FLAVIO MATOS GARBIN

Desenvolvimento do pensamento geométrico em uma perspectiva crítica: investigando a soma dos ângulos internos de triângulos e quadriláteros planos em cenários para investigação

São Paulo

2024

FLAVIO MATOS GARBIN

Desenvolvimento do pensamento geométrico em uma perspectiva crítica: investigando a soma dos ângulos internos de triângulos e quadriláteros planos em cenários para investigação

Versão Corrigida

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística como requisito do programa do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Vera Helena Giusti de Souza

São Paulo

2024

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer

Aos meus pais, Mirandolina de Araújo Matos e Flávio Garbin, sem vocês nada seria possível. Inspiração eterna.

À minha orientadora, Profa. Dra. Vera Helena Giusti de Souza, pelos ensinamentos, paciência, confiança e liberdade que me ofereceu durante a escrita desse trabalho; suas delicadeza, sensibilidade, dedicação e conhecimento são únicos.

Aos Profs. Drs. da banca de defesa, Profa. Dra. Amanda Queiroz Moura e Prof. Dr. Edmilson Minoru Torisu, pelos comentários, orientações e correções na banca de qualificação. Todas as considerações foram de grande importância.

Às professoras e ao professor do Programa do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Profa. Dra. Cristina Cerri, Profa. Dra. Barbara Corominas Valério, Profa. Dra. Ana Paula Jahn, Profa. Dra. Iole de Freitas Druck e Prof. Dr. Antonio Carlos Brolezzi. Obrigado por transmitirem tantos ensinamentos.

Às minhas irmãs Ieda Matos da Silva Oliveira, Silvana Matos de Souza e Sônia Valeria Garbin. Obrigado por sempre cuidarem de mim.

Aos meus sobrinhos Caroline Matos Oliveira, Mariana Matos de Souza e Rafael Matos de Souza.

Aos familiares, Divo, Jucélia, Marcos Antonio Vieira de Oliveira, Tia Margo, Tia Mariazinha, Tio Bilac e meus primos Josi, Tati, Tomais e Tiago. Vocês foram muito importantes na minha formação humana.

À Bruna Alem Santinho. Obrigado por sempre estar ao meu lado e apurar meu senso crítico.

Aos Amigos do Jardim Almanara, Família Zavitoski: Samuel, Saulo e Rosa; Danilo (Frutas), Jé, Cleber, Wellington (Nego), Washington e todos que moraram ou ainda moram na rua do bombeiro. Se em minhas infância e mocidade, eu não tivesse vocês ao meu lado, não teria chegado até aqui.

Aos amigos: Carlos Marques, Gustavo Bergo, Igor Pantoja, Inaya Oliveira, Leandro Benicio, Nilo Barbedo, Paulo Felipe Sucupira e Thiago Campos. Não consigo expressar em palavras a importância de vocês para a minha vida e para a minha formação acadêmica, só quero vocês ao meu lado, mesmo que estejam distantes.

A todas as pessoas que passaram pela USP e pelo B205 no CRUSP e contribuíram com a minha formação humana, mas que as escolhas da vida nos distanciaram.

Às amigas do trabalho que sempre se preocuparam com a minha dissertação, Adriana Backes, Elisandra Miranda e Meluzia Kiryu. Obrigado por tanto incentivo.

Ao grande e mais recente amigo, Jobi Espasiani. Obrigado por aprimorar meu espírito crítico e ajudar a me reconhecer.

À queridíssima Maria Aparecida Guimarães Pedreira. Obrigado por me direcionar.

Dedico esse texto a todos e todas que trabalham com a educação, e que buscam uma formação independente e crítica.

RESUMO

GARBIN, F. M. **Desenvolvimento do pensamento geométrico em uma perspectiva crítica: investigando a soma dos ângulos internos de triângulos e quadriláteros planos em cenários para investigação**. 2024. Dissertação (Mestrado Profissional) − Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2024.

Com este trabalho, buscou-se aproximar a formação crítica ao conceito de demonstração no ensino de geometria. Seguiu-se uma compreensão do conceito de crítica que tem como base o processo reflexão-ação para superar problemas causados pela ideologia dominante. Apresentam-se reflexões sobre pontos críticos causados pela Matemática e por algumas características do ensino tradicional dessa disciplina e a proposição de uma ação interventiva para superá-los. Para esta ação, optou-se pela Educação Matemática Crítica como desenvolvida por Ole Skovsmose e pelo desenvolvimento do pensamento geométrico como apresentado por Bernard Parzysz. A partir desses autores, entendeu-se que uma investigação geométrica pode contribuir para a formação crítica de estudantes quando os atos dialógicos do Modelo de Cooperação Investigativa caracterizam o diálogo, em um trabalho interventivo que provoque argumentações adequadas a cada faixa etária da formação estudantil. Assim, por conta do recesso provocado pelo Corona vírus, realizou-se uma pesquisa interventiva por meio de duas entrevistas reflexivas, durante as quais se aplicou um conjunto de atividades sobre algumas propriedades dos quadriláteros planos e dos triângulos. As atividades tinham potencial de se constituírem em Cenários para Investigação e proporcionar um trânsito entre argumentações lógico perceptivas sobre objetos concretos e lógico dedutivas sobre objetos teóricos. Após a análise dos dados colhidos, entendeu-se que as atividades propostas se constituíram em Cenários para Investigação, pois os dois participantes da pesquisa aceitaram o convite para realizar a investigação, que proporcionou o trânsito entre argumentações lógico perceptivas e lógico dedutivas. Ao mesmo tempo, rompeu a ideologia da certeza e a matemática em ação chamada justificação e legitimação, ao mostrar que uma argumentação pode superar limites e contradições trazidas pela tecnologia. Como produto final esperado de uma Dissertação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, apresentam-se atividades baseadas na Educação Matemática Crítica, que podem promover investigação, o desenvolvimento do pensamento geométrico e uma formação crítica.

Palavras-chave: Matemática, crítica, investigação, geometria, diálogo, argumentação.

ABSTRACT

GARBIN, F. M. **Development of geometric thinking from a critical perspective: investigating the sum of the internal angles of triangles and flat quadrilaterals in investigation scenarios**. 2024. Dissertação (Mestrado Profissional) − Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2024.

With this work, we sought to bring critical education to geometry teaching using the concept of demonstration. It was followed an understanding of criticism concept, which is based on the action-reflection process to overcome problems caused by the dominant ideology. Reflections are presented on critical points caused by Mathematics and some characteristics of this discipline traditional teaching and an intervention action to overcome them. For this action, it was chosen Critical Mathematics Education as developed by Ole Skovsmose and development of geometric thinking as presented by Bernard Parzysz. From these authors, it was understood that a geometric investigation can contribute to students' critical formation, if Investigative Cooperation Model dialogical acts characterize such dialogues, in an interventional work which provokes arguments appropriate to each age group of students Basic School. Due to Corona virus recess, the interventional acts were carried out through two reflective interviews, using software GeoGebra, during which a set of activities were carried out, with questions about some properties of flat quadrilaterals and triangles. The activities had the potential to constitute Scenarios for Investigation and provide a transition between logical perceptual arguments about concrete objects and logical deductive arguments about theoretical objects. Analysis of collected data shows the proposed activities constituted Scenarios for Investigation, since the two research participants accepted the invitation to carry out an investigation, and more, provided transition between logical perceptual and logical deductive arguments. At the same time, it was possible breaking up ideology of certainty and challenging mathematics in action called justification and legitimation, by showing that argumentation can overcome limits and contradictions brought by technology. As an expected final product of a Professional Master's Degree in Mathematics Teaching, activities based on Critical Mathematics Education are presented, which can promote investigation, development of geometric thinking and critical education.

Keywords: Mathematics, criticism, investigation; geometry, dialog, argumentation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

Introdução

O senso comum coloca o conteúdo matemático ensinado na Educação Básica como instrumento para resolver problemas de ordem numérica e tecnológica, e nessa perspectiva, a Matemática não está incluída no rol de disciplinas que podem contribuir para a formação crítica dos indivíduos. Desse modo, cabem às Ciências Humanas o papel de estimular a reflexão, haja vista que elas identificam as causas de certos problemas e analisam as consequências e os interesses (políticos, econômicos etc.) ocultos por trás de cada decisão.

No Brasil, entre os anos 2016 e 2023, passamos por diversas reformas – a trabalhista, da previdência e a Proposta de Emenda à Constituição (PEC) do Teto de Gastos – que organizaram de outra maneira as relações do trabalho e a oferta de serviços públicos. No debate da legitimidade dessas reformas, argumentos contrários e a favor foram embasados por diferentes áreas do conhecimento, em específico a Matemática. Esses momentos deram claros indícios de que essa ciência pode servir como instrumento para a perpetuação do poder das classes dominantes. Tais indícios deixaram transparecer o quanto era inexistente a suposta neutralidade da matemática, logo, romper com esta falácia, a partir do ensino da matemática com criticidade, mostrou-se incontornável, pois só uma formação crítica permite ao indivíduo se aprofundar em debates de tamanha envergadura.

Essa preocupação nos impulsionou a buscar por caminhos que favorecessem a formação crítica de estudantes enquanto ensinávamos, e nos permitiu redigir a seguinte primeira questão de pesquisa:

- Quais características deve ter uma abordagem de ensino em Matemática para desenvolver uma formação crítica em estudantes da Educação Básica?

As leituras sobre *Educação Matemática Crítica* (EMC) (SKOVSMOSE 1999, 2010, 2015, 2017, 2020) foram fundamentais para compreendermos como a matemática está presente em nossa sociedade formatando a maneira como vivemos. Nesse sentido, identificamos alguns pontos críticos causados pela Matemática e pela forma como é habitualmente ensinada. Para tentar superá-los, é apropriado que o professor proponha atividades investigativas que tenham potencial de fomentar uma cooperação investigativa por meio do diálogo (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010). Quando os estudantes aceitam participar da investigação, a atividade se consolida em cenários para investigação (SKOVSMOSE, 2000).

Por outro lado, em nossa experiência docente e discente, sempre nos preocupamos com as aprendizagens em geometria e a pouca ênfase que se dá ao ensino de demonstração na Educação Básica, especialmente porque sentimos muito a transição da educação básica para a licenciatura, quando novos conceitos como teorema, lema, prova e demonstração passaram a fazer parte do universo da matemática ensinada na academia. Ademais, em acordo com Bernard Parzysz (2001, 2006), na educação básica, o ensino de geometria se desenvolve pela evolução de uma geometria de observação para uma geometria de demonstração. Isso significa que a modelação do espaço se dá por objetos concretos[1] ou abstratos, e a argumentação pode ser de caráter perceptivo visual ou lógico dedutiva. Tal constructo teórico, aliado ao conceito de matemática escolar (MOREIRA; DAVID, 2018) nos permitiu compreender que é possível defender a validade de proposições matemáticas com argumentações adequadas aos estudantes em cada etapa da educação.

Nesse contexto – e levando em consideração mudanças no projeto devido ao isolamento social determinado como forma de garantir a segurança das pessoas em decorrência da pandemia do coronavírus – decidimos realizar uma pesquisa interventiva, em que os participantes eram convidados a investigar algumas propriedades de quadriláteros planos e triângulos, e optamos por fazer isso com entrevistas reflexivas, que nos ajudaram a responder as seguintes questões de pesquisa:

- A proposta de investigação se caracterizou em cenários para investigação que engajou os participantes a explorarem algumas propriedades dos quadriláteros planos e triângulos? Se sim, como isso se deu?

- Ao aceitarem o convite para a investigação, os participantes a realizaram em um trânsito entre argumentações perceptivo dedutivas e lógico dedutivas em relação às propriedades estudadas nos quadriláteros planos e triângulos?

Em síntese, nosso trabalho seguiu a uma linha de pensamento, ou seja, evitando a banalização do conceito de crítica, apresentamos uma conceituação que coloca o processo reflexão-ação como central para identificar problemas e suas causas

1 Entendemos por objetos de natureza concreta aqueles que podem ser manuseados como caixas, bolas, dados, linhas, entre outros, bem como representações feitas por desenhos ou na tela do computador.

mais profundas escondidas pela ideologia dominante que, entre outros meios, usa a educação como instrumento. Firmes nessa direção, não poderíamos deixar de verificar quais pontos críticos são gerados pela Matemática e pelo ensino dessa ciência, e apresentamos tais elaborações em parte do primeiro e do segundo capítulos. Ainda refletindo, encontramos uma proposta de abordagem para as aulas de matemática que pudesse atacar os pontos críticos levantados, o que está parcialmente no segundo e terceiro capítulos. A ação foi realizada por meio de entrevistas reflexivas que nos levaram novamente ao processo de reflexão quando as analisamos, e esperamos que esse trabalho inspire novas ações e novas reflexões.

No Capítulo primeiro, buscamos defender e justificar a necessidade de o professor focar no desenvolvimento do pensamento crítico de estudantes durante o processo de ensino da Matemática. Para isso, fizemos uma tríade de discussões, a saber, primeiro nos baseamos na legislação educacional brasileira; depois, fizemos uma apresentação centrada na compreensão do conceito de crítica – levando em consideração o processo reflexão-ação e não de reprodução da ideologia dominante, estando, assim, em consonância com Ole Skovsmose (1999), Dermeval Saviani (2007) e Paulo Freire (2009); por fim, identificamos alguns pontos críticos, causados por certas características, nas habituais aulas de Matemática.

No Capítulo 2, Educação Matemática Crítica, buscamos compreender a importância de uma alfabetização matemática de caráter crítico (SKOVSMOSE, 1999, 2010, 2017) para ler e escrever o mundo com a Matemática (GUTSTEIN, 2006). Em seguida, com base nessa perspectiva, fez-se necessária a apresentação de nossa compreensão referente à forma como a Matemática está presente em nossa sociedade e como ela molda nossa realidade; conceitos como o de poder de formatação da matemática (SKOVSMOSE, 2017), a ideologia da certeza (BORBA; SKOVSMOSE, 2001) e a matemática em ação (SKOVSMOSE, 2020), fundamentam a elaboração. Outrossim, imbuídos de um espírito crítico, concluímos o capítulo apresentando o que entendemos ser uma possível abordagem que o professor pode utilizar para combater pontos críticos, nomeadamente, os conceitos cenários para investigação (SKOVSMOSE, 2000) e diálogo (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010).

No Capítulo 3, expomos como o conceito de demonstração mudou ao longo do tempo, e como o ensino desenvolve o pensamento geométrico dos estudantes pelo trânsito entre uma abordagem de percepção sobre objetos concretos e uma dedutiva sobre objetos teóricos (PARZYSZ, 2001, 2006). Defendemos, a partir do conceito matemática escolar (MOREIRA; DAVID, 2018), que podemos validar afirmações matemáticas utilizando argumentações acessíveis para estudantes de cada faixa etária. Além disso, quando trabalhamos com demonstração, estamos oportunizando aos estudantes o contato com um conceito central na Matemática.

A explicitação da metodologia empregada nesse trabalho faz-se presente no Capítulo 4; nele apresentamos e fazemos a análise das atividades criadas. Na metodologia, outra tríade formatou nosso trabalho, qual seja, a participação no XXII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (2018), a pandemia do novo coronavírus, e as colaborações do Prof. Dr. Edmilson e da Profa. Dra. Amanda na banca de qualificação desta pesquisa.

No Capítulo 5, trazemos a análise das duas entrevistas realizadas com base no quadro teórico proposto e, no Capítulo 6, aduzimos as conclusões e as respostas às questões de pesquisa. No capítulo 7, apresentamos as considerações finais, pontos positivos e negativos da pesquisa, bem como questões em aberto, para futuras pesquisas.

No Anexo está nosso produto final, na forma de um conjunto de atividades baseadas na EMC, como desenvolvida por Skovsmose (1999, 2001, 2015, 2017, 2020,) e no desenvolvimento do pensamento geométrico como apresentado por Parzysz (2001, 2006). Essas atividades podem ser usadas por professores de Matemática da Educação Básica, com adaptações para qualquer nível de ensino, para promover uma investigação matemático-científica e um trabalho gradual com argumentações.

Capítulo 1. A importância da formação crítica

Neste capítulo, defendemos a importância de uma abordagem crítica quando ensinamos Matemática, a partir de três pontos, que são explicitados nas secções 1.1, 1.2 e 1.3, respectivamente. O primeiro destes se refere à legislação brasileira, que confere à educação a responsabilidade da formação crítica dos cidadãos. Verificamos essa determinação na Constituição Federal (1988), nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCNEB, 2013) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018).

O segundo ponto refere-se à nossa preocupação em encontrar uma abordagem precisa para o termo crítica, quando usado como qualificação na educação em geral, e na Educação Matemática em particular. Tal procedimento enseja evitar que a concepção de crítica seja apropriada de maneira indevida por grupos ou indivíduos que não estão preocupados, de fato, com a superação de certos pontos complexos de nossa realidade, os quais são criados e mantidos pela ideologia dominante; para efetivar essa reflexão, nos apoiamos em Ole Skovsmose (1999), Dermeval Saviani (2007) e Paulo Freire (2009).

O terceiro ponto trata diretamente da importância do viés crítico na Educação Matemática. As características da Matemática, com as aplicações e qualidades que encontramos nas atividades comumente utilizadas nas aulas dessa disciplina, geram algumas questões sobre as quais devemos agir, e nesse sentido, utilizamos Marilyn Frankenstein (1986), Skovsmose (1999, 2015, 2017) e Paul Ernest (2018).

1.1 Educação e crítica na legislação

Segundo determina o artigo 205 da Constituição Federal (1988) "a educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho." (BRASIL, 1988). Seguindo essa marcha, sustentamos que a cidadania deve ser exercida de forma ativa e questionadora, e que o cidadão (no caso, o brasileiro) deve ser capaz de fazer uma leitura de mundo, na qual sejam consideradas as injustiças presentes em nosso quadro social. Isso implica a formação de indivíduos conscientes, capazes de atuar diante da realidade, reconhecendo quais estratégias vão em direção à superação das desigualdades que atingem grande parte da população brasileira.

Os documentos educacionais, em consonância com o artigo 205 Constituição Federal (1988), apontam que a formação crítica é central para o exercício da cidadania. As DCNEB (2013) expressam a preocupação em desenvolver autonomia intelectual, pensamento crítico e formação ética nos estudantes, ao longo de toda a Educação Básica, deixando clara a relação entre esses aspectos e a preparação do indivíduo para exercer cidadania,

> A formação ética, a autonomia intelectual, o pensamento crítico que construa sujeitos de direitos devem se iniciar desde o ingresso do estudante no mundo escolar. Como se sabe, estes são, a um só tempo, princípios e valores adquiridos durante a formação da personalidade do indivíduo. É, entretanto, por meio da convivência familiar, social e escolar que tais valores são internalizados. Quando o estudante chega ao Ensino Médio, os seus hábitos e as suas atitudes crítico-reflexivas e éticas já se acham em fase de conformação. Mesmo assim, a preparação básica para o trabalho e a cidadania, e a prontidão para o exercício da autonomia intelectual são uma conquista paulatina e requerem a atenção de todas as etapas do processo de formação do indivíduo (BRASIL, 2013, p. 39).

Mesmo a BNCC, que recebe críticas concernentes aos problemas de seu desenvolvimento, concepções e implementação, prevê como competência o exercício da cidadania com autonomia, consciência crítica, liberdade e responsabilidade, e reconhece a importância da Matemática para a formação de cidadãos críticos.

Um conceito central nos documentos educacionais é a formação humana integral. Se vislumbramos que um ser humano pode se desenvolver integralmente na sociedade brasileira, devemos prepará-lo não apenas com os requisitos mínimos para servir de mão de obra ao mercado de trabalho, mas sim com conhecimentos mais elaborados criados pela sociedade. Isto inclui os saberes mais avançados da língua escrita, a Matemática e as Ciências Humanas e Naturais, haja vista ser o aprofundamento e a ampliação dos saberes que possibilitam a tomada de consciência dos aspectos sócio-históricos que conduziram às crises atuais; guiar os indivíduos por uma formação crítica, que os tornem conscientes e capazes de reconhecer e atuar diante de problemas, é formar cidadãos que buscarão superá-los, conforme apontam as DCNEB:

> Uma formação integral, portanto, não somente possibilita o acesso a conhecimentos científicos, mas também promove a reflexão crítica sobre os padrões culturais que se constituem normas de conduta de um grupo social, assim como a apropriação de referências e tendências

> que se manifestam em tempos e espaços históricos, os quais expressam concepções, problemas, crises e potenciais de uma sociedade, que se vê traduzida e/ou questionada nas suas manifestações (BRASIL, 2013, p.162).

Sabemos que o conceito de crítica pode ser usado de maneira banalizada por grupos sociais que defendem pontos de vistas antagônicos sobre um mesmo tema. Por exemplo, a respeito da reforma da previdência (EC 103/19, 2019), certos grupos defendiam a reforma e outros, que eram opostos a ela, se diziam críticos, no entanto, não era possível que ambos o fossem ao mesmo tempo. O mesmo vale para a reforma trabalhista (Lei 13.467/17, 2017), a emenda constitucional conhecida como Teto de Gastos (EC 95/2016, 2016) e a implementação da BNCC. Para evitar essa dualidade, no próximo capítulo buscamos delinear de maneira clara o que entendemos por crítica.

1.2 O que é crítica

É muito comum a associação da palavra crítica a certo tipo de comportamento, que tem relação com questionamentos e julgamentos que problematizam ou colocam em dúvida certas ações ou opiniões. Por exemplo, dizemos que alguém é crítico ao governo; que um filme recebeu uma crítica (boa ou má); que fizemos uma crítica a alguma empresa pelo serviço mal prestado etc. No entanto, no campo da educação, que sempre é alvo de disputas ideológicas, esse uso comum não nos ajuda muito na busca de um entendimento do que seria e quais as formas de realizar uma formação crítica do estudante.

Quando recorremos ao dicionário da língua portuguesa, o termo ou verbete crítica é apresentado com as seguintes definições:

> Crítica. S. f. 1 Arte ou faculdade de examinar e/ ou julgar as obras do espírito, em particular as de caráter literário ou artístico. 2. A expressão da crítica (1), em geral por escrito, sob forma de análise, ou comentário ou apreciação teórica e/ou estética. 3. O conjunto daqueles que exercem a crítica; os críticos. 4. O juízo crítico; discernimento, critério. 5. Discussão dos fatos históricos 6. Apreciação minuciosa; julgamento. 7. Ato de criticar, de censurar, censura, condenação; 8. Restr. Julgamento ou apreciação desfavorável, censura. (FERREIRA, 1995).

Essa definição, bastante abrangente, deixa lacunas que podem ser aproveitadas pelos mais diversos interesses. Exemplificando o afirmado, os terraplanistas se dizem críticos ao modelo heliocêntrico, ou ainda, os defensores da escola sem partido, se arrogam críticos à doutrinação que o Estado comunista brasileiro impõe.

Aprofundando nossa compreensão, aproveitemos a discussão proposta por Skovsmose (1999, p.15-16), pois ele faz uma análise a partir dos significados etimológicos da palavra crítica passando pelo Iluminismo e pelas teorias de Immanuel Kant e Karl Marx para, depois, apresentar sua definição. O termo *kritikos*, do grego, tinha três significados, a saber, tomar uma decisão e fazer um juízo; relacionar um texto com suas fontes originais para verificar sua autenticidade e suas possíveis rupturas devido a modificações sofridas nos processos de cópia; e o estado crítico de um paciente enfermo, que não poderá se recuperar. Durante o Iluminismo, a palavra foi associada à razão e usada contra superstições e mitos que favoreciam as autoridades. Segundo Skovsmose (1999, p.15-16), Kant, na obra *Crítica da razão pura*, transformou a crítica em um conceito epistêmico, mostrando o caminho para se obter conhecimento e, em Marx, a crítica adquiriu a posição de objeto em uma teoria e significados relativos à opinião e a situações reais.

Por fim, Skovsmose (1999) propõe uma definição que cinge boa parte dos significados que a palavra crítica apresenta ao longo do tempo, isto é, para ele, crítica envolve reflexão e ação, o que nos leva, inevitavelmente, a buscar identificar as crises em que vivemos, assim como quais as maneiras de superá-las,

> Crítica se refere tanto à atividade de julgar e escapar de um dilema, como as conotações do termo que provem da concepção de análise, avaliação, juízo e valoração e como os significados derivados da ideia de ação [...]. Ser crítico significa prestar atenção a uma situação crítica, identificando-a, tentando capturá-la, compreendê-la e reagir a ela. (SKOVSMOSE, 1999, p.16, tradução nossa[2]).

Utilizando outra conotação para crítica, Saviani (2007) classifica dois grupos de teorias educacionais, que são caracterizadas pelas diferentes concepções das relações existentes entre sociedade e educação. Em um grupo, classificado como teorias não críticas, estão as teorias que entendem a realidade social como harmoniosa, com tendência a integrar as pessoas. Nessa visão, os insucessos na vida são incidentes individuais, que atingem certo número de cidadãos e a educação surge como uma força homogeneizadora, que tem a função de garantir laços sociais, promover a coesão e garantir a integração social, ajudando as pessoas a superarem as dificuldades que as fazem ser marginalizadas. Assim, a educação é vista com autonomia em relação aos condicionantes sociais, pois a educação é compreendida a partir de si, cabendo-lhe,

[2] "Crítica se refiere tanto a la actividad de juzgar y de salir de un dilema, como a las connotaciones del término que provienen de la acepción de análisis, evaluación, juicio y aloración, y como a los significados derivados de la idea de acción [...] Ser crítico significa prestarle atención a una situación crítica, identificarla, tratar de captarla, comprenderla y reaccionar frente a ella."

assim, um papel decisivo na formação de uma sociedade igualitária. No outro grupo assinalado por Saviani, estão aquelas teorias que entendem a sociedade dividida entre grupos ou classes antagônicas, que se relacionam a partir da disputa de forças que se manifestam fundamentalmente nas condições de produção da vida material. Nessa perspectiva, os insucessos são resultados decorrentes da organização social, "isso porque o grupo ou classe que detém maior força se converte em dominante se apropriando dos resultados da produção social, tendendo em consequência, relegar aos demais a condição de marginalizado." (SAVANI, 2007, p. 4). Logo, a educação é condicionada por essa estrutura social e, de alguma maneira, (re)produz os insucessos individuais; esse grupo é denominado teorias críticas reprodutivistas,

> [...] críticas uma vez que postulam não ser possível compreender a educação senão a partir de seus condicionantes sociais [...] como na análise que desenvolvem chegam invariavelmente à conclusão que a função própria da educação consiste na reprodução da sociedade em que ela se insere, bem merecem a denominação de 'teorias crítico-reprodutivistas.' (SAVIANI, 2007, p. 16).

Tal conceito aparece quando nos debruçamos sobre estudos que apresentam as disputas ideológicas existentes na construção de um currículo como, por exemplo, nos anos 1950 e 1960, em meio à Guerra Fria, quando as nações envolvidas necessitavam de indivíduos com formação científica e técnica de alto nível e uma força de trabalho estável para atuar diante das demandas tecnológicas que se apresentavam. Como os acadêmicos dos Estados Unidos da América (EUA) acreditavam que os professores das escolas não tinham formação para tal intento, criaram o "material-à-prova-de-professor."[3] (APPLE, 1982, p. 15, apud SKOVSMOSE, 2017). Nesse caso, a influência do contexto externo à educação, na educação, tinha como intuito a formação de cidadãos capazes de devolver à sociedade práticas compatíveis com as necessidades daquele período, naquele país, a fim de contribuir com a formação da sociedade que se forjava.

Sem adentrar em todas as nuances da teoria freiriana, mas para apresentar as contribuições retiradas de nossa leitura da obra *Pedagogia do oprimido*, interpretamos que Paulo Freire (2005) não define explicitamente o significado de crítica, mas possibilita uma compreensão do ser crítico em estreita ligação com o processo reflexão-ação contínuo, coletivo e verdadeiro, que pode ajudar a desconstruir a ideia de que o

[3] Entendemos essa denominação a partir da ideia de que, o material era preparado para que o professor, julgado incapaz para o ensino altamente técnico, não fosse capaz de impedir uma educação altamente técnica.

mundo e as condições sociais e históricas são dados *a priori* e, por isso, é possível transformá-los. O significado de ideologia é importante nesse contexto, e segundo Freire (2009), a ideologia fragmenta nossa interpretação da realidade, especialmente quando impede que a sabedoria advinda da experiência se transforme em um conhecimento elaborado e organizado, o que limita a compreensão da realidade em sua totalidade, e acompanhando Freire, a ideologia, salienta Marilyn Frankenstein, restringe a "compreensão de qualquer fato ou situação em seu contexto histórico, socioeconômico, político e cultural." (FRANKENSTEIN, 1986, p.107). Dentro dessa chave, para Marcelo C. Borba e Ole Skovsmose (2001), a ideologia é um complexo de crenças que causam visões distorcidas da realidade para esconder e disfarçar as verdadeiras causas que nos trouxeram até as condições atuais impedindo que crises sejam identificadas – nesse sentido, entendemos que as raízes dos problemas ficam cada vez mais difíceis de serem encontradas.

Para Freire (2009), a educação pode cumprir o papel de reforçar a manutenção da ideologia dominante ou de superá-la, e tal qual um processo produzido e reproduzido a cada atuação dos indivíduos na realidade constituída, a educação desponta como um efetivo instrumento de mudanças a partir da própria ideologia dominante. No sentido de mantê-la, a educação bancária coloca os estudantes como depósitos nos quais os conhecimentos devem ser colocados e reproduzidos, não há diálogo, portanto não há crítica. Para transformá-la, a educação libertadora permite a investigação do mundo por meio do diálogo, que não existe sem um pensar crítico, que é o verdadeiro pensar. A relação entre ser crítico e a reflexão-ação, sempre em função da transformação da realidade, é central para uma educação libertadora. A interação dinâmica entre reflexão e ação no sentido "de uma estreita relação que se estabelece entre um modo de interpretar a realidade e a vida e a consequente prática que decorre dessa compreensão levando a uma ação transformadora." (STRECK; REDIN; ZITIKOSKI, 2017, p. 325) é chamada de práxis. Compreendemos, então, que a crítica só pode ocorrer pela práxis,

> Críticos seremos, verdadeiros, se vivermos a plenitude da práxis. Isto é, se nossa ação involucra uma crítica reflexão que, organizando cada vez o pensar, nos leva a superar um conhecimento estritamente ingênuo da realidade. (FREIRE, 2019, p. 148).

Compreendemos que as definições e os usos de crítica feitos pelos autores citados não se contrapõem, pelo contrário, além de elementos comuns, se complementam. Dessa forma, entendemos que crítica envolve o ciclo contínuo entre reflexão e ação de forma a constituírem uma unidade, ou seja, as duas se compõem mutuamente, uma não existe sem a outra quando atuamos de maneira crítica, ou seja, desideologizada. Assim, podemos dizer que o processo reflexão-ação é essencial quando agimos de maneira crítica. A reflexão é usada para compreensão das condições de existência vividas pela humanidade e a elaboração de formas para melhorá-las; e a ação para colocar em prática as reflexões que foram feitas. Essa ação deve voltar ao processo de reflexão, que por sua vez proporcionará uma ação mais consciente, e assim reiteradamente. O foco desse processo é a superação das condições críticas (críticas no sentido de um paciente em estado crítico), geradas e mantidas por ideologias que fragmentam nossa compreensão de mundo e escondem as raízes dos problemas que nos mantêm no estado atual de desigualdade de condições e proclamam que tais desigualdades são responsabilidades apenas individuais. Essa fragmentação se dá, em parte, porque as classes dominantes se apropriam das produções humanas, causando o apagamento de nossa história e consequentemente nos relegando ao não conhecimento de nossas potencialidades humanas como agentes de transformação da realidade. Ideologias essas que podem ser produzidas e reproduzidas na e pela educação escolar, em especial quando esta é produto de uma sociedade desigual e que vê os estudantes como meras caixas vazias que precisam ser preenchidas de ideias convencionadas por autoridades e poderes dominantes, em todos os registros do mundo da vida – religioso, político, econômico, moral, entre outros.

1.3 A importância da qualificação crítica na Educação Matemática

No senso comum, a formação crítica não é considerada responsabilidade da Matemática, no entanto, os meios tecnológicos que são concretizados, especialmente por meio de aplicações da Matemática, reorganizam o modo como os seres humanos estão no mundo e como se relacionam com o meio ambiente e com outros seres humanos (SKOVSMOSE, 2015) − esse já seria um motivo que mostra a necessidade do viés crítico no ensino dessa ciência. Além disso, uma formação crítica a partir da Matemática não trata apenas de problematizar o avanço tecnológico que esse campo do conhecimento entrega à sociedade ao enviar, por exemplo, um robô a Marte ou ao acelerar uma transação bancária ou ao desenvolver uma tecnologia de internet mais veloz. Trata-se também de formar cidadãos conscientes, capazes de atuar diante das desigualdades sociais, que afetam trabalhadoras e trabalhadores, reconhecendo quais estratégias contribuem para isso.

A partir das leituras que fizemos, entendemos que a falta de uma perspectiva crítica no ensino de Matemática se deve, em certa medida, ao fato de a Educação Matemática ser influenciada pela Matemática, que por sua vez mantém relação de imbricação com questões filosóficas cunhadas ao longo da história. Evidentemente que o desenvolvimento da Matemática proporcionou objetos de análise para os filósofos, por outro lado, o uso de teorias filosóficas criou programas de trabalho para o desenvolvimento da Matemática, como é o caso da filosofia formalista de David Hilbert, afirma Silva (2007, p.16). A influência da Matemática na educação se dá no sentido de que a Matemática é um modelo a seguir pela Educação Matemática (SKOVSMOSE, 2020a), e podemos ilustrar essa afirmação com o Movimento da Matemática Moderna, que provocou uma atualização no ensino de matemática ao tornar a teoria dos conjuntos seu conteúdo central. Esse caso mostra como a filosofia da Matemática pode influenciar indiretamente a Educação Matemática, pois o Movimento "[...] não foi uma aberração inexplicável, como seus críticos às vezes parecem imaginar. Foi uma consequência previsível da doutrina filosófica que reduz todas as matemáticas a sistemas axiomáticos expressos na linguagem da teoria dos conjuntos." (HERSH, 1979, p. 33, tradução nossa[4]).

Segundo Silva (2007), a filosofia da matemática é uma disciplina filosófica de caráter próprio, criada recentemente devido à crise dos fundamentos que "eclodiu com a descoberta de paradoxos ou antinomias nas bordas da teoria dos conjuntos de Cantor" (EVES, 2011, p. 674). No entanto, as reflexões filosóficas permeiam a matemática desde Platão; desde os antigos gregos, busca-se responder questões sobre o que são os números, as formas geométricas e os objetos matemáticos em geral, e esses elementos, existem no mundo das ideias ou no mundo físico? Eles dependem ou não dos seres humanos? Qual seria a importância da percepção e da razão na matemática? E ainda, primeiro criam-se as definições e depois se provam teoremas ou se as provas contribuem para a definição dos objetos? etc. Ernest (2018), Skovsmose (1999, 2015, 2017), Bicudo (2013) e Silva (2007) enfatizam que, questões como essas, são tratadas pelas dimensões ontológicas e epistemológicas da filosofia da Matemática, pois se preocupam, respectivamente, com o que são os objetos matemáticos e como podemos

[4] "This was not an inexplicable aberration, as its critics sometimes seem to imagine. It was a predictable consequence of the philosophical doctrine that reduces all mathematics to axiomatic systems expressed in set-theoretic language."

conhecê-los. Convém ressaltar que, os três primeiros autores supracitados, e ainda a Frankenstein (1986), dão importância a duas outras dimensões, a social e a ética.

Frankenstein (1986), inspirada por Paulo Freire, compreende que o conhecimento é ininterruptamente criado, assim como as pessoas refletem e agem no mundo. Ela se preocupa como o ensino de matemática e como as aplicações matemáticas causam alienações que favorecem o espírito acrítico, e como isso, consequentemente, igualmente favorece os sistemas opressores; tal estado de coisas ocorre justamente porque o ensino de matemática esconde a relação de causalidade e a complexidade dos objetos que descreve. São exemplos dessas preocupações, entre outros, a falta de exploração das consequências das aplicações matemáticas na sociedade industrial avançada, a crença que o controle da sociedade altamente técnica deve ser deixado para especialistas e a ideia de neutralidade do conhecimento matemático. Em nossa compreensão, essas dificuldades ajudam a esconder o caráter histórico e social dessa ciência e ela vem servindo para garantir a manutenção do poder das classes dominantes. A proposta de Frankenstein é uma Educação Matemática crítica, na qual o ensino e a aprendizagem das habilidades e dos conceitos básicos de Estatística e Matemática devem ocorrer em contextos de aplicação que desafiam contradições e que envolvam a manutenção das ideologias hegemônicas.

Para Skovsmose (1999, 2015, 2017, 2020) e Ernest (2018) as aplicações baseadas em Matemática podem ter consequências de todos os tipos, não há como ter certeza de que o uso dessa ciência provocará necessariamente melhorias para a humanidade, na verdade há diversos exemplos de maus usos das aplicações. Essa ideia contrapõe certa visão, disseminada no senso comum, que atribui soluções de caráter infalível, exatas e insubstituíveis às aplicações matemáticas, com as quais os problemas são resolvidos de maneira decisiva, dentro do binarismo certo ou errado, o que acaba por conferir à Matemática um caráter eticamente neutro.

Em consequência disso, as ações realizadas com base em justificativas matemáticas são aceitas e assumidas como corretas, mesmo que causem prejuízos à sociedade. Segundo Ernest (2018), as aplicações matemáticas podem causar prejuízos devido à natureza própria desta ciência, pois

> Objetos matemáticos são entidades resultantes da objetificação e abstração e são naturalmente impessoais e insensíveis. As estruturas matemáticas são constituídas por conjuntos abstratos de objetos, baseados em regras e suas relações estruturais. Os processos da matemática são atomísticos e centrados em objetos, baseados em análise desapaixonada e razão, nos quais os sentimentos pessoais não

> têm um papel contribuinte direto (ERNEST, 2018, p. 195, tradução nossa[5]).

Essas características são próprias da teoria de valores separados, e em contraposição aos valores separados (apresentados na citação anterior), presentes nos objetos matemáticos, os valores conectados são aqueles que valorizam as conexões, a empatia, o cuidado, os sentimentos, as intuições, e são centrados no ser humano (GILIGAN, 1982, apud ERNEST, 2018, p. 195-6). Essa conceituação vai ao encontro de outro delineamento teórico que mostra como a Matemática pode ser acrítica por meio da chamada razão instrumental, "a forma objetiva de ação ou pensamento que trata seus objetos simplesmente como um meio e não como um fim em si mesmos. Foca nos meios mais eficientes ou mais econômicos para atingir um fim específico, sem refletir sobre o valor desse fim."[6] (ERNEST, 2018, p.196). Desse modo, quando aplicada indiscriminadamente em questões sociais e humanas, a Matemática pode gerar um efeito deletério,

> Como a matemática é a essência da razão instrumental, com foco nos meios para atingir fins e não nos valores subjacentes, e seus procedimentos requerem padronização, rotinas e desumanização, o apagamento concomitante da ética não é surpresa. Assim, um treinamento em pensamento matemático, quando mal aplicado fora da própria área de validade para o domínio social, é potencialmente danosa e prejudicial. (ERNEST, 2018, p. 198, tradução nossa[7]).

Dentre os vários exemplos de aplicações matemáticas que causaram injustiças apresentados por Skovsmose (2020b), o caso que nos chamou mais atenção foi o do Ford Pinto. Em 1968, a companhia Ford verificou que o modelo Pinto poderia pegar fogo quando envolvido em colisões devido a um erro de projeto. Para decidir continuar a produção, foram necessários dois cálculos; o primeiro para redesenhar o projeto (o que incluiria a troca de maquinário, reestruturação do projeto, aquisição de materiais novos, entre outras mudanças) e o segundo para não redesenhar o projeto (o que demandaria pensar em danos materiais dos clientes). Ao fazer os cálculos das possíveis indenizações

---

[5] "Mathematical objects are entities resulting from objectification and abstraction and are naturally impersonal and unfeeling. Mathematical structures are constituted by abstract and rule-based sets of objects and their structural relationships. The processes of mathematics are atomistic and object-centered, based on dispassionate analysis and reason in which personal feelings play no direct contributing part."

[6] "Instrumental reason is the objective form of action or thought which treats its objects simply as a means and not as an end in itself. It focuses on the most efficient or most cost-effective means to achieve a specific end, without reflecting on the value of that end."

[7] "Since mathematics is the essence of instrumental reason, with its focus on means to ends and not on underlying values, and its procedures require standardization, routinization, and dehumanization, the concomitant erasure of ethics is no surprise. Thus, a training in mathematical thinking, when misapplied beyond its own area of validity to the social domain, is potentially damaging and harmful."

por mortes e ferimentos de pessoas, que envolviam modelos matemáticos para quantificar o valor econômico de uma vida humana, a companhia chegou à conclusão que seria mais econômico não redesenhar o projeto, mesmo que isso resultasse em mortes e ferimentos graves de pessoas. Nesse exemplo, podemos inferir que os valores separados e a razão instrumental alinhados à falta de ética em uma aplicação matemática foram estruturantes nas decisões tomadas pela companha Ford − a consequência foi a priorização do menor custo em detrimento de vidas humanas, afinal, vivemos sob a égide do capitalismo, e nesse sistema, tudo se torna mercadoria e tem seu preço, até a vida humana.

Outro ponto abordado por Skovsmose e Ernest tem relação com a Matemática ensinada na sala da aula. Para Skovsmose (2015), a Educação Matemática pode potencializar e despotencializar os alunos. Exercícios tradicionais em aulas de Matemática contêm toda a informação necessária para a resolução única, favorecendo, assim, uma conduta que não permite questionamentos e despotencializa os alunos. Esse tipo de exercício, muito comum em aulas de Matemática, permite pouca reflexão sobre a Matemática e com a Matemática. Por outro lado, é possível potencializar os alunos ao inseri-los em projetos e atividades de investigação, nos quais podem argumentar, conjecturar, experimentar e testar hipóteses. Para Ernest (2018), sucessivos insucessos concernentes à aprendizagem em matemática, por parte de estudantes, levam-nos a estabelecer uma relação negativa com esse conhecimento, gerando pouca confiança, falta de crença e, acreditamos, certo afastamento das discussões que são baseadas em matemática. Por outro lado, aqueles que conseguem certo sucesso, levam a fama de inteligentes, o que pode colocar os estudantes aptos em matemática em determinado patamar de diferenciação em comparação aos demais, de maneira negativa, porém.

Na sequência, elaboramos a Figura 1 para esquematizar o que apresentamos até agora neste tópico.

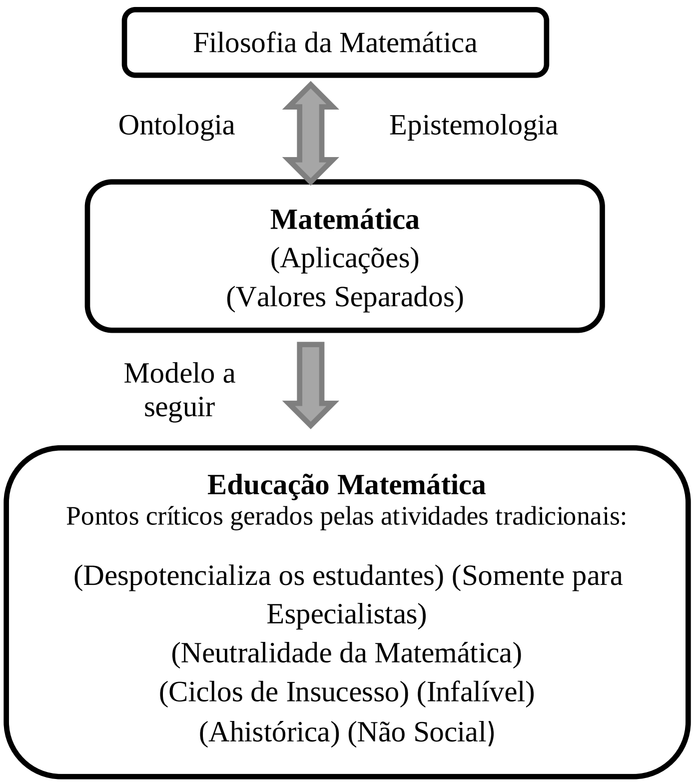
Em síntese, entendemos que a filosofia da matemática e a Matemática se influenciam mutuamente com o direcionamento dado pelas dimensões ontológica e epistemológica (na Figura 1, isso está representado pela seta dupla entre os blocos que representam esses dois campos do conhecimento). Por outro lado, a Matemática tem características de valores separados, o que significa que é impessoal, baseada apenas na razão e busca incessantemente generalidades e abstrações. Suas aplicações não garantem necessariamente melhorias para a humanidade, podem ser boas ou ruins, mas nunca neutras. E como se vê na Figura 1, este é um modelo a seguir pela Educação

Matemática, o que é representado pela seta em único sentido entre Matemática e Educação Matemática. Em outras palavras, a educação matemática usa a matemática como um modelo a ser repetido na educação, por isso podemos encontrar professores que acreditam que basta saber matemática para ensiná-la, sendo a pedagogia desnecessária. Essa ideia, de certa forma, influencia (ou influenciou) o campo da Educação Matemática, e por sorte (ou azar), esse modelo, que tem certas características (valores separados), pode prevalecer, inclusive, no modo como ensiná-la ou no modo de como as atividades são realizadas em sala de aula.

Por ter sua autoridade assim estabelecida ou convencionada, as características separadas (neutralidade ou impessoalidade) desdobram-se nas atividades comumente trabalhadas em sala de aula e geram pontos críticos, tais como ciclos de insucesso que despotencializam estudantes; reforçar uma visão equivocada de que a Matemática é infalível e compreensível apenas para especialistas e negligenciar a temporalidade histórica dessa ciência e corroborar as ideologias dominantes.

Importante alertar que não queremos conferir à Educação Matemática ou às aulas de matemática responsabilidade exclusiva. Muitas vezes, informações jornalísticas, redes sociais, meios de comunicação em geral e as estruturas de poder cooperam para criar e manter os pontos críticos apontados.

Figura 1 - Esquema das influências entre filosofia, matemática e educação



Fonte: Garbin, 2024.

Consideramos pertinente destacar que tais pontos críticos não são as únicas consequências geradas pelas atividades tradicionais. Não entender isso pode nos levar a querer descartar esse tipo de atividade nos processos de ensino e de aprendizagem, mas como veremos adiante, não deve ser o único a ser utilizado em sala de aula. Skovsmose (2000) propõe que atividades tradicionais sejam mais um tipo de atividade, que deve compor o conjunto de atividades trabalhadas em sala de aula.

Apesar dos questionamentos levantados, Skovsmose (2017) e Ernest (2018) reconhecem a importância da Matemática para a sociedade em geral ao afirmarem que, as tecnologias apoiadas na Matemática constituem o ambiente em que a vida humana se realiza (SKOVSMOSE, 2017), e a Matemática é um elemento ampliado da cultura humana, um meio para o desenvolvimento pessoal e uma valiosa ferramenta para uso social (ERNEST, 2018).

Desse modo, a partir da compreensão que as aplicações baseadas em matemática podem ser de qualquer tipo (não garantindo necessariamente melhorias para a humanidade) e que ela abarca as dimensões filosóficas tradicionais (ontológica e epistemológica), Skovsmose (1999, 2015, 2017, 2020) propõe duas novas dimensões à filosofia da Matemática, a social e a ética, apostando que isso também incidirá na Educação Matemática. Essas dimensões se referem, respectivamente, às formas do mundo estar na Matemática e da Matemática estar no mundo, ou seja, enquanto a dimensão social se refere às maneiras como a estrutura social influencia as teorias matemáticas – implicando afirmar que a matemática é vista como um produto da humanidade, desenvolvido ao longo da história −, a dimensão ética se refere às formas como a Matemática afeta a estrutura social. Ernest, por seu turno, propõe que filosofia e ética sejam ensinadas juntas à Matemática para desmistificar que esta não tem responsabilidade social. (ERNEST, 2018).

Nesse sentido, as dimensões ética e social podem fomentar o que definimos por crítica, pois irão permitir a reflexão sobre consequências dos usos da Matemática e do ensino desta e, consequentemente, a preparação de indivíduos para uma ação qualificada, no que diz respeito à superação dos pontos críticos encontrados.

Intentamos mostrar como essas reflexões, e outras que apresentamos nas subseções 2.1 e 2.2, nos deram base para agir. A partir disso, faz sentido a primeira questão de pesquisa:

- Quais características deve ter uma abordagem de ensino em Matemática para desenvolver uma formação crítica em estudantes da Educação Básica?

Capítulo 2. Educação Matemática Crítica

Apesar da preponderância da produção de Ole Skovsmose, as raízes da Educação Matemática Crítica (EMC) datam de 1988, segundo Arthur Powell (TORISU, 2017, p.10). Em julho daquele ano, em Budapeste, foi realizado o congresso ICME – 6, no qual, pela primeira vez, se dedicou um dia para estudos sociológicos em Educação Matemática. Houve também um dia exclusivamente voltado para discussões sobre as influências da Educação Matemática na sociedade. Participaram educadores matemáticos, como Alan Bishop, Munir Fasheh, Stieg Mellin-Olsen, Cecile Hoyles, Christine Keitel, Peter Damerow, Paulus Gerdes, e muitos educadores matemáticos da África do Sul e brasileiros. Em outubro do mesmo ano, Arthur Powell e John Volmink, ambos da África do Sul, organizaram um grupo para publicar~~,~~ em um boletim, ideias sobre Educação Matemática Crítica (EMC) − eles acreditavam que a Matemática deveria ser redirecionada para ajudar as pessoas a resolverem problemas sociais e tornar a sociedade mais justa, e tal redirecionamento seria papel do ensino de matemática.

A EMC, segundo Skovsmose (2015), é a expressão de preocupações com a Educação Matemática. O foco dado a esse campo da Educação não é restritivo, pois "essas preocupações podem estar relacionadas tanto a noções mais gerais como autonomia, liberdade, equidade e justiça social, como também com questões relacionadas às formas de interação, ensino e aprendizagem nas aulas de matemática." (MOURA, 2020, p. 55). Outra preocupação é o desenvolvimento da noção de matemacia. Em palestra[8] realizada no Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós Graduação em Educação Matemática de 2020 (EBRAPEM, 2020), Skovsmose destacou suas preocupações com a sociedade, com a Educação Matemática e com a Matemática.

Neste capítulo, motivado pelas preocupações colocadas pela EMC (SKOVSMOSE, 1999, 2015, 2017, 2020), são levantados alguns pontos críticos referentes às aplicações da matemática e, como forma de incidir sobre esses pontos, propostas de abordagens no ensino de matemática são apresentadas.

Iniciamos problematizando a importância da alfabetização e a possibilidade de um conhecimento reflexivo (SKOVSMOSE, 2017), que atribua à alfabetização matemática um caráter crítico. Nessa perspectiva, é possível ler e escrever o mundo com a Matemática, focando na justiça social (GUTSTEIN, 2006), consequentemente, é

[8] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=micofSQHvAs. Acesso em: mar. de 2023.

necessário compreender como e quanto a Matemática está presente na constituição da nossa realidade. Para isso, utilizamos conceitos de Matemática em ação (SKOVSMOSE, 2020) e ideologia da certeza (BORBA; SKOVSMOSE, 2001). Ao final, apresentamos as concepções de uma abordagem investigativa (SKOVSMOSE, 2000) que possibilita uma cooperação investigativa por meio do diálogo (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010), como formas de intervir sobre a realidade da sala de aula.

2.1 Ler e escrever o mundo com a Matemática

A alfabetização pode servir a diferentes funções, como afirma Skovsmose (1994, 2017). Por um lado, é essencial para que as pessoas consigam acessar um emprego e saibam quais obrigações devem seguir; por outro, é uma condição para a emancipação. Eric Gutstein (2006), na obra *Reading and Writing the World with Mathematics: Toward a Pedagogy for Social Justice*, inspirada em Paulo Freire, apresenta a alfabetização crítica como aquela que mostra relações entre ideias, questiona verdades absolutas e interesses envolvidos, reflete acerca dos aspectos históricos, sociais e políticos sobre os quais a sociedade foi constituída para que as pessoas possam identificar as causas de injustiças e serem agentes de mudança da realidade. Em contraposição, a alfabetização funcional é qualquer grupo de aptidões e saberes “que não engendra a procura sistemática das causas profundas da injustiça, mas que, em vez disso, não examina as desigualdades estruturais que perpetuam a opressão.” (GUTSTEIN, 2006, p. 7, tradução nossa[9]).

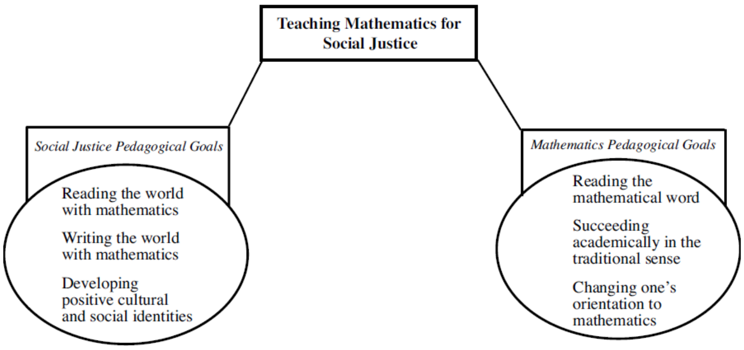
Sabendo da importância da Matemática na conformação da realidade e na formação crítica das pessoas, Skovsmose considera um conhecimento reflexivo aquele “que se refere à competência de refletir sobre o uso da matemática e avaliá-lo [...] Reflexões têm a ver com avaliações das consequências do empreendimento tecnológico.” (SKOVSMOSE, 2017), conferindo, assim, à alfabetização matemática um caráter crítico. Nesse sentido, a alfabetização matemática (quando crítica) é similar ao conceito freiriano literacia, que “pode significar muito mais do que a competência de ler e escrever [...] pode se referir também à competência para interpretar uma situação como algo que pode ser alterado ou à identificação de mecanismos de repressão.” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 11). À luz dessa perspectiva, Skovsmose (2010)

[9] “[…] that does not engender the systematic search for the root causes of injustice, but instead leaves unexamined structural inequalities that perpetuate oppression.”

concebe a matemacia como uma capacidade que vai além de saber realizar cálculos, inclui usar os números em diversas situações e refletir sobre as consequências das aplicações matemáticas; destarte, a EMC preocupa-se com o desenvolvimento da matemacia.

Em sintonia com essas qualidades da alfabetização matemática, ou seja, preocupado com a mais ampla libertação da opressão (considerada aspecto fundamental, em Gutstein) e, em como estudantes utilizam a Matemática que aprenderam (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p.14), Gutstein (2006) apresenta dois objetivos teórico-pedagógicos para o ensino de Matemática para a Justiça Social, um centrado na justiça social e o outro na Matemática, conforme apresentamos, abaixo, com a Figura 2.

Figura 2 - Ensinar matemática para justiça social, segundo Gutstein



Fonte: GUTSTEIN, 2006, p.23

Segundo Gutstein (2006), os objetivos pedagógicos para justiça social são, a saber, ler e escrever o mundo com a matemática, e desenvolver identidades culturais e sociais positivas; e os objetivos pedagógicos da Matemática são, ler a palavra matemática, ter sucesso acadêmico no sentido tradicional, e mudar a orientação de alguém para a matemática.

Essa distinção no conjunto de objetivos ocorre para que seja possível realizar a apresentação e interpretação dos mesmos, no entanto, não devem ser considerados separadamente, pois se relacionam dialeticamente, e cada um é necessário, e nenhum é suficiente por si só para se concretizar o ensino de matemática para justiça social.

Baseado na ideia de Paulo Freire de ler o mundo, ler o mundo com a matemática significa entender as condições sociais, políticas, históricas e culturais da existência humana,

> Usar a matemática para compreender relações de poder, injustiças na distribuição de recursos e oportunidades díspares entre diferentes grupos sociais e para compreender a discriminação explícita com base

> em raça, classe, gênero, idioma e outras diferenças. Além disso, dissecar e descontruir meios de comunicação e outras formas de representação. Significa usar a Matemática para examinar esses vários fenômenos, tanto na vida imediata de alguém como no mundo social mais amplo e identificar relações e fazer conexões entre eles. (GUTSTEIN, 2003c, p. 45 apud GUTSTEIN, 2006, p. 26, tradução nossa[10]).

Escrever o mundo com a matemática é proporcionar a visão que as pessoas podem e devem modificar o mundo, pois são agentes no processo histórico. Esse processo se relaciona ao de ler o mundo, assim como se relacionam os processos reflexão-ação na práxis, isto é, ler o mundo e escrevê-lo (com a Matemática) são partes de um mesmo processo, um depende do outro e um amplia a potencialidade do outro.

Desenvolver identidades culturais e sociais positivas é um processo fundamental pelo qual os estudantes devem aprender a ler o mundo e se apropriar do conhecimento matemático para ter sucesso acadêmico e prosperar em um mundo regido pela ideologia dominante, mantendo suas raízes com a língua, a comunidade e a cultura de origem (GUTSTEIN, 2006, p. 28).

Entre os objetivos pedagógicos da matemática, escrever o mundo com a matemática significa para Gutstein "desenvolver o poder matemático." (GUTSTEIN, 2006, p. 29, tradução nossa[11]). Nessa expressão, entendemos o termo escrever, assim como o ler e o escrever o mundo, ou seja, o ler o mundo inclui ler a palavra matemática, entendendo seus condicionantes históricos, culturais e sociais, pois a compreensão limitada da matemática pode afetar a leitura e a escrita do mundo com a matemática. Segundo o autor, nos Estados Unidos da América estudantes das classes sociais mais baixas têm maior insucesso em matemática, e isso implica imediatamente no segundo aspecto dos objetivos pedagógicos da matemática, qual seja, o do sucesso acadêmico no sentido tradicional. Transportando estas observações para o cenário brasileiro, isso significa proporcionar aos nossos estudantes condições para que obtenham bons resultados nos vestibulares; acesso às melhores escolas de ensino médio (por meio dos vestibulinhos para cursos técnicos); possibilidades reais de alcançarem carreiras públicas; sucesso em processos seletivos de empresas privadas – note-se, todo esse rol

---

[10] "[...] to use mathematics to understand relations of power, resource inequities, and disparate opportunities between different social groups and to understand explicit discrimination based on race, class, gender, language, and other differences. Further, it means to dissect and deconstruct media and other forms of representation. It means to use mathematics to examine these various phenomena both in one's immediate life and in the broader social world and to identify relationships and make connections between them."

[11] "[...] developing mathematical power [...]."

de benefícios é independente se a área de interesse do estudante seja ou não a matemática. Esse sucesso possibilita aos estudantes acesso às melhores escolas, o que consequentemente pode proporcionar uma formação mais qualificada, que por sua vez, pode implicar em melhores salários e condições de vida.

Por fim, mudar a orientação de alguém para a matemática significa fazê-la ser compreendida mais do que um conjunto de regras desconexas que devem ser memorizadas. Isso claramente pode contribuir para desenvolver o poder da matemática e o sucesso acadêmico, mas também possibilita que a matemática seja compreendida como produto da realidade em que vivemos.

Em nossa intepretação, a educação para a justiça social e ler e escrever o mundo com a matemática, conforme apresentado por Gutstein (2006), vão ao encontro do que entendemos por crítica, pois possibilitam os processos de reflexão e ação em uma sociedade em que a ideologia dominante camufla a origem dos problemas e deixa os trabalhadores apáticos em relação às possibilidades de serem agentes históricos, capazes de realizarem mudanças sociais.

2.2 Matemática e sociedade

No mundo ocidental contemporâneo, a tecnologia incide na forma como estamos no mundo de tal modo que Skovsmose (2001) utiliza o termo tecnonatureza para enfatizar que a tecnologia não é apenas mais uma maneira como a sociedade tenta manter-se viva em meio à natureza, e sim nossa condição de existência.

O termo tecnologia, ao ser analisado com base no senso comum, pode nos levar a crer que se refere apenas a computadores, celulares, foguetes e grandes invenções baseadas em tecnologia digital e eletrônica; no entanto, para nós é mais do que isso, pois

> a. a tecnologia tem relação [não linear] com a ciência, com a técnica e com a sociedade;
> b. a tecnologia integra elementos materiais — ferramentas, máquinas, equipamentos — e não-materiais — saber fazer, conhecimentos, informações, organização, comunicação e relações interpessoais;
> c. a tecnologia tem relações com fatores econômicos, políticos e culturais;
> d. a evolução da tecnologia é inseparável das estruturas sociais e econômicas de uma determinada sociedade. (BAZZO, 2011, p. 117, apud BRASIL, 2013, p. 25).

Essas definições ampliam o conceito de tecnologia para além do senso comum e engloba saberes, materiais e técnicas diversas engendradas, organizadas e legitimadas ao longo do tempo (ou por um período) pela humanidade como um todo (ou em alguns grupos sociais). Nesse sentido, o calendário, computadores, produto interno bruto (PIB), saber costurar ou construir uma parede, ser simpático, a escrita etc., são exemplos de tecnologias.

No entanto, vamos nos referir às tecnologias nas quais a Matemática é um elemento estruturante. Não faltam exemplos nesse sentido – o sistema monetário de cada pais; o sistema econômico mundial; o controle da pandemia do novo coronavírus ou mesmo questões locais, como quem deve receber auxílio emergencial do governo; ou quais são as consequências sociais da queda da bolsa de valores em determinada região do país; se existe ou não déficit previdenciário, são tecnologias que se realizam de maneira multidisciplinar, mas passam invariavelmente por modelos matemáticos escolhidos a partir de parâmetros determinados em cada situação, e de acordo com interesses que não são totalmente claros. Em vista disso, a Matemática tem um poder de formatação, pois "intervém na realidade ao criar uma 'segunda natureza' ao nosso redor, oferecendo não apenas descrições de fenômeno, mas também modelos para a alteração de comportamentos." (SKOVSMOSE, 2017, n.p.).

