço para conjecturas dos alunos (respostas dos alunos conjecturadas por nós a *priori: porque têm a mesma direção; porque mantêm sempre a "mesma distância" entre elas; porque podem ser sobrepostas por meio de uma dobradura – o que poderá oportunizar uma questão do professor sobre qual seja um procedimento que possibilite a realização concreta de tal sobreposição)* a serem trabalhadas no próximo bloco de atividades.

Bloco I de atividades

Pertinentes às fases de aprendizagem de Van Hiele de 1 a 3
Conteúdos: Reta e segmento de reta; retas concorrentes e paralelas.
<u>Estratégia didática:</u> Solicitar aos alunos formem duplas. Para cada aluno entregar uma folha de papel vegetal com formato irregular de maneira que possíveis margens retilíneas não sirvam de apoio indevido para as construções com dobraduras, e uma folha com o enunciado das atividades para registros das respostas. Orientar os alunos a realizarem, primeiramente, as atividades 1 e 2a. Antes da realização das próximas atividades, apresentar um slide com as definições de reta, segmento de reta, retas paralelas e retas concorrentes e promover uma discussão com os alunos. Finalmente, recolher os registros das respostas às questões juntamente com as dobras feitas no papel vegetal.

Antes de iniciar o Bloco II de atividades, a fim de realizar uma boa discussão com os alunos no momento da sistematização dos conteúdos, a professora fará a leitura dos trabalhos entregues para verificar suas compreensões e dificuldades.

<u>Atividades propostas:</u>

1) Dobre e desdobre a folha de papel vegetal. Observando a marca deixada no papel, responda:
a) Qual o nome do elemento geométrico representado pela marca da dobra?

b) Dobras diferentes feitas em um mesmo papel podem ter comprimentos diferentes. Usando régua, responda qual é a medida do comprimento do elemento geométrico identificado por você no item “a”?

2) Com o papel aberto marque (com um lápis ou caneta) um ponto fora da dobra feita e faça outra dobra passando por este ponto que não passe pela primeira dobra no seu pedaço de papel.

a) Se o papel fosse maior estas dobras continuariam a não se cortar? Foi necessário imaginar uma folha muito maior para chegar na sua resposta? Explique como pensou.

Vamos combinar?

Reta: é uma linha imaginária, infinita e sem “curvas”.

Segmento de reta: é um único pedaço contínuo de reta de comprimento finito.

Duas retas no mesmo plano são **paralelas** se não se encontram e são **concorrentes** quando se encontram.

b) Vimos que duas retas são paralelas se não se encontram em algum ponto. Descreva outras características de duas dobras feitas como no item 2 que possam garantir que elas sejam paralelas. Justifique sua resposta.

c) A partir do que foi observado no 2 b), verifique se as dobras feitas por você são paralelas ou concorrentes. Justifique.

3) Com suas palavras diga o que você aprendeu e as dúvidas que ficaram a partir das atividades 1 e 2.

Hipóteses sobre o uso de dobraduras no trabalho com os conteúdos: Perpendicularismo entre retas; ângulo reto, agudo e obtuso.

H6 Para provocar uma discussão sobre distância de ponto a reta com dobraduras, imaginamos que, ao marcar um ponto fora de uma dobra anteriormente feita, por meio de outras dobras que passam por esse ponto e cortam a dobra inicial – determinando segmentos do ponto à dobra – os alunos possam comparar os comprimentos dos segmentos determinados por sobreposição dos mesmos, identificando qual é o maior.

H7 Conjecturamos que investigar a ideia de distância de um ponto a uma dobra pode ajudar os alunos a “descobrirem” que algumas dobras formam com ela dois ângulos diferentes (um agudo e outro obtuso) e uma única dobra forma ângulos iguais (o ângulo reto).

H8 Assim eles poderão observar as características da dobra sobre a qual está o segmento de menor distância, e verificarão sua unicidade, pois por meio dela duas partes da dobra inicial ficam sobrepostas sobre si mesmas, determinando assim 4 ângulos congruentes, enquanto as demais determinam quatro ângulos, dois a dois suplementares.

H9 Com esses procedimentos conjecturamos que os alunos descubram a construção do ângulo reto por dobraduras e da dobra perpendicular a outra dobra passando por um ponto fora desta última. Esse pode ser um passo importante para que, na sistematização, se possa trabalhar significativamente a definição de ângulo reto como sendo aquele “formado por duas retas concorrentes na única situação em que determinam quatro ângulos congruentes”.

H10 Observando o 5º postulado de Euclides na sua formulação original (duas retas cortadas por uma transversal em um plano são concorrentes se os ângulos interiores e de um mesmo lado da transversal são menores do que dois retos) acreditamos que propor um caso particular desta situação, no qual um dos ângulos é reto (já construído pelos alunos) e o outro agudo, possa favorecer o desenvolvimento nos alunos de uma imagem mental significativa da ideia subjacente ao 5º postulado e possibilitar que formulem justificativas baseadas na observação dos ângulos e que consigam relacioná-las com as características sobre paralelismo por eles levantadas em atividades anteriores. Com isso, espera-se que possam melhor atribuir significado à propriedade: “Dadas duas retas perpendiculares entre si, uma terceira reta que seja perpendicular a uma delas será paralela à outra”.

Bloco II de atividades

Pertinentes às fases de aprendizagem de Van Hiele de 1 a 3.

Conteúdos: Perpendicularismo entre retas; ângulo reto, agudo e obtuso.

<u>Estratégias didáticas:</u> Solicitar aos alunos que formem duplas. Entregar para cada aluno duas folhas de papel vegetal com formato irregular de maneira que possíveis

margens retilíneas não sirvam de apoio indevido para as construções com dobraduras, e uma folha com o enunciado das atividades para registros das respostas. Orientar os alunos a responderem, primeiramente, as atividades 4 e 5. Previamente à realização das próximas atividades, apresentar aos alunos um slide com as definições de ângulo reto e retas perpendiculares, e realizar um debate sobre os tipos de ângulos obtidos em suas dobraduras e em qual delas estes conceitos definidos apareceram e por quê. Ao final, recolher a folha com o registro das questões e as folhas de papel vegetal com as dobras feitas.

Antes de iniciar o Bloco III de atividades, a fim de realizar uma boa discussão com os alunos no momento da sistematização dos conteúdos, a professora fará a leitura dos trabalhos entregues para verificar suas compreensões e dificuldades.

<u>Atividade propostas:</u>

4) No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra e mantenha o papel dobrado. Marque um ponto no papel, longe da dobra feita.

a) Faça uma segunda dobra que passa pelo ponto marcado e cruza com a dobra inicial. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre estas duas dobras?

b) Agora faça outra dobra, diferente da anterior, passando pelo ponto marcado e que também cruze com a primeira. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre esta terceira dobra e a inicial?

c) Observe os 2 segmentos obtidos nos itens a) e b) que começam no ponto marcado e terminam na dobra inicial. Sem utilizar régua, diga se os segmentos dobrados têm ou não o mesmo comprimento.

Desafio! Comprove a sua resposta anterior usando dobradura e descreva o procedimento feito.

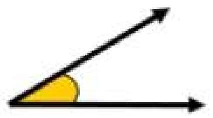
5) Faça uma dobra que determine o menor segmento entre o ponto marcado e a dobra inicial.

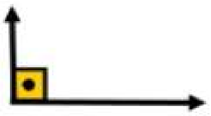
a) Diga o que esta última dobra tem de diferente (ou não) das dobras da atividade 4, observando os ângulos formados por cada dobra feita com a dobra inicial.

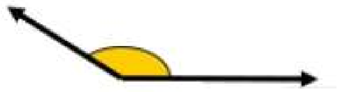
b) Esta última dobra feita é única ou existe mais de uma? Explique como chegou à sua resposta.

Relembrando!

Escreva o nome dos ângulos desenhados a seguir:







Você observou?

Somente uma dobra determina quatro ângulos iguais no papel aberto – aquela que sobrepõe duas partes da dobra inicial sobre elas mesmas. Cada um destes quatro ângulos iguais é chamado de **ângulo reto**.

Neste caso dizemos que uma dobra é **perpendicular** à outra quando forma ângulos retos.

6) No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra inicial e mantenha o papel dobrado. Novamente marque um ponto no papel, longe da dobra feita, e faça a dobra perpendicular à inicial passando pelo ponto marcado. Agora faça uma terceira dobra passando pelo ponto marcado que não seja perpendicular à segunda dobra e também não cruze, **no papel**, com a inicial.

Justifique porque a última dobra feita é concorrente com a dobra inicial (mesmo elas não se cruzando no papel) a partir dos ângulos formados entre a última dobra e a perpendicular já feita.

7) Agora dobre o papel de maneira a obter outra dobra que seja paralela à inicial e que passe pelo ponto marcado. Descreva como você fez e explique por que as dobras obtidas são paralelas.

8) Escreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores (4 a 7) e as dúvidas que surgiram.

Hipóteses sobre o uso de dobraduras no trabalho com os conteúdos: Retas paralelas e perpendiculares; segmentos congruentes; retângulo, quadrado e suas diagonais; e bissetriz de um ângulo.

H11 A construção de retângulos e quadrados com régua e esquadro poderá servir como um diagnóstico para verificar a concepção dos alunos sobre essas figuras. Observe-se que os alunos poderão utilizar a noção de distância, já trabalhada, e suas medidas na régua.

H12 Na construção com dobraduras de retângulos poderemos verificar se os conceitos e a construção geométrica de retas paralelas e perpendiculares (construção do ângulo reto) já estão dominados.

H13 Para realizar a construção do quadrado com dobras, os alunos utilizarão ideias semelhantes às da construção do retângulo, mas surge a necessidade da determinação, com o uso de dobras, de segmentos de mesma origem e mesma medida (segmentos congruentes). Assim, torna-se conveniente solicitar que, inicialmente, seja feita a comparação das medidas de dois segmentos ($\overline{\mathrm{AB}}$ e $\overline{\mathrm{AC}}$, com $\mathrm{AB} < \mathrm{AC}$) para depois introduzir um ponto D em $\overline{\mathrm{AC}}$ de modo que $\overline{\mathrm{AB}}$ seja congruente a $\overline{\mathrm{AD}}$. Conjecturamos que a manipulação das dobras neste procedimento ficará facilitada se os alunos realizarem as dobras no triângulo ABC já recortado, ao eliminar o excesso de papel inútil para a atividade. Este procedimento, ao sobrepor os lados $\overline{\mathrm{AB}}$ e $\overline{\mathrm{AC}}$, possibilita determinar a localização de D no interior do segmento $\overline{\mathrm{AC}}$, de maneira a que $\overline{\mathrm{AB}} \equiv \overline{\mathrm{AD}}$. Este procedimento pode também oportunizar a introdução do conceito de bissetriz de um ângulo.

H14 A partir do momento que já foi realizada a construção do retângulo (não quadrado) e do quadrado, vale aprofundar o estudo destas figuras solicitando que seja feita a construção de suas diagonais. Com isso, acreditamos ser possível avaliar a aprendizagem dos alunos sobre os seguintes elementos estudados anteriormente: retas concorrentes e perpendiculares; ângulos agudos, obtusos e retos; e bissetriz de um ângulo.

H15 Na sistematização queremos verificar se e como foram ampliadas as concepções dos alunos sobre os conceitos trabalhados.

Bloco III de atividades

Pertinentes às fases de aprendizagem de Van Hiele de 1 a 4.
Conteúdos: Retas paralelas e perpendiculares; segmentos congruentes; retângulo, quadrado e suas diagonais; e bissetriz de um ângulo.
Estratégias didáticas: Solicitar aos alunos que formem duplas. Entregar para cada aluno, inicialmente, uma folha de papel vegetal com formato irregular de maneira que possíveis margens retilíneas não sirvam de apoio indevido para as construções com dobraduras, e uma folha com o enunciado das atividades para registros das respostas. Orientar os alunos a responderem, primeiramente, as atividades 9 e 10. Posteriormente, entregar uma nova folha com o desenho de um triângulo para a atividade 11 e fazer uma discussão com os alunos sobre as ideias das atividades 9 a 11. A seguir, entregar uma nova folha de papel vegetal para a atividade 12. Para a realização da atividade 13 cada dupla receberá um retângulo e um quadrado já recortados. Ao final, recolher a folha com o registro das respostas às questões e as figuras e folhas de papel vegetal com as dobraduras feitas.

Antes de realizarem a atividade 15, a professora fará a leitura dos trabalhos dos alunos a fim de verificar a compreensão acerca das atividades feitas, e fazer uma sistematização e discussão das respostas.

Atividades propostas:

9) Desenhe um retângulo e um quadrado utilizando régua e esquadro. Liste as características que são iguais e as que são diferentes entre as duas figuras.
10) Agora, no papel fornecido, faça um retângulo apenas com dobras.
a) Quantas dobras você fez para construir o retângulo?
b) Diga qual elemento geométrico você construiu com cada dobra e explique por quê.
c) Finalmente, diga quais elementos geométricos construídos por você garantem que a figura obtida é um retângulo?
11) Na folha fornecida, com os pontos A, B e C marcados, use dobraduras para construir o triângulo de vértices A, B e C. Recorte o triângulo feito.
a) Utilizando apenas dobradura, verifique se o lado $\overline{AB}$ tem o mesmo comprimento do lado $\overline{AC}$. Explique o procedimento feito para chegar à sua conclusão.

b) Marque um ponto D no lado $\overline{AC}$ de maneira que $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ tenham a mesma medida. Explique o procedimento feito.

c) Observe que a dobra feita no triângulo determina dois ângulos de vértice A no interior da figura. O que você pode afirmar sobre estes dois ângulos? Justifique.

12) Utilizando as ideias e construções desenvolvidas nas atividades 10 e 11, faça um quadrado com dobras. Descreva quais elementos geométricos obteve com cada dobra feita para construir o quadrado.

13) Nesta atividade vamos trabalhar com as diagonais dos retângulos e dos quadrados. No retângulo e no quadrado fornecidos faça as dobras que representam as diagonais destas figuras.

a) Liste as características das diagonais do retângulo.

b) Liste as características das diagonais do quadrado.

c) Agora compare as duas listas dos itens “a” e “b” e diga quais características são iguais e quais são diferentes com relação às diagonais das duas figuras.

14) Descreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores e as dúvidas que surgiram.

Bloco IV de atividade

Pertinente à fase 5 de aprendizagem de Van Hiele.

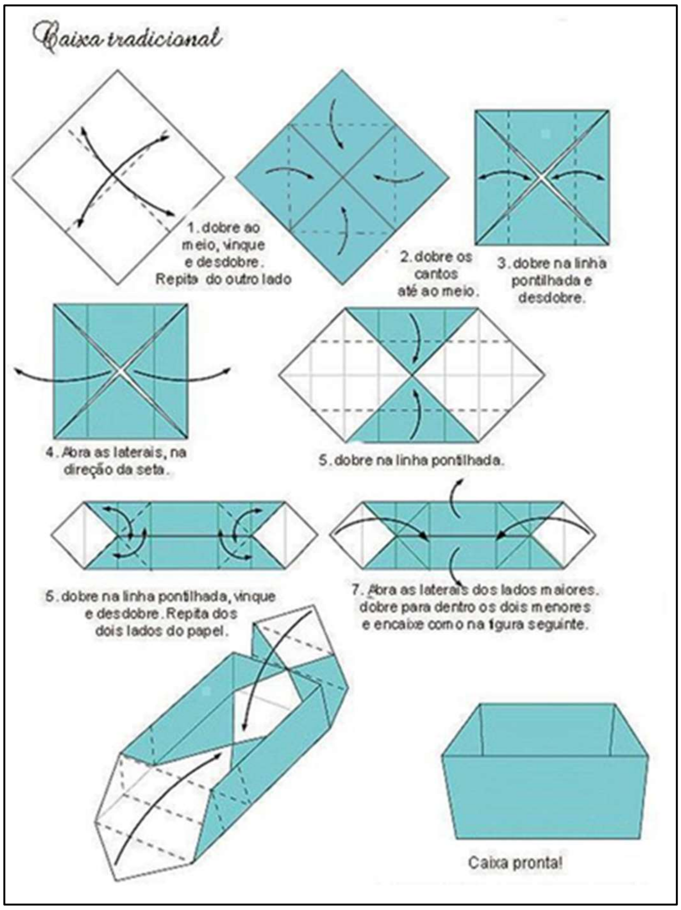
Conteúdos: Todos os conteúdos trabalhados anteriormente.

<u>Estratégia didática:</u> Entregar para cada aluno uma folha quadrada própria para origami para realização da atividade 15. Discussão final para a sistematização dos conteúdos trabalhados nos quatro blocos de atividades.

<u>Atividade proposta:</u>

15) Vamos construir uma caixa a partir de uma folha quadrada. Em cada passo da construção identifique e descreva quais elementos estudados anteriormente aparecem.

Figura 6: Passo a passo da construção da caixa 3



Fonte: http://anabraga-artesanatos.blogspot.com/2011/07/

5.2 Aplicação das atividades e análise dos resultados

Neste capítulo faremos a descrição de como ocorreu a aplicação do novo conjunto de atividades que foram replanejadas bem como a análise da aplicação e dos resultados encontrados.

A aplicação das atividades se deu ao longo de 10 aulas de Matemática para cada uma das duas turmas de 7º ano, com duração de 50 minutos cada aula. No total 64 alunos participaram da aplicação, sendo 32 alunos em cada turma. A análise dos dados da segunda iteração foi feita com base nas observações e anotações da pesquisadora e nas dobraduras e registros feitos pelos alunos.

Bloco I de atividades

Conteúdos: Reta e segmento de reta; retas concorrentes e paralelas.

A aplicação das atividades de 1 a 3 sobre tais conteúdos ocorreu nos dias 06 de setembro com a turma do 7º ano A e 28 de agosto de 2022 com a turma do 7º ano B, com a participação de 32 alunos por turma, ambas em duas aulas com duração de 50 minutos cada. Tais atividades foram desenvolvidas em duplas ou trios, escolhidos pelos alunos, e foi entregue uma folha com as questões e uma folha de papel vegetal com formato irregular para cada aluno.

Nas aulas prévias ao início da aplicação do projeto, a professora iniciou em ambas as turmas a unidade do material didático que aborda o conteúdo de ângulos e construções geométricas, fazendo com eles os primeiros exercícios que tratam da identificação de ângulos em figuras como abertura e também como giros. Os alunos não haviam trabalhado com nenhum conteúdo de geometria no ano anterior e tampouco neste ano, já que no material didático voltado ao Ensino do Fundamental não há uma unidade dedicada ao trabalho com os conceitos básicos iniciais da geometria Euclideana no 6º ano.

Ao iniciar o bloco I de atividades a professora explicou aos alunos que nas próximas aulas iriam trabalhar em uma sequência didática que trata do estudo de conceitos iniciais de geometria por meio do uso de dobraduras. Destacou também a atenção que eles deveriam ter na leitura dos enunciados, colocou-se à disposição em caso de dúvidas e explicou que iria recolher todo o material ao final da aula (este momento corresponde a fase 1 – informação).

Em um primeiro momento, os alunos foram orientados a responder em grupos às atividades 1 e 2a. Nas duas turmas, muitos alunos mostraram insegurança quanto à solicitação da primeira atividade (fase 2 – orientação dirigida) – *Dobre e desdobre a folha de papel vegetal. Observando a marca deixada no papel, responda* – ao solicitarem à professora que conferisse a dobra feita. Ficou evidente que os alunos não estavam habituados a enunciados abertos ou a trabalhar geometria por meio de atividades manipulativas. Enquanto os alunos prosseguiram para o item “1a” – *Qual o nome do elemento geométrico representado pela marca da dobra?* – a professora percorreu os grupos verificando suas respostas. Na turma do 7º A, apenas uma dupla inicialmente identificou o elemento formado como "*Retângulo*", já os outros pensaram corretamente (como reta, linha ou segmento), alguns necessitando confirmar com a professora se a resposta dada estava certa. Na conversa com a dupla que respondeu "*Retângulo*" a professora solicitou que mostrassem o retângulo formado, ao que um dos alunos indicou uma das partes da folha (de formato irregular) que foi dobrada. A seguir, a professora perguntou se aquela região do papel era realmente retangular, ao que um dos alunos respondeu que não. Foi solicitado então que lessem novamente a pergunta do item "a", para questionar a seguir o que significava "marca da dobra". Um dos alunos apontou para a marca no seu papel desdobrado, o que oportunizou a pergunta sobre qual seria o nome apenas daquela marca deixada pela dobradura. Os alunos pensaram um pouco e um deles respondeu inseguro: "é uma linha?". Nesta turma as respostas foram: "*Reta*" (20 alunos), "*Linha*" (8 alunos), "*Linha ou reta*" (2 alunos) e "*Linha / Reta / Segmento de Reta*" (2 alunos). Na turma do 7ºB, todos os alunos responderam de forma correta, sendo que também alguns quiseram confirmar com a professora se a resposta dada estava certa. Nesta turma as respostas foram: "*Reta*" (30 alunos) e "*Linha reta*" (2 alunos). Diante das respostas obtidas, confirmamos nossa hipótese H1 de que a dobra é um modelo concreto preciso para a noção primitiva de reta, já que todos os alunos identificaram corretamente o elemento formado.

Na atividade 1b – *Dobras diferentes feitas em um mesmo papel podem ter comprimentos diferentes. Usando régua, responda qual é a medida do comprimento do elemento geométrico identificado por você no item "a"?* – os alunos de imediato pegaram as réguas e mediram o comprimento das dobras por eles obtidas. Vale destacar que o objetivo desta questão é subsidiar uma posterior discussão sobre as definições de reta e segmento de reta.

Na atividade 2 (fase 2 – orientação dirigida) – *Com o papel aberto marque (com um lápis ou caneta) um ponto fora da dobra feita e faça outra dobra passando por este ponto que não passe pela primeira dobra no seu pedaço de papel* – muitos alunos tiveram dificuldade em entender como fazer a dobra solicitada e alguns chegaram a fazer uma dobra incorreta: dobraram de maneira a encostar a borda da folha no ponto marcado sem que a segunda dobra encontrasse a primeira. Para orientar as duplas que haviam dobrado de forma incorreta, a professora solicitou que observassem a dobra feita perguntando se ela passava pelo ponto marcado. Com isso, alguns alunos perceberam o erro cometido e conseguiram fazer uma nova dobra correta. Já outros necessitaram que fosse feito um esboço de movimento com o papel para que percebessem como realizar a dobra solicitada.

Na atividade 2a – *Se o papel fosse maior estas dobras continuariam a não se cortar? Foi necessário imaginar uma folha muito maior para chegar na sua resposta? Explique como pensou* – poucos alunos ficaram com dúvidas sobre a ideia da atividade, mas muitos tiveram dificuldades sobre como explicar seus pensamentos e registrar suas respostas. Comparando a resposta dada à primeira pergunta com a dobra efetuada (*Se o papel fosse maior estas dobras continuariam a não se cortar?),* verificamos que todos os alunos responderam sim ou não de forma correta: a maioria determinou segmentos de retas concorrentes fora do papel, mas alguns determinaram segmentos paralelos. Organizamos os registros da segunda pergunta (*Foi necessário imaginar uma folha muito maior para chegar na sua resposta? Explique como pensou.*) em três (3) classificações.

Vale observar que a proposta desta atividade buscou levar os alunos a perceberem e utilizarem a percepção de que retas são ilimitadas, coerentemente com a hipótese H3 (ver p. 97). Acreditamos que este objetivo foi alcançado. Sublinhamos nas respostas transcritas dos alunos ideias que possuem uma conotação sobre o fato de que as linhas das dobras podem ser prolongadas indefinidamente na mesma direção.

Seguem os registros da turma do 7ºA para a segunda pergunta.

(a) Respostas condizentes com dobras concorrentes obtidas:

"*Eu imaginei uma folha maior, e que <u>as linhas iriam se encontrar</u>, formando meio que um triângulo*" (3 respostas análogas);

"*Um pouco maior, pois a segunda linha não é muito íngreme*";

"*Não pois na folha pequena as linhas já fazem inclinações diferentes*" (4 respostas análogas);

"*Não, pois o meu ponto está perto da linha e logo uma encontra a outra*" (2 respostas análogas);

"*Sim. A segunda reta está inclinada e se a folha fosse maior <u>a reta continuaria indo na diagonal</u> se encontrando com a primeira reta*" (2 respostas análogas);

"*Não, pois as linhas estão em ângulos diferentes*" (2 respostas análogas); e

"*Sim, tem uma inclinação de forma que <u>elas se encontram mais pra frente</u>*".

(b) Respostas condizentes com dobras paralelas obtidas:

"*Sim, eu precisei imaginar e logo em seguida vi a continuação com a régua para ver se iriam se encontrar e não se encontram*";

"*Não, porque as linhas estão seguindo reto*" (2 respostas análogas); e

"*Não apenas dobrei ao lado da 1º reta*".

(c) Respostas sem justificativa ou com justificativa não condizente com a dobra obtida: (para dobras concorrentes)

"*Imaginei uma folha maior e observei que se encontram*" (4 respostas análogas);

"*Sim, tive que pensar numa folha grande para perceber*" (2 respostas análogas); e

"*Sim, eu pensei em um prédio com duas linhas igual à do meu papel e assim eu dei a minha resposta*".

(para dobras paralelas)

"*Não, pois sabendo que elas não estão juntas, se o tamanho aumentar vai ser a mesma coisa, só vai aumentar o tamanho da dobradura*" (2 respostas análogas);

"*Sim, pois onde eu dobrei estará longe de se encontrar*" (2 respostas análogas); e

"*Não, pois as linhas não se encontram*" (2 respostas análogas)

Seguem os registros da turma do 7ºB para a segunda pergunta.

(a) Respostas condizentes a dobras concorrentes obtidas:

"*Não, as minhas retas não demorariam para se encontrar, a segunda linha da dobradura é bem inclinada*";

"*Sim, e foi com meu lápis e vendo se ia se encontrar*" (2 respostas análogas);

"*Não, porque fui aumentando com os objetos e se encontraram*" (3 respostas análogas);

"*Sim, peguei duas réguas e vi que elas se cruzaram*" (2 respostas análogas);

"*Não, porque a primeira dobra que está na vertical e a segunda que está na diagonal irão se encontrar em uma das pontas*" (2 respostas análogas);

"*Não, como as dobras estão quase juntas facilmente se cruzariam*"; e

"*Não. Imaginei as retas continuando em frente conforme suas direções e sendo assim as retas se encontraram, pois não seguiam a mesma direção*" (2 respostas análogas).

(b) Respostas condizentes com dobras paralelas obtidas:

"*Porque são retas e continuariam seguindo na mesma direção*" (2 respostas análogas);

"*Eu imaginei a folha crescendo e elas não se cruzam pois estão <u>em linha reta e não vão chegando perto uma da outra</u>*" (2 respostas análogas); e

"*Não precisou ser grande pois estão em posições retas que não se cruzariam*".

(c) Respostas sem justificativa ou com justificativa não condizente com a dobra obtida:

(para dobras concorrentes)

"*Sim, pois imaginando uma folha maior consegui perceber que <u>elas continuariam e se encontram</u>*" (2 respostas análogas);

"*Sim, para ter uma <u>relação de espaço maior</u> e para ver se as retas iriam se encontrar*" (2 respostas análogas);

"*Não, pois pela posição é possível identificar que <u>se ela fosse maior, uma hora elas iam se cortar</u>*" (2 respostas análogas);

"*Não, pois <u>uma hora as retas</u> iriam se cruzar*" (2 respostas análogas);

"*Sim, pois não saberia*".

(para dobras paralelas)

"*Sim, e mesmo com uma <u>folha grande as linhas continuaram sem se encontrar</u>*" (2 respostas análogas);

"*Sim, imaginei que <u>fazendo a marcação do mesmo modo independente do tamanho do papel elas não se encontrariam</u>*" (2 respostas análogas); e

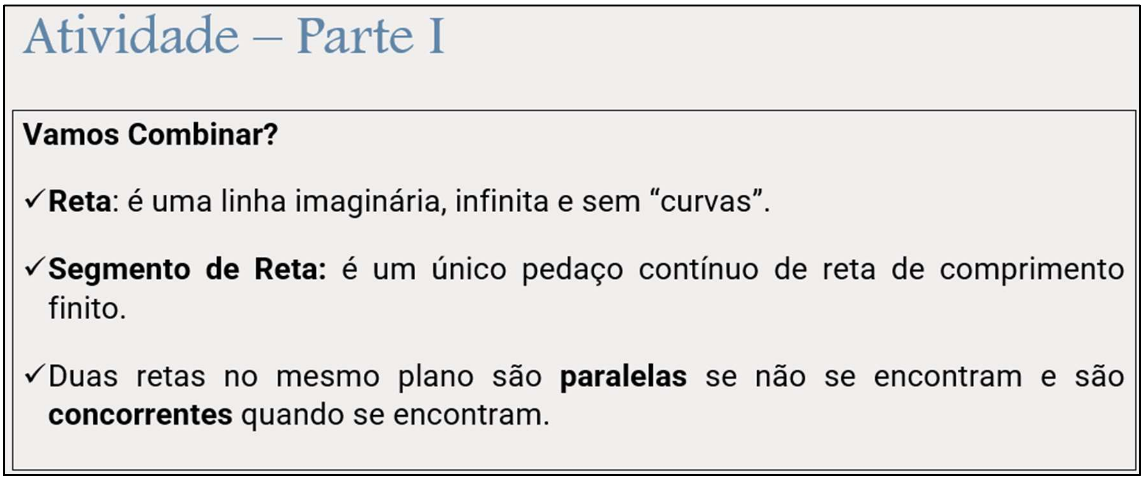
"*Não, pois o formato das linhas está de um jeito que <u>não se cruzam nem com a folha maior</u>*".

Nas duas turmas, do total de 64 alunos, 44 fizeram dobras concorrentes e destes, 16 alunos não registraram a ideia que os levou a justificar o fato de as dobras se encontrarem. Do total de alunos, 20 fizeram dobras paralelas e destes, 11 não souberam registrar uma justificativa para o fato das dobras não se encontrarem. Podemos perceber uma maior dificuldade dos alunos em caracterizar retas paralelas, já que 55% destes não conseguiram apontar uma ideia coerente e 15% dos demais expressaram ideias vagas (*"estão seguindo reto"* e *"dobrei ao lado da 1ª reta")*. Por outro lado, 64% dos que fizeram dobras concorrentes indicaram ideias pertinentes.

Dos alunos que registraram respostas condizentes a dobras concorrentes, pode-se observar que 15 dos 28 alunos justificaram usando as ideias de "inclinação" (da segunda dobra relativamente à primeira), de ângulo (formado pelas dobras) ou o fato de "não seguirem a mesma direção". Os 13 alunos restantes justificaram pela visualização do prolongamento das dobras, seja pelo fato delas estarem muito próximas ou por meio do uso de réguas, lápis, ou outros objetos disponíveis.

Antes de continuar no item “b” a professora apresentou para os alunos a projeção do seguinte slide:

Figura 7: Slide 1 – Bloco I de Atividades (2022)



Fonte: Slide utilizado em sala de aula pela autora

A leitura das definições constantes no slide foi feita pela professora em ambas as turmas. Com relação às duas primeiras definições foi enfatizada a relação entre a ideia da reta ser infinita e o exercício 2a (onde tiveram que imaginar o prolongamento das dobras), destacando que o segmento de reta seria a parte da dobra que se vê no papel (que havia sido medida no exercício 1b). Sobre a definição de retas paralelas e concorrentes, a professora destacou que tais conceitos foram mobilizados no exercício 2a, onde foi solicitado que verificassem se as dobras que fizeram em um mesmo papel se cortavam ou não. A professora perguntou aos alunos se havia ficado alguma dúvida sobre as definições explicadas e todos afirmaram que não.

Foi solicitado então que continuassem na questão 2b, na qual foram surgindo muitas dúvidas com relação ao enunciado – *Vimos que duas retas são paralelas se não se encontram em algum ponto. Descreva outras características de duas dobras feitas como no item 2 que possam garantir que elas sejam paralelas. Justifique sua resposta.* Nas duas turmas muitos interpretaram que deveriam observar as dobras feitas anteriormente, e não que imaginassem apenas uma situação de retas paralelas. Ao perceber a indução ao erro do enunciado, a professora, lendo-o em voz alta, chamou a atenção de todos que várias das dobras feitas não eram paralelas e que, nesta questão, deveriam considerar somente retas paralelas. Na turma do 7ºA um aluno perguntou como seriam as retas paralelas, e a professora desenhou uma reta na lousa em uma posição inclinada, disse que outra reta será paralela àquela se não encontrá-la, e assim perguntou ao aluno como poderia ser desenhada uma segunda reta paralela à reta já feita. O aluno pensou um pouco e fez um gesto com a mão que indicava uma reta na mesma inclinação da desenhada. A professora fez então o desenho da segunda reta e indicou aos alunos que aquela era uma representação de duas retas paralelas e reforçou a solicitação da atividade de encontrar características relacionadas ao paralelismo de retas.

Refletimos sobre cada resposta dada buscando identificar a ideia subjacente principal, mesmo em explicações eventualmente confusas ou com terminologia imprecisa. A seguir organizamos as citações dos registros elaborados pelos alunos da turma do 7ºA, de acordo com as seguintes ideias sobre as características de retas paralelas apontadas: (a) seguem na mesma direção alinhadas uma em relação à outra; (b) retas com a mesma inclinação, mesmo ângulo ou posição (uma em relação à outra); (c) mantêm sempre a mesma distância uma da outra; e (d) não se cruzam (a própria definição). Seguem as 32 respostas dos alunos desta turma:

(a) seguem na mesma direção alinhadas uma em relação à outra:

"*Uma linha reta e em baixo outra linha no mesmo sentido que a de cima*" (3 respostas análogas);

"*Elas estão alinhadas, nunca se encontram*" (2 respostas análogas);

"*As retas têm que ter a mesma direção*" (2 respostas análogas);

"*Seguem a mesma direção e não se distanciam uma da outra*" (2 respostas análogas);

"*Nunca vai mudar a direção, sempre vai seguir uma linha*" (2 respostas análogas); e

"*Pois nunca vão mudar a direção e também sempre vão seguir no mesmo movimento*" (2 respostas análogas).

(b) retas com mesma inclinação, ângulo ou posição:

"*Mesma inclinação e posição*" (2 respostas análogas);

"*As retas têm o mesmo ângulo*" (2 respostas análogas);

"*Estão retas, sem nenhuma inclinação*" (3 respostas análogas); e

"*Pois elas estão uma do lado da outra na mesma posição*" (2 respostas análogas).

(c) mantêm sempre a mesma distância uma da outra:

"*Elas mantêm a mesma distância até o final*" (2 respostas análogas);

"*Que não mudam a distância*" (2 respostas análogas); e

"*Para que as retas sejam paralelas, elas não podem ter uma inclinação, tem que manter a mesma distância entre as duas*" (2 respostas análogas).

(d) não se cruzam (a própria definição):

"*Retas que não se cruzam*" (2 respostas análogas).

Duas das respostas, com redação mais confusa, talvez pudessem ser classificadas como (a) ou como (d): "*Ambas têm que estar retas para não encostar uma na outra*".

Na turma do 7º B organizamos as citações dos registros elaborados pelos alunos de acordo com as seguintes ideias sobre as características de retas paralelas apontadas: (a) seguem na mesma direção; (b) seguem na mesma direção mantendo a mesma distância; (c) mantêm sempre a mesma distância uma da outra; e (d) retas na mesma posição (uma em relação à outra). Seguem as 32 respostas dos alunos desta turma:

(a) seguem na mesma direção:

"*Elas não podem ter curvas, as duas retas têm que estar na mesma direção*" (2 respostas análogas);

"*As retas que estão na mesma direção não se encontram então são paralelas*" (4 respostas análogas);

"*Se as retas forem na mesma direção elas sempre serão paralelas*" (2 respostas análogas); e

"*As retas sempre estão na mesma direção*" (5 respostas análogas).

(b) seguem na mesma direção mantendo a mesma distância:

"*As retas não precisam estar perto uma da outra, elas seguem a mesma direção e o espaço entre elas terá o mesmo tamanho do início ao fim*" (2 respostas análogas);

"*As retas paralelas sempre são retas que vão na mesma direção com um espaço entre elas sempre iguais*" (2 respostas análogas);

"*Devem estar na mesma direção e ter um espaço igual entre elas*" (2 respostas análogas); e

"*Tem um espaço entre elas, não tem curvas, são todas na mesma direção*" (2 respostas análogas).

(c) mantêm sempre a mesma distância uma da outra:
"*Elas têm um espaço, esse espaço pode mudar, mas se mantém*" (2 respostas análogas).
(d) retas na mesma posição:
"*As retas têm que estar na mesma posição para não conseguirem se encontrar (vertical, vertical e horizontal, horizontal)*" (2 respostas análogas);
"*Ficam em posição distante uma da outra e na mesma posição*" (2 respostas análogas); e
"*Porque uma está em cima da outra alinhadas*" (2 respostas análogas).

Três outras respostas, com redação mais imprecisa, talvez pudessem ser classificadas como (c): "*São separadas e retas*" (2 respostas análogas) e "*São separadas, infinitas e retas*".

Observando os registros feitos pelos alunos nesta atividade concluímos que a nossa hipótese H5 foi parcialmente verificada. As ideias "têm a mesma direção" e "mantêm a mesma distância" foram efetivamente apontadas em várias respostas. A única conjectura nossa não apontada por eles foi "podem ser sobrepostas", talvez por esta ser a primeira experiência deles com o trabalho com dobraduras. No entanto, algumas ideias novas foram levantadas pelos alunos: "retas com a mesma inclinação, ângulo ou posição". Avaliamos assim que desenvolver atividades a partir da hipótese 5 levou, de fato, os alunos a exporem ideias próprias e pertinentes sobre propriedades relacionadas ao paralelismo entre retas. Acreditamos, diante das várias ideias que surgiram nas respostas dos alunos, que nossa hipótese H4 mostrou-se também pertinente – *Este tipo de discussão poderá favorecer a atribuição de significado à definição de retas paralelas: duas dobras que não se cruzam nas suas extensões totais (mesmo fora do papel).*

Ao finalizarem a atividade 2b os alunos prosseguiram realizando as atividades 2c e 3. Na atividade 2c – *A partir do que foi observado no 2b, verifique se as dobras feitas por você são paralelas ou concorrentes. Justifique* – todos os alunos responderam corretamente a classificação das dobras de acordo com as construções por eles feitas. Observando os registros, notamos que alguns utilizaram ideias trabalhadas na atividade anterior para justificar o paralelismo ou a concorrência entre as dobras, diferentemente do que ocorreu na aplicação anterior, onde todos justificaram apenas pelas respectivas definições. Pudemos observar que nas duas turmas 30% justificaram o paralelismo e 25% justificaram a concorrência por alguma das propriedades anteriormente apontadas. Os demais não justificaram, se limitaram a mencionar as definições. Na turma no 7ºA, dez (10) alunos fizeram dobras paralelas e sete (7) responderam apenas usando a definição, os demais fizeram os seguintes registros: "*Paralelas porque estão alinhadas*"; "*Paralelas, pois elas não se encontram e nunca mudam a sua direção*"; e "*Paralelas, pois existe um espaço que se mantém*". 22 alunos fizeram dobras concorrentes e 17 responderam usando a definição, os demais fizeram os seguintes registros: "*Concorrentes, pois são de ângulos diferentes*"; "*Concorrentes, porque elas não possuem a mesma distância até o final*"; "*São concorrentes, pois elas vão se inclinando e sua distância diminuindo*"; "*São concorrentes, elas têm uma inclinação bem pequena, mas se vai continuar uma hora elas vão se encontrar*"; e "*São concorrentes, pois a segunda reta está inclinada e não estão com a mesma distância*". Na turma do 7ºB, dez (10) alunos fizeram dobras paralelas e sete (7) justificaram usando a definição, os demais fizeram os seguintes registros: "*São paralelas, pois mesmo com o papel maior as retas continuariam sem se encontrar e o espaço entre elas sempre serão iguais*"; e "*São paralelas, pois seguem a mesma direção*" (2 respostas análogas). 22 alunos fizeram dobras concorrentes e 16 justificaram usando a definição, os demais fizeram os seguintes registros: "*Concorrentes, porque elas não estão na mesma direção*" (6 respostas análogas).

Na terceira e última questão deste bloco de atividades (fase 3 – explicação) – *Com suas palavras diga o que você aprendeu e as dúvidas que ficaram a partir das atividades de 1 e 2* – a maioria dos alunos registrou que aprendeu "sobre retas paralelas e concorrentes", e alguns acrescentaram que aprenderam sobre retas e segmentos de reta. Nenhum aluno mencionou ter ficado com dúvidas.

Ao finalizar a aplicação, todas as atividades realizadas pelos alunos foram recolhidas. Antes de iniciar o próximo bloco de atividades, os registros foram lidos para melhor realização, na aula posterior, da sistematização das ideias trabalhadas.

Bloco II de Atividades

Conteúdos: Perpendicularismo entre retas; ângulos reto, agudo e obtuso.

A aplicação das atividades de 4 a 8 sobre tais conteúdos ocorreu nos dias 9 e 12 de setembro na turma do 7ºA e nos dias 30 de agosto e 6 de setembro na turma do 7ºB, com a participação de 32 alunos por turma, ambas em três aulas com duração de 50 minutos cada.

Antes de iniciar a aplicação das atividades a professora fez, juntamente com os alunos, uma sistematização dos conceitos trabalhados anteriormente. Inicialmente questionou sobre o que havia sido estudado nas atividades e alguns alunos responderam que estudaram retas, retas paralelas e concorrentes e dobraduras. Diante da pergunta: “O que são retas paralelas e retas concorrentes?”, alguns alunos responderam corretamente que as retas paralelas não se cortam e que as retas concorrentes se cortam. Também foi indagado quais outras ideias sobre retas paralelas haviam sido apontadas por eles no trabalho anterior. Neste momento, todas as ideias por eles registradas foram mencionadas, tendo a discussão fluido naturalmente, com boa participação dos alunos. A professora fez um resumo na lousa com as definições de retas, retas paralelas e concorrentes e solicitou que os alunos registrassem em seus cadernos.

Na sequência foram formados duplas ou trios, escolhidos pelos alunos. Foi entregue uma folha com as questões e uma primeira folha de papel vegetal com formato irregular para cada aluno. Isso feito, foi explicado aos alunos que esta nova sequência de atividades seria uma continuidade da anterior, com a finalidade de explorar novas ideias a partir dos conceitos já trabalhados.

A seguir os alunos iniciaram a atividade 4 (fase 2 – orientação dirigida) – *No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra e mantenha o papel dobrado. Marque um ponto no papel, longe da dobra feita*. Ao observar os grupos realizando a atividade, nas duas turmas a professora percebeu que muitos não estavam deixando o papel dobrado. Neste momento chamou a atenção para a informação constante do enunciado sobre “deixarem o papel dobrado” para realizar a segunda dobra, solicitada no item a – *Faça uma segunda dobra que passa pelo ponto marcado e cruza com a dobra inicial. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre estas duas* *dobras?* Alguns ficaram em dúvida sobre como fazer a segunda dobra e solicitaram ajuda, outros não entenderam a quais ângulos o enunciado referia. Para ajudar os alunos a localizarem os ângulos, a professora perguntou às duplas onde estavam as dobras feitas e observou que identificavam facilmente a segunda dobra, mas tinham dificuldade em localizar a primeira. Analisando tal situação, percebemos que o fato de manter o papel dobrado após a realização da primeira dobra, fazendo com que esta ficasse na "borda" do papel, dificultou sua localização para alguns alunos. Após uma orientação sobre a localização das dobras feitas, os alunos não apresentaram dificuldade em identificar os ângulos.

Seguem os registros da turma do 7ºA:

(a) respostas corretas:

"*Os dois juntos formam um ângulo de 180º, um ângulo é agudo e o outro obtuso*" (4 respostas análogas);

"*Um ângulo é agudo e o outro é obtuso*" (11 respostas análogas);

"*Se formam dois ângulos retos*" (4 respostas análogas);

"*Formou dois ângulos de medidas diferentes*" (2 respostas análogas); e

"*As dobras são concorrentes, e os ângulos formam 180º*" (2 respostas análogas);

(b) respostas incompletas:

"*Formou um ângulo agudo*" (5 respostas análogas);

(c) respostas incorretas:

"*Formou dois ângulos obtusos*" (2 respostas análogas); e

"*Formou uma figura do tipo de um retângulo*" (2 respostas análogas).

Seguem os registros da turma do 7ºB:

(a) respostas corretas:

"*Os dois ângulos são retos*" (13 respostas análogas);

"*Um ângulo é agudo e o outro é obtuso*" (11 respostas análogas); e

"*Não são ângulos retos*" (2 respostas análogas)

(b) respostas incompletas:

"*Um deles é um ângulo agudo*" (4 respostas análogas); e

"*Deu um ângulo menor que 90º*" (2 respostas análogas).

Verificamos que as classificações dadas aos ângulos (ângulos retos, agudos e obtusos) estavam corretas de acordo com as dobras feitas pelos alunos. Notamos que onze alunos observaram apenas um dos ângulos, deixando a resposta incompleta e quatro alunos deram respostas incorretas.

Os alunos seguiram, sem dificuldades, realizando a atividade 4b – *Agora faça outra dobra, diferente da anterior, passando pelo ponto marcado e que também cruze com a primeira. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre esta terceira dobra e a inicial?*

Seguem os registros da turma do 7ºA:

(a) respostas corretas:

"*De um lado formou um ângulo agudo e o outro obtuso*" (13 respostas análogas);

"*Juntos formam um ângulo de 180º, sendo um ângulo agudo e outro obtuso*" (4 respostas análogas); e

"*Formaram ângulos de 90º*" (4 respostas análogas);

(b) respostas incompletas:

"*Um ângulo obtuso*" (2 respostas análogas); e

"*Formou um ângulo agudo*" (7 respostas análogas);

(c) respostas incoerentes com a pergunta:

"*Formou um triângulo*" (2 respostas análogas).

Seguem os registros da turma do 7ºB

(a) respostas corretas:

"*Um dos ângulos é agudo e o outro obtuso*" (14 respostas análogas);

"*Juntos formam um ângulo de 180º*" (2 respostas análogas)*;*

"*Formou dois ângulos de 90º (retos)*" (3 respostas análogas)*;* e

"*Um ângulo é maior e o outro é menor*"*;* (2 respostas análogas)

(b) respostas incompletas:

"*Um ângulo maior que 90º*" (2 respostas análogas)*;* e

"*Formou um ângulo agudo*" (8 respostas análogas)*;*

(c) resposta incoerente com a pergunta:

"*As dobras formaram três ângulos*".

Verificamos que as classificações dadas aos ângulos (ângulos retos, agudos e obtusos) estavam corretas de acordo com as dobras feitas pelos alunos. Notamos que dezenove alunos observaram apenas um dos ângulos, deixando a resposta incompleta e três alunos deram respostas incoerentes com a pergunta por terem considerado o triângulo formado pelas três dobras.

Na atividade 4c – *Observe os 2 segmentos obtidos nos itens a) e b) que começam no ponto marcado e terminam na dobra inicial. Sem utilizar régua, diga se os segmentos dobrados têm ou não o mesmo comprimento* – alguns alunos ficaram inseguros em relação às informações do enunciado e confirmaram com a professora quais segmentos deveriam ser comparados. Na turma do 7ºA, dos 32 alunos, somente um respondeu "*Sim*" e verificamos que os segmentos determinados eram de mesma medida. Na turma do 7ºB, dos 32 alunos, dois responderam "Sim" e, verificando suas dobras, percebemos que duas eram de mesma medida e as outras duas tinham medidas próximas.

A professora instruiu que respondessem à próxima atividade (fase 2 – orientação dirigida) – ***Desafio!*** *Comprove a sua resposta anterior usando dobradura e descreva o procedimento feito.* Observando os registros dos alunos, a maioria respondeu de forma correta, dando a ideia de ter usado a sobreposição das dobras feitas. Seguem os registros corretos dos alunos do 7ºA:

"*Alinhando as duas dobraduras*" (8 respostas análogas);

"*Tentando juntar as duas dobras dá para ver que elas não são de mesmo tamanho*" (5 respostas análogas);

"*Eu coloquei o primeiro segmento em cima do segundo, alinhando-os. Os dois segmentos não têm o mesmo comprimento*" (2 respostas análogas);

"*Sobrepor as linhas*" (4 respostas análogas);

"*Aproximar as duas dobras e assim comparar de perto*" (2 respostas análogas);

"*Colocar uma linha sobre a outra*" (2 respostas análogas);

"*Jogar uma dobra em cima da outra para comparar os tamanhos*" (2 respostas análogas); e

"*Quando você dobra as duas dobras no meio você vê o resto da dobra maior*" (2 respostas análogas).

Nesta turma tivemos cinco respostas incorretas de acordo com as instruções do enunciado:

"*Uma está mais inclinada e a outra está reta, então a inclinada é maior*"; e

"*Utilizando a régua*" (4 respostas análogas).

Seguem os registros corretos da turma do 7ºB:

"*Eu dobrei uma dobra por cima da outra e comparei*" (8 respostas análogas);

"*Dobrando um segmento em cima do outro percebi que não têm o mesmo tamanho*" (6 respostas análogas);

"*Juntei os segmentos*" (5 respostas análogas);

"*Fazendo uma dobradura com linhas em cima uma da outra foi possível perceber que não possuem o mesmo comprimento, pois a linha ultrapassou o papel*" (3 respostas análogas);

"*Juntei a segunda dobra com a terceira dobra, colocando uma sobre a outra mostrando que resta cerca de 1 cm*";

"*Eu dobrei o papel entre as linhas para elas ficarem uma do lado da outra e dessa forma consegui ver que uma delas era maior e a outra menor*" (2 respostas análogas);

"*Como uma dobra está reta e a outra na diagonal eu fiz uma dobra no espaço que sobrou entre essas duas dobras, depois que eu fiz essa dobra dá para ver claramente que as duas dobras não têm o mesmo comprimento*"; e

"*Dobrando as duas retas sobra uma grande ponta em um dos lados*" (2 respostas análogas).

Nesta turma tivemos duas respostas incompletas e duas incorretas:

"*Eu dobrei ao meio*" (2 respostas análogas); e

"*É só observar as dobraduras feitas e vai ver a diferença*" (2 respostas análogas).

Analisadas as respostas, pudemos confirmar nossa hipótese H6, no trecho onde consta: *"*[...] *os alunos possam comparar os comprimentos dos segmentos determinados por sobreposição dos mesmos, identificando qual é o maior."* De um total de 64 alunos, apenas nove responderam de forma incompleta ou incorreta.

Ao continuar na atividade 5 (fase 2 – orientação dirigida), o enunciado inicial – *Faça uma dobra que determine o menor segmento entre o ponto marcado e a dobra inicial* – percebemos que "o menor segmento" solicitado era uma noção que não pertencia ao repertório de alguns alunos. Neste momento, na busca de esclarecer o enunciado e fornecer representações que contribuíssem ao entendimento dos alunos, nas duas turmas a professora desenhou na lousa uma representação das dobras feitas anteriormente, localizando o ponto e mostrando que eles precisavam identificar e dobrar o segmento de menor medida entre o ponto e a dobra inicial. Mesmo assim, na turma do 7ºB muitos alunos também ficaram confusos pois, por coincidência, já haviam construído anteriormente a dobra do menor segmento. Ao final, observamos que todos os alunos construíram a dobra que determina o menor segmento, apesar de alguns não terem sido muito cuidadosos ao formarem apenas ângulos aproximadamente retos.

Nos registros da atividade 5a – *Diga o que esta última dobra tem de diferente (ou não) das dobras da atividade 4, observando os ângulos formados por cada dobra feita com a dobra inicial* – notamos que a maioria dos alunos (78%) respondeu corretamente, indicando que esta última dobra forma ângulos retos como a dobra inicial, enquanto as outras não. Outros alunos não mencionaram diretamente os ângulos, mas se referiram a posição relativa entre as dobras, apontando que "a mais inclinada" é maior do que a "vertical" ou "reta". E quatro alunos que já haviam construído anteriormente a dobra que representa o menor segmento responderam que "não tem diferença entre as dobras". A professora conversou com estes alunos após fazer a leitura dos registros, questionando-os sobre suas respostas, e eles disseram que, como na atividade 4 eles já haviam construído a dobra que forma dois ângulos retos com a primeira, explicitado sobre os ângulos e estabelecido que ela é menor do que a outra dobra feita, então concluíram já terem respondido a atividade 5 na atividade anterior.

Seguem os registros corretos da turma 7ºA (27 respostas corretas):

"*A dobra feita está reta, as outras estão inclinadas. Os ângulos formados são ângulos retos"* (2 respostas análogas);

"*As dobras da atividade 4 tem inclinação e não é ângulo reto e a nova dobra tem ângulos de 90º (é reto)*" (2 respostas análogas);

"*Ela é reta, tem ângulo de 90º*" (2 respostas análogas);

"*Ela forma ângulos retos*" (2 respostas análogas);

"*Os ângulos têm 90º*" (7 respostas análogas);

"*Ela é a única que forma ângulo de 90º*";

"*É um ângulo reto*" (6 respostas análogas);

"*Os dois lados, os ângulos são de 90º, e os dois juntos dão 180º*" (2 respostas análogas);

"*Ela é mais na vertical*"; e

"*Ela forma um ângulo de 90º, assim como na segunda dobra*" (2 respostas análogas).

Seguem os registros incorretos da turma 7ºA (5 respostas incorretas):

"*Tem diferenças no tamanho e diferença nos ângulos*" (2 respostas análogas);

"*Não tem nenhuma diferença*" (2 respostas análogas); e

"*Não tem diferença, pois elas são exatamente do mesmo tamanho*".

Seguem os registros corretos da turma 7ºB (28 respostas corretas):

"*A diferença é que a última dobra tem o ângulo reto*" (5 respostas análogas);

"*Os dois são iguais, são retos*" (2 respostas análogas);

"*Terá ângulos retos*" (3 respostas análogas);

"*Ela é reta e forma ângulo de 90º*" (3 respostas análogas);

"*Que o ângulo é reto e da atividade 4 só existia ângulo obtuso e agudo*" (2 respostas análogas);

"*O ângulo da última dobra é o único reto, que faz a dobra menor*";

"*A menor dobra é a primeira, pois ela era reta, o que diferencia é o seu ângulo de 90º*";

"*A menor dobra é a primeira, pois ela era reta. O que difere ela dos outros é o seu ângulo de 90º que a mantém como o menor segmento, se seu ângulo fosse 45º ele seria maior porque, para um segmento diagonal chegar à dobra inicial tem que percorrer maior distância*";

"*Para ser o menor segmento a linha tem que estar reta e formar ângulos retos*" (6 respostas análogas)

"*Para ter o menor segmento a linha tem que estar reta passando pelo ponto e a dobra inicial*" (3 respostas análogas); e

"*A diferença é que ela fica menor que as outras linhas por ela ser reta diferente das outras que são inclinadas*".

Seguem os registros incorretos da turma 7ºB (4 respostas incorretas):

"*Não teve muita mudança na dobra, mas a linha que formou no meio é menor que as duas outras retas que já haviam sido feitas*";

"*A diferença é que de todos os segmentos ele é o menor*"; e

"*Não tem nada de diferente*" (2 respostas análogas).

Diante dos resultados obtidos nas atividades 4 e 5a, consideramos válida nossa hipótese H7 – *Conjecturamos que investigar a ideia de distância de um ponto a uma dobra pode ajudar os alunos a "descobrirem" que algumas dobras formam com ela dois ângulos diferentes (um agudo e outro obtuso) e uma única dobra forma ângulos iguais (o ângulo reto)* – já que a maioria dos alunos identificou corretamente os ângulos formados e percebeu a diferença de ângulos entre as dobras solicitadas.

Na atividade 5b – *Esta última dobra feita é única ou existe mais de uma? Explique como chegou à sua resposta* – a maioria dos alunos identificou corretamente a dobra como sendo a única que representa a menor distância entre o ponto e a dobra inicial (55 de 64 alunos, das duas turmas). Destes alunos, 43 justificaram com ideias corretas, indicando os ângulos formados ou a inclinação das dobras, enquanto os demais (12 alunos), deram explicações imprecisas ou não explicaram suas respostas. Nove (9) alunos responderam incorretamente à questão.

Seguem os registros corretos (19 respostas) da turma do 7ºA (32 alunos):

"É única, pois se for outra não vai ser mais ângulo de 90º (não vai ser mais reto)" (4 respostas análogas);

"Esta é única, pois só tem uma dobra com esse ângulo reto" (4 respostas análogas);

"É única, as outras retas estão formando ângulos diferentes" (2 respostas análogas);

"Única, por que as outras dobras estão inclinadas ficando maiores do que a dobra que está reta" (4 respostas análogas); e

"Sim é única, as outras ficam inclinadas" (5 respostas análogas).

Seguem os registros com ideias corretas, porém sem justificativas ou com justificativas imprecisas da turma do 7ºA (8 respostas):

"É única" (2 respostas análogas);

"Ela é única, ele é reto" (2 respostas análogas);

"Sim é única, por que ela é reta e se eu fizer outras elas não serão como a que eu tinha feito" (2 respostas análogas); e

"É única feita pois não tem nenhuma dobradura semelhante ou igual a essa" (2 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas incorretas da turma do 7ºA (5 respostas):

"Existe mais de uma, eu cheguei na resposta olhando as dobras" (2 respostas análogas);

"Existe mais de uma, os tamanhos se alteram"; e

"Existem outras. Sempre que linhas retas na horizontal e vertical se encontram, formam ângulos de 90º" (2 respostas análogas).