Com a informática, sabidamente estruturada pela Matemática, não é diferente. Mais do que trazer facilidades ou dificuldades à educação, provoca mudanças qualitativas na relação dos seres humanos com a produção de conhecimento. Borba (2002), com base em Levy (1993, apud BORBA, 2002) e Tikhomirov (1981, apud BORBA, 2002), afirma que não existe dicotomia entre técnica e seres humanos, pois as técnicas aprimoram o raciocínio dos seres humanos enquanto estes estão aprimorando constantemente as técnicas. Além disso, uma mídia como a informática – entendemos mídia como uma tecnologia – reorganiza o pensamento, assim como a oralidade e a escrita o fizeram; oralidade, escrita, imagens e experimentação se integram para organizar a forma como aprendemos. A partir dessa perspectiva, Borba (2002) cunha o termo seres-humanos-com-mídias para enfatizar que a produção do conhecimento se dá com os seres humanos na interação com tecnologias que o próprio ser humano desenvolveu na relação com o outro e com o meio ambiente "tal noção é adequada para mostrar como o pensamento se reorganiza com a presença das tecnologias da informação e que tipos de problemas são gerados por coletivos que incluem seres humanos e mídias como o lápis e papel e diversas facetas das tecnologias da informação." (BORBA, p. 139, 2002).

Outro conceito que também evidencia a influência determinante da Matemática em nossas vidas é a ideologia da certeza, “[...] vemos a ideologia da certeza como uma estrutura geral e fundamental de intepretação para um número crescente de questões que transformam a matemática em uma ‘linguagem de poder’.” (BORBA; SKOVSMOSE, 2001, p.129).

Apesar de a ideologia da certeza não ter seu cerne nos fundamentos da matemática (SNAPPER, 1979, apud BORBA; SKOVSMOSE, 2001) e nem no aspecto social da matemática (BORBA, 1987; D’AMBROSIO, 1994, apud BORBA; SKOVSMOSE, 2001), ela confere à Matemática (e às ciências naturais e às tecnologias), um caráter de neutralidade, exatidão, infalibilidade, visto que são consideradas livres de influências sociais e políticas, pertencentes ao paradigma verdadeiro ou falso, e fechadas em si mesmas. Outrossim, ela camufla que um modelo matemático aplicado é inevitavelmente concebido a partir de um recorte da realidade, isto é, apenas aquilo que pode ser descrito por números é considerado. Um dos motivos da difusão dessa visão é devido à ideia restrita de que a realidade está diante de nós e a matemática apenas a descrevesse.

Questionando essa visão, Skovsmose (2015) propõe uma analogia para explicar os aspectos descritivos e performativos das linguagens; afirma ele que, quando alguém faz uma promessa, algo a mais está sendo feito além do que foi descrito, quer dizer, se uma pessoa promete visitar o amigo, ela cria a obrigação de cumprir com o prometido e ainda gera expectativa na pessoa para quem a promessa foi feita. De acordo com Skovsmose (2020a), no positivismo, a linguagem científica deve apresentar apenas as características do objeto, ela não deve se preocupar com quem observou e porque observou, ou seja, qualquer subjetividade deve ser eliminada. Nesse sentido, acredita-se que a matemática é um constructo que permite desprender o objeto científico do observador. Por outro lado, as interpretações performativas destacam os impactos da ciência na sociedade. Se podemos compreender a Matemática como a linguagem das ciências e das tecnologias, então, ela contém elementos de ação (SKOVSMOSE, 2015, 2020a), ou seja, a matemática também é performativa e por isso não pode se realizar em um vazio ético. Isso quer dizer que as ações baseadas em Matemática não podem acontecer sem uma reflexão profunda sobre suas consequências na sociedade.

Skovsmose (2020a) utiliza intepretação performativa para descrever as ações baseadas em Matemática por meio da matemática em ação, que para ele são a imaginação tecnológica, o raciocínio hipotético, a legitimação ou a justificação, a realização e a dissolução de responsabilidade.

A imaginação tecnológica é descrita como, o

> [...] potencial de identificação de novas possibilidades tecnológicas. A imaginação pode ser expressa em qualquer tipo de linguagem, e a linguagem natural é uma possibilidade. Contudo, a linguagem da matemática inclui potenciais particulares para a formulação de possibilidades. (SKOVSMOSE, 2020a, n. p., tradução nossa[12]).

Exemplos dessa imaginação são a invenção do computador, a definição dos preços de um produto, criptografia, internet etc., que até poderiam ser engendrados por outras linguagens, não alcançariam o desenvolvimento atual se não fosse a matemática. De qualquer forma, a vida no mundo ocidental se realiza por meio dessas tecnologias, e por isso há implicações éticas em seus usos.

O raciocínio hipotético relaciona-se a afirmações do tipo p implica q e são usadas em diversos tipos de contexto, por exemplo, em uma empresa que precisa avaliar os riscos de um investimento ou na engenharia para avaliar qual ação deve ser realizada no solo para que este resista ao peso da estrutura de uma ponte. Esse tipo de raciocínio tenta prever quais são as consequências de se assumir uma situação hipotética. Dessa forma, um engenheiro deve pensar que, se deseja construir uma ponte cuja estrutura pesa x toneladas, então, deverá tomar as ações y, z, w. Essa matemática em ação limita a modelagem da realidade, pois apenas características que podem ser expressas por números podem ser consideradas. Isso implica em uma reflexão ética dos usos sociais de modelos matemáticos.

A realização refere-se à matemática criar a realidade, inclusive mudando condutas como, por exemplo, a velocidade da comunicação entre as pessoas (via aplicativos de mensagens instantâneas) pode ser um grande facilitador para situações de emergência e necessidade, no entanto, podem sobrecarregar as tarefas diárias exigindo que as atividades humanas referentes ao trabalho aconteçam em ritmo acelerado ou invadam o tempo de descanso de trabalhadores. Outros exemplos de realização podem ser a produção de vacinas contra o SARS-CoV-2, que foi criada em um espaço de tempo que antes seria impossível. Como considerado anteriormente, há implicações positivas e negativas concernentes a essa matemática em ação, logo, precisamos refletir criticamente sobre ela.

12 “Imagination can be expressed in any type of language, and natural language is one possibility. However, the language of mathematics includes particular potentials for formulating possibilities.”

A dissolução de responsabilidade também é uma matemática em ação com a qual comumente nos deparamos. Quando um sistema falha ou comete um erro, não sabemos quem é o responsável, se o dono da empresa, se o atendente que opera o sistema, se o desenvolvedor e, mesmo que seja possível identificá-lo, não conseguimos entrar em contato com o mesmo que, muitas vezes, no mundo globalizado, vive em um local distante de onde o problema ocorreu.

Legitimação ou justificação são as formas com as quais os argumentos são utilizados em favor de uma decisão,

> [...] justificação consiste em apoiar logicamente, de maneira apropriada e genuína, uma afirmação, uma decisão ou uma ação. Naturalmente, não é fácil definir o que é apropriado e genuíno, e nem mesmo o que é lógico, mas a noção de justificação carreia a premissa de que, até certo grau, houve uma honestidade lógica envolvida. A noção de legitimação não inclui essa premissa. Pode-se tentar legitimar uma ação ao apresentar alguma forma de argumentação, mas sem se preocupar com o aspecto lógico. Tentar legitimar uma ação, na verdade, é tentar fazer parecer como se ela estivesse justificada. Em geral, uma legitimação é uma justificação *como se*. (SKOVSMOSE, 2015, n. p., itálico do autor).

Aproveitando discussão colocada por Ernest (2018), as imagens social e pessoal da matemática − como assunto difícil; abstrato; acessível para poucos; em geral do sexo masculino; com alta taxa de ciclos de insucessos referentes à aprendizagem, causando uma atitude negativa e pouca confiança à matéria matemática − indicam, em parte, porque uma quantidade considerável de cidadãos se abstém de discussões relevantes a respeito de decisões tomadas com base nos usos de tecnologias em nossa sociedade, porque há grande dificuldade de se perceber a diferença entre um argumento baseado na justificação e um argumento baseado em uma legitimação por autoridade, ou seja, os argumentos são aceitos sem que sejam feitas reflexões sobre eles. Evidentemente que a falta de capacidade de distinção entre os argumentos lógicos dedutivos e argumentos com base na autoridade traz mudanças na realidade e são necessários de serem abordados eticamente.

O nosso sistema econômico é um exemplo de imaginação tecnológica que forja a realidade a partir dos parâmetros formais e pela matemática em ação. Nos últimos anos, o Brasil passou por reformas trabalhistas (Lei 13.467/17, 2017), que alteraram as relações entre trabalhadores e empregadores, e da previdência (EC 103/19, 2019), que modificaram o regime de aposentadorias e a emenda constitucional do Teto de Gastos – (EC 95/2016, 2016). Para que essas reformas fossem aprovadas, houve grande fluxo de informações e argumentos, e bases matemáticas foram usadas para justificar a viabilidade ou não de tais reformas e emendas. No caso específico da reforma da previdência, apoiadores da proposta defendiam diversos pontos, dentre eles que existia um rombo previdenciário,

> Em 2018, o déficit da previdência foi de R$ 265 bilhões, entre o que foi arrecadado e investido para pagar o sistema de previdência e assistência no Brasil. E em 2019 serão R$ 294 bilhões. Isso é progressivo ano a ano, disse. Marinho explicou que a população brasileira está vivendo mais e que a taxa de fecundidade vem caindo gradativamente. Isso significa que, ano a ano, há menos pessoas em idade ativa realizando recolhimentos para o sistema previdenciário. (BRASIL, 2019 [apresentação do secretário Rogério Marinho sobre a PEC 06/2019, da Nova Previdência].

No entanto, havia argumentos contrários à questão do déficit previdenciário,

> A Previdência está inserida na Seguridade Social, juntamente com a Assistência Social e a Saúde, conforme está escrito no Art. 194 de nossa Constituição Federal. [...] constituintes cuidaram de estabelecer fontes de receitas diversas, pagas por toda a sociedade (Art. 195), ou seja:
>
> – empresas contribuem sobre o lucro (CSLL) e pagam a parte patronal da contribuição sobre a folha de salários (INSS);
>
> – trabalhadores contribuem sobre seus salários (INSS);
>
> – e toda a sociedade contribui por meio da contribuição embutida em tudo o que adquire (Cofins).
>
> Desde a aprovação da Constituição até 2015 (inclusive) o superávit de recursos na Seguridade Social [...] o superávit tem sido impressionante [...] A sobra de recursos foi, por exemplo, de R$72,7 bilhões em 2005; R$ 53,9 bilhões em 2010; R$ 76,1 bilhões em 2011; R$ 82,8 bilhões em 2012; R$ 76,4 bilhões em 2013; R$ 55,7 bilhões em 2014; e R$11,7 bilhões em 2015.
>
> Em 2016, pela primeira vez não houve sobra de recursos na Seguridade Social; NÃO por culpa dos direitos sociais, mas SIM pela irresponsabilidade do próprio governo que além de conceder desonerações exageradas a diversos setores, errou feio na política monetária e produziu a crise que jogou mais de 13 milhões de pessoas no desemprego, além de 37 milhões de pessoas na informalidade, comprometendo brutalmente a arrecadação ao INSS. [...]
>
> A simples existência do mecanismo da DRU (Desvinculação de Receitas da União) desde 1994 (na época com a denominação de Fundo Social de Emergência) comprova que sobram recursos na Seguridade Social. Se faltasse recurso, não haveria nada para desvincular, evidentemente. (FATORELLI, 2019, n. p.)

Uma posição defende que existe déficit, enquanto outra afirma não existir déficit, mas ambas as argumentações fazem uso da matemática − não só ela − para a construção de um modelo para o cálculo do déficit previdenciário. Um desses argumentos prevaleceu e a reforma foi aprovada, moldando as perspectivas de vida das pessoas nos próximos anos, inclusive a velhice. Nessa explanação, nota-se que um argumento baseado em modelos matemáticos definiu como será o futuro de milhões de pessoas, as quais deverão trabalhar por mais anos para receber sua aposentadoria.

Quando comparamos essas argumentações, percebemos a matemática em ação; por exemplo, pela dissolução de responsabilidade e pela justificação e legitimação, contata-se que o primeiro argumento não deixa muito claro qual o motivo do suposto déficit que acaba sendo legitimado pelo fato de a natalidade ter diminuído − não podemos afirmar com exatidão quais as causas da queda da natalidade, a não ser uma conduta social que leva as pessoas a terem menos filhos. Em contrapartida, o segundo argumento deixa claro que a arrecadação da previdência bebe de diversas fontes, o que justifica que não há déficit previdenciário.

Podemos concluir que a matemática está presente em nossas vidas de maneira intrínseca à nossa realidade, molda nossas oportunidades, escolhas, trabalho, condições sociais, enfim, compõe ideologias e cria a realidade ao nos dar uma intepretação sobre ela. O uso da matemática é determinado por interesses de quem detém o poder, portanto não é isento, neutro, muito menos infalível. A humanidade continuará desenvolvendo tecnologias que, por sua vez, continuarão forjando a maneira como interpretamos a realidade. Então, se queremos como educadores, desenvolver uma formação crítica nos estudantes, é necessário que se desenvolva um olhar crítico sobre o papel da matemática na realidade, para que esta seja compreendida amplamente, a fim de criar condições para as mudanças necessárias.

2.3 Cenários para Investigação

Em acordo com as preocupações da EMC, Skovsmose apresenta uma alternativa à maneira tradicionalmente estabelecida em que ocorrem as aulas de Matemática. A forma de propor as atividades muda para que se abra espaço para o diálogo como a principal forma de interação entre professores e alunos.

No conceito paradigma do exercício, as atividades matemáticas são expressas por uma lista de exercícios que apresentam uma ordem direta como, por exemplo, efetue, encontre a soma, simplifique, racionalize; ou exercícios em que todas as informações necessárias para a resolução estão no próprio exercício, não sendo necessário questionamento algum. Exemplificando a propositura, Mara tinha R$5,00 e comprou um pacote de bolacha que custava R$2,50, então, quantos reais sobram para Mara? Skovsmose (2017) questiona se esse tipo de atividade corrobora para o indivíduo ser um cidadão que obedece cegamente às ordens, quer dizer, se não é a ideal para reforçar a apatia social continuamente explorada pelo mercado neoliberal, no qual as pautas econômicas causam grande desigualdade social e injustiças em todo o mundo.

Em contraparte, cenários para investigação podem ser caracterizados pela aprendizagem como uma ação, intenção e pesquisa ou investigação. Exemplificativamente, destacamos o estudo de funções no paradigma do exercício, que assim seria proposto: "Duas funções f e g de R em R (R significa o conjunto dos números reais) são definidas pelas equações abaixo: $f(x) = 2x + 3$ $g(x) = -x + 5$. Encontrar a equação da função inversa f^{-1}. Encontrar a equação das funções compostas fog e gof. Desenhar os gráficos de f e f^{-1}." (SKOVSMOSE, 2015, n. p.). Em cenários para investigação, a proposta seria:

> Considere duas funções, f e g, da forma $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. (Os parâmetros a, b, c e d podem ser quaisquer valores em R, e as funções f e g devem ser funções de R em R.) Seria possível dizer de antemão algo sobre os gráficos das funções f, g, f^{-1}, g^{-1}, gof, fog, $f^{-1}og^{-1}$ etc.? E, que tal se um novo conceito, //, que indicasse a interseção dos gráficos, fosse proposto? f//g seria, assim, a interseção entre os gráficos das funções f e g, caso eles se interceptassem de fato. (SKOVSMOSE, 2015, n. p.).

Nesse exemplo, é possível notar as diferenças entre as ações necessárias para a realização da atividade no paradigma do exercício e em cenários para investigação; neste último, está aberta a possibilidade de se executar uma ação com intenção de investigar mudanças que ocorrem nos gráficos ao variar cada parâmetro, criando oportunidade para o surgimento de questionamentos vindos da interpretação e de conhecimentos próprios que o indivíduo possui. Tal não ocorre no primeiro modelo, pois na lista de exercício está aberta apenas a possibilidade de dúvidas referentes à construção de gráfico, funções inversas e compostas, ou seja, não há espaço para a formação de conjecturas, a única intenção presente é a de executar a ação solicitada. Em outras palavras, cenários para investigação "sugere outras formas de interação abrindo espaços para aprendizagem crítica por meio do diálogo [...] busca propiciar um ensino e aprendizagem de matemática que convide os estudantes para crítica e reflexão." (MOURA, 2020, p. 21).

Algumas características atinentes à postura do professor são necessárias em cenários para investigação. No paradigma do exercício, professores estão preocupados em corrigir o resultado final, que estará certo ou errado, independentemente do raciocínio e da argumentação desenvolvidos. Há apenas um resultado correto e o tratamento dos erros não é adequado, pois não são considerados em suas especificidades. Todos os elementos necessários para a resolução do problema estão no enunciado, o que impede considerações além das tidas como necessárias pelo professor. A comunicação entre professor e estudantes é hierarquizada a todo o momento. Em cenários para investigação, porém, não há foco nos erros, mas sim nas consequências de cada decisão. Uma atividade se constituí em cenários para investigação se os estudantes aceitarem o convite para realizá-las, o que pode funcionar com determinado grupo e com outros não. Há certa imprevisibilidade, haja vista que a abertura da atividade e as características da comunicação necessárias nesse tipo de abordagem podem gerar questões diferentes das esperadas pelo professor. Como veremos mais detalhadamente no próximo subcapítulo, estudantes e professores suspendem momentaneamente suas diferenças relacionadas aos seus papéis na educação para se comunicarem sem hierarquias.

Esses dois tipos de atividades são divididos em ambientes para aprendizagem que fazem referências a conceitos puramente matemáticos, semirrealidade e realidade. Na sequência, na Tabela 1, apresentamos essas subdivisões.

Tabela 1- Ambientes de aprendizagem, segundo Skovsmose

	Paradigma do Exercício	Cenários para Investigação
Referência à Matemática Pura	(1)	(2)
Referência à Semirrealidade	(3)	(4)
Referência à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose, 2015.

Os ambientes de aprendizagem (1), (3) e (5) pertencem à lista de exercícios. O relacionado à matemática pura (1) é constituído de atividades que fazem referência a objetos puramente matemáticos, com enunciados característicos como, calcule o valor da expressão e racionalize as frações. O ambiente (3) tem ligação com a realidade, mas seus dados não são extraídos da realidade, por exemplo, uma questão com a seguinte redação: A neta de seu Francisco foi à padaria comprar 5 pães que custaram R$6,00. Se a neta tiver uma nota de R$10,00, qual será o troco? e se tiver uma nota de R$20,00, qual será o troco? (Nesse caso o valor do pão foi inventado). O ambiente (5) faz referência à realidade, isso significa que as atividades são realizadas a partir de dados reais. No caso do enunciado acima, a diferença seria que o valor do pão poderia ser baseado em uma padaria que os estudantes frequentam.

Os ambientes relacionados a cenários para investigação também se dividem em três. Um exemplo do ambiente (2) é aquele que citamos acima, no qual o estudante é convidado a investigar o comportamento da função de acordo com a variação de seus parâmetros. O ambiente (4) tem referência na semirrealidade; vejamos, se a simulação de uma feira for realizada para estudantes que estão conhecendo os números, talvez seja necessário evitar valores não inteiros, enquanto em séries mais avançadas é necessário que esses valores apareçam para que seja possível trabalhar as operações com números decimais.

Por fim, o ambiente (6) é uma atividade educacional com referência à realidade, como fazer o levantamento dos dados referentes à autodeclaração racial dos estudantes de uma escola, a fim de estudar a correlação com a renda, escolaridade, acesso a equipamentos de cultura, residência, perfil socioeconômico e comparar com estudos realizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Uma atividade desse tipo envolve ação e intenção dos estudantes em investigar a respeito do perfil social dos estudantes da escola a partir de dados reais.

Ao apresentar os ambientes de aprendizagem, Skovsmose (2015) não coloca cenários para investigação como a solução para a questão da aprendizagem e os ambientes análogos ao paradigma do exercício como aqueles a serem evitados. Muito ao contrário, afirma que a tabela apresentada deve servir de referência para que educadores possam verificar em qual ambiente a atividade proposta se encaixa, a fim de que se possa, ao final de determinado período, proporcionar aos estudantes o trânsito por todos os ambientes. Podemos exemplificar afirmando que, faria sentido aplicar uma lista de exercícios após investigar a relação entre as representações dos números racionais, sendo, no caso, necessário aplicar uma lista de exercícios para que os estudantes realizem divisões.

Em nosso entendimento, cenários para investigação visam imbuir estudantes e professores de uma intenção questionadora e crítica, com a qual seja possível trazer à luz limites, interesses e consequências de atitudes e decisões tomadas durante a investigação ou a análise de determinado conteúdo. Não acreditamos que uma pessoa, ao estudar seções cônicas em cenários para investigação, saia da sala de aula fazendo questionamentos a respeito da ordem social e das injustiças, por assim dizer. No entanto, acreditamos que, ao trabalhar com análises e estudos de possíveis limites e consequências de diferentes estratégias adotadas em uma investigação, estamos desenvolvendo um espírito crítico de não aceitação de verdades absolutas. Esperamos que a mesma estrutura de pensamento que leva uma pessoa a questionar o que acontece com o gráfico de uma função ao variar determinado parâmetro, seja usada para questionar sobre as consequências do uso de carros ou quais as consequências de assumirmos que há déficit previdenciário.

A partir dessa apresentação, toma significado nossa segunda questão de pesquisa:

- A proposta de investigação se caracterizou em cenários para investigação que engajou os participantes a explorarem algumas propriedades dos quadriláteros planos e triângulos? Se sim, como isso se deu?

2.4 Diálogo e Aprendizagem: modelo de cooperação investigativa

A comunicação entre professor e estudantes, que entendemos ser balizada pelo conhecimento do professor em Matemática e em Educação, se dá em meio a uma sequência de ações praticamente imutáveis quando a aula é configurada pelo paradigma do exercício. Explicando a prática, temos que, primeiro o professor explica o conteúdo fazendo diversos exemplos, em seguida, o estudante deve reproduzir o que foi explicado em uma lista de exercícios que, posteriormente, será corrigida pelo professor (SKOVSMOSE, 2015). Em nossa interpretação, o uso da autoridade que cabe ao professor não gera, por si, obstáculos para a aprendizagem. Algumas dificuldades advêm, sim, de uma forma específica de comunicação que ocorre quando essa autoridade é orientada apenas pela lista de exercícios. Juízos equivocados no que tange à Matemática se cristalizam e são difundidos na sociedade a partir dessa formatação das aulas como, por exemplo, “a capacidade para a Matemática é inata.” (MACHADO, 2011, p. 60) é utilizada para que as pessoas não se culpem pelo fracasso que tiveram com essa área do conhecimento, e “a Matemática é exata.” (ibid., p. 30), entendemos, é uma concepção, em parte, engendrada a partir do foco dado ao resultado final durante as aulas de Matemática. Concepção essa também estimulada no uso do livro didático, ou seja, em nossa prática docente na Educação Básica, é comum observarmos, quando entregamos o livro didático para uso em sala de aula, que os estudantes sintam que têm vantagem em relação aos demais quando recebem o livro do professor com os resultados ao lado de cada atividade ou quando descobrem que os resultados estão no final dos próprios livros.

Para Borba e Skovsmose (2001), as fontes de propagação da ideologia da certeza são diversas, mas dão especial atenção a alguns aspectos relacionados à comunicação entre professores e alunos, especialmente no que tange aos tipos de exercícios e de correções bastante comuns em aulas de matemática. Em geral, há um enfoque nos procedimentos algorítmicos e na correção dos resultados sem que o procedimento seja avaliado. Com isso querem dizer que não importa se o estudante errou em alguma passagem de uma divisão ou se usou equivocadamente multiplicação em lugar de divisão, a questão estará errada em ambos os casos. Esses aspectos tornam professor e livro didático autoridades inquestionáveis, pois se o estudante não encontrou o resultado esperado, não há o que fazer a não ser seguir a correção feita pelo professor. Tal atitude, de certa forma, ajuda o estudante a formar uma visão de mundo em que a argumentação é secundária em comparação à autoridade.

Segundo Alrø e Skovsmose (2010, p. 21), os alunos acreditam que "o propósito de se ensinar Matemática é apontar erros e corrigi-los [...] uma razão para a qual o erro parece ser tão importante [...] pode estar relacionada à busca pela 'verdade' na Matemática". Nesse sentido, o que pode causar barreiras à aprendizagem é a forma como o erro é abordado, já que são todos tratados sem alguma qualificação que especifique qual é o tipo de erro, e muitas vezes o erro pode ser na estratégia de resolução ou outras vezes na realização do algoritmo. Quando atuamos como docente, é comum perguntar aos estudantes quantas páginas foram lidas quando uma pessoa leu, por exemplo, da página 20 à página 30; a resposta dada invariavelmente é 10, pois é a diferença entre os números das páginas, ou seja, os estudantes não atentam que a subtração não leva em conta a primeira página lida. Esse erro difere de um erro comum que ocorre em subtrações em que o algarismo de algumas ordens do minuendo é menor do que o algarismo da respectiva ordem no subtraendo, por exemplo a subtração entre 7000 e 5834. A ideia de transformar uma unidade de uma ordem em dez unidades da ordem imediatamente inferior, realizada sucessivas vezes, causa dificuldades na operação do algoritmo da subtração, mas isso não significa que o estudante não saiba os possíveis significados dessa operação e quando deve utilizá-la.

A desatenção também é um fator que leva ao erro, e muitas vezes, estudantes usam o algoritmo correto e o utilizam corretamente, mas utilizam os números errados por desatenção. Também observamos, em nossa atuação docente, erros que ocorrem porque os alunos não têm a prática de refletir sobre o problema e realizam operações por tentativa e erro até que se satisfaçam com algum resultado que julguem corretos. Cada tipo de erro exige uma ação diferente do professor, mas muitas vezes são tratados como absolutos, como quando exclama — Isso está errado! Corrija essas contas! (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 22). Essa forma de agir sobre o erro, é "o fenômeno caracterizado pelo tratamento uniforme de todos os tipos de erro ocorridos em sala de aula como se fossem erros de verdade nós denominamos absolutismo da sala de aula." (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 23). Entendemos que esse fenômeno ocorre devido à preocupação com a busca da verdade na Matemática e nas ciências em geral. Logo, se o estudante não encontra a resposta correta, independentemente do tipo de erro que foi cometido, ele deve ser corrigido – muitas vezes sem que os critérios que balizam o julgamento dos erros sejam apresentados –, pois o objetivo é encontrar a verdade, que nesse caso, é concretizada na resposta correta.

O termo do absolutismo em sala de aula pode ser incrementado para absolutismo burocrático (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 26) quando entendemos que o absolutismo, caso seja instalado em sala de aula, se assemelha a uma burocracia que impede que mudanças ocorram, sob a justificativa de que as regras devem ser seguidas mesmo que suas razões não sejam esclarecidas. Como ilustração, mostra-se adequada a lembrança de uma passagem contida no livro de Eduardo Galeano (2021), intitulado *O Livro dos abraços,*

> A burocracia/3
> Sixto Martínez fez o serviço militar num quartel de Sevilha. No meio do pátio desse quartel havia um banquinho. Junto ao banquinho, um soldado montava guarda. Ninguém sabia por que se montava guarda para o banquinho. A guarda era feita porque sim, noite e dia, todas as noites, todos os dias, e de geração em geração os oficiais transmitiam a ordem e os soldados obedeciam. Ninguém nunca questionou, ninguém nunca perguntou. Assim era feito, e sempre tinha sido feito. E assim continuou sendo feito até que alguém, não sei qual general ou coronel, quis conhecer a ordem original. Foi preciso revirar os arquivos a fundo. E depois de muito cavoucar, soube-se. Fazia trinta e um anos, dois meses e quatro dias, que um oficial tinha mandado montar guarda junto ao banquinho, que fora recém-pintado, para que ninguém sentasse na tinta fresca. (GALEANO, 2021, p. 62)

Assim como em *A burocracia/3*, em que as regras foram seguidas porque sim, de forma burocrática devido a uma ordem de justificativa praticamente inacessível (e qualquer questionamento não seria acatado sem a anuência de uma autoridade, o que levou à realização da guarda de um banco por anos sem que isso fizesse sentido algum), o professor e a estrutura escolar, muitas vezes "estabelecem em termos absolutos o que é certo e o que é errado sem explicitar os critérios que orientam tais decisões." (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 26), levando os estudantes a seguirem certos procedimentos mesmo que não entendam o sentido para tal – e uma das consequências do absolutismo burocrático, é o estudante não agir sobre o conhecimento, mas sobre as regras.

Pelo menos duas formas de comunicação podem ser usadas no absolutismo burocrático, quais sejam, a comunicação tipo sanduíche e o padrão funil. Nessas formas de comunicação, a fala do estudante apenas, digamos, recheia o monólogo do professor, de tal forma que evidencia a existência de uma autoridade que avaliará se a resposta, que em geral é apresentada de forma curta e sem argumentação, está correta. Além disso, o professor considera apenas as respostas corretas, e muitas vezes faz perguntas que afunilam as possibilidades de resposta. As consequências são que os estudantes não têm uma visão geral do que está sendo trabalhado e não pensam sobre o conteúdo que está sendo estudado, pois a ação se resume à adivinhação, às vezes repetindo o que foi dito por outro estudante, às vezes chutando e arriscando uma resposta, às vezes respondendo em forma de pergunta. O desfecho, em geral, é que o professor apresente a resposta correta. (STUBBS, 1996, p. 99 apud ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 27)

Em cenários para investigação, a comunicação deve ser diferente, pois as partes envolvidas devem interagir de forma que cooperem mutuamente na realização de uma investigação. O professor não se comunica apenas corrigindo erros ou apresentando o conteúdo. A atuação docente deve se desenvolver no sentido de apontar consequências das perspectivas adotadas pelos estudantes e as possíveis correções devem se dar pela argumentação em que se apresentem os parâmetros que estabeleceram os erros cometidos.

Nesse sentido, a ideia de diálogo como "uma conversação que visa à aprendizagem." (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 119) e uma forma de "percorrer todo processo do pensamento e mudar o modo como ele acontece coletivamente." (BOHM, 2005, p. 91) é favorecido em cenários para investigação.

Esse diálogo não é, em geral, o tipo de conversa que temos com pessoas cotidianamente, mesmo aquelas que duram horas. Queremos dizer que a noção de diálogo, que se pretende em cenários para investigação, difere do diálogo, cujo significado é dado pelo senso comum. Dialogar contém certas qualidades que levam em consideração o compartilhamento de ideias na tentativa de construção de significados comuns às partes que dialogam. Alrø e Skovsmose (2010) citam o significado etimológico da palavra diálogo apresentado por David Bohm, que nos ajuda a compreender o que buscamos; para Bohm "diálogo vem do grego *diálogos*. *Logos*, significa 'palavra' ou em nosso caso podemos dizer 'significado da palavra'. E *dia* significa 'através' e não 'dois', como parece." (BOHM, 2005, p. 33, itálicos e aspas do autor). Assim, dialogar é uma ação cooperativa, e se é ação, então, dialogar faz mais do que simplesmente descrições (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 133), gera efeitos, como assevera Bohm,

> Nele, quando alguém diz alguma coisa o interlocutor em geral não responde com o mesmo significado que a primeira pessoa deu às palavras. Os significados são similares, mas não são idênticos. Desse modo, quando a segunda pessoa responde, a primeira percebe uma diferença entre o que ela quis dizer e o que a outra entendeu. Ao considerar essa diferença, ele pode perceber algo novo, alguma coisa importante tanto para seus pontos de vista quanto para os do interlocutor. [...] Desse modo, num diálogo cada pessoa não tenta tornar comuns certas ideias ou fragmentos de informação por ela já sabido. Em vez disso, pode-se dizer que os interlocutores estão fazendo algo em comum, isto é, criando juntos alguma coisa nova (BOHM, 2005, p. 29).

É nessa ação cooperativa que os homens se humanizam, pois "dizendo a palavra com que, 'pronunciando' o mundo, os homens o transformam, o diálogo se impõe como o caminho pelo qual os homens ganham significação enquanto homens." (FREIRE, 2005, p. 91, destaque do autor). O diálogo está em sintonia com o que entendemos por crítica, pois só ocorre pela palavra enquanto práxis, ou seja, na palavra composta pela unidade entre reflexão e ação, pois

> Esgotada a palavra da sua dimensão de ação, sacrificada, automaticamente, a reflexão também, se transforma em palavreria, verbalismo, blablablá. Por tudo isto, alienada e alienante. É uma palavra oca da qual não se pode esperar a denúncia do mundo, pois que não há denúncia verdadeira sem compromisso de transformação, nem este sem ação. Se, pelo contrário, se enfatiza ou exclusiviza a ação, com o sacrifício da reflexão, a palavra se converte em ativismo. Este, que é ação pela ação [...] (FREIRE, 2005, p. 90)

Entendemos que ocorre, em um diálogo, a partir da reflexão sobre o que as partes dizem, a construção de algo novo, um significado compartilhado; e por ser crítico, esse significado serve para a ação transformadora do mundo, a partir da práxis.

Para que o processo de diálogo aconteça, é necessário que os estudantes envolvidos na investigação sejam capazes de ouvir e construir conjuntamente um significado novo para aquilo que está sendo investigado, algo não sabido precisa ser conhecido a partir de significados verdadeiramente compartilhados. Quando os estudantes estão envolvidos nesse processo, não há ideia de convencimento ou de disputa e, muito menos, a ideia de que alguma das partes é um pote vazio que precisa ser preenchido. Para que isso ocorra, é indispensável que exista confiança entre as partes e que, no diálogo entre os estudantes, não exista uma hierarquização autoritária.

É a partir desse entendimento sobre diálogo que compreendemos o Modelo de Cooperação Investigativa (Modelo-CI) proposto por Alrø e Skovsmose (2010). Nesse modelo, as perspectivas dos estudantes são "consideradas importantes instrumentos para a aprendizagem." (ALRØ; SKOVSMOSE, op. cit., p.72), pois ajudam o professor a compreender o processo de aprendizagem dos educandos, enquanto esses também podem tomar consciência de seu próprio processo. O nome do modelo evidencia o caráter intencional na participação, pois cooperar não é um ato compulsório, por isso, o Modelo-CI pode ser instaurado se houver aceitação do estudante em participar de uma investigação. Nesse sentido, cabe ao professor realizar um convite ao estudante, e caso não seja aceito, o Modelo-CI não se estabelece, pois cenários para investigação não se concretizará como pano de fundo para aprendizagem. Ademais, a intencionalidade da cooperação deve ser seguida de uma postura investigativa, que inclui ação, reflexão e capacidade para escutar, na qual as reflexões dos outros participantes serão genuinamente consideradas. O convite não precisa ocorrer por uma pergunta direta (do tipo: — Você aceita o convite para investigar comigo?), mas sim por uma pergunta aberta; isso significa que a pergunta inicial não é direcionada para o ponto central da investigação, como nos casos ilustrados por Alrø e Skovsmose (2010), nos capítulos O que parece a bandeira da Dinamarca? e O quanto se consegue preencher com um jornal? Portanto, atinente à nossa pesquisa, para responder as perguntas propostas, pretendemos que o participante investigue a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero plano; nosso convite é feito por uma pergunta que não cita a soma dos ângulos internos, mas chama o participante para encontrar regularidades no quadrilátero, sem especificação de quais regularidades seriam essas. Essa característica aberta do convite leva à possibilidade de o estudante não compreender imediatamente o que precisa ser realizado. Nesse sentido, é imperativo que sejam estabelecidas as vistas privilegiadas, ou seja, o estudante deve entender qual é a proposta da atividade. Quando convidamos os alunos a encontrar regularidades em quadriláteros planos, eles podem não entender o que significa a palavra regularidade nesse caso ou procurar regularidade em propriedades diferentes da desejada. Para que as vistas privilegiadas sejam estabelecidas, espera-se que a nossa perspectiva seja compreendida pelos participantes, que devem descobrir que a única regularidade possível, nesse caso, é em relação à soma das medidas dos ângulos internos.

Retomando a citação do nosso exemplo da reforma da previdência, talvez fosse necessário para uma melhor compreensão do problema, entender o que significa déficit; como o financiamento da previdência é determinado na Constituição; o que os reformistas levam em consideração em seus cálculos que apontam defasagem nas contas previdenciárias; o que significa seguridade social, entre outros elementos, para que fosse possível compreender qual o ponto crítico nas contas previdenciárias. Com isso, queremos dizer que, quando existe a compreensão de uma situação ou quando as vistas privilegiadas são estabelecidas, significa que algo novo passou a ser conhecido (a perspectiva da atividade), o que significa que ocorreu um ato[13], o ato de perceber. A expressão dessa percepção não necessariamente se dá em uma elaboração precisa do problema, pois apenas foi notado que ali existe uma perspectiva que não era conhecida. Os detalhes dessa perspectiva são elaborados durante o processo de investigação e não precisam seguir formalidades técnicas inicialmente. Outra expressão dessa percepção pode ser uma ação investigativa em determinada direção, com a qual o participante pode começar a agir a partir da perspectiva que percebeu.

A expressão em língua materna, mesmo sem a acuidade técnica, pode significar que um passo adiante na compreensão foi dado, isso significa que ocorreu outro ato, o ato de reconhecer. Em outras palavras, significa que a ideia contida na questão foi de alguma forma expressa por meio da fala de quem está debruçado sobre ela. Com o prosseguimento da investigação, durante o processo de compreensão da perspectiva, pode ocorrer o ato de reformular, isso significa que aquela expressão, mesmo não precisa, foi reestruturada em outras palavras, às vezes colocada com maior clareza e precisão, mesmo que isso não implique em uma facilidade de compreensão para quem não está debruçado sobre o problema. Qualquer participante da conversa pode reformular uma perspectiva colocada por outra pessoa. Caso isso aconteça, é possível interpretar que a perspectiva está em discussão e que houve abertura para que ela fosse ouvida e analisada por outrem, ou seja, as partes estão atentas ao que está sendo colocado pelo outro, e nas palavras dos autores (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p.

[13] Na tradição filosófica que remonta à escolástica, entende-se por ato 'o que faz ser': o agir identifica-se, assim, ao 'fazer-ser' e corresponde à passagem da potencialidade à existência. Tal definição, cujo caráter intuitivo se percebe, possui uma grande generalidade: não só todos os 'acontecimentos' que constituem a trama dos discursos narrativos se deixam interpretar como atos, mas o próprio discurso constitui um ato, uma sequência organizada de atos cognitivos. Cf.: GREIMAS; COURTÉS, 1979, p. 31 et seq.

115), "reformular é um elemento importante no processo de escuta consciente, no qual os participantes seguem de perto os demais a fim de conhecer um a perspectiva do outro."

Retornando ao exemplo da reforma da previdência, quando estabelecemos as vistas privilegiadas, ou seja, entendemos que há um ponto crítico no financiamento, significa que percebemos uma perspectiva. Essa percepção pode ser formulada de maneira pouco mais acurada como, por exemplo, existe uma defasagem na arrecadação previdenciária quando o financiamento é feito apenas pelos trabalhadores. Nesse processo ocorreu o reconhecer. Podemos ainda reformular essa perspectiva dizendo que há uma diferença entre despesas e receitas previdenciárias, pois parte do tripé do financiamento da seguridade social, determinado pela Constituição, está sendo desonerado. Nesse caso, o reconhecer se tornou mais elaborado e a perspectiva passou a ser expressa em termos técnicos, que dão mais acuidade à situação, graças a um processo de reformulação.

Esses três atos dialógicos[14] apresentados por Alrø e Skovsmose (2010) não se restringem apenas à constatação do problema. Eles ocorrem na busca pela resolução. Pode haver diversas perspectivas de resolução de um problema que levam à solução. Dessa forma, concernente à reforma da previdência, conhecendo o que a Constituição diz a respeito da seguridade social, uma pessoa pode perceber um caminho para a resolução, ao expressar o financiamento tripartite entre trabalhador, empresa e estado. Além disso, pode reconhecer que os trabalhadores cumprem com sua parte no financiamento e por isso é injusto que a reforma os atinja.

Segundo Alrø e Skovsmose (2010, p. 106, itálico dos autores), "*perceber* significa descobrir alguma coisa da qual se sabia ou não se tinha consciência antes [...] é um processo de *examinar possibilidades* e *experimentar* coisas [...] significa *aproximar-se* de assunto e insistir nele antes de rejeitá-lo.". Destarte, significa que uma expressão do perceber pode ser a tentativa de verificação de alguma perspectiva notada na investigação que pode ou não se mostrar pertinente no processo de experimentação e aproximação da situação analisada. O reconhecer, de acordo com Alrø e Skovsmose (2010, p. 109), é o "delinear de ideias matemáticas.", e isso significa que a perspectiva está melhor definida do que no processo de perceber. Como o ato de perceber pode ser

[14] Acompanhando o citado conceito de ato da tradição filosófica (nota imediatamente anterior), entendemos atos dialógicos como atos cognitivos presentes no discurso que fazem acontecer o diálogo, que realizam em si o diálogo, isto é, se eles ocorrem, então, o diálogo está sendo realizado e vice-versa. In: GREIMAS; COURTÉS, 1979.

expresso por uma atitude curiosa, a verbalização de uma perspectiva indica que houve avanço qualitativo na compreensão, portanto, entendemos como um ato de reconhecer.

Por sua vez, o posicionar-se é um ato importante para que o outro saiba o que se tem em mente e quais são os fundamentos que balizam o que se está pensando. Compartilhar as ideias e as justificativas das quais elas decorrem, a fim de verificar se há concordância ou não, sem que isso implique em fechamento para outras ideias, faz parte do processo de cooperação em uma investigação. Sobre este ato, Alrø e Skovsmose (2010, p. 112), afirmam "posicionar-se compreende fazer declarações ou apresentar argumentos, como propósito de investigar conjuntamente um assunto ou uma perspectiva. Isso é o oposto à reivindicação, que corresponde a tentar convencer o outro de que se está certo, sem querer buscar uma justificação.".

Quando nos posicionamos no Modelo-CI, é preciso que as outras partes participantes façam a análise do posicionamento, que não pode ser aceito de antemão. Não se pode acreditar no outro apenas pela posição que ele ocupa, é necessário um convencimento por meio da argumentação, com a qual uma perspectiva de análise se mostra mais pertinente para o contexto da investigação, pois "no diálogo, podemos depreender o princípio: uma afirmação deve ser colocada em dúvida se não há uma percepção (comum) que confirme a sua veracidade.", asseveram Alrø e Skovsmose e (2010, p. 111, parênteses dos autores).

Outra forma de comunicar aquilo que pensamos, é o pensar alto, que "significa expressar pensamentos, ideias e sentimentos durante o processo de investigação. Expressar o que ocorre dentro de si expõe as perspectivas à investigação coletiva." ou seja, é uma forma particular de "tornar o pensamento público.", conforme Alrø e Skovsmose (2010, p. 113).

No processo de compreensão da situação investigada e da perspectiva colocada, questionar posições, argumentos e a própria perspectiva, fazem parte do processo de aprimoramento da compreensão daquilo que se investiga. Nesse sentido, desafiar é um ato importante na comunicação realizada em cenários para investigação, pois pode ajudar a aprimorar ideias ou abrir novas perspectivas, e "desafiar significa tentar levar as coisas para uma outra direção ou questionar as perspectivas já estabelecidas." (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 115). Ainda outro ato importante na comunicação no Modelo-CI é a avaliação, que entendemos poder ser realizada ao fim, como também durante o processo de investigação. Pode-se avaliar se uma perspectiva é coerente com a situação ou se o resultado final traduz aquilo que era esperado no resultado.

O tipo de comunicação orientada em cenários para investigação precisa de dois pressupostos importantes para fomentar a investigação e a cooperação entre as partes; o primeiro é a abertura para ouvir e pensar na perspectiva proposta pelo outro, e o segundo estar à vontade para expor sua ideia e defendê-la. Nada deve ser aceito sem que haja compreensão daquilo que é proposto.

Por conseguinte, os atos descritos ocorrerão se houver certo alinhamento entre as partes atuantes em uma investigação. Naturalmente, mostra-se relevante que os envolvidos estejam abertos às perspectivas do outro, que sintam confiança para propor raciocínios, que não tenham medo de errar, que acolham as propostas alheias e exista uma confiança que todos poderão se expressar sem ser repreendidos ou taxados por suas posições. Esse ato leva o nome de estabelecer contato, como afirmam Alrø e Skovsmose,

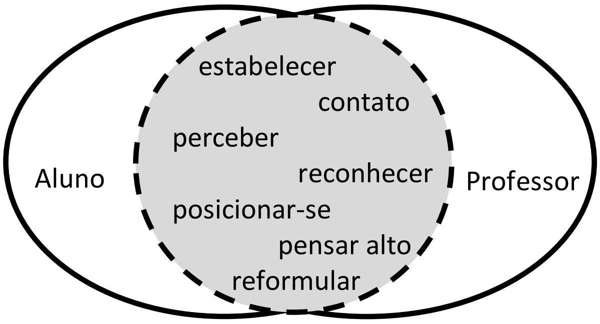
> [...] entendemos contato como estar presente e prestar atenção ao outro e suas contribuições, numa relação de respeito mútuo, responsabilidade e confiança. Vemos o processo de estabelecer contato tanto como uma preparação para a investigação quanto como uma atitude positiva de relacionamento entre os participantes durante a cooperação, que o os torna abertos à investigação. (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p.106).

Em nossa experiência, vivenciamos diversas situações em que estudantes não conseguem colocar suas ideias pois, por diversos motivos, estão fechados a se expressar em público. É corriqueiro perguntarmos se têm dúvidas sobre o conteúdo, e muitos respondem não. No entanto, observamos que suas expressões faciais e corporais indicam o contrário, e quando isso ocorre, os interpelamos: — Se tivesse dúvida você me perguntaria? Não é incomum que a resposta a esse questionamento também seja não, incluindo uma expressão facial que demonstra que a dúvida jamais seria colocada, ao menos publicamente. Esse exemplo nos mostra que diversos estudantes carregam dúvidas por não se sentirem à vontade para colocá-las; estabelecer contato é um processo que tem que quebrar barreiras como essa.

A confiança é um elemento importante para um diálogo, sem ela o estudante esconderá sua perspectiva, o que por sua vez impedirá o professor de fazer a intervenção correta para a aprendizagem. Em síntese, sem confiança, o diálogo não acontece. Freire (2005, p. 94) afirma que, "se a fé é um dado a priori do diálogo, a confiança se instaura com ele. A confiança vai fazendo os sujeitos dialógicos cada vez mais companheiros na pronúncia do mundo. [...] A confiança implica o testemunho que um sujeito dá aos outros de suas reais e concretas intenções.”, sendo assim, para estabelecer contato é necessário que as partes tenham confiança uma na outra.

Resumindo, ao propor o Modelo-CI, Alrø e Skovsmose (2010) definem os atos dialógicos de estabelecer contato, vistas privilegiadas, perceber, reconhecer, desafiar, reformular e avaliar, como pertencentes ao processo de diálogo do Modelo de Cooperação Investigativa. Esses atos dialógicos estão impregnados de uma postura investigativa, reflexão, ação, capacidade de escuta, e uma condição importante é que uma afirmação não deve ser aceita como verdadeira (ou falsa) sem que existam argumentos pertinentes que a legitimem.

Figura 3 - Reprodução de Modelo de Cooperação Investigativa



Fonte: Alrø; Skovsmose, 2010, p.69.

Alrø e Skovsmose (2010) propõem que a todo o momento sejam feitas perguntas de caráter investigativo como, por exemplo, perguntas dos tipos 1) — O que acontece se...? ou 2) — Por quê...? Perguntas do primeiro tipo podem ajudar o ato de perceber, pois tem potencial para provocar nos participantes do diálogo a reflexão sobre determinados pontos de vista. Essa reflexão pode realizar, também, o ato de desafiar, pois perceber uma nova perspectiva, pode ser encarado como um desafio. Com perguntas do segundo tipo busca-se o ato de reconhecer, porquanto exigem explicações da perspectiva apresentada.

Questões hipotéticas ajudam todo o processo de investigação, pois podem levar os participantes à reflexão em qualquer ponto da compreensão da perspectiva. Questões de conferência ajudam o processo investigativo no ato de reformular, pois uma perspectiva consolidada pode ser questionada, no sentido de ser apresentada uma explicação em outras palavras.

Outras estratégias são a utilização de *tag questions*, confirmação recíproca e completar meias falas. Entendemos *tag questions* como perguntas de caráter retórico que servem para demonstrar que a atenção está voltada para o diálogo. Por outro lado, Alrø e Skovsmose (2010, p.82) definem *tag questions* como "um recurso presente em alguns idiomas, como no inglês e no dinamarquês, que permite enfatizar o tom interrogativo de uma sentença com uma pergunta curta no final da frase.". Essas estratégias podem ressaltar que há conexão entre professor e estudantes, que o professor está atento ao que o estudante está fazendo, e assim reforçam o ato de estabelecer contato.

Alrø e Skovsmose (2010) estabelecem relações entre diálogo e aprendizagem, pelas quais as qualidades do diálogo influenciam certas qualidades da aprendizagem. Para isso, os autores organizam o diálogo em três elementos, que chamam de ideais, a saber, realizar uma investigação, correr riscos e promover a igualdade.

A ideia de realizar uma investigação foi detalhada como uma ação coletiva e colaborativa, orientada pelo tipo de comunicação que chamamos diálogo. Os riscos ocorrem pelo fato de as pessoas trazerem à tona sua bagagem de vida e pressupostos, muitas vezes, arraigados profundamente em opiniões. Diálogo envolve emoção, e se houver um choque contra esses pressupostos, o processo de diálogo fica imprevisível, pois "é como se você próprio estivesse sob ataque, quando suas opiniões são questionadas." (BOHM, 2005, p.38). Em compensação, esses riscos podem ser bem aproveitados pela criatividade e pelo acolhimento do professor. Novos caminhos podem ser criados no processo de aprendizagem pela ação exercida pelo estudante em um diálogo. Se o estudante se sente à vontade para experimentar, mais confiança ele terá para tomar para si o processo de aprendizagem. Desse modo, o professor precisa desenvolver a capacidade de lidar com situações que estão fora do previsto, tanto para podá-las quando caminham para situações negativas, quanto para incentivá-las quando demonstram protagonismo do estudante na investigação. Já o que os autores apontam como igualdade, entendemos como equidade, ou seja, "contemplar diversidade e diferença não através da uniformidade, mas sim da justiça." (ADLE, 2001a, p.187, apud ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p.131). Sabemos que o professor tem uma função na sociedade diferente da função do estudante, e as responsabilidades e cobranças são igualmente distintas. Na sociedade, a irresponsabilidade de um professor não é tolerada, enquanto a de um estudante, em geral, é relativizada, pois está em processo de formação. Do mesmo modo, é o professor que detém o conhecimento específico de sua disciplina, além de conhecimentos sobre legislação, currículo, psicologia, didática, pedagogia, educação, metodologia etc., logo, "professor e aluno são posições diferentes, profissionalmente falando; caso contrário não haveria ensino.” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p.131).

Em função disso, não é incoerente o professor sentir necessidade de lançar mão de comandos que visem proporcionar um ambiente propício ao estudo, exclamando: — Silêncio!; — Sentem-se! ou que determine uma maneira de agir em referência ao conteúdo, como: — Se não conseguiu entender a tabuada, então, a decore!; — Em uma expressão numérica, resolvam as operações nas linhas abaixo da linha dada! Nesse sentido, o professor pode lançar mão, em determinado momento, de uma apresentação do conteúdo sem usar o diálogo, e vários são os motivos para isso, tais como, um tempo insuficiente para os conceitos serem construídos conjuntamente; um elevado número de alunos por sala; uma escolha didática, entre outros. Um detalhe importante no diálogo é não confundir um diálogo entre os estudantes e o diálogo entre estudantes e professor. Apesar de utilizarmos a mesma palavra para ambos os casos, no primeiro há possibilidade de os participantes construírem conjuntamente significados, pois é provável que não conheçam o conceito investigado, enquanto que no segundo, uma das partes conhece o conceito e elaborou uma proposta de aula para apresentá-lo.

Uma estratégia de comunicação que pode ser utilizada durante um diálogo, mas que não é um diálogo, é chamada por Alrø e Skovsmose (2010), de jogo de perguntas – um tipo de comunicação comum ao paradigma do exercício, na qual o estudante tenta adivinhar o que o professor está perguntando. Para que surta efeito positivo, a escolha por esse tipo de comunicação tem que ser feita adequadamente, pois o jogo de perguntas pode fazer o estudante deixar de lado a ação e a responsabilidade de investigar e passar a responder de acordo com as regras de um jogo no qual o vencedor não é necessariamente aquele que se dedicou mais à reflexão intelectual. Nesse sentido, o ato de desafiar pode transformar-se em jogo de perguntas, especialmente se o desafio estiver aquém das possibilidades de compreensão do desafiado, no momento do desafio.

Quando o professor faz a escolha consciente de usar o diálogo ou quebrá-lo com um jogo de perguntas, é porque tem formação e competência para essa decisão, sabe quais caminhos deve traçar para modificar o saber dos estudantes, é, enfim, uma autoridade em didática matemática, definida como segue,

> É a ciência das condições específicas de difusão de conhecimentos matemáticos necessários às ocupações dos homens (em sentido amplo). Trata (em sentido restrito) das condições em que uma instituição chamada ‘professor’ tenta (autorizado por necessidade por outra instituição) modificar o saber de outra pessoa chamada ‘estudante’, quando esta última não é capaz de o fazer de forma

> autônoma e não sente necessidade de o fazer. (BROUSSEAU, 1998, p.1, tradução nossa[15]).

Defendemos, assim, que o professor tem autoridade didática e deve usá-la para decidir, em acordo com as ideias matemáticas a serem apresentadas e com os educandos, qual a melhor forma de comunicação. Essa autoridade é legítima e difere de autoritarismo, pois é legitimada pela formação acadêmica do professor e por quem o contrata, seja pela escola privada ou pelo concurso público.

Desse modo, o diálogo pode ser visto como uma forma de comunicação, na qual professor e estudantes intencionalmente suspendem momentaneamente as diferenças de papéis para que seja estabelecida uma relação de confiança, na qual o estudante tenha coragem de dizer aquilo que está pensando, se sinta livre, e não tenha medo de reprimendas pelos erros que possa cometer; em outras palavras, evitar que aspectos de caráter emocional inibam a ação do educando.

De acordo com a interpretação que tivemos desses atos, apresentados no decorrer desse subcapítulo, cenários para investigação podem, portanto, promover uma forma de comunicação chamada diálogo, na qual os atos dialógicos do Modelo-CI estão presentes. Essa abordagem tem potencial para garantir criticidade ao processo de aprendizagem dos estudantes porque, em primeiro momento, rompe com o absolutismo burocrático, deixando de reproduzir em sala de aula um modelo de sociedade em que determinações são aceitas sem o questionamento de seus motivos. Em segundo, porque possibilita que a Matemática seja apresentada não como um corpo fechado de conhecimento, mas sim como uma tecnologia humana, criada na medida em que as necessidades coletivas foram surgindo ao longo da história. Afora isso, se o diálogo é uma exigência existencial humana, quando o negamos estamos negando uma forma de existir que leva em consideração a construção e a transformação coletiva do mundo. Por fim, ao permitirem a investigação, a proposição de conjecturas, o não focar o erro e sim as consequências das perspectivas adotadas, podem promover uma aprendizagem reflexiva, que depende da intenção e da ação dos envolvidos.

[15] "C'est la science des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances mathématiques nécessaires aux occupations des hommes (sens large). Elle s'occupe (sens restreint) des conditions où une institution dite « enseignante » tente (mandatée au besoin par une autre institution) de modifier les connaissances d'une autre dite « enseignée » alors que cette dernière n'est pas en mesure de le faire de façon autonome et n'en ressent pas nécessairement le besoin. "

Capítulo 3. Demonstração, argumentação e geometria

Neste capítulo, apresentamos o conceito de demonstração resultante de interações sociais e aspectos históricos que tiramos de leituras que fizemos a respeito dos temas. Usamos Pietropaolo (2005), Garnica (1996), Tall (2012), Balachef (1987), Villiers (2001) e Domingues (2002) e aspectos da história da matemática. Argumentamos com base em Moreira e David (2018) que a demonstração na Educação Básica deve ser tratada de forma distinta da matemática acadêmica. Na matemática escolar, a demonstração rigorosa, carregada da precisão lógico dedutiva de um sistema axiomático, deve dar espaço para a construção de argumentos adequados a cada etapa do ensino e cada faixa etária, no sentido de tentar impedir que estudantes carreguem dúvidas sobre determinado resultado. Ao final, apresentamos o constructo teórico associado ao desenvolvimento do pensamento geométrico segundo Parzysz (2001, 2006).

Nosso objetivo é mostrar como a demonstração envolve a argumentação em função da defesa de determinada afirmação ou resultado em determinado grupo social. Nesse sentido, a geometria é um campo profícuo, pois as argumentações podem evoluir de características perceptivo dedutivas para lógico dedutivas.

3.1 Demonstração e argumentação

A demonstração é uma atividade que diferencia a Matemática de outras ciências. Nas ciências naturais como física, biologia e química, a comprovação das leis, mesmo que sejam demonstradas a partir de outras leis, não podem contrariar a experiência e a observação. A comprovação da verdade ou falsidade de uma proposição matemática independe da concordância com a experiência. Por exemplo, um matemático poderá encontrar quantos números primos puder, mas nunca comprovará que são infinitos se não houver uma demonstração.

Pietropaolo (2005), Garnica (1996), Tall (2012), Balacheff (1987), Villiers (2001) destacam que as demonstrações se dão a partir de interações sociais de um grupo em determinado período, mesmo que seja em um grupo restrito, formado apenas por matemáticos.

Pietropaolo (2005), considera que matemáticos de campos diferentes (logicistas, formalistas, aplicados, puros, formalistas) não concordam entre si sobre quais demonstrações são irrefutáveis. O que, de certa forma, vai ao encontro do que diz Garnica (1996), para quem a demonstração é criada, aplicada e verificada em processos sociais. Isso significa que, em certa medida, a demonstração é uma atividade intelectual que tem a finalidade de convencer as pessoas e o próprio proponente da validade ou falsidade de uma afirmação. Tall (2012) distingue três níveis de convicção que um argumento pode ter para definir a validade ou falsidade de uma afirmação matemática, quais sejam, convencer-se a si próprio, convencer um amigo e convencer um inimigo. Para Balacheff (1987), a finalidade da prova rigorosa é assegurar a inexistência de contradições na solução de problemas; tais contradições surgem apenas se houver sido identificada por alguém.

No aspecto histórico, também encontramos indicação que o conceito de demonstração variou de acordo com o desenvolvimento da sociedade, pois tinha caráter basicamente empírico e, paulatinamente, de acordo com as necessidades de cada período, ganhou níveis cada vez mais complexos relacionados a atributos lógicos, dedutivos e formais. Documentos que resistiram ao tempo indicam que os gregos iniciaram o uso de deduções lógicas gerais para validar fatos matemáticos. Tales de Mileto (séc. VII a.C.), Pitágoras (532 a.C.), Hipaso de Metaponto e Aristóteles (séc. IV a.C.) são alguns dos mais antigos matemáticos que utilizaram essa ferramenta. Por outro lado, é consenso que povos reconhecidamente importantes no desenvolvimento da matemática, como babilônios e egípcios, validavam suas criações matemáticas em consonância com a realização prática. Mesmo a matemática desenvolvida pelos gregos não era axiomática e ainda mantinha fortes laços com fatos observáveis e casos particulares, “muito provavelmente, o máximo que fizeram em seus trabalhos foi encadear raciocínios para estabelecer propriedades e encadear propriedades para deduzir outras propriedades de certas partes da geometria [...].” (DOMINGUES, 2002, n.p.).

Mesmo com a reconhecida preponderância do trabalho de Euclides de Alexandria (séc. III a.C.), seu método não foi o único usado para a criação de matemática, e pode-se citar, por exemplo, Diofanto (séc. III d.C.), em sua importante obra, *Aritmética*. Segundo Pietropaolo (2010), durante o medievo, o centro de produção matemática deslocou-se do Ocidente para os mundos árabe e hindu, que também não utilizaram os métodos descritos em *Os Elementos*, de Euclides, para validar descobertas matemáticas. Entre o Renascimento e o século XIX, a matemática se desenvolveu de maneira que “novas áreas da matemática, como a geometria analítica e o cálculo, por exemplo, não chegaram a satisfazer, sob o ponto de vista do rigor, nem mesmos aos criadores.” (DOMINGUES, 2002, n.p.).

Graças a grandes cientistas como Newton, esse avanço chegou a um ponto em que a intuição era insuficiente para validar resultados, os quais seriam julgados paradoxais a partir do senso comum. Como afirma Pietropaolo (2005), entre os séculos XVII e XIX, com a aritmetização da análise e a criação das Geometrias não-Euclidianas, tentou-se banir o recurso à intuição. Esses processos culminaram, respectivamente, na construção do conjunto dos números Reais e na resolução de uma questão a respeito da possibilidade de demonstração do quinto postulado. Nesse contexto, a concepção de demonstração sofreu alterações com grande contribuição de Frege (1848-1925). Tarski sintetizou tais mudanças da seguinte maneira,

> [...] uma demonstração formal de uma sentença dada consiste em construir uma sequência finita de sentenças tal que (1) a primeira sentença na sequência é um axioma (2) cada uma das sentenças seguintes é um axioma, ou, então, é derivável diretamente de algumas sentenças que precedem na sequência através de uma das regras de demonstração, e (3) a última sentença na sequência é aquela que deve ser demonstrada. Alterando um pouco o uso do termo demonstração podemos dizer que uma demonstração formal de uma sentença é simplesmente qualquer sequência finita de sentenças que possuam as três propriedades assinaladas. (TARSKI, 1991 apud PIETROPAOLO, 2005, p. 55)

Os postulados euclidianos foram revisados por Hilbert que, segundo Domingues (2002, n.p.), acabou se tornando o líder “do formalismo, movimento filosófico que objetiva transformar a matemática na ciência das deduções formais, o que pressupunha, entre outras coisas, destituí-la de toda e qualquer conotação material.”. No bojo da busca pelos fundamentos, vale destacar Cantor (1845-1918) e sua teoria dos conjuntos que, apesar de seus paradoxos, influenciou a produção matemática posterior.