Seguem os registros corretos da turma do 7ºB (24 respostas):

"Única, pois não tem como fazer outra dobra pelo ponto e a dobra inicial com ângulos retos" (7 respostas análogas);

"Essa dobra é única, pois ela tem ângulos de 90º" (3 respostas análogas);

"Não tem como fazer outro segmento reto passando pelo ponto e a primeira dobra e que forma um ângulo reto" (2 respostas análogas);

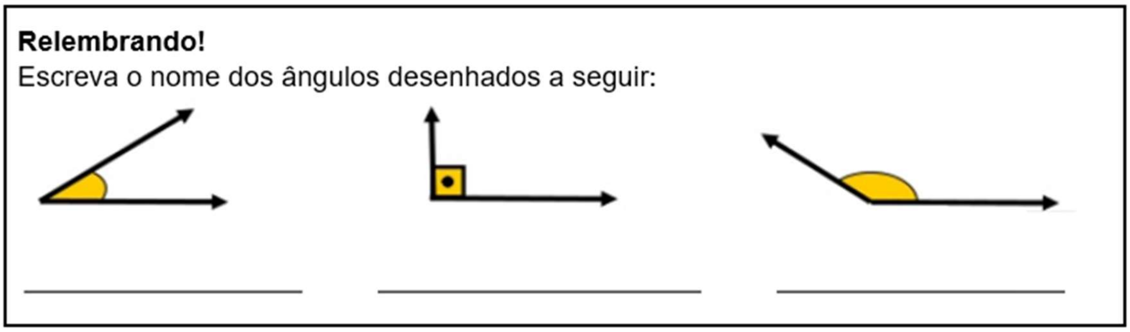
“Única. Analisando percebo que a última dobra é reta e as outras formam ângulos agudos e obtusos” (2 respostas análogas);
“Única, as outras estão inclinadas” (2 respostas análogas);
“Única, as outras estão inclinadas, ao invés de posição reta” (3 respostas análogas);
“Única, pois essa dobra é a única com 90º e é a única em linha reta” (3 respostas análogas); e
“Ela é única, por que se fizer outra dobra a linha vai ficar inclinada” (2 respostas análogas).

Seguem os registros com ideias corretas, porém com justificativas imprecisas da turma do 7ºB (4 respostas):
“Ela é única, pois o menor caminho foi a última dobra, e se quisermos outro menor caminho, essa dobra iria ficar por cima da última” (2 respostas análogas); e
“Ela é única, pois eu não consegui fazer outra dobra igual, com as mesmas características” (2 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas incorretas da turma do 7ºB (4 respostas):
“Existe mais de uma dobra que é parecida com essa” (2 respostas análogas);
“Existe mais, pois pode puxar várias retas do ponto”; e
“Não”.

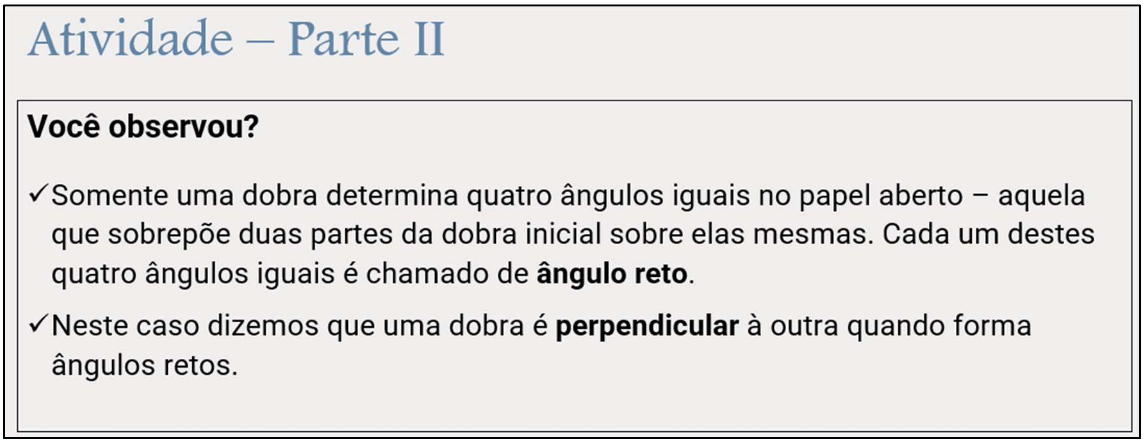
Diante das respostas dadas à atividade 5b, sobre a unicidade da reta perpendicular, examinemos a adequação da nossa hipótese H8 – *Assim eles poderão observar as características desta dobra, sobre a qual está o segmento de menor distância, e verificarão sua unicidade, pois por meio dela duas partes da dobra inicial ficam sobrepostas sobre si mesmas, determinando assim 4 ângulos congruentes, enquanto as demais determinam quatro ângulos, dois a dois suplementares.* Como 85% indicaram corretamente a unicidade da reta, dos quais a grande maioria apresentou justificativas envolvendo os dois ângulos formados pelas duas dobras (67% dos alunos), consideramos a validade da hipótese para favorecer a identificação da unicidade da reta perpendicular passando pelo ponto dado. No entanto, cabe fazer uma ressalva: a instrução da atividade levou os alunos a visualizarem apenas dois ângulos já que o papel permaneceu dobrado na dobra inicial. Assim, o enunciado da hipótese seria mais coerente com a atividade proposta se mencionasse 2 ângulos, ao invés de 4.

Na sequência, como sistematização dos conteúdos trabalhados nas atividades 4 e 5, correspondente à fase de aprendizagem 3 (explicação), foi solicitado aos alunos que preenchessem o quadrinho “Relembrando!” – sobre classificação de ângulos em agudo, reto ou obtuso. Todos responderam corretamente, e assim percebemos que eles já tinham conhecimento prévio das nomenclaturas dos ângulos (que também havia sido utilizado na atividade 4), mesmo tendo sido elas utilizadas nas justificativas da atividade 5 por apenas alguns alunos.



Avançando na sistematização a professora projetou para os alunos o seguinte slide:

Figura 8: Slide 2 – Bloco II de Atividades (2022)



Fonte: Slide utilizado em sala de aula pela autora

Feita a leitura do primeiro tópico da parte “Você observou?”, a professora questionou os alunos se a situação descrita se relacionava com as dobras que haviam feito nas atividades 4 e 5. Rapidamente alguns alunos responderam que sim, que se relacionava com a última dobra feita (que representa a menor distância entre o ponto e a dobra inicial), por meio da qual determinaram ângulos retos. Escolhendo um bom exemplo, foi utilizada a dobradura feita por um aluno para que todos percebessem que para obter por dobradura o ângulo reto corretamente é necessário dobrar o papel de maneira que a dobradura inicial fique dobrada sobre si mesma. Com isso foi exibido que os quatro ângulos se sobrepõem exatamente na segunda dobradura, o que comprova visualmente que os quatro ângulos são iguais e, neste caso, são chamados de retos. Abrindo o papel, foi possível observar os quatro ângulos retos. A professora ainda reforçou que, na situação da atividade 5, a dobra que forma os ângulos retos é única, e que todas as outras formam ângulos agudos ou obtusos, aproveitando uma ilustração que já estava na lousa para fazer o desenho das retas. Continuou na leitura do próximo tópico, reforçando que as dobras feitas por eles, que formaram os ângulos retos, recebem o nome de retas perpendiculares (este momento corresponde a fase 3 – explicação). Foi perguntado aos alunos se alguma dúvida permanecia com relação às atividades feitas ou sobre as definições explicadas. Todos afirmaram que não.

Consideramos que nesta fase de integração ficaram reforçados e bem consolidados os conteúdos trabalhados. Acreditamos que a atividade favoreceu uma maior incorporação das nomenclaturas matemáticas ao repertório dos alunos, dado o uso natural e consistente das mesmas em suas falas. Isso foi confirmado por suas respostas a atividades posteriores, nas quais as terminologias foram utilizadas com naturalidade e frequência.

Nas duas turmas, as atividades 4, 5 e a sistematização ocorreram em duas aulas de 50 minutos. Iniciamos a atividade 6 em uma aula posterior, entregando um novo papel vegetal para a realização das atividades 6 e 7.

Na atividade 6 (fase 4 – orientação livre sobre ângulos e posição relativa entre retas) – *No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra inicial e mantenha o papel dobrado. Novamente marque um ponto no papel, longe da dobra feita, e faça a dobra perpendicular à inicial passando pelo ponto marcado. Agora faça uma terceira dobra passando pelo ponto marcado que não seja perpendicular à segunda dobra e também não cruze, no papel, com a inicial. Justifique porque a última dobra feita é concorrente com a dobra inicial (mesmo elas não se cruzando no papel) a partir dos ângulos formados entre a última dobra e a perpendicular já feita* – muitos alunos pediram ajuda para realizar as dobras solicitadas no enunciado. A professora percebeu que a dificuldade não estava nos conceitos apresentados, ou seja, os alunos sabiam o que eram as dobras perpendiculares e concorrentes e, também, sabiam realizar suas construções. A dificuldade estava na falta de atenção na leitura e interpretação do enunciado, por ser mais extenso. Para ajudá-los, solicitou que lessem com atenção cada instrução dada. Ao mesmo tempo, foi fazendo perguntas pertinentes aos conceitos presentes no enunciado. Com isso eles conseguiram realizar sem problemas o passo-a-passo da construção. Alguns alunos manifestaram dúvidas quanto ao que deveria ser justificado. Para ajudá-los, foi orientado que pensassem nas duas situações – da última dobra ser concorrente ou ser paralela à dobra inicial – e que observassem qual seria a diferença dos ângulos em cada caso. Analisando as respostas dos alunos, notamos que a maioria compreendeu que a terceira dobra é concorrente com a primeira pois os ângulos opostos pelo vértice formados com a segunda dobra (perpendicular à primeira) são agudos e obtusos, mesmo que muitas respostas tenham apresentado redação imprecisa ou incompleta

Seguem os registros das respostas corretas da turma do 7ºA (28 respostas):

"*Porque o ângulo não é reto (90º). Sendo assim ela tem inclinação e vai ser agudo e obtuso"* (2 respostas análogas);

"Porque as duas últimas não são perpendiculares" (2 respostas análogas);

"Se não fosse inclinada teríamos um ângulo de 90º" (3 respostas análogas);

"É concorrente pois se fosse perpendicular seria um ângulo de 90º, como é concorrente irá formar um ângulo menor que 90º ou maior que 90º" (2 respostas análogas);

"Os ângulos são obtusos e agudos, elas vão se encontrar" (3 respostas análogas);

"*Seria ângulo maior ou menor que 90º*" (2 respostas análogas);

"A primeira e a terceira dobras se encontram pois ela tem ângulos agudos e obtusos, para elas não se encontrarem teria que ser um ângulo reto (90º)" (2 respostas análogas);

"Porque a dobra está inclinada, se a folha fosse maior a dobra acabaria se encontrando com a dobra inicial. Um ângulo é obtuso e o outro é agudo" (3 respostas análogas);

"O ângulo formado é agudo" (2 respostas análogas);

"*Porque a última está inclinada e se encontram"* (3 respostas análogas);

"Por que elas não estão na mesma direção" (2 respostas análogas); e

"*A terceira dobra se cruzará com a primeira por ser inclinada*" (2 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas incorretas da turma do 7ºA (4 respostas):

"Pois elas não se encontram" (2 respostas análogas); e

"Ela é concorrente porque uma hora elas se encontram" (2 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas corretas da turma do 7ºB (30 respostas):

"*Os ângulos formados são agudos e obtusos, assim, as retas seguindo em frente se cruzam. Se as retas fossem perpendiculares formariam ângulos retos, assim, as retas continuando não se cruzariam*" (2 respostas análogas);

"*Se fossem paralelas seriam perpendiculares, como forma um agudo e um obtuso, são concorrentes"* (2 respostas análogas);

"*Os ângulos são agudos e obtusos*" (3 respostas análogas);

"*Essa terceira dobra feita faz um ângulo obtuso e outro agudo"* (3 respostas análogas);

"São concorrentes pois não são retos, há uma inclinação" (2 respostas análogas);

"É concorrente pois a última dobra feita não tem um ângulo reto, a linha é torta, sendo assim, se o papel aumentar, a dobra inicial e última dobra feita irão se cruzar" (2 respostas análogas);

"Porque se elas forem crescendo elas vão se cruzar alguma hora. E porque quando é concorrente os ângulos são agudos e obtusos" (2 respostas análogas);

"As dobras se encontram pois não são ângulos retos" (2 respostas análogas);

"As retas são concorrentes pois o ângulo não é reto" (2 respostas análogas);

"Pois os ângulos formados não são retos, ou seja, se fossem perpendiculares as retas não se encontrariam e como não são retos se encontram" (3 respostas análogas);

"O ângulo formado é agudo e obtuso que fazem as retas se cruzarem" (2 respostas análogas);

"Se o papel fosse maior as linhas iriam continuar e se cruzar pois uma está inclinada e também os ângulos concorrentes são agudos e obtusos" (3 respostas análogas); e

"Ela é concorrente pois caso ocorra de aumentar essa reta, ela em algum momento cruzaria com a inicial, pois não está reta, ela está um pouco inclinada" (2 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas incorretas da turma do 7ºB (2 respostas):

"Porque elas se encontram" (2 respostas análogas).

Observando as construções das dobras perpendiculares realizadas nas atividades 5 e 6, feitas corretamente por todos os alunos, consideramos válida a nossa hipótese H9 – *Com esses procedimentos conjecturamos que os alunos descubram a construção do ângulo reto por dobraduras e da dobra perpendicular a outra dobra passando por um ponto fora desta última.* Analisando os registros feitos à atividade 6, verificamos que 90% dos alunos mencionaram corretamente a relação entre os ângulos formados entre a terceira e a segunda dobra, bem como o fato da terceira e a primeira dobra serem concorrentes ou paralelas. Diante disso, acreditamos ter sido validada também nossa hipótese H10 – *Observando o 5º postulado de Euclides na sua formulação original (duas retas cortadas por uma transversal em um plano são concorrentes se os ângulos interiores e de um mesmo lado da transversal são menores do que dois retos) acreditamos que propor um caso particular desta situação, no qual um dos ângulos é reto (já construído pelos alunos) e o outro agudo, possa favorecer o desenvolvimento nos alunos de uma imagem mental significativa da ideia subjacente ao 5º postulado e possibilitar que formulem justificativas baseadas na observação dos ângulos e que consigam relacioná-las com as características sobre paralelismo por eles levantadas em atividades anteriores. Com isso, espera-se que possam melhor atribuir significado à propriedade: "Dadas duas retas perpendiculares entre si, uma terceira reta que seja perpendicular a uma delas será paralela à outra".* Observamos ainda uma melhora na redação das respostas dos alunos. Mesmo com linguagem eventualmente imprecisa, notamos o uso das nomenclaturas matemáticas estudadas até o momento, assim como o uso de ideias trabalhadas em atividades anteriores. Desta forma, consideramos que os alunos desenvolveram uma assimilação consistente e significativa dos conceitos trabalhados nas atividades, o que foi confirmado em avaliações posteriores que serão analisadas na sequência (p. 159).

A próxima atividade aplicada, a atividade 7 (fase 4 – orientação livre sobre retas paralelas) – *Agora dobre o papel de maneira a obter outra dobra que seja paralela à inicial e que passe pelo ponto marcado. Descreva como você fez e explique por que as dobras obtidas são paralelas* – não despertou muitas dúvidas quanto ao enunciado ou construção solicitada. Alguns alunos pediram à professora que confirmasse se estavam pensando ou realizando corretamente a dobra. Observando as dobras realizadas, percebemos que todos os alunos fizeram a construção da paralela corretamente. Analisando os registros notamos que muitos não descreveram o procedimento feito, apenas justificaram o paralelismo entre as dobras. A seguir organizamos os registros elaborados pelos alunos de acordo com as seguintes ideias por nós observadas: (a) justificativa a partir da ideia da atividade 6: a paralela à dobra inicial forma ângulo reto com a segunda dobra; (b) justificativa a partir das posições relativas entre as dobras; (c) respostas tautológicas, que utilizaram apenas a definição como justificativa; e (d) respostas inconclusivas ou incorretas.

Seguem os registros das respostas da turma do 7ºA:

(a) Justificativa a partir da ideia da atividade 6: a paralela à dobra inicial forma ângulo reto com a segunda dobra (14 respostas):

"Dobrei longe da dobradura em 90º (reto), pois é um ângulo reto de 90º" (3 respostas análogas);

"*Eu dobrei a folha do lado esquerdo e assim deu 90º*" (2 respostas análogas);

"Eu peguei o papel tentei analisar uma linha reta na minha mente com o ângulo de 90º e depois dobrei";

"*Na última dobra formam 2 ângulos retos, e sobre as dobras paralelas, elas não se cruzam*" (2 respostas análogas);

"Formando um ângulo reto, como é paralela e reto, comparando com a de baixo nunca vai encontrar com a de baixo" (2 respostas análogas);

"Dobrando a parte de cima, porque vai ficar 90º";

"Porque são ângulos retos de 90º e eu passei pelo ponto"; e

"As linhas paralelas são linhas que nunca se encontram (ângulo de 90º)" (2 respostas análogas).

(b) Justificativa a partir das posições das dobras (4 respostas):

"Eu fiz a dobra na horizontal, acima da dobra inicial. Se a folha continuasse, elas continuariam indo na horizontal, mantendo a mesma distância entre as duas" (2 respostas análogas); e

"Eu fiz ela na horizontal" (2 respostas análogas).

(c) Justificativa pela definição de paralelas (7 respostas):

"*Porque elas não se encontram*" (3 respostas análogas);

"Pois as linhas não vão se cruzar" (2 respostas análogas); e

"*Eu peguei o papel e imaginei uma linha reta que não cruza com a dobra"* (2 respostas análogas).

(d) Respostas inconclusivas ou incorretas (7 respostas):

"Ela passa pelo ponto" (2 respostas análogas);

"Dobrei de uma forma reta";

"Eu dobrei um lado alinhando o ponto" (2 respostas análogas); e

"Eu dobrei em cima do ponto marcado e ficou um ângulo raso" (2 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas da turma do 7ºB:

(a) Justificativa a partir da ideia da atividade 6: a paralela a dobra inicial forma ângulo reto com a segunda dobra (15 respostas):

“Eu dobrei o papel na mesma direção que a dobra inicial. Eu sei que é paralela porque os dois ângulos são retos” (7 respostas análogas);

“Eu dobrei e fiz uma perpendicular”;

“Fiz uma dobra reta no ponto, que formou ângulos retos, sendo assim, linhas perpendiculares. São paralelas pois não se encontrariam, pois possuem ângulos retos” (2 respostas análogas);

“Dobramos reto e depois comparamos os ângulos. As dobras são paralelas porque o ângulo é reto” (2 respostas análogas);

“As dobras são paralelas porque os ângulos são retos”; e

“Porque o ângulo é reto” (2 respostas análogas).

(b) Justificativa pela posição das dobras (11 respostas):

“*Dobras paralelas são dobras que não se encontram, que é no caso dessa dobra. Eu simplesmente fiz uma dobra horizontal, que passa pelo ponto e não cruza com a dobra inicial, ou seja, uma dobra paralela”* (2 respostas análogas);

“Eu fiz uma linha reta, que não está inclinada, portanto não irá cruzar a dobra inicial, tornando-se retas paralelas”;

“Dobrando uma linha reta na horizontal sendo ambas as linhas retas, elas não vão se encontrar” (2 respostas análogas);

“Fiz uma linha totalmente reta, sem inclinação, e automaticamente ela virou paralela, pois a reta formada, mesmo que ocorra de aumentar, ela não irá se cruzar com a outra reta, pois ela não está inclinada”; e

“As retas estão na mesma direção” (5 respostas análogas).

(c) Justificativa pela definição de paralelas (4 respostas):

“Usando o ponto de referência, fiz uma linha reta. As dobras são paralelas pois contém um espaço entre elas e não se encontram” (2 respostas análogas); e

“Ficou dobrada ao meio, pois elas não se encontram” (2 respostas análogas).

(d) Respostas inconclusivas ou incorretas (2 respostas):

“*Com uma dobra reta, pois ela só iria seguir reto*”; e

“Porque uma está ao lado da outra”.

Observamos que a questão proposta na atividade 7 – *Descreva como você fez e explique por que as dobras obtidas são paralelas* – não teve a sua primeira parte respondida por todos os alunos. Para explicar este fato, conjecturamos duas possibilidades:

1) Como na sistematização realizada após atividade 5 (pp. 126 e 127) ficou explicitado que ao dobrarmos uma dobra sobre si mesma a dobra obtida é perpendicular à primeira, este procedimento estava subentendido, não necessitando ser explicitado.

2) Realizaram a dobra por tentativa e erro, não entendendo o que estava sendo solicitado.

De qualquer forma, acreditamos que a questão merece ser reformulada se quisermos aferir qual das duas possibilidades ocorreu de fato. Para uma possível reaplicação dessas atividades pensamos em uma reformulação da questão da atividade 7 no novo enunciado:

> 7) Agora dobre o papel de maneira a obter outra dobra que seja paralela à inicial e que passe pelo ponto marcado.
>
> a) Explique o procedimento utilizado para obter a dobra paralela à inicial.
>
> b) Justifique por quê as dobras obtidas são paralelas.

Considerando verdadeira a primeira conjectura com relação às respostas dos alunos, a maioria dos alunos (44 de 64) demonstraram ter assimilado as propriedades e construção das retas paralelas por dobraduras. Quanto aos demais (20 alunos), não foi aferido se as respostas inconclusivas decorreram de dificuldades em expressar ideias ou de incompreensão sobre a construção de paralelas por dobraduras. Fica o alerta para uma eventual reaplicação da atividade. De todo modo, este tema foi retomado na sistematização final, onde pudemos observar que a maior dificuldade de grande parte dos alunos tem origem na dificuldade de concentração para a leitura com compreensão de enunciados e de bem expressar por escrito seus pensamentos.

Na atividade 8 (fase 3 – explicação) – *Escreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores e as dúvidas que surgiram* – a maioria dos alunos respondeu que aprendeu: sobre ângulos; sobre retas perpendiculares, paralelas e concorrentes; e a fazer dobras. A maioria relatou não ter dúvidas. Entre os alunos que tiveram dúvidas: três (3) apontaram dúvidas em como realizar as dobras (sem especificar a atividade); dois (2) disseram ter sentido dificuldade em descrever como realizaram as dobras e em responder algumas das atividades; dois (2) responderam ter ficado com dúvidas nas atividades 4 e 6; e dois (2) mencionaram não ter entendido muito bem o que são retas perpendiculares.

Ao final da aplicação, todas as atividades realizadas pelos alunos foram recolhidas. Antes de iniciar o próximo bloco de atividades, a professora leu todos os registros para melhor planejar a sistematização das ideias trabalhadas, a ser realizada na aula posterior.

Na aula posterior, antes de iniciar a aplicação do bloco III de atividades, a professora fez, juntamente com os alunos, uma sistematização dos conceitos trabalhados anteriormente. Inicialmente questionou sobre o que havia sido estudado nas atividades e alguns alunos responderam que estudaram retas, ângulos agudos, obtusos e retos, retas paralelas, concorrentes e perpendiculares, e dobraduras. Diante da pergunta: "O que são ângulos agudos, obtusos e retos?", alguns alunos responderam corretamente ângulos menores, maiores e iguais a 90º. Também foi indagado sobre o que seriam retas paralelas, concorrentes e perpendiculares. Novamente, alguns alunos responderam corretamente sobre as posições relativas a cada tipo de pares de retas. A professora reforçou tais ideias na lousa fazendo algumas ilustrações, já que haviam sido mencionadas dúvidas com relação às retas perpendiculares no final do bloco de atividades anterior. Retomando as atividades 6 e 7 realizadas (atividades inspiradas na ideia expressa originalmente no enunciado do 5º postulado constante no Livro I dos Elementos de Euclides), a professora fez a ilustração de duas retas perpendiculares e perguntou o que foi trabalhado sobre uma terceira reta que corta uma das perpendiculares já feita. Neste momento, todas as ideias por eles registradas foram mencionadas, e a professora completou a ilustração desenhando uma terceira reta paralela a uma das perpendiculares destacando que os ângulos formados com a outra perpendicular são retos. Fez também outra ilustração mostrando o caso de uma terceira reta concorrente, observando que os ângulos formados pelas retas são agudos e obtusos. Conversou também sobre como realizar a dobra solicitada na atividade 7 (construção da paralela) que não ficou bem descrita por eles. Todas as discussões feitas fluíram naturalmente e com boa participação dos alunos. A professora fez um resumo na lousa com as classificações de ângulos e a definição de retas perpendiculares solicitando que os alunos registrassem em seus cadernos.

Bloco III de Atividades

Conteúdos: Retas paralelas e perpendiculares; segmentos congruentes; retângulo, quadrado e suas diagonais; e bissetriz de um ângulo.

A aplicação das atividades de 9 a 14 sobre tais conteúdos ocorreu nos dias 15, 16 e 19 de setembro na turma do 7ºA e nos dias 13 e 14 de setembro na turma do 7ºB, com a participação de 32 alunos por turma, ambas em três aulas com duração de 50 minutos cada. Foi entregue uma folha com as questões e um pedaço de folha de papel vegetal de formato irregular para cada aluno, e foram orientados a realizar primeiramente as atividades 9 e 10.

Para a realização da atividade 9 (fase 1 – informação) – *Desenhe um retângulo e um quadrado utilizando régua e esquadro. Liste as características que são iguais e as que são diferentes entre as duas figuras* – a maioria dos alunos não tinha esquadro, então a professora orientou para que utilizassem apenas a régua. Os alunos que possuíam esquadro não sabiam como utilizá-lo, tendo sido orientados individualmente. Todos os alunos desenharam de forma correta tanto o retângulo como o quadrado, mesmo se alguns com maior capricho do que outros. Muitos anotaram nas figuras as medidas adotadas para seus lados. Assim, consideramos confirmada nossa hipótese H11 – *A construção de retângulos e quadrados com régua e esquadro poderá servir como um diagnóstico para verificar a concepção dos alunos sobre essas figuras. Observe-se que os alunos poderão utilizar a noção de distância, já trabalhada, e suas medidas na régua* –, já que os alunos demonstraram conhecimento prévio sobre as características de quadrados e retângulos ao explicitarem a congruência necessária entre lados nestas figuras. Vale ressaltar que segundo Luiz Carlos Pais (PAIS, 1996) a partir do trabalho com desenhos podemos identificar as representações dos conceitos de acordo com as imagens mentais constituídas pelos alunos (ver p. 18). Sobre as características comuns às figuras, a maioria registrou que as duas figuras têm quatro lados ou são quadriláteros e que as duas figuras possuem todos os ângulos retos ou de 90º. Uma dupla respondeu que os lados são perpendiculares. Como características diferentes, todos citaram que o quadrado possui lados de medidas iguais e o retângulo possui o comprimento diferente da largura. Na turma do 7ºA dois alunos registraram apenas as diferenças e na turma do 7ºB dois alunos registraram apenas as igualdades entre as figuras. As respostas confirmam que os alunos ainda se situam no Nível 2 (análise) do Modelo de Van Hiele, por reconhecerem elementos e propriedades específicas das figuras desenhadas, mas não dominarem a inclusão da classe dos quadrados na classe dos retângulos (ver p. 22). Ressaltamos que esta se constituiu em uma importante e necessária atividade diagnóstica a respeito da concepção prévia dos alunos, que nos permitiu verificar que eles teriam condições de realizar as próximas atividades.