O formalismo deixou como legado as bases necessárias para a consolidação do método axiomático como o método de criação matemática, o que implica que a validade de uma demonstração está fundamentada, do ponto de vista da lógica, na matemática acadêmica, na qual as definições e demonstrações são elementos fundamentais para a constituição e apresentação sistematizada da teoria. No entanto, isso implica que as demonstrações são a cristalização derradeira da atividade do matemático, mas não a única, como afirma Villiers (2001, p. 32) “na investigação matemática real, a convicção pessoal depende habitualmente de uma combinação de intuição, verificação quase-empírica e da existência de uma demonstração lógica (mas não necessariamente rigorosa).”. Nesse sentido, a demonstração assume diferentes funções no processo de validação:

> • verificação (dizendo respeito à verdade da afirmação);
> • explicação (fornecendo explicações quanto ao facto de ser verdadeira);
> • sistematização (a organização dos vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas);
> • descoberta (descoberta ou invenção de novos resultados);
> • comunicação (a transmissão do conhecimento matemático);
> • desafio intelectual (a realização pessoal/gratificação resultantes da construção de uma demonstração). (VILLIERS, 2001, p. 32).

Quando a convicção sobre a veracidade de uma proposição está fortemente baseada na intuição e na verificação quase empírica, a demonstração surge como consequência dessa convicção. Isso não diminui a importância da demonstração como forma de verificação, mas mostra que não é a única que garante a convicção de uma proposição. Por outro lado, muitos dos processos guiados pela intuição não dão uma explicação sobre a razão de uma proposição ser verdadeira. Tanto durante a verificação da veracidade quanto na explicação, Villiers (2001) considera que o aspecto psicológico forma par com a lógica na obtenção da certeza; além de saber se uma proposição é verdadeira, nos satisfazemos por completo ao saber quais são suas razões de ser, ou seja, como resultados já conhecidos levam à proposição em questão. Nesses casos, a demonstração assume a função de explicação.

Apesar de ser cristalina a importância da intuição no fazer matemático, há exemplos em que a demonstração assume a função de descobrir novos resultados, como alguns casos das Geometrias não-Euclidianas, em que é “completamente improvável que alguns resultados [...] pudessem alguma vez ter sido encontrados por mera intuição e ou pela utilização de métodos quase empíricos.” (VILLIERS, 2001, p.33).

Quando um conjunto de definições e teoremas assume o caráter de um sistema dedutivo, ou seja, quando afirmações consideradas verdadeiras isoladamente formam um todo unificado e coerente, como no caso do trabalho de Hilbert, *Fundamentos da Geometria*, a função da demonstração é a de sistematização, que segundo Villiers,

> • Ajuda a identificar inconsistências, argumentos circulares, e hipóteses escondidas ou não explicitamente declaradas;
> • Unifica e simplifica as teorias matemáticas ao integrar e ligar entre si afirmações, teoremas e conceitos não relacionados, conduzindo assim a uma apresentação económica dos resultados;
> • Fornece uma perspectiva global ou vista de conjunto de um tópico, ao mostrar a estrutura axiomática subjacente do tópico a partir da qual todas as outras propriedades podem ser derivadas;
> • Constitui uma ajuda para as aplicações tanto dentro como fora da matemática, pois torna possível verificar a possibilidade de aplicação de toda uma estrutura complexa ou teoria através de uma avaliação da

> aplicabilidade dos seus axiomas e definições;
> • Conduz muitas vezes a sistemas dedutivos alternativos que fornecem novas perspectivas e/ou são mais económicos, elegantes e poderosos do que os existentes. (VILLIERS, 2001, p.34).

A demonstração é como um matemático comunica a validação de uma proposição para outro matemático, é como procura convencer seus pares de suas afirmações e, é nesse processo de comunicação, que ela pode ser refinada ou mesmo descartada. Por fim, a função do desafio intelectual é vivenciada pela gratificação que a realização de uma demonstração pode ter. Villiers (2001) sugere ainda que esse espectro de funções elencado não é, de forma alguma, completo, e que essas funções podem estar misturadas em determinadas demonstrações.

Dessa forma, compreendemos que o desenvolvimento da Matemática não dependeu exclusivamente de demonstrações, mas também de verificações e argumentações que se mostravam pertinentes em dado momento histórico para convencer as pessoas a respeito da veracidade ou falsidade de uma proposição. O apelo ao empírico e à intuição mostrou limitações no desenvolvimento desse processo, mas as estratégias para superar as dificuldades desses modos de comprovação, que buscaram estabelecer fundamentos para a matemática, apresentaram contradições internas. A forma axiomática, baseada em argumentações lógico dedutivas está estabelecida hoje como a forma aceita para o desenvolvimento da matemática, o que não impede discussões e discordâncias de qual demonstração é rigorosamente formal, nem mesmo elimina o uso da intuição e a necessidade de convencer um grupo social da veracidade ou falsidade de uma afirmação. Em suma, não há um método universal que determine qual argumentação lógico dedutiva é ou não aceita como uma demonstração, o que significa que a validade de uma demonstração depende da aceitação de uma comunidade científica.

As questões que colocamos acima, a respeito da demonstração, bem como a busca por generalidade nos resultados, a ênfase em estruturas abstratas, a precisão na linguagem, entre outros valores essenciais, compõe o "conjunto de significados que a comunidade científica de matemáticos identifica com o nome de Matemática." (MOREIRA; DAVID, 2018, p. 17). Em sala de aula, outros significados afinados ao conhecimento matemático são constituídos e compõem o que esses autores chamam de matemática escolar. Por exemplo, definições mais descritivas, com base em objetos manipuláveis e ligados às realidades concretas dos estudantes; formas acessíveis de comprovação, demonstração e argumentação; reflexão sobre os tipos de erros dos alunos. Com referência a demonstrações e definições, os resultados apresentados em sala de aula não precisam, necessariamente, seguir o rigor da matemática acadêmica, pois,

> Há uma diferença significativa entre alinhar argumentos logicamente irrefutáveis que garantam a validade de um resultado a partir de postulados, definições, conceitos primitivos de uma teoria e, no contexto educativo escolar, promover o desenvolvimento de uma convicção profunda a respeito da validade desse resultado (MOREIRA; DAVID, 2018, p. 24).

Nesse sentido, algumas questões podem não fazer sentido na sala de aula. Como exemplo, Moreira e David (2018) mencionam a demonstração que entre um (1) e zero (0), não há número inteiro algum. Por mais importante que possa ser a demonstração desse fato no contexto da matemática acadêmica, para o estudante da Educação Básica pode ser uma não questão.

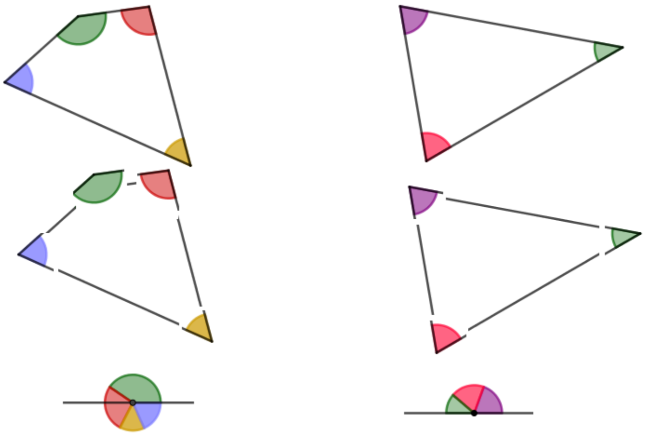
Por esse lado, explicações menos formais podem fazer mais sentido no contexto da matemática escolar, mesmo que incorram em imprecisões. Por exemplo, em nossa experiência docente com sétimos anos, apresentamos o conceito de potências e raízes quadradas e cúbicas associadas às ideias de área e medida do lado de um quadrado e volume e medida da aresta de um cubo. Certa vez, passamos o seguinte desafio, que valia um ponto na média: explique por que não existe raiz um (1) ou raiz zero (0) de um número. Após alguns dias e diversas mediações na resposta de uma estudante, ocorreu o seguinte diálogo,

> Professor: Por que não existem raízes com índice zero e índice um?
> Estudante: Porque como o índice seria um, não há nenhuma maneira de especificar como se fosse uma forma geométrica, uma forma plana. Porque ele seria uma reta e uma reta não é uma forma plana nem uma forma geométrica, então, dá pra especificar com essa reta aqui. Se você fosse especificar, seria com uma reta, mas a reta não vale. E o zero, como não há nenhuma forma de especificar o zero porque seria o nada, não há nenhuma forma de especificar e esse índice e estaria errado, terá de ser ou o dois ou raiz cúbica.
> Professor: Se fosse raiz quadrada qual seria a forma que representaria?
> Estudante: Quadrado.
> Professor: E se fosse raiz cúbica?
> Estudante: Cubo.

Apesar das imprecisões na explicação da estudante, sua argumentação afirmou que a raiz zero (0) não tem uma forma geométrica que a represente, e a raiz um (1) seria representada por uma reta, o que para ela não faria sentido, já que as raízes quadradas e cúbicas teriam uma forma com algo para ser medido. Isso não é uma demonstração, obviamente, mas é uma argumentação que dá significado ao conceito e permite uma explicação adequada para estudante, ou seja, a matemática acadêmica não aceitaria tal argumentação, mas para a matemática escolar ela tem todo o sentido, considerando a idade da estudante.

Outro exemplo ocorre referente à soma das medidas dos ângulos internos de quadriláteros e triângulos. É bastante conhecida a atividade que pede para que os alunos construam triângulos e quadriláteros e depois façam um recorte em suas extremidades (pontas) para que possam juntá-las em um vértice comum, conforme indica a Figura 4. Quando juntam os vértices dessas pontas recortadas em um ponto comum, é possível perceber que cobrem uma volta completa no caso dos quadriláteros e meia volta no caso dos triângulos.

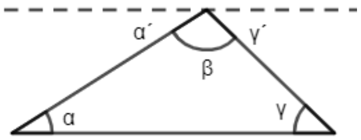
Figura 4 - Exemplo de comprovações da soma das medidas dos ângulos internos de quadriláteros (à esquerda) e triângulos (à direita)



Fonte: Garbin, 2024

Outra forma de mostrar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, muito comum nos livros didáticos, é a seguinte: seja um triângulo cujos ângulos internos chamaremos de α, β e γ, conforme Figura 5. Ao se traçar, pelo vértice de β, uma paralela ao lado oposto, observamos que $\alpha = \alpha'$, e $\gamma = \gamma'$ como ângulos alternos internos e que $\alpha' + \beta + \gamma' = 180º$, portanto $\alpha + \beta + \gamma = 180º$

Figura 5 - Suporte à demonstração da soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos

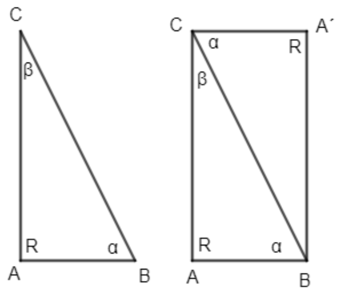


Fonte: Lima, E. L. (2010) (RPM 19)

Encontramos em Lima, E. L. (2010) (RPM 19), outra forma de demonstrar a soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos. Primeiro analisa-se o caso específico do triângulo retângulo. Suponhamos um triângulo retângulo cujos ângulos são α, β e R (ângulo reto). Dois desses triângulos justapostos, de forma que suas hipotenusas fiquem adjacentes, como na

Figura **6**, formam um retângulo, pois como os ângulos alternos internos são iguais a α, então AB é paralelo a CA'. Além disso, como AC é perpendicular a AB temos que AC é perpendicular a A'C e analogamente, AB e A'B também são perpendiculares. Logo α + β = R e, daí, α + β + R = 2R

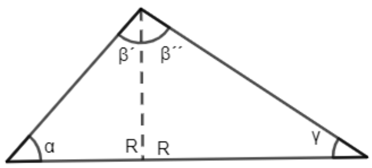
Figura 6 - Suporte a outra demonstração da soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos



Fonte: Lima E. L. (2010) (RPM 19).

O caso geral será reduzido a este. Supondo o segmento que determina a altura do vértice oposto ao maior lado do triângulo, conforme Figura 7. Este segmento decompõe o triângulo arbitrário em dois triângulos retângulos. Usando o caso particular já provado, e observando que β = β' + β'', temos α + β + γ = α + (β'+ β'') + γ = (α + β') + (β'' + γ) = R + R = 2R.

Figura 7 - Desenho suporte para continuação da demonstração



Fonte: Lima E. L.,(2010) (RPM 19).

As duas demonstrações são formas distintas de confirmar o valor da soma das medidas dos ângulos internos do triângulo que poderiam ser usadas em sala de aula em diferentes níveis de escolaridade na Educação Básica. Na matemática acadêmica, a busca pelo rigor exige a demonstração da afirmação *o segmento que determina a altura* *do vértice oposto ao maior lado do triângulo decompõe o triângulo em dois triângulos retângulos.* Além disso, é importante destacar que, na busca pela demonstração do quinto postulado, foram encontradas diversas proposições equivalentes, o que é o caso das seguintes,

> Quinto postulado: E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.
>
> 1) Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta.
>
> 2) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.[16]

Isso significa que, se buscássemos o rigor da matemática acadêmica, deveríamos demonstrar a equivalência entre as três proposições acima, como em geral é feito no estudo da geometria via modelos, que é um conjunto de postulados para os quais "se pode atribuir significados aos conceitos primitivos do conjunto de maneira tal que os postulados se convertam em afirmações verdadeiras sobre os significados atribuídos." (EVES, 2011, p.657-8), como é o caso dos conjuntos de axiomas de incidência, axiomas de ordem e outros.

O exemplo da soma das medidas dos ângulos internos do triângulo mostra como a geometria pode ser um campo fértil para que argumentações lógico dedutivas sejam abordadas na Educação Básica e podem se desenvolver adequadamente, de acordo com a etapa escolar de cada estudante. No que segue, apresentamos uma interpretação do que podemos considerar como desenvolvimento do pensamento geométrico, conforme proposta por Bernard Parzysz (2006).

3.2 Desenvolvimento do pensamento geométrico

Em sua teoria a respeito do pensamento geométrico, Parzysz (2001, 2006), ressalta que, desde a educação básica até a universidade, o ensino de geometria é construído como uma modelação do espaço físico, e deve passar de uma prática de observação para uma prática de dedução. Para desenvolver esse quadro teórico, Parzysz

[16] Para a demonstração dessa equivalência, cf.: Barbosa (2007, p. 12-3). A proposição um (1) é o equivalente ao quinto (5º) postulado e é a mais usada. Embora tivesse sido usada por Proclus (século V), é conhecida como axioma de John Playfair (1774-1819).

(2001) baseou-se em três outros estudiosos, Pierre Van Hiele (1984), Catherine Houdement & Alain Kuzniak (1998) e Michel Henry (1999).

Conforme Parzysz (2006), Van Hiele distingue cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico[17]. O Nível 0 (Visualização), no qual os objetos geométricos são identificados apenas pelas características físicas; o Nível 1 (Análise), em que a pessoa começa a distinguir as propriedades dos objetos geométricos, mas ainda não sabe descrevê-los; o Nível 2 (Dedução Informal), no qual os resultados são obtidos empiricamente, com o uso de técnicas dedutivas, significados são atribuídos às definições e são estabelecidas relações entre as propriedades do um objeto geométrico ou entre objetos distintos; o Nível 3 (Dedução Formal), no qual a validação é realizada por meio da dedução dentro de um sistema axiomático que modela a realidade, por exemplo a Geometria Plana; por fim, o Nível 4 (Rigor), no qual são usados diferentes sistemas axiomáticos, especialmente os não euclidianos.

Dos níveis elaborados por Van Hiele, Parzysz (2006) analisa de um lado os Níveis 0 e 1, cujas práticas geométricas são baseadas em objetos materiais como desenhos, caixas, dados, maquetes, e a argumentação é baseada na percepção. Por exemplo, argumenta-se que um quadrado é maior do que outro quadrado porque ao sobrepô-los um não cobre totalmente o outro. Por outro lado, nos Níveis 3 e 4, os objetos são teóricos, garantidos por axiomas, teoremas, postulados, e a argumentação se dá por meio de deduções em um sistema axiomático. O Nível 2 é a transição entre uma prática perceptiva sobre objetos concretos e uma prática dedutiva sobre objetos teóricos, ou seja, segundo Parzysz (2001), neste ponto se está construindo a argumentação baseada na dedução e não mais na percepção.

Houdement & Kuzniak (1998, apud PARZYSZ, 2006) compreendem o desenvolvimento geométrico em três paradigmas que se diferenciam com respeito às relações entre intuição, experiência e dedução na abordagem geométrica. Na Geometria Natural (GI), geometria e realidade são confundidas, na Geometria Axiomática Natural (GII), tem-se um esquema da realidade, e na Geometria Axiomática Formalista (GIII), não há ligação com o concreto. O nome dado aos paradigmas faz pensar que há intersecções entre eles, pois GI e GII têm em comum o termo natural, e GII e GIII o termo axiomática, sugerindo a passagem progressiva de uma abordagem ligada à percepção para uma ligada à dedução no sistema axiomático.

---

[17] Cf.: PARZYSZ, B. Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique em PE1. In: Colloque *Inter-IREM 27*, 2001, Orléans-Tours, p. 99-110.

Parzysz (2001, 2006) usa também as ideias de Henry (1999), que distingue três tipos de relação com o espaço no ensino e na aprendizagem em Geometria, são eles, Uma Situação Concreta, Uma Primeira Modelação e Uma Matematização. No segundo nível há, na representação de uma situação, abstração e simplificação, conforme são feitas escolhas daquilo que é importante ser representado.

Mesmo que apresentadas de maneira sucinta, é possível analisar interfaces entre as teorias. Como considera Parzysz (2006), a terminologia usada por Houdement & Kuzniak para GII (Geometria Axiomática Natural) sugere que a axiomatização está em desenvolvimento, assemelhando-se ao Nível 2 da teoria de Van Hiele (Dedução Informal), em que os resultados empíricos são usados em conjunto com técnicas dedutivas. Essa relação também pode ser abordada a partir da forma como o termo axiomática é usado nas teorias. Quando se utiliza esse termo para analisar o desenvolvimento do pensamento geométrico, entendemos que a utilização de deduções dentro de um sistema axiomático pode ser total ou parcial nas argumentações. Se o uso da dedução for parcial, o termo natural, em Geometria Axiomática Natural (GII), serve como socorro à dedução axiomática, isto é, o concreto serve como apoio às argumentações, como no Nível 2, que liga o teórico ao concreto. Essa abordagem também nos permite um paralelo entre o GII e o Nível 3 de Van Hiele. Se o uso de deduções dominarem completamente o processo, o termo natural pode ser interpretado como uma referência à modelação totalmente axiomática do espaço físico. Nesse caso, GII faria paralelo com o Nível 3 que, apesar de também ser axiomático como o Nível 2, modela a realidade, como por exemplo, as Geometrias Projetivas.

Outra característica apontada por Parzysz (2006) no uso da terminologia de Houdement & Kuzniak sugere certa continuidade entre os paradigmas, opondo-se o natural e o concreto de um lado e a axiomatização completa de outro. Dessa forma, GIII faz paralelos com o Nível 4, pois em ambos não há qualquer ligação com a realidade.

Na teoria de Henry, Parzysz (2006) analisa que, em Uma Primeira Modelação, a axiomatização parcial, apesar de permitida, é dispensável, pois nesse caso a compreensão do que é concreto pode ser feita por algum modelo pré-estabelecido, devido à experiência individual, não ligado a uma concepção axiomática. Uma pessoa nesse estágio do desenvolvimento do pensamento geométrico pode, por exemplo, referir-se a um desenho como sendo um quadrado em analogia a algum objeto que o sujeito saiba que é um quadrado, mesmo desconhecendo as propriedades do mesmo. Nesse caso, a referência ao concreto ocorreria com certa abstração, pois na analogia escolhe-se qual é o ponto de vista adequado para a comparação. É possível analisar essa abordagem prevista por Henry entre os paradigmas GI e GII, pois a representação não passa necessariamente por uma teorização (característica de GI), mas sofre certa abstração (característica referente ao GII). A maneira como Parzysz (2006) se refere ao termo matematização, em Uma Matematização (essa da teoria de Henry), permitiu-nos uma dupla interpretação. Entendemos que o termo se refere a uma prática geométrica em que a dedução axiomática pode ser completamente ou parcialmente usada em uma argumentação. Isso implica que, de um lado, essa abordagem estaria ligada a GIII, Nível 3 e Nível 4, enquanto que, por outro, estaria ligada ao Nível 2, no qual há certa informalidade nas argumentações. Pode-se afirmar que GI estabelece laços com o Nível 0, o Nível 1 e Uma Situação Concreta, pois todos recorrem de certa forma a objetos geométricos concretos e se aproveitam de conclusões perceptivas. Além disso, há similaridades entre GIII, Uma Matematização, o Nível 3 e o Nível 4, cujos objetos são teóricos e as argumentações são de ordem dedutiva em um sistema axiomático, destacando-se que, no Nível 3, existe uma modelação axiomática do espaço físico. Ao Nível 2 e ao GII cabem o papel de transição entre a percepção e a dedução, e o uso de objetos concretos para o uso de objetos teóricos.

A Tabela 2 mostra uma interpretação nossa a respeito das interfaces entre as teorias apresentadas até aqui.

Tabela 2 - Relação entre as teorias de Van Hiele, Houdement & Kuzniak, Henry

<table>
<tr><td>Van Hiele</td><td>Nível 0
Visualização</td><td>Nível 1
Análise</td><td>Nível 2
Dedução informal</td><td>Nível 3
Dedução formal</td><td>Nível 4
Rigor</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Houdement & Kuzniak</td><td colspan="2" rowspan="2">G1
Geometria Natural</td><td colspan="2">G2
Geometria axiomática natural</td><td rowspan="2">G3
Geometria axiomática formal</td></tr>
<tr><td>Parcialmente axiomática</td><td>Completamente axiomática</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Henry</td><td>Situação Concreta</td><td colspan="2">PriMeira Modelação</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="3">Matematização</td></tr>
<tr><td>Parcialmente axiomática</td><td colspan="2">Completamente axiomática</td></tr>
</table>

Fonte: Garbin, 2024

3.2.1 Os Paradigmas Geométricos de Parzysz

Utilizando as bases teóricas descritas, Parzysz (2001, 20016) elabora a Tabela 3 no qual as abordagens ou práticas geométricas são classificadas em quatro paradigmas, divididos em axiomáticos e não axiomáticos, de acordo com aspectos relacionados aos objetos utilizados, que podem ser físicos ou teóricos, e às validações, que podem ser perceptivo-dedutivas ou hipotético-dedutivas.

Tabela 3 - Paradigmas geométricos, segundo Parzysz (2006)

	Não axiomáticas		Axiomáticas	
Tipo de Abordagem	Concreta (G0)	Espaço-Gráfica (G1)	Proto-Axiomática (G2)	Axiomática (G3)
Objetos	Físicos		Teóricos	
Validações	perceptivo dedutivas		hipotético dedutivas	

Fonte: Parzysz, 2006, p.130 (traduzido pelo autor).

Os paradigmas Concreta G0 e Espaço-Gráfica G1 não se baseiam em axiomas, são utilizados apenas objetos concretos e validações perceptivas. Uma prática geométrica típica do paradigma G0 leva em consideração todas as características do material como cor, tipo de material, espessura, entre outras, enquanto uma prática de acordo com o paradigma G1, ocorreria a partir de certas abstrações dessas características para a realização de uma representação do objeto (que pode ser em papel, na lousa ou na tela do computador). No tocante às validações, uma abordagem característica de G0 baseia-se no manuseio do próprio objeto como, por exemplo, a comparação por sobreposição. Em G1, as validações baseiam-se no uso de instrumentos de medida como régua, transferidor e compasso. Como exemplo, podemos pensar na seguinte situação: dados dois segmentos de reta de comprimentos diferentes, qual é o maior? Uma argumentação característica de G0 seria baseada, por exemplo, em recortar e sobrepor os segmentos, e a conclusão de qual é o maior se daria porque é visível, um é maior do que o outro. Ao ser resolvida com argumentos característicos de G1, os segmentos seriam, por exemplo, medidos com régua, e a maior medida corresponderia ao maior segmento.

Questões referentes às práticas do paradigma G1 também podem versar sobre o manuseio de instrumentos e a qualidade da representação que pode causar equívocos na análise visual. Podem-se discutir imprecisões na medida de um ângulo, se os pontos traçados com o grafite e a régua são de fato colineares, se os desenhos estão sujeitos a pequenas distorções do material ou erro humano. Isso implica que a validade de um resultado é estabelecida de acordo com a precisão da representação e do instrumento usado. Tudo isso enfatiza que a representação é o objeto estudado nesse paradigma.

Nas práticas geométricas que caracterizam os paradigmas axiomáticos Proto-Aximático G2 e Axiomático G3, a existência dos objetos matemáticos é garantida por enunciados e as validações são lógico dedutivas. Uma característica de validações típicas de G2 ocorre quando o sujeito segue as leis do discurso matemático e, facultativamente, recorre a desenhos, ou seja, quando são usados objetos concretos para que sejam comprovadas ou encontradas pistas visuais, mesmo que em casos particulares. Nesse caso, ocorrem idas e vindas entre a axiomatização e a percepção. Também é característica das validações típicas do paradigma G2, que alguma afirmação seja feita sem que o sujeito tenha conhecimento da necessidade de uma validação dedutiva. Nas práticas que ocorrem de acordo com o paradigma G3, os desenhos não conduzem a argumentação, isso implica que não ocorrem idas e vindas entre percepção e axiomatização. Além disso, qualquer afirmação citada é seguida de demonstração ou de uma referência à validação em um sistema axiomático.

Nessa formulação teórica, estabelecida por Parzysz (2006) notam-se características comuns às teorias anteriormente citadas. A oposição entre o que é natural ou concreto e o que é teórico nas teorias de Van Hiele e de Houdement & Kuzniak. Ademais, são aproveitados o termo paradigma e a ideia de que esses paradigmas são continuamente superados, seja na intersecção entre GI e GII, seja entre GII e GIII. Essa transição é destacada de maneira análoga na passagem de G1 para G2, que é a transição de uma abordagem geométrica de base perceptiva do concreto para uma abordagem dedutiva, a partir de objetos teóricos, como o que ocorre no Nível 2 de Van Hiele. Ainda é possível analisar que Parzysz (2006) insere dois paradigmas não axiomáticos por acreditar que podem ocorrer certas abstrações de objetos concretos que não impliquem em alguma abordagem dedutiva, assim como analisamos em Henry na relação Uma Primeira Modelação.

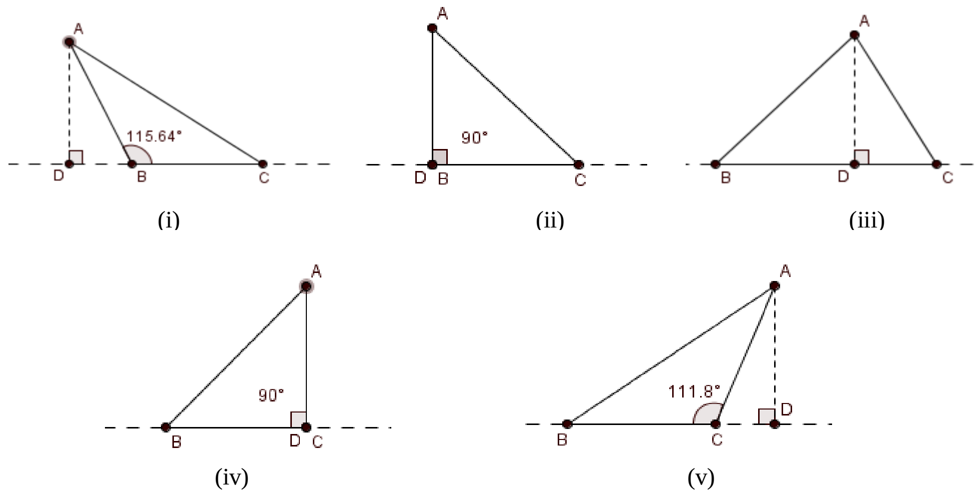
3.2.2 As relações entre os paradigmas Espaço-Gráfica G2 e o Proto-axiomático G1

Os paradigmas G1 e G2 se diferenciam por seus objetos, respectivamente concretos e abstratos, e por suas validações, respectivamente perceptivas e dedutivas.

Diferentemente do que aponta a teoria de Van Hiele, de acordo com Villiers (2010), Parzysz analisa que ocorre uma transição entre os paradigmas. Isso implica, muitas vezes, em validações que recorrem a um desenho como apoio, mesmo que a parte central da argumentação seja tratada de maneira dedutiva e não perceptiva. Logo, surge a necessidade de analisar essa recorrência, facultativa, ao G1, em argumentações típicas do G2, para que possamos compreender melhor as caracterizações de cada um desses paradigmas.

Um exemplo elaborado por nós para auxiliar no esclarecimento do que significa abordar a geometria sob a luz do paradigma G2 se refere à seguinte situação: o segmento que determina a altura relativa a um vértice de um triângulo tem intersecção com o prolongamento do lado oposto a esse vértice, se um dos ângulos adjacentes a esse lado for obtuso. Pode-se confirmar essa conjectura executando uma sequência de desenhos, com régua e compasso ou em um *software* de geometria dinâmica, em que o sujeito verifica o que acontece com a intersecção do segmento que determina a altura e o lado correspondente, conforme Figura 8.

Figura 8 - Sequência de triângulos ABC com suas alturas em relação à base BC



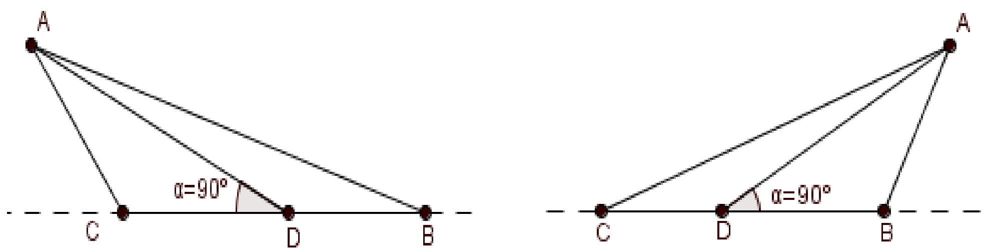
Fonte: Garbin, 2024.

Se realizada dessa forma, a comprovação da validade da conjectura é visual e utiliza instrumentos de medição, mesmo que o desenho seja realizado por uma construção apoiada em uma teoria axiomática. Note que o lado oposto ao vértice, que determina a altura, foi desenhado paralelo ao chão para que o participante tenha facilidade de perceber quando os ângulos são obtusos, agudos ou retos. Portanto, essa argumentação não é axiomática e é amparada por instrumentos, ou seja, é uma argumentação característica do G1.

Se a pessoa souber que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º, pode argumentar, afirmando que no triângulo ABC, com o ângulo B obtuso, se o ponto D, que é o pé da altura relativa ao vértice A, estiver entre B e C, então, o triângulo ABD terá a soma das medidas de seus ângulos internos maior que 180 graus. Identifica-se, nesse tipo de argumentação, uma validação baseada em uma propriedade garantida por um enunciado matemático (a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo) sobre o qual não foi feita menção sobre a validade, ou seja, a pessoa o assume como válido, sem questionamentos sobre a necessidade de demonstração. Podemos caracterizar essa argumentação como lógico dedutiva, portanto característica de G2.

Na mesma situação, o sujeito pode recorrer a um desenho (ver Figura 9), no qual existe uma tentativa de representar um triângulo com um ângulo obtuso e um ângulo reto, com o intuito de mostrar que essa situação não é possível, juntamente com a argumentação sobre a soma dos ângulos internos do triângulo.

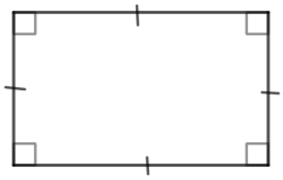
Figura 9 - Possíveis triângulos obtusângulos retângulos



Fonte: Garbin, 2024.

Poder-se-ia argumentar que, conforme o desenho da direita, a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ACD é maior que 180º graus, pois o ângulo ADC é reto e o ângulo C é obtuso, o que valeria de maneira análoga para o triângulo à esquerda. Portanto, nota-se que ocorrem movimentações entre os paradigmas, ora a validação tem características de G1 – quando se refere ao desenho –, ora de G2 – quando se refere à soma das medidas dos ângulos internos do triângulo. Neste exemplo, e nos anteriores, o desenho apresenta grande importância nas argumentações, ora ele é o alicerce da argumentação (G1), ora ele é um apoio à argumentação (G2). Essa dependência é um ponto sensível que pode comprometer argumentações, pois um desenho pode ter características contrarias a outras informações que possam existir na representação de um objeto. Por exemplo, a representação Figura 10 é um quadrado.

Figura 10 - Representação de um quadrado ou será um retângulo?



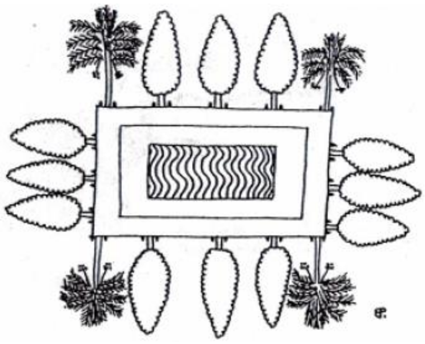
Fonte: Garbin, 2024.

A partir do que foi apresentado, podemos ampliar nosso olhar para o que significa uma argumentação característica do paradigma Proto-Axiomático G2. Nesse paradigma, as validações são lógico-dedutivas e não mais perceptivas, como ocorre em G1. Além disso, G2 se difere de G3 pela possibilidade de se recorrer a desenhos na condução da dedução, ou seja, diferentemente da prática característica de G3, na prática característica de G2, a percepção pode, momentaneamente, conduzir uma argumentação. Outra diferença importante entre G2 e G3 se refere às afirmações aceitas sem sua respectiva demonstração. Parzysz (2006) usa a expressão axioma local, que entendemos ser o uso de uma afirmação demonstrável sem a realização de sua demonstração. O sujeito que aborda a geometria de acordo com G3 usa o axioma local, mas sabe que a afirmação necessita ser demonstrada. Ao contrário, o sujeito que utiliza a abordagem de G2, ao fazer uso do axioma local, não tem consciência da necessidade da demonstração.

3.2.3 Visto x Sabido

Quando desejamos representar, no plano bidimensional, objetos tridimensionais, nem todas as características podem ser mantidas, pois essa representação parte de determinado ângulo de visão e destaca o que é visível por esse ângulo. Por exemplo, em um desenho de um cubo com uma face apoiada sobre uma mesa e outra paralela ao plano do desenho, não é possível representar a face que fica atrás, nem aquela que está apoiada sobre a mesa, apesar de sabermos que elas existem. Um exemplo de Parzysz (2006) para esclarecer as interações entre o visto e o sabido remete a um desenho egípcio do século XIV a.C. (Figura 11). Nessa imagem, há distorção do ângulo entre as árvores e a piscina, pois as árvores são desenhadas paralelas ao solo, quando na realidade são perpendiculares.

Figura 11 - Desenho egípcio do século XIV a.C.

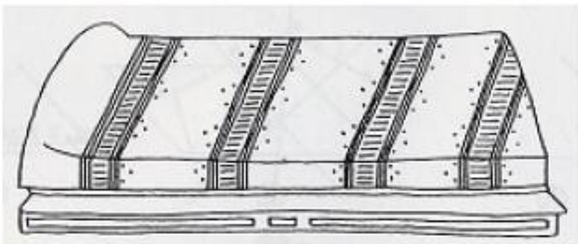


Fonte: Parzysz, 2006, p. 138.

Nesse desenho, o que enxergamos se remete ao visto – as árvores paralelas ao plano da piscina –, e o que sabemos por uma imagem mental está ligado ao sabido –, árvores perpendiculares ao plano da piscina.

Parzysz (2006) defende ainda que essa coexistência entre o visto e o sabido nem sempre é tranquila, pois pode gerar conflitos. Como exemplo, a Figura 12 realizada a partir de uma parte da miniatura da morte de Moisés, representada na, assim consagrada *Bíblia de Nápoles*, do século XIV, em que as tiras da cama parecem – o visto – paralelas à cabeceira da cama. No entanto, ao observar a faixa da cabeceira e a última faixa da direita sabemos que não pode haver paralelismo – o sabido.

Figura 12

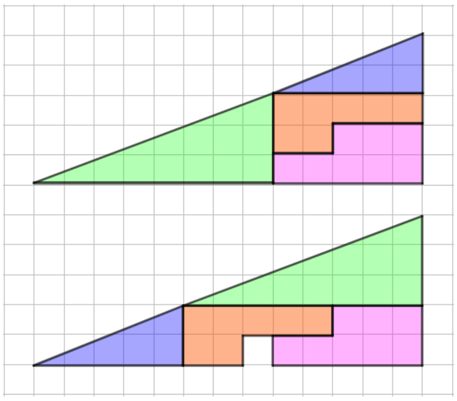


Fonte: Parzysz, 2006, p. 139.

Podemos concluir que a negociação entre um objeto e suas características, ou as propriedades e o desenho que o representa, deve ficar o mais clara possível para que se compreenda o desenho como uma representação (possível) do objeto. Isso quer dizer que é necessário que sejam trabalhadas as interpretações (codificações e decodificações) das representações dos objetos, para que esta não gere confusão.

Parzysz defende que podemos nos enganar e acreditar que, em desenhos planos, não pode ocorrer essa distorção ou essa ocultação, pois "os objetos podem ser representados como são" (2006, p. 132), mas isto é um equívoco, segundo o mesmo, pois o objeto matemático é teórico, garantido por um enunciado, e o desenho é uma representação possível desse objeto sobre um papel, na lousa ou na tela de um computador. Um exemplo é o caso do rearranjo de polígonos representados na imagem logo abaixo, a Figura 13, que nos leva a acreditar que as áreas não foram conservadas:

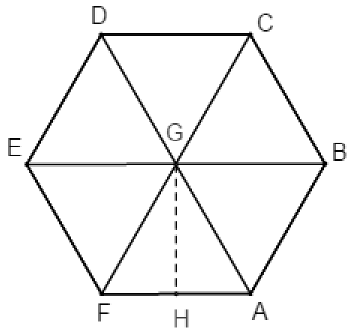
Figura 13 - Rearranjo de polígonos e conservação da área



Fonte: Garbin, 2024.

Vejamos outro exemplo que também traz à tona a contaminação do visto pelo sabido; supondo que o autor de uma questão imagina um cubo de aresta 6 cm e realiza o desenho, conforme Figura 14, que tenta representar o cubo visto a partir de um vértice com o seguinte enunciado: calcule a medida de GH sabendo que H é o ponto médio de FA e AB=BC=CD=DE=EF=FA=GF=GB=6 cm,

Figura 14 - Desenho de um cubo visto a partir do vértice G



Fonte: Garbin, 2024.

O autor dessa questão espera que a resposta se refira ao segmento GH, em que G é um vértice do cubo e H é o ponto médio da aresta FH, que pertence à face ABGF. No entanto, se as codificações e decodificações estabelecidas entre o autor da pergunta e quem a responde não estiverem bem esclarecidas, quem responde pode associar o desenho a um hexágono regular e interpretar GH como um apótema. No caso de uma avaliação externa, a problemática aumenta se considerarmos que autor e corretor não são a mesma pessoa.

3.2.4 Articulação entre G2 e G3

A prática de pessoas que abordam a geometria de acordo com o paradigma G3 difere da do G2 não só pela utilização de desenhos, mas também pela consciência do sistema axiomático como um todo. Isso quer dizer que um sujeito sabe quais afirmações precisam ser demonstradas e quais não. Ao contrário, a argumentação característica de G2 permite que afirmações sejam aceitas sem a comprovação de sua validade, isso pode significar, inclusive, que o sujeito sequer tenha consciência que tais afirmações são aceitas porque foram demonstradas em algum momento. Uma abordagem característica de G3 não significa, porém, que é necessário demonstrar, todas as vezes, o mesmo teorema, mas é necessário estar ciente de quais afirmações só podem ser feitas, porque existe uma demonstração para comprová-la.

Segundo Parzysz (2006), não significa que um sujeito com uma abordagem da geometria característica do paradigma G3 não faça desenhos, mas caso isso ocorra é com uma função diferente da abordagem do G2. Quando uma argumentação característica de G2 usa desenho, a necessidade da demonstração de certas afirmações passa despercebida, pois a percepção é suficiente para a validação. Em G3, o sujeito sabe quando as argumentações são características de G1 e G2, logo se espera que o desenho não seja o condutor da argumentação, em nenhum momento.

Com a apresentação da proposta de desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo Parzysz, podemos colocar nossa terceira e última questão de pesquisa:

- Ao aceitarem o convite para a investigação, os participantes a realizaram em um trânsito entre argumentações perceptivo dedutivas e lógico dedutivas em relação às propriedades estudadas nos quadriláteros planos e triângulos?

Capítulo 4. Metodologia, análise didática e análise das entrevistas

Neste capítulo apresentamos nossos procedimentos metodológicos, o que inclui nossa proposta de atividade, acompanhada da análise didática das questões.

4.1 Metodologia

Na descrição dos aspectos metodológicos de nossa pesquisa, buscamos mostrar como ela se desenvolveu ao longo do tempo e foi influenciada por três momentos determinantes; como dissemos anteriormente, o primeiro momento foi a participação no XXII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (EBRAPEM, 2018), que nos lembrou da importância de fomentarmos a formação crítica ao ensinar matemática; o segundo decorreu do isolamento social devido à pandemia da Covid-19, que alterou nossos procedimentos metodológicos; e, por fim, a intervenção da banca de qualificação trouxe elementos para identificarmos aspectos importantes que devem ser incluídos em um ensino que vise à formação crítica, pois a qualificação cobrou e orientou uma complementação da análise didática das atividades criadas e também da análise dos dados colhidos.

Em síntese, realizamos uma pesquisa interventiva, com análise qualitativa dos dados, para verificar se as atividades propostas têm potencial para alavancar a formação crítica dos participantes. A intervenção ocorreu por meio de entrevistas reflexivas, realizadas individualmente, à distância, com dois participantes, um estudante da rede particular paulista, cursando o nono ano do Ensino Fundamental – Anos Finais, e o outro estudante da rede pública, cursando a primeira série do Ensino Médio em Mecatrônica, em uma Escola Técnica Estadual (ETEC). Os dois participantes foram convidados a partir da divulgação e discussão de nossa pesquisa, via *WhatsApp*, com um grupo de amigos, formado por pessoas próximas, uma vez que estávamos em isolamento social, devido à pandemia do coronavírus.

A pesquisa que realizamos teve como mote inicial preocupações baseadas em percepções e reflexões realizadas a partir de nossa experiência escolar como aprendiz e como professor de Matemática. Ao iniciarmos a graduação, sentimos o salto qualitativo (e quantitativo) entre as séries finais da Educação Básica e a Licenciatura em Matemática no que tange ao trabalho com demonstração. Além disso, percebemos que o ensino de geometria, em geral, ocupa lugar de menor destaque quando comparado à importância fundamental que tem para o desenvolvimento da Matemática. Dessa forma, iniciamos nossa pesquisa sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico a partir dos trabalhos de Bernard Parzysz (2001, 2006).

Após a participação no XXII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – XXII EBRAPEM (2018) – retomamos uma antiga preocupação com a formação crítica dos estudantes em aulas de Matemática. Acreditávamos, até com certa ingenuidade, que as alternativas se reduziam a utilizar a Matemática para ler dados estatísticos ou a abrir espaço entre um conteúdo e outro para falar de questões candentes de nosso tempo, nas quais, eventualmente, a Matemática seria usada. Por outro lado, começamos a nos questionar como seria possível ensinar matemática pura e contribuir para a formação crítica dos estudantes. Encontramos na *Educação Matemática Crítica*, de Skovsmose, subsídios que contribuíram decisivamente para entender como poderíamos trabalhar com essas três preocupações.

A partir das leituras que fizemos, entendemos que uma investigação que oportunizasse o desenvolvimento do pensamento geométrico, em um trabalho gradual com argumentação, poderia viabilizar a desejada formação crítica. Cientes de tal perspectiva, decidimos realizar, durante nossas aulas de matemática, uma pesquisa interventiva com análise qualitativa dos dados para verificar se a investigação geométrica proposta com um conjunto de atividades oportuniza o desenvolvimento do pensamento crítico e ou uma formação crítica. A aplicação das atividades estava planejada para ocorrer com turmas de sextos e sétimos anos do Ensino Fundamental – Anos Finais (estudantes de 11 e 12 anos de idade) na escola em que lecionávamos na rede municipal de ensino da cidade de São Paulo. Proporíamos a investigação a respeito das classificações de quadriláteros planos e triângulos, desigualdade triangular, rigidez do triângulo e soma das medidas dos ângulos internos desses polígonos. As primeiras atividades que criamos previam investigações por meio de materiais manipuláveis como canudos, palitos e varetas, posteriormente por desenhos em papel com uso de régua e transferidor. Criaríamos atividades no *GeoGebra* para completar a investigação, de acordo com as necessidades que surgissem no desenvolvimento das aplicações das atividades elaboradas. A intervenção ocorreria em 2020, o que foi impedido devido à determinação do isolamento social em decorrência da pandemia do novo coronavírus.

Nas escolas da rede municipal de ensino da cidade de São Paulo, esse isolamento teve início no começo do ano letivo de 2020 e perdurou por todo esse ano. No ano de 2021, a partir do primeiro dia letivo, as escolas retornaram com lotação parcial de estudantes e os professores dessa rede de ensino deflagraram uma greve que durante três meses reivindicou o retorno às aulas de modo seguro a toda a comunidade escolar. Findado o movimento paredista, o retorno se deu de modo gradual, ainda em sistema de rodízio, no qual as atividades escolares ocorreram em forma de escalonamento semanal entre formato presencial e virtual de acompanhamento às aulas. Durante uma semana, 50% dos estudantes assistia às aulas presencialmente, enquanto os demais realizavam atividades *online*, e na semana seguinte os grupos trocavam a forma de acompanhamento.

Em decorrência desse contexto, reelaboramos a proposta de atividades para que fosse possível realizá-la pelo formato virtual, por meio de entrevista reflexiva, que propusesse a investigação da soma das medidas dos ângulos internos de quadriláteros planos e triângulos. Para que isso fosse possível, desistimos das atividades que previam o uso de palitos, varetas e canudos, foi necessário readequar as atividades que previam uso de desenhos, régua e transferidor e construir atividades programadas no *software GeoGebra*. Criamos sete atividades com potencial de estabelecerem cenários para investigação em matemática pura (SKOVSMOSE, 1999). As atividades foram pensadas para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico a partir de argumentações que transitassem entre as características dos paradigmas G0, G1 e G2 (PARZYSZ, 2006).

A escolha do *software GeoGebra* se deu por dois motivos; um ligado ao fato de possibilitar uma interação remota e síncrona entre participantes e pesquisador; e outra porque cria novas formas de aprendizagem e "a forma interativa proporcionada pelo uso do *GeoGebra* é dinâmica, plástica, atrativa e permite autonomia [...]." (CONCEIÇÃO et al., 2019, p. 12), o que pode facilitar o estabelecimento de investigação.

A retirada das atividades que visavam à introdução de conceitos básicos de quadriláteros e triângulos nos colocou a necessidade de buscar estudantes em séries mais avançadas e com algum conhecimento a respeito desses polígonos.

A forma de aplicação da atividade se deu por duas entrevistas reflexivas no ambiente virtual, possível com a ferramenta *Google Meet*, uma com cada um dos dois participantes. Isso permitiu o compartilhamento da tela do participante e a visualização do que era realizado nas atividades preparadas no *GeoGebra*. Quando as atividades necessitavam do uso de régua e transferidor, a câmera do computador era direcionada para as mãos dos participantes. As duas entrevistas foram realizadas nos meses de julho e agosto de 2020 e tiveram suas imagens gravadas em vídeo. A primeira entrevista durou aproximadamente 1 hora e 51 minutos e está compilada em apenas um vídeo. A segunda durou aproximadamente 1 hora e 15 minutos e está compilada em três vídeos, devido a erros no *software* de gravação de imagens da tela do computador e ao participante usar inicialmente um celular e depois um computador.

Após a banca de qualificação, nos debruçamos sobre a leitura e compreensão do significado de diálogo e do modelo de cooperação investigativa (Modelo-CI) (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010) e as discussões feitas por Skovsmose (2020) sobre matemática em ação. Essas leituras nos mostraram elementos centrais para fomentar a formação crítica ao ensinar Matemática, e em especial, Matemática pura. Também verificamos que as atividades elaboradas continham características que contribuíam para a realização do diálogo nos moldes do Modelo-CI, e atuavam sobre a matemática em ação justificação e legitimação.

4.2 A proposta de atividade e análise didática

Para facilitar o entendimento do texto, optamos por colocar, no que segue, nessa ordem, uma descrição geral das sete atividades e, no parágrafo 4.2.1 cada uma delas seguida de sua análise didática.

As atividades foram elaboradas com base na EMC (SKOVSMOSE 1999, 2015) e no desenvolvimento do pensamento geométrico (PARZYSZ 2001, 2006) e propunham a investigação de algumas propriedades dos quadriláteros planos e triângulos, com ênfase na soma das medidas dos ângulos internos.

O objetivo geral do conjunto de atividades foi propor uma investigação sobre a soma das medidas dos ângulos internos de quadriláteros planos e triângulos, trabalhando gradualmente com argumentações. Esperávamos que se criasse um contexto que promovesse o diálogo nos moldes do Modelo-CI (SKOVSMOSE, 2010) e que fossem realizadas argumentações perceptivo dedutivas e lógico dedutivas. Além disso, esse conjunto de atividades se caracteriza em cenários para investigação (SKOVSMOSE, 2000) na medida em que o participante aceite o convite e as realize. Dessa forma, teríamos condições de avaliar se contribuímos para a formação crítica dos participantes.

Nas sete (7) atividades propostas, apenas o item 2 da Atividade 5 foi elaborado para que se estabelecesse uma comunicação característica da lista de exercícios. Os demais itens foram elaborados como potenciais cenários para investigação em matemática pura. Dois aspectos das atividades merecem destaque; o primeiro, diz respeito ao meio usado para fazer as investigações: lápis, papel, régua e transferidor ou o meio virtual, com o uso do *software GeoGebra*, no qual as atividades foram programadas na versão *online*; o segundo, ao objeto geométrico investigado: quadriláteros planos ou triângulos. As Atividades 1 e 2 convidaram os participantes a investigarem propriedades nos quadriláteros planos, enquanto as Atividades 3 e 4 convidaram para a investigação nos triângulos. Essa ordem foi escolhida para que o participante pudesse investigar livremente propriedades dos quadriláteros sendo direcionado ao estudo dos triângulos para compreender o que acontece com a soma das medidas dos ângulos internos. As Atividades 1 e 3 deixaram à disposição do participante régua e transferidor, esperávamos com isso, que realizem medições para fazerem validações. As Atividades 2 e 4 foram realizadas no *software GeoGebra*, possibilitando que um número muito grande de triângulos e quadriláteros planos fossem investigados.

O item 1 da Atividade 5 foi pensado para criar condições necessárias para o participante tomasse consciência de uma contradição que, segundo Balacheff (1987, p. 5), depende de duas condições, "(i) existência de um esperado; (ii) possibilidade de construir a afirmação associada a esse esperado e sua negação."[18]. Assim, nas quatro primeiras atividades, desejávamos que os participantes acreditassem que os valores das somas das medidas dos ângulos internos do triângulo, e do quadrilátero plano, variassem em torno de 180º e 360º, respectivamente. Era possível que isso ocorresse, pois as medições realizadas com transferidor podem conter imprecisões e no *GeoGebra* as medições são feitas por aproximação e podem variar dependendo do número de casas decimais configuradas. Por outro lado, no item 1 da Atividade 5, é possível verificar visualmente que a soma em questão, no caso dos triângulos, é igual a 180º, o que dá condições para que o participante formule uma afirmação que negue o que percebeu nas primeiras atividades. Para tentar superar essa contradição, apresentamos no item 2 da Atividade 5 uma demonstração e discutimos esse resultado.

Nesse sentido, desejávamos que a demonstração da soma das medidas dos ângulos internos do triângulo (apresentada no item 2 da Atividade 5), surgisse como uma necessidade de sanar essa contradição de acordo com as funções de verificação e de explicação (VILLIERS, 2001), pois o participante pode verificar e entender por quais

---

[18] " (i) l'existence d'un attendu (ii) possibilité de construire l'affirmation associée à cet attendu et sa négation."

razões uma das afirmações construídas, a partir da contradição, é verdadeira e a outra é falsa.

A Atividade 6 deu a palavra aos participantes para que expressem aquilo que entenderam da demonstração realizada no item 2 da Atividade 5.

O item 1 da Atividade 7 permite a verificação visual de que a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero é igual a 360º (trezentos e sessenta), possibilitando que o participante tome consciência da contradição exposta. O item 2 da Atividade 7 permite que argumentações sejam realizadas para justificar que os quadriláteros planos sempre podem ser decompostos em triângulos.

No que concerne ao desenvolvimento do pensamento geométrico, as Atividades 1, 2, 3, 4 foram pensadas em uma abordagem que possibilite argumentações baseadas em medições, característica do paradigma G1. O item 1 da Atividade 5 foi pensado para argumentações baseadas na percepção visual, característica do paradigma G0. O item 2 da Atividade 5 foi desenvolvido no paradigma G2, pois utiliza argumentação lógico dedutiva com apoio de uma figura. A Atividade 6 foi pensada para que o participante se expresse com uma argumentação lógico dedutiva, característica do G2. O item 1 da Atividade 7 foi elaborado no paradigma G0, pois permite a construção de justificativas baseadas a partir da percepção visual, e o item 2 permite a construção de justificativas lógico-perceptivas, mas provoca o participante a fazer uma dedução que relacione os ângulos internos do quadrilátero plano com os internos do triângulo.

A Tabela 4 apresenta um resumo esquemático que relaciona cada Atividade aos seus ambientes de aprendizagem, de acordo com os cenários para investigação, os paradigmas do desenvolvimento do pensamento geométrico, os objetos matemáticos estudados e os meios de investigação.

Tabela 4 - Quadro esquemático da classificação das Atividades

Atividades	**Cenários para Investigação**	**Desenvolvimento do pensamento geométrico**	**Objeto matemático / meio de investigação**
Atividade 1	Ambiente de aprendizagem 2	Paradigma G1	Quadrilátero / papel, régua e transferidor
Atividade 2	Ambiente de aprendizagem 2	Paradigma G1	Quadrilátero / *GeoGebra*
Atividade 3	Ambiente de aprendizagem 2	Paradigma G1	Triângulo / papel, régua e transferidor
Atividade 4	Ambiente de aprendizagem 2	Paradigma G1	Triângulo / *GeoGebra*
Atividade 5 item 1	Ambiente de aprendizagem 2	Paradigma G0	Triângulo / *GeoGebra*

Atividade 5 item 2	Ambiente de aprendizagem 1	Paradigma G2	Triângulo / *GeoGebra*
Atividade 6	Ambiente de aprendizagem 2	Paradigma G2	Triângulo
Atividade 7 item 1	Ambiente de aprendizagem 2	Paradigma G0	Quadrilátero / *GeoGebra*
Atividade 7 item 2	Ambiente de aprendizagem 2	Paradigma G0 e G2	Quadrilátero / *GeoGebra*

Fonte: Garbin, 2024.

4.2.1 As atividades

Em seguida, apresentamos os enunciados das atividades destacados em quadros. Antes de cada quadro, apresentamos os objetivos da atividade. Após cada quadro, fazemos a análise dos itens da atividade.

Atividade 1

Os objetivos da Atividade 1 é que o participante estabeleça vistas privilegiadas sobre o que se deseja investigar, verifique qual a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero plano para os desenhos realizados. Esperamos que a partir dessa investigação levante alguma hipótese a respeito da soma em questão. Podem surgir dificuldades no uso do transferidor e erros na medição. A forma como os quadriláteros forem desenhados (e o uso que fazem do desenho) pode indicar o paradigma do desenvolvimento geométrico em que os participantes estão trabalhando, pois podem fazer desenhos sem usar o apoio dos instrumentos, podem usar a graduação da régua para fazer os desenhos ou podem construir os quadriláteros a partir de propriedades como, por exemplo, paralelismo dos lados ou congruência de ângulos. Além disso, podem ficar restritos a desenhos dos quadriláteros convexos planos mais conhecidos.

Atividade 1

Nesta atividade vamos estudar propriedades dos quadriláteros planos com alguns materiais comuns à sala de aula: lápis, borracha, papel sulfite, régua e transferidor.

1) Em cada um dos quadros abaixo desenhe um quadrilátero e utilize os materiais disponíveis para encontrar alguma regularidade.

2) O que você analisou nos quadriláteros desenhados? Por quê?

3) Você observa alguma regularidade na soma das medidas dos ângulos internos dos

quadriláteros? Qual?

4) Se outros quadriláteros fossem desenhados, o que aconteceria com a soma das medidas dos ângulos internos? Justifique.

5) Qual a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero?

6) Qual justificativa para sua resposta à pergunta anterior?

O item 1 é uma orientação com finalidade de convidar o participante a realizar alguma investigação sobre propriedades dos quadriláteros. Essa orientação deixa em aberto o que exatamente deve ser investigado. Essa característica é essencial para se configurar uma proposta de cenários para investigação. Aceitando o convite, o cenários para investigação se estabelece e o participante buscará estabelecer as vistas privilegiadas em relação à perspectiva desejada. Para contribuir com isso, o pesquisador precisa compreender o que o participante está investigando e eventualmente direcioná-lo, e os itens 2 e 3 contribuem para esse propósito. Inicialmente, pensamos em seis desenhos para que o participante possa pensar em quadriláteros planos diferentes de retângulos, quadrados, losangos, trapézios e paralelogramos.

Nesse sentido, o item 2 visa contribuir tanto para o pesquisador como para o participante perceberem e reconhecerem perspectivas da investigação em curso, isso significa que o item pode fomentar o diálogo. A primeira pergunta desse item (O que você analisou nos quadriláteros desenhados?) possibilita que o participante verbalize o que investiga. Isso contribui para que perceba ou mesmo reconheça alguma regularidade e para o pesquisador, também, perceber ou reconhecer o que o participante está investigando. A segunda pergunta (Por quê?) propõe ao participante a reflexão da ação que está sendo realizada, pois exige uma explicação do que está sendo feito. Para o pesquisador, poderá dar indícios do que o participante tem em mente. Dessa forma, entendemos que esse item contribui para que participante e pesquisador estabeleçam contato.

O objetivo do item 3 é complementar os itens 1 e 2, pois busca direcionar o foco para a investigação desejada, sem que a abertura da atividade seja completamente anulada. A primeira pergunta do item 3 (Você observa alguma regularidade na soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros?) faz direcionamento para a investigação desejada. Apesar disso, a segunda pergunta (Qual?) mantém certa abertura à atividade, pois deixa para que o participante verbalize aquilo que pensa.

Importante notar que as perguntas 2 e 3 podem ser incrementadas por outras de caráter investigativo, ou mesmo não serem necessárias, caso o participante conheça o valor da soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros ou obtenha facilmente a regularidade desejada.

O item 4 busca fomentar a generalização ou a contestação de alguma conjectura feita na investigação. A primeira parte desse item (Se outros quadriláteros fossem desenhados, o que aconteceria com a soma das medidas dos ângulos internos?) é uma pergunta do tipo: O que acontece se...?, e fomenta a reflexão sobre o que está sendo investigado, possibilitando o ato de perceber e reconhecer ou pode servir como um desafio, caso nova perspectiva seja percebida. Em nossa experiência, é comum que estudantes deem uma resposta sem apresentar os raciocínios que utilizaram. Buscamos impedir que isso aconteça com a inserção da segunda parte do item (Justifique.), pois convida o participante a verbalizar o motivo pelo qual o que respondeu na primeira parte acontece.

Os itens 5 e 6 contêm perguntas que poderiam ser escritas em um único item, porém decidimos separá-las em dois itens para que ficasse claro ao participante a necessidade de justificativa, evitando respostas automáticas que não apresentassem os raciocínios utilizados. Nesse sentido, o item 5 (Qual a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero?) tem o intuito de direcionar o participante a apresentar uma resposta definitiva – até o momento, pois posteriormente essa resposta será questionada – sobre o valor da soma em questão, por isso é feita de forma direta. Essa pergunta pode ajudar o participante a perceber e reconhecer a perspectiva desejada na investigação. O objetivo do item 6 (Qual justificativa para sua resposta à pergunta anterior?) é fomentar a reflexão e cooperar com pelo menos os atos dialógicos reconhecer, reformular, e desafiar, pois a necessidade de elaborar uma justificativa pode levar o participante a refletir sobre a perspectiva sob a qual está agindo.

Atividade 2

O objetivo da Atividade 2 é que o participante possa testar as hipóteses levantadas na Atividade 1. Esperamos que se questionem se a soma tem valor exato ou pode variar. Acreditamos que conclua que essa soma varie em torno de 360º, pois o dinamismo inerente ao *software* permite que as hipóteses levantadas sejam testadas em número muito grande de quadriláteros. O *software GeoGebra* faz medições por aproximação, isso significa que dependendo do número de casas decimais configuradas, as medidas dos ângulos e suas respectivas somas mudam para um mesmo quadrilátero. Isso é fundamental para que o participante tome consciência da contradição que desejamos expor em relação ao valor da soma.

Atividade 2

Agora, vamos estudar quadriláteros com o auxílio de um software. Clique no *link*, siga as instruções e responda as perguntas.