Assim que os alunos finalizaram a atividade 9, a professora orientou que poderiam continuar na atividade 10 (fase 4 – orientação livre) – *Agora, no papel fornecido, faça um retângulo com dobras*. A seguir, foi passando pelas duplas para verificar como os alunos estavam fazendo a construção do retângulo. Percebeu que a maioria construiu o retângulo corretamente, tomando o cuidado de sobrepor os vincos para formar os ângulos retos e deixar os lados de medidas diferentes. Porém, alguns alunos estavam construindo sem tomar o cuidado de deixar os vincos totalmente sobrepostos (o que produz uma figura sem ângulos retos e lados opostos de medidas diferentes) e foram questionados se a figura formada era de fato um retângulo. Com este questionamento, tais alunos perceberam o erro e, assim, receberam um novo pedaço de papel e foram orientados a fazer uma nova construção. Ao final da atividade, todos os grupos realizaram corretamente a dobradura solicitada. Observando os registros do item a – *Quantas dobras você fez para construir o retângulo* – 57 dos 64 alunos responderam corretamente que realizaram 4 (quatro) dobras para construir o retângulo. Dos demais, dois alunos responderam que realizaram uma dobra e 5 (cinco) responderam 3 (três) dobras. Acreditamos que a primeira dupla não compreendeu a pergunta e os demais desconsideraram a primeira dobra. De toda forma, na sistematização esta questão foi retomada com todos os alunos. Ao prosseguirem para o enunciado do item b – *Diga qual elemento geométrico você construiu com cada dobra e explique por quê* – alguns alunos perguntaram o que seria elemento geométrico, ao que a professora respondeu com alguns exemplos, como ângulos e retas. Ao analisar os registros feitos, percebemos que a maioria dos alunos compreendeu a proposta do exercício, mas muitas imprecisões ocorreram nas descrições de cada passo da construção. Notamos também que nenhum aluno fez a explicação do “por quê” a dobra feita constrói cada elemento geométrico descrito. Como os elementos geométricos utilizados foram trabalhados e construídos nas atividades anteriores, com suas devidas explicações, acreditamos que, para os alunos, tais ideias já estavam internalizadas e assim entendiam não ser necessário repetir explicações dadas anteriormente. Assim consideramos corretas (completas ou incompletas) as respostas em que os alunos indicaram os passos de construções que foram trabalhadas em atividade anteriores (construção da perpendicular e construção da paralela utilizando como apoio uma perpendicular a elas). Já, as respostas que indicaram terem feito uma segunda dobra paralela à primeira, sem uma explicação do procedimento utilizado para garantir o paralelismo, foram consideradas imprecisas. Infelizmente não nos demos conta de tais imprecisões antes da sistematização ser realizada com os alunos. Com isso perdemos a oportunidade de aferir com os próprios alunos o que efetivamente foi feito por eles para obter a segunda reta paralela – se foi por uma aproximação visual, se utilizaram régua ou se simplesmente redigiram a resposta na ordem incorreta da construção efetivamente realizada. Poderia ter sido uma discussão importante para perceber e superar eventuais concepções errôneas dos alunos. De qualquer forma a construção de retas paralelas foi retomada e reforçada com os alunos no momento da sistematização.

Segue o registro da única resposta correta e completa da turma do 7ºA (2 respostas):

"*Na 1ª dobra eu fiz uma reta na horizontal. Na 2ª dobra eu fiz outra reta na vertical cruzando com a 1ª dobra, formando um ângulo reto. Na 3ª dobra eu fiz outra reta na horizontal abaixo da 1ª dobra cruzando com a 2ª dobra, formando outro ângulo reto. Na 4ª dobra eu fiz outra reta na vertical cruzando com a 1ª e 3ª dobras, formando mais dois ângulos retos"* (2 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas corretas, mas incompletas da turma do 7ºA (15 respostas), por indicarem a ordem correta dos elementos construídos, mas subentenderam a informação de que as retas dobradas se cruzam:

"*Na primeira dobra se fez uma linha, na segunda foi 90º e uma linha, na terceira foi uma linha e 90º, na quarta foi uma linha e 90º*" (2 respostas análogas);

"*Primeira dobra uma reta. Segunda dobra foi uma reta formando 90º. Terceira dobra foi uma reta formando 90º. A última dobra foi um retângulo formando 90º*" (2 respostas análogas);

"*Construí um retângulo, retas perpendiculares, 4 ângulos de 90º, retas de tamanhos diferentes*" (3 respostas análogas);
"*Em todas as dobraduras para construir o retângulo formamos ângulos retos"* (2 respostas análogas);
"*Na primeira dobra tive uma reta, na segunda um ângulo reto, na terceira outro ângulo reto e na quarta um ângulo reto*" (4 respostas análogas); e
"*A cada dobra fazemos um ângulo reto até formar um retângulo"* (2 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas imprecisas da turma do 7ºA (8 respostas):
"*Nas duas primeiras partes formei duas linhas paralelas, depois dobrei os dois lados formando dois ângulos retos (90º)"* (4 respostas análogas);
"*Na primeira dobra formou uma linha qualquer, na segunda as retas ficaram paralelas, depois duas dobras cruzando as duas primeiras dobras"* (2 respostas análogas); e
"*Primeiro eu fiz uma reta, depois fiz outra reta paralela a ela e depois fiz duas retas concorrentes a elas"* (2 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas incorretas da turma do 7ºA (7 respostas):
"*Retângulo porque dois lados são diferentes dos outros dois"* (2 respostas análogas);
"*Uma dobra reta. Segunda uma dobra formando 90º. Terceira dobra formando um retângulo"* (2 respostas análogas); e
"*Retas*" (3 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas corretas e completas da turma do 7ºB (5 respostas):
"*Construímos ângulos retos fazendo dobras que são retas e perpendiculares. Na primeira dobra formamos uma reta, na segunda uma reta perpendicular a primeira (na lateral), depois fizemos outra reta na lateral e por fim uma reta em baixo que forma ângulos retos"* (3 respostas análogas); e
"*Primeiramente dobrei no meio formando apenas uma reta, em segundo fiz duas dobras na lateral, assim dobrando a folha formando ângulos de 90º, por último dobrei a parte de cima que formou uma reta e juntamente com as outras dobras formou o retângulo"* (2 respostas análogas).

Segue o registro de uma resposta correta, mas incompleta da turma do 7ºB (2 respostas) por descrever apenas três dobras:

“*Na primeira dobra fiz um segmento de reta, na segunda dobra fiz uma reta com 90º que passa pela primeira dobra, a terceira dobra tem 90º e passa pela primeira dobra igual a segunda dobra*” (2 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas corretas, mas incompletas da turma do 7ºB (20 respostas), por indicarem a ordem correta dos elementos construídos, mas subentenderem a informação de que as retas dobradas se cruzam:

“*Na primeira dobra foi feita uma reta, na segunda foi criado um ângulo reto (90º), na terceira também foi feita uma reta perpendicular e na quarta foi a mesma reta que fechou o retângulo”* (2 respostas análogas);

“*4 ângulos de 90º, com isso formamos um retângulo*” (5 respostas análogas);

“*1º dobra: reta; 2º dobra: reta e ângulo reto; 3º dobra: reta e ângulo reto; e 4º dobra: reta e ângulo reto*” (3 respostas análogas);

“*Na primeira dobra fiz uma linha reta, já na segunda dobra formou um ângulo reto, na terceira dobra fez ângulo de 90º e na quarta outro ângulo de 90º”* (2 respostas análogas);

“*A primeira dobra foi um segmento reto, já as outras três são ângulos de 90º”* (2 respostas análogas);

“*Primeiro fiz uma reta, depois dobrei uma reta perpendicular do lado direito e esquerdo e por último dobrei outra”* (2 respostas análogas);

“*Na primeira dobra ficou uma reta, na segunda dobra ficou outra reta, na terceira fiz outro ângulo de 90º e na quarta dobra fez um retângulo*” (2 respostas análogas); e

“*Na primeira eu fiz uma reta, na segunda fiz uma reta perpendicular, na terceira outra reta perpendicular e na quarta formou um retângulo”* (2 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas imprecisas da turma do 7ºB (3 respostas):

“*1º uma reta, 2º reta paralela, 3ª reta perpendicular e 4º reta perpendicular*” (3 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas incorretas da turma do 7ºB (2 respostas):

“4 retas para formar o retângulo” (2 respostas análogas).

Levando em consideração o fato de os alunos terem conseguido fazer corretamente a construção do retângulo por meio de dobraduras, ou seja, fizeram os ângulos retos e as dobras paralelas, podemos dizer que nossa hipótese H12 foi verificada – *Na construção com dobraduras de retângulos poderemos verificar se os* *conceitos e a construção geométrica de retas paralelas e perpendiculares (construção do ângulo reto) já estão dominados*.

Observando os registros do item c – *Finalmente, diga quais elementos geométricos construídos por você garantem que a figura obtida é um retângulo* – 50 dos 64 alunos responderam corretamente, sendo que 37 responderam condições suficientes: "*ângulos retos*" (28 respostas análogas) ou "*retas perpendiculares*" (9 respostas análogas). Treze (13) alunos indicaram condições suficientes e necessárias: *São segmentos de reta, retas perpendiculares e concorrentes"* (4 respostas análogas); e *"Linhas retas e ângulos retos"* (9 respostas análogas). Os demais (14 alunos) indicaram condições que não garantem ser a figura obtida um retângulo: *"Tem quatro lados e tem lados de medidas diferentes"* (7 respostas análogas); *"As retas"* (7 respostas análogas). A partir das respostas dadas, observamos que, em geral, os alunos omitiram, ou subentenderam, o fato da figura construída ter quatro lados. Os únicos sete (7) alunos que mencionaram a existência de quatro lados não afirmaram nada sobre os ângulos, o que não caracteriza um retângulo. Alguns alunos demonstraram não dominar a definição de retângulo, por descreverem também condições necessárias além das suficientes sobre os ângulos serem todos retos. Assim confirmamos, novamente, que os alunos encontravam-se no Nível 2 do Modelo de Van Hiele sobre o pensamento geométrico, tanto por não compreenderem a definição "oficial" de retângulo, como por não relacionarem as suas propriedades entre si e por não considerarem o quadrado como um retângulo.

Diante do exposto no último parágrafo e revendo as respostas dadas aos itens a e b da atividade 10, analisamos que o enunciado do item c extrapolou o nível de raciocínio geométrico dos alunos e, para eles, foi repetitivo relativamente ao que já haviam respondido nos dois itens anteriores. Percebemos assim termos buscado, de forma precipitada, que formulassem itens de uma definição ainda inacessível para o nível da turma. Assim, em uma eventual próxima aplicação desta atividade 10, suprimiremos o item c da mesma deixando a discussão sobre a definição de retângulo para ser abordada pelo professor na sistematização baseada nas construções e registros feitos pelos alunos nos itens a e b.

Levando em consideração a construção do retângulo por dobraduras, podemos dizer que nossa hipótese H12 foi verificada – *Na construção com dobraduras de retângulos poderemos verificar se os conceitos e a construção geométrica de retas* *paralelas e perpendiculares (construção do ângulo reto) já estão dominados*. Retomando o que diz Luiz Carlos Pais (PAIS,1996), pudemos perceber que os alunos fizeram "uma leitura geométrica da representação" (ver p. 18) de ângulos retos obtidos com as dobras construídas.

Na aplicação do projeto piloto e na primeira iteração destacamos a dificuldade dos alunos para realizar a construção dos lados congruentes do quadrado por dobradura. Assim, na segunda iteração simplificamos o enunciado da atividade 11 (descrita abaixo), mantendo o mesmo objetivo de trabalhar a construção de segmentos congruentes, a fim de tentar sanar a mencionada dificuldade, abrindo caminho para a construção do quadrado por dobraduras. O item c da atividade 11 teve por objetivo aproveitar a dobradura feita para introduzir a noção de bissetriz de ângulo, durante a sistematização final dessas atividades.

> 11) Na folha fornecida, com os pontos A, B e C marcados, use dobraduras para construir o triângulo de vértices A, B e C. Recorte o triângulo feito.
>
> a) Utilizando apenas dobradura, verifique se o lado $\overline{AB}$ tem o mesmo comprimento do lado $\overline{AC}$. Explique o procedimento feito para chegar à sua conclusão.
>
> b) Marque um ponto D no lado $\overline{AC}$ de maneira que $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ tenham a mesma medida. Explique o procedimento feito.
>
> c) Observe que a dobra feita no triângulo determina dois ângulos de vértice A no interior da figura. O que você pode afirmar sobre estes dois ângulos? Justifique.

Durante a aplicação da atividade 11 (fase 2 – orientação dirigida), notamos que os alunos não tiveram dificuldade em entender as instruções do enunciado. Observando os registros temos que 81% dos alunos responderam os itens a e b corretamente indicando terem feito a dobradura da bissetriz do ângulo do vértice A, sobrepondo os dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, para comparar suas medidas e para localizar o ponto D.

Seguem alguns registros do item a:

"Não tem o mesmo comprimento, eu coloquei o lado AB em cima do lado AC, o AB é menor que o AC";

"Não, o AC é maior que o AB, pois quando dobra por cima fica um maior que o outro";
"O lado AC é maior, fazendo uma dobra no ponto A o ponto B fica entre o AC e percebemos a diferença";
"*Dobrar a folha levando o lado AB até o lado AC. Quando ficaram lado a lado, pude ver que o AB é menor que AC"*;
"Não têm o mesmo comprimento. Dobrei o lado AB até o lado AC e percebi que o lado AC é maior"; e
"Não tem o mesmo tamanho, dobrando a reta AB por cima da AC sobra".

Seguem alguns registros do item b:

"*Eu coloquei o lado AB em cima no lado AC, e marquei um ponto onde o lado AB termina"*;
"Dobrei o lado AB até encaixar no lado AC, e marquei o ponto D onde ficou o B"; *"Eu aproximei o lado AB ao AC e marquei o ponto D no final de AB"*;
"Com a mesma dobra do exercício a, onde estava o dobra do ponto B eu marquei o ponto D";
"Fiz uma dobra que levou o lado AB ao lado AC e que no final do lado AB é marcado o ponto D"; e
"Dobrando a linha AB sobre a AC e marcando o ponto onde o AB termina".

Na resolução do item c, a maioria dos alunos identificou facilmente os ângulos indicados no enunciado. Apenas alguns alunos ficaram com dúvidas, mas a professora percebeu que isto se deveu ao fato de não terem marcado o vinco no papel da dobra solicitada nos itens anteriores. Neste momento, aproveitou para retomar com estes alunos os itens anteriores e solicitou que verificassem se os haviam resolvido corretamente. Durante esta atividade foi observado que muitos alunos estavam respondendo apenas que os ângulos eram agudos, já que a classificação de ângulos tinha sido um dos assuntos trabalhados em atividades anteriores. Assim, foi solicitado a alguns grupos que pensassem um pouco mais em alguma outra característica destes ângulos. Analisando os registros, identificamos que 62% dos alunos apontaram a característica desejada, mencionando que os ângulos formados são iguais ou de mesma medida. Dos demais, 27% responderam que os ângulos são agudos e 11% deram respostas incorretas.

Antes de continuar na atividade 12, a professora retomou com os alunos, para sistematizar, as ideias e conceitos trabalhados nas atividades de 9 a 11, a partir das observações feitas durante a aplicação e dos registros dos alunos. Iniciou buscando que eles dissessem, com suas próprias palavras, como caracterizar um retângulo e um quadrado. Vários alunos participaram da conversa e em suas respostas listaram as características já mencionadas na atividade 9. A professora foi registrando na lousa as ideias colocadas e, posteriormente, também acrescentou uma característica não mencionada: o paralelismo dos lados opostos. A seguir, tomou uma folha de sulfite e solicitou a eles que a instruíssem sobre os passos para a construção de um retângulo por dobradura. Os alunos prontamente mostraram saber os passos da construção. A partir disso, foi ressaltada a quantidade de dobras utilizadas na construção (item a da atividade 10) e perguntado sobre os elementos geométricos determinados a cada passo da construção (item b), ao que a maioria respondeu ter sido construído um ângulo reto a cada passo. Neste momento, a professora ressalta a falta de precisão na descrição da construção do retângulo em alguns registros, por não ter sido indicada a concorrência entre as retas e a localização dos ângulos retos. Na sequência voltou à questão de como explicar o que é um retângulo, ou seja, como definir um retângulo, pensando nas características que foram trabalhadas. Nenhum aluno formulou a definição exata. Assim, a definição do retângulo foi escrita na lousa e a professora salientou que a característica essencial para uma figura ser um retângulo são: ser quadrilátero com quatro ângulos retos. Apontou também não ser necessário mencionar a relação entre as medidas dos lados. A seguir perguntou se o quadrado era um retângulo. A maioria dos alunos disse que não e alguns ficaram em dúvida. A professora observou então que o quadrado possui a característica que faz parte da definição de matemática de retângulo, concluindo assim que o quadrado também é um retângulo. Na sequência registrou a definição de quadrado – quadrilátero que possui os quatro ângulos retos e lados de mesma medida. Imediatamente perguntou aos alunos se todo retângulo era um quadrado, ao que alguns alunos responderam prontamente que não, pois nem todo retângulo possui os lados da mesma medida. Deste modo concluímos que a atividade foi útil para vários alunos, no sentido de avançarem na direção de uma mudança de nível Van Hiele de pensamento geométrico.

Na retomada da atividade 11, envolvendo a sobreposição dos lados de um triângulo para comparar suas medidas, foi desenhado um triângulo na lousa e perguntado o que haviam feito para comparar o comprimento dos lados. A partir do que disseram e dos gestos feitos por eles para indicar o procedimento, a professora acrescentou ao triângulo a reta representativa da marca da dobra construída. Perguntados sobre o que observaram a respeito dos dois ângulos determinados, muitos responderam que eram agudos e iguais. A professora finalizou indicando que aquele segmento recebia o nome de bissetriz do ângulo inicial por dividi-lo ao meio. Os alunos registraram no caderno a sistematização feita na lousa (este momento corresponde a fase 3 – explicação).

Antes de iniciarem a atividade 12 (fase 4 – orientação livre) – *Utilizando as ideias e construções desenvolvidas nas atividades 10 e 11, faça um quadrado com dobras. Descreva quais elementos geométricos obteve com cada dobra feita para construir o quadrado* – a professora leu, juntamente com os alunos, o enunciado da questão e solicitou que prestassem atenção a esta construção. Reforçou que tal construção não era igual à construção do retângulo, feita anteriormente, e pediu para que lembrassem e utilizassem as ideias trabalhadas nas últimas atividades realizadas, particularmente na última. Ainda assim, foi perceptível a falta de experiencia prévia da maioria dos alunos de como obter lados congruentes por dobraduras e foram estimulados pela professora que reforçou as ideias anteriores. Observando as dobraduras do quadrado realizadas, temos que 39 dos 64 alunos (61%) construíram corretamente, dobrando a bissetriz (ou a diagonal) para deixar os lados com a mesma medida. Os demais, 25 alunos (39%) realizaram a construção dos ângulos retos, mas a dobra do quarto lado não foi feita com precisão, pois utilizaram apenas uma aproximação visual para as medidas dos lados, não garantindo a igualdade dos mesmos por dobradura. Dos alunos que construíram corretamente, percebemos muitas imprecisões nos registros (19 respostas), já que deixaram de descrever completamente as dobras feitas ou de mencionar alguns elementos construídos. Entre os primeiros, percebemos dificuldade em utilizar uma linguagem adequada na descrição do procedimento feito para obter a dobra da bissetriz. Consideramos corretas e completas as respostas que descreveram a bissetriz como ‘diagonal’ – termo do repertório dos alunos, enquanto a palavra ‘bissetriz’ tinha sido introduzida apenas na aula anterior. Convém ainda salientar que na atividade 13 seria trabalhado mais detalhadamente as características das diagonais de quadrados e retângulos, destacando a diferença entre os conceitos de bissetriz e diagonal.

Ressaltamos que na 1ª iteração nenhuma dupla havia conseguido realizar a construção do quadrado corretamente. Assim percebemos terem sido adequadas as mudanças realizadas nos enunciados das atividades 11 e 12 para a 2ª iteração, no sentido de auxiliar a compreensão sobre a construção do quadrado por dobradura. Logo, concluímos ter sido validada nossa hipótese H13 – *Para realizar a construção do quadrado com dobras, os alunos utilizarão ideias semelhantes às da construção do retângulo, mas surge a necessidade da determinação, com o uso de dobras, de segmentos de mesma origem e mesma medida (segmentos congruentes). Assim, torna-se conveniente solicitar que, inicialmente, seja feita a comparação das medidas de dois segmentos (*$\overline{AB}$ *e* $\overline{AC}$*, com* $AB < AC$*) para depois introduzir um ponto D em* $\overline{AC}$ *de modo que* $\overline{AB}$ *seja congruente a* $\overline{AD}$*. Conjecturamos que a manipulação das dobras neste procedimento ficará facilitada se os alunos realizarem as dobras no triângulo ABC já recortado, ao eliminar o excesso de papel inútil para a atividade. Este procedimento, ao sobrepor os lados* $\overline{AB}$ *e* $\overline{AC}$*, possibilita determinar a localização de D no interior do segmento* $\overline{AC}$*, de maneira a que* $\overline{AB} \equiv \overline{AD}$*. Este procedimento pode também oportunizar a introdução do conceito de bissetriz de um ângulo.*

Seguem as respostas das construções corretas, consideradas completas, da turma do 7ºA (8 respostas):

"*Primeiro eu dobrei três lados formando ângulos retos, depois eu fiz outra dobra no meio formando um triângulo, depois eu dobrei e fiz um quadrado"* (3 respostas análogas);

"*Na primeira uma reta, na segunda e na terceira um ângulo de 90º, na quarta uma diagonal e na quinta formou um quadrado*" (2 respostas análogas); e

"*Eu fiz 1 retângulo, um triângulo, que formou um quadrado*" (3 respostas análogas).

Seguem as respostas das construções corretas com registros imprecisos da turma do 7ºA (10 respostas):

"*Primeiro fiz uma dobra obtendo uma reta, depois mais duas retas. Para terminar o quadrado, dobrei ele no meio fazendo uma reta na diagonal, formando um triângulo, para terminar fiz uma reta fechando o quadrado"* (2 respostas análogas);

"*Dobrei a parte de cima e as laterais, dobrei fazendo um triângulo e formou um quadrado"* (3 respostas análogas);

"*Primeiro três retas, depois um triângulo e no final forma um quadrado*" (3 respostas análogas); e

“Novamente aproximamos, dobramos e abrimos e fechamos o quadrado” (2 respostas análogas).

Seguem as respostas dada a construções incorretas da turma do 7ºA (14 respostas):

“*Na primeira dobra fizemos uma reta, na segunda um ângulo reto, na terceira um ângulo reto e na quarta um quadrado”* (5 respostas análogas);

“*Retas*” (3 respostas análogas);

“*Ângulos de 90º e lados iguais”* (4 respostas análogas); e

“*4 lados iguais*” (2 respostas análogas).

Seguem as respostas das construções corretas, consideradas completas, da turma do 7ºB (12 respostas):

“Primeiro fiz 3 dobras que formaram 3 segmentos de reta que são perpendiculares, para o quadrado ficar com os 4 lados iguais eu fiz uma dobra na diagonal e depois fiz a última dobra, deixando o quadrado com os quatro lados de mesmo tamanho” (1 resposta);

“Primeiro dobramos três retas formando ângulos retos entre elas, depois para deixar os lados do mesmo tamanho dobramos na diagonal e depois fechamos o quadrado” (1 resposta);

“*Primeiro dobramos três retas formando ângulos retos entre elas, depois para transferir a medida dobramos na diagonal e depois fechamos o quadrado”* (2 respostas análogas);

“*Nas três dobras fez ângulos retos e para saber a medida da última reta dobrei a dobradura formada em cima da outra e no final formou um quadrado”* (5 respostas análogas);

“Primeiro dobrei e deu um segmento de reta, após isso eu dobrei novamente e deu um ângulo reto (90º), depois eu dobrei e formou outro segmento de reta e eu fiz uma reta na diagonal para ver se os lados estão do mesmo tamanho e por fim fiz uma reta para fechar o quadrado” (1 resposta); e

“*Fiz 3 dobras nas laterais formando retas perpendiculares, depois juntei as pontas e fechei o quadrado, levantei a ponta novamente e formou o quadrado”* (2 respostas análogas).

Seguem as respostas das construções corretas com registros imprecisos da turma do 7ºB (9 respostas):

"*Nas três primeiras dobras formaram retas perpendiculares, na quarta dobra formou um triângulo e na quinta dobra formou um quadrado"* (6 respostas análogas); e
"*Primeiro formei um retângulo, na segunda um triângulo e na terceira obtive um quadrado"* (3 respostas análogas).

Seguem as respostas dada a construções incorretas da turma do 7ºB (11 respostas):
"*Ângulos retos"* (2 respostas análogas);
"*Fiz o mesmo do retângulo e depois dobrei no meio"* (3 respostas análogas);
"*Com algumas dobras fazemos quadrados com tamanhos iguais"* (2 respostas análogas);
"*4 retas iguais (com a mesma medida)"* (2 respostas análogas); e
"4 retas" (2 respostas análogas).

Para a realização da atividade 13 (fase 4 – orientação livre) – *Nesta atividade vamos trabalhar com as diagonais dos retângulos e dos quadrados. No retângulo e no quadrado fornecidos faça as dobras que representam as diagonais destas figuras* – cada dupla recebeu um retângulo e um quadrado, já recortados, em papel sulfite. Antes de os alunos iniciarem a atividade, a professora perguntou se todos sabiam o que eram as diagonais de um retângulo e de um quadrado, ao que se manifestaram dizendo que sabiam. Todas as diagonais dobradas estavam corretas. Alguns alunos sentiram dificuldade na dobradura da diagonal do retângulo, devido ao fato de não haver sobreposição dos triângulos dos quais a diagonal é a hipotenusa, talvez por tentarem o procedimento sem apoiar o retângulo na mesa. A professora auxiliou tais alunos mostrando como fazer a dobra na mão ou sugerindo que apoiassem uma régua na diagonal para dobrar o papel. Observando os registros das respostas do item a – *Liste as características das diagonais do retângulo* – todos apontaram alguma característica correta, sendo que 19 alunos (30%) apontaram as três características principais: são concorrentes, formam ângulos agudos e obtusos e possuem a mesma medida. Vinte três (23) respostas contemplaram duas dessas características (36% dos alunos). Os demais, 22 alunos (34%), indicaram apenas uma das características.

Seguem os registros das respostas completas da turma do 7ºA (3 respostas):
"*Dobrando as laterais formam linhas concorrentes (se encontram), formam ângulo obtuso e agudo e as linhas são do mesmo comprimento"* (3 respostas análogas)

Seguem os registros das respostas, com duas características, da turma do 7ºA (16 respostas):

"As linhas são iguais e se cruzam formando quatro ângulos" (2 respostas análogas);

"*Forma um ângulo agudo e obtuso, as diagonais têm a mesma medida"* (2 respostas análogas); e

"*As retas são concorrentes com ângulos agudos e obtusos"* (12 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas, com apenas uma das características, da turma do 7ºA (13 respostas):

"*As linhas são concorrentes"* (5 respostas análogas);

"Formam ângulos agudos e obtusos" (2 respostas análogas);

"Tem a mesma medida" (4 respostas análogas); e

"*Tem ângulos agudos*" (2 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas completas da turma do 7ºB (16 respostas):

"*Quando as retas de encontram, se transforma em quatro triângulos diferentes, formando assim ângulos obtusos e agudos e as diagonais têm o mesmo tamanho"* (5 respostas análogas);

"*Formam triângulos, elas têm o mesmo tamanho, são concorrentes, formam ângulos agudos e obtusos"* (1 resposta);

"*São retas que se cruzam, formam ângulos obtusos e agudos, e têm a mesma medida*" (7 respostas análogas); e

"*Se forma ângulos agudos e obtusos e que têm diagonais iguais*" (3 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas, com duas características, da turma do 7ºA (7 respostas):

"*São retas concorrentes que formam dois ângulos agudos e outros dois ângulos obtusos"* (7 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas, com apenas uma das características, da turma do 7ºB (9 respostas):

"*As linhas se cruzam e formam 4 ângulos"* (2 respostas análogas);

"São retas que se encontram" (2 respostas análogas);

"Formam dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos" (1 resposta);

"*São ângulos obtusos*" (2 respostas análogas); e

"*Formou 4 triângulos pequenos*" (2 respostas análogas).

Vale observar que, como a maioria dos alunos fez registros incompletos nas respostas a esta questão, consideramos adequado apresentar um enunciado mais claro para alunos desta faixa etária (sétimo ano do EF) em uma possível próxima aplicação desta atividade. Deste modo, o enunciado da atividade 13a, ao invés de "*Liste as características das diagonais do retângulo"*, poderia ser: "*Observe e liste pelo menos três características das diagonais do retângulo".* Esta mesma alteração do enunciado se aplicaria também ao item b.

No item "b" – *Liste as características das diagonais do quadrado* – todos os alunos apontaram alguma característica correta para a diagonal do quadrado, a saber: são concorrentes e formam 4 ângulos retos (ou, equivalentemente, são perpendiculares) e possuem a mesma medida. Vinte e quatro (24) alunos (37%) apontaram as três características principais. Vinte seis (26) respostas contemplaram duas dessas características (41% dos alunos). Os demais, 14 alunos (22%), indicaram apenas uma das características.

Notamos que nenhum aluno observou que as diagonais do quadrado são bissetrizes, mas tal característica foi discutida posteriormente na sistematização. Também notamos que os alunos não apontaram que as diagonais do retângulo e quadrado se cortam em seus pontos médios. Avaliamos que esta característica ficará mais evidenciada no próximo ano quando trabalharem congruência de triângulos e assim consideramos não pertinente esperar que os alunos apontassem tal característica.