Clicando nos pontos azuis localizados nos vértices do quadrilátero e movimentando-os no plano com o *mouse*, é possível formar outros quadriláteros. Ao lado direito da tela há uma barra preta com a legenda “Casas Decimais”, que deve ser utilizada para mudar o número de casas decimais. Basta clicar no ponto preto sobre a barra e movimentá-lo sobre a barra com o *mouse* ou com as setas de direção do teclado. Além disso, é possível verificar a medida de cada um dos ângulos internos do quadrilátero e sua soma.

Link: https://www.geogebra.org/m/sj5ddvx5

1) Faça um teste! Movimente os vértices e movimente o ponto sobre a barra ”Casas Decimais” para entender a dinâmica dos movimentos.

2) Em quais situações o quadrilátero não é convexo?

3) Em quais situações a figura formada não é um quadrilátero?

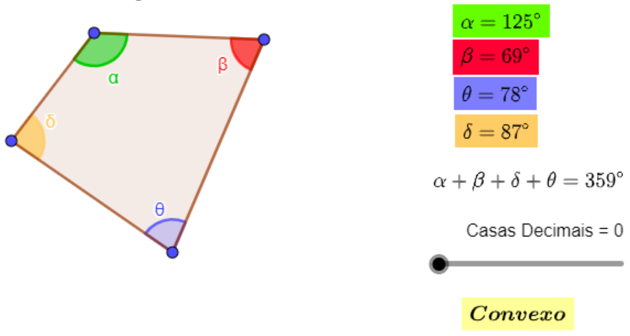
4) Ao alterar o número de casas decimais, o que acontece com a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero? Por que isso acontece?

5) Após analisar os quadriláteros que você construiu no *software*, você mantém sua resposta à pergunta 5 da atividade anterior? Por quê?

6) O que é possível afirmar a respeito da soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros?

A Figura 15 é o recorte da tela inicial referente ao *link* da Atividade 2.

Figura 15 - Recorte da imagem inicial no *GeoGebra* referente à Atividade 2



Fonte: Garbin, 2024.

Escolhemos um quadrilátero diferente daqueles que são estudados com mais detalhes na Educação Básica para o início da atividade, com o intuito do participante não utilizar justificativas de cunho visual nas hipóteses que vier a construir. Por exemplo, se o quadrilátero se assemelhasse a um quadrado, poderia concluir que a soma estava errada, uma vez que os quatro ângulos desse polígono são retos. Os ângulos são marcados com cores diferentes para facilitar a associação deles ao valor de suas medidas, que estão realçadas com as respectivas cores de cada ângulo. Além disso, no quadrilátero, os ângulos internos têm apenas os nomes (α, β, δ e θ), pois se as medidas dos ângulos estivessem junto aos ângulos, na formação de outros quadriláteros os valores poderiam se sobrepor ou se confundirem com os outros ângulos, o que atrapalharia a visualização. O valor da soma foi propositalmente deixado em 359º (trezentos e cinquenta e nove graus), para evidenciar uma possível contradição com algum conhecimento prévio do participante ou com a hipótese que pode ser levantada na Atividade 1, de que a soma em questão é igual a 360º (trezentos e sessenta graus). O número de casas decimais foi deixado em zero, pois acreditamos que o participante usará apenas medidas inteiras na Atividade 1, o que corroboraria o estabelecimento da contradição que desejamos. A informação de que o quadrilátero é convexo pode mudar para não convexo ou não é um quadrilátero, conforme detalhamos na análise dos itens 2 e 3.

As instruções dadas pretendem ajudar na familiarização com a ferramenta digital e que o participante possa entender o funcionamento de cada parte da programação feita no *GeoGebra*. Podem ser desenhados diversos quadriláteros movimentando qualquer vértice, é possível visualizar o valor das medidas dos ângulos internos, as somas dessas medidas e o número de casas decimais podem ser alterados pelo botão número de casas decimais. Além disso, o participante pode realizar quadriláteros convexos e não convexos.

O objetivo do item 1 é fazer o convite para que o participante se aproprie da dinâmica de funcionamento da programação realizada no *GeoGebra*. Apesar de ser um comando (Faça um teste!), a segunda parte (Movimente os vértices e movimente o ponto sobre a barra ”Casas Decimais” para entender a dinâmica dos movimentos.) pede para que o participante entre em contato com a programação realizada. Isso pode fomentar o primeiro contato com a perspectiva da atividade e consequentemente ajudar no ato de perceber.

O item 2 (Em quais situações o quadrilátero não é convexo?) tem como finalidade provocar a reflexão do participante sobre o que são os quadriláteros planos não convexos e perceber sua característica visual. Isso pode ajudar a ampliar o repertório de imagens do participante sobre os tipos de quadriláteros.

A finalidade do item 3 (Em quais situações a figura formada não é um quadrilátero?) é possibilitar que o participante perceba a necessidade de quatro pontos coplanares de forma que três a três não sejam colineares para se construir um quadrilátero plano.

A primeira pergunta do item 4 (Ao alterar o número de casas decimais, o que acontece com a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero?) é uma pergunta do tipo: — O que acontece se...?, que tem como propósito ajudar o participante a perceber e reconhecer que o valor das medidas dos ângulos as respectivas somas são aproximações. A segunda pergunta (— Por que isso acontece?) propicia uma reflexão ainda maior, facilitando os atos de reconhecer, pois será necessário que o participante dê uma explicação, e de desafiar, pois questiona a perspectiva do participante. Esperamos que os participantes se questionem sobre a validade dos valores das medidas dos ângulos e das somas apresentadas, já que o quadrilátero será o mesmo, o que implicaria na invariabilidade desses valores.

A primeira pergunta do item 5 (Após analisar os quadriláteros que você construiu no *software*, você mantém sua resposta à pergunta 5 da atividade anterior?[19]) tem a finalidade de desafiar a perspectiva adotada pelo participante na Atividade 1, pois pede que compare as elaborações realizadas até o momento. A segunda pergunta desse item (Por quê?) permite que o participante verbalize diferenças e similaridades das perspectivas e hipóteses levantadas nas investigações. Em específico, pode permitir a

[19] A pergunta 5 da Atividade 1: Qual a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero?

reformulação da perspectiva reconhecida na Atividade 1.

O item 6 (O que é possível afirmar a respeito da soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros?) questiona diretamente o participante sobre a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero plano, com objetivo que uma resposta seja formulada. Importante observar certa abertura nessa pergunta, pois ela não direciona o que deve ser afirmado a respeito da soma. Além disso, ele pode contribuir para que seja feita reformulações das respostas anteriores.

Atividade 3

A Atividade 3 tem o objetivo de investigar a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo usando papel, lápis régua e transferidor. Esperamos que o participante levante hipóteses sobre esse valor.

Atividade 3
Uma das maneiras de justificar a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é usando triângulos. Vamos voltar ao papel para estudar essa figura.
1) Em cada um dos quadros abaixo desenhe um triângulo e utilize os materiais disponíveis para verificar alguma regularidade.
2) O que você analisou nos triângulos desenhados? Por quê?
3) Você observa alguma regularidade na soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos? Qual?
4) Se outros triângulos fossem desenhados, o que aconteceria com a soma das medidas dos ângulos internos? Justifique.
5) Qual a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo?
6) Qual sua justificativa para sua resposta à pergunta anterior?

O comando inicial (Uma das maneiras de justificar a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero plano é usando triângulos. Vamos voltar ao papel para estudar essa figura) serve como um convite à investigação desejada. Há a indicação de que a solução para encontrar o valor da soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros planos é encontrar a soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos, que compõem o quadrilátero plano com o traçado de uma das diagonais, o que gera a conexão entre essa investigação e a realizada nas atividades anteriores.

Os objetivos e as formulações de cada item da Atividade 3 são análogos aos dos itens da Atividade 1, com exceção do número de polígonos que gostaríamos que os participantes desenhassem. No caso da Atividade 3, achamos pertinente que fossem feitos ao menos quatro triângulos, pois isso poderia ajudar os participantes a refletirem sobre a existência de outros triângulos, além dos isósceles, equiláteros e retângulos.

Atividade 4

Os objetivos da atividade 4 são análogos aos da Atividade 2, mas voltados para a investigação da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, ou seja, levar o participante a testar as hipóteses levantadas na Atividade 3, para que questione se a soma tem valor exato ou pode variar. Importante lembrar que as medições no *GeoGebra* são feitas por aproximação, isso significa que dependendo do número de casas decimais configuradas, as medidas dos ângulos e suas respectivas somas mudam para um mesmo triângulo. Isso é fundamental para que o participante tome consciência da contradição que se deseja expor em relação ao valor da soma em questão.

Atividade 4

Agora, vamos estudar os triângulos com o auxílio de um *software*. Clique no *link*, siga as instruções e responda as perguntas.

Clicando nos pontos azuis localizados nos vértices do triângulo e movimentando-os no plano com o *mouse*, é possível formar outros triângulos. Do lado direito da tela há uma barra preta com a legenda “Casas Decimais”, que deve ser utilizada para mudar o número de casas decimais nas medidas e na soma. Basta clicar no ponto preto sobre a barra e movimentá-lo sobre a barra com o *mouse* ou com as setas de direção do teclado. Além disso, é possível verificar a medida de cada um dos ângulos internos do triângulo e sua soma.

Link: https://www.geogebra.org/m/qsbyexeq

1) Faça um teste! Movimente os vértices e movimente o ponto sobre a barra ”Casas

Decimais” para entender a dinâmica dos movimentos.

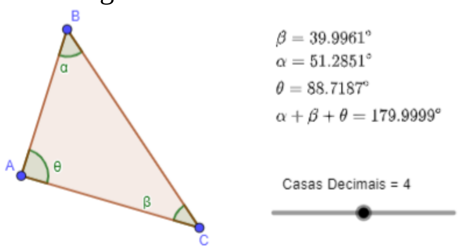
2) Ao alterar o número de casas decimais, o que acontece com a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo? Por que isso acontece?

3) Após analisar os triângulos que você construiu no *software*, você mantém sua resposta à pergunta 5 da atividade anterior? Por quê?

4) O que é possível afirmar a respeito da soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos?

A Figura 16 é o recorte da tela inicial referente ao *link* da atividade 4.

Figura 16 - Recorte da imagem inicial no *GeoGebra* referente à Atividade 4



Fonte: Garbin, 2024.

Com referência à Atividade 2, escolhemos na imagem inicial um triângulo escaleno, para que o participante não se baseasse na percepção visual para formar suas hipóteses. Alteramos o número de casas decimais para quatro, para que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo fosse diferente de 180º e ajudasse a expor uma possível contradição com algum conhecimento prévio do participante ou com a hipótese, que pode ser levantada na Atividade 3, de que a soma em questão é igual a 180º. Afora isso, o participante já teve contato com atividade similar e sabe que as medidas dos ângulos não são exatas e podem ser dadas com precisão decimal. Escolhemos não colocar cores diferentes nos ângulos internos, para que, cada vez menos, o apelo visual fosse um fator de distinção para a leitura da imagem e a formação de conjecturas.

Os demais itens têm formulação e objetivos análogos aos da Atividade 2, com a diferença de que não existem as perguntas relacionadas à convexidade do polígono, uma vez que esse conceito não se aplica aos triângulos.

Atividade 5

Os objetivos da Atividade 5 são proporcionar que se desenvolvam argumentos perceptivos visuais sobre o valor da soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos e apresentar uma demonstração para o valor dessa soma. Esperamos que os argumentos elaborados no item 1 sejam no sentido de justificar que o valor da soma em questão é igual a 180º, o que contribui para o participante tomar consciência da contradição a que o estamos expondo. Nesse sentido, a demonstração, apresentada no item 2, torne-se uma necessidade.

Atividade 5

Vamos a outra forma de investigar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

1) Clique no *Link* e movimente os vértices do triângulo:

https://www.geogebra.org/m/uunxaszj

a) O que você observa nos ângulos transportados do triângulo sobre o segmento de reta?

b) Você considera que foi feita uma demonstração desse fato?

2) Clique no *Link* e siga as instruções:

https://www.geogebra.org/m/ypeyth4j

a) No vértice B são construídos os ângulos alternos internos dos passos 4 e 6. Ao analisar esses ângulos e o ângulo interno do triângulo com mesmo vértice, o que podemos concluir?

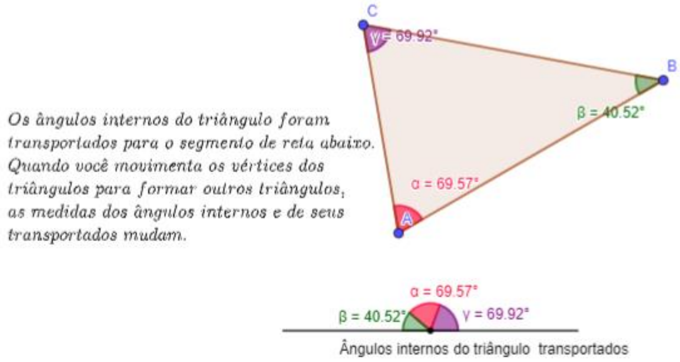
b) Qual a diferença entre esse item e o item 1?

c) Você considera que foi feita uma demonstração desse fato?

A instrução inicial (Vamos a outra forma de investigar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.) tem o papel de convidar o participante à outra forma de realizar a investigação

A Figura 17 é o recorte da tela inicial referente à programação contida no *link* do item 1 da Atividade 5.

Figura 17 - Recorte da imagem inicial referente ao primeiro *link* da Atividade 5



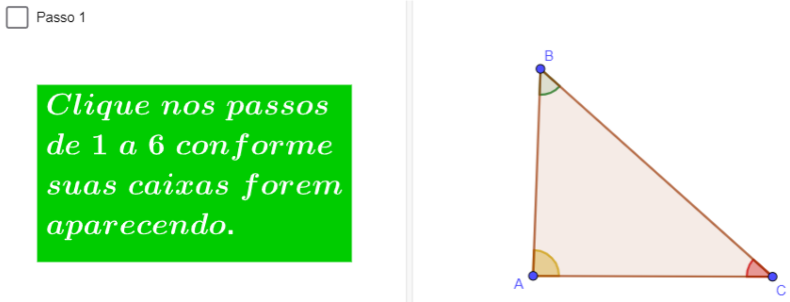
Fonte: Garbin, 2024.

Optamos por colorir os ângulos e colocar o valor das medidas junto aos ângulos no triângulo e nos ângulos transportados, pois entendemos que a correspondência entre os ângulos internos e os ângulos transportados ficaria facilitada. Como não colocamos o botão de casas decimais e nem o valor da soma das medidas dos ângulos internos como nas outras programações, entendemos que não sobrecarregaria a visualização incluir as instruções do funcionamento da programação na própria tela. Escolhemos colocar duas casas decimais no valor das medidas dos ângulos para que houvesse certa dificuldade em obter a soma dessas medidas e o foco dos participantes fosse voltado para o fato que os ângulos transportados cobriam exatamente um ângulo raso. Nesse caso, não há possibilidade de o participante alterar o número de casas decimais.

A primeira pergunta do item 1 (O que você observa nos ângulos transportados do triângulo sobre o segmento de reta?) é de caráter aberto e tem o objetivo de direcionar os participantes a observarem os ângulos transportados. Esperamos que visualmente percebam e reconheçam que os ângulos transportados cobrem exatamente um ângulo raso. A segunda pergunta (Você considera que foi feita uma demonstração desse fato?) tem o objetivo de abrir uma nova perspectiva de reflexão para o participante, qual seja, o que é uma demonstração. Além disso, permitirá ao pesquisador perceber e reconhecer qual é a perspectiva do participante referente a esse conceito. O *link* do item 2 apresentará o passo a passo de uma demonstração da soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos.

A Figura 18 e a Figura 19 são recortes da tela inicial e da tela com todos os passos realizados

Figura 18 - Recorte da tela inicial do *link* do item 2 da Atividade 5



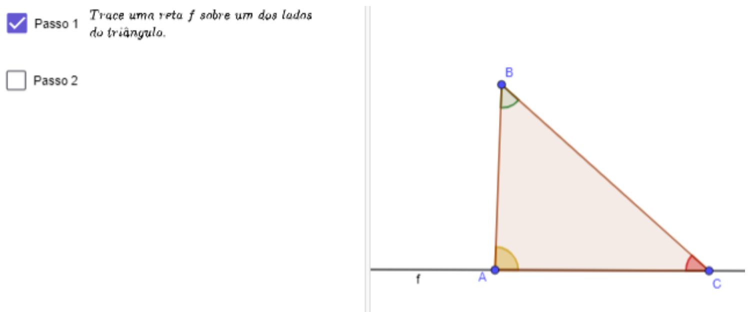
Fonte: Garbin, 2024.

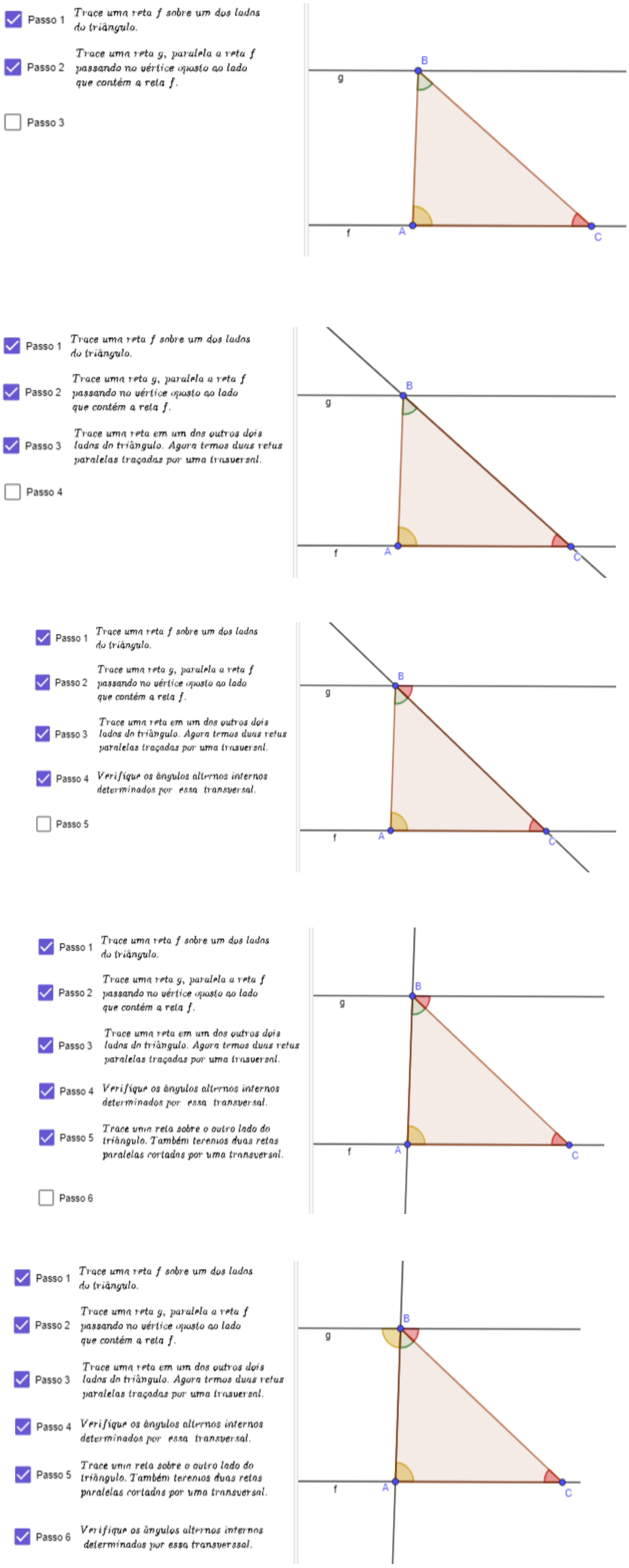
A orientação sobre o funcionamento da programação aparece na tela inicial (Clique nos passos de 1 a 6 conforme suas caixas forem aparecendo). Ao clicar em um passo, a caixa de seleção para passo seguinte se abre, e pode ser acionada no momento em que o participante desejar. Dessa forma, não é possível pular passos e a reflexão pode ser feita etapa por etapa. Caso deseje rever algum passo, é necessário desfazer um a um o que foi feito nos passos subsequentes, de forma decrescente. Por exemplo, se estiver no passo 6 e desejar analisar novamente o passo 3, é necessário desfazer, nessa ordem, os passos 6, 5, 4 e 3.

Os passos 1, 2, 3 e 5 provocam construções no triângulo, de acordo com o que é indicado no enunciado do passo. Nos passos 4 e 6, o participante deve fazer observações, conforme solicitado. No passo 6, optamos por apagar uma reta transversal para facilitar a identificação dos ângulos alternos internos referentes à reta transversal construída no passo anterior.

A Figura 19 mostra as mudanças na construção de cada passo.

Figura 19 - Recorte da tela de cada passo da demonstração do item 2 da Atividade 5





Fonte: Garbin, 2024.

A primeira pergunta (No vértice B são construídos os ângulos alternos internos dos passos 4 e 6. Ao analisar esses ângulos e o ângulo interno do triângulo com mesmo vértice, o que podemos concluir?) é de caráter aberto e tem a finalidade de conduzir o participante a observar que ângulos congruentes aos ângulos internos de vértices A e C são construídos adjacentes a cada um dos lados do ângulo interno de vértice B. Isso pode levá-los a concluir que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é igual a 180º. Essa observação é reforçada na tela dos passos 4 e 6.

A segunda pergunta (Qual a diferença entre esse item e o item 1?), ainda de caráter aberto, visa à comparação entre essa demonstração e os argumentos construídos a partir da percepção visual possível no item 1. Ela pode provocar a reflexão e proporcionar os atos de perceber e reconhecer diferenças entre as argumentações utilizadas.

A terceira pergunta (Você considera que foi feita uma demonstração desse fato?) se propõe a levar o participante à reflexão do que é uma demonstração. Como essa mesma pergunta é feita no item 1, é possível que ocorra o ato de reformular a resposta dada anteriormente.

Atividade 6

O objetivo da Atividade 6 é que o participante expresse aquilo que compreendeu sobre a demonstração da Atividade 5 e dê indícios se compreendeu a conexão existente entre os ângulos internos dos triângulos e dos quadriláteros planos.

Atividade 6
Com tudo o que analisamos e com a experiência adquirida nas atividades anteriores, responda: 1) Qual a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero? Justifique. 2) É possível usar a soma dos ângulos internos de um triângulo para justificar a sua resposta à pergunta anterior? Por quê?

A instrução inicial (Com tudo o que analisamos e com a experiência adquirida nas atividades anteriores, responda:) reforça o caráter reflexivo da atividade.

O objetivo da primeira parte do item 1 (Qual a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero?) é provocar o participante a chegar à conclusão do que investigou até o momento. A segunda parte desse item (Justifique.) impede que apresente uma resposta sem que argumente em defesa do que compreendeu, e pode dar indícios ao pesquisador do nível de compreensão do participante.

A primeira pergunta do item 2 (É possível usar a soma dos ângulos internos de um triângulo para justificar a sua resposta à pergunta anterior?) permite que o pesquisador investigue a compreensão do participante a respeito da conexão entre triângulos e quadriláteros planos, no estudo da soma das medidas dos ângulos internos desses polígonos. A segunda parte (Por quê?) impele o participante a refletir, antes de responder a primeira pergunta.

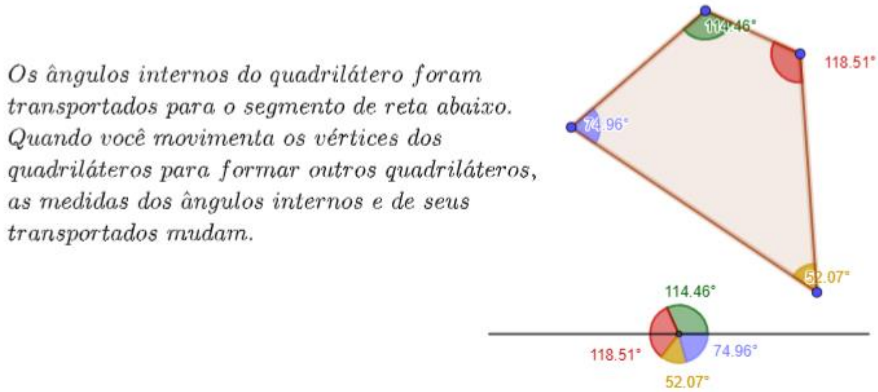
Atividade 7

O objetivo da Atividade 7 é proporcionar, a partir da percepção visual de algumas características dos quadriláteros planos, a construção de argumentos no tocante à soma das medidas dos ângulos internos desse polígono e da possibilidade de sempre ser decomposto em triângulos.

Atividade 7
1) Clique no *Link* e movimente os vértices do quadrilátero: https://www.geogebra.org/m/zjjj88ye a) O que você observa nos ângulos transportados do quadrilátero sobre o segmento de reta? b) Você considera que foi feita uma demonstração desse fato? 2) Clique no *Link* e siga as instruções: https://www.geogebra.org/m/wmbgdtyy a) Ao clicar nos botões Diagonal 1 e Diagonal 2, o que você observa? b) Se os quadriláteros planos ficam divididos em dois triângulos, qual a soma das medidas dos ângulos internos desses quadriláteros?

A Figura 20 é o recorte da tela inicial quando se acessa o *link* do item 1 da Atividade 7.

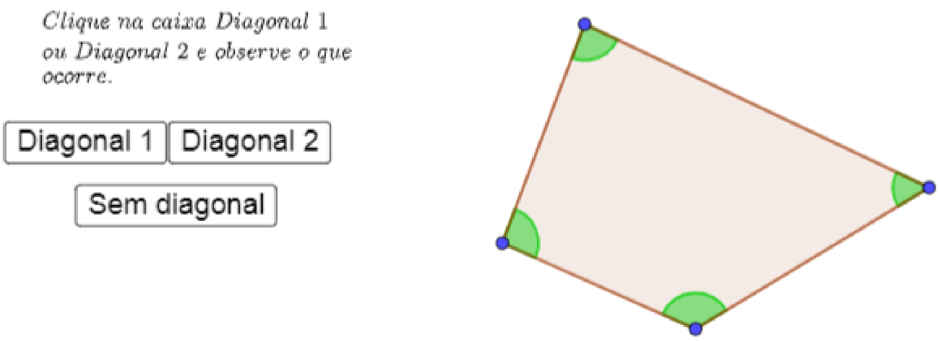
Figura 20 - Recorte da tela inicial do *link* do item 1 da Atividade 7



Fonte: Garbin, 2024.

A configuração e a disposição dos dados dessa programação do *GeoGebra* foram pensadas de forma análoga ao que fizemos na programação do item 1 da Atividade 5, ou seja, colorimos os ângulos e colocamos o valor das medidas junto aos ângulos no quadrilátero e nos ângulos transportados, para facilitar a correspondência entre os ângulos internos dos quadriláteros plano e os ângulos transportados. A visualização simplificada dos elementos relacionados aos ângulos dos quadriláteros permitiu incluir as instruções do funcionamento da programação na tela. Apresentamos duas casas decimais no valor das medidas dos ângulos para que os participantes tivessem certa dificuldade em realizar a soma das medidas, e focassem no fato que os ângulos transportados cobriam exatamente um ângulo de 360º. Os participantes não conseguem alterar o número de casas decimais nesta atividade. As perguntas desse item também são correlacionadas com as perguntas do item 2 da Atividade 5 e suas formulações e objetivos são equivalentes. Na Figura 21, fizemos o recorte da imagem da tela inicial, referente ao segundo *link* da atividade 7.

Figura 21 - Recorte da imagem inicial no *GeoGebra* do item 2 da Atividade 7



Fonte: Garbin, 2024.

A instrução do funcionamento da programação encontra-se na própria tela. Os botões indicam que podem ser construídas duas diagonais. Caso o participante deseje que o quadrilátero não apresente as diagonais, pode clicar no botão Sem Diagonal. Para que o foco fosse dado na construção dos triângulos a partir das diagonais do quadrilátero plano, optamos por deixar os ângulos internos do quadrilátero marcados com as mesmas cores.

A primeira pergunta desse item (Ao clicar nos botões Diagonal 1 e Diagonal 2, o que você observa?) tem a finalidade de direcionar o participante à mudança que ocorre quando diagonais são traçadas.

A segunda pergunta (Se os quadriláteros planos ficam divididos em dois triângulos, qual a soma das medidas dos ângulos internos desses quadriláteros?) propõe que o participante relacione a decomposição do quadrilátero plano em triângulos com a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono.

Capítulo 5. Análise das entrevistas

5.1 Entrevista Participante A

A entrevista com o Participante A (doravante nomeado por **A**) aconteceu via *Google Meet*, devido às recomendações de isolamento e distanciamento social em decorrência da pandemia causada pelo coronavírus. **A** tem 14 anos e seu percurso escolar foi em escolas públicas; na ocasião da entrevista, cursava o primeiro ano do Ensino Médio em uma Escola Técnica Estadual (ETEC), na cidade de São Paulo.

Os desenhos realizados por ele, referentes à Atividade 1, foram feitos em uma folha de caderno com auxílio de uma régua e, em alguns momentos, do transferidor. Durante a realização dos desenhos dos quadriláteros, a câmera do computador ficou direcionada para as mãos de **A**, possibilitando ao pesquisador (doravante nomeado por **P**) acompanhar os desenhos.

Abaixo seguem as tabelas (Tabela 5 - EA1; 6 - EA2; 7 - EA3; 8 - EA4; 9 - EA5; 10 - EA6; 11 - EA7; 12 - EA8 e 13 - EA9) que têm a mesma estrutura, na primeira coluna, denominada transcrição[20], há a transcrição da gravação, e na segunda coluna, há análise de trechos curtos, que focam um conjunto de falas e ações restritas, que se conectam em curto espaço de tempo e demonstram, segundo nossa interpretação, algum ato dialógico específico baseado no Modelo-CI. Ao fim de cada tabela, apresentamos uma análise mais ampla do que ocorreu, interpretando as análises parciais em totalidade, para decifrar conexões e intenções que demonstrem ou não, uma cooperação investigativa.

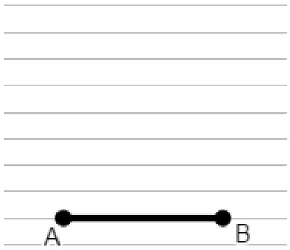
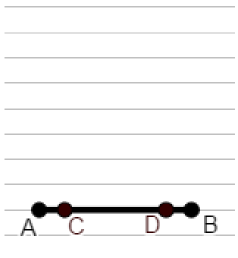
Tabela 5 - EA1

Transcrição	Análise das falas
P - Ok, eu vou começar, tá? primeiro tem que seguir alguns protocolos aqui, por que tudo isso, essa minha pesquisa, ela passa por uma comissão de ética e essa comissão de ética vai	A conversa inicia com algumas orientações de **P** e o alinhamento entre **A** e **P** atinente ao uso das tecnologias. Ainda nesse processo, **A** mostra-se interessado e afirma gostar de matemática: "Gosto. Sou das exatas" − Esse trecho pode ser interpretado como um primeiro momento em que **P** buscou *estabelecer contato* com **A.**

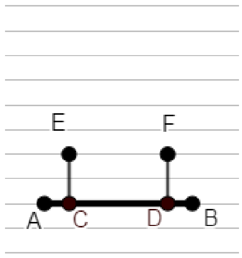
[20] Faz-se importante ressaltar que as transcrições dos diálogos não foram editadas, pois desejou-se ser o mais fiel possível às falas dos interlocutores; desse modo, e prescindindo do uso do (sic), permaneceram nas transcrições, vez por outra, incorreções de concordância (gramatical, verbal e afins), locuções interjetivas, expressões coloquiais. Do mesmo modo, vale ressaltar, na coluna Análise das falas, a presença de caracteres gráficos (itálico, aspas e afins) propositalmente aplicados para realçar a ocorrência dos atos dialógicos no desenvolvimento da atividade.

verificar algumas coisas, tá? Então a primeira coisa que eu tenho que te perguntar e que você tem que me responder é se você está participando de livre espontânea vontade dessa entrevista? **A-** Sim. **P-** Sim, então tá bom. Você gosta de matemática? **A-** Gosto. Sou das exatas. **P-** Gosta, então tá bom. Legal. Então, a gente vai fazer essa atividade e provavelmente depois eu vou passar um documento para o seu pai assinar, que ele autorizou, por que você é menor, então, também preciso da autorização dele, tá? Bem eu vou te mandar um arquivo com uma pergunta, e eu vou te mandar eu acho, tentei ver como é que faz aqui pelo *Meet* e eu não consegui, então, eu vou te mandar pelo *WhatsApp*, você está com o *WhatsApp* aberto aí no computador? **A-** Não, mas eu pego no celular. **P-** Tá, então eu vou mandar pelo *WhatsApp* por que eu acho que fica mais fácil, tá? **A-** Tá bom. Abro no computador? **P-** Isso, abre pelo computador que eu acho que fica mais fácil, mas aí você vê na verdade, eu vou te mandar, por que é um PDF, então, talvez você teria que abrir no computador mesmo. **A-** Entendi. Acho que vou	

ver pelo celular mesmo, no computador trava mais.	
P- Tá, então abre pelo celular. Você pode ler o que está escrito aí para mim, na atividade? A [lê as orientações que aparecem na tela]: Nessa atividade vamos estudar as propriedades dos quadriláteros planos com alguns materiais comuns na sala de aula, lápis, borracha, papel sulfite, régua e transferidor. Nos quadros abaixo desenhe os quadriláteros e utilize os materiais disponíveis para encontrar algumas regularidades. **P-** Bom, aí, se você tivesse essa folha em mãos teria o espaço para você desenhar, então, eu vou pedir para você desenhar esses quadriláteros aí em uma folha que você tem, como você está no *notebook*, se você abaixar um pouquinho a tela do *notebook* eu vou conseguir ver o que você está desenhando. A- Assim?	A *aceita o convite* feito por **P**, pois lê o enunciado da atividade.
P- Isso, aí você vai fazer o que foi pedido aí, verificar se tem alguma regularidade. A- O que seria alguma regularidade? **P-** Abaixa só mais um pouquinho da tela antes de você começar. A regularidade é uma coisa que acontece em todos os quadriláteros, como um	A busca estabelecer as *vistas privilegiadas* da atividade ao perguntar o que é uma regularidade. Após orientações de **P**, A estabelece as *vistas privilegiadas* e *percebe* a regularidade esperada por **P**: "É... Regularidade nos graus aqui". Além disso, A desenha e interage com os quadriláteros usando régua e transferidor. Essas ações também expressam que A *aceitou o convite* para realizar a investigação. O primeiro quadrilátero desenhado foi um trapézio que, supomos, A pretendeu ser isósceles, pois houve

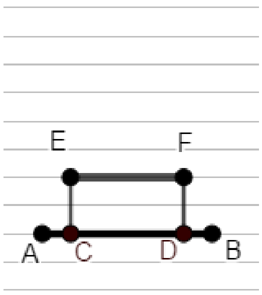
padrão. A- Tá. **P-** E aí você vai investigar com o que você tem de conhecimento mesmo algum tipo de padrão, ou o que você já sabe da escola, ou que você de repente fala que vai ver se isso daqui é um padrão, e aí vai estudar, aí você pode usar a régua e o transferidor para isso. A- Entendi. **P-** De qualquer maneira você tem que desenhar aí cinco quadriláteros né. A- E aí eu tenho que fazer cinco quadriláteros diferentes. **P-** Isso, essa folha que você está desenhando aí depois eu vou pedir, vou tentar pegar ela aí com você tá? A- Tá bom. **P-** Tá bom. Você abaixa mais um pouquinho sua tela que eu ainda não estou conseguindo ver o seu desenho, por favor. A- Mais, assim? **P-** Mais um pouquinho. É, agora eu estou vendo todo o seu caderno. A- A, beleza! Aí tem que escrever aqui a regularidade? **P-** Isso, aí você escreve aí, eu vou pedir para você escrever por que depois eu pretendo pegar esse papel, essa folha aí. Mas aí você me fala também o que você viu de regularidade quando você terminar. A- [Realizando desenhos] Tá.	um cuidado ao construir os lados não paralelos. A seguir reproduzimos a maneira como A o desenhou. Passo 1: A traçou um segmento de reta sobre uma linha do caderno. Vamos chamar esse segmento de $\overline{AB}$. Figura 22 - Representação do passo 1  Fonte: Garbin, 2024. Passo 2: em seguida, A marcou dois pontos no interior do segmento $\overline{AB}$ utilizando a graduação da régua: mediu certa distância da extremidade A do segmento $\overline{AB}$ e marcou o ponto C. Fez o mesmo na extremidade B, utilizando a mesma medida e marcou o ponto D. O segmento $\overline{CA}$ tem a mesma medida que $\overline{DB}$, daí pensarmos no trapézio isósceles. Figura 23 - Representação do passo 2  Fonte: Garbin, 2024. Passo 3: A traçou outros dois segmentos de reta, um com uma extremidade em C e outro com uma extremidade em D. A outra extremidade de cada um desses segmentos ficou acima da linha do segmento $\overline{AB}$. Vamos chamar esses segmentos de $\overline{CE}$ e $\overline{DF}$. Durante a construção é possível notar que usou as linhas do caderno como suporte para os comprimentos desses segmentos e fez um ajuste na inclinação da régua. Esse ajuste pode ter base em algum artifício que garanta a perpendicularidade entre $\overline{CE}$ e $\overline{DF}$ e as linhas do caderno, como, por exemplo, o fato da graduação

<table>
<tr>
<td>Eita...
P- O que aconteceu?
A- Arranquei a borda do caderno aqui. Para poder usar a régua e o transferidor.
P- Tá bem.</td>
<td>da régua ou suas bordas superior e inferior formarem um ângulo de noventa graus com o comprimento da régua. Logo, se alinhadas às linhas da folha fariam com que os lados $\overline{CE}$ e $\overline{DF}$ fossem perpendiculares às linhas da folha. Outra hipótese é que o ajuste se baseou na percepção visual.

Figura 24 - Representação do passo 3


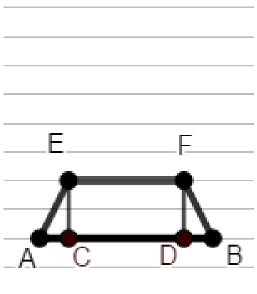
Fonte: Garbin, 2024.

Passo 4: A traçou o segmento $\overline{EF}$.

Figura 25 - Representação do passo 4


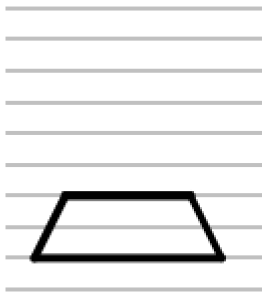
Fonte: Garbin, 2024.

Passo 5: A traçou os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{FB}$.

Figura 26 - Representação do passo 5


Fonte: Garbin, 2024.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Passo 6: A apagou os segmentos $\overline{CE}$ e $\overline{DF}$. [21]

Figura 27 - Representação do passo 6

Fonte: Garbin, 2024.

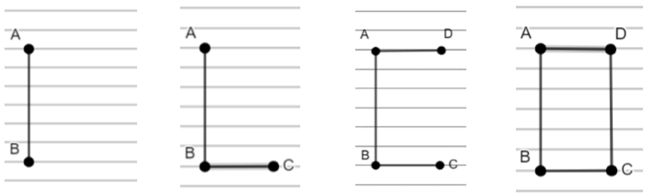
Importante observar que A não realizou uma construção geométrica e não usou o transferidor. Para construir os lados paralelos se apoiou nas linhas do caderno. Para os lados não paralelos se apoiou na construção de triângulos congruentes – mesmo que não soubesse disso – pois utilizou a régua fazendo com que $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ tivessem mesma medida e o mesmo com $\overline{CE}$ e $\overline{DF}$. Tal forma de construir indica uma busca por simetria e a utilização de dedução, pois entendemos que A sabia que se $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ tivessem mesma medida e $\overline{CE}$ e $\overline{DF}$ também, então o trapézio seria isósceles.
Isso mostra uma construção com alguma base lógico dedutiva, pois utilizou a ideia de triângulos congruentes.</td></tr>
<tr><td>A- É... Regularidade nos graus aqui... Dá... talvez esteja errado a conta dos graus.
P- É, por que você acha que está errado?
A- Eu acho que talvez esteja errado porque no transferidor não vai ser exato né? Aqui vai dar cento e noventa graus, e aqui também, cento e noventa. Trezentos e oitenta. Tem dez graus sobrando aí.</td><td>A percebe e reconhece que existem erros nas medidas, pois ao encontrar uma diferença entre elas – “Tem dez graus sobrando aí.” – a expressa em termos de erros na exatidão da medição realizada com o transferidor – “Eu acho que talvez esteja errado porque no transferidor não vai ser exato, né?”. Nessa formulação, entendemos que A sabe que o transferidor pode conter erros, mas não explica como exatamente pode se dar esse erro.</td></tr>
</table>

[21] O participante não desenhou os pontos. Os nomes dos pontos utilizados nessas representações foram utilizados pelo autor para facilitar a compreensão do leitor.

P- Tem dez graus sobrando, você acha que tem dez graus sobrando? **A-** Não, tem 20º (vinte) no total, porque cada lado tem 10º (dez) sobrando. **P-** É que daqui realmente, não dá para ver direito o seu desenho, deixa eu ver. **A-** Aqui ó, aqui tem 132º (cento e trinta e dois) e aqui 58º (cinquenta e oito). **P-** Uhum. **A-** E se somar vai dar cento e noventa e cento e noventa, dos dois lados. Só que 190º (cento e noventa) com 190º (cento e noventa), dá 380º (trezentos e oitenta) só que tem que dar 360º (trezentos e sessenta).	**P** tenta estabelecer *vistas privilegiadas* em relação à perspectiva de **A** e pergunta "... você acha que tem dez graus sobrando?" Quando **A** afirma "Só que cento e noventa com cento e noventa da trezentos e oitenta só que tem que dar trezentos e sessenta." *percebemos* e *reconhecemos* que a conclusão que existe um erro se deve ao fato de **A** saber que o valor da soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero é igual a trezentos e sessenta graus.
P- Entendi, e por que você acha que está errado, que está acontecendo que essa medida não está dando 360º (trezentos e sessenta)?	**P** faz um desafio para que **A** possa *reformular* a perspectiva que apresentou, o que ajudaria **P** a *perceber* e *reconhecer* a perspectiva de **A**. Isso demonstra que **P** coopera com a investigação que **A** está realizando.
A- Porque eu não usei a régua de forma não tão boa e nem o negócio dos graus aqui, o transferidor.	**A** *reformula* o que disse anteriormente sobre a inexatidão do transferidor. Dessa vez assume que o erro foi no manuseio do transferidor.
P- Bom você pode fazer... Está previsto que você faça cinco, então você pode fazer mais um e tomar esses cuidados que você... **A-** Mas conta esses nos cinco ou eu refaço esse? **P-** Não, não. Pode deixar esse mesmo, é importante. O erro é importante também. Pode deixá-lo, não precisa apagar não. **A** [realizando o segundo desenho]	A Figura 28 representa a sequência de passos realizados no segundo desenhado. Antes da figura descrevemos esses passos de construção e abaixo dela fazemos uma interpretação das ações de **A**. Para desenhá-lo **A** utiliza a graduação da régua para fazer um lado que chamamos de $\overline{AB}$. É possível notar no vídeo que **A** ajusta a inclinação da régua em relação às linhas do caderno quando vai desenhar o lado $\overline{AB}$. Com auxílio do transferidor e da graduação da régua desenha o lado $\overline{BC}$, adjacente ao primeiro lado desenhado onde o ângulo $A\hat{B}C$ mede noventa graus: primeiro mede um ângulo de noventa graus em relação ao lado $\overline{AB}$ com o vértice em B em seguida marca o

ponto C. Utilizando a graduação da régua traça o lado $\overline{BC}$.. O outro lado adjacente a $\overline{AB}$ é desenhado apenas com utilização da graduação da régua, chamamos de $\overline{AD}$. Por fim, sem usar a graduação da régua, desenha o lado $\overline{CD}$. Depois de desenhar o retângulo, **A** mediu os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$, mas anotou a medida nos quatro ângulos.

Figura 28 - Representação de cada etapa da realização do segundo desenho feito por A



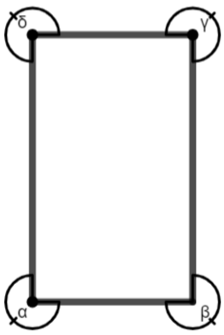
Fonte: Garbin, 2024.

Como o lado $\overline{BC}$ foi construído a partir de uma medida de noventa graus em relação à $\overline{AB}$ e coincidiu com a linha da folha do caderno, podemos supor que o segmento $\overline{AB}$ é perpendicular às linhas da folha. Essa intepretação dá sentido ao ajuste que **A** fez na inclinação da régua no momento de desenhar $\overline{AB}$. Esse ajuste pode ter base em algum artificio que garanta a perpendicularidade entre $\overline{AB}$ e as linhas do caderno, como, por exemplo, o fato da graduação da régua ou suas bordas superior e inferior formarem um ângulo de noventa graus com o comprimento da régua. Logo, se alinhadas às linhas da folha fariam com que o lado $\overline{AB}$ fosse perpendicular às linhas da folha. Outra hipótese é que o ajuste se baseou na percepção visual, o que nos levaria a concluir que houve coincidência em o lado $\overline{BC}$ sobrepor uma das linhas do caderno ou que essa sobreposição foi garantida por um erro na medição do ângulo de noventa graus que deu base para a construção do lado $\overline{BC}$.

O fato de **A** utilizar o transferidor apenas na construção de $\overline{BC}$, a graduação da régua para desenhar os três primeiros lados ($\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{AD}$) e medir apenas dois ângulos ($A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$), mas anotar o valor nos quatro ângulos indica que **A** se baseia na propriedade que diz que dado um segmento $\overline{AB}$, se os dois segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, no mesmo semiplano determinado por $\overline{AB}$, tem mesma medida e são

	paralelos, então os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ tem mesma medida e são paralelos. Como os ângulos formados entre $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ e entre $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ são iguais a noventa graus, o quadrilátero $ABCD$ é um retângulo. A partir disso, entendemos que essa construção leva em consideração não apenas a percepção visual. Tem alguma base lógico dedutiva.
A- Tá. Como que é o símbolo de ângulo mesmo? Para não precisar escrever. **P-** É, tem alguns jeitos, você pode colocar uma letra ao lado do ângulo mesmo aí, sei lá, alfa igual à medida que você tem ou então você nomeia os vértices do quadrilátero como a, b, c, d. E aí esse ângulo que você está fazendo, se fosse a, b, c, d seria então o ângulo do vértice b né. **A-** A, verdade. É "A" e aí tem um símbolo entre... **P-** Tem um chapeuzinho em cima do... Isso, aí se você quiser denotar o ângulo "a" você coloca "a" com o acento circunflexo né, igual à medida que você tem, que você obteve aí. **A-** Aí você teria "A" e aí põem isso aqui. **P-** Isso, aí no desenho é o nome do vértice né, o vértice são essas pontas do quadrilátero, forma um polígono. Aí você coloca A, B, C, D um para cada um dos vértices, uma letra para cada um dos vértices, aí o ângulo A, quando você for escrever a medida do ângulo A você coloca A, só quando você for	Devido à abertura da atividade, **A** apresenta uma dúvida em relação à nomenclatura dos ângulos. Tal dúvida foi esclarecida por um diálogo em que o centro foi a fala de **P**. No entanto, **A** mostra interesse, o que indica que o *estabelecer contato* está consolidado e que tal diálogo serviu para esclarecer uma dúvida sem que o foco na investigação principal fosse perdido.

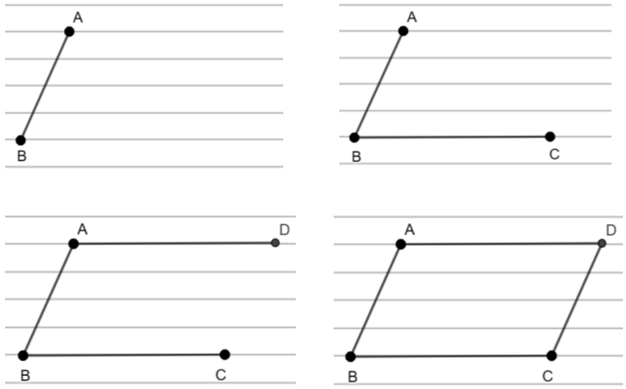
escrever a medida, não quando você dá nome para o vértice, entendeu? **A-** Sim. **P-** Você coloca A com o acento circunflexo. **A-** Então vai ser o “A” e tem mais um símbolo aqui, é um U? Qual que é o símbolo que seria desse ângulo aqui? **P-** Isso, então esse ângulo você falaria assim A, C e o nome do vértice debaixo. **A-** A, C ... **P-** Qual que é o nome do vértice debaixo? Qual letra você colocou? **A-** É o B aqui. **P-** A tá, então, esse ângulo é o A B C. **A-** A, verdade. Isso, isso, isso. **P-** Porque um ângulo é formado por dois pedaços de reta nesse caso né, e esses dois pedaços de reta, para você dar um nome para os pedaços de reta você tem que usar duas letras, só que como são dois pedaços de reta com uma letra em comum você coloca três letra né. **A-** Aham.	
P- E o que aconteceu nesse desenho aí? **A-** A soma de todos os ângulos internos deu trezentos e sessenta graus. **P-** Aham. **A-** Porque é um quadrilátero. **P-** Certo.	A sabe que a soma das medidas internas do quadrilátero é trezentos e sessenta graus e defende tal perspectiva justificando a soma das medidas pelo fato dos desenhos serem quadriláteros planos. A soma foi obtida pela soma de quatro parcelas de noventa graus. Apesar disso sua justificativa – “Porque é um quadrilátero” – indica novamente, que já conhece o valor da soma dos ângulos internos desse polígono.
A- É, uma regularidade... De um quadrilátero não	A está em pleno processo de investigação, o que pode ser notado quando *pensa alto* – “Uhum, dá

necessariamente. Uhum, dá duzentos e setenta... uhum.... Ângulos externos, a soma dos ângulos externos é mil duzentos e oitenta, tem que medir outro quadrilátero pra ver se dá a mesma coisa. **P-** Certo. **A-** [medindo o segundo desenho]	duzentos e setenta... hum... Ângulos externos, a soma dos ângulos externos é mil duzentos e oitenta, tem que medir outro quadrilátero pra ver se dá a mesma coisa.” – expressando as operações que realizava. O fato de A expressar que é necessário verificar a soma em outro quadrilátero, indica que sabe que a análise de um caso é insuficiente para obter uma generalização da propriedade que investiga. Por outro lado, isso não nos dá indícios se ele acha que verificar um número finito muito grande de casos é suficiente. Entendemos isso como uma característica de um argumento lógico dedutivo. Importante lembrar que para chegar ao valor do que chama de “soma dos ângulos externos”, A mediu apenas dois ângulos internos e, a partir disso, concluiu que a soma dos ângulos internos era igual a trezentos e sessenta graus Entendemos que a soma dos ângulos externos a que A se refere, na verdade, é a soma das medidas dos replementares dos ângulos internos, mesmo que ele tenha obtido o valor equivocado (mil duzentos e oitenta) nesse momento. Tomando como exemplo a Figura 29, A estava obtendo a soma (sem medir os ângulos) das medidas dos ângulos α, β, γ e δ. Figura 29 - Exemplo de ângulos que A se referia como externos  Fonte: Garbin, 2024.
A-[realizando o terceiro desenho]	O terceiro desenho realizado por A foi um paralelogramo. Primeiro, sem utilizar a graduação da régua, desenhou o lado $\overline{AB}$, inclinado em relação à linha do caderno. Utilizando a graduação da régua desenhou o lado $\overline{BC}$, adjacente ao primeiro. Em seguida desenhou, também utilizando a graduação da régua, o outro lado adjacente a $\overline{AB}$, que chamamos de

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$\overline{AD}$. Por fim, desenhou, sem usar a graduação da régua, o lado $\overline{CD}$. A Figura 30 representa essa sequência.

Figura 30 - Representação de cada etapa da realização do terceiro desenho feito por A



Fonte: Garbin, 2024.

O fato de A não ter utilizado o transferidor e realizado as medidas apenas dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ indica que se valeu da mesma propriedade utilizada para construir o retângulo: dado um segmento $\overline{AB}$, se os dois segmentos de reta $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, no mesmo semi plano determinado por $\overline{AB}$, são paralelos e tem mesma medida, então os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos e de mesma medida, logo o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.

Mais uma vez, a maneira como desenhou o quadrilátero indica um pensamento lógico dedutivo.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

A- Eu faço... Eu descubro o ângulo com conta ou com esse aqui?

P- É... Me explica, como assim? Eu não entendi sua pergunta.

A- Eu descubro medindo, que talvez possa dar o mesmo erro que esse aqui ou eu faço pela conta?

P- Isso, se você quisesse estudar essa regularidade né, a questão dos ângulos, os ângulos internos do quadrilátero, o que você acha que seria uma melhor

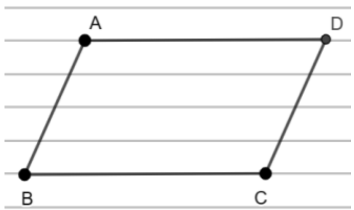
</td>
<td>

Ao buscar esclarecer qual perspectiva deveria seguir para encontrar a soma das medidas dos ângulos – “Eu descubro medindo ... ou eu faço pela conta?”, A é *desafiado* por **P** com uma pergunta equivalente à pergunta “o que acontece se...”: “Isso, se você quisesse estudar essa regularidade ... Seria você medir esses ângulos ou seria você fazer a conta?”.

Importante ressaltar que entendemos, que uma das duas opções que A *percebe* para investigar a soma em questão – fazer a conta – foi a estratégia mais bem sucedida utilizada, pois a medição apresentou erros no primeiro quadrilátero desenhado (“tem dez graus sobrando ai”) enquanto que no segundo quadrilátero, onde realizou operações aritméticas para chegar à conclusão, erros não foram *percebidos* por ele.

Tal diálogo mostra que há cooperação entre **P** e A

</td>
</tr>
</table>

estratégia? Seria você medir esses ângulos ou seria você fazer a conta?	na investigação.
A- A **c**onta, para medir os ângulos externos. **P-** Isso, então por que você acha que tem que fazer uma conta para os ângulos externos... A, os ângulos externos, você está falando, desculpa. **A-** É, para os ângulos externos desse quadrilátero serem os mesmos desse outro aqui. **P-** Entendi, eu estava achando que eram os ângulos internos. Pode ser com conta. **A-** Tá, então vai dar trezentos e sessenta menos duzentos e oitenta... Oitenta... Dividido por dois... Oitenta e quarenta e oitenta e quarenta.	**P** nota que entendeu de forma errada os ângulos que **A** pretendia medir, pois acreditava que **A** estava falando sobre os ângulos internos enquanto na verdade falava sobre os ângulos externos. Em seguida, **P** usa sua autoridade didática para direcionar as ações de **A** – "Pode ser com conta." – e acaba restringindo possíveis reflexões, especialmente sobre as diferenças entre medir os ângulos e usar um fato conhecido para realizar uma dedução, pois a questão não foi explorada de forma investigativa. Apesar disso, **A** prossegue a investigação, como podemos interpretar quando *pensa alto* expressando as operações que realizava: "vai dar trezentos e sessenta menos duzentos e oitenta... Oitenta... Dividido por dois... Oitenta e quarenta e oitenta e quarenta.". Essa fala merece uma explicação, pois ela indica que **A** utilizou o fato da soma das medidas dos ângulos internos ser igual a trezentos e sessenta graus: ele desenhou um paralelogramo mediu um ângulo e anotou a medida nele e no seu oposto. Em seguida com a medida de cento e quarenta graus fez a operação (360 – 280):2. Tomando como base a Figura 31 abaixo, **A** mediu os ângulos $B\hat{C}D$, anotou a medida nele e no ângulo $A\hat{D}C$. Figura 31 - Exemplo de paralelogramo desenhado por A  Fonte: Garbin, 2024.
P- É, esse ângulo que você anotou aí foi o ângulo interno né? **A-** Isso, agora eu vou descobrir o ângulo externo sabendo qual é o interno. **P-** Mas aí para calcular esse	**A** tem em seu repertório o valor da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero e a partir disso e da pergunta feita por **P** *posiciona-se* em defesa da perspectiva que adotou para calcular a soma das medidas dos ângulos que chama de externos: "E que conta que você fez? Como você pensou nessa conta aí? (...) Então eu somei os ângulos que eu já

ângulo interno você fez com conta né? **A-** Isso, porque eu já tinha descoberto esses outros dois aqui. **P-** E que conta que você fez? Como você pensou nessa conta aí? **A-** Eu já sei que todo quadrilátero tem trezentos e sessenta graus de ângulo interno. **P-** Aham. **A-** Então eu somei os ângulos que eu já tinha, como eu sei que os outros dois ângulos que sobraram são iguais, era só subtrair os ângulos que eu tinha, subtrair trezentos e sessenta pelos ângulos que eu já tinha, e dividi por dois porque eram dois ângulos iguais.	tinha, como eu sei que os outros dois ângulos que sobraram são iguais, era só subtrair os ângulos que eu tinha, subtrair trezentos e sessenta pelos ângulos que eu já tinha, e dividi por dois porque eram dois ângulos iguais.”. Em nosso entendimento isso explica a opção colocada por **A** para fazer a investigação da soma das medidas dos ângulos internos. Voltamos a ressaltar que nossa interpretação é que a soma dos ângulos externos a que **A** se refere é, na verdade, a soma das medidas dos replementares dos ângulos internos. Como no exemplo da Figura 29, mas agora em um paralelogramo, **A** obteve corretamente, sem medir, a soma das medidas dos ângulos α, β, γ e δ que são os replementares dos ângulos internos dos quadriláteros. Isso foi possível, pois **A** já sabe o valor da soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros planos.
P- Aham, que figura é essa que você desenhou? Você sabe o nome? **A-** Não lembro o nome. **P-** Mas você sabe... Como? **A-** Não é hexágono né? Eu não lembro o nome dessa. **P-** Olha só, isso que você utilizou de medir dois ângulos e saber que os outros ângulos tinham a mesma medida, como é que... Você sabia disso por quê? Você mediu e deu a mesma medida? **A-** Porque esses dois aqui são paralelos e esses outros dois não.	Com o interesse em *reconhecer* a perspectiva de **A**, **P** faz novo *desafio* - “Olha só, isso que você utilizou de medir dois ângulos e saber que os outros ângulos tinham a mesma medida, como é que... Você sabia disso por quê?”. Em seguida *posiciona-se* defendendo sua perspectiva: “Porque esses dois aqui são paralelos e esses outros dois não”. Utilizando como referência a Figura 31, **A** afirmou que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos, enquanto $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$ são não paralelos. Aqui encontramos mais um argumento de caráter lógico dedutivo, pois **A** sabe da congruência dos ângulos a partir do paralelismo entre segmentos.
P- Tá, tudo bem. Então você acha que essa mesma	**P** faz novo *desafio*, agora sobre a aplicabilidade da perspectiva que **A** havia defendido a respeito da

propriedade aconteceria no primeiro que você desenhou? **A-** Sim, esses dois ângulos são iguais e esses dois também por que esses dois aqui são paralelos e esses dois... Eu esqueci o contrário de paralelo. **P-** Transversal. **A-** É, esses dois são transversais. **P-** Isso, ok. Tá, esse desenho que você desenhou por último é um paralelogramo, parece aqui pelo que eu estou vendo um paralelogramo. **A-** Hexágono é o que é o quadrado de lado né? **P-** Não, o hexágono ele tem seis lados. **A-** A, é. **P-** Vem de hexa né.	igualdade de dois ângulos: "você acha que essa mesma propriedade aconteceria no primeiro que você desenhou?" A reafirma sua perspectiva: "sim, esses dois ângulos são iguais e esses dois também por que esses dois aqui são paralelos e esses dois... Eu esqueci o contrário de paralelo". A utiliza o mesmo argumento de cunho lógico dedutivo da passagem anterior.
A- É, isso, isso. Aqui então eu posso fazer trezentos e sessenta menos cento e quarenta, que vai dar duzentos e vinte... então tem duzentos e vinte graus. Trezentos e sessenta e trezentos e vinte, que vai dar seiscentos e quarenta mais quatrocentos e quarenta... Mil e oitenta. Não é igual os ângulos externos ou eu fiz a conta errada.	A demonstra estar investigando ao *pensar alto* sobre as operações que está fazendo.
P- Bem, o segundo aí não deu né? Mil e oitenta, tá. **A-** Não faz sentido, eu errei a conta. **P-** Você acha que errou a conta? **A-** Sim. **P-** Faz mais um, veja o que	A nota que cometeu algum equívoco e isso amplia sua ação investigava: após **P** fazer um convite para a realização de um novo desenho, A *aceita o convite*, desenhando um losango e prosseguindo com a investigação. Observamos que *pensa alto* quando expressa as operações que realiza: "Aqui deu duzentos e trinta... hum ... sessenta e cinco...".

acontece.... **A-** [realizando o quarto desenho] **A-** Quatro vezes oito **P-** É, aconteceu alguma coisa aí, porque não está aparecendo a sua imagem. Ela está travada, não sei se é a internet ou se você de repente apertou alguma coisa aí. **A-** Não. **P-** Não... É, talvez seja a internet que esteja um pouco lenta mesmo, mas pode prosseguir que a gente vai conversando, uma hora volta ao normal. **A-** Tá... Cento e oitenta graus. **P-** Voltou. **A-** Voltou? **P-** Sim. E aí, o que aconteceu? **A-** Aqui deu duzentos e trinta... hum ... sessenta e cinco... **P-** Esse você também mediu dois ângulos e os outros você fez com conta, certo? **A-** Isso, fiz igual ao outro.	
P- Tá, antes de você continuar eu vou te fazer uma pergunta. Então o conhecimento que você está usando é que você já sabe dos conhecimentos da escola é que a soma dos ângulos internos é trezentos e sessenta, de um quadrilátero, certo? **A-** Certo. **P-** Então a minha pergunta é assim, eu sei que a soma dá	A fim de cooperar com a investigação em curso, **P** faz uma pergunta para que **A** possa refletir sobre o que está fazendo: "Então a minha pergunta é assim, eu sei que a soma dá trezentos e sessenta, mas essa soma da trezentos e sessenta por que a gente faz a conta ou por que quando a gente mede tem que dar trezentos e sessenta?" Tal pergunta também serve para **P** *reconhecer* as perspectivas que **A** adota. Nesse caso, devido à resposta de **A** – "Porque quando a gente mede tem que dar trezentos e sessenta graus." – entendemos que **A** acredita que a melhor maneira de comprovar a soma em questão é medindo os ângulos, mesmo que em

trezentos e sessenta, mas essa soma dá trezentos e sessenta por que a gente faz a conta ou por que quando a gente mede tem que dar trezentos e sessenta? **A-** Porque quando a gente mede tem que dar trezentos e sessenta graus.	momentos anteriores tenha encontrado erros quando realizou medições. Esse argumento utilizado por **A** é característico do paradigma do pensamento geométrico (G1) onde as medições podem caracterizar afirmações e justificativa.
P- Entendi, e está dando quando você mede? **A-** Só que eu não tenho a precisão para mexer, para medir. **P-** Tá bom, tudo bem. Pode continuar.	**A** *reconhece* mais uma vez a imprecisão que existe em se realizar medições.
A- Tem trezentos e sessenta graus de ângulo interno por que cada triângulo tem cento e oitenta graus e todo quadrado tem dois triângulos, ai é só multiplicar por dois. **P-** Certo.	**A** expressa em voz alta o que está pensando, logo realiza um *pensar alto* e mostra mais uma vez que já conhece o valor da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero plano e de um triângulo.
A- Trezentos e trinta...não, não ... Trezentos e sessenta... Menos cento e quinze... Divide... É... Quatrocentos e noventa... Mais... Quinhentos e noventa... É, ele é um triângulo retângulo, está dando mil e oitenta graus.	**A** realiza um *pensar alto*, pois expressa em voz alta o que está pensando.
P- Mas você acha que errou por quê? **A-** Porque eu fiz a multiplicação aqui errado, os duzentos e oitenta graus. **P-** Tá, então você está vendo que você errou a conta, você identificou o erro na conta aí, onde que está errado? Ou não, você está achando que é por outro motivo?	**A** *reconhece*, ao expressar verbalmente, o erro que cometeu.