Seguem os registros das respostas completas da turma do 7ºA (9 respostas):

"*As diagonais são perpendiculares, que formam ângulos retos e com isso as linhas também têm o mesmo comprimento"* (4 respostas análogas);

"*Formam quatro triângulos de mesmo tamanho e formando ângulo reto*" (2 respostas análogas); e

"*São retas perpendiculares e elas têm o mesmo comprimento*" (3 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas, com duas características, da turma do 7ºA (13 respostas):

"*Formam retas concorrentes e ângulos retos*" (3 respostas análogas);

"*São perpendiculares*" (2 respostas análogas);

"*Elas formam ângulos retos*" (2 respostas análogas); e

"*São retas perpendiculares, 4 ângulos de 90º (ângulos retos)*" (6 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas, com apenas uma das características, da turma do 7ºA (10 respostas)
"*Elas têm a mesma medida*" (5 respostas análogas); e
"*Elas são retas concorrentes*" (5 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas completas da turma do 7ºB (15 respostas):
"*Se transformam em quatro triângulos de mesmo tamanho, formando ângulos retos e as diagonais têm o mesmo comprimento*" (3 respostas análogas);
"*São perpendiculares, formam triângulos, são do mesmo tamanho, têm ângulos retos*" (3 respostas análogas);
"*São retas que se cruzam, tem o mesmo tamanho e formam ângulos retos*" (4 respostas análogas);
"*Elas são iguais (tamanho, comprimento, retas, ângulos)*" (2 respostas análogas); e
"*Medida e ângulos iguais*" (3 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas, com duas características, da turma do 7ºB (13 respostas):
"*São linhas que se cruzam e formam ângulos iguais*" (2 respostas análogas);
"*São retas que se cruzam e tem a mesma medida*" (5 respostas análogas);
"*São retas que se cruzam e são ângulos retos*" (2 respostas análogas); e
"*Formam retas concorrentes que formam quatro ângulos retos*" (4 respostas análogas).

Seguem os registros das respostas, com apenas uma das características, da turma do 7ºB (4 respostas)
"*São retas e tem o mesmo tamanho*" (2 respostas análogas); e
"*São retas que se cruzam*" (2 respostas análogas).

No item c – *Agora compare as duas listas dos itens "a" e "b" e diga quais características são iguais e quais são diferentes com relação às diagonais das duas figuras* – observamos uma diversidade quanto ao tipo de respostas dadas. Sendo assim, decidimos classificá-las da seguinte forma: respostas completas e corretas formuladas com linguagem adequada; respostas corretas e completas formuladas com linguagem imprecisa; respostas que indicam apenas uma característica corretamente com linguagem adequada; respostas que indicam apenas uma característica corretamente com linguagem imprecisa; respostas com erro e/ou imprecisão de linguagem podendo conter alguma característica pertinente mas não tão relevante; e respostas incorretas. Assim, consideramos que 18 alunos (28%) responderam de forma correta e completa, sendo 16 com linguagem adequada e 2 com linguagem imprecisa. Dos demais, 33 alunos (51%) responderam com apenas uma característica correta, sendo 21 com linguagem adequada e 12 com linguagem imprecisa. Ainda tivemos 8 alunos (12%) que cometeram erros e/ou imprecisões e citaram alguma característica correta, mas pouco relevante, e 5 alunos (9%) que deram respostas incorretas.

Acreditamos que as respostas a esta questão ficaram prejudicadas pois muitos alunos não responderam os itens a e b de forma completa. Como observado antes, os alunos não listaram todas as características das diagonais do retângulo e do quadrado, conforme pretendíamos ter solicitado. Percebemos também que muitos alunos demonstraram concepção errônea sobre os conceitos de retas concorrentes e perpendiculares ao não considerarem concorrentes retas que são perpendiculares. Aproveitamos a sistematização para retomar e elucidar que retas perpendiculares constituem um caso particular de retas concorrentes.

Seguem as respostas completas e corretas, formuladas com linguagem matemática adequada da turma do 7ºA (10 respostas).

"*As duas linhas se encontram e as duas têm as linhas de mesmo comprimento. No quadrado forma ângulos retos e no retângulo ângulos obtusos e agudos"* (3 respostas análogas);

"*Igual: têm a mesma medida. Diferente: têm ângulos diferentes"* (3 respostas análogas); e

"As duas linhas se encontram sendo concorrentes e têm ângulos. O quadrado tem ângulo reto e o retângulo, obtuso e agudo" (4 respostas análogas).

Seguem as respostas que indicam apenas uma característica corretamente com linguagem adequada da turma do 7ºA (9 respostas).

"*Igual: tem a mesma medida"* (2 respostas análogas);

"As duas figuras formam um "x" quando estão desdobradas, as duas têm os mesmos comprimentos" (2 respostas análogas);

"O retângulo tem ângulos obtusos e agudos, o outro, ângulos retos" (3 respostas análogas);

"*No retângulo não são perpendiculares*" (1 resposta); e

"*Ambas as figuras têm 4 lados, mas no quadrado as retas são perpendiculares e são ângulos retos. No retângulo são retas concorrentes e ângulos agudos e obtusos*" (1 resposta).

Seguem as respostas que indicam apenas uma característica corretamente com linguagem imprecisa da turma do 7ºA (7 respostas).

"*O retângulo é concorrente e o quadrado é perpendicular"* (2 respostas análogas);

"Os ângulos são diferentes" (3 respostas análogas); e

"Elas são iguais só muda o comprimento" (2 respostas análogas).

Seguem as respostas com erro e/ou imprecisão de linguagem podendo conter alguma característica pertinente, mas não tão relevante, da turma do 7ºA (6 respostas).

"O fato delas serem concorrentes e de ângulos agudos" (2 respostas análogas);

"Tem retas concorrentes, ângulos agudos e obtusos" (2 respostas análogas); e

"Nos dois as retas são concorrentes e os ângulos são diferentes. No retângulo as diagonais são compridas e mais inclinadas que as do quadrado" (2 respostas análogas).

Seguem as respostas completas e corretas, formuladas com linguagem matemática adequada da turma do 7ºB (6 respostas).

"As duas retas são concorrentes e têm a mesma medida. A diferença é que no retângulo tem ângulos obtusos e agudos já o quadrado ângulos retos" (4 respostas análogas); e

"*Semelhanças: as diagonais possuem o mesmo tamanho. Diferença: os ângulos são diferentes"* (2 respostas análogas).

Seguem as respostas completas e corretas, formuladas com linguagem matemática imprecisa da turma do 7ºB (2 respostas).

"Iguais: retas que se encontram, possuem o mesmo tamanho. Diferente: retas concorrentes (retângulos), retas perpendiculares (quadrado), ângulos diferentes, triângulos de tamanhos diferentes" (2 respostas análogas).

Seguem as respostas que indicam apenas uma característica corretamente com linguagem adequada da turma do 7ºB (12 respostas).

"Semelhança: as duas figuras são retas concorrentes. Diferença: no quadrado formam ângulos retos já no retângulo 2 são agudos e 2 são obtusos" (4 respostas análogas);

"As duas são concorrentes e tem a mesma medida" (2 respostas análogas);

"As diagonais de ambos têm o mesmo tamanho" (3 respostas análogas); e
"Todas as características são iguais, exceto que o quadrado forma apenas ângulos retos enquanto o retângulo forma ângulos agudos e obtusos" (3 respostas análogas).

Seguem as respostas que indicam apenas uma característica corretamente com linguagem imprecisa da turma do 7ºB (5 respostas).

"*Diferença: um forma retas concorrentes e outra perpendicular, os ângulos são diferentes. Semelhança: as duas se cruzam e tem quatro espaços que formam triângulos"* (2 respostas análogas);
"Iguais: são retas e se cruzam. Diferente: ângulo agudo, obtuso e reto" (2 respostas análogas); e
"As duas formam um x, as duas são uma linha reta, o quadrado e o retângulo formam ângulos diferentes" (1 resposta).

Seguem as respostas com erro e/ou imprecisão de linguagem podendo conter alguma característica pertinente, mas não tão relevante, da turma do 7ºB (2 respostas).

"Iguais: tem 4 triângulos, tem 2 diagonais. Diferente: o ângulo, o comprimento e largura dos triângulos" (2 respostas análogas).

Seguem as respostas incorretas da turma do 7ºB (5 respostas):
"*Todas as características são iguais*" (2 respostas análogas); e
"O tamanho dos triângulos" (3 respostas análogas).

Analisando as respostas da atividade 13 podemos considerar a nossa hipótese H14 – *A partir do momento que já foi realizada a construção do retângulo (não quadrado) e do quadrado, vale aprofundar o estudo destas figuras solicitando que seja feita a construção de suas diagonais. Com isso, acreditamos ser possível avaliar a aprendizagem dos alunos sobre os seguintes elementos estudados anteriormente: retas concorrentes e perpendiculares; ângulos agudos, obtusos e retos; e bissetriz de um ângulo* – parcialmente validada. Os alunos identificaram corretamente nas diagonais alguns dos elementos estudados anteriormente – retas perpendiculares, ângulos agudos, obtusos e retos. Porém, mostraram não ter se apropriado adequadamente: do conceito de retas concorrentes, por não incluírem as perpendiculares nesta categoria; e do conceito de bissetriz, por não apontarem as diagonais do quadrado como tal.

Diante das observações feitas, acreditamos que pode ser adequado, para uma eventual próxima iteração, alterar o enunciado da atividade 13, a fim de incentivá-los a apontarem mais características das diagonais observáveis nas dobraduras e provocar uma maior reflexão dos alunos sobre os dois conceitos que percebemos que não terem sido bem assimilados por eles. Acreditamos também que a reformulação do enunciado pode proporcionar, no momento da sistematização, uma retomada mais significativa dos elementos geométricos estudados anteriormente. Segue o novo enunciado sugerido:

> 13) Nesta atividade vamos trabalhar com as diagonais dos retângulos e dos quadrados. No retângulo e no quadrado fornecidos faça as dobras que representam as diagonais destas figuras.
> a) Observe e liste pelo menos três características das diagonais do retângulo.
> b) Observe e liste pelo menos três características das diagonais do quadrado.
> c) Reveja as definições de retas concorrentes e de bissetriz de um ângulo. A partir das definições diga se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, e use as dobraduras feitas para justificar suas respostas.
> (   ) As diagonais do retângulo e do quadrado são segmentos concorrentes.
> (   ) As diagonais do retângulo e do quadrado são bissetrizes dos ângulos internos destas figuras.

Na atividade 14 (fase 3 – explicação) – *Descreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores e as dúvidas que surgiram* – de modo geral os alunos responderam que aprenderam: sobre características de quadrados, retângulos e diagonais; a fazer a construção das figuras com dobras; a comparar medidas sem régua; e aprenderam mais sobre ângulos e retas. A maioria dos alunos também disse não ter ficado com dúvidas, porém alguns citaram a dificuldade para realizar a dobradura do quadrado. Seguem algumas das respostas:

"*Eu aprendi a diferenciar ângulos, retas, formas geométricas, e com dobra pode se formar ângulos, formas geométricas e saber quando uma reta é paralela, perpendicular ou concorrente";*

"Eu aprendi a usar o esquadro e a régua corretamente, aprendi a fazer dobraduras, eu aprendi a reconhecer quadrado, retângulo e aprendi um pouco sobre diagonais";

"Eu aprendi sobre diagonais, aprendi um pouco sobre o quadrado e o retângulo, também dei uma revisada em retas e ângulos. Tive algumas dúvidas, mas todas foram respondidas no decorrer da atividade";
"Aprendi que as figuras geométricas podem se transformar em outras através das dobraduras, aprendi sobre diagonais e como medir a distância de dois pontos";
"Aprendi a saber a medida dos ângulos com dobraduras e soube mais sobre as diagonais, aprendi a identificar características das diagonais e aprendi mais sobre ângulos";
"*Aprendi a fazer dobras. E fiquei com dúvida em como dobrar e fazer um quadrado.*"
"*Aprendi mais sobre retângulos e quadrados, entendi sobre retas que se cruzam e sobre ângulos*";
"*Aprendi mais sobre ângulos, aprendi que dá para medir uma forma sem precisar de régua, só nas dobras. Só fiquei com dúvida na parte de diagonais, mas agora que eu sei o que é diagonal ficou mais fácil*";
"*Aprendi sobre as características do quadrado e retângulo, aprofundei em classificação de retas, sobre fazer dobraduras de uma ponta a outra, como saber se um triângulo possui lados iguais com dobraduras, diagonais de um quadrado e de um retângulo. Tive dúvidas em montar um quadrado com dobraduras";* e
"*Aprendi a fazer ângulos com dobra e formas, fazer as diagonais no papel, e as dúvidas foram explicadas*".

Após finalizada a atividade 14, a professora fez, juntamente com os alunos, a sistematização das atividades 12 e 13. Iniciou retomando as características do quadrado para discutir sua construção por dobradura, e perguntou aos alunos por que sua construção não poderia ser igual à construção do retângulo. Alguns alunos responderam corretamente, indicando que a construção do retângulo não deixa os lados exatamente do mesmo tamanho. Utilizando uma folha de sulfite, a professora fez a construção do quadrado, destacando a passagem na qual é feita a dobra que garante a igualdade da medida dos lados. Relembrou que esta dobra também havia sido realizada na atividade 11. Após finalizar a construção do quadrado, perguntou qual era o nome do segmento representado pela marca desta dobra. Os alunos responderam que era uma diagonal. A professora reforçou que, estando pronto o quadrado, aquela marca realmente se tornaria uma diagonal. No entanto destacou que ela havia sido feita para garantir a igualdade dos dois segmentos, que viriam a se tornar dois lados do quadrado assim que ele estivesse pronto. Diante disso perguntou novamente qual seria o nome da dobra, no momento em que ainda não havia um quadrado. Coerentemente com os comentários feitos sobre a atividade 13, nenhum aluno respondeu corretamente ser a dobra a bissetriz do ângulo reto já dobrado. Assim a professora relembrou o conceito visto, anteriormente, na sistematização da atividade 11. Na sequência desenhou um quadrado e um retângulo na lousa e perguntou o que seriam as diagonais destas figuras e obteve algumas das seguintes respostas: "*reta que corta a figura de uma ponta a outra*", "*dois segmentos inclinados*", "*cortam a figura ao meio*", "*ligam uma ponta a outra*" e "*ligam os vértices*". Alguns alunos também fizeram gestos com os braços formando um "x" ou com as mãos indicando um segmento de posição inclinada. A professora indicou a definição correta (segmentos que ligam vértices não consecutivos de um polígono) explicando e registrando na lousa. Continuou perguntando sobre as características das diagonais do retângulo, ao que os alunos responderam com as características já mencionadas em seus registros (são concorrentes, formam ângulos agudos e obtusos e possuem a mesma medida). Perguntou sobre as características das diagonais do quadrado, ao que também responderam com as características mencionadas (são concorrentes e formam 4 ângulos retos ou, equivalentemente, são perpendiculares e possuem a mesma medida). A professora destacou que estava faltando uma característica para as diagonais do quadrado e, em cada uma das duas turmas, um aluno falou bissetriz. Continuando, perguntou quais eram as características iguais e as diferentes. Observando as características listadas na lousa os alunos responderam corretamente (iguais: são concorrentes e possuem a mesma medida; diferentes: os ângulos formados e no quadrado é bissetriz). A professora salientou a importância de registrar de forma completa as questões, pois muitos alunos listaram poucas características nos itens a e b, prejudicando as respostas dadas ao item c. Também retomou com os alunos a definição de retas correntes (retas que se cruzam) indicando que retas perpendiculares são igualmente concorrentes, com a característica particular de determinarem quatro ângulos retos. Terminada a sistematização, os alunos fizeram os registros das ideias no caderno (este momento corresponde a fase 3 – explicação).

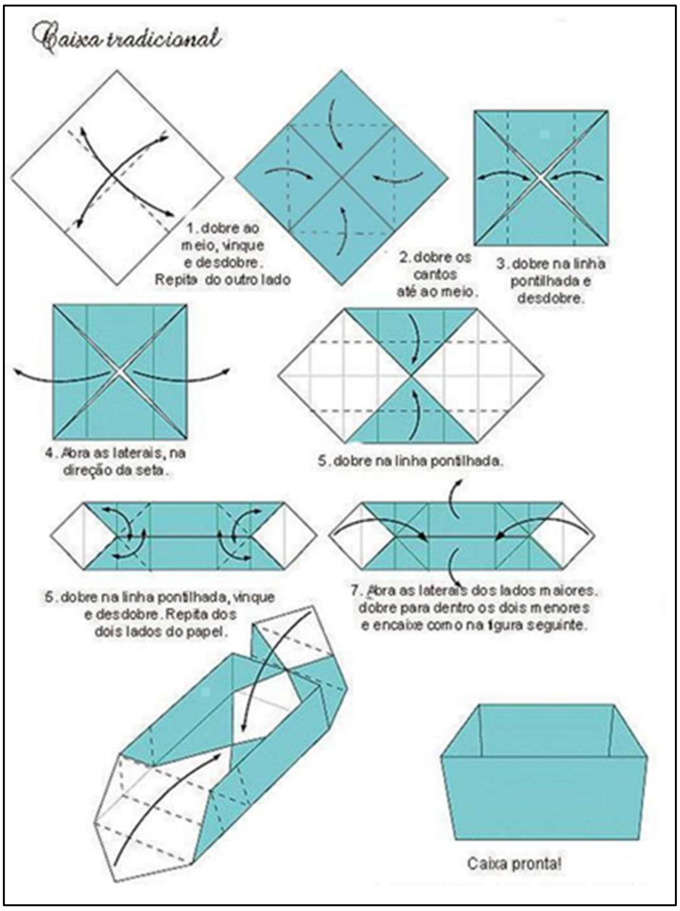
Bloco IV de atividades

Conteúdos: Todos os conteúdos trabalhados anteriormente.

A aplicação da atividade de 15 ocorreu no dia 27 de setembro de 2022 na turma do 7ºA e no dia 20 de setembro na turma do 7ºB, com a participação de 32 alunos por turma, ambas em duas aulas consecutivas, com duração de 50 minutos cada uma.

Para a atividade 15 (fase 5 – integração) – *Vamos construir uma caixa a partir de uma folha quadrada. Em cada passo da construção identifique e descreva quais elementos estudados anteriormente aparecem* – cada aluno recebeu uma folha quadrada colorida específica para Origami. O desenho do passo a passo, como tradicionalmente aparece nos livros de origami, faz parte do enunciado da atividade.

Figura 9: Passo a passo da construção da caixa 4



Fonte: http://anabraga-artesanatos.blogspot.com/2011/07/

Esta atividade tinha por objetivo a retomada de todos os conceitos desenvolvidos anteriormente, a serem identificados e utilizados pelos estudantes em uma atividade tradicional de origami. Muitos alunos apresentaram dificuldade na construção da caixa, seja quanto à interpretação do passo-a-passo ou por falta de habilidade motora para realizar as dobras com precisão. Ainda assim, mostraram grande interesse e entusiasmo durante a atividade, devido ao seu aspecto lúdico, alguns chegando a construir uma segunda caixa como tampa para a primeira. Observando os registros, verificamos que não tivemos respostas incorretas, apenas alguns apresentaram respostas incompletas (22%), por mencionarem apenas um ou dois elementos geométricos na maioria das passagens da dobradura. Diante dos registros dos alunos percebeu-se que, ao longo dos passos da construção, os seguintes elementos foram identificados: segmentos de reta; retas paralelas, concorrentes e perpendiculares; ângulos agudos, obtusos e retos; quadrados, retângulos e suas diagonais; triângulos; trapézios; e hexágonos. No apêndice (pp. 179-203) colocamos alguns exemplos de respostas dadas pelos alunos, que consideramos constituir-se em uma amostra significativa do todo.

Ao final da sequência das 15 atividades propostas a professora promoveu uma discussão com os alunos sobre as atividades realizadas. Iniciou questionando suas impressões a respeito da sequência trabalhada. Assim como na primeira iteração, que ocorreu em 2021, novamente muitos alunos consideraram que as construções com dobradura foram diferentes ou inesperadas para aulas de Matemática. Outros responderam que “foi legal” trabalhar com dobradura pois tornou mais fácil entender algumas ideias. Porém, alguns destacaram que certas atividades foram de difícil compreensão e que tiveram dificuldades para escrever várias das explicações solicitadas. Finalmente, a professora projetou a imagem do passo-a-passo da construção da caixa e promoveu um momento de socialização sobre as ideias trazidas por eles nos registros a respeito dos elementos geométricos que foram observados a cada passo da construção. Os alunos participaram ativamente, expondo suas ideias com entusiasmo e pertinência.

Retomando nossa hipótese 15 – *Uma sistematização final deverá representar uma tomada de consciência por parte dos alunos sobre os conceitos trabalhados e uma oportunidade para a professora de avaliar a evolução das concepções dos estudantes sobre os conceitos trabalhados* – destacamos que as sistematizações ocorreram ao final de cada bloco de atividades, mas também entre algumas das questões, sempre que foi sentida a importância de sistematizar algum conceito necessário para o prosseguimento das demais atividades do bloco. Em geral, as sistematizações ao final de um bloco foram instrumentos para verificar o entendimento dos alunos com relação aos procedimentos e conceitos, sanar dúvidas ou imprecisões, reforçar as ideias dos conceitos e explicitar suas definições.

Analisando todos os resultados encontrados e observando a evolução dos alunos nas atividades propostas, acreditamos que houve boa assimilação dos conteúdos trabalhados e que a grande maioria dos alunos se encontram no nível 2 – Análise, considerando os níveis de raciocínio geométrico do modelo de Van Hiele. Vale ressaltar que tais atividades foram elaboradas de acordo com as fases de aprendizagem de Van Hiele e utilizando-se de dobraduras como material concreto a fim de favorecer o desenvolvimento de imagens mentais adequadas sobre os elementos geométricos trabalhados, visando uma real aprendizagem dos conteúdos estudados. Com a finalidade de obter evidências sobre a efetiva aprendizagem dos alunos, após o desenvolvimento da sequência de atividades, foi realizada uma avaliação individual escrita. Nesta avaliação dois terços das questões corresponderam aos assuntos trabalhados nas atividades com dobraduras, sendo que as demais questões envolveram outros assuntos sobre ângulos, pertinentes ao material didático da escola. São eles: medidas de ângulos e utilização do transferidor; ângulos complementares, suplementares e replementares; ângulos consecutivos e opostos pelo vértice. Observando os resultados da avaliação, e considerando a média avaliativa da escola que é de sete pontos (7,0) sobre dez, tivemos somente sete (7) alunos (11%) com notas abaixo desta média, sendo apenas duas (2) notas inferiores a cinco pontos. Consideramos que esta avaliação corroborou a validade da abordagem desenvolvida com uso de dobraduras para favorecer uma aprendizagem significativa de alunos de 7º ano sobre os temas geométricos escolhidos.

CAPÍTULO 6: Considerações Finais

Com o objetivo de verificar a eficácia do uso de dobraduras para o ensino/aprendizagem de conceitos iniciais de Geometria Plana, assim como o interesse e motivação que elas podem despertar nos estudantes em aulas de matemática, trazemos aqui algumas reflexões e considerações sobre o trabalho desenvolvido nesta dissertação.

Como indicado anteriormente, para a realização desta pesquisa nos baseamos na metodologia do *Design Experiment.* Podemos constatar que suas principais caraterísticas (descritas na página 27) estiveram presentes no desenvolvimento da pesquisa de campo feita. De fato, nosso trabalho foi:

1. intervencionista – pois aplicamos sequências didáticas em sala de aula, sem nos restringirmos a uma mera observação;
2. gerador de teorias – ao elaborarmos hipóteses sobre a potencial eficácia do uso de dobraduras como material instrucional manipulável no favorecimento do processo de ensino/aprendizagem de conceitos iniciais básicos da geometria plana;
3. prospectivo e reflexivo – nossas hipóteses foram sendo modificadas ao longo do desenvolvimento da pesquisa com base na reflexão sobre os resultados obtidos na prática de sala de aula a cada iteração, na busca de propiciar a construção, pelos alunos, de imagens mentais mais adequadas sobre os conceitos trabalhados, que possam favorecer a atribuição de significados na continuidade dos estudos da geometria nos anos finais do Ensino Fundamental;
4. iterativo – os ciclos de iteração realizados sistematicamente envolveram conjecturas, testes e revisão por análise crítica;
5. formulador de teorias humildes a partir de raízes pragmáticas – em nosso experimento enfrentamos a complexidade da sala de aula como campo de pesquisa para formularmos hipóteses sobre temas específicos da geometria pertinentes à fase inicial dos anos finais do Ensino Fundamental, buscando melhorias em seus resultados de ensino/aprendizagem.

No que diz respeito ao embasamento teórico-pedagógico aqui adotados, aprofundamos estudos sobre a importância do uso de materiais manipuláveis em sala de aula no ensino de geometria e sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Pensando na utilização de materiais manipuláveis como recursos didáticos em sala de aula, consideramos que o uso de dobraduras pode ser adequado ao estudo de muitos conceitos e ideias geométricas. Como já apontado, em nossas hipóteses evidenciamos a especial pertinência das dobraduras como modelos concretos dos conceitos abordados. Considerando ser dobradura um material didático de fácil acesso (para professor e aluno) e seguindo as ideias de Passos (ver p. 17), destacamos que o uso de dobraduras em atividades didáticas:

- permite a manipulação individual pelos alunos;
- desperta o interesse e a participação dos alunos nas atividades;
- proporciona uma base favorável a formação de imagens mentais adequadas dos conceitos geométricos selecionados; e
- pode ser praticado em diferentes anos de escolaridade.

De fato, durante a aplicação das atividades, percebemos que a maioria dos alunos demonstrou grande interesse nas aulas, participando ativamente da realização dos exercícios e discussões ao longo do desenvolvimento de todas as atividades propostas. Ressaltamos ainda a importância da utilização das dobraduras em atividades escolares, já que estas ajudam no desenvolvimento de habilidades como: concentração, psicomotricidade fina, criatividade, memória e raciocínio lógico.

Sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico utilizamos as ideias de Luiz Carlos Pais, especialmente referentes aos quatro elementos por ele apontados que interferem no processo de ensino/aprendizagem de geometria: *objeto, desenho, imagem mental e conceito* (ver pp. 18-20). Em nossa questão de investigação, tínhamos por objetivo desenvolver imagens mentais adequadas aos conceitos escolhidos por meio do trabalho com dobraduras (objetos) e desenhos. Ao longo das aplicações e de suas análises, pudemos perceber evidências de que esses dois elementos favoreceram o desenvolvimento de imagens mentais adequadas aos conceitos na maioria dos alunos. Tais evidências ficaram claras nos momentos de sistematizações quando os alunos expressavam suas ideias oralmente ou por meio de gestos corporais e, também, pela observação das dobraduras e dos registros por eles realizados. Após a análise da nossa última aplicação, acreditamos que os alunos desenvolveram imagens mentais adequadas dos conceitos: retas; retas paralelas, concorrentes e perpendiculares; ângulos agudo, reto e obtuso; retângulo e quadrado, e de suas diagonais.

Além disso, nos apoiamos também nas classificações feitas pelo casal Van Hiele relativamente aos níveis de complexidade do raciocínio geométrico. Em função dos conceitos e do nível de escolaridade enfocados neste trabalho, as atividades foram concebidas para o nível 2 – análise (ver p. 22). Já, para o planejamento e desenvolvimento de nossas sequências didáticas, levamos em consideração as fases de aprendizagem do Modelo de Van Hiele, visando a promoção do desenvolvimento da capacidade de raciocínio geométrico dos alunos (ver pp. 24-25). A utilização das fases de aprendizagem foi evidenciada ao longo da descrição e análise das aplicações realizadas.

Cabe ainda destacar a importância da ação da professora durante a aplicação das atividades, na busca de uma gestão adequada ao bom andamento do trabalho dos grupos. Neste sentido, procurou sempre: favorecer a participação dos alunos; escutar com atenção suas ideias e dúvidas; percorrer os grupos oferecendo auxílio quando necessário; e fazer questionamentos, ao invés de dar respostas prontas, como incentivo ao raciocínio autônomo dos alunos. Tais ações foram sendo repensadas a cada iteração com base nas análises feitas e na experiência adquirida, e tornaram-se essenciais para a aprendizagem significativa dos alunos e o êxito da última aplicação realizada. Tudo isso foi feito a partir das análises elaboradas com vistas a melhor adequar as hipóteses e atividades para a iteração seguinte e, também, com base na experiência profissional das pesquisadoras. Não foi objetivo deste trabalho estudar bases teóricas mais aprofundadas sobre como a ação do professor interfere nos processos de ensino/aprendizagem. Esta é uma questão que fica, portanto, em aberto e que pode merecer maior aprofundamento em eventual pesquisa futura.

Nesta pesquisa realizamos três iterações das atividades elaboradas, sendo o projeto piloto considerado a primeira delas. Na aplicação do projeto piloto a pesquisadora/professora ministrava aulas em uma escola particular para um número reduzido de alunos. Esta aplicação ocorreu em 2019, em uma turma de 15 alunos do 6º ano, tendo sido uma aplicação tranquila, com participação ativa dos alunos e de fácil verificação pela professora de tudo que estava ocorrendo em aula, devido ao baixo número de alunos. Com esta aplicação conseguimos ter uma boa percepção sobre o potencial do uso de dobraduras nas atividades elaboradas relativamente aos conceitos trabalhados. Assim, repensamos e reformulamos nossas hipóteses e atividades visando adequá-las ao melhor entendimento e aprendizagem.

As iterações de nossa pesquisa foram realizadas em duas turmas de 7º ano, em uma escola privada de Santo André, das quais a pesquisadora era regente de classe. A primeira iteração ocorreu no ano de 2021, após parte dos alunos retornar às aulas de forma presencial, enquanto os demais ainda acompanhavam as aulas de forma remota, devido à pandemia de COVID-19. Por este motivo, e devido à readaptação dos alunos à rotina escolar, tal aplicação se mostrou difícil pois, ao retornar à escola eles mostraram-se pouco motivados com o estudo e com pouca autonomia para realizar atividades, discutir resoluções e descrever estratégias nelas utilizadas. Além disso, apresentaram dificuldades de aprendizagem acentuadas em conteúdos básicos de matemática e, também, na leitura de enunciados, interpretação e na redação. Notamos que os resultados obtidos pelos alunos em uma posterior avaliação escrita não atingiram o desempenho esperado. Ainda assim, os alunos que acompanharam as atividades de forma presencial obtiveram melhores resultados de aprendizagem. De fato, dos alunos que estavam presentes, 73% obteve notas de avaliação formal superior ou igual a cinco (5,0) enquanto, 45% dos que estavam online, obteve tais notas. É de observar que 39% do total de alunos obteve notas superiores ou igual a sete (7,0). Mesmo assim, nos foi possível analisar e rever nossas hipóteses e atividades, reformulando-as e adequando-as para a segunda iteração.

A segunda iteração ocorreu no ano de 2022, com 32 alunos em cada turma do 7º ano. Nesta iteração percebemos maior engajamento e participação ativa dos alunos nas atividades propostas. Nas turmas ainda foram perceptíveis resquícios deixados pelo longo momento de aulas online durante a pandemia. Pudemos observar nos alunos uma certa “defasagem” em relação ao esperado, demostrando dificuldades acentuadas também com relação a leitura, interpretação e escrita. Por outro lado, as hipóteses e atividades reelaboradas mostraram-se mais adequadas aos objetivos pretendidos, pois poucas alterações foram necessárias para a formulação do nosso produto final. Outro ponto relevante foi constatar que a leitura dos registros das respostas dos alunos, prévia aos momentos de sistematização, proporcionou à professora melhor aferir a compreensão dos alunos sobre os conceitos trabalhados. Isso possibilitou um planejamento e direcionamento mais significativo para as discussões sistematizadoras. Vale ressaltar que a maioria dos alunos obteve bons resultados em uma posterior avaliação escrita, fazendo-nos crer que as atividades elaboradas e as estratégias de aplicação utilizadas tiveram uma boa eficácia quanto ao favorecimento de uma aprendizagem significativa dos alunos. De fato, 89% dos estudantes obtiveram notas superior ou igual a sete (7,0 sobre 10,0) em posteriores avaliações sobre os temas desenvolvidos, sendo 8% notas entre cinco (5,0) e sete (7,0). Após a segunda iteração, aperfeiçoamos as hipóteses e replanejamos as atividades, na forma de uma proposta de sequência didática aprimorada. O conjunto destas hipóteses e atividades reformuladas consubstancia a “teria humilde”, obtida pela aplicação do *Design Experiment*, deixada aqui como produto final desta pesquisa. Para torná-lo mais independente da leitura global da dissertação colocamos este produto no apêndice 1 (ver pp. 169-178), de modo a facilitar eventuais consultas. Esperamos que nosso trabalho possa ser utilizado e/ou criticado por professores interessados em testá-lo e, também, servir de estímulo para desenvolverem seus próprios projetos didáticos voltados à aprendizagem de geometria com o uso de dobraduras.

Do exposto acima sobre as duas iterações, vale destacar a diferença significativa entre os índices de aprovação na avaliação final aplicada aos alunos que realizaram as atividades presencialmente em 2021 e 2022: 73% e 97%, respectivamente. Esta análise quantitativa corroborou o maior sucesso da última iteração aplicada. Porém, este não foi o único aspecto levado em consideração na nossa análise sobre os resultados obtidos. Fizemos uma análise detalhada dos registros das respostas dos alunos em todas as atividades, tendo sido elas por nós classificadas em categoriais de acertos ou erros como: respostas corretas e completas; respostas corretas, mas incompletas ou com imprecisão de linguagem; respostas incorretas; e outras (na dependência das questões analisadas). Esta foi a metodologia de análise que desenvolvemos para aprimorar nossas hipóteses e atividades de acordo com a metodologia de pesquisa do *Design Experiment*. No entanto, não fez parte dos objetivos deste trabalho buscar bases teóricas apropriadas a uma análise mais aprofundada das respostas incorretas ou incompreensões manifestadas nos registros dos alunos. Este tipo de estudo pode enriquecer ainda mais a compreensão sobre as origens das concepções errôneas que alguns alunos expressam. Assim, deixamos aqui apontado mais uma outra questão em aberto, relevante, decorrente do nosso trabalho que pode merecer uma pesquisa no sentido de melhor avaliar as imagens mentais desenvolvidas por cada aluno neste tipo de atividade.

Quanto à minha questão de investigação inicial, fico bem satisfeita com os resultados obtidos a partir das atividades elaboradas com o uso de dobraduras no que diz respeito a motivação, participação e aprendizagem dos alunos sobre os conceitos básicos de geometria plana trabalhados. Posso dizer também que desenvolvi um grande aprendizado com os estudos realizados e com a metodologia de planejamento didático que seguimos neste trabalho, contribuindo muito para o aprimoramento e a reflexão sobre a minha própria prática docente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica.** Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013.

BRASIL. Secretaria da Educação. Coordenadoria Pedagógica. **Currículo Paulista**. São Paulo: COPED/SEDUC/UNDIME, 2019.

Caixa em Origami. Disponível em: <http://anabraga-artesanatos.blogspot.com/2011/07/>. Acesso em: 28/08/2019

CROWLEY, Mary. L., **O modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico, Aprendendo e Ensinando Geometria**, São Paulo: Atual, pp. 1-20, 1994.

BONINI, Adair; DRUCK, Iole de Freitas; BARRA, Eduardo Salles de Oliveira (organizadores). **Direitos à aprendizagem e ao desenvolvimento na educação básica:** subsídios ao currículo nacional. Pré-print 2018. Disponível em: https://hdl.handle.net/1884/55911.

GRAVEMEIJER K., PREDIGER S. **Topic-Specific Design Research: An Introduction.** In: Kaiser G., Presmeg N. (eds) Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. ICME-13 Monographs. Springer, Cham, pp.33-57, 2019.

LORENZATO, Sérgio. **Por que não ensinar Geometria?** A Educação Matemática em Revista, Ano III, n. 4, 1º semestre, Blumenau: SBEM, 1995.

MOISE, E.E. Elementary Geometry from an Advanced standpoint, 2ndEd., Addison-Wesley, 1971.

NACARATO, Adair M.; PASSOS, Cármen Lucia B. **A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores.** 1. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2003.

NACATARO, Adair M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática.** São Paulo: SBEM, Ano 9, Nos. 9-10, pp. 1-6, 2005.

PAIS, Luiz Carlos. Intituição, Experiência e Teoria Geométrica. **Zetetiké.** Campinas: CEMPEM/FE/UNICAMP, v.4, n. 6, julho/dezembro, pp. 65-74, 1996.

PASSOS, Cármen L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: Lorenzato (Org.), **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** Campinas, SP: Autores Associados, pp.77-92, 2012.

PASTOR, Adela. J. **Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele**: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. 1993. Teses de doutorado – Universidade de Valencia, Valencia, 1993.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

TOMMASI, Sonia. B.; MINUZZO, Luiza. **Origami em Educação e Arteterapia.** 1. ed. São Paulo: Paulinas, 2010.

EUCLIDES. **Os elementos/Euclides**; tradução e introdução de Irineu Bicudo. – São Paulo: Editora UNESP, 2009. 600p.

Apêndice 1 – Produto Final

Neste apêndice apresentamos o produto final deste trabalho, na forma de uma sequência de atividades didáticas com o uso de dobraduras. As atividades são voltadas à retomada e sistematização de conteúdos básicos da geometria plana no 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental. Elas abordam os seguintes conceitos e algumas de suas propriedades: reta e segmento de reta; retas concorrentes, paralelas e perpendiculares; ângulos reto, agudo e obtuso; segmentos congruentes; retângulo, quadrado e suas diagonais; e bissetriz de um ângulo. Para nossa pesquisa aplicamos, em três anos sucessivos, sequências didáticas sobre os mesmos temas em classes da autora. Para cada aplicação, formulou-se hipóteses sobre a adequação do uso de dobraduras, como material concreto de apoio, aos objetivos de ensino pretendidos e à aprendizagem significativa dos temas elencados. Tais hipóteses serviram de base para a elaboração dos enunciados das questões, bem como para a posterior análise dos resultados de aprendizagem obtidos. Ao final de cada aplicação, reformulou-se tanto as hipóteses como os enunciados das questões, a partir da análise crítica dos resultados nela obtidos. Este produto contém a versão final da sequência didática, tal como foi aprimorada ao longo dos três ciclos iterativos de formulações, aplicações, análises e reformulações.

Organizamos a sequência didática em quatro blocos de atividades, de acordo com os conteúdos selecionados. Cada bloco contém os enunciados das hipóteses concebidas e das atividades desenvolvidas. Destacamos a necessidade e a importância de nossas hipóteses para um planejamento adequado da aplicação das atividades em sala de aula, já que elas expõem a pertinência do uso de dobraduras para o trabalho com o conteúdo selecionado, assim como apresentam os objetivos de aprendizagem esperados utilizando as atividades propostas. Estando clara as intenções de cada atividade, verificamos que as hipóteses também auxiliam para uma melhor avaliação dos resultados de aprendizagem dos estudantes após a aplicação.

A primeira aplicação consistiu em um projeto piloto aplicada em uma turma de 6º ano no segundo semestre de 2019. Seu objetivo principal foi realizar um primeiro teste do qual resultaram várias modificações tanto das hipóteses como das questões. Desse modo não fizemos nenhuma avaliação formal de aprendizagem por meio de provas. Em 2020 a pesquisa foi suspensa devido à pandemia e à mudança de escola da autora. A segunda aplicação foi realizada em 2021 com duas turmas de 7º ano, de forma híbrida, sendo que 52% dos alunos estiveram presencialmente e os demais a distância. Finalmente, a terceira aplicação realizou-se em 2022 na mesma escola, também com duas turmas de 7º ano e de forma presencial.

Destacamos que a análise sobre a motivação e o aprendizado alcançado pelos alunos na nossa terceira aplicação nos deixou bastante satisfeitas. Durante as aplicações todos os alunos realizaram as atividades propostas e participaram ativamente das sistematizações expondo suas ideias e entendimentos com relação aos conceitos trabalhados. Ainda, comparado com as turmas das aplicações anteriores, notamos melhor compreensão dos enunciados das atividades propostas, assim como melhor apreensão dos conceitos desenvolvidos. De fato, em 2021, dos alunos que estavam presentes, 73% obteve notas de avaliação formal superior ou igual a cinco (5,0) enquanto, 45% dos que estavam online, obteve tais notas. É de observar que 39% do total de alunos obteve notas superiores ou igual a sete (7,0). Já, os resultados do aproveitamento dos alunos em 2022 foram expressivamente superiores a esses. Neste ano o percentual de aprovação dos estudantes participantes do projeto foi o seguinte: 89% obteve notas superior ou igual a sete (7,0) sobre dez em posteriores avaliações sobre os temas desenvolvidos, sendo 8% notas entre cinco (5,0) e sete (7,0).

Esperamos que nosso trabalho possa ser utilizado e/ou criticado por professores eventualmente interessados em testá-lo e, também, servir de estímulo para desenvolverem seus próprios projetos didáticos voltados à aprendizagem de geometria com o uso de dobraduras.

BLOCO I DE ATIVIDADES

Conteúdos: Reta e segmento de reta; retas concorrentes e paralelas.

Hipóteses sobre a adequação de dobraduras como material de apoio

H1 Partindo do fato de que toda a dobra é um modelo concreto de "reta" especialmente "preciso", usar a manipulação de dobraduras pode favorecer a criação de imagem mental adequada desta noção primitiva da geometria. (Observemos que as próprias réguas podem apresentar ondulações, microscópicas ou não.)

H2 No entanto, necessariamente, uma dobra é um modelo de "segmento de reta". Conjecturamos que um questionamento sobre serem, ou não, duas dobras feitas em uma mesma folha de papel um bom modelo de retas concorrentes pode provocar uma discussão significativa sobre a diferença entre "segmento de reta" e "reta". Isso porque algumas dobras se cruzam efetivamente na folha e outras não, mas podem encontrar-se nos prolongamentos imaginados de ambas, não sendo, portanto, paralelas.

H3 Da percepção sobre a necessidade de prolongar segmentos (dobras) para decidir se aquelas "retas" se encontram fora do papel, esperamos que, naturalmente, possa surgir um questionamento sobre "até onde podem ser prolongadas?", levando à compreensão de que retas são ilimitadas e segmentos são limitados.

H4 Este tipo de discussão poderá favorecer a atribuição de significado à definição de retas paralelas: duas dobras que não se cruzam nas suas extensões totais (mesmo fora do papel).

H5 Surge então a questão: Como saberemos que duas dobras feitas no papel são retas efetivamente paralelas? Com ela abre-se espaço para conjecturas dos alunos (respostas dos alunos conjecturadas por nós a *priori: porque têm a mesma direção; porque mantêm sempre a "mesma distância" entre elas; porque podem ser sobrepostas por meio de uma dobradura – o que poderá oportunizar uma questão do professor sobre qual seja um procedimento que possibilite a realização concreta de tal sobreposição)* a serem trabalhadas no próximo bloco de atividades.

Sequência de Atividades do Bloco I

1) Dobre e desdobre a folha de papel vegetal. Observando a marca deixada no papel, responda:

a) Qual o nome do elemento geométrico representado pela marca da dobra?

b) Dobras diferentes feitas em um mesmo papel podem ter comprimentos diferentes. Usando régua, responda qual é a medida do comprimento do elemento geométrico identificado por você no item “a”?

2) Com o papel aberto marque (com um lápis ou caneta) um ponto fora da dobra feita e faça outra dobra passando por este ponto que não passe pela primeira dobra no seu pedaço de papel.

a) Se o papel fosse maior estas dobras continuariam a não se cortar? Foi necessário imaginar uma folha muito maior para chegar na sua resposta? Explique como pensou.

Vamos combinar?
Reta: é uma linha imaginária, infinita e sem “curvas”.
Segmento de reta: é um único pedaço contínuo de reta de comprimento finito.
Duas retas no mesmo plano são **paralelas** se não se encontram e são **concorrentes** quando se encontram.

b) Vimos que duas retas são paralelas se não se encontram em algum ponto. Descreva outras características de duas dobras feitas como no item 2 que possam garantir que elas sejam paralelas. Justifique sua resposta.

c) A partir do que foi observado no 2 b), verifique se as dobras feitas por você são paralelas ou concorrentes. Justifique.

3) Com suas palavras diga o que você aprendeu e as dúvidas que ficaram a partir das atividades 1 e 2.

BLOCO II DE ATIVIDADES

Conteúdos: Perpendicularismo entre retas; ângulo reto, agudo e obtuso.

Hipóteses sobre a adequação de dobraduras como material de apoio

H6 Para provocar uma discussão sobre distância de ponto a reta com dobraduras, imaginamos que, ao marcar um ponto fora de uma dobra anteriormente feita, por meio de outras dobras que passam por esse ponto e cortam a dobra inicial – determinando segmentos do ponto à dobra – os alunos possam comparar os comprimentos dos segmentos determinados por sobreposição dos mesmos, identificando qual é o maior.

H7 Conjecturamos que investigar a ideia de distância de um ponto a uma dobra pode ajudar os alunos a "descobrirem" que algumas dobras formam com ela dois ângulos diferentes (um agudo e outro obtuso) e uma única dobra forma ângulos iguais (o ângulo reto).

H8 Assim eles poderão observar as características da dobra sobre a qual está o segmento de menor distância, e verificarão sua unicidade, pois por meio dela duas partes da dobra inicial ficam sobrepostas sobre si mesmas, determinando assim 4 ângulos congruentes, enquanto as demais determinam quatro ângulos, dois a dois suplementares.

H9 Com esses procedimentos conjecturamos que os alunos descubram a construção do ângulo reto por dobraduras e da dobra perpendicular a outra dobra passando por um ponto fora desta última. Esse pode ser um passo importante para que, na sistematização, se possa trabalhar significativamente a definição de ângulo reto como sendo aquele "formado por duas retas concorrentes na única situação em que determinam quatro ângulos congruentes".

H10 Observando o 5º postulado de Euclides na sua formulação original (duas retas cortadas por uma transversal em um plano são concorrentes se os ângulos interiores e de um mesmo lado da transversal são menores do que dois retos) acreditamos que propor um caso particular desta situação, no qual um dos ângulos é reto (já construído pelos alunos) e o outro agudo, possa favorecer o desenvolvimento nos alunos de uma imagem mental significativa da ideia subjacente ao 5º postulado e possibilitar que formulem justificativas baseadas na observação dos ângulos e que consigam relacioná-las com as características sobre paralelismo por eles levantadas em atividades anteriores. Com isso, espera-se que possam melhor atribuir significado à propriedade: “Dadas duas retas perpendiculares entre si, uma terceira reta que seja perpendicular a uma delas será paralela à outra”.

Sequência de Atividades do Bloco II

4) No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra e mantenha o papel dobrado. Marque um ponto no papel, longe da dobra feita.

a) Faça uma segunda dobra que passa pelo ponto marcado e cruza com a dobra inicial. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre estas duas dobras?

b) Agora faça outra dobra, diferente da anterior, passando pelo ponto marcado e que também cruze com a primeira. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre esta terceira dobra e a inicial?

c) Observe os 2 segmentos obtidos nos itens a) e b) que começam no ponto marcado e terminam na dobra inicial. Sem utilizar régua, diga se os segmentos dobrados têm ou não o mesmo comprimento.

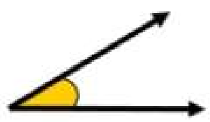
Desafio! Comprove a sua resposta anterior usando dobradura e descreva o procedimento feito.

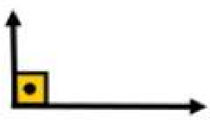
5) Faça uma dobra que determine o menor segmento entre o ponto marcado e a dobra inicial.

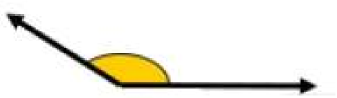
a) Diga o que esta última dobra tem de diferente (ou não) das dobras da atividade 4, observando os ângulos formados por cada dobra feita com a dobra inicial.

b) Esta última dobra feita é única ou existe mais de uma? Explique como chegou à sua resposta.

Relembrando! Escreva o nome dos ângulos desenhados a seguir:







Você observou?

Somente uma dobra determina quatro ângulos iguais no papel aberto – aquela que sobrepõe duas partes da dobra inicial sobre elas mesmas. Cada um destes quatro ângulos iguais é chamado de **ângulo reto**.

Neste caso dizemos que uma dobra é **perpendicular** à outra quando forma ângulos retos.

6) No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra inicial e mantenha o papel dobrado. Novamente marque um ponto no papel, longe da dobra feita, e faça a dobra perpendicular à inicial passando pelo ponto marcado. Agora faça uma terceira dobra passando pelo ponto marcado que não seja perpendicular à segunda dobra e também não cruze, **no papel**, com a inicial.

Justifique porque a última dobra feita é concorrente com a dobra inicial (mesmo elas não se cruzando no papel) a partir dos ângulos formados entre a última dobra e a perpendicular já feita.

7) Agora dobre o papel de maneira a obter outra dobra que seja paralela à inicial e que passe pelo ponto marcado.

a) Explique o procedimento utilizado para obter a dobra paralela à inicial.

b) Justifique por quê as dobras obtidas são paralelas.

8) Escreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores (4 a 7) e as dúvidas que surgiram.

BLOCO III DE ATIVIDADES

Conteúdos: Retas paralelas e perpendiculares; segmentos congruentes; retângulo, quadrado e suas diagonais; e bissetriz de um ângulo.

Hipóteses sobre a adequação de dobraduras como material de apoio

H11 A construção de retângulos e quadrados com régua e esquadro poderá servir como um diagnóstico para verificar a concepção dos alunos sobre essas figuras. Observe-se que os alunos poderão utilizar a noção de distância, já trabalhada, e suas medidas na régua.

H12 Na construção com dobraduras de retângulos poderemos verificar se os conceitos e a construção geométrica de retas paralelas e perpendiculares (construção do ângulo reto) já estão dominados.

H13 Para realizar a construção do quadrado com dobras, os alunos utilizarão ideias semelhantes às da construção do retângulo, mas surge a necessidade da determinação, com o uso de dobras, de segmentos de mesma origem e mesma medida (segmentos congruentes). Assim, torna-se conveniente solicitar que, inicialmente, seja feita a comparação das medidas de dois segmentos ($\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, com AB < AC) para depois introduzir um ponto D em $\overline{AC}$ de modo que $\overline{AB}$ seja congruente a $\overline{AD}$. Conjecturamos que a manipulação das dobras neste procedimento ficará facilitada se os alunos realizarem as dobras no triângulo ABC já recortado, ao eliminar o excesso de papel inútil para a atividade. Este procedimento, ao sobrepor os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, possibilita determinar a localização de D no interior do segmento $\overline{AC}$, de maneira a que $\overline{AB} \equiv \overline{AD}$. Este procedimento pode também oportunizar a introdução do conceito de bissetriz de um ângulo.

H14 A partir do momento que já foi realizada a construção do retângulo (não quadrado) e do quadrado, vale aprofundar o estudo destas figuras solicitando que seja feita a construção de suas diagonais. Com isso, acreditamos ser possível avaliar a aprendizagem dos alunos sobre os seguintes elementos estudados anteriormente: retas concorrentes e perpendiculares; ângulos agudos, obtusos e retos; e bissetriz de um ângulo.

H15 Na sistematização queremos verificar se e como foram ampliadas as concepções dos alunos sobre os conceitos trabalhados.

Sequência de Atividades do Bloco III

9) Desenhe um retângulo e um quadrado utilizando régua e esquadro. Liste as características que são iguais e as que são diferentes entre as duas figuras.

10) Agora, no papel fornecido, faça um retângulo apenas com dobras.
a) Quantas dobras você fez para construir o retângulo?
b) Diga qual elemento geométrico você construiu com cada dobra e explique por quê.

11) Na folha fornecida, com os pontos A, B e C marcados, use dobraduras para construir o triângulo de vértices A, B e C. Recorte o triângulo feito.
a) Utilizando apenas dobradura, verifique se o lado $\overline{AB}$ tem o mesmo comprimento do lado $\overline{AC}$. Explique o procedimento feito para chegar à sua conclusão.
b) Marque um ponto D no lado $\overline{AC}$ de maneira que $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ tenham a mesma medida. Explique o procedimento feito.
c) Observe que a dobra feita no triângulo determina dois ângulos de vértice A no interior da figura. O que você pode afirmar sobre estes dois ângulos? Justifique.

12) Utilizando as ideias e construções desenvolvidas nas atividades 10 e 11, faça um quadrado com dobras. Descreva quais elementos geométricos obteve com cada dobra feita para construir o quadrado.

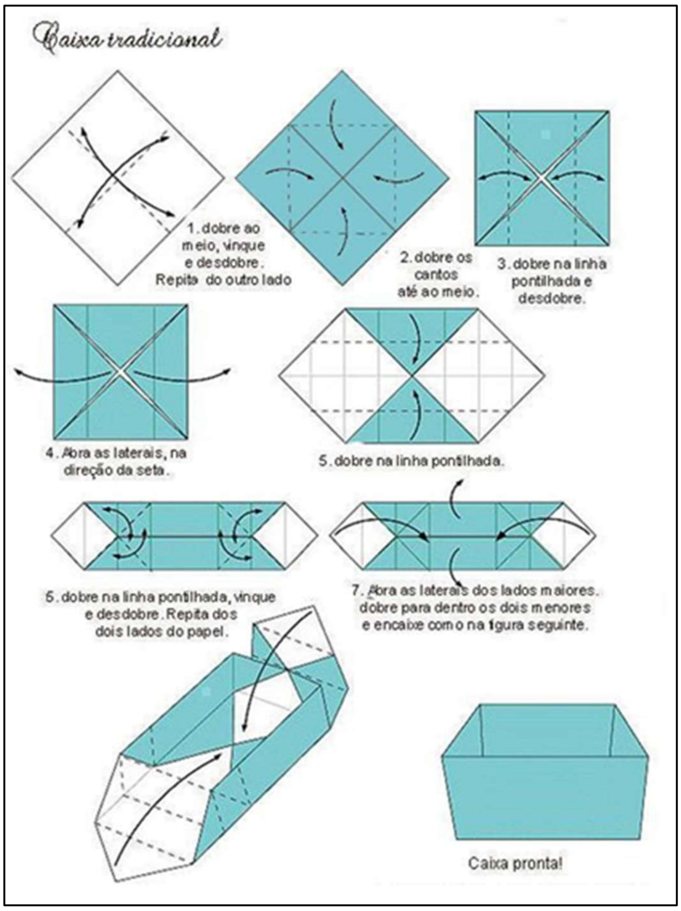
13) Nesta atividade vamos trabalhar com as diagonais dos retângulos e dos quadrados. No retângulo e no quadrado fornecidos faça as dobras que representam as diagonais destas figuras.
a) Observe e liste pelo menos três características das diagonais do retângulo.
b) Observe e liste pelo menos três características das diagonais do quadrado.
c) Reveja as definições de retas concorrentes e de bissetriz de um ângulo. A partir das definições diga se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, e use as dobraduras feitas para justificar suas respostas.
(   ) As diagonais do retângulo e do quadrado são segmentos concorrentes.
(   ) As diagonais do retângulo e do quadrado são bissetrizes dos ângulos internos destas figuras.

14) Descreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores e as dúvidas que surgiram.

Bloco IV de Atividades

15) Vamos construir uma caixa a partir de uma folha quadrada. Em cada passo da construção identifique e descreva quais elementos estudados anteriormente aparecem.

Figura 10: Passo a passo da construção da caixa 5



Fonte: http://anabraga-artesanatos.blogspot.com/2011/07/

Apêndice 2 – Imagens de registros dos alunos da Segunda Iteração

Bloco I de Atividades

1) Dobre e desdobre a folha de papel vegetal. Observando a marca deixada no papel, responda:
a) Qual o nome do elemento geométrico representado pela marca da dobra?

linha ou reta

b) Dobras diferentes feitas em um mesmo papel podem ter comprimentos diferentes. Usando régua, responda qual é a medida do comprimento do elemento geométrico identificado por você no item "a"?

13,5 cm

2) Com o papel aberto marque (com um lápis ou caneta) um ponto fora da dobra feita e faça outra dobra passando por este ponto que não passe pela primeira dobra no seu pedaço de papel.
a) Se o papel fosse maior estas dobras continuariam a não se cortar? Sim
Foi necessário imaginar uma folha muito maior para chegar na sua resposta? Explique como pensou.

Não pois sabendo que não estão juntas se mudar o tamanho vai continuar a mesma coisa só vai aumentar o tamanho da dobradura.

b) Vimos que duas retas são paralelas se não se encontram em algum ponto. Descreva outras características de duas dobras feitas como no item 2 que possam garantir que elas sejam paralelas. Justifique sua resposta.

Pois nunca vão mudar a direção e também sempre vão seguir no mesmo movimento

c) A partir do que foi observado no 2b, verifique se as dobras feitas por você são paralelas ou concorrentes. Justifique.

Paralelas, pois elas não se encontram e nunca mudam a sua direção

3) Com suas palavras diga o que você aprendeu e as dúvidas que ficaram a partir das atividades 1 e 2.

nós aprendemos as retas Paralelas e concorrentes, também aprendemos que as paralelas nunca mudam a direção, e as concorrentes são quando elas se encontram.

Registro do Aluno 1 – Atividades de 1 a 3

1) Dobre e desdobre a folha de papel vegetal. Observando a marca deixada no papel, responda:
a) Qual o nome do elemento geométrico representado pela marca da dobra?

Reta

b) Dobras diferentes feitas em um mesmo papel podem ter comprimentos diferentes. Usando régua, responda qual é a medida do comprimento do elemento geométrico identificado por você no item "a"?

comprimento de 21,6 CM

2) Com o papel aberto marque (com um lápis ou caneta) um ponto fora da dobra feita e faça outra dobra passando por este ponto que não passe pela primeira dobra no seu pedaço de papel.
a) Se o papel fosse maior estas dobras continuariam a não se cortar? Não
Foi necessário imaginar uma folha muito maior para chegar na sua resposta? Explique como pensou.