A- Eu errei a conta na hora da multiplicação. Quatro vezes sete, vinte e oito... Quatro vezes dois é oito... É, eu errei na hora de multiplicar.	
P- Tudo bem, certo... Ok. É, você pode fazer mais um quadrilátero se você quiser.	**P** reforça o caráter aberto da atividade indicando que **A** pode conduzir a investigação com a perspectiva que acredita ser adequada.
A- Tá... mil e oitenta dividido por dois....da cinco ... oitenta .... quinhentos e quarenta Então, cada triângulo tem quinhentos e quarenta graus... graus externos... Quinhentos e quarenta de grau externo no total. Deixa eu pensar como eu posso fazer. Eu estou fazendo também só com ângulo né.	**A** *pensa alto* ao expressar as operações que está realizando: "Tá... mil e oitenta dividido por dois... dá cinco... oitenta... quinhentos e quarenta". Além disso, *percebe* que pode haver outra perspectiva de investigação, "eu estou fazendo também só com ângulo né", mas não sabe expressar qual, ou seja, não a *reconhece*. Vale ressaltar que, em nossa interpretação, **A** *reconhece* equivocadamente que "cada triângulo tem quinhentos e quarenta graus... graus externos" devido à dedução que se todo quadrilátero pode ser decomposto em dois triângulos, então a soma dos ângulos externos do triângulo é a metade do que ele chama de ângulos externos (ver Figura 29) do quadrilátero: "mil e oitenta dividido por dois".
P- Sim, você que encaminha ai. Faça o que acha mais conveniente né.	**P** reforça o caráter aberto da atividade indicando que **A** pode conduzir a investigação com a perspectiva que acredita ser adequada.
A- Eu acho que, que essas... Só funcionam com ângulos essas regularidades. É só multiplicar os lados vai aumentar... **P-** Como assim multiplicar os lados? **A-** Tipo, pensando nas medidas dos lados, tipo uma regularidade, é só mudar, mas aí muda os números e o formato. Talvez não seja mais um retângulo ou talvez não seja mais um quadrado, se você mudar o tamanho dos lados.	**A** *reconhece* outra perspectiva ao expressar que poderia investigar sobre os lados do quadrilátero, levantando algumas hipóteses: "Tipo, pensando nas medidas dos lados, tipo uma regularidade, é só mudar, mas aí muda os números e o formato. Talvez não seja mais um retângulo ou talvez não seja mais um quadrado, se você mudar o tamanho dos lados.".
P- Tá certo, então o que você	**P** pede para que **A** faça uma retrospectiva do que analisou e **A** *percebe* que deve haver alguma relação

analisou nesses quadriláteros desenhados aí? **A**- Uma das cosias é que a soma dos ângulos externos é mil e oitenta e... Que mais... Tem trezentos e sessenta graus, mas disso eu já sabia, também descobri que quando divide por dois os cento e oitenta graus cada triângulo a soma dos ângulos externos é quinhentos e quarenta graus, mas também tem que ter um motivo para isso. Porque se a soma dos internos é cento e oitenta tem que ter uma... Alguma coisa entre o cento e oitenta e o quinhentos e quarenta... Quinhentos e quarenta mais cento e oitenta... Setecentos e vinte... É, achei. **P**- Achou? **A**- Se você subtrair trezentos e sessenta graus... É uma esfera não um círculo ... na verdade é um círculo não uma esfera. É, se você subtrair cento e oitenta dos quinhentos e quarenta, se você subtrair os ângulos internos dos ângulos externos vai dar trezentos e sessenta graus.	entre a soma das medidas dos ângulos internos e o que chama de externos (ver Figura 29) agora em triângulos "tem que ter uma... Alguma coisa entre o cento e oitenta e o quinhentos e quarenta... Quinhentos e quarenta mais cento e oitenta... Setecentos e vinte... É, achei.". Em seguida, **A** expressa a relação entre a soma das medidas, logo a *reconhece*, e a defende, ou seja, *posiciona-se* com o argumento: "Se você subtrair trezentos e sessenta graus... É uma esfera não um círculo... Na verdade é um círculo não uma esfera. É, se você subtrair cento e oitenta dos quinhentos e quarenta, se você subtrair os ângulos internos dos ângulos externos vai dar trezentos e sessenta graus." Não entendemos o que **A** pretendia com tal relação, independente disso ele realizou uma investigação e *posicionou-se* em relação ao que *reconheceu*.
P- Aham, isso te leva a concluir o quê? **A**- Hum... **P**- Isso você está falando dos quadriláteros ou dos triângulos? **A**- Isso é dos triângulos. **P**- Tá, e essa conclusão que você chegou fazendo essa alteração te leva a concluir o	Com o objetivo de levar **A** a fazer uma reflexão, **P** faz a pergunta: "isso te leva a concluir o quê?". Mesmo **A** não sabendo como poderia usar a conclusão a qual chegou, **P** não o corrige e pede para que essa informação fique em suspenso para as próximas atividades, nas quais poderia ser usada, caso necessário. Isso demonstra um cuidado de **P** em não fazer correções para não desestimular **A**, reforçando o *estabelecer contato*.

que? **A-** Os ângulos... Não sei exatamente. **P-** Tudo bem, deixa essa informação guardada então e vamos ver se você vai utilizá-la mais para frente então. Vamos ver se utiliza em alguma coisa.	
A- Tá. **P-** Bom, aí a próxima pergunta seria se você observa alguma regularidade na soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros, você disse que observou né? **A-** Sim. **P-** Qual que é essa regularidade? **A-** A soma dos ângulos internos dá sempre trezentos e sessenta graus. **P-** Certo, você acha que se outros quadriláteros fossem desenhados, o que aconteceria com essa soma dos ângulos internos? **A-** Em todos os quadriláteros daria trezentos e sessenta graus.	**P** faz uma pergunta para *reconhecer* a perspectiva de **A** em relação à generalidade das afirmações que faz: “Certo, você acha que se outros quadriláteros fossem desenhados, o que aconteceria com essa soma dos ângulos internos?”. **A** mostra que *reconhece* a perspectiva generalista de sua afirmação e responde que “Em todos os quadriláteros daria trezentos e sessenta graus”.
P- E por que você acha que dá sempre trezentos e sessenta? **A-** Eu só sei que para um triângulo a soma dos ângulos internos é cento e oitenta e eu acho que seja pelo mesmo motivo e se você juntar os dois triângulos de forma certo, para virar um quadrilátero, dá certo. Mas aí	**P** faz uma pergunta para *reconhecer* a perspectiva de **A** em relação à justificativa da argumentação que apresenta: “E por que você acha que dá sempre trezentos e sessenta?”. **A** mostra que *reconhece* a demonstração da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero plano ao expressá-la: “Eu só sei que para um triângulo a soma dos ângulos internos é cento e oitenta e eu acho que seja pelo mesmo motivo e se você juntar os dois triângulos de forma certa, para virar um quadrilátero, dá certo. Mas aí você vai somar dois triângulos, então vai somar os

você vai somar dois triângulos, então vai somar os ângulos também.	ângulos também.”. Importante ressaltar que esse conhecimento expresso por **A** não decorre da investigação em curso e sim de seu repertório. Esse argumento, mesmo com imprecisões, tem características lógico dedutivas, pois **A** entende que se em um triângulo a soma das medidas dos ângulos internos é igual a cento e oitenta graus e dois triângulos podem compor um quadrilátero plano, então a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero plano é trezentos e sessenta graus.
P- Ok, você me disse que não mediu todos os ângulos, você acredita... **A-** Não entendi. Cortou a ligação. **P-** Tá, você me disse que o certo é a gente medir todos os quadriláteros e a soma dos ângulos internos da trezentos e sessenta, mas você não fez isso porque não tem a precisão, você me disse né? **A-** Aham. **P-** Do instrumento que você está usando né e é isso mesmo, isso pode acontecer, o instrumento ter problema né, a máquina de repente na hora que foi fabricar esse seu transferidor, aí a máquina deu um problema e aí não ficou legal a medida. **A-** Sim. **P-** Então se a gente tiver um instrumento de melhor precisão vai dar trezentos e sessenta, certo? Se eu tiver um instrumento que meça melhor esses ângulos. **A-** Sim. **P-** Então eu vou te passar um *link* aqui no *chat*, se você ver, você sabe que tem um *chat* aqui no *classroom* né?	**P** conduz a comunicação *jogo de perguntas* no qual retoma falas anteriores de **A** para fazer o *convite* para a próxima atividade.

A - Sei. **P-** Isso, agora você pode clicar nele, no *link*, que a gente vai verificar um lugar que tem um equipamento para medir mais preciso, vamos ver o que acontece lá.	

É possível concluir que, na primeira atividade, que cenários para investigação foi constituído, pois **A** agiu de maneira investigativa, **P** cooperou com a investigação de **A** e um diálogo foi estabelecido, ou seja, o Modelo-CI esteve presente na comunicação entre as partes.

Interpretamos que o convite foi aceito rapidamente por **A** para realizar a investigação, como podemos notar quando leu e agiu sobre a atividade, realizando desenhos de quadriláteros, medições e reflexões. Não sabemos ao certo qual a motivação para o aceite, mas **A** tem fascínio pela matemática, e segundo suas próprias palavras: —Sou de exatas. É possível que tal inclinação possa ter facilitado a interação entre **P** e **A,** que estabeleceram contato imediatamente.

As vistas privilegiadas foram negociadas por um tempo, incialmente **A** tem dúvida do que pode significar a palavra regularidade. Em seguida, foca sua investigação nos ângulos internos dos quadriláteros que desenhou. Ele já tem em seu repertório que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a trezentos e sessenta graus, mas, mesmo assim, busca a confirmação de tal valor. Em certo momento, **A** analisa os replementares dos ângulos internos dos quadriláteros, e depois busca a relação aritmética entre esses ângulos. Ao final, chega a citar que analisou apenas os ângulos, mas poderia ter analisado os lados.

Nesse processo de investigação, **A** sabia sobre a imprecisão inerente aos instrumentos de medição e a justificativa do valor da soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros. Percebeu e reconheceu, a relação aritmética entre os ângulos internos e seus replementares (chamados por **A** de ângulos externos – ver Figura 29). Nesse último caso, vale destacar que **A** foi direcionado por P a realizar operações aritméticas para obter a soma dos ângulos replementares dos ângulos internos. Essa opção foi levantada por **A**, em nosso entendimento, pelo fato de ter sido a estratégia que não apresentou erros na investigação, em contraposição a opção de medir, que apresentou erro no primeiro quadrilátero desenhado.

A posicionou-se para defender a perspectiva que adotou sobre a relação aritmética entre as medidas dos ângulos internos e seus replementares em um triângulo e um quadrilátero e sobre a igualdade de ângulos internos em um paralelogramo.

Além disso, **A** pensou alto em diversos momentos em que realizava cálculos. Fez reformulações sobre a perspectiva relacionada aos erros quando não obteve a soma de trezentos e sessenta graus colocando, inicialmente, o erro sobre o transferidor e depois no manuseio desse instrumento.

Por conseguinte, **P** cooperou com a investigação fazendo perguntas de caráter investigativo, procurou reconhecer as perspectivas de **A**, fez desafios, acolheu dúvidas e não colocou foco nos erros cometidos por **A**. Em certo momento utilizou uma comunicação em forma de jogo de perguntas para esclarecer dúvidas que desviavam o foco da investigação principal.

Uma característica importante para se compor o cenário para investigação, a pergunta de natureza aberta, possibilitou que **A** perguntasse sobre como nomear os ângulos. Essa característica foi reforçada em outros momentos em que **P** deixou que **A** tomasse decisões sobre como prosseguir a investigação.

Importante destacar que apesar dos três primeiros quadriláteros não serem construídos geometricamente, a realização deles revelam que **A** utilizou propriedades geométricas e deduções. No primeiro, um trapézio, ele buscou a simetria para construir os lados não paralelos utilizando o caso de congruência de triângulos lado-ângulo-lado (mesmo que não tivesse consciência disso), como podemos observar na sequência de passos representados pelas Figura 22 à Figura 27: entendemos que **A** sabia que se $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ tivessem mesma medida, $\overline{CE}$ e $\overline{DF}$ também e pelo fato dos ângulos $A\hat{C}E$ e $B\hat{D}F$ medirem noventa graus, então os triângulos ACE e BDF seriam congruentes que por consequência fariam os lados $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$ completarem um trapézio isósceles.

No segundo desenho, um retângulo (veja Figura 28), para construir o segundo lado (adjacente ao primeiro) **A** mediu um ângulo e em seguida usou a graduação da régua para garantir que os dois lados adjacentes ao primeiro tivessem a mesma medida, mesmo tendo usado o transferidor para construir apenas um desses lados. Como não usou a graduação da régua nem o transferidor para construir o último lado, paralelo ao primeiro, entendemos que **A** sabia que por consequência da construção dos lados anteriores que esse último seria paralelo e teria a mesma medida do primeiro. Além disso, **A** mediu dois ângulos, mas anotou a medida dos quatro, indicando que conhecia a propriedade de que os quatro ângulos em um retângulo têm mesma medida. Por outro lado, sua justificativa para o valor da soma das medidas dos ângulos internos – Porque é um quadrilátero, afirmou ele – indica que **A** já conhecia o valor da referida soma nesse tipo de polígono.

No terceiro, um paralelogramo, **A** não utilizou o transferidor, mas realizou as medidas dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, conforme podemos observar na Figura 30. Tal construção indica que utilizou a propriedade que retas paralelas estão à mesma distância e desenhou o lado $\overline{CD}$ paralelo ao $\overline{AB}$.

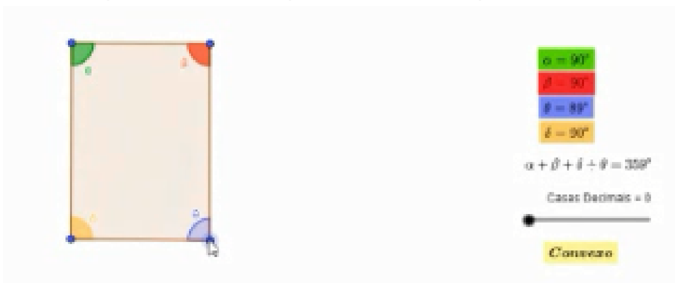
Durante a realização do quarto desenho, a imagem da gravação ficou travada devido a problemas na conexão com a internet.

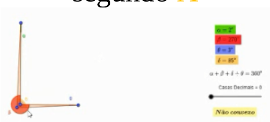
A trabalhou em boa parte da atividade com uma abordagem típica do paradigma (G1) – espaço-gráfica –, pois a maior parte de suas justificativas foram baseadas nos desenhos e em medições. Chegou a argumentar que é pela medição que sabemos que a soma dos ângulos internos dos quadriláteros planos é igual a 360º (trezentos e sessenta graus): — Porque quando a gente mede, tem que dar 360º (trezentos e sessenta graus), afirmou. No entanto, ao realizar os desenhos dos quadriláteros deu indícios de um pensamento lógico dedutivo, pois utilizou propriedades dos quadriláteros planos, paralelismo e ideias de congruência de triângulos. Além disso, apresentou o argumento: — Eu só sei que para um triângulo a soma dos ângulos internos é 180º (cento e oitenta) e eu acho que seja pelo mesmo motivo, e se você juntar os dois triângulos de forma certa, para virar um quadrilátero, dá certo; mas aí você vai somar dois triângulos, então, vai somar os ângulos também, asseverou **A**. Isso que indica que, de certa forma usou um pensamento lógico dedutivo com apoio nos desenhos, que são característica geometria proto-axiomática (G2).

Tabela 6 - EA2

P- Então eu vou te passar um *link* aqui no *chat*, se você vir, você sabe que tem um *chat* aqui no *classroom* né? **A-** Sei. **P-** Isso, agora você pode clicar nele, no *link*, que a gente vai verificar um lugar que tem um equipamento para medir mais preciso, vamos ver o que acontece lá. **A-** Tá, eu continuo usando meu caderno?	**P** e **A** se alinhando para a próxima atividade. **A** indica que *aceitou o convite* para as próximas atividades quando fez as perguntas "Tá, eu continuo usando meu caderno?" e "Tá. Pode usar calculadora?", pois indicam que ele está disposto a interagir com a atividade.

P- Não, agora não. Agora vai ser na tela do computador mesmo e aí eu vou pedir para você fazer aquela coisa de compartilhar sua tela. **A-** Tá bom. Foi? **P-** É, ele deu uma travada aqui, mas ele vai. Isso, está carregando já aqui. **A-** Tá. Pode usar calculadora? **P-** Pode, pode usar. Eu vou te mandar um outro... Vou te mandar um textinho que explica como é que mexe nesse programa aí tá? Acho que você viu no outro teste, mas vou te mandar só para você... **A-** Tá. **P-** Olha só, lá no chat tem um textinho que eu coloquei. Acho que você já vai saber. Se você puder ler ele para mim. **A-** [Lendo o enunciado] Clicando nos pontos azuis localizados nos vértices do quadrilátero e movimentando o uso do plano com o mouse é possível formar outros quadriláteros. Ao lado direito da tela a uma barra preta com a legenda casas decimais que deve ser utilizada para saber o número de casas decimais basta clicar no ponto preto sobre a barra e movimentá-la sobre a barra com o mouse ou com as setas de direção do teclado, além disso é possível identificar a medida de cada um dos ângulos internos do quadrilátero e sua soma.	

P- Bom, aí você volta lá, e dá uma mexida, nesses vértices do quadrilátero né, e nesse número de casas decimais. Veja o que acontece aí. **A-** Você consegue ver a minha tela?	
P- Consigo, eu estou vendo você mexer aí, você viu com o jeito que eu dei os nomes para os ângulos aí? Aí tem um que chama alfa, beta, aí coloca alfa igual e normalmente se usa a letra grega para fazer nome de ângulo, mas é claro que se você colocar outro tipo de letra do alfabeto que a gente conhece mesmo, do nosso né, não tem problema, mas normalmente... **A-** Entendi. **P-** Se usa a letra grega.	**P** em seu papel de autoridade didática utiliza seu conhecimento matemático para centralizar a comunicação em si e explicar dúvida anterior de **A** em relação à nomeação dos ângulos.
A- Eu vi quando você me mandou o *link*, o *site*, a soma estava 359º (trezentos e cinquenta e nove), aí, quando eu mexi, mudou. **P-** Aham. **A-** Agora está dando 361º (trezentos e sessenta e um). **P-** Esse daí que deu 361º (trezentos e sessenta e um), é um quadrilátero ou não? **A-** É... Aí, consegui fazer o retângulo perfeito.	**A** inicia a investigação com as *vistas privilegiadas* estabelecidas, pois sua primeira fala remete a uma informação a respeito da perspectiva esperada, a da soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero plano. Importante ressaltar que quando **A** afirma que fez um retângulo perfeito está se baseando em uma justificativa visual, pois um dos ângulos mede oitenta e nove graus como mostra a Figura 32. Esse tipo de argumentação é característica da geometria espaço-gráfica (G1). Figura 32 - Retângulo perfeito, segundo A  Fonte: Gravação da entrevista com **A**.
P- Certo. O que acontece se	**P** faz um *desafio* com uma pergunta do tipo “o que

você mudar o número de casas decimais desse quadrilátero que você fez aí? Se você mudar...	acontece se...”.
A- As casas decimais... Que não é exatamente noventa graus, entendi. Mas a soma... A não teve uma aqui que não deu.	**A** *pensa alto*, pois está exprimindo aquilo que está pensando e nota que existe um ângulo que não é noventa graus, o que faz com que a imagem representada pela Figura 32 não seja um retângulo.
P- Por que você acha que acontece isso quando você muda as casas decimais? Porque a figura é a mesma né, o que você está mexendo é só o número das casas decimais, por que você acha que acontece isso aí quando você muda o número de casas decimais?	**P** *reformula* o *desafio* feito anteriormente. Dessa vez descreve que o quadrilátero é o mesmo para direcionar a reflexão de **A** sobre a mudança no valor da medida em um mesmo quadrilátero.
A- É porque não é exatamente 360º (trezentos e sessenta graus) e se mudar as casas decimais é como se usasse uma lupa, você aumenta... Você consegue ver mais perto, mais aumentado, aí você vê que não está tão preciso.	Ao expressar o motivo da mudança nas medidas em um mesmo quadrilátero, mesmo não em termos matemáticos, **A** *reconhece* uma perspectiva. A analogia feita com as características da lupa indica que ele entende que a precisão seria melhor se a medida do ângulo fosse dada com mais casas decimais.
P- Aham... Aconteceu alguma situação aí de você não ter um quadrilátero? **A**- Aham, eu fiz duas linhas... Não é um quadrilátero... Como que esse ângulo dá trezentos e sessenta? A, por que ele é muito grande. Figura 33 - Duas linhas, segundo **A**  Fonte: Gravação da entrevista com **A**.	**P** apresenta outra perspectiva de investigação ao perguntar sobre situações que não são quadriláteros, intentando apresentar o conjunto de quadriláteros não convexos para cooperar com a investigação em curso: “Aconteceu alguma situação aí de você não ter um quadrilátero? (...) você está vendo embaixo da barra preta escrito não convexo?”. Entendemos que o argumento utilizado por **A** “A, por que ele é muito grande” se refere à imagem que retiramos da gravação presente na Figura 33: há um ângulo obtuso que não era imaginado por **A**, pois seu repertório de imagens de quadriláteros tem ênfase nas formas com certa simetria como os quadriláteros que o mesmo desenhou na Atividade 1. Além disso sua argumentação é sobre o

P- E isso daí é um quadrilátero, não é? **A-** Sim... Esse aqui você diz? **P-** É, aquele primeiro que ficou quase no jeito de não ser um quadrilátero... Isso, esse. Só que olha só, esse quadrilátero quando você forma ele muda, você está vendo embaixo da barra preta escrito não convexo? **A-** Sim. **P-** Você vai ver que tem alguns que você mexe que está escrito que é convexo. **A-** Aham.	tamanho do ângulo e não sobre algum encadeamento lógico dedutivo.
P- Por que você acha que tem esse nome aí? O que exatamente acontece quando ele fala que é convexo e quando ele fala que é não convexo?	**P** faz um *desafio* para que **A** possa *reconhecer* o que são os quadriláteros não convexos.
A- Que eu me lembre, é quando... Não sei explicar, é quando tem tipo um buraco nele. **P-** E você verifica isso aí? **A-** É porque aqui dá para traçar uma linha passando por aqui, no ponto alfa e no ponto beta e fica um espaço vazio aqui. **P-** Isso. **A-** Se você traçar uma reta daqui até aqui.	**A** apesar de dizer que não sabe explicar, expressa verbalmente situações nas quais os quadriláteros não são convexos: "É porque aqui dá para traçar uma linha passando por aqui, no ponto alfa e no ponto beta e fica um espaço vazio aqui". Entendemos que esse argumento é do tipo perceptivo que se baseia no desenho. Nesse caso entendemos que **A** refere-se à região externa ao quadrilátero não convexo compreendida entre dois lados do quadrilátero e a diagonal não contida na região interna do quadrilátero, conforme região pontilhada destacada no quadrilátero $ABCD$ na Figura 34.

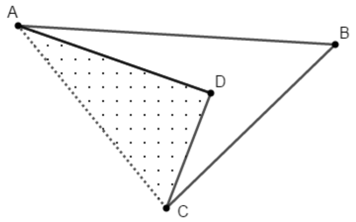
<table>
<tr>
<td></td>
<td>Figura 34 - Representação do buraco ou espaço vazio, segundo A

Fonte: Garbin, 2024.</td>
</tr>
<tr>
<td>P- Tá bem, ok. Então deixa eu só te perguntar agora uma coisa, analisando esse software aí, é... O que você pode afirmar sobre as medidas dos ângulos internos do quadrilátero? Você mantém a sua resposta?
A- Não, porque às vezes não dá trezentos e sessenta graus.
P- Aham.</td>
<td>A apresenta a dúvida esperada por P, em algumas situações a soma em questão é igual a trezentos e sessenta e em outras o valor é aproximado. Esperamos que seja mote para criar a necessidade de uma demonstração.</td>
</tr>
<tr>
<td>A- Mas é bem próximo... Tem como fazer o triângulo... Tem que ser cento e oitenta graus aqui.</td>
<td>No momento dessa fala, A alinhou três pontos do quadrilátero como indicado na Figura 35. Essa questão é retomada por ele em outro momento.

Figura 35 - Recorte do vídeo no momento da fala “tem como fazer um triângulo”

Fonte: Gravação da entrevista com A</td>
</tr>
<tr>
<td>P- Então você está certo que é trezentos e sessenta ou você ficou com alguma dúvida de que é trezentos e sessenta a soma?
A- Eu fiquei com dúvida, não sei por que eu aprendi que é trezentos e sessenta se aqui está falando que não é trezentos e sessenta.</td>
<td>Ao ser questionado mais uma vez por P, A mostra um conflito em relação ao que aprendeu na escola. Isso pode ser interessante, pois pode corroborar a necessidade de uma demonstração para esclarecer a dúvida sobre o valor da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero plano.</td>
</tr>
<tr>
<td>P- Tá, vamos pensar juntos</td>
<td>P recorre a um jogo de perguntas para esclarecer a</td>
</tr>
</table>

sobre isso daí tá. Lá atrás quando você estava fazendo no papel você justificou que... Uma hora, que a soma dos ângulos de um triângulo é cento e oitenta e que dois triângulos juntos formam um quadrilátero, então por isso seria trezentos e sessenta né, você me falou isso uma hora. Isso de juntar dois triângulos... Esses quadriláteros que não dão trezentos e sessenta, eles não têm dois triângulos? **A**- Não, é que os triângulos têm aproximadamente cento e oitenta. **P-** Ok, tudo bem. Então parece que, eu ia te falar isso caso você não soubesse, que para a gente estudar os ângulos do quadrilátero, os ângulos internos do quadrilátero parecem que tem que saber... é, ajuda talvez saber sobre os do triângulo, né. **A**- Não entendi, fala de novo que cortou. **P-** Tudo bem, como você mesmo já citou o triângulo aí nesse estudo, então, saber sobre o triângulo ajuda a saber sobre os quadriláteros, certo? **A**- Sim. **P-** Então é interessante estudar os triângulos também certo, porque estudando os triângulos você consegue... **A**- Certo.	necessidade de investigar os triângulos, para que se esclareça a investigação em curso. Acreditamos que a comunicação nesse momento seja um *jogo de perguntas*, pois **P** faz perguntas onde a **A** cabe apenas concordar ou discordar. **A** sabe que a justificativa da soma das medidas do ângulo internos do quadrilátero plano depende da soma das medidas dos ângulos internos do triângulo como podemos observar quando afirma: “Não, é que os triângulos têm aproximadamente cento e oitenta.”. Acreditamos que essa afirmação decorre de **A** concluir, nessa atividade, que a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero é aproximadamente trezentos e sessenta.
P- Bom eu te dei duas opções nesses dois primeiros	Ressaltando o caráter aberto da atividade, **P** propõe que **A** escolha qual o meio que deve usar para investigar

momentos, opção um que era fazer o desenho e medir e outro que era mexer no software. Se você tivesse que estudar o triângulo, você faria o mesmo caminho? Como que você faria? **A-** Como assim? Se eu faria no papel ou no *software*? **P-** Isso, você faria parecido com o que a gente está fazendo aqui ou você faria só em um deles, você faria nos dois... **A-** Eu faria no *software*, eu acho. **P-** Só no *software*? **A-** Que é mais preciso. **P-** Ok, então eu vou te passar um outro *link*, tá bom? **A-** Tá, de triângulo? **P-** Isso. Aí esse você pode fechar essa janela tá, quando você terminar aí, mas pode ficar mexendo aí à vontade tá e quando você terminar você fecha. **A-** Tá bom. **P-** Eu vou te mandar o outro *link* agora, para você...	a soma dos ângulos internos dos triângulos. **A** faz sua escolha a partir do *reconhecimento* de uma perspectiva, a que o software apresenta melhor precisão.

A postura investigativa de **A** dominou suas ações, deixando claro que aceitou o convite para a atividade. Consequentemente, a cooperação investigativa e o diálogo persistiram na comunicação entre as partes com os atos dialógicos do Modelo-CI presentes em diversos momentos.

Rapidamente, **A** percebeu a principal questão sobre a soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros na presente atividade e a reconheceu explicitando que o valor: — Nem sempre dá 360º (trezentos e sessenta graus). Em dado momento, apresenta dúvida inerente ao seu repertório, pois afirma que aprendeu que a soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros planos é igual a 360º (trezentos e sessenta graus), mas a investigação vivenciada mostrava outro resultado. Tal conflito é importante para os objetivos da atividade, pois será esclarecido com uma demonstração, dando a ela um significado.

Em cooperação com A, **P** faz um desafio para que A possa refletir sobre a mudanças causadas na soma quando o número de casas decimais é alterado, sem que o quadrilátero seja modificado. Importante destacar que nesse momento, tanto **P** quanto A fazem reformulações, **P** de sua pergunta, com o intuito de desafiar A, e A de sua justificativa, quando relaciona o aumento do número de casas decimais com uma lupa. Entendemos que com essa comparação A quis indicar que ao aumentar o número de casas decimais, a precisão da medida aumenta assim como quando utilizamos uma lupa ampliamos os detalhes daquilo que estamos observando.

P, a partir de seu conhecimento matemático, utiliza a atividade para esclarecer dúvida anterior em relação à nomenclatura de um ângulo em um polígono. Nesse momento, mesmo em uma comunicação centralizada em **P**, a postura investigativa de A não se modifica, pois uma dúvida foi esclarecida. Outro momento que **P** centraliza comunicação, dessa vez em um jogo de perguntas, ocorreu quando apresentou a perspectiva da necessidade de investigar o triângulo. Apesar disso, como o estabelecer contato estava consolidado, essas interrupções no diálogo não interrompem a cooperação investigativa entre as partes.

Importante ressaltar que, em certo momento, A afirma que fez o retângulo perfeito utilizando uma justificativa de base visual, pois a imagem que aparece na tela remete a um retângulo, enquanto as medidas dos ângulos mostram um ângulo de oitenta e nove graus. Em seguida, vê esse ângulo e reconhece que não tem um retângulo. Tal fato mostra que A compreende a predominância das propriedades do retângulo sobre aquilo que vê.

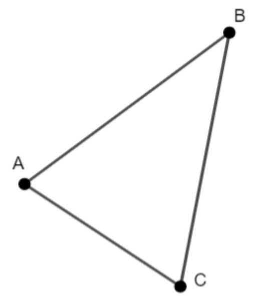
Por fim, utilizando uma característica importante para a constituição de cenários para investigação, **P** deixa que A decida entre duas possibilidades como deve ser feita a investigação da soma das medidas dos ângulos internos do triângulo.

Vale destacar que as argumentações de A tiveram como alicerce a percepção visual.

Tabela 7 - EA3

A- [Após receber e abrir o *link*] É o que eu pensei, o triângulo eu imagino que seja menos preciso... Não, ele vai	**A** *percebe* e *reconhece* corretamente que o erro na soma das medidas dos ângulos internos do triângulo será menor do que no quadrilátero.

ser mais preciso do que a soma dos ângulos dele vais ser maior agora, do que o do quadrilátero. **P-** Muito bem, verdade. Lá tem mais erro para ser contabilizado, né?	
A- É quanto maior, quanto mais lados tiver mais fácil de identificar o erro... O erro não né, na verdade a imprecisão é na teoria... Né, que... **P-** Como assim na teoria, a imprecisão... Qual teoria? **A-** Eu acho que a imprecisão seria na regra que dá sempre cento e oitenta graus, porque se na prática nem sempre dá cento e oitenta graus é a teoria que está errada. É para facilitar, não é? **P-** Entendi. **A-** Que é bem próximo de cento oitenta sempre. **P-** Mas você acha que a matemática, contém... Ela permite essas imprecisões na sua teoria? **A-** Eu acho que... Em casos que o ensino seja mais aprofundado, quando ela for usada com mais precisão vai dar trezentos e sessenta e cento e oitenta graus. Quando for fazer coisas espaciais, aí precisa ser mais preciso. **P-** Entendi, então qual que você acha que é a soma da medida dos ângulos internos do triângulo? **A-** É próximo de cento e oitenta, mas nem sempre é cento e oitenta, nesse caso	A ideologia da certeza (BORBA; SKOVSMOSE, 2001) leva **A** a *perceber* e *reconhecer* de maneira equivocada algumas perspectivas: que o erro está na teoria e que o ensino a que teve acesso apresentou esse conteúdo com menor profundidade – “Eu acho que a imprecisão seria na regra que dá sempre cento e oitenta graus, porque se na prática nem sempre dá cento e oitenta graus é a teoria que está errada. É para facilitar, não é?” (...) Em casos que o ensino seja mais aprofundado, quando ela for usada com mais precisão vai dar 360º e 180º (trezentos e sessenta e cento e oitenta graus).”. Ou seja, de acordo com o contexto, a ideologia da certeza fez com que **A** criasse uma justificativa que atribuísse significado para o fato de ter aprendido que a soma em questão é igual a cento e oitenta graus, enquanto o software apresenta valores aproximados a cento e oitenta graus. Como a ideologia atribui valor de verdade para o que é apresentado pelas tecnologias digitais, a justificativa é que a explicação que teve na escola foi de certa forma rebaixada e menos aprofundada, ou facilitada, em suas próprias palavras. Além disso, **A** *posiciona-se* em defesa de sua perspectiva ao argumentar – “Em casos que o ensino seja mais aprofundado, quando ele for usado com mais precisão vai dar trezentos e sessenta e cento e oitenta graus. Quando for fazer coisas espaciais, ai precisa ser mais preciso”.

deu cento e oitenta e um, mexendo as casas decimais e arredondando.	
P- Aham. A- E aí deu cento e oitenta ...e um. O quadrilátero não tem como ser não convexo. **P-** O triângulo, você está querendo dizer? Ou o quadrilátero? A- É, o triângulo.	No processo de investigação, A *pensa alto* ao expressar o que estava pensando a respeito de triângulos e diagonais – "O quadrilátero não tem como ser não convexo. **P-** O triângulo, você está querendo dizer? Ou o quadrilátero? A - É, o triângulo".
P- Isso, por que você acha que não tem como ele ser não convexo?	**P** contribuiu com a perspectiva fazendo um *desafio* para que A pudesse refletir e *reformular* o que havia *pensando alto* – "Isso, por que você acha que não tem como ele ser não convexo?".
A- Porque teria que ter mais uma linha para formar aquele formato côncavo... **P-** Aham, certo. A- Que ele só tem como ter linhas retas ... Bom... o quadrilátero também né, mas tipo se pegasse aqui e arrastasse para cá e contasse como uma linha e ela não iria ser reta né, iria ter uma curva. **P-** Aham, e você... A- Seria mais um vértice.	A *posiciona-se* ao defender sua perspectiva *reformulando* a explicação. Incialmente a argumentação refere-se ao dinamismo inerente ao software que permite movimentar os vértices no plano em um simples click "se pegasse aqui e arrastasse para cá e contasse como uma linha e ela não iria ser reta né, iria ter uma curva". Em seguida faz uma *reformulação*: "Seria mais um vértice.". Tomando como exemplo a Figura 36, representação criada por nós da imagem que aparecia na tela no momento dessas falas, o que A disse refere-se ao fato de haver mais um vértice sobre o segmento $\overline{AB}$. Figura 36 - Representação da imagem da gravação durante a fala "seria mais um vértice"  Fonte: Garbin, 2024.
P- Certo. E assim, a respeito da soma, como que você justificaria assim se alguém te perguntasse, sei lá, se a sua irmã te perguntasse ou se	**P** pergunta sobre a justificativa para a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero. Vale ressaltar que nossa intenção com essa formulação da pergunta tinha o interesse de mostrar que esperávamos uma explicação detalhada de A.

caísse em alguma prova, por que a soma dos ângulos internos é essa que você acha que é, como é que você justificaria?	
A- A... Já sei... Porque como as linhas são transversais, se você organizar pelas linhas da mesma forma... Por exemplo, no triângulo não tem como formar igual ao que eu fiz no quadrilátero, que faz tipo um “l”, tem que formar uma linha, e uma linha aqui tem cento e oitenta graus... Cento e sessenta graus, então a soma dos ângulos internos formam uma linha. **P**- Aham. **A**- Se eu encaixasse esse ângulo aqui... Esse conezinho aqui, e esse outro aqui iria formar uma linha, um semicírculo, que é cento e oitenta graus. Um triângulo... Qual o nome daquele triângulo? Escaleno... Ele seria assim, tipo, mais ou menos assim. O Escaleno tem todos os lados diferentes, não é? **P**- Isso.	Com base no dinamismo do *GeoGebra*, **A** *posiciona-se* ao defender a perspectiva que *percebeu* e *reconheceu* para justificar a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo “Por exemplo, no triângulo não tem como formar igual ao que eu fiz no quadrilátero, que faz tipo um ‘l’, tem que formar uma linha, e uma linha aqui tem cento e oitenta graus... Cento e sessenta graus, então a soma dos ângulos internos formam uma linha.”. Entendemos que, nessa justificativa, **A** pretendeu dizer que se um dos vértices do triângulo estivesse sobre seu lado oposto, então o ângulo desse vértice seria cento e oitenta graus enquanto os outros ficariam zerados, como mostra a Figura 37 abaixo, recortada no momento da fala de **A**. Figura 37 - Justificativa da soma dos ângulos internos do triângulo  Fonte: Gravação da entrevista com A Essa argumentação tem base perceptiva, mas de certa forma, ela foi possível de ser concebida graças ao dinamismo do software.
A- E os ângulos também, não pode formar noventa graus, não é isso? **P**- Isso, não pode ter ângulo de noventa. **A**- Porque senão ele é um triângulo retângulo. **P**- Isso. **A**- Quais são os tipos de	O caráter aberto da atividade permite que **A** levante a questão da nomenclatura dos triângulos, que é esclarecida em uma comunicação e o *jogo de perguntas* prevalece. Apesar de não ser um *diálogo*, essa comunicação serviu para esclarecer uma perspectiva apontada por **A**, o que indica uma contribuição mútua para a investigação.

retângulos, eu não conheço... Eu sei que tem o equilátero, o retângulo, aí tem mais? **P-** Isso, aí tem o triângulo isósceles também. **A-** Qual a... Medida? **P-** Isósceles é que ele tem dois lados com a mesma medida. **A-** A, aquele lá que parece o telhado da casa? **P-** Isso. E aí tem o equilátero que tem os três lados de mesma medida. **A-** Então, o triângulo retângulo também pode ser um triângulo isósceles? **P-** Pode ser um triângulo isósceles. E tem uma outra propriedade do triângulo isósceles. Ele é triângulo isósceles porque tem dois lados de mesma medida e é triângulo isósceles também por que... **A-** Não entendi... A, ele pode ser triângulo isósceles por terem a mesma medida e por terem dois ângulos iguais, é isso? **P-** Isso, os ângulos opostos a esses lados de mesma medida têm a mesma medida. **A-** Entendi.	
P- Tá, você muda alguma coisa na sua justificativa da soma dos ângulos ser cento e oitenta? Ou próximo de cento e oitenta, você mantém sua justificativa? **A-** Não... É a justificativa da linha sim.	**P** verifica se **A** mantém a perspectiva que defendeu a respeito da justificativa da soma das medidas dos ângulos internos
P- Tá, então tá bom. Então	**P** faz o *convite* para **A** participar da próxima

agora a gente vai para uma parte que eu vou justificar para você a soma das medidas dos ângulos de um triângulo, tá bom? Que a gente sabe que tendo um triângulo a gente vai conseguir pensar no quadrilátero. **A**- Tá bom. **P-** E aí você pode fechar esse que eu vou te passar um outro link. **A**- Tá bom.	atividade.

Interpretamos que novamente o convite foi aceito por **A**, devido à sua interação e ação investigativa na atividade e aos diversos atos dialógicos do Modelo-CI que ocorrem na comunicação com **P** que, além disso, evidenciam que um diálogo ocorreu durante a comunicação entre as partes envolvidas, e que cenários para investigação prossegue estabelecido.

Assim, como nas atividades anteriores, **A** percebe e reconhece perspectivas, por exemplo quando fala que o erro será menor na soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ou quando apresenta uma justificativa a respeito da soma das medidas dos ângulos internos do triângulo com base no dinamismo característico do *GeoGebra*.

A também pensa alto e reformula perspectivas quando, por exemplo, se posiciona que não é possível ter um triângulo não convexo – inicialmente expressa o que está pensando e justifica sua perspectiva com base no dinamismo do *GeoGebra* e posteriormente conclui que seria necessário mais um vértice.

Um importante momento do diálogo ocorreu quando **A** apontou uma suposta divergência entre o que aprendeu e o que verifica no *GeoGebra*. Ele afirma que a discrepância que percebeu se dá devido a um erro na teoria matemática, mas que em medições em dimensões espaciais tal divergência não ocorre. Acreditamos que tal colocação se deve ao que Skovsmose e Borba chamam de ideologia da certeza, na qual, as tecnologias engendradas com fundamentos matemáticos carrega a melhor solução para os problemas, pois **A** acredita que as aproximações do *GeoGebra* são o que de fato acontecem com os triângulos.

Apesar dos equívocos apresentados nessa perspectiva, **P** a acolhe sem apontar os erros ou corrigir **A**. Tal estratégia ocorre para que **A** não se desestimule e prossiga com a investigação. Além disso, **P** coopera fazendo desafios e perguntas de caráter investigativo para que **A** possa reformular posições e perspectivas.

Outo ponto importante é que a justificativa para a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é baseada no dinamismo que o *GeoGebra* oferece. **A** movimenta um dos vértices do triângulo sobre o lado oposto e com isso os segmentos de reta que formam o ângulo ficam colineares (indicou a Figura 37).

As argumentações utilizadas têm características perceptivas visuais, mas em uma delas o dinamismo do *software* é fundamental.

Tabela 8 - EA4

P- Você pode ler o texto que tem aí para mim? **A-** [Lendo o enunciado] Tá. Os ângulos internos do triângulo foram transportados para o segmento de reta abaixo, quando você movimenta os vértices dos triângulos para formar outros triângulos as medidas dos ângulos internos ao serem transportados mudam. **P-** Isso, aí você pode brincar aí para entender, e... A minha pergunta é, o que você observa nos ângulos transportados do triângulo sob o segmento de reta? **A-** Não entendi. **P-** Ó, eu vou te copiar a pergunta aqui que eu acho que fica mais fácil de você entender ela do que eu te fazer a pergunta. Vou te mandar aqui no chat a pergunta. Fica mais fácil de você ler. Se você puder ler em voz alta... **A-** Tá. [Lendo a pergunta] O	Ao ler o enunciado, **A** indica que *aceitou o convite*.

que você observa nos ângulos transportados do ângulo... **P-** Do triângulo. **A-** [Lendo a pergunta] Do triângulo, sob o segmento de reta? Eles são o mesmo ângulo, mas isso já está falando ali no textinho.	
P- Aham. **A-** Que como ele é um segmento de reta a soma dele vai dar sempre cento e oitenta, porque né... É um semicírculo. **P-** Certo e você vê que tem um pontinho ali nos ângulos transportados né, no meio deles né. **A-** Aqui? **P-** É preto, isso lá nos ângulos transportados, tem um pontinho preto bem pequenininho, bem no meio deles... Isso, os ângulos tem, digamos assim, tem a sua ponta né que matematicamente a gente fala que é o vértice, e eles tem o vértice nesse ponto preto e eles cobrem todo o ângulo raso, que é o ângulo de cento e oitenta né. Se eu pensasse que do pontinho para a esquerda fosse um pedaço de reta e do pontinho para a direita fosse outro pedaço de reta, ele vai cobrir cento e oitenta ali né. Então, isso é uma justificativa. **A-** Entendi, se pegar todos os vértices do triângulo vai formar cento e oitenta graus.	**A** *percebe* e *reconhece* a perspectiva esperada, pois identifica que a atividade indica que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é igual a cento e oitenta: “Entendi, se pegar todos os vértices do triângulo vai formar cento e oitenta graus.”.
P- Aham. Você acha que...	Problemas devido à conexão com a internet.

A-"Oxe" travou a minha tela aqui. **P-** Qualquer coisa você... Ah, vai voltar eu acho... Aí, voltou. Legal, você acha que isso é uma demonstração que a soma dos ângulos internos é cento e oitenta?	
A- Eu acho que sim, só que como não é sempre que vai dar cento e oitenta, também não faz muito sentido porque é uma linha né, mas não dá sempre cento e oitenta. **P-** Essa linha que você diz no triângulo? **A-** É, é... Esse semicírculo que é o segmento de reta que o ângulo vai formar os cento e oitenta graus. **P-** Você acha que nem sempre vai formar... **A-** A, nem sempre dá cento e oitenta porque é um pouquinho torto, nem que seja muito pouco. **P-** Aham, então você não acha que é cento e oitenta ainda? **A-** Que? **P-** Você acha que é cento e oitenta a soma dos ângulos internos do triângulo? **A-** Sim, é próximo.	Apesar de instantes antes **A** ter concluído que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é igual a cento e oitenta graus, ainda tem dúvida sobre tal fato. Acreditamos que essa dúvida ocorre porque **A** ainda está sob influência da atividade anterior, na qual a soma mostrava-se aproximada a cento e oitenta de acordo com a mudança no número de casas decimais.
P- Próximo né? Tá bom, então agora eu vou apresentar uma demonstração desse fato. Você já ouviu falar me demonstração? Na matemática. **A-** Sim. **P-** Então a gente faz afirmações na matemática né,	**P** utiliza uma comunicação em forma de *jogo de perguntas* para justificar a necessidade da próxima atividade.

tem várias. Você falou algumas aí já hoje. Essas afirmações elas são demonstradas na teoria matemática. O que é uma demonstração? Eu vou utilizar premissas básicas da matemática e das consequências dessas premissas eu vou tirar uma conclusão e essa conclusão é a demonstração de algum fato. Então se eu quero provar, por exemplo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é próximo de cento e oitenta, como você está afirmando ou é cento e oitenta, a gente vai descobrir isso juntos agora, se é próximo ou se não é, porque você chegou falando que aprendeu que é cento e oitenta né? **A**- Aham. **P-** Será que você aprendeu errado ou o que aconteceu. Então a gente vai usar premissas básicas da matemática para provar ou que é cento e oitenta ou que não é cento e oitenta, a gente vai ver o que vai acontecer.	
A- Sim, ó eu consegui, juntei todos os vértices e deu cento e oitenta graus. **P-** Mas aí quando você junta todos os vértices, será que é um triângulo isso daí? **A**- Não. **P-** Não né? **A**- Mas também é culpa dos ângulos né? **P-** É estranho porque aparece	**A** em plena ação investigativa faz um experimento de sobrepor todos os vértices. Nessa situação, a informação sobre a soma das medidas dos ângulos internos é cento e oitenta graus. Essa ação exemplifica a imprevisibilidade presente em atividades que constituem Cenários para Investigação, nas quais situações inéditas podem acontecer. Também indica a potencialidade do uso do *GeoGebra*, pois tal manobra não seria possível com um desenho no papel.

o ângulo né. **A-** É, se fosse o ponto mesmo era para ter dado trezentos e sessenta graus né. **P-** É, aí nem teria ângulo né, porque para você ter um ângulo você precisa ter dois pedaços de reta, se você só tem um ponto você não tem um ângulo. **A-** Sim. **P-** Aparece que só tem um ponto aí, mas na verdade tem três né, então quando você mexe e coloca um em cima do outro o software está entendendo que são três. **A-** Então é uma falha do sistema aí né? **P-** Isso, o software ele é... Também contém imprecisões, são menores do que quando você usa o transferidor, mas ele também tem imprecisões. **A-** Sim. **P-** Você quer falar mais alguma coisa sobre essa parte? **A-** Não.	

Apesar dessa atividade ter ocorrido em tempo menor em comparação às anteriores, **A** manteve sua postura investigativa. Aceitou o convite, percebeu e reconheceu que a atividade mostrou que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é igual a cento e oitenta graus. No entanto, isso não foi suficiente para mudar o parecer de A quando realizou a segunda e a terceira atividades e concluiu que a soma dos ângulos internos dos triângulos e dos quadriláteros planos tem valor aproximado a cento e oitenta e trezentos e sessenta graus.

Interpretamos que não mudou sua conclusão, pois **A** não considera o registro figural dessa atividade como uma justificativa, pois para ele a segunda e a terceira atividades, em que os valores da soma das medidas dos ângulos internos são alterados de acordo com a mudança no número de casas decimais mostram, nas palavras de A, que, — Na prática, nem sempre dá 180º (cento e oitenta graus), é a teoria que está errada, afirmou ele −, ou seja, a segunda e a terceira Atividades apresentam, em sua perspectiva, a verdade do que ocorre com a soma em questão.

Tabela 9 - EA5

P- Não? Então eu vou te passar um outro link aqui. E aí você pode fechar esse tá, que eu vou te passar um outro link que aí a gente vai ver a demonstração.	**P** faz o convite para a nova atividade.
A- Tá bom. Está baixando. **P-** É, ele é pesado mesmo. Mesmo se tiver uma ótima internet e um ótimo computador ele demora um pouquinho mesmo, porque ele é um pouco pesado. A- É. Você que criou esses daqui? **P-** Sim, é um programa que a gente chama de geometria dinâmica. É dinâmico porque permite que você movimente aí as coisas né. E aí você tem um programa que dentro você faz a programação, que é bem simples, não é difícil não... Enfim, vamos vendo aí os passos. A- Sim. **P-** Não apareceu nenhum texto? A- Apareceu. **P-** Tá.	A *aceita o convite* e lê o enunciado da atividade.
A- [Lendo o enunciado] Trace uma reta sob um dos lados do triângulo. **P-** Você percebeu que foi traçado uma reta ali no lado AC? A- Sim, sim.	A *percebe* e *reconhece* que a atividade indica que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é igual a cento e oitenta graus. Entendemos dessa forma, pois A formula a demonstração com suas próprias palavras: “Que dá para formar cento e oitenta graus porque, com essa regrinha que com as linhas transversais e paralelas vai formar vários ângulos iguais

P- Certo, então vai observando o que o desenho está mandando. **A-** [Lendo o enunciado] Trace uma reta "g" paralela a reta "f" passando pelo vértice oposto ao lado que contém a letra "f". Trace uma reta em um dos dois lados do triângulo, mais duas retas paralelas traçadas por uma transversal. Verifique os ângulos internos... **P-** Alternos internos. **A-** [Lendo o enunciado] Alternos internos, determinados por essa transversal. É, esse ângulo aqui é o mesmo desse **P-** Isso. Você lembra desse teorema da matemática dos ângulos alternos internos? **A-** Sim. Esse ângulo é igual a esse, esse é igual a esse aqui, que é igual a esse, esse aqui vai ser igual a esse aqui também eu acho. **P-** Legal, legal. **A-**[Lendo o enunciado] Trace uma reta sob o outro lado do triângulo. Também teremos duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Tem como voltar? **P-** Tem, se você clicar de novo no passo cinco ele vai tirar... **A-** A ta. **P-** E aí você consegue ver... **A-** Qual a reta que eu mexi... Tá, acho que é essa aqui. **P-** É, você tem que clicar no passo cinco para somar. **A-** É, ele tirou a daqui...	e se você mudar os ângulos internos do triângulo em um segmento de reta com essa regrinha, vai dar cento e oitenta graus, esse ângulo aqui que é o mesmo desse... Esse aqui já é esse aqui né, porque está no ponto B e esse aqui é igual a esse outro que também é um ângulo interno". Quando **A** fala "Que dá para formar cento e oitenta graus porque, com essa regrinha que com as linhas transversais e paralelas vai formar vários ângulos" entendemos que, apesar do usar a palavra regrinha para se referir a um teorema, A compreendeu que a demonstração parte de uma hipótese e a partir de deduções válidas, chega-se a uma tese, ou seja, uma argumentação lógico dedutiva do tipo da geometria proto-axiomática (G2).

P- Isso. **A-** E colocou aqui. **P-** Poderia deixar nesse caso, eu tirei para não ficar muito carregado a visualização né, eu tirei, mas se ela tivesse continuado também não teria nenhum problema, foi mais uma questão de visualização mesmo. **A-** Aham. [Lendo o enunciado] Verifique que os ângulos alternos internos determinados por essa transversal... A, entendi. É, eu lembro que a professora explicou para a gente porque é assim, cento e oitenta graus. **P-** Aham... A, legal. Então olha só, o que você conclui ao analisar esses ângulos alternos internos no vértice em B? Por que tem lá o B em cima né? **A-** O vértice... **P-** O que você conclui ao analisar esses ângulos alternos internos junto com o vértice B que já estava ali, que é o ângulo interno do triângulo, o que você pode concluir com isso? **A-** Que dá para formar cento e oitenta graus porque, com essa regrinha que com as linhas transversais e paralelas vai formar vários ângulos iguais e se você mudar os ângulos internos do triângulo em um segmento de reta com essa regrinha vai dar cento e oitenta graus, esse ângulo aqui que é o mesmo desse...	

Esse aqui já é esse aqui né, porque está no ponto B e esse aqui é igual a esse outro que também é um ângulo interno.	
P- Aham. A- Então, os ângulos internos foram juntados... Juntados não, se juntaram aqui no ponto B. **P-** Certo, então qual a soma dos ângulos internos do triângulo dada essa etapa? A- Cento e oitenta graus. **P-** É perto ou é exatamente cento e oitenta? A- É perto. **P-** Mas por que você acha que é perto? Aqui está dando perto de cento e oitenta? A- Não. **P-** Aqui está dando quanto, nesse daqui? A- Tem que dar cento e oitenta. **P-** E está dando cento e oitenta, você acha, visualizando sem as medidas? A- Eu acho que sim, porque é uma reta né? Mas por que aquele lá não deu?	Apesar de instantes antes **A** ter *percebido* e *reconhecido* que a atividade indica que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é igual a cento e oitenta graus, ainda apresenta dúvida, pois acredita que os casos analisados nas atividades anteriores têm mais relevância do que a demonstração que acabou de ler: “É perto”. De certa forma, temos aqui mais um exemplo da ideologia da certeza. Em momentos anteriores, **A** afirmou que “na prática” a soma era aproximada, pois entendia que os testes que realizou no *GeoGebra* tinham valor de verdade. Na demonstração, **A** nota que apenas argumentos foram usados. Para ele, os testes tem mais relevância do que o argumento, já que foram realizados com tecnologias digitais. Quando usava o transferidor, acreditava em imprecisões, quando usou o *GeoGebra* passou a acreditar em uma verdade. Vale destacar que a postura investigativa de A, mais o *desafio* colocado por **P** – “Mas por que você acha que é perto? Aqui está dando perto de cento e oitenta?” – levam **A** a fazer uma pergunta importante para a compreensão do que é uma demonstração: “Mas por que aquele lá não deu?”
P- Aham, exato. Bom você mesmo disse, você está correto, são imprecisões né. Sempre quando a gente vai medir algo, a gente pode usar o equipamento mais potente que existe na Nasa, vai ter uma certa imprecisão... Não tem como. A- É que... Essa linha aqui, preta, ela tem uma certa grossura, uma espessura que	Após explicação de **P**, A *reformula* sua perspectiva a respeito da imprecisão, indicando o que pode levar ao erro em uma medição. Anteriormente, colocava a culpa no transferidor, depois no manuseio do transferidor e agora na espessura da linha. Essa *reformulação* indica que **A** *reconhece* que as medidas nas atividades anteriores realizadas no *GeoGebra* contêm erros.

atrapalha um pouco nas precisões né. **P-** Exato, na matemática... Olha que loucura... **A-** Para fazer os desenhos técnicos eu costumo fazer de lapiseira, não gosto de fazer de lápis porque a linha fica muito grossa e atrapalha.	
P- Olha só que legal, eu nem tinha pensado nisso do desenho técnico, mas é uma coisa também que tem que tomar cuidado. Porque na matemática, olha como é que é definido uma reta na matemática, uma reta... Primeiro define um ponto, um ponto não tem dimensão, ou seja, o ponto não tem tamanho. Você consegue pensar em uma coisa que não tem tamanho? **A-** Não dá. **P-** Não tem como, não existe né. **A-** Um átomo, na verdade até um átomo tem né? **P-** Até um átomo tem. E se na verdade encontrasse uma coisa até menor que um átomo, que na verdade já encontraram, essa coisa teria um certo tamanho, né. **A-** Sim. **P-** Então para a matemática, o que a gente está vendo aqui são só representações, tá certo? **A-** Então aquilo que eu falei por exemplo, para fazer aquelas coisas espaciais que precisa de muita precisão, eles consideram cento e	Devido à cooperação mútua na investigação, ao *estabelecer contato* consolidado, e ao caráter aberto da atividade, **A** sente-se à vontade para retomar uma perspectiva inicial sobre os tipos de cálculo feitos no espaço fora da Terra e suas imprecisões. As dúvidas são esclarecidas em uma comunicação, que apesar de ser centrada no conhecimento de **P**, tem uma interação muito forte e potente entre as partes, pois **A** está muito interessado no que **P** diz, ao mesmo tempo em que **P** explora positivamente esse interesse, não previsto, como um campo de ampliação de ideias matemáticas sobre aspectos da geometria esférica, Matemática como uma ciência abstrata e erros em aproximações.

oitenta graus? **P-** Sim, bom aí depende né, porque aí tem umas outras questões né. **A-** É porque as coisas são medidas em 2D né? **P-** Exatamente, o nosso espaço segundo a teoria do Einstein ele é curvo né, então quando você vai no espaço não é reto como se eu tivesse em um papel sulfite né, as coisas são curvas. **A-** Sim. **P-** Então depende de onde está esse triângulo, se ele está no papel acontece isso que a gente acabou de ver, se ele não está no papel, ou seja, se ele não está em uma superfície plana, aí acontecem outras coisas e tem um exemplo bem legal, por exemplo, de reta no globo terrestre, no planeta terra uma reta não é a mesma coisa que a reta que a gente desenha aqui no plano certo? **A-** Certo. **P-** Então se a gente tiver que ir daqui para a China não é em uma linha reta igual é a do plano, vai ter que contornar o globo terrestre né. **A-** Sim. Vai ter uma curva né? **P-** Sim, vai ter uma curva, então uma reta sob o globo terrestre é diferente de uma reta no plano. **A-** Sim. **P-** Mas por que a gente pode usar? A gente não pensa	

nisso né, quando vai construir uma casa e quando vai de um bairro para outro, a gente não pensa nisso porque como é muito pequenininho o espaço eu posso até considerar plano, porque é muito pequenininho então é como se fosse plano. Agora se eu tivesse que ir daqui para o Japão aí não daria para considerar plano né. **A-** Sim, se você colocar um papel no chão, e aumentasse muito aquelas as casas decimais que tem no aplicativo lá no final, lá longe ia ter as imprecisões longe do zero né. **P-** Então por isso... Muito legal isso que você falou, então o que dá para concluir a respeito das medições? Para a matemática. **A-** Que elas nunca vãos ser exatas né, sempre vai ter uma falha entre aspas. **P-** Sim, exatamente. Vai ter uma imprecisão e a matemática ela é um conceito abstrato né, nesse caso... Na teoria matemática dá uma coisa, mas na prática da outra né, a gente no máximo na prática vai se aproximar muito do que acontece na teoria. **A-** É, se não caia prédio né.	
P- É, bom então agora sabendo disso a gente vai também... Agora vamos voltar lá para o... A, uma última pergunta, o que você acha que tem de diferente	**A** *reconhece* a demonstração realizada de maneira imprecisa, pois acredita que a atividade anterior era um "resumo" da demonstração apresentada na atividade. Infelizmente, **P** não aprofundou a investigação para esclarecer o que era uma demonstração.

nesse que a gente fez do triângulo para o anterior do triângulo? Na justificativa. A- Como assim? **P-** Lá tinha uma justificativa de que o ângulo era cento e oitenta né, e aqui tem uma outra justificativa, qual você acha que é a diferença dessas justificativas? A- Lá só não mostrava que os ângulos internos podem ser iguais aos ângulos externos se você juntar, não o ângulo externo inteiro, essa parte assim, só essa linha. **P-** Aham, entendi. A- É como se fosse um resumo desse aí. **P-** Tá bem. E você acha que isso é uma demonstração né? A- Sim, mas essa é mais resumida que a outra. **P-** Desculpa, só para repetir, essa daqui que a gente está vendo agora você acha que é uma demonstração? A- Acho que sim.	