Sim, pois imaginando uma folha muito maior consegui perceber que iriam se encontrar.

b) Vimos que duas retas são paralelas se não se encontram em algum ponto. Descreva outras características de duas dobras feitas como no item 2 que possam garantir que elas sejam paralelas. Justifique sua resposta.

Elas sempre precisam estar na mesma posição exemplo: Horizonta Horizontal.

c) A partir do que foi observado no 2b, verifique se as dobras feitas por você são paralelas ou concorrentes. Justifique.

Concorrentes, pois em uma folha maior as retas se encontraria

3) Com suas palavras diga o que você aprendeu e as dúvidas que ficaram a partir das atividades 1 e 2.

Eu aprendi o que são retas paralelas e concorrentes, o que é reta.

Registro do Aluno 2 – Atividades de 1 a 3

1) Dobre e desdobre a folha de papel vegetal. Observando a marca deixada no papel, responda:
a) Qual o nome do elemento geométrico representado pela marca da dobra?

UMA RETA.

b) Dobras diferentes feitas em um mesmo papel podem ter comprimentos diferentes. Usando régua, responda qual é a medida do comprimento do elemento geométrico identificado por você no item "a"?

15 CENTÍMETROS.

2) Com o papel aberto marque (com um lápis ou caneta) um ponto fora da dobra feita e faça outra dobra passando por este ponto que não passe pela primeira dobra no seu pedaço de papel.
a) Se o papel fosse maior estas dobras continuariam a não se cortar? NÃO.
Foi necessário imaginar uma folha muito maior para chegar na sua resposta? Explique como pensou.

NÃO POIS NA FOLHA PEQUENA JÁ É TORTA E AS LINHAS JÁ FAZEM INCLINAÇÕES.

b) Vimos que duas retas são paralelas se não se encontram em algum ponto. Descreva outras características de duas dobras feitas como no item 2 que possam garantir que elas sejam paralelas. Justifique sua resposta.

ELAS SÃO RETAS E MANTEM A MESMA DISTANCIA ATÉ O FIM.

c) A partir do que foi observado no 2b, verifique se as dobras feitas por você são paralelas ou concorrentes. Justifique.

SÃO CONCORRENTES POIS ELAS VÃO SE INCLINANDO E A SUA DISTANCIA DIMINUINDO.

3) Com suas palavras diga o que você aprendeu e as dúvidas que ficaram a partir das atividades 1 e 2.

APRENDI O QUE SÃO RETAS CONCORRENTES E PARALELAS, SUAS CARACTERÍSTICAS E INCLINAÇÕES. NENHUMA DÚVIDA.

Registro do Aluno 3 – Atividades de 1 a 3

1) Dobre e desdobre a folha de papel vegetal. Observando a marca deixada no papel, responda:
a) Qual o nome do elemento geométrico representado pela marca da dobra?

É uma reta

b) Dobras diferentes feitas em um mesmo papel podem ter comprimentos diferentes. Usando régua, responda qual é a medida do comprimento do elemento geométrico identificado por você no item "a"?

O comprimento é 15,2 cm

2) Com o papel aberto marque (com um lápis ou caneta) um ponto fora da dobra feita e faça outra dobra passando por este ponto que não passe pela primeira dobra no seu pedaço de papel.
a) Se o papel fosse maior estas dobras continuariam a não se cortar? Não
Foi necessário imaginar uma folha muito maior para chegar na sua resposta? Explique como pensou.

Sim. A segunda reta está inclinada, se a folha fosse maior a reta continuaria indo na diagonal se encontrando com a primeira reta.

b) Vimos que duas retas são paralelas se não se encontram em algum ponto. Descreva outras características de duas dobras feitas como no item 2 que possam garantir que elas sejam paralelas. Justifique sua resposta.

Para as retas serem paralelas, elas não podem ter uma inclinação, tem que manter a mesma distância entre as duas

c) A partir do que foi observado no 2b, verifique se as dobras feitas por você são paralelas ou concorrentes. Justifique.

São concorrentes. Pois a segunda reta está inclinada e não estão com a mesma distância

3) Com suas palavras diga o que você aprendeu e as dúvidas que ficaram a partir das atividades 1 e 2.

Eu aprendi que retas são linhas imaginárias, que são infinitas e não podem ter curvas. Segmento de reta é um pedaço de uma reta e é finito.
Retas paralelas são duas retas que não se encontram e não estão inclinadas
Retas concorrentes são duas retas que se encontram e estão inclinadas.

Registro do Aluno 4 – Atividades de 1 a 3

1) Dobre e desdobre a folha de papel vegetal. Observando a marca deixada no papel, responda:
a) Qual o nome do elemento geométrico representado pela marca da dobra?

Reta

b) Dobras diferentes feitas em um mesmo papel podem ter comprimentos diferentes. Usando régua, responda qual é a medida do comprimento do elemento geométrico identificado por você no item "a"?

16,5 cm

2) Com o papel aberto marque (com um lápis ou caneta) um ponto fora da dobra feita e faça outra dobra passando por este ponto que não passe pela primeira dobra no seu pedaço de papel.
a) Se o papel fosse maior estas dobras continuariam a não se cortar? Não
Foi necessário imaginar uma folha muito maior para chegar na sua resposta? Explique como pensou.

não, pois o meu ponto esta perto da linha e logo uma encontra a outra

b) Vimos que duas retas são paralelas se não se encontram em algum ponto. Descreva outras características de duas dobras feitas como no item 2 que possam garantir que elas sejam paralelas. Justifique sua resposta.

as retas tem que ter a mesma direção

c) A partir do que foi observado no 2b, verifique se as dobras feitas por você são paralelas ou concorrentes. Justifique.

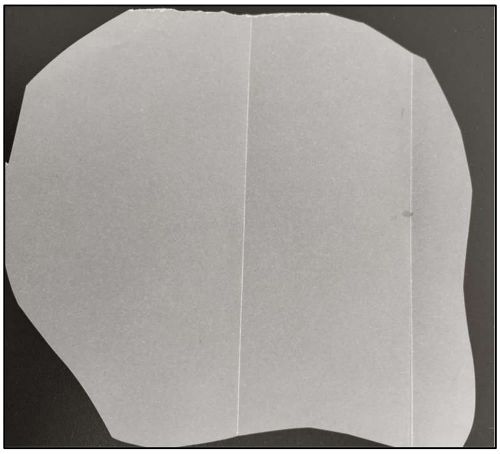
Elas são concorrentes, pois elas se encontram

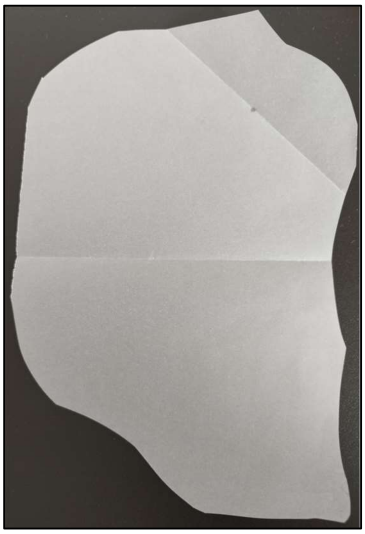
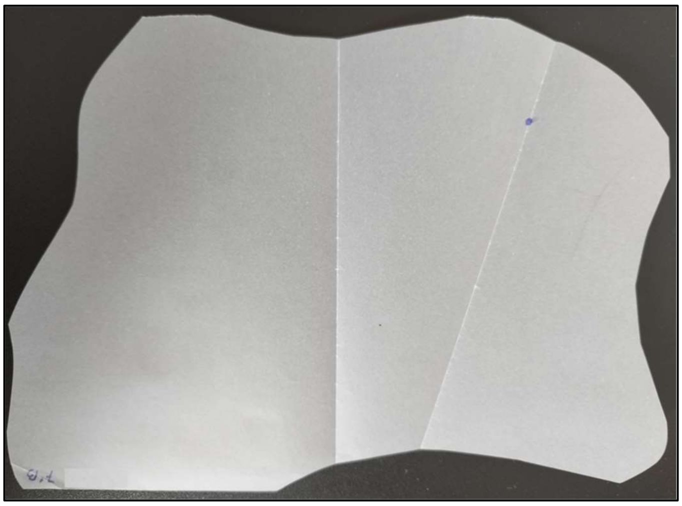
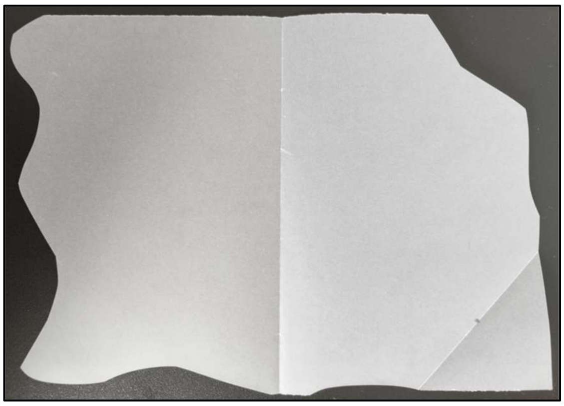
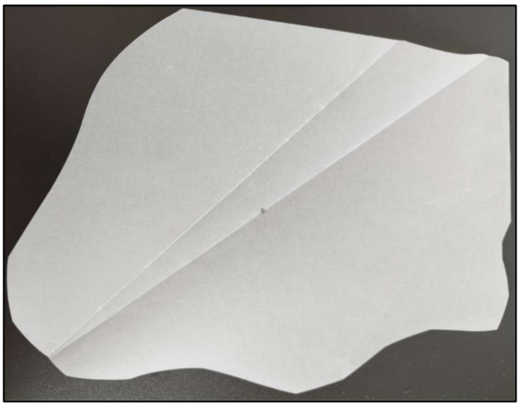
3) Com suas palavras diga o que você aprendeu e as dúvidas que ficaram a partir das atividades 1 e 2.

Eu aprendi que retas tem 2 variações, paralelas e concorrentes. as paralelas nunca se encontram e as concorrentes que uma hora se encontram.

Registro do Aluno 5 – Atividades de 1 a 3

Imagens de algumas dobraduras realizadas pelos alunos – Atividades 1 e 2



Bloco II de Atividades

4) No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra e mantenha o papel dobrado. Marque um ponto no papel, longe da dobra feita.

a) Faça uma segunda dobra que passa pelo ponto marcado e cruza com a dobra inicial. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre estas duas dobras?

São ângulos retos, igual a 90°

b) Agora faça outra dobra, diferente da anterior, passando pelo ponto marcado e que também cruze com a primeira. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre esta terceira dobra e a inicial?

É um angulo agudo, cujo a medido é maior que 90°

c) Observe os 2 segmentos obtidos nos itens a) e b) que começam no ponto marcado e terminam na dobra inicial. Sem utilizar régua, diga se os segmentos dobrados têm ou não o mesmo comprimento.

Não.

Desafio! Comprove a sua resposta anterior usando dobradura e descreva o procedimento feito.

Cheguei nesse resultado colocando uma dobra em cima do outro e assim percebi que são diferentes, a 3º dobra é maior.

5) Faça uma dobra que determine o menor segmento entre o ponto marcado e a dobra inicial.

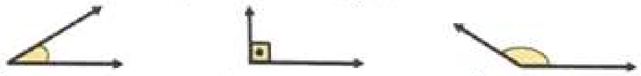
a) Diga o que esta última dobra tem de diferente (ou não) das dobras da atividade 4, observando os ângulos formados por cada dobra feita com a dobra inicial.

Para ter o menor segmento a linha tem que estar reto pelo ponto e dobra inicial.

b) Esta última dobra feita é única ou existe mais de uma? Explique como chegou à sua resposta.

É único, pois não tem como fazer outra dobra passando pelo ponto, com o ângulo reto.

Relembrando!
Escreva o nome dos ângulos desenhados a seguir:



Ângulo agudo   Ângulo Reto   Ângulo Obtuso

6) No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra inicial e mantenha o papel dobrado. Novamente marque um ponto no papel, longe da dobra feita, e faça a dobra perpendicular à inicial passando pelo ponto marcado. Agora faça uma terceira dobra passando pelo ponto marcado que não seja perpendicular à segunda dobra e também não cruze, **no papel**, com a inicial.
Justifique porque a última dobra feita é concorrente com a dobra inicial (mesmo elas não se cruzando no papel) a partir dos ângulos formados entre a última dobra e a perpendicular já feita.

A dobra se encontram pois não são ângulos retos.

7) Agora dobre o papel de maneira a obter outra dobra que seja paralela à inicial e que passe pelo ponto marcado. Descreva como você fez e explique por que as dobras obtidas são paralelas.

Dobramos reto e depois comparamos com o ângulos. As dobras são paralelas porque o ângulo é reto.

8) Escreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores (de 4 a 7) e as dúvidas que surgiram.

Não consegui entender muito bem o que são retas perpendiculares e aprendi a indentificar o nome do ângulo.

Registro do Aluno 1 – Atividades de 4 a 8

4) No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra e mantenha o papel dobrado. Marque um ponto no papel, longe da dobra feita.

a) Faça uma segunda dobra que passa pelo ponto marcado e cruza com a dobra inicial. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre estas duas dobras?

Um dos ângulos é menor que 90° ou seja, ângulo agudo, e o outro é maior que 90° ou seja ângulo obtuso.

b) Agora faça outra dobra, diferente da anterior, passando pelo ponto marcado e que também cruze com a primeira. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre esta terceira dobra e a inicial?

um dos ângulos ficou menor que 90° ou seja, ângulo agudo e o outro ficou maior que 90°, ou seja, ângulo obtuso.

c) Observe os 2 segmentos obtidos nos itens a) e b) que começam no ponto marcado e terminam na dobra inicial. Sem utilizar régua, diga se os segmentos dobrados têm ou não o mesmo comprimento.

Não.

Desafio! Comprove a sua resposta anterior usando dobradura e descreva o procedimento feito.

Eu dobrei o papel entre as linhas para elas ficarem uma do lado da outra e dessa forma consegui ver que uma delas era maior e a outra menor.

5) Faça uma dobra que determine o menor segmento entre o ponto marcado e a dobra inicial.

a) Diga o que esta última dobra tem de diferente (ou não) das dobras da atividade 4, observando os ângulos formados por cada dobra feita com a dobra inicial.

A diferença é que ela fica menor que as outras linhas por ela ser reta diferente das outras que são inclinadas.

b) Esta última dobra feita é única ou existe mais de uma? Explique como chegou à sua resposta.

É a única, pois eu não conseguiria fazer outra igual com as mesmas características

Relembrando!
Escreva o nome dos ângulos desenhados a seguir:

Agudo | reto | obtuso

6) No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra inicial e mantenha o papel dobrado. Novamente marque um ponto no papel, longe da dobra feita, e faça a dobra perpendicular à inicial passando pelo ponto marcado. Agora faça uma terceira dobra passando pelo ponto marcado que não seja perpendicular à segunda dobra e também não cruze, **no papel**, com a inicial.
Justifique porque a última dobra feita é concorrente com a dobra inicial (mesmo elas não se cruzando no papel) a partir dos ângulos formados entre a última dobra e a perpendicular já feita.

Ela é concorrente, pois caso ocorra de aumentar essa reta ela em algum momento cruzaria com a inicial, pois ela não está reta, ela está um pouco inclinada.

7) Agora dobre o papel de maneira a obter outra dobra que seja paralela à inicial e que passe pelo ponto marcado. Descreva como você fez e explique por que as dobras obtidas são paralelas.

Fiz uma linha totalmente reta, sem nenhuma inclinação, e automaticamente ela virou paralela, pois a reta formada, mesmo que ocorra de aumentar, ela não irá se cruzar com outras retas, pois ela não está inclinada.

8) Escreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores (de 4 a 7) e as dúvidas que surgiram.

Eu aprendi a classificar os ângulos, aprendi o que é linhas paralelas e concorrentes, Aprendi o conceito de retas perpendiculares e aprendi a dobrar um papel com facilidade. Durante o exercício surgiram algumas dúvidas, mas finalizei todas as respostas.

Registro do Aluno 2 – Atividades de 4 a 8

4) No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra e mantenha o papel dobrado. Marque um ponto no papel, longe da dobra feita.

a) Faça uma segunda dobra que passa pelo ponto marcado e cruza com a dobra inicial. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre estas duas dobras?

Um deles é agudo e o outro obtuso

b) Agora faça outra dobra, diferente da anterior, passando pelo ponto marcado e que também cruze com a primeira. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre esta terceira dobra e a inicial?

Um deles é agudo e o outro obtuso

c) Observe os 2 segmentos obtidos nos itens a) e b) que começam no ponto marcado e terminam na dobra inicial. Sem utilizar régua, diga se os segmentos dobrados têm ou não o mesmo comprimento.

Sim

Desafio! Comprove a sua resposta anterior usando dobradura e descreva o procedimento feito.

Junte os segmentos

5) Faça uma dobra que determine o menor segmento entre o ponto marcado e a dobra inicial.

a) Diga o que esta última dobra tem de diferente (ou não) das dobras da atividade 4, observando os ângulos formados por cada dobra feita com a dobra inicial.

E menor, os dois angúlos são retos.

b) Esta última dobra feita é única ou existe mais de uma? Explique como chegou à sua resposta.

Única, as outras estão inclinadas em vez de reta

Relembrando!
Escreva o nome dos ângulos desenhados a seguir:

Agudo — Reto — Obtuso

6) No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra inicial e mantenha o papel dobrado. Novamente marque um ponto no papel, longe da dobra feita, e faça a dobra perpendicular à inicial passando pelo ponto marcado. Agora faça uma terceira dobra passando pelo ponto marcado que não seja perpendicular à segunda dobra e também não cruze, **no papel**, com a inicial.
Justifique porque a última dobra feita é concorrente com a dobra inicial (mesmo elas não se cruzando no papel) a partir dos ângulos formados entre a última dobra e a perpendicular já feita.

Porque os ângulos são Obtusos e Agudos

7) Agora dobre o papel de maneira a obter outra dobra que seja paralela à inicial e que passe pelo ponto marcado. Descreva como você fez e explique por que as dobras obtidas são paralelas.

Porque o ângulo é reto

8) Escreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores (de 4 a 7) e as dúvidas que surgiram.

Angulos, oque é paralelo, concorente e perpendicular, ângulo agudo, obtuso, reto, raso.

Registro do Aluno 3 – Atividades de 4 a 8

4) No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra e mantenha o papel dobrado. Marque um ponto no papel, longe da dobra feita.

a) Faça uma segunda dobra que passa pelo ponto marcado e cruza com a dobra inicial. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre estas duas dobras?

um lado é menor que 90° (agudo) eo outro é maior que 90° (obtuso)

b) Agora faça outra dobra, diferente da anterior, passando pelo ponto marcado e que também cruze com a primeira. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre esta terceira dobra e a inicial?

um lado é maior que 90° (obtuso) e o outro é menor que 90° (agudo)

c) Observe os 2 segmentos obtidos nos itens a) e b) que começam no ponto marcado e terminam na dobra inicial. Sem utilizar régua, diga se os segmentos dobrados têm ou não o mesmo comprimento.

não

Desafio! Comprove a sua resposta anterior usando dobradura e descreva o procedimento feito.

eu alinhei uma reta na outra e percebi que uma linha é maior que a outra

5) Faça uma dobra que determine o menor segmento entre o ponto marcado e a dobra inicial.

a) Diga o que esta última dobra tem de diferente (ou não) das dobras da atividade 4, observando os ângulos formados por cada dobra feita com a dobra inicial.

a linha formou um angulo de 90°

b) Esta última dobra feita é única ou existe mais de uma? Explique como chegou à sua resposta.

única, as outras retas estão em um angulo diferente

Relembrando!

Escreva o nome dos ângulos desenhados a seguir:

agudo   Reto   obtuso

6) No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra inicial e mantenha o papel dobrado. Novamente marque um ponto no papel, longe da dobra feita, e faça a dobra perpendicular à inicial passando pelo ponto marcado. Agora faça uma terceira dobra passando pelo ponto marcado que não seja perpendicular à segunda dobra e também não cruze, **no papel**, com a inicial.
Justifique porque a última dobra feita é concorrente com a dobra inicial (mesmo elas não se cruzando no papel) a partir dos ângulos formados entre a última dobra e a perpendicular já feita.

porque elas não se encontram

7) Agora dobre o papel de maneira a obter outra dobra que seja paralela à inicial e que passe pelo ponto marcado. Descreva como você fez e explique por que as dobras obtidas são paralelas.

porque elas não se encontram

8) Escreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores (de 4 a 7) e as dúvidas que surgiram.

aprendemos sobre retas e seus nomes

Registro do Aluno 4 – Atividades de 4 a 8

4) No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra e mantenha o papel dobrado. Marque um ponto no papel, longe da dobra feita.

a) Faça uma segunda dobra que passa pelo ponto marcado e cruza com a dobra inicial. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre estas duas dobras?

os dois juntos forma um ângulo raso de 180°, um lado e agudo e o outro obtuso

b) Agora faça outra dobra, diferente da anterior, passando pelo ponto marcado e que também cruze com a primeira. O que você pode dizer sobre os dois ângulos formados entre esta terceira dobra e a inicial?

juntos forma 180°, um lado agudo e o outro obtuso

c) Observe os 2 segmentos obtidos nos itens a) e b) que começam no ponto marcado e terminam na dobra inicial. Sem utilizar régua, diga se os segmentos dobrados têm ou não o mesmo comprimento.

não

Desafio! Comprove a sua resposta anterior usando dobradura e descreva o procedimento feito.

alinhando as medidas e as dobraduras

5) Faça uma dobra que determine o menor segmento entre o ponto marcado e a dobra inicial.

a) Diga o que esta última dobra tem de diferente (ou não) das dobras da atividade 4, observando os ângulos formados por cada dobra feita com a dobra inicial.

E um angulo reto

b) Esta última dobra feita é única ou existe mais de uma? Explique como chegou à sua resposta.

não, se não ia ficar inclinada

Relembrando!

Escreva o nome dos ângulos desenhados a seguir:

angulo agudo angulo reto angulo obtuso

6) No novo pedaço de papel fornecido faça uma dobra inicial e mantenha o papel dobrado. Novamente marque um ponto no papel, longe da dobra feita, e faça a dobra perpendicular à inicial passando pelo ponto marcado. Agora faça uma terceira dobra passando pelo ponto marcado que não seja perpendicular à segunda dobra e também não cruze, **no papel**, com a inicial.
Justifique porque a última dobra feita é concorrente com a dobra inicial (mesmo elas não se cruzando no papel) a partir dos ângulos formados entre a última dobra e a perpendicular já feita.

se não tivesse inclinada seria um angulo reto de 90°.

7) Agora dobre o papel de maneira a obter outra dobra que seja paralela à inicial e que passe pelo ponto marcado. Descreva como você fez e explique por que as dobras obtidas são paralelas.

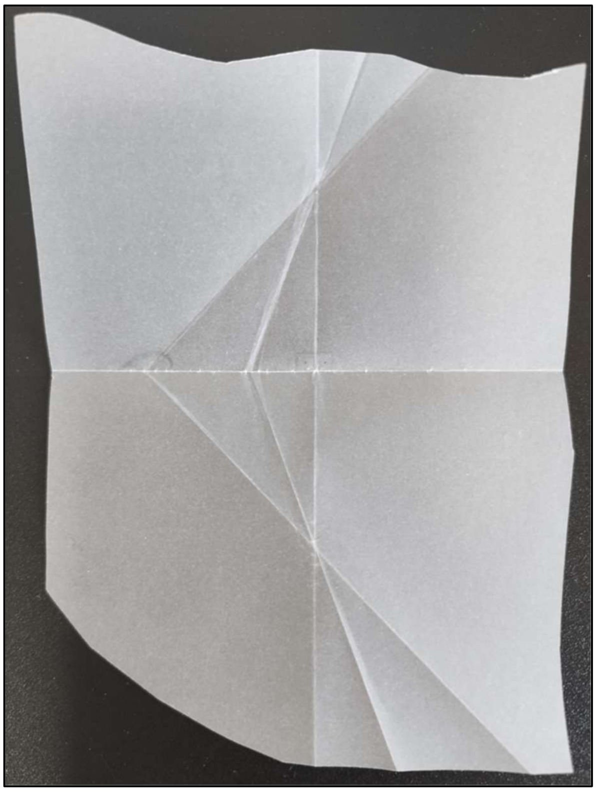
é um ângulo de 90°, como é paralelo e reto, comparado com o de baixo nunca vai encontrar com a de baixo

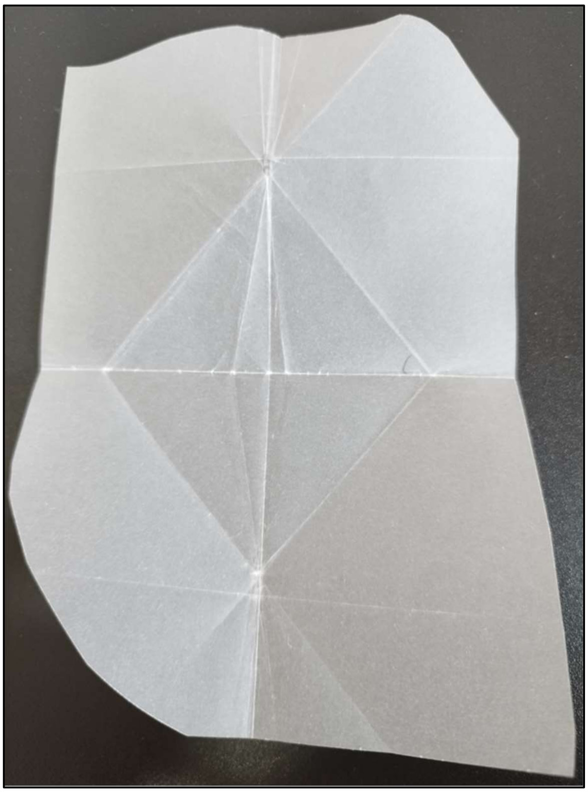
8) Escreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores (de 4 a 7) e as dúvidas que surgiram.

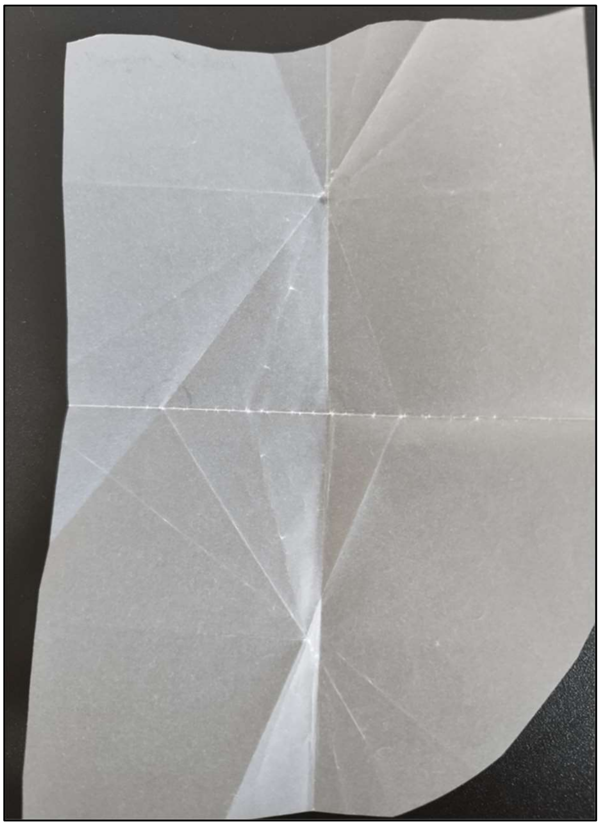
Eu fiquei com dúvidas nas dobraduras, mais no final consegui entender e fazer. Eu aprendi a diferença entre os ângulos e retas

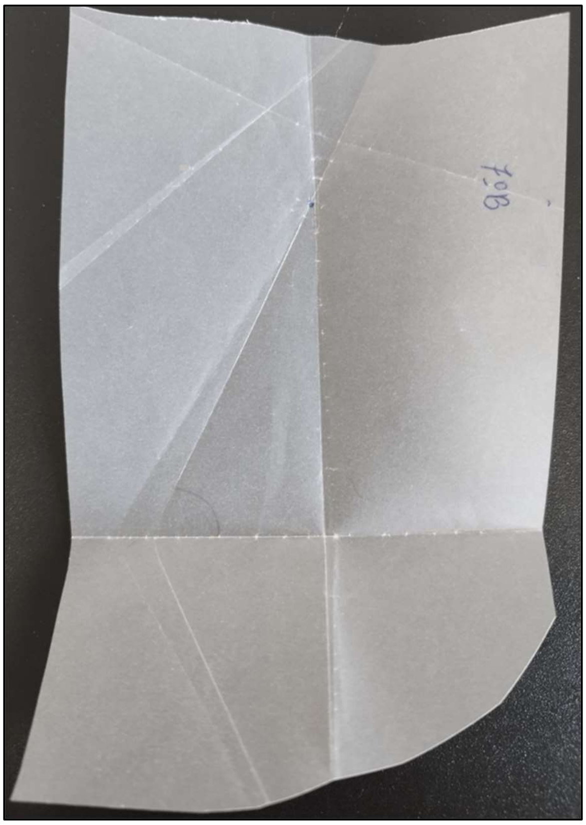
Registro do Aluno 5 – Atividades de 4 a 8

Imagens de algumas dobraduras realizadas pelos alunos – Atividades 4 e 5







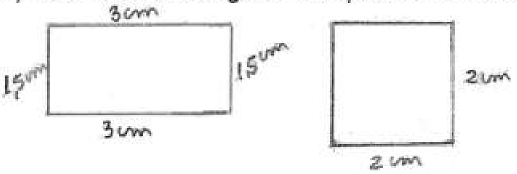


Imagens de algumas dobraduras realizadas pelos alunos – Atividades 6 e 7




Bloco III de Atividades

9) Desenhe um retângulo e um quadrado utilizando régua e esquadro.