Nessa atividade, optamos por uma comunicação centrada na autoridade didática de **P** para a apresentação do conceito de demonstração. Além disso, o conjunto de atividades expunha uma contradição sobre o valor da soma das medidas dos ângulos dos polígonos em questão, como colocado por **A** quando questionado se o valor da soma em questão é igual a 180 (cento e oitenta): — Eu acho que sim, porque é uma reta, né? (sic, mas por que aquele lá não deu?. Esse lá refere-se às atividades em que o valor da soma das medidas dos ângulos internos dos polígonos podia mudar de acordo com a mudança no número de casas decimais. Portanto, a demonstração surgiu como uma necessidade para resolver essa contradição proporcionando a **A** uma demonstração com função de explicação (VILLIERS, 2001), pois verificou por qual razão a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo não é aproximadamente 180º (cento e oitenta graus) e sim igual a esse valor.

A percebe e reconhece o teor da demonstração apresentada, em suas palavras: — Que dá para formar 180º (cento e oitenta graus) porque, com essa regrinha que, com as linhas transversais e paralelas vai formar vários ângulos iguais, e se você mudar os ângulos internos do triângulo em um segmento de reta com essa regrinha, vai dar 180º (cento e oitenta graus), esse ângulo aqui que é o mesmo desse... Esse aqui já é esse aqui né?, porque está no ponto B e esse aqui é igual a esse outro que também é um ângulo interno.

Apesar disso, a ideologia da certeza mostra sua influência na formação dos conceitos em uma pessoa, pois, após alguns instantes, e respondendo à pergunta de **P**, **A** afirma que o valor da soma é perto de 180º (cento e oitenta graus), pois ainda acredita que os casos verificados nas atividades anteriores mostram a verdade e não o conjunto de deduções apresentados na argumentação da demonstração.

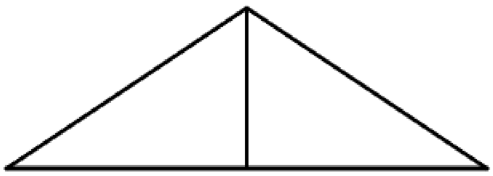
Após cooperação de **P**, **A** compreende a perspectiva colocada a respeito da importância da demonstração e chega a reformular sua perspectiva sobre o que são os erros e, dessa vez, entende que a espessura da representação de uma reta interfere no valor obtido em uma medição, indicando que reconheceu que as medidas obtidas nas atividades anteriores realizadas no *GeoGebra* continham erros.

Apesar de nossa escolha para a comunicação nessa atividade não ser a de compor um diálogo, **A** mantém sua postura investigativa e continua atento ao que **P** fala. Podemos identificar que essa postura de **A**, acrescida do acolhimento das perspectivas que **P** fez durante a realização da atividade – mantendo o estabelecer contato – mais as perguntas de caráter aberto, permitem que **P** explore positivamente a imprevisibilidade inerente a Cenários para Investigação e estabeleça, após a demonstração, uma comunicação potente em que vários conceitos matemáticos são expostos.

Tabela 10 - EA6

P- Ok, deixa eu ver se tem mais alguma pergunta aqui... Então agora eu vou fazer duas perguntas para você, você pode usar o papel se quiser ou não, é só me falar, mas aí fica à vontade tá?	**P** questiona qual a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero e em seguida *desafia* **A** para que seja dada uma justificativa: "Por que você acha que é trezentos e sessenta?" **A** se *posiciona* justificando a soma: "Porque o quadrilátero, ele... Não todos os quadriláteros, vai ter quadrilátero que não vai dar certo né, mas o retângulo

A- Tá bom. **P-** Sabendo disso daí que a gente viu no triângulo, qual a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero? **A**- Trezentos e sessenta. **P-** Por que você acha que é trezentos e sessenta? **A**- Porque o quadrilátero, ele... Não todos os quadriláteros, vai ter quadrilátero que não vai dar certo né, mas o retângulo ou o quadrilátero vai dar sempre a soma de dois triângulos, se você juntar dois triângulos vai formar um quadrilátero, mas não necessariamente um quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos.	ou o quadrilátero vai dar sempre a soma de dois triângulos, se você juntar dois triângulos vai formar um quadrilátero, mas não necessariamente um quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos.” Isso significa que uma nova perspectiva é *percebida* por **A** – existem quadriláteros que não podem ser decompostos em triângulos – e precisa ser esclarecida, pois **A** não sabe dizer quais são esses quadriláteros. Mais à frente, essa *posição* é retomada por **A**, mostrando que ele tem preocupação em comprovar seus argumentos. Essa argumentação, mesmo com imprecisões tem características lógico dedutivas, pois o resultado de uma propriedade dos quadriláteros planos depende de uma propriedade dos triângulos.
P- Não necessariamente? Então se eu tenho um quadrilátero que não é dividido em dois triângulos quanto que vai dar a soma dos ângulos internos desse quadrilátero? **A**- Mil e oitenta.	**P** faz um *desafio* para **A** que possa repensar e *reformular* a perspectiva que acabou de apresentar.
P- Então digamos que eu tenha esse quadrilátero, ou melhor, vou mudar a minha pergunta, essa pergunta não está prevista aqui. Qual seria o caso de um quadrilátero que não dá dois triângulos? Você consegue desenhar ele para mim aí? Porque você me disse que tem quadrilátero que não divide em dois triângulos, qual seria esse quadrilátero?	**P** *reformula* sua pergunta sobre a perspectiva que **A** apresentou.
A- Se você pegar dois vértices sem formar uma	Retomando o *posicionamento* em relação à

linha ligados aos vértices opostos vai dar sempre um triângulo né? É, qualquer quadrilátero é sempre a soma de dois triângulos. **P-** Legal. **A-** É, mas o que eu tinha pensado é que se você... Eu não testei na real, é se você juntar de uma forma diferente, mas acho que até assim da quatro lados... Um, dois, três, quatro, é... Tem forma diferente, convexo. Quer dizer, não convexo. **P-** E dá quantos triângulos aí? No não convexo. **A-** Mas eu tentei tipo, pegar o quadrado, deixa eu tentar fazer aqui no papel. Eu pensei em fazer assim ó, pegar tipo... Tem um quadrado aqui, você consegue ver o papel? **P-** Consigo, estou vendo. **A-** Tem um quadrado aqui, aí eu dividi em dois triângulos... Aí tem o triângulo “a” e o triângulo “b”, aí eu poderia juntar aqui ó, fazer triângulo “a” aqui ... A, não necessariamente se eu juntar dois triângulos assim, colocar um de costa para o outro, vai formar um triângulo, daí seria o triângulo “a” e o triângulo “b”, então não necessariamente você pode juntar os triângulos de uma forma que ele não faça um quadrilátero. **P-** Aham, deixa eu ver se eu entendi o que você falou agora. Você está me dizendo	decomposição dos quadriláteros em triângulos, a perspectiva a que se refere **A** nesse momento não é a mesma que a levantada inicialmente. Anteriormente, **A** disse: “(...) se você juntar dois triângulos vai formar um quadrilátero, mas não necessariamente um quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos.” Entendemos que dentro do contexto essa fala indica que **A** não tem certeza que todo quadrilátero pode ser decomposto em triângulos. Agora **A** diz: “É, se eu posso juntar esse triângulo aqui vai formar... Ó, formou aqui um triângulo, só que esse vértice aqui, o ângulo desse vértice é cento e oitenta, então eu não sei se isso pode ser considerado um quadrilátero.” Entendemos que nesse momento a dúvida é outra, pois **A** está preocupado em *perceber* se dois triângulos (com as características apropriadas) sempre podem compor um quadrilátero. A Figura 38 ilustra a última fala. Figura 38 - Representação da possibilidade de composição entre triângulos e quadriláteros  Fonte: Garbin, 2024. A imprevisibilidade referente a Cenários para Investigação apresenta dificuldades que podem ocorrer nesse tipo de atividade: **P** não *percebe* que houve mudança na perspectiva apresentada e não esclarece essa mudança. Além disso, **P** não explora a definição que exige para a construção de um quadrilátero que existam quatro pontos distintos em um plano dos quais três a três não são colineares.

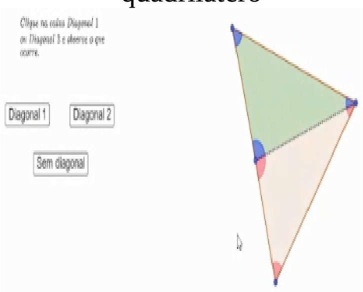
que nem sempre que eu junto dois triângulos dá um quadrilátero, é isso? A- É, se eu posso juntar esse triângulo aqui vai formar... Ó, formou aqui um triângulo, só que esse vértice aqui, o ângulo desse vértice é 180 (cento e oitenta), então, eu não sei se isso pode ser considerado um quadrilátero. **P-** É, é que não dá para enxergar daqui muito bem, mas tem que ter quatro lados né? Quatro ângulos, se tiver mais não é. A- Isso, tem quatro ângulos, mas esse ângulo aqui ele tem cento e oitenta graus, porque eu coloquei os triângulos um de costas para o outro. **P-** Aham. A, você deixou o bico, um dos vértices encostados, é isso? A- Isso. **P-** Bom, vamos ver aqui então. A- Só que aí tem esse ângulo reto aqui no meio. **P-** Entendi, então não dá um quadrilátero né? A- Não sei dizer, porque... Não sei se esse aqui seria o lado "d" e aqui o lado "f". **P-** Aham, tá. A- Não sei se tipo, seriam dois lados ou seria um só. Porque é dividido por um vértice, mas é um segmento de reta.	

A apresentou uma perspectiva equivocada a respeito da decomposição de um quadrilátero em triângulos e fez uma inversão entre hipótese e tese quando reconheceu e reformulou essa perspectiva.

Nesse sentido, entendemos que a imprevisibilidade referente à cenários para investigação apresenta dificuldades que podem ocorrer nesse tipo de atividade, pois **P** não percebeu que houve mudança na perspectiva apresentada e não esclareceu a inversão que **A** fez entre hipótese e tese em suas afirmações. Além disso, não argumentou em relação à definição de quadriláteros planos para apresentar as condições necessárias para a existência dos mesmos. Isso não significa que a cooperação investigativa cessou nesse momento da atividade, mas sim que as dúvidas de **A** poderiam ser sanadas de maneira lógico dedutiva.

Tabela 11 - EA7

P- Ó, vamos... Eu vou te passar mais um link que eu acho que vai ajudar nessa questão que você tem aí. Vamos ver. Aí você pode fechar esse daí né e aí tem mais um link. Já está acabando tá?	**P** faz um *convite* para a nova atividade.
A- Você vai fazer com mais quantas pessoas esse... **P-** Depois eu vou analisar essa, você é a primeira pessoa né, então eu vou analisar para ver o que eu estou achando que está bom, depois eu vou... Eu pretendo aplicar com mais algumas pessoas. Não necessariamente na mesma idade que você né, mas não mais velhos né, tem que ser pessoas mais novas.	O tipo de atividade de caráter aberto e do *estabelecer contato* vigente entre **P** e **A** na atividade permite que **A** sinta-se à vontade para fazer uma pergunta sobre a pesquisa de que está participando.
A- A sim, isso aqui é a fórmula que eu... Que eu aprendi para descobrir os ângulos internos que é juntar, fazendo as diagonais de um único vértice.	**A** indica que *aceitou o convite*, pois interage com a atividade rapidamente e *percebe* uma perspectiva retomando um conhecimento de seu repertório.

P- Aham. A- Aí essa quantidade de diagonais subtrai por dois... Não lembro. Que aqui vai ter uma diagonal, duas diagonais vão ser duas vezes cento e oitenta, aí tinha uma fórmula.	
P- É o mesmo sistema tá você pode clicar aí na diagonal, mas o vértice mexe, então você consegue construir qualquer quadrilátero aí. A- Entendi. **P-** Inclusive esse que você pensou em fazer. Convexo ou não convexo também você consegue. A- O que eu pensei em fazer era assim ó. Ficaria esse quadrilátero aqui e aqui passaria uma reta, entendeu? Porque tipo, são dois triângulos, mas eles estão divididos um de costas para o outro, entendeu? Figura 39 - Dúvida de A sobre a condição de existência do quadrilátero  Fonte: Gravação da entrevista com A. **P-** Sim, entendi. A- Assim. **P-** Entendi. A- Porque aí a diagonal um vai cobrir ele inteiro.	A atividade permite que A retome a dúvida sobre a perspectiva da decomposição do quadrilátero em triângulos.

P- Bom então depende de como você vai... Nesse caso vai depender de como você considera, se você considera essa parte que tem o ângulo de cento e oitenta são dois segmentos de reta, então você vai ter o ângulo de cento e oitenta. Se você não considera que você vai ter dois segmentos de reta então você vai ter um triângulo, nem tem ângulo, tá certo? **A**- Sim. **P-** Aí é um triângulo mesmo, só que assim, aí você entra num limite né... O quadrilátero não pode ser um triângulo e nem um triângulo um quadrilátero, tem quatro lados, então você precisa deixar isso bem claro. Se tem cento e oitenta ali então vai ser um triângulo mesmo. Tá certo? Se a medida de fato for cento e oitenta, aí vai ser um triângulo e não um quadrilátero né. Então, sempre dá para dividir, você acha? Um quadrilátero em dois triângulos.	**P** utiliza sua autoridade didática e seu conhecimento matemático para esclarecer a dúvida de **A**.
A- Acho que sim. **P-** Por que você acha que dá **A**- Porque o ... Deixa eu pensar aqui... Se sempre que você juntar os dois vértices, se você passar um segmento de reta entre os vértices opostos de um quadrilátero, vai dividir em um triângulo, porque não tem como dividir um triângulo.	**P**, com o intuito de *perceber* se **A** compreendeu a explicação, faz um *desafio:* “Por que você acha que dá?” **A** enfrenta o *desafio*: “Deixa eu pensar aqui ...” mostrando postura investigativa.
P- Aham, o não convexo	As perguntas que **P** faz colaboram para a

também? **A**- Os não convexos pelo que eu testei aquela hora também dá, eu acho. Porque se eu passar uma linha aqui vai formar um triângulo estranho, mas é um triângulo. A... Não, se eu traçar aqui não vai dar né, são ângulos opostos. **P**- É, nesse daí não vai dar, mas na outra dá, ou não? **A**- É, aqueles dois vamos ver se vai dar certo e o outro... É, é isso aí, entendi. **P**- Mas de alguma maneira formou dois triângulos né, só não foi com as duas diagonais né, só com uma. **A**- Aham.	investigação e reflexão de **A**.
P- Mas de alguma maneira formou dois triângulos né, só não foi com as duas diagonais né, só com uma. **A**- Aham. **P**- Por que acontece isso? Porque um dos jeitos pra gente pensar que o quadrilátero é convexo é pensar que, se eu traçar uma diagonal, essa diagonal inteira tem que estar dentro do quadrilátero. **A**- Sei. **P**- Se alguma parte da diagonal não ficar dentro do quadrilátero, então esse quadrilátero é não convexo. **A**- Entendi.	Há uma quebra no *diálogo* e a comunicação se dá por meio de um *jogo de perguntas*, pois há uma centralidade nas falas de **P** e em seu conhecimento matemático.
P- Bem e aí para finalizar eu vou te perguntar se você acredita que isso é uma demonstração?	Após questionamento de **P**, **A** afirma compreender que a atividade anterior apresenta uma demonstração, mas seu *posicionamento* está equivocado em relação a essa perspectiva: "Sim, é uma demonstração porque

A- Sim. **P**- Então qual é a soma dos ângulos internos de um quadrilátero? **A**- Sim, é uma demonstração porque mostra que divide em dois triângulos. E como a gente já teve a demonstração que dois triângulos da cento e oitenta graus então é só somar. **P**- E vai dar quanto? **A**- 360º (trezentos e sessenta graus).	mostra que divide em dois triângulos.” Essa fala de **A** tem argumentos de características perceptivos visual.

Novamente, a atividade proporciona a cooperação investigativa e o diálogo entre as partes. **A** aceitou o convite, trouxe conhecimentos de seu repertório, trouxe à tona novamente a questão sobre a decomposição do quadrilátero em triângulos.

Contribuindo com a investigação, **P** fez desafios, utilizou uma comunicação do tipo jogo de perguntas para esclarecer dúvidas colocadas e tentou perceber perspectivas colocadas por **A** em específico sobre o que **A** tinha compreendido sobre demonstração.

Tabela 12 - EA8

P- Certo. Bom vamos só para o último aqui para você poder comparar aí. Mandei um outro link para você, você pode fechar esse. Aí você lê esse texto para mim por favor.	**P** faz um novo convite para **A**.
A- Não entendi. **P**- É para você ler esse texto que aparece aí na tela. **A**- [lendo o enunciado**]** Tá. Os ângulos internos do quadrilátero foram transportados para o segmento de reta abaixo, quando você movimentar os vértices do quadrilátero para formar outros quadriláteros as medidas dos seus ângulos	**A** indica que *aceitou o convite* quando leu o enunciado e imediatamente *percebe* a perspectiva da atividade: “Vai formar um círculo né?”.

internos e dos seus transportados mudam... Vai formar um círculo né? **P-** Certo. Então o que você observa nesses ângulos transportados? **A-** Que a soma deles vai dar trezentos e sessenta graus. **P-** Aham.	
A- Que eles são iguais aqui né e que a soma deles vai dar trezentos e sessenta graus e aí eu parei para pensar aqui, e se for um pentágono, um hexágono, como que é para fazer esse transporte aqui?	**A** apresenta uma nova perspectiva.
P- Pois é, então como é que você faria para justificar um pentágono ou um hexágono, como é que você faria?	**P** coopera com a investigação acolhendo a dúvida de **A**. Em seguida, *desafia* **A** ao propor uma pergunta que pode ajudá-lo a elaborar uma resposta ao questionamento anterior.
A- Só dividir os ângulos pelas diagonais e pela quantidade de triângulos.	**A** *reconhece* a perspectiva adequada ao descrever como encontrar a soma das medidas dos ângulos internos de outros quadriláteros pela decomposição deles em triângulos.
P- Certo, certo. Então você considera que isso daqui é uma demonstração? Isso que a gente está vendo agora.	**P** retoma a perspectiva sobre as demonstrações.
A- Sim. **P-** Qual a diferença desse para o anterior? **A-** Que o anterior mostrava mais dos triângulos, que para usar outra demonstração você precisa saber que o triângulo tem cento e oitenta graus de ângulo interno. Esse aí é mais simples, se for uma demonstração, é mais simples, eu acho... É mais crua, tipo cada uma forma um círculo, mas por que forma esse círculo? Mas você	Após pergunta de **P**, **A** *reconhece* e *posiciona-se* em defesa do que *percebeu*, pois expressa aquilo que acredita ser uma justificativa – “Que o anterior mostrava mais dos triângulos, que para usar outra demonstração você precisa saber que o triângulo tem cento e oitenta graus de ângulo interno” – e defende seu ponto de vista: “É mais crua, tipo cada uma forma um círculo, mas por que forma esse círculo? Mas você só precisa saber que os triângulos têm cento e oitenta graus de ângulo interno.”. Entendemos que a palavra “crua” junto da afirmação “Que o anterior mostrava mais dos triângulos” indica que **A** compreendeu que em uma demonstração é preciso uma hipótese – soma das medidas dos ângulos internos do triângulo – para que se possa obter uma

só precisa saber que os triângulos têm cento e oitenta graus de ângulo interno.	tese. Não é a primeira vez que **A** realiza um argumento com essa estrutura, o que indica que já compreendia, mesmo que de forma imprecisa, como funciona uma argumentação lógico dedutiva.
P- Tá bem. Então, matematicamente isso que você está vendo agora não é uma demonstração tá? Não é uma demonstração porque ela depende da medida. Quando a gente faz uma demonstração a medida é irrelevante. **A-** Ah, entendi.	A comunicação entre as partes é centrada em **P**. **A** na maior parte da comunicação apenas concorda com **P**, exceto quando *reconhece* o que é demonstração ao se expressar com um exemplo: "É tipo você justificar que duas vezes seis é doze, porque seis mais seis é doze. A pessoa já sabe a soma, mas para explicar você usa a soma.". Entendemos com essa fala que **A** compreendeu que para uma demonstração é necessário que exista hipótese e tese. No caso do exemplo que ele usou há imprecisões, mas essa ideia da estrutura argumentativa em uma demonstração interpretamos que foi compreendida por ele.

Tivemos a partir deste ponto uma longa conversa sobre matemática e ciência e decidimos colocá-la em texto corrido para que não sobrecarregasse a visualização, uma vez que não foram feitas análises.

> **P** — Tá, é porque a gente não utiliza medida quando vai fazer matemática, quando você vai resolver um problema você tem que ter as medidas é claro, quando você vai fazer os teoremas matemáticos, fazer as teorias matemáticas você não usa as medidas justamente por que toda vez que você mede você tem uma certa imprecisão, como você vê aí né. Se eu colocasse o botãozinho de casas decimais aqui para você alterar essa soma desses ângulos igual aquele primeiro que a gente fez, você ia ver que às vezes ia dar trezentos e sessenta, às vezes ia dar trezentos e sessenta e um, às vezes ia dar trezentos e cinquenta e nove vírgula nove, nove, nove... Porque você está medindo e as medidas têm imprecisões. No anterior que a gente fez, eu não usei nenhuma medida, eu só usei para justificar fatos matemáticos, então eu provei... fato matemático que eu utilizei é que a soma dos ângulos internos de um triângulo é cento e oitenta. Então isso é um fato matemático que também precisa de demonstrações, mas ele é um fato matemático e eu utilizei isso. Quando eu demonstrei o do triângulo eu também fiz esse jogo com os dois tipos de apresentação.
> **A** — Uma era demonstração e a outra não.
> **P** — Isso, aquela que tinha os passos é uma demonstração por que usa fato matemático, o fato dos ângulos alternos internos.
> **A** — Aham.
> **P** — Isso é um fato matemático, que também é demonstrável. Se você fizer matemática, a área da matemática, se você for para a faculdade, você vai ver que você demonstra aquele teorema utilizando outras premissas matemáticas anteriores aquela não cabe aqui para a gente porque, nem é difícil a demonstração, mas as premissas são muito longas então não cabe aqui né. Tem como demonstrar aquele teorema dos ângulos alternos internos também.

A — É tipo você justificar que duas vezes seis é doze, porque seis mais seis é doze. A pessoa já sabe a soma, mas para explicar você usa a soma.
P — Sim, é algo desse tipo sim. Quase todos os fatos matemáticos são assim né, você usa coisas anteriores já demonstradas para demonstrar um fato matemático, mas tem um limite né. Porque se tudo tiver que demonstrar, como é que a primeira coisa vai surgir né. Então existe uma coisa na matemática que se chama axioma. O axioma é uma afirmação matemática que não precisa ser demonstrada.
A — Não Entendi.
P — A ideia é que, se tudo precisar justificar, vai chegar uma hora que eu não vou conseguir ter isso, que vai chegar uma hora que eu vou sempre justificando, vou voltando para trás buscando as coisas mais básicas e vou sempre justificando e justificando e isso faz parecer que não tem fim, né?, se eu tenho sempre que justificar e demonstrar. Então, existem fatos matemáticos que a gente chama de axioma, são coisas que você não precisa demonstrar.
A — Entendi.
P — Por exemplo, na geometria plana um axioma é por dois pontos passar uma única reta, isso é um axioma, eu não preciso demonstrar isso. Bem, só que se eu tivesse no globo terrestre e considerasse uma reta no globo terrestre, uma reta que vai ser curva porque o globo terrestre é curvo, já não vale isso por exemplo. Então por dois pontos no globo terrestre, passa mais de uma reta. Só você pensar o Polo Norte e o Polo Sul.
A — Tem muitas infinitas retas, né?
P — Tem os meridianos como exemplo, né, passam vários ali, os meridianos são exemplos de uma reta no globo terrestre, porque o meridiano é a distância entre dois pontos né, os dois polos, o Polo Norte e o Polo Sul.
A — E é sem passar por dentro da terra, né?
P — Isso, você vai contornando né. Não tem como furar a terra no meio né, por tudo né, só o metrô por baixo.
A — Tipo, talvez desse, talvez de tipo ir até os Estados Unidos, não ter que ir muito fundo.
P — É, mais daqui até o Japão não daria, né?
A — É, aí não.
P — Cortando a terra no meio para ser uma reta, dessa que a gente conhece no plano né. Então depende de onde a gente está, tá certo? No espaço seria outra coisa. Só um minutinho.
A — Ok.

Tabela 13 - EA9

P- Então é... É isso, então você acredita que é trezentos e sessenta ou ainda acha que é perto de trezentos e sessenta? A- Não, é trezentos e sessenta mesmo. **P-** É trezentos e sessenta mesmo né. Você quer	A compreendeu o valor da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero plano e não tem mais dúvida sobre a aproximação ou exatidão do valor.

perguntar mais alguma coisa? **A**- Acho que não.	
P- Tá bem! Ó esse programa, você está vendo o nome ali ó, *Geogebra*. **A**- Sim, *Geogebra*. **P**- Então, se você digitar aí no Google você vai entrar como se fosse uma rede social, como o Facebook, eu tenho uma página lá... Só que como a minha página é só para pesquisa eu deixo ela oculta. É, lá você consegue acessar pelo aplicativo ou se você quiser baixar para o seu computador e até pelo celular dá né, no celular fica pesado, mas dá para baixar dependendo do celular e você vai ter lá, ponto, triângulo, reta, plano, esfera, tem o 2D e o três 3D. **A**- E o que as pessoas fizeram né? **P**- É, isso. Aí você vai acessar o que eu acessei para fazer isso daí. **A**- Entendi. **P**- Então agora nesse primeiro ano, você está no primeiro ano né? **A**- Sim. **P**- Você vai trabalhar muito com função, o tema do primeiro ano é função. Para função ele é ótimo, porque você digita lá a função e ele já te desenha o gráfico, você consegue visualizar diversas coisas. **A**- Legal, mas tem uma diferença porque eu faço ensino técnico, então os	Com a comunicação centrada em seu conhecimento matemático, **P** fala sobre o *GeoGebra*. Vale destacar a seguinte afirmação de **A:** “Legal, ver a demonstração de coisas que a gente aprende só a teoria, por exemplo, o Teorema de Pitágoras.”, pois ela indica uma avaliação positiva das atividades, pois das inúmeras possibilidades do que poderia ser explorado na plataforma do *GeoGebra*, **A** refere-se justamente àquilo que foi tratado na atividade – demonstração – como interessante.

professores eles estão meio que alternando a aula deles, por exemplo, o professor de física, o professor ele pula matéria, ele está passando para a gente matéria do terceiro ano e a matéria do terceiro ano já se liga com a matéria da ETEC, que é mecatrônica. Quando a gente chegar lá no terceiro ano é quando ela vai passar a matéria do primeiro e todos os professores estão mudando um pouco, então eu não sei direito o que eu vou aprender em matemática, pode não ser exatamente isso, função... **P-** Entendi, legal, legal. Bem, mas quando você for estudar função dá para você utilizar bastante e dá para utilizar para geometria, quando você entra na rede social você vai conseguir ver outras coisas porque o pessoal... Existem muitos matemáticos que acessam isso e produzem materiais, então você vai ver que tem vários teoremas, várias demonstrações da geometria e aí é essa coisa, clicar, mexer... **A-** Legal, ver a demonstração de coisas que a gente aprende só a teoria, por exemplo, o Teorema de Pitágoras. **P-** Por exemplo, tem demonstrações do Teorema de Pitágoras, você sabia que o Teorema de Pitágoras tem mais de cem demonstrações diferentes?	

A- Não sabia. **P-** É tem muitas. Tá certo, aí qualquer coisa que você quiser, tiver alguma dúvida, você pode me escrever no *WhatsApp*, tá? **A**- Tá bom.	
P- E é isso, muito obrigado. **A**- Eu que agradeço, Flávio. Vou guardar a folhinha aqui. **P-** Isso, você guarda ela para mim, porque, aí, eu vou dar um jeito de pegar com você, não sei se eu peço para a Bruna, eu só vejo com o seu pai. **A**- Talvez eu vá para a casa da minha avó, aí eu tento entregar para a Bru, não sei se ela vai lá, mas eu tento entregar para ela. **P-** Tá bom, tudo bem. Aí você vê com ela. **A**- Tá e pode dobrar a folha? **P-** Pode, pode dobrar. **A**- Tá ok. **P-** Muito obrigado por participar e qualquer coisa me escreve.	**P** e **A** alinhando-se em relação à entrega da folha que usou para fazer os quadriláteros. Vale destacar que não foi possível recuperá-la após o fim da quarentena.
A- Tá bom... A, só outra pergunta, essa entrevista é para que? É TCC? **P-** Não, é uma dissertação de mestrado. **A**- Ah, é tipo um TCC de faculdade? Eu não sei o que é. **P-** É, o TCC é assim... Tem o TCC no ensino médio e tem o TCC na graduação, né?, então, quando você acabar o ensino médio e você fizer o vestibular, você vai concorrer	O *estabelecer contato* está consolidado a ponto de **A** sentir-se à vontade parar perguntar sobre a pesquisa que **P** está fazendo.

a uma vaga na graduação, quando você acaba a graduação você pode continuar estudando, você vai para a pós-graduação e a pós-graduação é dividida em duas etapas, o mestrado e o doutorado. A- Aham. **P-** O que classifica o doutorado, você tem que fazer uma dissertação sobre um tema, eu estou fazendo uma dissertação sobre o ensino de geometria. Então você tem que fazer uma dissertação no mestrado, você não faz dissertação para o vestibular? A- Deu uma cortada doida aqui, não ouvi o que você falou nos últimos trinta segundos. **P-** Tá, tudo bem. Você entendeu como é dividida a pós-graduação, que são duas etapas? A- Sim, sim. É em mestrado e doutorado. **P-** Isso, isso. Aí, no mestrado, para você se formar no mestrado, tem que estudar as matérias e fazer um trabalho, que se chama dissertação. Para o vestibular você tem que fazer dissertação também, você não tem dissertação na aula de português? A- Sim. **P-** Então, é mais ou menos a mesma coisa, só que é uma coisa assim, mais aprofundada entendeu?	

A- Então tipo, para o mestrado e o doutorado, para terminar o mestrado não tem trabalho, prova, essas coisas, só isso daí que você está fazendo? **P-** Tem trabalho e prova também, porque eu tenho que fazer matérias né. No caso da... Isso muda de área para área, tá? No caso da matemática... também muda de faculdade para faculdade, se você fizer matemática na UNICAMP, talvez seja diferente. Mas na USP... **A-** Você faz em qual? **P-** Eu faço aqui na USP. **A-** Ah, legal. **P-** Na USP é, eu faço seis matérias e tem no caso, como é para professor, tem matérias na área da educação e tem matérias de matemática e são seis matérias, eu tenho que ser aprovado nas matérias, aí tem trabalho, tem prova, mas para eu ter o diploma não basta eu ter passado nas matérias, eu tenho que escrever essa dissertação. **A-** Ah, entendi.	
P- E o meu trabalho de dissertação ele é sobre o ensino de geometria e uma abordagem de investigação sobre o ensino de geometria. Você já teve alguma aula parecida com essa na escola? **A-** Não, só teoria. **P-** O que foi de diferente nessa aula que eu te dei aqui? **A-** Eu descobri o motivo das	A faz uma avaliação do que ocorreu na sequência de atividades e diz "descobri o motivo das coisas", o que significa que em relação a uma perspectiva mais geral do conjunto de atividades, A compreendeu o que era esperado.

coisas que eu aprendi na aula, sobre o cento e oitenta graus teve, mas não foi tipo uma prova, foi mais sobre a curiosidade do assunto. **P-** E você foi meio que tentando descobrir né? Você participou mais desse processo. **A-** Sim. **P-** Na sua escola é... Não é culpa do professor isso, tá? Provavelmente o professor te passou a informação e você não foi atrás investigar, pensar, mexer.	
A- É a mesma coisa quando vou no me pai perguntar uma palavra em inglês e ele me fala que eu vou precisar do dicionário, você guarda mais quando você se esforça, quando você busca o significado.	**A** *avalia* o conjunto de atividades, pois expressa a importância de se dedicar a uma investigação.
P- O que você acabou de fazer foi uma investigação, ficou investigando, analisando, estudando, os matemáticos fazem isso. Se tiver um matemático na faculdade pensando em matemática, ele vai fazer algo parecido com o que você fez. **A-** Entendi. **P-** E o que o matemático faz, um matemático profissional, eu sou professor né, eu não sou um matemático profissional, sou professor de matemática. O cara que está estudando matemática lá na universidade, o professor dos	**P** explora positivamente a imprevisibilidade inerente aos Cenários para Investigação, acolhendo a curiosidade matemática de **A**.

professores, ele está tentando demonstrar coisas, é isso que ele está tentando fazer. Para demonstrar alguma coisa ele vai investigando, só que aí ele está investigando coisas também.... A- É... E já foi tudo descoberto? **P-** Oi? A- Na geometria já foi tudo descoberto? **P-** Não, não... É que assim, na realidade não é uma descoberta no sentido de que existe algo lá pronto e é só alguém chegar e encontrar esse algo né. Isso aí é inventado. A- Sim. **P-** Os caras inventam coisas, eles inventam, tudo. Eles inventaram tanta coisa que dá para inventar coisa usando as invenções, entendeu? A- Uma coisa que ainda não foi descoberta é a quarta dimensão né, faz parte da geometria? **P-** Faz, na matemática existe até a dimensão "n", você tem o número de dimensão que você quiser. Cinco, seis, dez... A- Só que aí já sabe como funciona, essas coisas aí? **P-** É, tem descrições matemáticas lá, se você digitar no Google aí sobre a quarta dimensão você vai ver vídeos interessantes lá, a quarta variável, você tem "x", "y" e "z", a quarta variável é o tempo. Então	

conforme o tempo passa, as coisas mudam. Aqueles pontos que tem lá no plano cartesiano mudam de posição, e aí o seu objeto ele tem uma dinâmica né, essa seria a quarta dimensão. **A-** Então a gente pode usar a quarta dimensão para fazer vídeos, que não são várias fotos seguidas uma da outra, tipo, fazer uma coisa se mover mesmo. Uma imagem se mover sem ser várias imagens correndo. **P-** É porque tem uma diferença né, a teoria matemática permite você pensar nisso e representar com símbolos matemáticos isso que você falou. Mas só que o software ele é limitado, a gente fica pensando que o software diz tudo, mas na verdade o software é muito limitado, o que não é limitado é o nosso conhecimento. Eu não conheço coisas ilimitadas, nem você, nem ninguém, mas é possível criar coisas ilimitadas né. O conhecimento nunca vai parar de acontecer, as pessoas sempre estão descobrindo coisas novas em todas as áreas e o software não né, ele depende da sua programação ali né, nem tudo você consegue fazer nele. Então isso que você está falando talvez seja possível na teoria matemática, talvez eu consiga escrever que uma	

ponta... Mas fazer um vídeo eu acho que já não dá não. **A**- Entendi. **P-** Porque tem essa limitação do *software*. **A**- Sim. **P-** Tá certo? **A**- Tá.	
P- Muito obrigado viu. **A**- Obrigado você, eu gostei bastante. **P-** Ó, eu fico feliz! Qualquer coisa me escreve, tá? **A**- Tá bom. **P-** Um abraço!	**A** faz uma *avaliação* sobre a atividade: "gostei bastante".

O diálogo decorreu em torno do conceito de demonstração e a atividade e a cooperação entre as partes permitiram que **A** percebesse e reconhecesse uma importante perspectiva, a saber, a demonstração na função de explicação (VILLIERS, 2001) de um resultado; em suas palavras: — É mais crua, tipo cada uma forma um círculo, mas por que forma esse círculo? Depois disso, a partir de uma comunicação centrada em **P**, **A** reformula sua perspectiva: — É tipo você justificar que duas vezes seis é doze, porque seis mais seis é doze. A pessoa já sabe a soma, mas para explicar você usa a soma. Analisamos que essas falas apontam que **A** compreendeu que para se ter uma conclusão (tese) é necessário um pressuposto (hipótese).

A realiza o único ato dialógico do Modelo-CI que ainda restava, faz avaliações quando afirma: — Legal, ver a demonstração de coisas que a gente aprende só a teoria, por exemplo, o Teorema de Pitágoras. Em outro momento, sente-se à vontade para fazer perguntas sobre a pesquisa de que está participando (o que interpretamos como resultado de um estabelecer contato bem instituído), quando realiza mais uma avaliação: — Eu descobri o motivo das coisas que eu aprendi na aula, sobre o cento e oitenta graus teve, mas não foi tipo uma prova, foi mais sobre a curiosidade do assunto. Posteriormente, expressa o potencial da atividade para a aprendizagem com uma analogia a um exemplo familiar: — É a mesma coisa quando vou no me pai perguntar uma palavra em inglês e ele me fala que eu vou precisar do dicionário, você guarda mais quando você se esforça, quando você busca o significado. E, ao final, diz espontaneamente: — Gostei bastante.

Vale destacar o momento em que a imprevisibilidade que cenários para investigação promove, foi aproveitado de maneira profícua, quando a curiosidade de **A** foi recebida e correspondida pelas explicações de **P**.

5.2 Entrevista participante B

A entrevista com o participante B (doravante nomeado **B**) foi realizada via *Google Meet* em agosto de 2020. Algumas das atividades foram encaminhadas via *WhatsApp* e outras via o próprio *chat* da plataforma *Google Meet*. Este participante tem 14 anos e está no nono ano do Ensino Fundamental em uma escola da rede privada da cidade São Paulo.

O início da entrevista não foi gravado, devido a erro no *software*. Logo que identificado pelo pesquisador (doravante nomeado **P**), o erro foi corrigido e a gravação reestabelecida. Essa parte da entrevista consta como um relato com o qual se estruturou a tabela EB1.

Abaixo seguem as tabelas (Tabela 14 - EB1; 15 - EB2; 16 - EB3; 17 - EB4; 18 - EB4; 19 - EB5; 20 - EB6; 21 - EB7; 22 - EB8; 23 - EB9 e 24 – EB10) que tem a mesma estrutura, com duas colunas. Na primeira coluna (denominada transcrição) há a transcrição da gravação, exceto na tabela EB1 cuja primeira coluna (denominada relato) tem descrito o que ocorreu no início da entrevista e que não ficou gravado. Na segunda coluna, há uma análise focada num conjunto de falas e ações restritas, que se conectam em curto espaço de tempo e demonstram, segundo nossa interpretação, algum ato dialógico específico baseado no Modelo-CI. Ao fim de cada tabela, analisamos as falas e ações de maneira mais ampla, interpretando-as em uma totalidade, para decifrar conexões e intenções que demonstrem, ou não, uma cooperação investigativa.

Tabela 14 - EB1

Relato	Análise das falas
A primeira atividade foi enviada via *WhatsApp* e lida em voz alta por **B** que, em seguida, dividiu a folha sulfite em quatro partes iguais e desenhou um quadrado, um retângulo, um losango e um trapézio. Não foi possível observar se usou	Como **B** realiza os desenhos, entendemos que o *convite foi aceito*, pois mostrou que tentaria realizar a atividade. Apesar disso, não deixa claro se *percebeu* a perspectiva proposta.

ou não a graduação da régua.	
A regularidade que **B** descreve é em relação à posição relativa dos lados dos quadriláteros, afirmando que o quadrado, o retângulo, o losango tinham dois pares de lados paralelos, enquanto que o trapézio tinha apenas um par. No entanto, essa colocação de **B** não decorreu da investigação do paralelismo dos lados. Ao ser questionado por que os lados opostos eram paralelos, **B** afirma que os ângulos opostos eram iguais, então os lados opostos eram paralelos. Tal afirmação ocorreu sem que **B** realizasse alguma medição dos ângulos.	Como a primeira atividade é aberta – "Em cada um dos quadros abaixo desenhe um quadrilátero e utilize os materiais disponíveis para encontrar alguma regularidade." – **B**, ao se referir à relação entre os lados opostos dos quadriláteros, *percebe* e *reconhece* uma perspectiva, explicitando-a em termos matemáticos. Apesar disso, nesse momento, não há *vistas privilegiadas*, pois **B** não fez a investigação que **P** esperava. Além disso, não há ação investigativa, já que a afirmação de **B** não decorreu de uma investigação e sim de um conhecimento que estava em seu repertório. Entendemos dessa forma, pois os desenhos feitos por **B** são específicos e não um representante genérico de quadriláteros planos. **P** *desafia* **B** quando questiona sobre a razão dos lados serem paralelos e **B** *posiciona-se* ao argumentar sobre a congruência dos ângulos opostos. Importante destacar que justificar que os ângulos opostos de quadriláteros garantem o paralelismo dos lados opostos é uma afirmação incorreta e possibilitaria que outra perspectiva de investigação fosse explorada.
Ao ser questionado sobre a soma das medidas dos ângulos internos, antes de medir, **B** responde que a soma é igual a 360º, pois é possível realizar a medição. Em seguida, **P** pergunta: se você medir os ângulos internos desses quadriláteros a soma será 360º?	Quando **B** é questionado sobre a soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros planos e depois especificamente sobre o quadrilátero desenhado por ele, **P** busca direcionar **B** para que sejam estabelecidas *vistas privilegiadas* sobre a atividade.
B afirma que vai realizar a medição. No entanto, é possível perceber que tem certa dificuldade em usar o transferidor. P explica como utilizá-lo, mas **B** continua com dificuldade. Então, **P** apresenta o vídeo do *link* a seguir que conta com uma explicação sobre a utilização do transferidor:	**B** *aceita o convite* novo quando afirma que tentará realizar a medição e tem uma postura investigativa observada quando insiste na medição mesmo com dificuldades de manuseio do transferidor. Quando **P** explica como usar o transferidor e depois apresenta um vídeo, fica evidente que tem a intenção de contribuir para que **B** estabeleça *vistas privilegiadas*.

https://www.youtube.com/watch?v=Q3aHosIDuAE	

Nesse momento, é possível notar o erro na gravação, que é imediatamente corrigido. O que segue na entrevista foi gravado.

A partir da descrição do que ocorreu, é possível verificar que uma cooperação investigativa ainda não está constituída entre **B** e **P** e a ação investigativa de **B** ocorre em momentos pontuais, como por exemplo, quando **B** não desiste da medição dos ângulos, mesmo com dificuldade na utilização do transferidor.

Entendemos que **B** aceitou o convite uma vez que realizou os desenhos dos quadriláteros e interagiu com os mesmos durante a primeira atividade. Por outro lado, as vistas privilegiadas sobre a atividade ainda estavam em negociação, pois **B** apontou uma regularidade diferente da esperada. Não sabemos por que **B** aceitou o convite e se percebeu qual é a perspectiva da atividade, pois é possível que tenha aceitado o convite porque se interessou pela atividade ou por algum condicionamento relacionado ao Contrato Didático que, apesar de não estar no escopo teórico de nossas análises, pode ter influenciado a decisão de **B**, logo merece nossa atenção. O Contrato Didático, segundo Brousseau é

> o conjunto de obrigações e "sanções" recíprocas que cada parceiro da situação de aprendizagem: impõe ou acredita estar impondo, implícita ou explicitamente, a outros e as que lhe são impostas ou que acredita que lhe são impostas, sobre os saberes envolvidos. [...] As obrigações do professor para com a sociedade que delega sua legitimidade didática podem também ser consideradas como uma parte determinante do "contrato didático". O contrato didático não é, de fato, um verdadeiro contrato porque não é explicito, nem livremente acordado, e por que nem as condições para sua violação nem as sanções podem ser dadas antecipadamente, uma vez que sua natureza didática, a que interessa, depende de conhecimentos ainda desconhecidos pelo aluno. (BROUSSEAU, 1998, n.p., aspas do autor; tradução nossa[22]).

Nesse sentido, **B** pode ter aceitado o convite devido ao fato de **P**, no papel do professor, ter o poder de propor uma atividade ou um conjunto de atividades que **B**, no

[22] "C'est l'ensemble des obligations réciproques et des « sanctions » que chaque partenaire de la situation didactique - impose ou croit imposer, explicitement ou implicitement, aux autres - et celles qu'on lui impose ou qu'il croit qu'on lui impose, à propos de la connaissance en cause. [...] les obligations du professeur vis à vis de la société qui lui délègue sa légitimité didactique sont aussi une partie déterminante du « contrat didactique ». Le contrat didactique n'est pas en fait un vrai contrat car il n'est pas explicite, ni librement consenti, et parce que ni les conditions de ruptures, ni les sanctions ne peuvent être données à l'avance puisque leur nature didactique, celle qui importe, dépend d'une connaissance encore inconnue des élèves. "

papel de aluno, não poderia se negar a realizar, pois **P** tem a legitimidade didática delegada pela sociedade (BROUSSEAU, 1998, n. p.), que não pode ser confrontada por **B**. Não podemos afirmar a admissão feita por **B** sem o benefício da dúvida de suas reais motivações, pois esse contrato é implícito e a negação dele não se daria *a priori*. Além disso, o aceite de **B**, via contrato didático, limitaria sua ação investigativa, pois sua postura não se daria pela motivação de realizar uma reflexão a partir do que foi proposto ou a partir de uma dúvida que foi gerada pela atividade, mas sim como resposta ao comando dado por **P**, já que ele, o contrato didático,

> Coloca o professor perante uma verdadeira injunção paradoxal: tudo o que ele faz para que os alunos produzam os comportamentos que ele espera, tende a reduzir a incerteza do aluno e, por conseguinte, a privá-lo das condições necessárias à compreensão e a aprendizagem da noção visada: se o professor diz ou quer dizer o que ele quer que aluno faça, ele só pode obtê-lo a partir da execução de uma ordem e não pelo exercício de seu conhecimento e do seu julgamento. (BROUSSEAU, 1998, n. p., tradução nossa[23]).

Retornando ao encontro com **B**, quando falou do paralelismo dos lados opostos dos quadriláteros desenhados, **B** deixou indícios de que percebeu uma perspectiva, a de que existe uma regularidade relacionada ao paralelismo entre os lados opostos desses quadriláteros. Reconheceu essa perspectiva quando a explicitou matematicamente – afirmando que tinham dois pares de lados paralelos, enquanto que o trapézio tinha apenas um par. Além disso, posicionou-se – argumentando a respeito da congruência dos ângulos opostos – como resposta ao desafio feito por **P**, que questionou por que os lados opostos eram paralelos. No entanto, a ação investigativa não fica clara, pois não encontramos indícios mais contundentes de que a argumentação de **B** decorreu de uma investigação, mas tudo indica que conhecia a regularidade apontada *a priori*. Dito de outra forma, possivelmente **B** não realizou os desenhos e ao analisá-los percebeu a regularidade. Acreditamos, sim, que já sabia da regularidade antes de fazer os desenhos e apenas a entendeu como um possível caminho para a realização da atividade. Ademais, apesar de relacionar ângulos com o paralelismo dos lados, a afirmação não é correta e poderia ser explorada em outra investigação.

Posteriormente, **P** tenta direcionar **B** para as vistas privilegiadas da perspectiva da atividade, especialmente quando perguntou sobre a soma das medidas dos ângulos

---

[23] "Il met le professeur devant une véritable injonction paradoxale : tout ce qu'il fait pour faire produire, par les élèves les comportements qu'il attend, tend à diminuer l'incertitude de l'élève et par là à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ou signifie ce qu'il veut que l'élève fasse, il ne peut plus l'obtenir que comme exécution d'un ordre et non par l'exercice de ses connaissances et de son jugement."

internos do quadrilátero. Com essa pergunta, **P** também buscou estabelecer contato, pois sua atenção estava voltada ao que era falado por **B** e no que estava acontecendo durante a entrevista, o que demonstra a intenção de **P** em estabelecer uma relação positiva com **B**. Mesmo que a resposta a respeito da soma das medidas dos ângulos internos já estivesse no repertório de **B**, ao ser desafiado por **P**: — Se você medir os ângulos internos desses quadriláteros, a soma será trezentos e sessenta graus?, **B** mostrou-se interessado, atento e com postura investigativa ao ir à ação e tentar medir os ângulos internos do quadrilátero, o que indicou que percebeu outra perspectiva viável na realização da atividade. Tal ação investigativa ocorreu mesmo com a dificuldade em utilizar o transferidor, o que reforça a tentativa de **B** estabelecer contato com **P**, o aceite de um convite novo e uma postura investigativa.

É importante destacar que **B** aceitou convites em diferentes momentos, o primeiro quando iniciou a atividade e o segundo quando aceitou investigar sobre a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero.

Tabela 15 - EB2

Transcrição	Análise das falas
P- Pronto agora voltou aqui então, é... Você estava medindo o outro né? **B**- Isso, eu estava medindo o maior. **P**- É que acontece mesmo, é um erro comum mesmo porque até identificar ali direitinho as medidas... Então agora você pode prosseguir.	Quando **P** relativiza a dificuldade de **B** em realizar a medição e o incentiva para que continue realizando as medidas – "é um erro comum ... agora você pode prosseguir" – entendemos que **P** procura dar motivação e confiança para **B** em um esforço de criar uma relação positiva, ou seja, uma tentativa de *estabelecer contato*.
B- O menor deu cinquenta graus. **P**- Certo, mas e a soma dos quatro ângulos vai dar quanto? **B**- Um deu noventa, noventa, outro cinquenta, deu duzentos e trinta mais cento e trinta, deu trezentos e sessenta. **P**- Um deu cinquenta, outro deu noventa, outro deu	As perguntas de **P** "... e a soma dos quatro ângulos vai dar quanto?", "Tem dois ângulos de noventa?", "... deu exatamente essa medida ou um pouquinho diferente?" ou as seguidas repetições das medidas que **B** acabou de falar são interpretadas como confirmações recíprocas e *tag questions*, que significam mais um esforço de **P** em se mostrar presente e interessado no que **B** diz para que possa *perceber e reconhecer a* perspectiva*va* de **B**, o que nos indica que **P** busca *estabelecer contato*. Em específico, quando **P** pergunta "Hum, e quando você mediu deu exatamente essa medida aí ou deu um

quanto que você falou? **B**- Cento e trinta. **P**- Cento e trinta, e aí o outro? **B**- Noventa. **P**- Tem dois ângulos de noventa? **B**- Isso. **P**- Hum, e quando você mediu deu exatamente essa medida aí ou deu um pouquinho diferente? **B**- Deu essa.	pouquinho diferente?", ele tem a intenção de *perceber* se **B** está arredondando as medidas, o que pode revelar a perspectiva que **B** adota.
P- Deu esse mesmo? Você acha que isso, que essa soma, igual a trezentos e sessenta vai se repetir em todos os quadriláteros?	Quando **P** pergunta se a soma de trezentos e sessenta vai se repetir em todos os quadriláteros, faz um *desafio* para que **B** possa estabelecer definitivamente *vistas privilegiadas* sobre a primeira parte da atividade. Apesar de não ser da forma "O que acontece se...?" a pergunta de **P** cumpre a mesma função.
B- Não. [Percebemos que durante essa fala **B** estica o som da letra ene da palavra não]	O tom de voz de **B** ao responder "não" (que a soma de trezentos e sessenta não se repetirá em todos os quadriláteros) é interpretado como *pensando alto*, pois um sentimento internalizado decorrente de quem está pensando pela primeira vez na pergunta é externado. Isso mostra a tentativa de *perceber* uma perspectiva que por enquanto não é expressa matematicamente.
P- Não? Qual seria o exemplo de um quadrilátero que essa soma não é trezentos e sessenta? Ou melhor, ela não vai dar trezentos e sessenta, você consegue imaginar e desenhar ele aí? **B**- Com quatro lados, só que eu não tenho quatro lados. Então... **P**- Isso.	**P**, ao perguntar qual seria o exemplo de um quadrilátero cuja soma das medidas dos ângulos internos não é trezentos e sessenta, está *desafiando* a perspectiva adotada para que **B** *reconheça* a perspectiva realizando uma justificativa. Vale destacar que, nesse caso, ao afirmar que a soma não se repetirá **B** também *se posiciona*, mas o fato de não ter *reconhecido* a perspectiva que defende o impede de conseguir justificar sua afirmação.
[Espaço de silêncio] **B**- Eu estou tentando pensar, mas aqui, de agora, eu não imagino nenhum deles, não.	Ao dizer que está "tentando pensar", interpretamos que **B** tenta justificar matematicamente sua *posição*. Em outras palavras, busca *reconhecer* a perspectiva que está adotando.

P- Entendi. Tá certo. É ... [um tempo de silêncio]. Vamos pensar o seguinte, então, é .... se você tivesse que ... se outros quadrados, bom, isso você já respondeu, né ... se outros quadriláteros fossem desenhados o que aconteceria com a soma das medidas dos ângulos internos?	Quando **P** faz um tempo de silêncio está pensando como pode *reformular* a pergunta a respeito da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero, pois ele inicia a pergunta e logo *pensa alto* “bom, isso você já respondeu, né...” e em seguida faz pergunta. Incialmente **P** havia perguntado “Você acha que isso, que essa soma, igual a trezentos e sessenta vai se repetir em todos os quadriláteros?” e nesse momento pergunta “se outros quadriláteros fossem desenhados o que aconteceria com a soma das medidas dos ângulos internos?”. Interpretamos que **P** está em sintonia com **B** na colaboração investigativa e que procura formulação adequada da pergunta para ajudar **B** a *perceber* a perspectiva que a investigação vale para todos os quadriláteros planos.
B- Trezentos e sessenta graus. **P**- Mesmo qualquer quadrilátero que você desenhasse? **B**- Acho que qualquer um não. **P**- Certo, e se te perguntassem assim... Pode falar, desculpa. **B**- Pode falar, pode falar. **P**- Se perguntassem para você, qual a soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros, você responderia o que? Se alguém te perguntasse isso. **B**- Trezentos e sessenta. **P**- Trezentos e sessenta, e como que você justificaria isso, que é trezentos e sessenta?	Quando **B** responde primeiro “Trezentos e sessenta graus.” e depois “acho que qualquer um não” apresenta uma contradição, pois não *percebe* a perspectiva generalista da questão colocada por **P**. Isso significa que em relação à pergunta específica **B** não estabeleceu *vistas privilegiadas*. **P** faz outra *reformulação* para que **B** possa *perceber* a perspectiva colocada na questão: “Mesmo qualquer quadrilátero que você desenhasse?” “Se perguntassem para você, qual a soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros, você responderia o que? Se alguém te perguntasse isso”. *Percebendo* que a formulação da pergunta dificulta as *vistas privilegiadas* da perspectiva esperada na atividade, **P** muda a estratégia e pergunta qual seria a justificativa. Interpretamos essa mudança de pergunta como uma estratégia para que tanto **B** *reconheça* a perspectiva generalista da pergunta anterior, quanto **P** possa *perceber e reconhecer* a perspectiva de **B**.

A cooperação investigativa entre **P** e **B** avançou e podemos verificar diversos atos dialógicos do Modelo-CI. **P** buscou estabelecer contato com **B**, cooperou a todo o momento com a investigação fazendo perguntas investigativas, desafios e reformulações para que perspectivas fossem percebidas e reconhecidas e **B** não desistiu da investigação.

P demonstrou sua busca em estabelecer contato em diversos momentos, quando deu apoio e incentivo em relação à dificuldade de **B**, com a intenção de estabelecer uma relação respeitosa que não valorizasse o erro; quando repetia as medidas dos ângulos que **B** falava; quando perguntou se as medidas foram exatas; ou quando se esforçou em perceber e reconhecer a perspectiva de **B**. Outrossim, **P** tentou cooperar para que **B** percebesse a perspectiva generalista da atividade reformulando de diferentes formas a pergunta sobre a soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros. Ao fim desse trecho, mudou de estratégia e perguntou como **B** justificaria sua posição. **B**, por sua vez, esteve imbuído em uma investigação desde quando aceitou o convite para realizar a medição dos ângulos.

Além dessa situação, verificamos o mesmo engajamento quando pensou alto ao mudar o tom de voz em sua resposta: — Não à pergunta se a soma das medidas iria se repetir nos quadriláteros planos –, indicando que estava refletindo sobre a questão e, em seguida, quando afirmou que estava tentando pensar em um quadrilátero, cuja soma das medidas dos ângulos internos fosse diferente de 360º.

Apesar disso, não percebeu a perspectiva generalista, pois se contradisse em suas respostas, hora afirmado que a soma das medidas dos ângulos internos era igual para os quadriláteros planos, hora indicando que não era igual para todos os quadriláteros, o que coloca em dúvida se as vistas privilegiadas foram alcançadas.

Para desvelar a perspectiva da atividade, **P** fez desafios quando perguntou se a soma se repetiria em outros quadriláteros ou quando perguntou em qual quadrilátero a soma das medidas dos ângulos internos não era igual a 360º.

Em poucos momentos **B** tentou justificar ou expressar matematicamente o que pensava a respeito da soma das medidas dos ângulos internos. Apesar disso, **P** esteve atento e fazendo perguntas investigativas, que contribuíram tanto para **B** perceber e reconhecer a perspectiva da atividade, quanto para **P** perceber e reconhecer a perspectiva de **B**.

Interpretamos que as vistas privilegiadas ainda não estavam estabelecidas por completo, pois **B** entrou em contradição quando os desafios foram reformulados por **P**. A despeito disso, o terreno para uma investigação estava pronto, pois as posturas de **P** e **B** convergiam para uma interação de respeito mútuo, em que novos convites eram aceitos e a ação investigativa de **B** estava se ampliando, apesar de ainda não dominar todas as ações. Interpretamos que não faltou interesse para **B**, mas sim *expertise* nesse tipo de atividade.

Até esse momento as justificativas que **B** utiliza são características da geometria espaço-gráfica (G1), pois se baseiam em desenhos e medições. A mais, **B** não compreende a generalidade da situação, pois acredita que suas medições valem apenas para o quadrilátero desenhado.

Tabela 16 - EB3

Transcrição	Análise das falas
B- Hum, poderia comprovar medindo os ângulos, ou até mesmo, vendo tipo se depende do quadrilátero. O quadrilátero que não dá exatamente isso. **P**- Certo. **B**- Pode ter alguma mínima diferença. **P**- Certo. E isso que você chama de mínimo assim, o que você está falando de mínima diferença? **B**- Entre trinta graus e entre trinta vírgula um.	Interpretamos que **B** *percebe* uma perspectiva quando diz que “poderia comprovar medindo”. Há, em seguida, uma expressão de *reconhecimento* dessa perspectiva: quando afirma que pode haver uma “mínima diferença”, “entre trinta graus e trinta vírgula um”. Mesmo que imprecisa, essa foi uma tentativa de **B** se expressar, que foi desencadeada pelo *desafio* feito por **P** – “o que você está falando de mínima diferença?”. Além disso, mais um *convite foi aceito* e as *vistas privilegiadas* avançaram, pois **B** sinalizou que iria usar um instrumento para comprovar a referida soma, evidenciando, mais uma vez que *percebeu* que existe um caminho a ser percorrido – o de realizar medições. .
P- Entendi. Tá, então eu vou te mandar um link no bate papo da nossa conversa aqui, ele é um programa que vai permitir a gente investigar um pouquinho mais essa questão da soma dos ângulos internos do quadrilátero. E aí eu vou te mandar o link e a explicação de como que usa ele, tá? Ai você só lê a explicação pra mim. **B**- Beleza. **P**- Você lê a explicação para mim, vou só copiar ele aqui. Vou te mandar aqui a explicação. Já pode ir clicando nele para você já ir vendo como que é, como acontece e aí eu já te mando a explicação. **B**- Beleza.	A maior parte da comunicação não é cooperação investigativa, pois **B** e **P** estavam se alinhando em relação ao uso da ferramenta Google Meet. Mesmo assim, **P** faz um convite ao solicitar que **B** leia em voz alta o enunciado da segunda parte da atividade. **B** por sua vez *aceita o convite* e realiza a leitura. É possível notar que **B** age de maneira investigativa, pois, imediatamente após recebimento do link do *GeoGebra*, movimenta os vértices do quadrilátero mudando a informação sobre a convexidade do quadrilátero, ação essa que fica nítida quando *pensa alto*: “É. Convexo e não convexo”.

P- Você recebeu aí no chat? B- Recebi. **P**- Tá. Você já está acostumado né, as aulas estão sendo todas nas plataformas né? B- É. Convexo e não convexo. **P**- Tá, deixa eu só te pedir uma coisa, porque é importante, esse daí ele facilita além dele poder mexer em um monte de coisa como a gente vai ver, facilita porque você pode compartilhar a sua tela comigo e aí eu consigo ver no que você está mexendo. Você sabe compartilhar a tela? B- Uhum, só preciso ver onde. **P**- É tem um apresentar agora né, dá pra eu ver o que você está... B- Você está vendo? **P**- Sim, estou me vendo até. Aí você pode por o seu nome... Isso, legal. Você pode ler também lá no chat o que está colocado em voz alta para mim? B- Aqui né? **P**- Isso. B [lê a orientação da Atividade] "Juntando os pontos azuis localizados nos vértices dos quadriláteros temos um novo plano, com o mouse é possível formar outros quadriláteros ao lado direito da tela há uma barra preta com casas decimais que deve ser utilizada para localizar o número das casas decimais. Sobre a barra com o mouse ou com a seta de direção do teclado. Além disso, é possível verificar a medida de cada um dos ângulos internos do quadrilátero e sua soma." **P**- Certo. B- **P**, você quer que eu mude para o computador que aí ficaria mais fácil.	

P- Depende, se você achar que é mais fácil para você mexer pode mudar. Não tem problema nenhum. **B**- Beleza, então eu vou entrar novamente na chamada. **P**- Tá, eu vou finalizando aqui, aí você entra, e eu te aguardo, tá bom? **B**- Beleza. **P**- Tá bom.	

A cooperação investigativa entre **P** e **B** se consolida ainda mais, pois a ação investigativa de **B** é mais contundente. Pela primeira vez **B** chega a reconhecer a perspectiva proposta se expressando matematicamente: primeiro **B** percebe uma perspectiva ao propor que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero poderia ser obtida, conforme suas palavras: — Medindo os ângulos −, e o reconhecer, interpretamos, ocorre quando **B** verbaliza o que está acontecendo: — Entre trinta graus e entre trinta vírgula um −, logo após desafio feito por **P**: — O que você está falando de mínima diferença? Tal situação mostra a cooperação entre **B** e **P** na investigação, que avança sobre as bases do Modelo-CI.

Um novo convite é aceito por **B**, que se dispõe a ler a atividade e rapidamente deixa nítido que começa uma investigação ao pensar alto indicando que já está movimentando os vértices do quadrilátero.

Tabela 17 - EB4

Transcrição	Análise das falas
B- Voltei. **P**- Legal. **B**- Você mandou a atividade no chat já? **P**- Ata, achei que você ia pegar ainda o chat, vou te mandar pera. Só compartilha depois a sua tela para eu poder ver o que você está... Aí agora foi. **B**- Beleza. Bom ele está falando que eu podia ir mudando aqui e somando as partes azuis... **P**- Isso. **B**- Assim, por exemplo, aumentando aqui também**.** Para ver a mínima	Ao movimentar os vértices do quadrilátero, como é possível notar pelas falas: "Bom ele está falando que eu podia ir mudando aqui e somando as partes azuis...", "O trapézio estava assim no caso"; ou quando mexe no botão que muda o número de casas decimais: "Assim, por exemplo, aumentando aqui também.", **B** revela que o *convite* para a investigação *foi aceito.* Entendemos a afirmação "Para ver a mínima diferença que eu tinha citado no caso" como uma *avaliação* de sua *posição,* pois há uma verificação de uma afirmação anterior – a respeito da aproximação da soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros – nessa fala.

diferença que eu tinha citado no caso. **P**- Aham, legal. **B**- Então, dá para tornar ela um todo né. **P**- Uhum. **B**- O trapézio estava assim no caso. Figura 40 - Trapézio, segundo **B**  Fonte: Gravação da entrevista com **B**.	Esse argumento tem caraterística perceptivo visual, pois não foi feito nenhum encadeamento lógico dedutivo.
P- E quanto que está dando a soma nesse caso? **B**- Trezentos e sessenta e um. **P**- E se você mexer nessa casa, nesse mesmo quadrilátero aí, deixa ele parado e aí você mexe no botãozinho de casas decimais, o que vai acontecer? **B**- Ele vai aumentado e dando trezentos e sessenta, vai alterando de acordo com as casas decimais. É bem curioso isso porque, sem a casa decimal ele fica trezentos e sessenta e um e com a casa decimal ele está meio que arredondando todas elas. **P**- Uhum. Bom e aí, aquela pergunta qual a soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros, como é que ficaria nesse caso analisando essa atividade no software?	**P** se utiliza de uma pergunta do tipo “o que acontece se...” para *desafiar* **B**: “E se você mexer nessa casa, nesse mesmo quadrilátero aí, deixa ele parado e aí você mexe no botãozinho de casas decimais, o que vai acontecer?”. Tal pergunta induz **B** a refletir sobre a investigação em curso o que pode leva-lo a *reformular* a perspectiva que adotou e defendeu de que “tem um mínimo erro”. **B** se demonstra empolgado com a interação com o *GeoGebra* e expressa um sentimento, ou seja, *pensa alto* quando diz “É bem curioso isso ...”. Entendemos, com isso, que **B** está disposto a realizar a investigação e que a relação entre **B** e **P** é de confiança, caso contrário **B** não expressaria o sentimento em relação à atividade. **B** faz uma *reformulação* trocando a expressão “mínimo erro”, usada anteriormente, para “ele está meio que arredondando todas elas”.

<table>
<tr>
<td>B- Em teoria daria trezentos e sessenta não muito longe disso arredondando, daria aproximadamente trezentos e sessenta e um, mas se você for adicionando as casas decimais ou adicionar tudo, ó com cinco, por exemplo, dá trezentos e cinquenta e nove e aí você vai arredondando e ele se torna trezentos e sessenta.
P- Uhum. E... Pode falar.
B- Também tem como fazer triângulos ... quadriláteros não convexos né?</td>
<td>B reformula, novamente, a perspectiva que reconheceu, ao dizer “Em teoria daria trezentos e sessenta não muito longe disso arredondando, daria aproximadamente trezentos e sessenta e um, mas se você for adicionando as casas decimais ou adicionar tudo, ó com cinco, por exemplo, dá trezentos e cinquenta e nove e aí você vai arredondando e ele se torna trezentos e sessenta.” Entendemos esse argumento com características perceptivo visuais, pois são baseadas nas informações que estão na tela e não necessitam de uma dedução lógica.
Em seguida, B percebe nova perspectiva e se interessa pelos quadriláteros não convexos.</td>
</tr>
<tr>
<td>P- Isso, quando que ele é não convexo?
B- Isso é uma ótima pergunta. Continua dando trezentos e sessenta [muda o tom de voz]. Quando você tenta ligar os lados dele e ele não fica dentro do quadrado, aqui por exemplo eu classificaria. Só pode ser queira ligar o b no beta mais aqui assim ó.

Figura 41- Recorte da gravação, quando B diz “isso é uma ótima pergunta”


Fonte: Gravação da entrevista com B.</td>
<td>P faz um desafio à B em relação à nova perspectiva com a pergunta “...quando que ele é não convexo?”. Nesse sentido, P está questionando o conhecimento de B.
B expressa que aceita o desafio quando verbaliza o sentimento pensando alto: “Isso é uma ótima pergunta”. Logo em seguida reconhece a perspectiva, tentando explicar matematicamente o que define os quadriláteros não convexos – “Quando você tenta ligar os lados dele e ele não fica dentro do quadrado ...”,
A mudança no tom de voz de B indica um pensar alto, pois de certa forma exprime o sentimento de quem está em dúvida e pensando sobre a questão que foi colocada.</td>
</tr>
<tr>
<td>P- Isso, o quadrilátero não convexo é assim ó, a definição né, é qualquer linha, qualquer dois pontos que eu fizer dentro do quadrilátero, traçar um segmento de reta com esses dois pontos, todo segmento de reta tem que estar na parte interna do quadrilátero, e aí quando você liga os vértices e com o segmento de reta e esse segmento de reta não está contido dentro do interior do quadrilátero é uma consequência</td>
<td>Quando P explica o que são os quadriláteros não convexos cria-se uma lacuna no diálogo, porque coube a P apresentar o conceito correto e a B compreender o que era apresentado. Mesmo com essa interrupção na investigação, P valoriza o que foi dito por B ao não dar centralidade à imprecisão da explicação de B: “é uma consequência dessa definição, ou seja, o que você disse está certo tá,...”. Nessa fala, P continua o estabelecer contato, pois dá apoio e tenta trazer confiança a B.
A cooperação investigativa continua logo em</td>
</tr>
</table>

dessa definição, ou seja, o que você disse está certo tá, é isso mesmo, quando você tenta ligar os lados, se não está tudo dentro do quadrilátero é por que ele é não convexo. Tá bem! E você acha que se você montasse esses quadriláteros, de alguma maneira aí, você conseguiria chegar a alguma outra conclusão sobre... A respeito da soma das medidas do quadrilátero, dos ângulos internos do quadrilátero, desculpa? **B**- Acho que todos eles têm aproximadamente trezentos e sessenta e isso não muda. **P**- Certo, e por que você acha que dá aproximadamente e não exatamente trezentos e sessenta? **B**- Porque, por causa das casas decimais. Por exemplo, se for trezentos e cinquenta e nove e você adicionar uma fica trezentos e sessenta. **P**- Uhum. **B**- Eles arredondam todas as casas decimais**.**	seguida, quando **P** faz o *desafio* na forma de pergunta "O que acontece se...": "E você acha que se você montasse esses quadriláteros, de alguma maneira aí, você conseguiria chegar a alguma outra conclusão sobre... A respeito da soma das medidas do quadrilátero, dos ângulos internos do quadrilátero, desculpa?". **B** responde colocando novamente a perspectiva que anteriormente *percebeu* e *reconheceu*: *"*Acho que todos eles têm aproximadamente trezentos e sessenta e isso não muda.". Em seguida, **P**, com um *desafio* que questiona a perspectiva que lhe foi apresentada – "por que você acha que dá aproximadamente e não exatamente trezentos e sessenta?" – tenta direcionar **B** para uma reflexão que o permita fazer alguma *reformulação* nos argumentos que elaborou. **B** não avança em sua argumentação, pois *se posiciona* defendendo seu ponto de vista da mesma forma – "Porque, por causa das casas decimais. Por exemplo, se for trezentos e cinquenta e nove e você adicionar uma fica trezentos e sessenta" – e em seguida faz uma *reformulação* equivalente à usada em momentos anteriores: "Eles arredondam todas as casas decimais".
P- Mas quando, você já tinha aprendido isso na escola com o professor? Sobre a soma dos ângulos internos. **B**- No sexto ano eu aprendi isso. **P**- E ele falava que dava quanto? O professor. **B**- Trezentos... Aproximadamente trezentos e sessenta. **P**- Ele falava aproximadamente mesmo? **B**- Isso. **P**- Tá, entendi. Certo, então quer dizer é... Eu tenho um roteirinho aqui de perguntas, tá?, para te fazer. **B**- Não tem problema.	**P** quer *reconhecer* como **B** está relacionando o conhecimento que já tem sobre quadriláteros planos com a perspectiva que está adotando na investigação e por isso pergunta: "você já tinha aprendido isso na escola com o professor?".

P- Tá, tudo bem. Última pergunta a respeito então, por que você acha que alterando as casas decimais a medida, a soma das medidas dos ângulos internos muda? **B**- Porque as casas decimais você vai somando, por exemplo, no beta pode não ser sessenta e dois, pode ser sessenta e um vírgula seis e ali está arredondado para sessenta e dois. **P**- Uhum. **B**- E ali, do mesmo jeito dá trezentos e sessenta, mas poderia não dar. Por exemplo, aqui dá trezentos e sessenta vírgula zero, zero, um, porque aqui já não se soma exatamente trezentos e sessenta e as casas. **P**- Ok. Tá, então essa pergunta eu vou te fazer algumas vezes tá? Para você responder, qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero? **B**- Aproximadamente trezentos e sessenta.	**P** questiona o conhecimento de **B** com o *desafio* "... por que você acha que alterando as casas decimais a medida, a soma das medidas dos ângulos internos muda?", mas **B** não avança sobre aquilo que já havia *reconhecido*, apesar de *reformular* algumas vezes sua posição: "Porque as casas decimais você vai somando, por exemplo, no beta pode não ser sessenta e dois, pode ser sessenta e um vírgula seis e ali está arredondado para sessenta e dois", "E ali, do mesmo jeito dá trezentos e sessenta, mas poderia não dar.".
P- Ok. Então tá bem. Então é... se você quiser mexer mais aí fica tranquilo, pode ir pensando aí, se quiser brincar, ver o que acontece e aí você vai me falando o que você está pensando. **B**- Ok. [tempo de silêncio - **B** mexendo no software] **B**- Eu não conheço mais nenhum quadrilátero não convexo a não ser esse daqui ó, essa forma aqui, eu não conheço.	**B** retoma a perspectiva dos quadriláteros não convexos – "Eu não conheço mais nenhum quadrilátero não convexo a não ser esse daqui ó, essa forma aqui, eu não conheço." – e vai investigar a soma das medidas dos ângulos internos em um quadrilátero não convexo – "Ah não dá não. Eu estou tentando aqui alterar várias vezes, mas até mesmo os não convexos dão trezentos e sessenta... Aproximadamente.". Quando **P** fala que os quadriláteros não convexos não são estudados na escola, há mais uma vez uma interrupção na cooperação investigativa, pois **P** faz uma afirmação que no contexto não pode ser investigada: "Porque em geral a gente não estuda mesmo os não convexos".

Figura 42 - Único quadrilátero não convexo que **B** afirma conhecer

Fonte: Gravação da entrevista com **B**.

P- Você não conhece essa forma de quadrilátero, é isso que você está me falando?
B- Isso. Esse é o único não convexo que tipo eu me recordo de ter aprendido, mais nenhum deles.
P- Entendi. Porque em geral a gente não estuda mesmo os não convexos né, o professor fala que eles existem, mas não explica qual que é a questão por ele ser não convexo e aí não estuda né, tanto que eles não têm nem nomes específicos como os convexos né, você vê que tem quadrado, retângulo, losango e todos que você citou já anteriormente e os não convexos não tem nome né. É só não convexo, todos são não convexos.
[tempo de silêncio - **B** mexendo no software]
B- Ah não dá não**.** Eu estou tentando aqui alterar várias vezes, mas até mesmo os não convexos dão trezentos e sessenta... Aproximadamente.
P- Aham.
[tempo de silêncio]
P- Certo, você quer perguntar mais alguma coisa?
B- Acho que não.

A partir das análises da transcrição contida na Tabela 17 - EB4, entendemos que a cooperação investigativa entre **P** e **B** se consolidou e a postura investigativa de **B** dominou suas ações. O interesse de **B** pela investigação fica evidente quando aceita o convite para realizar a atividade (quando movimentou os vértices do quadrilátero, e quando pensa alto: — É bem curioso isso... –, expressando seu sentimento a respeito da mudança no valor das medidas e da soma em questão). Em outras palavras, **B** se abre à investigação e se sente confiante a ponto de expressar um sentimento, o que mostra que o estabelecer contato está fixado.

Além disso, é possível verificar que **B** reformulou sua posição a respeito da soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero ao trocar a expressão mínima diferença por arredondando. Entendemos que **B** passou da verbalização da diferença dos valores, que apareciam na tela, para a interpretação dessa diferença usando o conceito de arredondamento, indicando uma mudança qualitativa em sua argumentação.

Quando **B** questiona sobre os quadriláteros não convexos concluímos que a atividade possibilita que outra perspectiva seja percebida, e reforçamos nossa ideia que a postura investigativa domina as ações de **B**, porque se mostrou interessado em continuar a investigação por outra perspectiva.

Nesse contexto, em dois momentos a interação entre **P** e **B** deixa de ser uma cooperação investigativa e assume uma prática comum ao paradigma do exercício, a saber, primeiro, quando **P** apresenta a definição de quadrilátero não convexo e, depois, quando afirma que esses quadriláteros não são estudados no ensino básico. Em ambos os casos, não há investigação e a comunicação ficou centrada em **P** que exerceu a autoridade didática para dizer o que é correto a respeito da perspectiva levantada.

Mesmo assim, a atenção de **B** é ativa, pois a cooperação investigativa foi retomada logo em seguida a essas interrupções; no primeiro caso, depois de desafio feito por **P**, **B** posiciona-se dizendo: — ...por causa das casas decimais; por exemplo, se for 359 (trezentos e cinquenta e nove) e você adicionar uma, fica 360 (trezentos e sessenta). No segundo caso, com **B** verificando que a soma das medidas dos ângulos internos é aproximadamente 360 (trezentos e sessenta) no caso dos quadriláteros não convexos.

Igualmente, há um desvelo de **P** nas duas situações, pois não apresenta a definição de quadriláteros não convexos com foco na imprecisão da explicação de **B** e fala de maneira sutil que o fato de **B** não conhecer os quadriláteros não convexos é responsabilidade de escolhas feitas por outrem. Dessa forma, **P** procura passar confiança para **B** não ter receio de errar e de colocar suas dúvidas, pois caso fosse corrigido poderia se constranger, o que, consequentemente, poderia limitar a ação investigativa, e dessa forma **P** reforça o estabelecer contato.

Interpretamos como positivas essas duas interrupções da cooperação investigativa, pois, além de não frearem por completo o processo de investigação, clarificaram perspectivas colocadas por **B** que, no contexto da atividade, não tinham possibilidade de serem investigadas, ou seja, a limitação de tempo na realização da entrevista (ou de uma aula, caso essa atividade venha a ser aplicada por um professor em sala) impede que todas as perspectivas de uma investigação sejam exploradas e cabe ao professor, de forma acolhedora, sem perder o estabelecer contato, conduzir uma interrupção na investigação com um objetivo claro, o de direcionar a investigação para a(s) perspectiva(s) que se refere(m) ao objeto principal de estudo.

B se mostrou convicto na perspectiva de um valor aproximado da soma em questão, o que poderia indicar uma ruptura em sua ação investigativa, no entanto não foi isso que ocorreu, pois mesmo após **P** deixar **B** à vontade para fazer perguntas, **B** retoma a perspectiva dos quadriláteros não convexos: — Eu não conheço mais nenhum quadrilátero não convexo, a não ser esse daqui ó; essa forma aqui, eu não conheço.

Dois pontos importantes que devem ser destacados são a respeito do que **B** chama de trapézio (Figura 40) e de único quadrilátero não convexo que conhece (Figura 41). No caso do trapézio, **B** o reconhece sem apresentar alguma propriedade do quadrilátero, o que significa que a afirmação decorreu da percepção visual e não de um argumento lógico dedutivo. No caso do quadrilátero não convexo, **B** não o reconhece como um representante dos quadriláteros não convexos planos, pois seu repertório a respeito desse tipo de polígonos é restrito, como podemos notar quando fala: — Esse é o único não convexo que, tipo, eu me recordo de ter aprendido, mais nenhum deles.

Por fim, quando **B** afirma que aprendeu com professores que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero plano é aproximadamente 360, interpretamos, por um lado, o papel da ideologia da certeza (que, entre outras características, atribui às tecnologias a capacidade de encontrar as melhores soluções para os problemas) e, por outro, o papel de confiabilidade do professor, que faz com que **B** acredite que, os ensinamentos do professor, são iguais ao que percebe e reconhece no *GeoGebra*. Em outras palavras, não poderia o professor, com toda sua credibilidade, ensinar diferente daquilo que **B** percebe como irrefutável por estar contido em uma tecnologia.

Tabela 18 - EB5

Transcrição	Análise das falas
P- Tá, está bem. Então olha só, uma das formas, é ... Então, veja, a gente utilizou aí esses dois tipos de procedimentos para pensar aí sobre essas regularidades do, no caso, você apontou algumas regularidades lá no desenho sobre lados paralelos e aqui a gente foi estudar os ângulos. Para justificar, uma das justificativas/ demonstração da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero, a gente utiliza triângulos para justificar, então é interessante que a gente estude triângulos também, para poder justificar aí os quadriláteros. Aí, eu te pergunto, qual estratégia você quer utilizar para estudar os triângulos? **B**- Os triângulos? **P**- Isso. **B**- Poderia dividir um quadrado ao meio, a diagonal dele, o triângulo é sempre a diagonal do quadrado.	**P** faz um novo convite quando propõe estudar os triângulos para justificar a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero por meio do *desafio* que visa esclarecer uma perspectiva de investigação: "Aí eu te pergunto, qual estratégia você quer utilizar para estudar os triângulos?". Interpretamos que **B** *aceita o convite*, pois responde ao *desafio* apontando a perspectiva que *percebeu* – "Poderia dividir um quadrado ao meio, a diagonal dele, o triângulo é sempre a diagonal do quadrado.".
P- Uhum. **B**- Triângulo retângulo. **P**- Certo, e como é que você faria aí nesse desenho para estudar, você acha que dá para estudar aí ele? **B**- Como? **P**- Você conseguiria nessa plataforma estudar o triângulo do jeito que você desenhou agora? **B**- Não, porque ele não é um quadrilátero. [Aparece na tela da informação que não é um quadrilátero] **P**- É, isso. O que eu quero te dizer é que você pode tentar me explicar melhor, a gente analisou de duas formas o quadrilátero, uma no papel	As *vistas privilegiadas* da perspectiva do novo convite estão em negociação, **B** e **P** não *percebem* a perspectiva um do outro como podemos interpretar quando **P** *reformula* o *convite*: "O que eu quero te dizer é que você pode tentar me explicar melhor ... Você conseguiria nessa plataforma estudar o triângulo do jeito que você desenhou agora?"; e **B** se *posiciona* em uma perspectiva diferente da esperada respondendo "Não, porque ele não é um quadrilátero". Nessa interação, enquanto **P** fala sobre o GeoGebra como uma ferramenta para investigação, **B** fala sobre a atividade em específico e não vislumbra outra atividade além da que está interagindo. Apesar disso, o interesse mútuo e a sintonia entre as partes envolvidas, isto é, *estabelecer*

com o transferidor e a outra no software. Qual estratégia você acha que é mais adequada para a gente estudar os triângulos? **B**- Os triângulos eu acho que no papel. **P**- No papel. Por que você acha no papel? **B**- Acho que no papel tem ideia de Pitágoras dá pra tá usando bastante. **P**- E a gente estudaria a soma dos ângulos, tá? Tudo bem? **B**- Isso, aham.	*contato* entre ambos não se perdeu, pois **P** *reformula* novamente o *convite* "Qual estratégia você acha que é mais adequada para a gente estudar os triângulos?". A resposta de **B** – "Os triângulos eu acho que no papel" – indica que a perspectiva esperada foi *percebida*. Há uma surpresa de **P** com a escolha que **B** realizou expressa em *pensar alto*: "No papel.". Seguida de um *desafio* "Por que você acha no papel?", que é respondido com referência mais uma vez ao triângulo retângulo "Acho que no papel tem ideia de Pitágoras dá pra tá usando bastante.". A resposta um tanto vaga de **B** pode ser interpretada como uma abertura para investigação, pois o mesmo ainda não *reconheceu* a perspectiva que aponta.
P- Então eu vou te passar aqui uma outra atividade pelo chat, ela é bem parecida com a primeira que a gente fez, só que aí a gente vai pensar no caso dos triângulos. **B**- Ok. Eu abro a apresentação? **P**- Isso, você pode ... como você vai mexer no papel eu vou pedir para você virar um pouquinho o... Mandei aí, no seu *WhatsApp*, você acha que fica fácil no *WhatsApp* ou você prefere aqui no chat? **B**- Por mim tanto faz, pode ser no WhatsApp. **P**- Tá, te mandei no *WhatsApp* aí a atividade três. **B** [lê a orientação da Atividade] **"**Outras maneiras de justificar a soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros e dos triângulos; vamos pegar o papel para estudar essa figura. Em cada um dos quadrados abaixo tem um triângulo disponível para verificar algumas regularidades." Vou arrumar a câmera. **B**- Tá enxergando agora? **P**- Tá, isso, só mais um pouquinho	**P** e **B** se alinhando para a realização da Atividade três.

... tá legal agora.	
B- [participante fazendo desenho de triângulos] Tem um triângulo equilátero. **P**- Você baixa só mais um pouquinho porque eu estou vendo só metade da folha essa parte de cima eu não consigo ver. Tá legal, tá certo.	**B** está agindo em resposta ao convite realizado pela atividade o que significa que *aceitou o convite* para investigar os triângulos.
B- Triângulo equilátero, triângulo retângulo ... esse triângulo aqui é um triângulo losango?	**B** *pensando alto*, pois falou em voz alta o que estava desenhando e em seguida colocou uma dúvida.
P- Não, deixa eu ver, puxa um pouquinho mais para o canto a folha que eu não o vejo inteiro. Hum, como é que você me perguntou? **B**- O triângulo retângulo também é um triangulo equilátero? **P**- O que significa um triângulo equilátero? **B**- O triângulo equilátero tem os três lados iguais. **P**- Isso, é. Aí não é equilátero nesse caso. **B**- Eu não sei o nome desse aqui não. **P**- Então, o que você teria que verificar nele para você saber dar um nome nele? O que a gente verifica nos triângulos para dar os nomes para eles? **B**- Os ângulos e os lados. **P**- Os ângulos e os lados, esse triângulo aí que você está desenhando agora como que é a medida dos lados dele? **B**- Eu estou na dúvida desse triângulo aqui. As medidas dos lados você diz a medida em centímetros ou... **P**- Isso...ou? qual a outra opção que você falou? **B**- Medida em centímetros que eu	As dúvidas que **B** apresenta relacionadas à classificação dos triângulos – "**B**- O triângulo retângulo também é um triangulo equilátero? **P**- O que significa um triângulo equilátero? **B**- O triângulo equilátero tem os três lados iguais. **P**- Isso, é. Aí não é equilátero nesse caso. [...] **P**- Então eu posso ter um triângulo que é retângulo e que tem dois lados iguais, ou seja, ele é retângulo isóscele, né, tem essa opção também" – abrem outra perspectiva de investigação. No entanto, interpretamos a interação entre **P** e **B** que seguiu a partir dessas dúvidas como um *jogo de perguntas*, por que o papel de **B** foi responder corretamente aquilo que era perguntado por **P**. Mesmo assim, **B** se sentiu à vontade para colocar suas dúvidas, por exemplo quando fala "Eu estou na dúvida desse triângulo aqui" e para prosseguir com sua postura investigativa como identificamos quando fala "Vou desenhar para ficar mais claro também." ou "Vou desenhar outra base. Então o triângulo isóscele tem dois lados iguais [participante fazendo o desenho]. É o triângulo equilátero, triângulo retângulo, isósceles, faltou um...". O fato de **B** sentir-se a vontade para colocar sua dúvida mostra que o *estabelecer contato* está consolidado.

falei. Se era isso? **P**- Isso. Quando eu digo a medida dos lados e digo a medida em centímetros. **B**- Na base ele tem seis, lado maior ele tem cinco e lado menor ele tem dois. **P**- Certo, então veja só esse triângulo tem os três lados diferentes né? **B**- Isso. **P**- Ele chama-se escaleno. **B**- Triângulo escaleno. **P**- Isso, quando tem os três lados diferentes, tem um outro triângulo que tem dois lados iguais, você lembra? **B**- Dois lados iguais? **P**- É. **B**- É o triângulo retângulo? É esse? **P**- Não, quando eu digo medida de lado aí eu dou o nome, nesse caso dois lados iguais é o isósceles. O triângulo retângulo ele pode ser isósceles, mas o triângulo retângulo o nome é retângulo por conta do ângulo. **B**- Aham. **P**- Então eu posso ter um triângulo que é retângulo e que tem dois lados iguais, ou seja, ele é retângulo isósceles né, tem essa opção também. **B**- Aham. **P**- Assim, só comentei porque você perguntou né você não precisa necessariamente desenha-lo se não quiser. **B**- Sim. Vou desenhar para ficar mais claro também. **P**- Tá. **B**- Vou desenhar outra base. Então o triângulo isósceles tem dois lados iguais [participante fazendo o	

desenho]. É o triângulo equilátero, triângulo retângulo, isósceles, faltou um... **P**- Escaleno. **B**- Escaleno.	
P- Escaleno, isso. Quando tem os três lados diferentes, de medidas diferentes. Tá, e o que você, o que é importante você observar aí, é, tem mais alguma coisa que é importante você observar nesses triângulos? **B**- Sobre igual eu fiz com os quadriláteros? **P**- É. **B**- Que todos, a soma dos triângulos dá aproximadamente cento e oitenta, a soma dos ângulos dos triângulos. **P**- Certo, se você medisse esses daí ia dar aproximadamente cento e oitenta também? **B**- Isso. **P**- Você tem certeza disso? **B**- A maioria das atividades que eu fiz até hoje era isso. **P**- Era isso, está certo. **B**- To medindo triângulo equilátero os lados estão dando sessenta graus. **P**- Deu exatamente sessenta ou deu perto de sessenta? **B**- Exatamente sessenta. **P**- Tá, ok. **B**- O triângulo retângulo, um deles como o próprio nome diz tem noventa graus. **P**- Você está medindo noventa aí quando você põe o transferidor? **B**- Isso. **P**- Tá. **B**- Outro deles tem aproximadamente trinta graus. **P**- Aproximadamente, tá. **B**- Está dando em média vinte e sete graus. **P**- Então um tem noventa, outro	**P** faz uma pergunta para **B** *perceber* a perspectiva esperada: "tem mais alguma coisa que é importante você observar nesses triângulos?". **B** *posiciona-se* apresentando uma perspectiva: "Que todos, a soma dos triângulos dá aproximadamente cento e oitenta, a soma dos ângulos dos triângulos." Para *reconhecer* a perspectiva de **B**, **P** *reformula* seu *desafio*: "Certo, se você medisse esses daí ia dar aproximadamente cento e oitenta também?". E em seguida *desafia* novamente, "Você tem certeza disso?". O *posicionamento* de **B** – "A maioria das atividades que eu fiz até hoje era isso." – nos leva à interpretação que ele está buscando informações em seu repertório bem como na investigação que está fazendo. Isso também pode ser identificado quando afirma que "To medindo triângulo equilátero os lados estão dando sessenta graus ... Exatamente sessenta", pois desenhar um triângulo equilátero não é uma tarefa trivial de ser realizada apenas com régua e transferidor, o que nos deixa a dúvida se realmente desenhou um triângulo equilátero ou se essa informação estava em seu repertório. O mesmo ocorre em relação ao ângulo de noventa graus: "**B**- O triângulo retângulo, um deles como o próprio nome diz tem noventa graus" **P**- Você está medindo noventa aí quando você põe o transferidor? **B**- Isso". A todo momento **B** e **P** interagem mostrando que *estabeleceram conato* e **B** está agindo sobre os desenhos, o que demonstra que a ação investigativa domina sua conduta.

vinte e sete. **B**- Por fim o último tem ... [**B** medindo os ângulos] ... aproximadamente cinquenta e cinco graus. **P**- Cinquenta e cinco. **B**- Aproximadamente.	
P- E aí está dando quanto essa soma então? Vinte e sete mais noventa mais cinquenta e cinco. **B**- Cento e setenta e dois. **P**- Isso, cento e setenta e dois né. O que você achou dessa diferença? Porque você tinha falado que dava aproximadamente cento e oitenta né, o que você achou dessa diferença? **B**- Ou eu estou errado, ou o meu argumento foi errado. **P**- Entendi, o que você acha, que você mediu ou é o argumento? Qual você apostaria mais fichas aí? **B**- Medir. **P**- Tá, e os outros aí, você acha que dá o mesmo problema ou não? Os outros triângulos. **B**- To medindo. **P**- Tá. **B**- Está dando... Vamos ver.[participante fazendo as medidas] O escaleno deu exatamente cento e oitenta. **P**- Deu exatamente cento e oitenta?. **B**- Isso. Agora vou fazer o isósceles. [participante fazendo as medidas] O isósceles também deu dois ângulos iguais, que dão trinta e o outro cento e vinte, o que da exatamente cento e oitenta. **P**- Certo, beleza. E deu exatamente trinta quando você mediu no transferidor, né? **B**- Isso. **P**- Bom, voltando aquele que deu cento e setenta e dois, é, você falou	As perspectivas que orientam o *diálogo* referem-se à soma das medidas dos ângulos, seja do triângulo ou do quadrilátero, ter valor exato ou aproximado a cento e oitenta graus. Nesse sentido, **P** faz perguntas de cunho investigativo *desafiando* **B**: “O que você achou dessa diferença?”, “o que você acha, que você mediu ou é o argumento?”, “os outros aí, você acha que dá o mesmo problema ou não?”, “E deu exatamente trinta quando você mediu no transferidor, né?”, “Se você tivesse desenhado outros triângulos o que aconteceria com a soma das medidas dos ângulos internos?”, “Por que dá cento e oitenta?” **B** *posiciona-se* e *reconhece* em favor do valor aproximado, no entanto deixa indícios de estar sempre recorrendo ao conhecimento que tem em seu repertório como identificamos na fala “O isósceles também deu dois ângulos iguais, que dão trinta”, pois sabemos que desenhar um triângulo isósceles apenas com régua e transferidor não é tarefa trivial o que nos deixa em dúvida se as medidas foram realmente iguais ou se ele usou a propriedade do triângulo para construí-lo e fazer tal afirmação.

assim que, vou utilizar as suas palavras né, que o erro seria no argumento ou na medida né? **B**- Aham. **P**- Quer dizer, então se a gente conseguisse tirar então todos os erros das medidas, todos os erros não, qualquer tipo de dificuldade na medida a gente provavelmente chegaria a que valor de soma? **B**- Cento e oitenta. **P**- Cento e oitenta? **B**- Isso. **P**- Se outros triângulos fossem desenhados você acha que aconteceria o mesmo? **B**- Se eu falar que medi agora e deu cento e oitenta. **P**- Cento e oitenta? **B**- É.	
P- Se você tivesse desenhado outros triângulos o que aconteceria com a soma das medidas dos ângulos internos? **B**- Daria cento e oitenta. **P**- Por que dá cento e oitenta? **B**- Porque a soma de um quadrilátero é trezentos e sessenta e o triângulo é basicamente a metade de um quadrilátero, dando cento e oitenta. **P**- A tá, legal. Tudo bem e essa é a justificativa, ok. Então você acredita que a soma dos ângulos internos dá cento e oitenta, aproximadamente cento e oitenta? **B**- Isso, aproximadamente. **P**- Aproximadamente. **B**- Isso, igual ao outro, com as casas decimais pode alterar.	Há uma confusão que persiste desde a atividade com quadriláteros em relação aos reiterados *desafios* e perguntas que **P** faz para *perceber* a perspectiva de **B**: em alguns momentos **B** afirma que a soma é igual a cento e oitenta graus e quando questionado se o valor é exato ou aproximado responde afirmando que é aproximado. Identificamos que essa confusão ocorre, devido a **B** não *perceber* a equivalência entre as palavras igual e exata no contexto da atividade. Vale destacar que novamente **B** refere-se ao triângulo como uma forma matemática obtida a partir do quadrilátero quando *posiciona-se*: “Porque a soma de um quadrilátero é trezentos e sessenta e o triângulo é basicamente a metade de um quadrilátero, dando cento e oitenta”.

O ato dialógico estabelecer contato tem papel fundamental na manutenção da cooperação investigativa, o interesse mútuo e o acolhimento das dúvidas e das posições equivocadas sem a valorização do erro estão contidos em toda a comunicação entre **P** e **B**. Por exemplo, quando **B** encontrou as medidas de sessenta graus nos ângulos de um triângulo que possivelmente não foi construído por construção geométrica, mas sim com base nas medidas dos lados ou quando fala que o triângulo é obtido a partir da diagonal do quadrado, trazem à tona perspectivas que não correspondem adequadamente aos conceitos a que se referem. Era importante que **P** percebesse e reconhecesse essas perspectivas para que pudesse direcionar **B** sem que houvesse um desestímulo das ações do participante, ou seja, que o estabelecer contato não fosse perdido. Por isso, **P** reformulou perguntas e fez desafios para direcionar a investigação para a perspectiva correta. Algumas vezes recorreu ao jogo de perguntas para esclarecer perspectivas pertinentes, mas que desviariam o foco da investigação principal se fossem exploradas.

Além disso, **B** aceitou os convites assim que foram colocados, notadamente por agir sobre a atividade e pelo seu interesse em perceber, reconhecer e posicionar-se diante das questões colocadas. Por outro lado, **P** manteve-se atento a tudo o que acontecia para cooperar com **B**. Em especial, quando o convite foi aceito foi necessária uma negociação dos significados para que a perspectiva correta fosse percebida e posteriormente reconhecida. Por exemplo, quando **B** não percebeu que uma nova atividade deveria ser realizada para o estudo dos triângulos e acreditou que na atividade dos quadriláteros poderia movimentar os vértices para formar triângulos e estudá-los.

Outra característica importante para a caracterização de Cenários para Investigação é a pergunta de caráter aberto na realização da atividade. Essa abertura possibilitou em diversos momentos que **B** encontrasse outras perspectivas, que poderiam ser exploradas de maneira investigativa. Como o tempo é limitado **P** direcionou essas perspectivas de maneira próxima ao jogo de perguntas, quando o professor apresenta os conceitos e o estudante esforça-se para apreendê-lo. No entanto, essa quebra no diálogo não foi suficiente para dispersão da cooperação investigativa, pois em momentos seguintes a ação investigativa e o diálogo voltaram a dominar as ações e a comunicação entre as partes. Na verdade, esses momentos expressam a quão fixada estava a cooperação investigativa, pois apesar de não serem um diálogo serviram para que uma perspectiva apresentada por **B** fosse esclarecida ao mesmo tempo em que **B** se demostrava aberto à investigação, pois suas ações foram dominadas por um interesse genuíno em encontrar respostas (perceber perspectivas) às questões colocadas analisando, medindo, perguntando, e ao interagir com **P,** sentiu-se à vontade para colocar suas dúvidas.

Importante analisarmos os significados da fala de **B**: — Poderia dividir um quadrado ao meio, a diagonal dele, o triângulo é sempre a diagonal do quadrado. Uma hipótese dessa perspectiva apresentada é que ele se equivocou e quis se referir não à diagonal como um triângulo, mas sim às regiões triangulares formadas a partir da região quadrangular quando é traçada uma diagonal do quadrado. Por outro lado, o triângulo, para ele não é um objeto matemático em si, pois é construído a partir de um quadrado. Outro detalhe, **B** pensa no triângulo retângulo, apesar de ter investigado uma infinidade de quadriláteros que, segundo a hipótese levantada, poderiam formar representantes genéricos das regiões triangulares planas. Para nós, a perspectiva que **B** percebeu poderia ser explorada de maneira investigativa e foram externadas devido à pergunta de caráter aberto feito por **P**: — Qual estratégia você quer utilizar para estudar os triângulos?

Tabela 19 - EB6

Transcrição	Análise das falas
P- Tá, então vamos ver naquele software o triângulo, que aí a gente pode ... Ele tem algumas vantagens né o software.	**P** faz um novo convite, agora para investigar a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo pelo GeoGebra.
B- Tá. Dá para ver exatamente a medida. **P**- Isso. Você acha que lá você consegue ver a medida exata? **B**- Exata acho que sim, pela internet. Compartilho a tela novamente? **P**- Isso, por favor. Só para ver o que você está fazendo**.** A brincadeira é a mesma, você pode mexer lá nos vértices, tem os botões das casas decimais**,** você vai ver a soma né. **B**- Arredonda todos para sessenta, posso por as casas decimais que aí já vai alterando, já. É a mesma coisa dos quadriláteros ele dá cento e setenta e nove por estar arredondando, mas se você colocar uma casa decimal já dá cento e oitenta. O alfa beta (inaudível). **P**- Você continua mantendo a sua	Quando **B** diz: "Tá. Dá para ver exatamente a medida"; ou quando descreve que está acontecendo quando interage com o software: "Arredonda todos para sessenta, posso por as casas decimais que aí já vai alterando, já. É a mesma coisa dos quadriláteros ele de cento e setenta e nove por estar arredondando, mas se você colocar uma casa decimal já dá cento e oitenta. O alfa beta (inaudível)."; ou quando diz: "Esse é o escaleno. Esse o isósceles."; entendemos que *aceitou o convite*, pois essas falas representam que **B** age sobre a atividade. **B** não *percebeu* nem *reconheceu* a perspectiva da atividade, pois em certo momento afirma: "Aproximadamente. Por conta das casas decimais, pelos números serem infinitos, pode dar com final nove, nove, nove ou até mesmo cento e oitenta vírgula zero um. Então, aproximadamente cento e oitenta.". Como podemos observar, **B** *reconheceu* de

resposta à pergunta qual é a soma da medida dos ângulos internos de um triângulo? **B**- Continuo. **P**- Você pode repetir para mim quanto que é essa soma? **B**- A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é cento e oitenta. **P**- Certo, exatamente cento e oitenta? **B**- Aproximadamente. Por conta das casas decimais, pelos números serem infinitos, pode dar com final nove, nove, nove ou até mesmo cento e oitenta vírgula zero um. Então, aproximadamente cento e oitenta.	forma equivocada o que estava se apresentando na tela ao afirmar que as aproximações ocorriam porque os números são infinitos. Isso indica que ele não *percebeu* que aproximação se dá porque o software funciona por aproximações.
P- Certo, você lembra como é que você aprendeu na escola, se o seu professor ensinou isso para você? **B**- Foi como eu disse, a gente tinha que fazer primeiro o quadrado quadrilátero e logo após isso a professora falava para dividir no meio um retângulo e um quadrado. E ai falava isso daqui é um triângulo, sempre vai dar metade, quando aprendemos sobre ângulos internos e essas coisas.	**P** busca *perceber* e *reconhecer* qual a perspectiva geral que **B** tem em seu repertório a respeito da investigação que está sendo realizada e pergunta sobre o que havia aprendido sobre o tema em suas aulas na escola. **B** afirma que aprendeu que o triângulo é obtido a partir da região triangular formada na região quadrangular ao se traçar a diagonal do retângulo. Tal afirmação mostra que a compreensão que **B** tem de triângulos apresenta lacunas.
P- Entendi. Bem, você quer, pode mexer aí, isso aí dá para brincar, você ver se confirma mesmo o que você falou, veja aí o que você quer fazer, é com você. **B**- Esse é o escaleno. [**B** mexendo no software] Esse o isósceles. **P**- Por que você chamou aquele de escaleno e esse de isósceles? O que você observou para chegar nessa conclusão? **B**- To deixando o máximo os lados deles iguais.	**P** procura *perceber* e *reconhecer* a perspectiva de **B** em relação à construção geométrica dos objetos matemáticos: “Por que você chamou aquele de escaleno e esse de isósceles? O que você observou para chegar nessa conclusão?”. **B** responde “To deixando o máximo os lados deles iguais.”. Interpretamos que **B** se baseia na percepção visual para obter objeto geométrico e não em uma argumentação lógico dedutiva.

B [mexendo no *software*] - Outra pergunta, quando você mexe em um ângulo todos se alteram né? **P**- Porque como os lados são comuns dos ângulos, se você pegar esse ângulo aí que é do vértice A, os lados dele são comuns com o vértice B e com o vértice C, então quando você mexer nele obrigatoriamente vai mexer no lado de outro ângulo, não tem como não mexer mesmo. **B**- É. **P**- Talvez, é, teria na verdade, se você deixasse ele, se tivesse uma linha, poderia ter colocado, mas é a primeira vez que me aparece essa questão que você está colocando e aí daria para você mexer na linha e não iria mexer o ângulo**,** um ângulo porque um dos dois você sempre mexe. **B**- Sim. Mesmo assim é muito difícil não mexer um porque eles estão conectados. **P**- Mas é possível, tá?, se você fixar um ângulo, tem como você não mexer nele, como o *software* é sensível né ele vai acabar mexendo.	Devido à atividade ser de caráter aberto, **B** encontra outra perspectiva de investigação e questiona sobre a mudança das medidas dos ângulos quando um dos vértices do triângulo é movimentando no plano – “Outra pergunta, quando você mexe em um ângulo todos se alteram né?”. Nesse momento, **P** argumenta sobre a questão em forma de esclarecimento sem que haja incentivo à investigação. Apesar dessa quebra na ação investigava e no *diálogo*, o ato dialógico *estabelecer contato* continua, pois tal esclarecimento feito por **P** serviu para acolher uma perspectiva de **B** sem que o foco da investigação principal se perdesse, ou seja, **P** mostrou-se preocupado e atento em relação ao que **B** falava. Essa situação exemplifica o quão difuso pode ser o caminho de atividades caracterizadas em Cenários para Investigação, pois não estava prevista, levando **P** a buscar em seu repertório uma solução. Incialmente **P** comete um equívoco em sua explicação – “então quando você mexer nele obrigatoriamente vai mexer no lado de outro ângulo, não tem como não mexer mesmo.”, mas em seguida corrige o que havia falado – “Talvez, é, teria na verdade, se você deixasse ele, se tivesse uma linha, poderia ter colocado, mas é a primeira vez que me aparece essa questão que você está colocando e aí daria para você mexer na linha e não iria mexer o ângulo**,** um ângulo porque um dos dois você sempre mexe.”.
B- Ele aparece arredondado aqui. Mas se você for mudando as casas decimais muda praticamente todos, agora deu exatamente sessenta graus. Até porque arredondando é praticamente impossível saber. Se você colocar uma casa decimal fica sessenta vírgula três e se eu mudo vai para sessenta vírgula cinco, muda bastante. **P**- Uhum, mas veja, o triângulo é o mesmo, você não mudou esse	Em certo momento **P** faz uma pergunta que poderia ajudar **B** a *reconhecer* a perspectiva da atividade: “a medida dos ângulos do triângulo não mudou, você alterou outra coisa para verificar a medida dos ângulos né. Por que você acha que isso acontece, sendo que a medida é a mesma só que quando eu vou olhar aí tem essa variação?” e **B** responde “É justamente aquele caso de ser aproximadamente porque vai arredondando os ângulos, aqui, por exemplo, não é mais cento e oitenta, agora está cento e setenta e nove vírgula nove, nove, nove e assim

triângulo. **B**- Sim. **P**- Então, ou seja, a medida dos ângulos do triângulo não mudou, você alterou outra coisa para verificar a medida dos ângulos né. Por que você acha que isso acontece, sendo que a medida é a mesma só que quando eu vou olhar aí tem essa variação? **B**- É justamente aquele caso de ser aproximadamente porque vai arredondando os ângulos, aqui, por exemplo, não é mais cento e oitenta, agora está cento e setenta e nove vírgula nove, nove, nove e assim continua, o que é impossível de eu contar. Agora se eu mexer de novo já dá novamente cento e oitenta e assim vai. **P**- Então você mantém sua resposta? **B**- Mantenho. **P**- Então como é que é a sua resposta mesmo? **B**- Os ângulos internos do triângulo dão aproximadamente cento e oitenta graus. **P**- Tá bom. Então agora, bem como que a matemática funciona, as coisas na matemática têm que ser comprovadas tá? Existe um nome para isso que depois eu vou te falar, então eu vou tentar te falar uma comprovação aqui, tá bem? **B**- Tá ok.	continua, o que é impossível de eu contar. Agora se eu mexer de novo já dá novamente cento e oitenta e assim vai." Interpretamos esse trecho do diálogo como **B** *posicionando-se*, novamente, a partir da percepção visual.

Em uma comunicação que o diálogo predominou, ou seja, houve cooperação investigativa, convites foram feitos e aceitos, houve perceber e reconhecer de perspectivas, desafios e ação investigativa foram realizados e o estabelecer contato não se perdeu, uma perspectiva de interesse maior esteve em negociação entre **P** e **B**, o valor exato ou aproximado da soma das medidas dos ângulos dos polígonos estudados.

Nesse sentido, os argumentos utilizados por **B** se basearam na percepção visual, por exemplo, quando disse: — Tô deixando o máximo o lado deles iguais −, ou em um reconhecer confuso que se expressa quando se posiciona no seguinte diálogo: **B**- — A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180 (cento e oitenta), e diz **P**-— Certo, exatamente cento e oitenta?, responde **B-** — Aproximadamente. Por conta das casas decimais, pelos números serem infinitos, pode dar com final nove, nove, nove ou até mesmo cento e oitenta vírgula zero um, então, aproximadamente cento e oitenta.

A confusão ocorre, como analisamos em outro momento do conjunto de atividades, por **B** não perceber a equivalência entre as palavras igual e exata no contexto da atividade.

Por outro lado, esses argumentos podem ser aproveitados na próxima atividade, na qual se espera que, visualmente não exista dúvida que a soma em questão é igual a 180º. Com isso, esperamos que fique exposta a contradição que desejamos, pois parte das atividades mostram a soma com valor igual a 180, e a outra parte, a soma tem valor aproximado, o que possivelmente implicará na necessidade de uma explicação que solucione essa contradição.

Importante ressaltar que mesmo quando diálogo foi quebrado e houve domínio de uma comunicação que não incentivou a ação investigativa, o estabelecer contato não se perdeu, pois essa quebra se fez necessária para que uma perspectiva de **B** (— Outra pergunta, quando você mexe em um ângulo todos se alteram, né?), que surgiu devido ao caráter aberto da atividade, fosse considerada e esclarecida sem que o centro da investigação fosse perdido.

Um fato inédito até então ocorreu no diálogo, devido à abertura da atividade, característica essencial de atividade características de cenários para investigação; **P** se viu diante de um questionamento novo que inicialmente não sabia resolver: — ...É a primeira vez que me aparece essa questão... Chegou a cometer um equívoco em sua argumentação, que foi imediatamente corrigida. Cenários para investigação podem promover situações e questionamentos imprevistos, os quais podem exigir tomadas de decisão e ações não pensadas anteriormente.

Por fim, o diálogo: **P**- — Tá, então vamos ver naquele *software* o triângulo, que aí a gente pode... ele tem algumas vantagens, né, o *software*; **B**- — Dá para ver exatamente a medida; **P**- — Isso, você acha que lá você consegue ver a medida exata?; **B**- — Exata acho que sim, pela internet. Esse diálogo expressa a ideologia da certeza em operação, pois **B** entende que a melhor solução, expressa na ausência de erros da medição, será dada pela internet, quando na verdade sabemos que o *GeoGebra* trabalha com aproximações.

Tabela 20 - EB7

Transcrição	Análise das falas
P- E aí eu também vou te passar um link aí do GeoGebra, pode até deixar a tela compartilhada porque eu vou precisar ver com você. Eu te falei GeoGebra, esse programinha que eu estou usando chama GeoGebra. Ai no final eu te explico **B**- Meu professor usava ele também. **P**- Ah, então, você já está familiarizado. Aí você pode fechar essa tela. Te mandei o *link* aí. Aí se você puder ler o texto que está aí. **B** [lê a descrição da atividade] Os ângulos internos do triângulo foram transportados para o segmento da reta abaixo, quando você movimentar o vértice dos triângulos para formar outros triângulos a medida dos ângulos internos transportados mudam. Ângulos internos transportados beta quarenta e oito vírgula cinquenta e seis, alfa sessenta e nove vírgula cinquenta e sete. E esse cinquenta e nove ponto noventa e dois. **P**- Certo **B**- Os ângulos internos transportados. **P**-Você percebeu, mexe aí como nos outros, os vértices. **B**- É. **P**- Você vai perceber o que acontece. **B**- Muda bastante também. A soma disso vai dá aproximadamente cento e oitenta. Depende de quem eu mexer. **P**- Por que você chega à conclusão	Novamente ocorre um *convite* feito por **P** para uma nova atividade. **B** *aceita convite*, pois interage com **P** a partir das prescrições da atividade. Em decorrência do conjunto de atividades e da pergunta colocada por **P** – "Por que você chega à conclusão que dá cento e oitenta utilizando essa atividade como que você vê que dá aproximadamente cento e oitenta?" – que teve o intuito de direcionar **B** a *reconhecer* a perspectiva esperada, **B** apresenta ambiguidade no que se refere à soma das medidas serem igual ou aproximada a cento e oitenta graus. Na atividade que está realizando nesse momento, *reconhece* pela percepção visual, que a soma é exata, pois visualiza que os ângulos transportados cobrem um ângulo de cento e oitenta graus: "É que pela reta aqui, se você colocar um transferidor exatamente na tela, dá exatamente cento e oitenta pela reta e pelos lados do triângulo formarem meio círculo". No entanto, devido à perspectiva que *reconheceu* e *posicionou-se* nas atividades anteriores acredita que a soma é aproximada, pois apenas duas casas decimais são utilizadas no valor da medida do ângulo: "No caso desse triângulo a soma dele não deu exatamente, mas até agora estamos vendo apenas duas casas decimais, então não tem como saber exatamente." Essa ambiguidade nesse momento é bem-vinda, pois gera a necessidade de uma comprovação que a elimine. **P** faz um *desafio* para, novamente, tentar provocar uma reflexão acerca da perspectiva que **B** defende: "Certo, bem você acha que mudaria isso se mudasse os triângulos, o que você acredita?". Em relação a essa pergunta **B** *posiciona-se* "O triângulo aqui não, desse lado

que dá cento e oitenta utilizando essa atividade como que você vê que dá aproximadamente cento e oitenta? **B**- É que pela reta aqui, se você colocar um transferidor exatamente na tela, dá exatamente cento e oitenta pela reta e pelos lados do triângulo formarem meio círculo. **P**- Certo, certo. Então olhando para esse caso, você acha que dá cento e oitenta aproximadamente ou exatamente? **B**- No caso desse triângulo a soma dele não deu exatamente, mas até agora estamos vendo apenas duas casas decimais, então não tem como saber exatamente. **P**- Uhum, entendi. Mas você não está somando exatamente esses ângulos né, você está vendo só que ele cobre todo o segmento de reta né? **B**- Sim, você somar todos eles e chega em cento e oitenta. **P**- Certo, mas você não chegou a fazer a soma, né? **B**- Eu fiz meio de cabeça e bateu. **P**- Entendi. **B**- Deixa eu ver na folha. [participante fazendo as contas]. Fazendo as contas deu exatamente cento e oitenta. **P**- Certo, bem você acha que mudaria isso se mudasse os triângulos, o que você acredita? **B**- O triângulo aqui não, desse lado do GeoGebra não, por causa das casas decimais como eu tinha dito antes. **P**- Certo, tá bom. É... Você considera que foi feita uma demonstração da soma das medidas dos ângulos internos de um	do *GeoGebra* não, por causa das casas decimais como eu tinha dito antes.” Importante destacar dois pontos: **B** já tem familiaridade com o *GeoGebra*, o que pode ter facilitado sua interação com as atividades; B acreditou que essa atividade comprovou o valor da soma das medidas dos ângulos internos do triângulo, o que indica que é necessário que **B** avance na compreensão do que é uma demonstração.

triângulo? **B**- Eu considero. **P**- É? Você já ouviu falar na palavra demonstração, né? **B**- Isso. **P**- Tá, tá bem. Então vamos lá que eu vou te passar um outro link, você quer mexer mais alguma coisa nesse daí, tem mais alguma coisa? **B**- Não. Acho que ficou bem claro isso.	

Apesar de um diálogo curto, no qual houve pouca frequência dos atos dialógicos, **B**, ao aceitar o convite e posicionar-se, reconhece o que é esperado dessa atividade, que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a180º, **B** diz: — É que, pela reta aqui, se você colocar um transferidor exatamente na tela, dá exatamente cento e oitenta pela reta e pelos lados do triângulo formarem meio círculo –, e isso, mesmo que ainda tenha dúvida, pelo fato de ter apenas duas casas decimais que aparecem na tela. Dessa forma, a contradição esperada foi gerada e a demonstração será a solução dessa contradição. Por outro lado, essa afirmação indica que é necessário que a perspectiva do que seja uma demonstração para **B** seja esclarecida, pois é de característica perceptivo visual.

Tabela 21 - EB8

Transcrição	Análise das falas
P- Tá, vou te apresentar mais um *link* aqui. Tá acabando tá, é esse link e mais dois e aí a gente conclui. [**P** enviando *link*] Você pode ir lendo conforme você vai clicando, por favor. **B**- Tá. [lê as orientações que aparecem na tela] Trace uma reta F sobre os lados do triângulo. **P**- Você viu que traçou uma reta aí que não tinha? **B**- Sim, aqui. **P**- Isso. **B** [lê as orientações que aparecem na tela]- Trace uma reta G paralela à reta F passando no vértice oposto ao	A comunicação que ocorre nesse momento tem características da comunicação que ocorre no paradigma do exercício, pois **B** interage pouco e apenas concorda com o que **P** fala. Apesar disso, **B** demonstra estar atento, pois se convence que a soma das medidas dos ângulos é igual a cento e oitenta graus – “Agora eu estou achando que pode ser exatamente” ao *perceber* “Que você somando todos eles dão aproximadamente cento e oitenta graus, nesse caso dá exatamente meia volta.” Entendemos que essa fala contém elementos de percepção visual, pois a expressão meia volta possivelmente tem relação com a cobertura de um ângulo raso. Apesar dessa lacuna na ação investigativa e

lado que tenha a reta F. Vou traçar essa reta aqui. **P**- Certo. **B** [lê as orientações que aparecem na tela] - Trace uma reta por um dos outros lados do triângulo, obtendo duas retas paralelas traçadas por uma transversal. Verifique os ângulos internos determinados por essa transversal. **P**- Você viu aí? **B**- Tá aqui, somou os ângulos. Sim, sim. [**B** lê as orientações que aparecem na tela] Trace uma reta sobre o outro lado do triângulo, também teremos duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Verifique os ângulos internos determinados por essa transversal. Aqui deu cento e oitenta soma aqui cento e noventa. **P**- Isso, ângulos alternos internos. Eles são internos, mas são alternados de cada lado da transversal. **B**- Ah, ok! Esse daqui é interno desse. **P** - Isso. **B**- Isso, isso. **P**- Isso. Olha só, eu vou te mandar uma pergunta aqui no chat tá, porque essa pergunta é um pouco mais longa e aí eu acho que é ruim de ler e porque ainda mais que a internet corta o sinal as vezes. Fechou lá? A não, só mudou a tela. Ó, você pode ler ela em voz alta por favor? **B** [lê a pergunta] No vértice B são construídos ângulos alternos internos nos espaços quatro e seis. Ao analisar esses ângulos com o ângulo interno no mesmo vértice, o que podemos concluir? Bem, ele quer que eu analise os ângulos	no *diálogo*, devido ao formato da atividade, interpretamos que **B** e **P** ainda *estabelecem contato*, especialmente porque **B** continua demonstrando interesse no que é dito por **P** e porque esse se preocupa se **B** está compreendendo a demonstração, por exemplo quando pergunta "...o que você conclui aí analisando esse vértice B com esses ângulos alternos e internos?".

alternos e internos do mesmo vértice. Esse e esse. **P**- Isso, no caso só do vértice B tá? Aí o que você conclue aí analisando esse vértice B com esses ângulos alternos e internos? **B**- Que quando tem duas retas paralelas cortadas por uma transversal os ângulos internos dela se tornam iguais. Aqui. **P**- Uhum, você lembra desse teorema dos ângulos alternos internos? Você tem duas paralelas e uma transversal, você tem vários ângulos lá que são de mesma medida. **B**- Eu me recordo, agora lembrar totalmente não é verdade, eu me recordo deles. **P**- Tá, entendi. Então veja só, você percebeu que o ângulo do vértice A ele tem a mesma medida que esse ângulo lá no alterno interno do vértice B? **B**- Isso. **P**- A mesma coisa o ângulo do vértice C tem a mesma medida que o ângulo alterno interno lá no vértice B... **B**- Aqui. **P**- Então olhando para esse vértice B tem dois ângulos alternos internos... **B**- Sim. **P**- E um ângulo que é o próprio ângulo do triângulo. O que você conclui olhando para esse vértice com esses três ângulos? **B**- Que você somando todos eles dão aproximadamente cento e oitenta graus, nesse caso dá exatamente meia volta. **P**- E quanto que é a meia volta? **B**- Cento e oitenta graus. **P**- Cento e oitenta graus. Bem, aí	

não teve medidas né, você vê que não tem números aí né? **B**- Sim. **P**- Isso é um detalhe importante. E aí, você continua achando que é aproximadamente cento e oitenta ou você acha que é cento e oitenta, o que você tem a dizer ai? Nessa apresentação de agora. **B**- Agora eu estou achando que pode ser exatamente. **P**- Uhum, tá bem. Você acha que isso é uma demonstração?	
B- Acho que pode se dizer que sim, mas não completamente porque não tem os números.	Há um equívoco na perspectiva de **B** com o conceito de demonstração, pois o mesmo acredita que são necessárias medidas para demonstrar o valor da soma: "Acho que pode se dizer que sim, mas não completamente porque não tem os números.".
P- Uhum. **B**- Você não pode calcular a medida dos ângulos. **P**- Tá. Qual a diferença dessa demonstração para a demonstração anterior? **B**- Acho que somente os números e que não tem as retas paralelas e a transversal. **P**- Certo. Bem, então eu vou te falar assim ó, vou explicar o que acontece. Isso que a gente acabou de fazer é o que a gente chama de uma demonstração matemática e o que a gente fez no passo anterior a gente chama de uma justificativa, por que esse é uma demonstração e aquele não? Porque quando eu vou fazer isso que é uma demonstração eu utilizo propriedades matemáticas. Qual a propriedade matemática principal aí? Esse teorema dos ângulos alternos internos que você se recorda parcialmente, mas que	Comunicação centrada em **P** como autoridade didática.

você identificou bem aqui na hora que foi fazendo os passos. Então, a gente usa uma premissa matemática que é o teorema dos ângulos alterno internos e dessa premissa a gente leva uma conclusão que é que a gente cobre todo esse ângulo do vértice B, tá bem? Se você observar, esse ângulo em laranja ele utiliza parte da reta paralela, um lado desse ângulo é parte da reta paralela e o outro lado desse ângulo é o lado do triângulo, o vértice B são os lados, verdes, que são os lados mesmo do triângulo, não mudou nada e o que está em vermelho a gente usa outro lado da reta paralela com outro lado do triângulo, ou seja, nesse ângulo raso que eu tenho, quando eu tenho aqui o ângulo do meio, o ângulo do próprio triângulo, vou fazer para baixo, os outros dois ângulos se encaixam perfeitamente ali, e esses dois ângulos pela propriedade do ângulo alterno interno tem as mesmas medida dos outros dois ângulos do triângulo, tá certo? **B**- Isso. **P**- Eu estou tentando te justificar que esses três ângulos juntos completam mesmo esse ângulo que a gente fala que é o ângulo raso, o ângulo de cento e oitenta na semirreta que você falou que é o semicírculo, então isso é uma demonstração e isso não depende da medida, tá certo, uma demonstração matemática não depende da medida de instrumentos principalmente. Claro, você vai resolver o exercício e você tem lá os números dos ângulos e são apresentadas as medidas, mas para demonstrar matemática não precisa de medida e por que não precisa de	

medida? Porque toda vez que a gente utiliza um instrumento para medir ele tem erro, então esse transferidor que você está usando, a linha do transferidor tem uma certa espessura né, a linha que marca o ângulo ali e essa espessura já causa erro, porque se você pegar de um lado dessa espessura vai ser uma coisa e se você pegar do outro vai ser outra, se você pegar no meio vai ser outra. Se eu pegar qualquer instrumento super avançado desenvolvido por uma super tecnologia, a tecnologia mais avançada que existe no mundo também contém erro. Se você algum dia for fazer matemática, é, faculdade de exatas quando a gente vai em física, como é que os caras desenvolvem as teorias físicas, eles vão estudando, medindo e tudo, mas eles levam em consideração os possíveis erros que podem existir, eles calculam o erro. Está certo? Então, quanto que eu posso errar quando eu meço a distância daqui até a lua, tem uma medição desse erro, mas toda vez que eu meço contém erros, tá ok? **B**- Sim.	
P- Bom, então agora você está convencido de qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo? **B**- Sim. **P**- Qual que é essa soma? **B**- Cento e oitenta graus. **P**- Não é aproximadamente, né, exatamente cento e oitenta. Tá? **B**- Isso.	**P** se adianta e não deixa espaço para que **B** mostre se compreendeu que o valor da soma é igual a cento e oitenta graus quando diz "Não é aproximadamente né, exatamente cento e oitenta. Tá?" no diálogo a seguir: "**P**- Bom, então agora você está convencido de qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo? **B**- Sim. **P**- Qual que é essa soma? **B**- Cento e oitenta graus. **P**- Não é aproximadamente né, exatamente cento e oitenta. Tá? **B**- Isso.".