Liste as características que são iguais e as que são diferentes entre as duas figuras.

Ambas das figuras possuem quatro lados, possuem quatro vértices e ângulos de 90° entre as junções dos vértices.
Os quatro lados do quadrado são iguais, já do retângulo não

10) Agora, no papel fornecido, faça um retângulo apenas com dobras.

a) Quantas dobras você fez para construir o retângulo?

Quatro dobras

b) Diga qual elemento geométrico você construiu com cada dobra e explique por quê.

Primeiramente dobrei no meio, que formou apenas uma reta. Depois dobrei nas laterais e formou quatro ângulos de 90°. Por fim dobrei a parte de cima que formou uma reta, e juntamente com as outras dobras formou o retângulo.

c) Finalmente, diga quais elementos geométricos construídos por você garantem que a figura obtida é um retângulo?

Retas perpendiculares que formam ângulos de 90°.

11) Na folha fornecida com os pontos A, B e C marcados use dobraduras para construir o triângulo de vértices A, B e C. Recorte o triângulo feito.

a) Utilizando apenas dobradura, verifique se o lado AB tem o mesmo comprimento do lado AC. Explique o

Não tem o mesmo comprimento. Dobrei o lado AB até o lado AC e percebi que o lado AC é maior.

b) Marque um ponto D sobre o lado AC de maneira que AD e AB tenham a mesma medida. Explique o procedimento feito.

Com a dobra feita do lado AB até o AC, marquei um ponto D onde o final do lado AB marcava.

c) Observe que a dobra feita no triângulo determina dois ângulos de vértice A no interior da figura. O que você pode afirmar sobre estes dois ângulos? Justifique.

Os dois ângulos possuem a mesma medida, são iguais.

Registro do Aluno 1 – Atividades de 9 a 11

12) Utilizando as ideias e construções desenvolvidas nas atividades 10 e 11, faça um quadrado com dobras. Descreva quais elementos geométricos obteve com cada dobra feita para construir o quadrado.

Fiz três dobras (nas laterais e na parte de cima) formou retas perpendiculares, depois juntei as pontas e fechei o quadrado, levantei a ponta novamente e formou o quadrado.

13) Nesta atividade vamos trabalhar com as diagonais dos retângulos e dos quadrados. No retângulo e no quadrado fornecidos faça as dobras que representam as diagonais destas figuras.

a) Liste as características das diagonais do retângulo.

Formaram retas concorrentes, formam quatro ângulos (2 obtusos e 2 agudos), formam quatro espaços de tamanhos diferentes formando triângulos e possuem o mesmo tamanho.

b) Liste as características das diagonais do quadrado.

Formam retas perpendiculares, formam quatro ângulos retos, formam quatro espaços de tamanhos iguais formando triângulos e possuem o mesmo tamanho.

c) Agora compare as duas listas dos itens "a" e "b" e diga quais características são iguais e quais são diferentes com relação às diagonais das duas figuras.

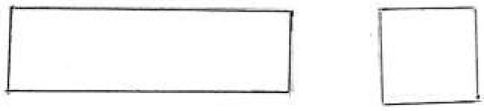
Iguais: retas que se encontram possuem mesmo tamanho
Diferentes: retas concorrentes (retângulos), retas perpendiculares (quadrados), ângulos diferentes, triângulos de tamanhos diferentes.

14) Descreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores e as dúvidas que surgiram.

Aprendi sobre as características do quadrado e retângulo, aprofundei em classificação de retas, sobre fazer uma dobradura de uma ponta a outra, como saber se um triângulo possui lados iguais com dobraduras, diagonais de um quadrado e de um retângulo. Tive dúvida em montar um quadrado com dobraduras.

Registro do Aluno 1 – Atividades de 12 a 14

9) Desenhe um retângulo e um quadrado utilizando régua e esquadro.



Liste as características que são iguais e as que são diferentes entre as duas figuras.

o quadrado é caracterizado pelos quatros lados iguais e o retangulo é caracterizado pelos dois lados diferentes. os dois tem ângulos retos.

10) Agora, no papel fornecido, faça um retângulo apenas com dobras.

a) Quantas dobras você fez para construir o retângulo?

4 dobras

b) Diga qual elemento geométrico você construiu com cada dobra e explique por quê.

nas duas primeiras formei duas linhas paralelas, depois dobrei os dois lados do canto formando dois angulos retos (90°)

c) Finalmente, diga quais elementos geométricos construídos por você garantem que a figura obtida é um retângulo?

angulo reto

11) Na folha fornecida com os pontos A, B e C marcados use dobraduras para construir o triângulo de vértices A, B e C. Recorte o triângulo feito.

a) Utilizando apenas dobradura, verifique se o lado AB tem o mesmo comprimento do lado AC. Explique o procedimento feito para chegar à sua conclusão.

Dobrando do ponto B entre o ponto A e C

b) Marque um ponto D sobre o lado AC de maneira que AD e AB tenham a mesma medida. Explique o procedimento feito.

quando a dobradura bate entre o ponto A e C, que bate com o ponto D.

c) Observe que a dobra feita no triângulo determina dois ângulos de vértice A no interior da figura. O que você pode afirmar sobre estes dois ângulos? Justifique.

São angulos menores que 90° e tem angulos iguais (do mesmo tamanho).

Registro do Aluno 2 – Atividades de 9 a 11

12) Utilizando as ideias e construções desenvolvidas nas atividades 10 e 11, faça um quadrado com dobras. Descreva quais elementos geométricos obteve com cada dobra feita para construir o quadrado.

Na primeira dobra forma uma linha reta, na segunda um angulo de 90° graus igual a terceira, na quarta fechamos um triangulo e na quinta formou um quadrado

13) Nesta atividade vamos trabalhar com as diagonais dos retângulos e dos quadrados. No retângulo e no quadrado fornecidos faça as dobras que representam as diagonais destas figuras.

a) Liste as características das diagonais do retângulo.

dobrando as diagonais, formou linhas concorrentes (se encontram) formam um angulo obtuso e agudo e as linhas são do mesmo comprimento

b) Liste as características das diagonais do quadrado.

as diagonais são perpendiculares, que formam angulos retos, e com isso as linhas tambem tem o mesmo comprimento.

c) Agora compare as duas listas dos itens "a" e "b" e diga quais características são iguais e quais são diferentes com relação às diagonais das duas figuras.

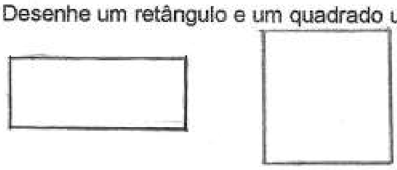
IG- As duas linhas se encontram, e as duas tem as linhas do mesmo comprimento
DI- No quadrado forma angulos retos e no retangulo angulos obtusos e agudos

14) Descreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores e as dúvidas que surgiram.

aprendi que dependendo da figura, as diagonais podem mudar os angulos e mesmo mudando o tamanho da figura o comprimento vai ser o mesmo, uma dúvida que tive foi como fazer os lados do 8x11 terem a mesma medida

Registro do Aluno 2 – Atividades de 12 a 14

9) Desenhe um retângulo e um quadrado utilizando régua e esquadro.



Liste as características que são iguais e as que são diferentes entre as duas figuras.

As duas são os ângulos retos e diferente é a medida do quadrado e do retângulo

10) Agora, no papel fornecido, faça um retângulo apenas com dobras.

a) Quantas dobras você fez para construir o retângulo?

4

b) Diga qual elemento geométrico você construiu com cada dobra e explique por quê.

na primeira dobra ficou reta, na segunda dobra a linha ficou reta, na terceira fiz ângulo de 90, na quarta ficou um ângulo de 90°

c) Finalmente, diga quais elementos geométricos construídos por você garantem que a figura obtida é um retângulo?

linhas retas e formou ângulos retos

11) Na folha fornecida com os pontos A, B e C marcados use dobraduras para construir o triângulo de vértices A, B e C. Recorte o triângulo feito.

a) Utilizando apenas dobradura, verifique se o lado AB tem o mesmo comprimento do lado AC. Explique o procedimento feito para chegar à sua conclusão.

dobrando a reta em cima da outra, da pra ver a diferença de tamanho.

b) Marque um ponto D sobre o lado AC de maneira que AD e AB tenham a mesma medida. Explique o procedimento feito.

Coloquei o ponto B em cima do lado AC para achar o ponto D.

c) Observe que a dobra feita no triângulo determina dois ângulos de vértice A no interior da figura. O que você pode afirmar sobre estes dois ângulos? Justifique.

São dois ângulos iguais

Registro do Aluno 3 – Atividades de 9 a 11

12) Utilizando as ideias e construções desenvolvidas nas atividades 10 e 11, faça um quadrado com dobras. Descreva quais elementos geométricos obteve com cada dobra feita para construir o quadrado.

NAS Três primeiRAS dobRAS FormARAM retAS perpendi-culares, NA quARTA dobRA Formou um TriAngulo e NA quinTA dobrA Formou um quAdrADo.

13) Nesta atividade vamos trabalhar com as diagonais dos retângulos e dos quadrados. No retângulo e no quadrado fornecidos faça as dobras que representam as diagonais destas figuras.

a) Liste as características das diagonais do retângulo.

SÃo reTAS que se cruzAm, FormA Ângulos obtusos e Agudos, e tem A mesmA medidA.

b) Liste as características das diagonais do quadrado.

SÃo reTAS que se cruzAm, SÃO Angulos retos, e tem A mesmA medidA

c) Agora compare as duas listas dos itens "a" e "b" e diga quais características são iguais e quais são diferentes com relação às diagonais das duas figuras.

AS dUAS retAS concorrentes, Tem A mesmA medidA A diferença é que no retAngulo tem Angulos obtusos e Agudos, jA o quAdrAdo tem Angulo retos

14) Descreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores e as dúvidas que surgiram.

EU Aprendi sobre FIGUrAS e diAGONAIS e TAMbém Aprendi A FAZer As dobrAS. E Fiquei em duvidA como dobrAr A dobrA e FAZer um quAdrAdo

Registro do Aluno 3 – Atividades de 12 a 14

9) Desenhe um retângulo e um quadrado utilizando régua e esquadro.

Liste as características que são iguais e as que são diferentes entre as duas figuras.

Caracteristicas iguais: Angulos retos

Caracteristicas diferentes: quadrado todos os lados iguais Ao contrario do retangulo

10) Agora, no papel fornecido, faça um retângulo apenas com dobras.

a) Quantas dobras você fez para construir o retângulo?

Quatro dobras feitas

b) Diga qual elemento geométrico você construiu com cada dobra e explique por quê.

1º Reta 2º paralela 3º e 4º perpendiculares

c) Finalmente, diga quais elementos geométricos construídos por você garantem que a figura obtida é um retângulo?

As retas superiores e inferiores são maiores/diferente das retas laterais

11) Na folha fornecida com os pontos A, B e C marcados use dobraduras para construir o triângulo de vértices A, B e C. Recorte o triângulo feito.

a) Utilizando apenas dobradura, verifique se o lado AB tem o mesmo comprimento do lado AC. Explique o procedimento feito para chegar à sua conclusão.

se dobrarmos no meio transformando em retas iguais sobrara uma grande ponta

b) Marque um ponto D sobre o lado AC de maneira que AD e AB tenham a mesma medida. Explique o procedimento feito.

Dobrando uma reta tem como ver onde se coloca o ponto/Letra

c) Observe que a dobra feita no triângulo determina dois ângulos de vértice A no interior da figura. O que você pode afirmar sobre estes dois ângulos? Justifique.

2 Angulos formado por triangulos e agudos e iguais por estar dividido no meio

Registro do Aluno 4 – Atividades de 9 a 11

12) Utilizando as ideias e construções desenvolvidas nas atividades 10 e 11, faça um quadrado com dobras. Descreva quais elementos geométricos obteve com cada dobra feita para construir o quadrado.

Aos três primeiras dobras formaram Retas perpendiculares e na quarta dobra formou um triangulo e na quinta dobra virou um quadrado

13) Nesta atividade vamos trabalhar com as diagonais dos retângulos e dos quadrados. No retângulo e no quadrado fornecidos faça as dobras que representam as diagonais destas figuras.

a) Liste as características das diagonais do retângulo.

VAI FICAR 2 ANGULOS AGUDOS e 2 Obtusos e diAGONAIS IGUAIS

b) Liste as características das diagonais do quadrado.

diAGONAIS e ANGULOS IGUAIS

c) Agora compare as duas listas dos itens "a" e "b" e diga quais características são iguais e quais são diferentes com relação às diagonais das duas figuras.

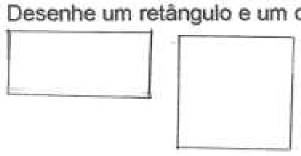
Angulos diferentes e medidAS IGUAIS

14) Descreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores e as dúvidas que surgiram.

A FAZER um quadrado perfeito

Registro do Aluno 4 – Atividades de 12 a 14

9) Desenhe um retângulo e um quadrado utilizando régua e esquadro.



Liste as características que são iguais e as que são diferentes entre as duas figuras.

Iguais: Nas pontas formam um ângulo reto

Diferentes: O quadrado tem os lados iguais e o retângulo não

10) Agora, no papel fornecido, faça um retângulo apenas com dobras.

a) Quantas dobras você fez para construir o retângulo?

Quatro dobras

b) Diga qual elemento geométrico você construiu com cada dobra e explique por quê.

Construímos ângulos retos fazendo dobras que são retas e perpenticulares. Na primeira dobra formamos uma reta, na segunda uma reta perpenticular a primeira (na lateral) depois fizemos outra reta na lateral e por fim uma reta em baixo que forma ângulo retos

c) Finalmente, diga quais elementos geométricos construídos por você garantem que a figura obtida é um retângulo?

Por retas perpenticulares

11) Na folha fornecida com os pontos A, B e C marcados use dobraduras para construir o triângulo de vértices A, B e C. Recorte o triângulo feito.

a) Utilizando apenas dobradura, verifique se o lado AB tem o mesmo comprimento do lado AC. Explique o procedimento feito para chegar à sua conclusão.

Não, coloquei uma reta em cima da outra para saber se tem o mesmo tamanho

b) Marque um ponto D sobre o lado AC de maneira que AD e AB tenham a mesma medida. Explique o procedimento feito.

dobrei uma parte do triângulo colocando uma sobre a outro (A e B)

c) Observe que a dobra feita no triângulo determina dois ângulos de vértice A no interior da figura. O que você pode afirmar sobre estes dois ângulos? Justifique.

Que os dois ângulos formados são iguais

Registro do Aluno 5 – Atividades de 9 a 11

12) Utilizando as ideias e construções desenvolvidas nas atividades 10 e 11, faça um quadrado com dobras. Descreva quais elementos geométricos obteve com cada dobra feita para construir o quadrado.

Nas três primeiras dobras formaram ângulos retos, e para saber a medida da ultima reta colocamos a dobra em cima da outra e formou o quadrado

13) Nesta atividade vamos trabalhar com as diagonais dos retângulos e dos quadrados. No retângulo e no quadrado fornecidos faça as dobras que representam as diagonais destas figuras.

a) Liste as características das diagonais do retângulo.

São retas que se cruzam e tem o mesmo tamanho e forma angulos obtusos e agudos

b) Liste as características das diagonais do quadrado.

São retas que se cruzam e tem o mesmo tamanho e forma angulos retos

c) Agora compare as duas listas dos itens "a" e "b" e diga quais características são iguais e quais são diferentes com relação às diagonais das duas figuras.

Iguais: são retas e se cruzam

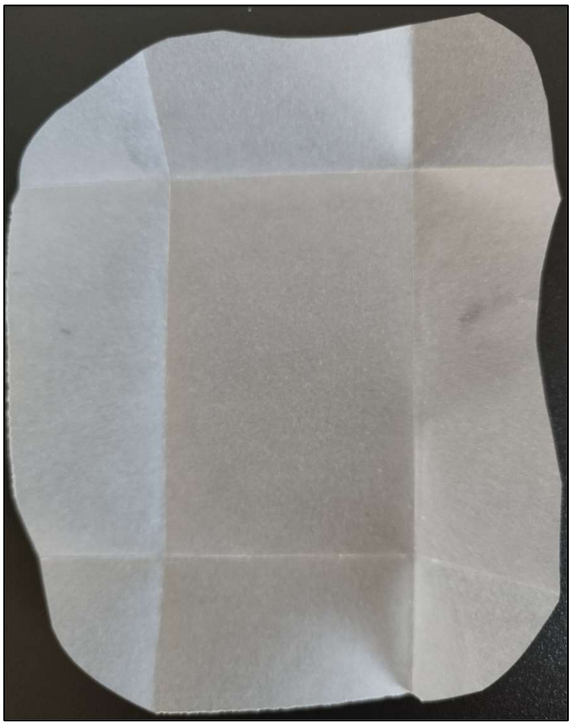
Diferente: tamanho, angulos agudos, obtusos e retos

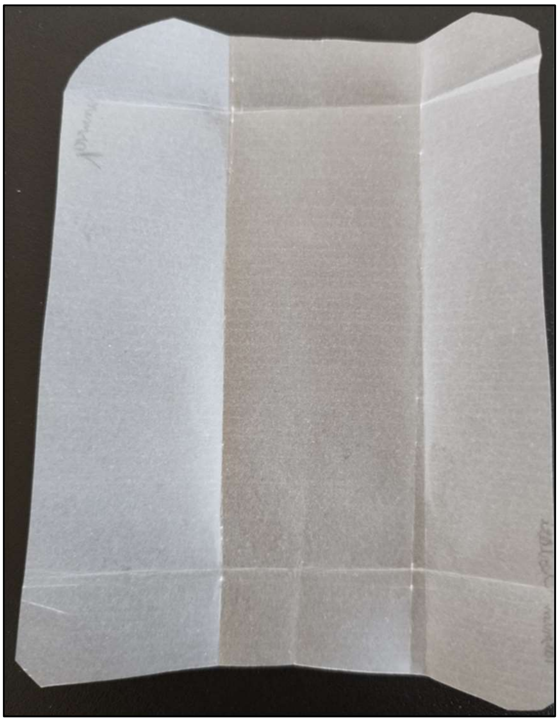
14) Descreva com suas palavras o que você aprendeu com as questões anteriores e as dúvidas que surgiram.

Como saber a medida da reta sem a ultilização da régua, angulos retos

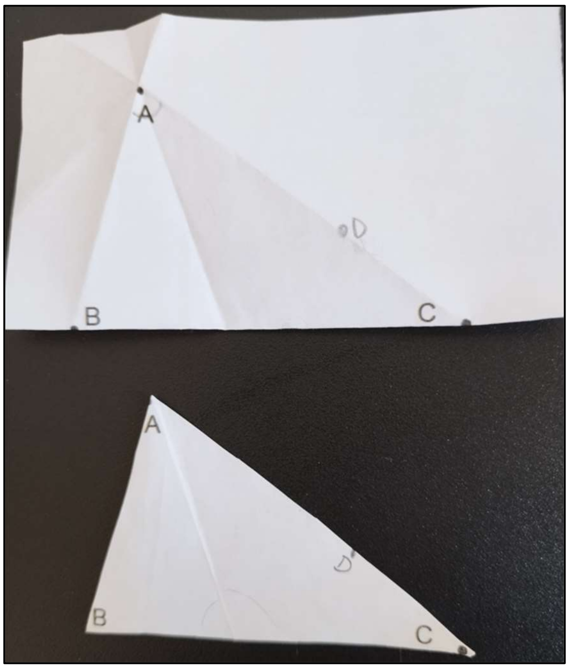
Registro do Aluno 5 – Atividades de 12 a 14

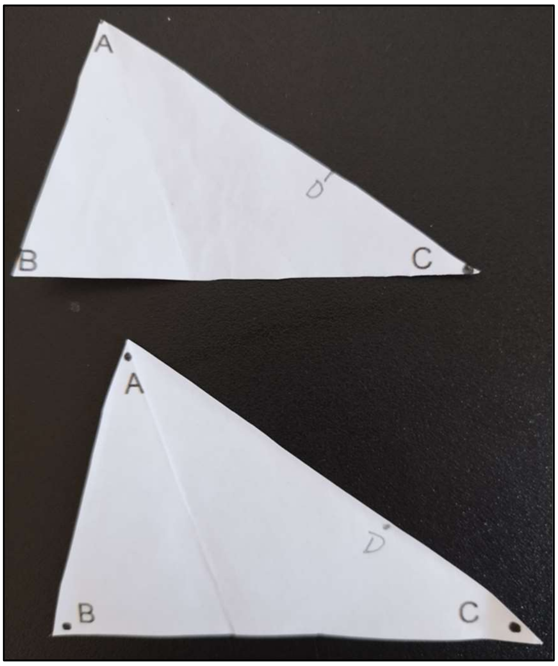
Imagens de algumas dobraduras realizadas pelos alunos – Atividade 10





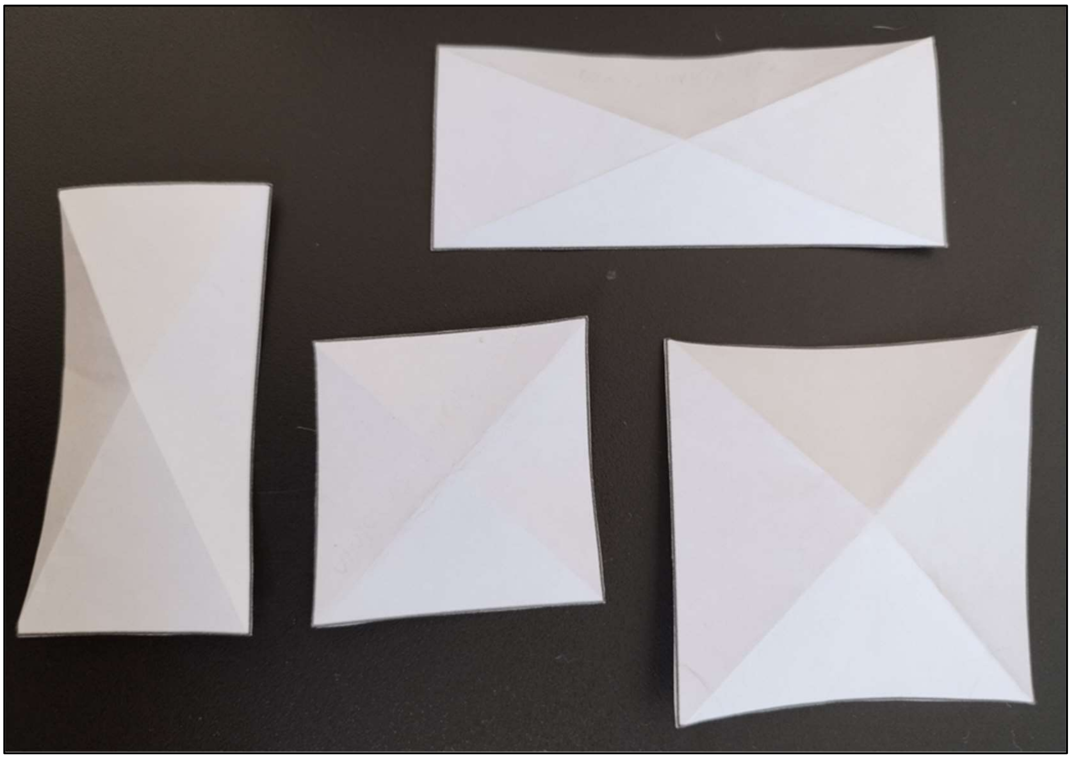
Imagens de algumas dobraduras realizadas pelos alunos – Atividade 11





Imagens de algumas dobraduras realizadas pelos alunos – Atividade 12


Imagens de algumas dobraduras realizadas pelos alunos – Atividade 13



Bloco IV de Atividades

15) Vamos construir uma caixa a partir de uma folha quadrada. Em cada passo da construção identifique e descreva quais elementos geométricos estudados anteriormente aparecem.

1º Passo: Retas perpendicular, ângulo de 90° (reto), 5 quadrados, 4 lados.

2º Passo: Diagonais, ângulo de 90° (reto), Ângulo agudo, 8 triangulos, 6 quadrados

3º Passo / 4º Passo Retas paralelas, 4 triangulos, 3 retangulos, 1 quadrado, ângulo reto, ângulo agudo, Diagonal.

5º Passo: Retas paralelas, 10 triângulos, 4 retangulos, 10 quadrados, ângulo retos, ângulo agudo, Diagonal.

6º Passo / 7º Passo: 2 trapezio, 2 paralelogramo, 2 hexagono, 10 triangulos, 2 Retangulos, 2 quadrados, angulo reto, angulo agudo, diagonal, paralelas.

8º Passo / 9º Passo: Paralelas, 4 retangulos, 1 quadrado, ângulo reto, diagonal

Registro do Aluno 1 – Atividade 15

15) Vamos construir uma caixa a partir de uma folha quadrada. Em cada passo da construção identifique e descreva quais elementos geométricos estudados anteriormente aparecem.

1º Passo: Fiz as dobras e apareceu dois segmentos de reta que se cruzaram formando retas perpendiculares e ângulos de 90°. Na folha se formou quatro quadrados.

2º Passo: Levei as pontas ao meio e a folha ficou como um quadrado menor formado por quatro triângulos e com as diagonais.

3º Passo / 4º Passo Ao dobrar novamente formou-se duas retas paralelas (3º passo) e ao abrir as laterais formou uma figura de seis lados com um quadrado em cada ponta com ângulos retos.

5º Passo: Ao dobrar formou-se retas paralelas e uma figura de seis lados menor.

6º Passo / 7º Passo: Formaram-se retas concorrentes com ângulos obtusos e agudos, abrindo as laterais para formar a caixa (7º passo).

8º Passo / 9º Passo: Dobrei as pontas para dentro formando a caixa com retângulos nas laterais e um quadrado ao fundo e ângulos de 90°.

Registro do Aluno 2 – Atividade 15

15) Vamos construir uma caixa a partir de uma folha quadrada. Em cada passo da construção identifique e descreva quais elementos geométricos estudados anteriormente aparecem.

1º Passo:
Quando dobrei a folha no meio formou um retângulo. Quando abri a folha tinha formado retas perpendiculares, retas concorrentes, ângulos retos e quatro quadrados.

2º Passo:
Quando dobrei os cantos da folha até o meio se formaram quatro triângulos com ângulos agudos

3º Passo / 4º Passo
Quando dobrei a folha até o meio se formou dois retângulos
Quando abri a lateral da folha, formou dois quadrados, retas paralelas, dois triângulos nas pontas, dois trapézios e três retângulos

5º Passo:
Quando dobrei a folha no meio formou dois quadrados nas pontas, retas paralelas.

6º Passo / 7º Passo:
Quando dobrei a folha forma dois trapézios.

8º Passo / 9º Passo:
Formou seis triângulos, quatro quadrados e dois retângulos. Com a caixa pronta temos formado quatro triângulos no fundo da caixa, quatro retângulos nas laterais e um quadrado com suas diagonais.

Registro do Aluno 3 – Atividade 15

15) Vamos construir uma caixa a partir de uma folha quadrada. Em cada passo da construção identifique e descreva quais elementos geométricos estudados anteriormente aparecem.

1º Passo:
Na figura formou um quadrado, dentro se formaram retas perpendiculares e se formou angulos retos.

2º Passo:
Na figura formamos mais um quadrado com ângulos agudos e diagonais.

3º Passo / 4º Passo
Continuou com um quadrado com angulos agudos e tambem algumas diagonais, e mesma coisa que o a (passo)

5º Passo:
Na figura formaram um retangulo, quadrado, triangulo, formou angulos agudos com linhas paralelas.

6º Passo / 7º Passo:
Continuou um retangulo, com triangulos, quadrados, tem linhas concorrentes

8º Passo / 9º Passo:
formou um quadrado, retangulo tem angulos agudos, retos e tem linhas paralelas

Registro do Aluno 4 – Atividade 15