Uma argumentação lógico dedutiva subsidiada por um desenho, característica da geometria proto-axiomática (G2) (Parzysz, 2001), se fazia necessária para resolver a contradição sobre a exatidão ou aproximação da soma das medidas dos ângulos internos do triângulo. Isso levaria, necessariamente, ao estudo de um conceito totalmente novo para **B**. Escolhemos nesse momento apresentá-lo sem que ocorresse um diálogo, mas sim a partir de uma comunicação centrada em **P** que fosse acolhedora das dúvidas, em que **B** pudesse se colocar e os equívocos cometidos anteriormente não estivessem no foco da conversação. Isso significa que o estabelecer contato seria o principal elemento nessa comunicação entre as partes, e nesse sentido, **P** utilizou *tag questions*, como — Ok? ou —Tá certo?, e verificou o repertório de **B** perguntando: — Uhum, você lembra desse teorema dos ângulos alternos internos?, e examinou se **B** havia compreendido o que era apresentado, questionando-o: —...você percebeu que o ângulo do vértice A, ele tem a mesma medida que esse ângulo lá no alterno interno do vértice B? Queremos dizer com esses exemplos que **P** teve desvelo sobre a compreensão e a comunicação com **B** nesse trecho em que ambos se comunicaram, de maneira diferente das atividades anteriores, sem lançar mão de atos dialógicos. Tal escolha feita por nós, garantiu que **B** compreendesse o que esperávamos: — Agora eu estou achando que pode ser exatamente.

Entendemos que nessa atividade **B** vivenciou a demonstração sob a função de explicação (VILLIERS, 2001), pois foi possível verificar por qual motivo o valor da soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é igual a 180º.

Tabela 22 - EB9

Transcrição	Análise das falas
P- Bom, agora sabemos qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo, certo, podemos voltar para o quadrilátero. Sabendo que a soma dos ângulos internos do triângulo é cento e oitenta qual é a soma dos ângulos internos de um quadrilátero? **B**- Trezentos e sessenta. **P**- Aproximado ou não? **B**- Acho que não, acho que é exatamente trezentos e sessenta. **P**- Certo, vamos dar uma olhadinha aqui agora então. Mandei outro link aí. Aí acho que foi o mesmo será? **B**- Acho que foi o mesmo link.	**B** *percebe* a nova perspectiva como podemos notar no trecho: "**P**- Aproximado ou não? **B**- Acho que não, acho que é exatamente trezentos e sessenta". Entendemos dessa forma, pois anteriormente **B** estava em uma contradição: em atividade anterior, **B** verificou que os ângulos internos do triângulo cobriam um ângulo raso, mas, na atividade em que era possível mudar o número de casas decimais, verificou numericamente que o valor era aproximado a cento oitenta graus. A demonstração resolveu essa contradição e **B** se convenceu que a soma é exata.
P- Tá, tudo bem. Então deixa eu te	Questionamento de **P** para que **B** reexamine

perguntar uma coisa, como que você justificaria que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é trezentos e sessenta?	o caso da soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero após a demonstração do caso dos triângulos, portanto um *desafio*.
B- Acho que poderia ser do mesmo jeito, medindo a diagonal e medindo os outros ângulos.	**B** persiste no equívoco em relação à diagonal dos quadriláteros, acreditando que é necessário medi-la – "Acho que poderia ser do mesmo jeito, medindo a diagonal e medindo os outros ângulos". Por conseguinte, **P** *desafia* **B** com a pergunta "Quando você traça uma diagonal o que acontece com um quadrilátero?" para que **B** pudesse *perceber* outra perspectiva em relação à questão da diagonal. Independente dos equívocos que **B** comete, essa interação mostra que *aceitou o convite* realizado para que investigasse a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero.
P- Aí você acha que precisa medir se fizesse a diagonal? **B**- Não porque os ângulos são iguais, mas tipo eu acho que não teria como comprovar isso sem os números, mas depois da demonstração matemática dos triângulos, acho que ... sim. [demora entre a palavra "que" e a palavra "sim"] **P**- Quando você traça uma diagonal o que acontece com um quadrilátero? **B**- A maioria deles se torna um triângulo. **P**- Um só não, né? **B**- Dois. **P**- Agora vamos ver o exercício, agora eu te mandei o link certo. Aí você pode ler o texto para mim por favor.	Quando **B** diz: "Não porque os ângulos são iguais, mas tipo eu acho que não teria como comprovar isso sem os números, mas depois da demonstração matemática dos triângulos, acho que ... sim. [demora entre a palavra "que" e a palavra "sim"]", interpretamos como um avanço na compreensão de **B**, pois *percebeu* que não são necessárias medidas para se comprovar o valor da soma em questão. Entendemos que *percebeu* e não *reconheceu*, pois apenas citou a demonstração e não se expressou com suas palavras. Há também nessa fala um tipo de *pensar alto* expresso na demora de falar a palavra "sim" depois da palavra "não", pois entendemos que tal demora externa um processo de assimilação dos conceitos.
B- [lê a orientação da atividade]- Clique na caixa diagonal um ou diagonal dois e observe o que ocorre, ele se tornou um triângulo.	**P** retoma a perspectiva dos quadriláteros não convexos com um *desafio* do tipo "O que acontece se..."– "Mesmo se ele fosse não convexo seria isso?" – para que a soma também

Diagonal dois. O quadrilátero também. O quadrilátero você pode cortar ele no meio que ele vai virar dois triângulos ...é isso mesmo. **P**- Mesmo se ele fosse não convexo seria isso?	seja verificada para esses quadriláteros.
B- Vamos ver... mesmo se ele fosse não convexo seria... [**B** mexendo no software] É, aconteceria isso sim. **P**- E esse desenho que está aí agora, coloca a diagonal um aí para a gente ver. Está dividido em dois triângulos? **B**- Não. Uma linha imaginária e dois triângulos. **P**- Está para fora né? **B**- Sim. **P**- Lembra a propriedade do quadrilátero não convexo, que justamente essa linha ficaria para fora da parte interna né? **B**- Aham. **P**- Certo, clica lá no diagonal dois para a gente ver o que acontece. E agora? **B**- Agora sim. Se tornaria. **P**- Bem, então qual é a soma dos ângulos internos de um quadrilátero? **B**- Trezentos e sessenta. **P**- Exatamente ou não?	**P** cooperando com a investigação que **B** faz a respeito da soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero.
B- Exatamente. O não convexo... Agora estou na dúvida. **P**- Vamos pensar por caso, vamos pensar no caso convexo, no caso do convexo daria trezentos e sessenta? **B**- Sim. **P**- Exatamente ou não? **B**- Acho que sim. **P**- Por que dá exatamente trezentos e sessenta? **B**- Se dividir em dois triângulos que tem exatamente cento e oitenta é só você somar que vai dar trezentos e	Depois da visualização das diagonais do quadrilátero, **B** *percebe* outra perspectiva sobre a diagonal na investigação em curso: “Se dividir em dois triângulos que tem exatamente cento e oitenta é só você somar que vai dar trezentos e sessenta”, que julgamos ser mais adequada à demonstração, pois é um argumento lógico dedutivo que pode ter recorrido a um desenho como na geometria proto-axiomática (G2) (PARZYSZ, 2001).

sessenta.	
P- Ok. Bom, vamos pensar no caso do não convexo agora que é esse que está aí, nesse caso ele está dividido em dois triângulos? **B**- Não. **P**- Esse não, mas clica na diagonal um. **B**- A diagonal do um, sim. **P**- Isso, e isso garante que ele mede trezentos e sessenta, os ângulos internos do quadrilátero não convexo? **B**- Sim. **P**- Por quê? **B**- Porque é a soma dos triângulos. **P**- Ok. Apesar das duas diagonais não dividirem o quadrilátero em dois triângulos uma delas divide né? **B**- Sim. **P**- E uma delas é interna né, no caso, então se uma delas divide já garante, não precisa que seja as duas né? **B**- É, exatamente isso. **P**- Bom agora só para finalizar eu vou te mostrar uma outra coisa aqui do quadrilátero e eu quero que você depois me aponte qual a diferença tá. Quer mexer mais aí, pode ficar à vontade.	**B** continua apresentando dúvidas a respeito dos quadriláteros não convexos que em um *jogo de perguntas* é esclarecido: "Bom, vamos pensar no caso do não convexo agora que é esse que está aí, nesse caso ele está dividido em dois triângulos? **B**- Não. **P**- Esse não, mas clica na diagonal um. **B**- A diagonal do um, sim. **P**- Isso, e isso garante que ele mede trezentos e sessenta, os ângulos internos do quadrilátero não convexo? **B**- Sim. **P**- Por quê? **B**- Porque é a soma dos triângulos. **P**- Ok. Apesar das duas diagonais não dividirem o quadrilátero em dois triângulos uma delas divide né? **B**- Sim. **P**- E uma delas é interna né, no caso, então se uma delas divide já garante, não precisa que sejam as duas né? **B**- É, exatamente isso.". Entendemos tal trecho como um *jogo de perguntas*, pois **B** age apenas observando aquilo que **P** pede para ser verificado, como se aquele estivesse adivinhando o que esse dizia.

O diálogo e ação investigativa voltam a dominar a interação entre **B** e **P**. Mesmo quando o jogo de perguntas ocorre, a cooperação investigativa está presente, especialmente porque a necessidade de uma comunicação centrada em **P** é apropriada para o esclarecimento e o acolhimento das dúvidas de **B**.

O fato de **B** ter vivenciado a demonstração sob a função de explicação (VILLIERS, 2001) e o conjunto de atividades apresentadas, permitiram que **B** percebesse a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero corretamente, apesar de expressar certa dúvida em um pensar alto, expresso na demora de dizer a palavra sim: — Eu acho que não teria como comprovar isso sem os números, mas depois da demonstração matemática dos triângulos, acho que... sim. O perceber se deu evocando a demonstração da soma das medidas dos ângulos internos do triângulo e da partição do quadrilátero em dois triângulos a partir da diagonal, mesmo **B** expressando isso de maneira equivocada em alguns momentos: — Acho que poderia ser do mesmo jeito, medindo a diagonal e medindo os outros ângulos.

Quando **B** diz: — Porque é a soma dos triângulos −, pode estar fazendo confusão sobre a região triangular na composição da região interna do quadrilátero, assim como fez em outros momentos em que confundiu regiões triangulares formadas a partir da região quadrangular, quando é traçada uma diagonal do quadrado com um triângulo. Acreditávamos que não faria mais essa confusão, pois havia dito instantes antes: — Se dividir em dois triângulos que tem exatamente cento e oitenta é só você somar que vai dar trezentos e sessenta −, que interpretamos conter uma perspectiva mais adequada à demonstração da soma das medidas dos ângulos dos quadriláteros. De qualquer maneira, após a apresentação da atividade, **B** percebeu e reconheceu a perspectiva referente à importância da diagonal de maneira adequada em um dado momento.

Tabela 23 - EB10

Transcrição	Análise das falas
B- Vou esperar você mandar a próxima. [**B** lê a orientação da atividade] Os ângulos internos do quadrilátero foram transportados para o segmento de reta abaixo, quando você movimenta os vértices dos quadriláteros para formar outros quadriláteros a mesma medida dos ângulos internos destacados mudam. Então, é a mesma coisa dos triângulos né? **P**- Uhum. **B**- Se você mudar um vértice todos os outros mudam e os transportados também. Mesmo assim ele dá trezentos e sessenta. **P**- Olhando aí para os ângulos transportados o que dá para concluir? **B**- Mesmo ele sendo convexo ou não convexo ele dá trezentos e sessenta	**B** *aceita o convite* para a nova atividade como podemos notar quando interage com **P**.

graus. **P**- E por que você acha que dá trezentos e sessenta? **B**- Pelo mesmo exercício que a gente fez agora pouco. **P**- Certo, mas olhando para esses transportados aqui embaixo, você está concluindo que dá trezentos e sessenta, mas por que você acha que dá trezentos e sessenta olhando só para os transportados?	
B- Pela volta completa que ele dão na linha reta.	Além disso, mais uma vez a justificativa que usa para *reconhecer* a soma das medidas dos ângulos internos nessa atividade, como esperávamos, é perceptiva visual: “Pela volta completa que ele dão na linha reta”.
P- Certo, correto. Então veja, você acha que isso é uma demonstração? **B**- Sim. Não, acho que isso é uma justificativa. **P**- Certo, qual a diferença desse para o outro? Para você falar que esse é justificativa e o outro é demonstração? **B**- A justificativa você justifica com os números e dá exatamente trezentos e sessenta e a demonstração você mostra como que aquilo é possível.	Ocorre o *reconhecer* em relação à perspectiva da demonstração, pois **B** consegue descrever que “A justificativa você justifica com os números e dá exatamente trezentos e sessenta e a demonstração você mostra como que aquilo é possível”.
P- Correto, veja na demonstração eu utilizei uma outra propriedade matemática anterior que é a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos do triângulo, para dai justificar a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero. Então veja, da mesma maneira que no triângulo eu utilizei lá o teorema dos ângulos alternos e internos no quadrilátero eu utilizei a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo, ou seja, eu utilizei uma premissa matemática,	Apesar da interação entre **P** e **B**, parte da comunicação é centrada em **P**, configurando certa quebra no *diálogo*. No entanto, assim como em momentos anteriores, essa quebra é bem-vinda, pois uma perspectiva está sendo esclarecida para **B** e esse não perde a atenção.

um teorema matemático, um conceito matemático básico anterior, que no caso é um teorema né, eu estou falando isso, um conceito básico para tirar consequências dele e verificar quais são essas consequências. É isso que tem uma demonstração, nesse caso eu não estou utilizando nenhuma premissa matemática né, eu estou utilizando as medidas, e aí as medidas tem todos aqueles problemas que eu já falei com você, ok? **B**- Sim, nunca vai ser perfeito, sempre vai ter erro. **P**- Isso, sempre vai ter um mínimo erro. Está certo? **B**- Sim. **P**- Isso não quer dizer que quando você vai fazer os exercícios você tem que considerar esse erro tá, se o professor disse que mede sessenta, mede trinta você confia, você não vai questionar isso. Essa questão das medidas é principalmente na demonstração que a gente precisa tomar cuidado. Tá bem? **B**- Ok.	
P- E você quer perguntar mais alguma coisa? **B**- Eu não **P**, ficou tudo muito claro para mim. **P-** Tá bem, você já teve alguma atividade desse tipo? **B**- Não, já tive mais aprendendo sobre, mas desse jeito não. **P-** Entendi. É, você pode ser sincero na pergunta tá, você gostou dessa atividade? **B**- Sim, gostei. **P-** Gostou? **B**- É até mais fácil para relembrar isso. **P-** A que legal. E a gente pensou	Acontece uma *avaliação*, induzida por **P** que faz questionamentos conforme seguinte trecho: "**P-** E você quer perguntar mais alguma coisa? **B**- Eu não **P**, ficou tudo muito claro para mim. **P-** Tá bem, você já teve alguma atividade desse tipo? **B**- Não, já tive mais aprendendo sobre, mas desse jeito não. **P-** Entendi. É, você pode ser sincero na pergunta tá, você gostou dessa atividade? **B**- Sim, gostei. **P-** Gostou? **B**- É até mais fácil para relembrar isso". Posteriormente **B** avalia positivamente a atividade "**P** Bem, você acha que uma atividade desse tipo vai fixar melhor o conteúdo do que na maneira como você aprendeu, que você costuma aprender? **B**- Acho que sim porque fica de uma forma mais clara, é mais simples e mais

agora aqui na soma do quadrilátero né e se a gente fosse pensar no pentágono, o pentágono tem cinco lados como é que você tentaria justificar a soma das medidas dos ângulos internos do pentágono? B- É, ene mais dois, soma os lados, é... Eu não lembro exatamente a conta que eu tenho que fazer. **P-** Mas qual a ideia da conta, você não precisa lembrar exatamente da conta, mas qual a ideia e como que faz essa conta, qual o intuito? B- Se eu me lembro, a teoria é que sempre aumentava cento e oitenta pra todos os lados, um lado dava cento e oitenta, dois lados tinha... trezentos e sessenta... dá mais, assim vai. Quinhentos e quarenta, a cada ver... a cada... número lados que tinha a mais aumentava cento e oitenta. **P-** Bem se você pegar o pentágono e dividir ele em triângulos você consegue saber qual é a soma dos ângulos internos né porque você já sabe a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo, então se você tiver lá e conseguir saber quantos triângulos tem dentro do pentágono você consegue descobrir a soma, certo? B- Certo. **P-** E assim você faz para os outros polígonos de mais lado, pega um vértice e divide em triângulos, conta quantos triângulos tem sabendo que cada um é cento e oitenta você sabe a soma deles. B- A soma deles no final. **P-** É, exatamente. Bem, você acha que uma atividade desse tipo vai fixar melhor o conteúdo do que na maneira como você aprendeu, que	claro." Entre esses trechos de *avaliação*, **P** apresenta outra perspectiva com o *desafio* "... o pentágono tem cinco lados como é que você tentaria justificar a soma das medidas dos ângulos internos do pentágono?" que acaba não sendo explorada de maneira investigativa.

você costuma aprender? **B**- Acho que sim, porque fica de uma forma mais clara, é mais simples e mais claro. **P-** Tá certo, muito bem. Muito obrigado viu, eu vou encerrando por aqui. Eu vou pedir para você guardar esse papel, esses dois papéis que você usou porque eu vou passar uma autorização para a sua mãe, ela vai ter que assinar e você também vai ter que assinar, e aí quando eu passar para ela eu já pego tudo junto, não sei se ela consegue me mandar scaneado ou depois eu vejo com ela se eu passo aí na casa de vocês e pego. **B**- Beleza. **P-** Tá bom, você o guarda aí para mim tá bom. **B**- Tá ok, obrigado pela aula **P**. **P-** Qualquer coisa se ficou com dúvida ou se aparecer alguma dúvida você tem meu *WhatsApp* e você pode me escrever. **B**- Beleza, muito obrigado! Tchau. **P**- Tchau!	

A parte final da atividade é marcada pelo reconhecer ~~a~~o que é uma demonstração e à soma das medidas dos ângulos do quadrilátero ser igual a 360º. Destacamos a afirmação: — A justificativa você justifica com os números e dá exatamente trezentos e sessenta e a demonstração você mostra como que aquilo é possível –; essa fala comprova um salto de compreensão a respeito do conceito de demonstração.

A avaliação da atividade feita por **B** é positiva e o mesmo acredita que realizou uma atividade que o permitiu compreender melhor o tema.

Capítulo 6. Conclusões

Realizada a pesquisa, as intervenções e a escrita do trabalho, podemos discorrer sobre as questões de pesquisa; são elas,

- Quais características deve ter uma abordagem de ensino em Matemática para desenvolver uma formação crítica em estudantes da Educação Básica?
- A proposta de investigação se caracterizou em cenários para investigação que engajou os participantes a explorarem algumas propriedades dos quadriláteros planos e triângulos? Se sim, como isso se deu?
- Ao aceitarem o convite para a investigação, os participantes a realizaram em um trânsito entre argumentações perceptivo dedutivas e lógico dedutivas em relação às propriedades estudadas nos quadriláteros planos e triângulos?

Defendemos a realização de atividades investigativas, nas quais o diálogo ocorre por meio dos atos dialógicos do Modelo-CI, como um plano de abordagem que garante criticidade aos processos de ensino e de aprendizagem. Em nossa intervenção, essa perspectiva permitiu que atacássemos alguns pontos críticos levantados ao longo do texto; nossas atividades foram elaboradas associando uma cadeia reflexiva profícua, que convidou os participantes a enfrentarem diferentes desafios, tais como a realização de desenhos de polígonos sobre o papel e a medição dos ângulos desses polígonos com transferidor; e as experimentações, argumentações e demonstrações geométricas aliadas e facilitadas ao dinamismo do *GeoGebra*. O enfrentamento de tais desafios, em meio à cooperação investigativa entre participantes e pesquisador, culminou na valorização de uma argumentação lógico dedutiva em detrimento da tecnologia digital. Esse relevante fato nos faz acreditar que a ideologia da certeza e a matemática em ação justificação e legitimação foram atacadas. Esse foi um dos pontos altos da pesquisa, e ocorreu no contexto em que os participantes questionaram o que tinham aprendido na escola – acreditaram que o valor da soma era aproximado a 180º (no caso do triângulo) e a 360º (no caso do quadrilátero), e essa seria uma conclusão possível diante do que o *GeoGebra* apresentava. Assim, conseguimos abalar essa certeza quando mostramos, em outras atividades no mesmo meio digital (e fazendo uso de uma argumentação perceptivo dedutiva) que, visualmente a soma tinha valor exato, causando, inicialmente, uma contradição. Prosseguindo nesse caminho, resolvemos essa contradição ao apresentarmos uma argumentação lógico dedutiva (demonstração), que exerceu a função de explicação e justificou por qual motivo os valores das somas eram exatos.

Outro elemento que garantiu criticidade em nossa abordagem refere-se ao rompimento do absolutismo burocrático. O diálogo em meio à investigação mostrou que o ato dialógico estabelecer contato prevaleceu, haja visto que os participantes ficaram à vontade para argumentar, ao invés de adivinhar o resultado; eles ainda tiraram dúvidas sobre perspectivas que não estavam expressamente colocadas nas atividades e não se intimidaram em questionar os resultados apresentados pelas autoridades, tanto do pesquisador, quanto da tecnologia digital. Percebe-se, nesse processo, que a comunicação constituída diluiu a hierarquia entre pesquisador e participante ou, em termos de criticidade, a comunicação estabelecida entre as partes não reproduziu o tradicional modelo social hierárquico, em que ordens são acatadas sem questionamentos.

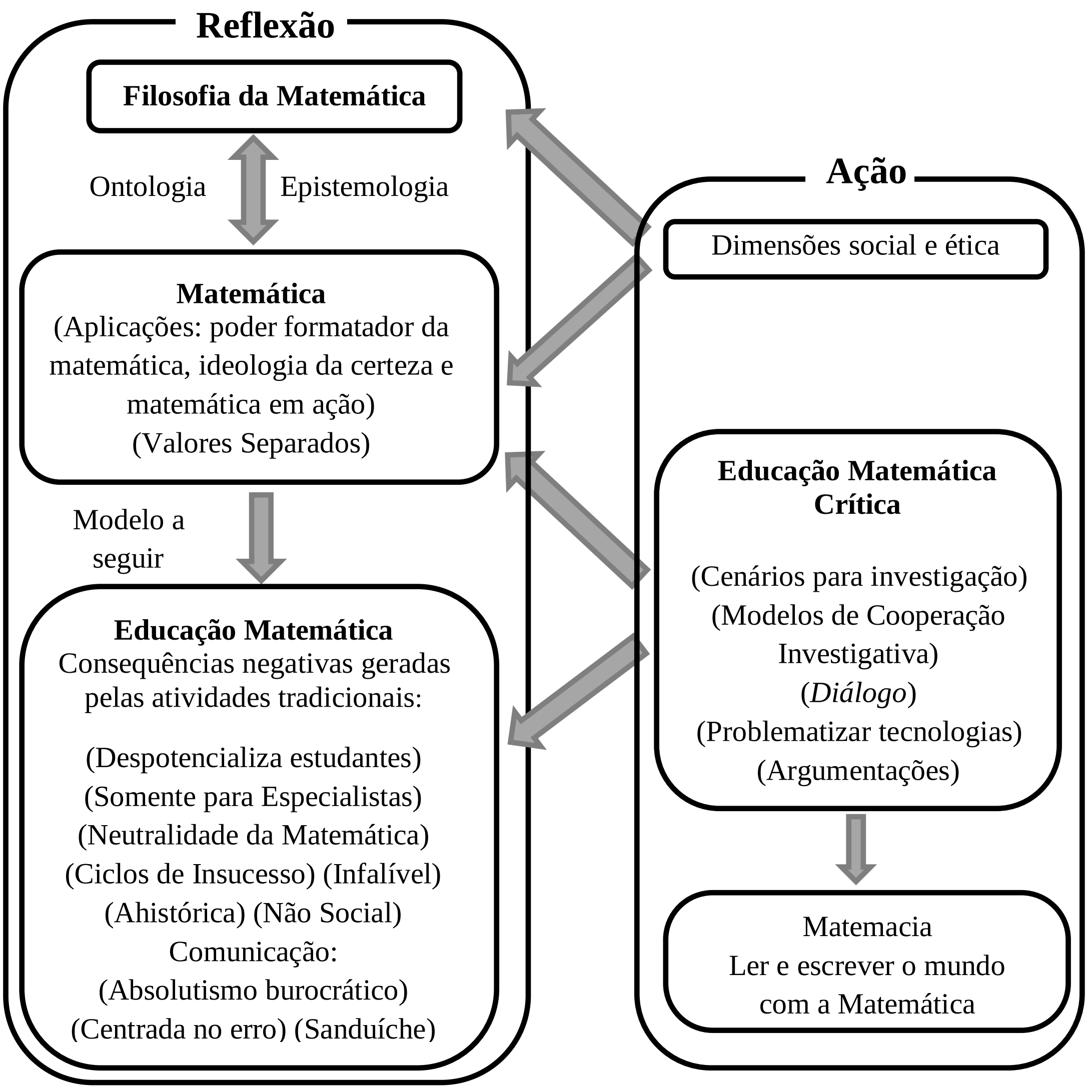
Quando os participantes se engajaram no cenário para investigação, a possibilidade de transitar entre as argumentações perceptivo dedutivas e lógico dedutivas do pensamento geométrico (ver Seção 3.2) nos permitiu desafiar os estudantes a realizarem argumentações cada vez mais elaboradas, de acordo com a faixa etária e o nível de formação, expandindo, assim, a compreensão sobre o tema investigado. De tal modo, eles perceberam, reconheceram e reformularam conjecturas e posicionaram-se justificando suas afirmações concernentes às propriedades geométricas investigadas; ao final, ainda puderam avaliar a aprendizagem que tiveram durante nossa intervenção. Tais atos dialógicos facultaram que um tema de alta complexidade, como o da demonstração, fosse construído coletivamente; isso nos faz afirmar que a demonstração, abordada da maneira como nos dispusemos a realizar nesta pesquisa, pode contribuir com a ideia de que a ciência matemática é social, pois conhecimentos foram gerados em meio a uma colaboração entre indivíduos. Essa abordagem contribuiu substancialmente para a potencialização dos estudantes, o sucesso acadêmico e o poder matemático deles. Com isso, adquiriram um conhecimento e um aprofundamento tal em matemática que podem instrumentalizá-los a ler e a escrever o mundo com a Matemática, ou seja, a desenvolver a matemacia.

Assim, ao finalizarem as atividades, evidenciou-se que ambos os participantes ampliaram os conhecimentos que tinham sobre os valores das somas investigadas (objetivo principal da intervenção) e ainda mais, e mais importante, ao serem desafiados, ousaram pensar e questionar e tiveram êxito em encontrar, por meio de uma cooperação investigativa, a solução; em uma abordagem tradicional sobre o mesmo tema, no estrito paradigma do exercício, o conhecimento dos valores das somas em questão seria o único resultado pretendido.

Capítulo 7. Considerações Finais

No Capítulo primeiro, na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, presentamos uma esquematização de nossa compreensão a respeito das relações entre Filosofia, Educação Matemática e Matemática. Cotejando esta Figura 1 com a que segue, a Figura 43, pode-se notar um incremento a partir dos conceitos que foram apresentados ao longo do texto.

Figura 43 - Reconsiderações da Figura 1, a partir da crítica



Fonte: Garbin, 2024.

Crítica envolve o ciclo contínuo entre reflexão e ação, o qual é encarado como uma unidade, por isso dizemos que o processo reflexão-ação é essencial à crítica. A reflexão permite compreensão das condições de existência vividas pela humanidade e a elaboração de ações para melhorá-las. A ação coloca em prática as reflexões que foram feitas, e a ação gera um novo processo de reflexão, que por sua vez proporcionará uma ação mais consciente, e assim reiteradamente. Em nossa interpretação, o foco desse processo deve ser sempre a busca pela superação dos problemas gerados e mantidos pela ideologia dominante que, além de gerá-los e mantê-los, esconde as causas mais profundas do atual estado de desigualdade em que vivemos e proclamam que tais desigualdades são responsabilidades apenas individuais. Essa ideologia é (re)produzida (na) pela escola, especialmente quando os alunos são considerados meras caixas que devem ser preenchidas com os conteúdos mantenedores dessa própria ideologia. À proporção que estamos inseridos nesse obscurantismo ideológico, mais fragmenta-se a nossa compreensão da realidade, pois as classes dominantes se apropriam das produções humanas, causando o apagamento de nossas história e memória e, consequentemente, nos relegando ao não conhecimento de nossas potencialidades humanas como agentes de transformação da realidade.

Durante o processo de reflexão, entendemos que a Filosofia da Matemática e a Matemática se conversam pelas dimensões epistemológica e ontológica. A Matemática, porém, apresenta características de valores separados (ERNEST, 2018, p. 195) como certa impessoalidade, o foco na razão e a procura contínua por generalidades e abstrações. A partir das conceituações da EMC, as aplicações puderam ser incrementadas com os conceitos de poder formatador da matemática, ideologia da certeza e matemática em ação. Como se tentou demonstrar, essas aplicações não são neutras e podem tanto ajudar a superação de problemas como acentuá-los, como no caso do Ford Pinto, em 1968, em que o valor da vida foi calculado como o de uma mercadoria que deve render lucro.

Os pontos críticos atinentes ao ensino usual de matemática foram reiteradamente numerados – relembrando-os, são eles despotencializar os estudantes; reforçar a visão de que a Matemática é infalível e compreensível apenas para especialistas; desconsiderar o caráter histórico e social dessa ciência; cooperar com as ideologias dominantes; e ainda favorecer ciclos de insucesso na relação dos estudantes com a Matemática. Incrementamos esses pontos com destaque aos problemas relacionados à comunicação, como o absolutismo burocrático, a centralidade no erro e a comunicação tipo sanduíche, que tem o efeito deletério de o estudante não atuar sobre o conhecimento matemático, pois sua ação se resume em adivinhar as respostas corretas em meio às perguntas do professor. (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010).

Durante nossa ação, entendemos que, no campo da filosofia, que não foi foco de nossas discussões, as dimensões ética e social devem ser incorporadas para compreendermos como a matemática é influenciada pela sociedade e quais consequências são geradas na sociedade pelas aplicações matemáticas. Isso possibilita a identificação de pontos críticos das aplicações matemáticas e suas consequências em sala de aula, bem como a mudança de algumas características comuns ao ensino tradicionalmente estabelecido dessa ciência.

Após a realização da pesquisa, questões ficam em aberto, até por conta das inevitáveis alterações devido à pandemia, pois mudamos de uma intervenção presencial nas turmas que lecionávamos para entrevistas reflexivas, possíveis no ambiente virtual do *Google Meet*; os sujeitos de pesquisa passaram de estudantes de sextos e sétimos anos para estudantes que já tinham algum conhecimento sobre o tema (um estudante da rede particular, cursando o nono ano do Ensino Fundamental 2 e outro estudante da rede pública, cursando a primeira série do Ensino Médio em mecatrônica em uma Escola Técnica Estadual (ETEC)); as atividades presenciais previam uso de materiais manipuláveis, como canudos, palitos, cola, tesoura, lápis, papel e o *GeoGebra*, estratégia que mantivemos, não obstante as restrições inerentes ao período pandêmico, nas entrevistas que realizamos, porém apenas com lápis, papel, transferidor, régua e o *GeoGebra*.

Embora as condições fossem restritas, a câmera do computador foi direcionada para as mãos dos participantes enquanto desenhavam e o *Google Meet* permitiu que a tela dos participantes fosse compartilhada com o pesquisador. As imagens dos encontros foram gravadas e as entrevistas transcritas. Inevitavelmente, o meio virtual impossibilita apreensão maior das dinâmicas que ocorrem na troca presencial; exemplificando, poderíamos ter ficado com os desenhos realizados pelos participantes ou captado expressões e gestos significativos, que demonstrassem alguma relação com o aprendizado. Por esses motivos, não sabemos quais seriam as relações que se estabeleceriam se esse conjunto de atividades fosse aplicado em sala de aula com estudantes que não conhecessem o tema.

Sobre essa percepção, é possível fazermos algumas observações e sugestões para futuras pesquisas ou para professores que desejem usar esse conjunto de atividades em sala de aula. À vista disso, o conhecimento do uso do transferidor e dos teoremas de congruência entre ângulos alternos internos em retas paralelas cortadas por transversais são pré-requisitos necessários. O estabelecimento de cenários para investigação, nos quais ocorra o diálogo e se verifique os atos dialógicos do Modelo-CI, é essencial para que a investigação possa ser bem sucedida.

Prosseguindo nessa trilha, poderíamos continuar essa pesquisa de duas maneiras; uma aplicando o conjunto de atividade presencialmente para um estudante ou um grupo pequeno de estudantes de sextos e sétimos anos que não conhecem o valor da soma das medidas dos ângulos internos de quadriláteros planos e triângulos, e outra, fazendo a aplicação em uma sala de aula para estudantes com o mesmo perfil. Diferentes formas de aplicação podem ser sugeridas, a depender da turma, do ano e da sala de aula, como, por exemplo, cada estudante com um computador, um grupo de estudantes com um computador ou o professor projetando as atividades do *GeoGebra* na lousa, buscando diálogo com os estudantes em geral.

O fato de os participantes saberem qual o valor da soma das medidas dos ângulos internos de quadriláteros planos e triângulos não impede a realização da atividade e a compreensão de novos conceitos. Na lógica de funcionamento do paradigma do exercício, esse fato seria suficiente para a realização de uma lista de exercícios ou para que o próximo tema fosse apresentado. Na abordagem que propomos, os estudantes podem investigar como funcionam quadriláteros planos de acordo com diversas propriedades, como convexidade, existência, variação das medidas dos ângulos e dos lados e decomposição em triângulos; podem investigar também triângulos e suas classificações, os ângulos, a forma de nomeá-los e o conceito de demonstração. Com essa abordagem, compreendemos que é possível estimular o pensamento geométrico.

Importante ressaltar que as condições de existência, a convexidade e a decomposição dos quadriláteros planos são conceitos de fácil visualização, mas com definições e demonstrações mais complexas, por isso o professor ou pesquisador deve estar preparado para apresentar argumentações adequadas para o público que participará das atividades propostas.

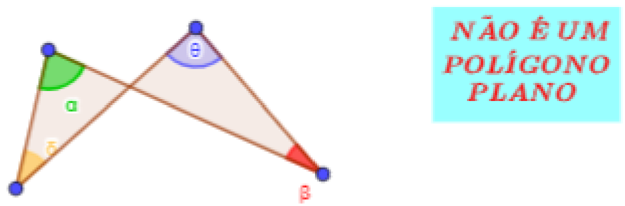
Também em sintonia com esse conjunto de atividades, há uma relação importante na geometria do globo terrestre que pode ser explorada; note-se, a soma das medidas dos ângulos internos de triângulos esféricos é menor que 540º e maior que 180º; portanto, propor uma pesquisa sobre o tema pode incrementar o conjunto de atividades, e essa pode ser independente ou continuação desta.

Mesmo não sendo o foco de nossa pesquisa, quando trabalhamos em cenários para investigação com referência à realidade no ambiente de aprendizagem 6 (SKOSMOSE, 2000), é possível problematizar aplicações matemáticas e as supostas neutralidade e infalibilidade dessa ciência; para exemplos, ver Skovsmose (1999, 2010, 2015, 2017), Gutstein (2016) e Civiero, Milani e Lima (2022). Recomenda-se ainda a compreensão da dialética visto-sabido (Seção 3.2.3), pois tem um potencial importante para que afirmações não sejam aceitas sem que exista uma razão, o que nos coloca em alerta a respeito de tudo o que vemos; a visão pode nos enganar, porque há limitações nas representações ou desenhos feitos no papel, na tela do computador ou na lousa, mas essa limitação pode ser superada por argumentações e ou demonstrações.

Como a pesquisa evidenciou, é importante certo cuidado com o uso do *GeoGebra*, pois a dinamicidade permite que um número muito grande de casos seja testado, o que pode levar um estudante a acreditar em propriedades, sem que sinta necessidade de comprovação ou que os motivos sejam explicados. Nesse sentido, é necessário que o professor tenha em mente que as medidas são obtidas por aproximação, o que pode mudar a forma de gerenciar as atividades nesse *software* que envolvam medições.

De acordo com nossas análises, convém observar algumas alterações que fizemos na programação do *GeoGebra* e nas atividades para a apresentação do produto final. A primeira mudança refere-se ao fato de colocarmos a informação ¨não é um polígono plano¨, no lugar de ¨não é um quadrilátero¨ nas atividades sobre quadrilátero. Fizemos isso, porque aquela informação aparecia quando dois lados do quadrilátero plano têm mais de um ponto em comum além do vértice, o que na verdade faz com que o desenho na tela do computador deixe de ser um polígono plano, embora possa ser a representação de um polígono não plano. A Figura 44 é um recorte da tela com a informação correta.[24]

Figura 44 - Mudança na programação do produto final



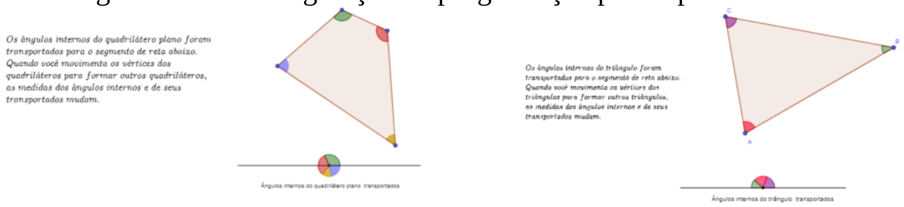
Fonte: Garbin, 2024.

[24] Caro leitor! Quando três, e somente três, pontos do quadrilátero estivessem alinhados, gostaríamos que a informação Triângulo aparecesse na tela do computador. Não conseguimos realizar tal configuração, caso saiba como fazê-la, entre em contato conosco.

Outra mudança foi no nome das atividades no *GeoGebra*. Passamos a denominá-las de acordo com o conteúdo e não mais com o número da atividade e isso pode facilitar o trabalho do professor que opte por mudar a ordem de aplicação das questões. Assim, a programação chamada Atividade 2 passou a se chamar Quadrilátero – Medições; a programação chamada Atividade 4 passou a se chamar Triângulos – Medições; a programação chamada Atividade 5 item 1 passou a se chamar Triângulo – Transporte de ângulos; a Atividade 5 item 2, passou a se chamar Triângulo – Demonstração; a Atividade 7 item 1 passou a se chamar Quadrilátero – Transporte de ângulos transportados; e a Atividade 7 item 2 passou a se chamar Quadriláteros – Diagonais.

No item 1 da Atividade 5 e no item 1 da Atividade 7 (respectivamente, Triângulo – Transporte de ângulos e Quadrilátero – Transporte de ângulos), preferimos esconder o valor das medidas dos ângulos internos para que o estudante recorra apenas à percepção visual a fim de elaborar argumentações. Tal medida foi tomada, pois em diversos casos, devido às aproximações que o *GeoGebra* realiza nas medições, o valor da soma será diferente de 360º ou 180º, dificultando que se estabeleça a contradição que esperamos. A Figura 45 é o recorte da tela inicial dessas atividades reconfiguradas.

Figura 45 - Reconfiguração da programação para o produto final



Fonte: Garbin, 2024.

Além disso, na atividade proposta aos participantes desta pesquisa, nos referimos a quadriláteros, pois no contexto inferíamos que eram planos. Para que essa imprecisão não apareça no produto final, trocamos quadriláteros por quadriláteros planos.

Por fim, queremos ressaltar que, ao longo do desenvolvimento da pesquisa, tivemos dúvidas de como poderíamos entrelaçar a formação crítica com um trabalho voltado para um conteúdo estritamente matemático. Quando mergulhamos nas leituras, especialmente após as orientações dadas pelos professores da banca de qualificação, tivemos clareza que isso seria possível. Por todo este texto, buscamos mostrar como a teoria nos apoiou e como os dados mostram que foi possível desenvolver aspectos críticos em nossa intervenção. Esperamos, com isso, ter deixado uma contribuição para as aulas de Matemática na Educação Básica.

REFERÊNCIAS[25]

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática**. Tradução Orlando A. Figueiredo. 2. ed. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica. 2010.

BALACHEFF, N. **Bridging knowing and proving in mathematics:** an essay from a didactical perspective. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1403.6926>. Acesso em: 22 de set. 2017.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Hiperbólica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/20_CBM_95_01.pdf Acesso em: 2 de fev. 2022

BICUDO, M. A. V**. Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica**. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. 1ªed.São Paulo: Editora UNESP, 2010, v. 1, p. 23-47. Disponível em: < http://www.mariabicudo.com.br/cap%C3%ADtulos-de-livros.php>. Acesso em: 6 de jan. 2023.

BORBA, M. C.; SKOVSMOSE, O. A ideologia da certeza em educação matemática. [Tradução de Jussara Loiola de Araújo do artigo de BORBA, M.; SKOVSMOSE, O. *The ideology of certainty in mathematics education. For the learning for mathematics*. Ontario/ Kingston: FLM Publishing Association, v. 17, n. 3, p. 17-23, Nov. 1997]. In: SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica**: A questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001. p. 127-148.

BORBA, M. C. Coletivos seres-humanos-com-mídias e a produção matemática. In: **Primeiro Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática,** 2002, Curitiba. Anais. Curitiba: SBPEM, SBEM, 2002, p. 135–46. Disponível em: < https://igce.rc.unesp.br/Home/Pesquisa58/gpimem-pesqeminformaticaoutrasmidiaseeducacaomatematica/borba_coletivos-seres-humanos-com-midias.pdf> Acesso em: 29 de nov. 2023.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, Secretaria da Educação Básica. **Formação de professores do ensino médio, etapa i – caderno ii: o currículo do ensino médio, seu sujeito e o desafio da formação humana integral.** Curitiba. UFPR/Setor de Educação, 2013.

________. MINISTÉRIO DA ECONOMIA, Secretária de Previdência. Apresentação do secretário especial de Previdência e Trabalho do Ministério da Economia, Rogério

[25] De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT NBR 6023).

Marinho sobre a PEC 06/2019 da **Nova Previdência.** Brasília, 11 de setembro 2019. Disponível em: <http://www.previdencia.gov.br/2019/09/nova-previdencia-vai-corrigir-injusticas-e-ajudar-a-equilibrar-orcamento/>. Acesso em: 26 mar. 2020.

________. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCNEB).** Brasília 2013. Disponível em:
<http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 7 jun. 2019.

________. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Brasília, sem data. Disponível em:
<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em: 31 mar. de 2020.

BROUSSEAU. G. **Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques.** 1998. Disponível em: <https://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf> Acesso em: 6 maio de 2023.

CIVIERO, P. A. G.; MILANI, R.; LIMA, A. S. (Org.). **Educação matemática crítica: múltiplas possibilidades na formação de professores que ensinam matemática.** Brasília, DF, SBEM Nacional, 2022.

DOMINGUES, H. H. **A demonstração ao longo dos séculos.** Bolema, Rio Claro: UNESP, ano 15 n. 18. Programa de pós graduação em Matemática, 2002, p. 55-67.

ERNEST, P. (Ed.). **The philosophy of mathematics education today**. Cham: Springer, 2018.

EUCLIDES. **OS Elementos**. Introdução e tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. 5ª Edição, Campinas: Editora Unicamp, 2011.

FATORELLI, M. L. **O 'déficit' da previdência é fake: governo transformou contribuições em imposto para tirar verba da seguridade.** Associação Nacional dos Auditores Fiscais da Receita Federal do Brasil (ANFIP-Brasília, 11 janeiro 2019). Disponível em:
< https://www.anfip.org.br/artigo-clipping-e-imprensa/o-deficit-da-previdencia-e-fake/>. Acesso em: 26 mar. de 2019.

FERREIRA, Aurelio Buarque de H. **Novo dicionário básico da língua portuguesa.** Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.

FRANKENSTEIN, M. Educação Matemática Crítica: uma aplicação da Epistemologia de Paulo Freire. Tradução Maria Dolis; Regina L. C de Buriasco. BICUDO, M. A. V. (Org.). **Educação Matemática.** 2a ed. São Paulo: Centauro, 2005, p. 101-140. Disponível em: <https://acervo.paulofreire.org/handle/7891/1640> Acesso em: 15 jun. de 2021

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido.** 48ª reimpressão. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.

GARNICA, A. V. Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre prova rigorosa na formação do professor de matemática. **Zetetiké**. Campinas. v.4, n5, p.7-28, 1996. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646861/13762 Acesso em: 2 fev. 2019

GREIMAS, A. J.; COURTÉS, J. **Dicionário de Semiótica**. Tradução de Alceu Dias Lima et al. São Paulo: Cultrix, 1979.

GUTSTEIN, E. **Reading and writing the world with mathematics**: Toward pedagogy for social justice. New York and London: Routledge, 2006.

HERSH, R. **Some proposals for reviving the philosophy of mathematics**. Advances in Mathematics. n. 31, p. 31-50. Department of Mathematics, University of New México, Albuquerque, 1979.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. 6 ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MOREIRA, P.C.; DAVID M.M.M. S. **A formação matemática do professor:** licenciatura e prática docente escolar. [Coleção Tendências em Educação Matemática]. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MOURA, A. Q. **O encontro entre surdos e ouvintes em cenários para investigação:** das incertezas as possibilidades em aulas de matemática. 2020. 216f Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2020. Disponível em http://hdl.handle.net/11449/192015 Acesso em: 22 set. de 2023.

LIMA, E.L. Qual é a soma dos ângulos (internos e externos) de um polígono (convexo ou não)? **Revista do Professor de Matemática (RPM 19)**, 2010. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/elon/rpm19.pdf Acesso em 15 jan. 2023.

MENEZES G. C.; MARINHO E. M.; FERREIRA, W. M; TORISU, E.M. Coletivo pensante seres-humanos-com-geogebra-e-smartphone: demonstrando a fórmula de Bhaskara. **Revista Polyphonia**, Goiânia, v. 30, n. 2, 2020, p. 223-239. Disponível em: <https://revistas.ufg.br/sv/article/view/65116 >. Acesso em nov. 2023.

PARZYSZ, B. Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE 1. **ACTES XXVIIIème Colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formations des maîtres**. IREM d'Orléans-Tours, mai 2001, p. 99-110. Disponível em: http://www.arpeme.fr/documents/6956B50DB24D474F1693.pdf Acesso em: 29 nov. 2020

PARZYSZ, B. La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ? **Quaderni di Ricerca in Didattica.** G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy), n17, 2006, p. 128-151. Disponível em: https://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/quad17_BParzysz_06.pdf Acesso em: 6 out. de 2020

PIETROPAOLO, R. C. (**Re) significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática.** 2005. 249f. Tese de doutorado. PUC-SP, São Paulo, 2005.

SAVIANI, D. **Escola e Democracia**. 44 ed. Campinas: Autores Associados, 2021.

SÃO PAULO (Município). Secretaria Municipal de Educação. **Currículo da cidade: ensino fundamental**: componente curricular: matemática, 2.ed. São Paulo: SME/ COPED, 2019.

SILVA, J. J. **Filosofias da Matemática.** São Paulo: Editora UNESP, 2007.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. Tradução: Jonei Cerqueira Barbosa. **Revista Bolema.** Rio Claro, v. 13, n. 14, 2000, p. 66-91.

SKOVSMOSE, O. **Um convite à Educação Matemática Crítica**. Tradução de Orlando de Andrade Figueiredo. Campinas: Papirus Ed., 2015. [Edição do Kindle].

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica: a questão da democracia**. Tradução de Abgail Lins; Jussara de Loiola Araújo. Campinas: Papirus Ed., 2017. [Edição do Kindle].

SKOVSMOSE, O. Banality of mathematical expertise. **ZDM Mathematics Education**, 52, 2020a, p. 1187–1197.

SKOVSMOSE, O. Matemática e Ética. **Revista Pesquisa Qualitativa**, [S. l.], v. 8, n. 18, p. 478–502, 2020. DOI: 10.33361/RPQ. 2020. v.8.n.18.341. Disponível em: https://editora.sepq.org.br/rpq/article/view/341. Acesso em: 18 abr. 2021.

SKOVSMOSE, O. **Hacia una filosofía de la educación matemática crítica**. Bogotá: Una empresa docente, 1999. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/673/1/Skovsmose1999Hacia.pdf > Acesso em: 2 fev. de 2022

STRECK, D. R.; REDIN, E.; ZITKOSKI, J. J. (Orgs.). **Dicionário Paulo Freire**. 3a ed., 1a Reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2017.

TORISU, E. **A educação Matemática crítica na visão de Arthur Powell.** Entrevistador: Revista Paranaense de Educação Matemática, 6(11), p. 7-17, 2017.

VILLIERS, M. Papel e função da demonstração no trabalho com sketchpad. **Educação e Matemática**. São Paulo, v. 62, p. 31-36, Mar/Abr. 2001.

ANEXO

Considerações sobre o Produto Final

Sob a perspectiva teórica da Educação Matemática Crítica (EMC) (SKOVSMOSE, 2015) e do desenvolvimento do pensamento geométrico (PARZYSZ, 2006), gostaríamos de apresentar nosso produto final com algumas sugestões e comentários sobre cada atividade.

O objetivo geral do conjunto de atividades é, como já foi reiterada vezes mencionado, propor uma investigação sobre a soma das medidas dos ângulos internos de quadriláteros planos e triângulos, trabalhando gradualmente com argumentações. Esperamos que se crie um contexto que promova *o* diálogo nos moldes do Modelo-CI e que sejam realizadas argumentações perceptivo dedutivas e lógico dedutivas (tal qual descritas na seção 3.2). Além disso, esse conjunto de atividades se caracterizará em cenários para investigação, na medida em que o participante aceite o convite e realize as atividades propostas.

Um ponto importante para que a atividade possa promover a aprendizagem, diz respeito à criação de uma contradição e a superação da mesma por meio de uma demonstração. Nessa direção, nossa investigação transcorreu da seguinte forma, as atividades 1, 2, 3 e 4 fizeram os participantes acreditarem que o valor das somas das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros planos e triângulos eram aproximadamente 360º e 180º (trezentos e sessenta e cento e oitenta graus). Isso ocorreu, pois as medições realizadas com transferidor tinham imprecisões e no *GeoGebra* as medições são feitas por aproximações, e podem variar dependendo do número de casas decimais configuradas. Por outro lado, no item 1 da Atividade 5, é possível verificar visualmente que a soma em questão (no caso dos triângulos) é igual a 180º (cento e oitenta graus), o que dá condições para que o participante formule uma afirmação que negue o que percebeu nas primeiras atividades. Para tentar superar essa contradição, apresentamos no item 2 da Atividade 5, uma demonstração e discutimos esse resultado.

Para que os objetivos de cada item sejam alcançados, sugerimos aos professores que estabeleçam uma comunicação que não centralize correções de erros, mas sim consequências de decisões tomadas. A escuta ativa e a delicadeza das intervenções do professor podem fomentar ainda mais a ação investigadora, por isso é importante que o estudante possa experimentar e conjecturar, e que não seja corrigido de maneira taxativa. Perguntas do tipo: — O que acontece se...? ou — Por que?, entre outras, podem ser feitas e ajudam a desenvolver a reflexão.

Como o conjunto de atividades inicia-se com perguntas abertas, pode acontecer de os estudantes fazerem investigações que saiam do foco desejado, por isso é importante que essas perspectivas sejam acolhidas e questionadas. No entanto, caso o professor ache necessário fazer direcionamentos, centralizando a comunicação na autoridade didática, é importante atentar se o estudante continua agindo reflexivamente ou se está apenas respondendo, por assim dizer, no modo automático, irreflexivamente. Em nossas aplicações, entendemos que a comunicação centrada no professor não alterou a postura investigativa dos estudantes, pois o acolhimento das diversas perspectivas dos aprendizes ocorreu de maneira genuína pelo pesquisador − isso fez com que os participantes se sentissem parte do processo de construção do conhecimento.

A proposta de atividades é composta por sete atividades, e apenas o item 2 da Atividade 5 foi elaborado para que se estabeleça uma comunicação característica da lista de exercícios; os demais itens foram elaborados como potenciais cenários para investigação em Matemática pura. Propomos dois meios de investigação; um empregando lápis, papel, régua e transferidor, e outro utilizando o meio virtual com o uso do *software GeoGebra* para investigar dois objetos geométricos, quadriláteros planos ou triângulos.

Atinente ao desenvolvimento do pensamento geométrico, as atividades 1, 2, 3, 4 foram pensadas em uma abordagem que possibilite argumentações baseadas em medições. Desse modo, o item 1 da Atividade 5 foi pensado para argumentações baseadas na percepção visual; o item 2 da Atividade 5 apresenta uma demonstração e por isso contém argumentação lógico dedutiva com apoio de um desenho. A Atividade 6 foi pensada para que o participante se expresse com uma argumentação lógico dedutiva; já o item 1 da Atividade 7 permite a construção de justificativas baseadas na percepção visual, e o item 2 também permite a construção de justificativas a partir da percepção visual, mas provoca o estudante a fazer uma dedução que relacione os ângulos internos do quadrilátero plano com os internos do triângulo.

Produto Final

Atividade 1

Os objetivos da Atividade 1 são que os estudantes compreendam o que se deseja investigar, verifiquem qual a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero plano para os desenhos realizados. Esperamos que a partir dessa investigação levantem alguma hipótese a respeito da soma em questão. Podem surgir dificuldades no uso do transferidor e ao significado da palavra regularidades, e ainda é esperado que surjam erros na efetuação da medição. Sugerimos que sejam feitos seis desenhos, para que o participante possa pensar em quadriláteros planos diferentes de retângulos, quadrados, losangos, trapézios e paralelogramos.

Atividade 1

Nesta atividade vamos estudar propriedades dos quadriláteros planos com alguns materiais comuns à sala de aula: lápis, borracha, papel sulfite, régua e transferidor.

1) Em cada um dos quadros abaixo desenhe um quadrilátero plano e utilize os materiais disponíveis para encontrar alguma regularidade.

2) O que você analisou nos quadriláteros planos desenhados? Por quê?

3) Você observa alguma regularidade na soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros planos desenhados? Qual?

4) Se outros quadriláteros planos fossem desenhados, o que aconteceria com a soma das medidas dos ângulos internos? Justifique.

5) Qual a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero plano?

6) Qual justificativa para sua resposta à pergunta anterior?

Atividade 2

O intuito da Atividade 2 é que os estudantes possam testar as hipóteses levantadas na Atividade 1. Esperamos se questionem se a soma tem valor exato ou pode variar, e acreditamos que concluam que essa soma varie em torno de 360º, pois o dinamismo inerente ao *software* permite que as hipóteses levantadas sejam testadas em um número muito grande de quadriláteros. A construção do polígono não foi realizada para que as propriedades fossem mantidas, isso significa que dependendo do número de casas decimais configuradas, as medidas dos ângulos e suas respectivas somas mudam para um mesmo quadrilátero. Isso é fundamental para que o participante tome consciência da contradição que desejamos expor no valor da soma.

Atividade 2

Agora, vamos estudar quadriláteros planos com o auxílio de um *software*. Clique no *link*, siga as instruções e responda as perguntas.

Clicando nos pontos azuis localizados nos vértices do quadrilátero plano e movimentando-os com o mouse, é possível formar outros quadriláteros planos. Ao lado direito da tela há uma barra preta com a legenda "Casas Decimais", que deve ser utilizada para mudar o número de casas decimais. Basta clicar no ponto preto sobre a barra e movimentá-lo sobre a barra com o mouse ou com as setas de direção do teclado. Além disso, é possível verificar a medida de cada um dos ângulos internos do quadrilátero planos e sua soma.

Link: https://www.geogebra.org/m/swdyjsrj

1) Faça um teste! Movimente os vértices e movimente o ponto sobre a barra "Casas Decimais" para entender a dinâmica dos movimentos.

2) Em quais situações o quadrilátero plano não é convexo?

3) Em quais situações a figura formada não é um polígono?

4) Ao alterar o número de casas decimais, o que acontece com a soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros planos desenhados na tela? Por que isso acontece?

5) Após analisar os quadriláteros planos que você construiu no *software*, você mantém sua resposta à pergunta 5 da atividade anterior? Por quê?

6) O que é possível afirmar a respeito da soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros planos?

Atividade 3

A Atividade 3 busca investigar a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo usando papel, lápis régua e transferidor, e esperamos que os estudantes levantem hipóteses sobre o valor encontrado. Em nossas aplicações, perguntamos aos participantes se queriam investigar os triângulos nos desenhos realizados no papel ou no *GeoGebra*, e cada um deles escolheu um modo diferente. Sugerimos o desenho de, ao menos, quatro triângulos, pois isso poderia ajudar os estudantes a refletirem sobre a existência de outros triângulos, além dos isósceles, equiláteros e retângulos.

Atividade 3
Uma das maneiras de justificar a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero plano é usando triângulos. Vamos voltar ao papel para estudar essa figura. 1) Em cada um dos quadros abaixo desenhe um triângulo e utilize os materiais disponíveis para verificar alguma regularidade. 2) O que você analisou nos triângulos desenhados? Por quê? 3) Você observa alguma regularidade na soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos? Qual? 4) Se outros triângulos fossem desenhados, o que aconteceria com a soma das medidas dos ângulos internos? Justifique. 5) Qual a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo? 6) Qual sua justificativa para sua resposta à pergunta anterior?

Atividade 4

Os propósitos da atividade 4 são análogos aos da Atividade 2, mas voltados para a investigação da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, ou seja, espera-se que o participante a teste as hipóteses levantadas na Atividade 3 e se questione se a soma tem valor exato ou pode variar.

Atividade 4
Agora, vamos estudar os triângulos com o auxílio de um *software*. Clique no *link,* siga as instruções e responda as perguntas. Clicando nos pontos azuis localizados nos vértices do triângulo e movimentando-os no plano com o *mouse*, é possível formar outros triângulos. Do lado direito da tela há uma barra preta com a legenda “Casas Decimais”, que deve ser utilizada para mudar o número de casas decimais nas medidas e na soma. Basta clicar no ponto preto sobre a barra e movimentá-lo sobre a barra com o *mouse* ou com as setas de direção do teclado.

Além disso, é possível verificar a medida de cada um dos ângulos internos do triângulo e sua soma.

Link: https://www.geogebra.org/m/bzbrytq7

1) Faça um teste! Movimente os vértices e movimente o ponto sobre a barra "Casas Decimais" para entender a dinâmica dos movimentos.

2) Ao alterar o número de casas decimais, o que acontece com a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo? Por que isso acontece?

3) Após analisar os triângulos que você construiu no software, você mantém sua resposta à pergunta 5 da atividade anterior? Por quê?

4) O que é possível afirmar a respeito da soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos?

Atividade 5

A finalidade da Atividade 5 é proporcionar que se desenvolvam argumentos perceptivos visuais sobre o valor da soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos e apresentar uma demonstração para o valor dessa soma. Esperamos que os argumentos elaborados no item 1 sejam no sentido de justificar que o valor da soma em questão é igual a 180º (cento e oitenta graus), o que contribui para o participante tomar consciência da contradição a que o estamos expondo. Nesse sentido, a demonstração, apresentada no item 2, torna-se uma necessidade.

Atividade 5

Vamos a outra forma de investigar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

1) Clique no *Link* e movimente os vértices do triângulo:

https://www.geogebra.org/m/wutfmq6a

a) O que você observa nos ângulos transportados do triângulo sobre o segmento de reta?

b) Você considera que foi feita uma demonstração desse fato?

2) Clique no *Link* e siga as instruções: https://www.geogebra.org/m/bg9hxtgb

a) No vértice B são construídos os ângulos alternos internos dos passos 4 e 6. Ao analisar esses ângulos e o ângulo interno do triângulo com mesmo vértice, o que podemos concluir?

b) Qual a diferença entre esse item e o item 1?

c) Você considera que foi feita uma demonstração desse fato?

Atividade 6

A intenção da Atividade 6 é que o participante expresse aquilo que compreendeu sobre a demonstração da Atividade 5, e dê indícios se compreendeu a conexão existente entre os ângulos internos dos triângulos e dos quadriláteros planos.

Atividade 6

Com tudo o que analisamos e com a experiência adquirida nas atividades anteriores, responda:

1) Qual a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero plano? Justifique.
2) É possível usar a soma dos ângulos internos de um triângulo para justificar a sua resposta à pergunta anterior? Por quê?

Atividade 7

O objetivo da Atividade 7 é proporcionar, a partir da percepção visual de algumas características dos quadriláteros planos, a construção de argumentos concernente à soma das medidas dos ângulos internos desse polígono e da possibilidade de sempre ser decomposto em triângulos. Referente à proposta que fizemos em nossa pesquisa, invertemos o item 1 com o item 2.

Atividade 7

1) Clique no *Link* e siga as instruções:

https://www.geogebra.org/m/fp3pgzz4

a) Ao clicar nos botões Diagonal 1 e Diagonal 2 o que você observa?

b) Se os quadriláteros planos ficam divididos em dois triângulos qual a soma das medidas dos ângulos internos desses quadriláteros?

2) Clique no *Link* e movimente os vértices do quadrilátero plano:

https://www.geogebra.org/m/xmm5ky9q

a) O que você observa nos ângulos transportados dos quadriláteros planos sobre o segmento de reta?

b) Você considera que foi feita uma demonstração desse fato?